

Doação: R\$ 10.000,00

105 - Graduação em Física da UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

EFEITOS DE SUPERPOSIÇÃO EM SISTEMAS DE SÓLITONS*

Dimiter Hadjimichef

FT 14.10
H129 E

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. Michel Emile Marcel Betz e apresentada no Instituto de Física da UFRGS, em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do título de mestre em Física.

Porto Alegre, Setembro 1991

*Trabalho Financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*Para minha mãe Esrealda e em memória do
meu pai Costa*

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer ao meu orientador prof. Michel Betz, pela sugestão do assunto desta dissertação, pela paciência, dedicação e amizade demonstrada ao longo destes anos.

Tenho que agradecer, em particular,

ao Gilberto Thomas e Rudi Gaelzer pela ajuda que me deram em cálculo numérico e computação.

à Maria Beatriz Gay Ducati pela elaboração dos cursos de leitura: Partículas Elementares de Alta Energia I e II que muito me ajudaram (principalmente o “martírio” daquelas listas de exercício).

ao Álvaro Ayala pelas conversas sempre estimulantes em diversos assuntos como História da Ciência, Psicologia e Mecânica Quântica.

ao pessoal da biblioteca pelo excelente serviço de cópias e material bibliográfico.

Finalmente, agradeço ao pessoal da minha sala M206 e em especial à turma do café: Bila, Gibs, Glaucius, Hércules, Ivânio, João F., Leo e Papa por terem-me suportado, e ao meu senso de humor, todos estes anos.

Dimiter Hadjimichef

Many first-rate scientists are Christians, Moslems, Buddhists or Jews, many are Marxists, many are militant atheists, many are like me (...)

(Freeman Dyson, "Infinite in all directions")

Resumo

Quando os núcleons ligados num núcleo se sobrepõem, a sua estrutura interna influencia as propriedades nucleares. Em especial, a estatística dos quanta elementares que constituem o núcleon se torna relevante.

No intuito de investigar estes efeitos no contexto dos modelos de sóliton, considera-se sistemas simples unidimensionais.

No modelo de sine-Gordon, o operador de Mandelstam, que cria sólitons topológicos pontuais, é modificado de maneira a levar em conta a estrutura do sóliton. O operador resultante cria férmions de carga topológica unitária e a sua aplicação sobre o vácuo de Fock produz um estado coerente no qual o campo médio é dado pela solução solitônica clássica.

Pela aplicação sucessiva dos operadores, criando sólitons centrados em pontos diferentes, obtém-se um estado coerente no qual o valor esperado do campo é dado pela soma dos campos médios individuais. No estado de dois sólitons, a energia média de interação possui um comportamento de barreira de potencial, evidenciando a repulsão entre sólitons neste modelo.

Consideramos também um modelo simplificado de sóliton não-topológico constituído de um único férmion confinado por um campo escalar bosônico.

Tanto no modelo topológico como no não-topológico, a variação da norma de um estado de dois sólitons com a distância entre seus centros revela a competição entre as estatísticas fermiônicas e bosônicas. Na região de separação pequena, o aspecto fermiônico prevalece fazendo a norma do estado se aproximar de zero. Na região de separação média a norma excede a unidade devido à superposição dos quanta bosônicos.

Abstract

When the nucleons, bounded inside a nucleus, overlap, their internal structure affects the nuclear properties. In particular, the statistics of the elementary quanta that constitute the nucleon become relevant.

In order to investigate such effects in the context of soliton models, we consider simple one-dimensional systems.

In the sine-Gordon model, the Mandelstam operator, which creates point-like topological solitons, is modified in such a way as to account for the soliton structure. The resulting operator creates fermions with unitary topological charge and its application on the Fock vacuum produces a coherent state in which the mean field is given by the classical solitonic solution.

By successive application of soliton creation operators, centered at different points, one obtains a coherent state in which the mean field is given by the sum of the individual mean fields. In the two-soliton state the mean interaction energy possesses a potential barrier behavior, displaying the repulsion between solitons in this model.

We also consider a simplified non-topological soliton model, composed of one fermion confined in a scalar bosonic field.

In the topological soliton model as well as in the non-topological one, the variation of the norm of the two-soliton state, with the distance between their centers reveals a competition between the fermionic and bosonic statistics. In the small separation region the fermionic aspect prevails, making the norm go to zero. In the intermediate separation region, the norm exceeds unity due to the overlap of the bosonic quanta.

Índice

I	Introdução	5
II	Interações Hadrônicas - Uma Revisão	12
II.1	Cromodinâmica Quântica e Modelos para o Núcleon	12
II.1.1	Introdução	12
II.1.2	O Modelo de Sóliton Não - topológico	14
II.1.3	O Modelo de Skyrme	19
II.1.4	Compatibilidade dos Modelos para o Núcleon com a Física Nuclear	23
II.2	Aspectos Topológicos dos Modelos de Sólitons	28
II.2.1	Topologia e Grupos de Homotopia	28
II.2.2	Sólitons Topológicos	32
II.2.3	Quantização dos Sólitons Topológicos	35
III	Modelo de sine-Gordon e Bosonização	39
III.1	O Modelo Clássico	39
III.2	Bosonização e o Operador de Mandelstam	42
IV	Operador de Criação para Sólitons Topológicos Extensos	49
IV.1	Introdução	49
IV.2	Topologia e Estatística de Fermi	50
IV.3	O Estado Coerente e a Aproximação de Campo Médio	53
V	Efeitos de Superposição em Sistemas de Sólitons Topológicos	59
V.1	Efeitos de Estatística sobre a Norma	59
V.2	Efeitos de Superposição sobre a Energia	65

VI Efeitos de Superposição em Sistemas de Sólitons Não-Topológicos	71
VI.1 Modelo Unidimensional Simples	71
VI.2 Efeitos de Estatística sobre a Norma	74
VII Conclusão e Perspectivas	79
A Comutadores e Outras Relações Operatoriais	84
B Transformadas de Fourier de Funções Não-integráveis	86
C Propriedades Gerais dos Estados Coerentes	89
D Cálculos Complementares com o Operador de Criação de Sólitons	92
D.1 Comutadores entre partes de destruição e criação de $A(x)$ e $A^\dagger(x)$	92
D.2 Avaliação das Funções de Superposição no Cálculo da Norma	93
E Cálculo da Energia de Interação entre dois Sólitons	96
Referências Bibliográficas	101

Capítulo I

Introdução

Acredita-se geralmente que a cromodinâmica quântica (QCD) seja a teoria fundamental das interações fortes [1]. A dificuldade em tratar a física de baixa energia, a partir da QCD, tem motivado a criação de modelos fenomenológicos que incorporam propriedades qualitativas da teoria como o confinamento e a simetria quiral. Vários modelos foram propostos para descrever o núcleon, entre os quais o mais simples é o modelo de quarks não - relativístico [2], no qual os quarks estão ligados num potencial central que cresce infinitamente a grande distância. Um modelo que possibilita um tratamento relativístico dos quarks e incorpora um mecanismo explícito de confinamento é o modelo de sóliton não - topológico [5]-[10]. Neste modelo introduz-se um campo escalar possuindo uma auto-interação não - linear e acoplado ao campo de Dirac dos quarks. No vácuo o campo médio não - nulo confere ao quark uma massa muito grande, enquanto que, em regiões do espaço onde a densidade hadrônica for suficientemente alta ocorre uma transição para valores pequenos do campo médio e da massa dos quarks. Deste modo, os quarks não podem escapar destas regiões conhecidas como “sacolas” ou “sólitons não - topológicos”.

Uma abordagem alternativa foi proposta por G. 't Hooft e E. Witten [11,12] que consiste numa generalização da QCD para um número de cores N_c muito grande. Neste limite, a QCD se reduz a uma teoria de mésons fracamente interagentes, na qual os bárions aparecem como sólitos topológicos. Argumenta-se que, para o valor físico $N_c = 3$, a QCD é aproximadamente equivalente a uma teoria efetiva deste tipo, que evidentemente deve possuir as simetrias presentes na QCD, em especial a importante simetria quiral. O modelo de

Skyrme [13]-[15], que envolve campos de mésons π (e K na sua versão estendida), apresenta estas características e seria a representação de baixa energia da QCD. O sólito topológico de Skyrme (skyrmion) é associado ao núcleon e a seus estados excitados, identificando a sua carga topológica com o número bariônico. A lagrangiana de Skyrme é composta pela lagrangiana do modelo σ não - linear, acrescida de um termo quártico no campo que garante a estabilidade energética do sólito. Witten somou à ação de Skyrme estendida, com simetria quirial $SU(3)$, um termo conhecido como o termo de Wess-Zumino para garantir que processos mediados na QCD pelas anomalias axiais ($K^+K^- \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^-$; $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$; etc.) ocorressem já ao nível clássico no modelo de Skyrme. Ao se efetuar uma rotação adiabática por 2π no skyrmion vê-se que, devido à presença do termo de Wess-Zumino, o funcional de estado troca de sinal, o que demonstra a natureza fermiônica do sólito [23,24].

É inevitável perguntar quais as implicações dos modelos do núcleon acima mencionados para a estrutura dos núcleos complexos. A teoria nuclear usualmente considera o núcleon como um gás de Fermi de núcleons pontuais, possuindo um grande livre caminho médio. Esta descrição leva ao modelo de camadas, cuja validade aproximativa é comprovada por numerosos fatos experimentais. Ao se procurar uma justificativa para este modelo na teoria de muitos corpos, faz-se uso essencial do princípio de exclusão de Pauli, que inibe colisões, pois proíbe que núcleons sejam espalhados em estados já ocupados. No modelo de quarks não - relativístico, foi demonstrado que esta argumentação falha se os núcleons forem suficientemente extensos para se superporem apreciavelmente no núcleon. A razão é que, nesta situação, o princípio de Pauli deve ser aplicado, não ao nível dos núcleons, e sim ao nível dos quarks. Mesmo se o real tamanho do núcleon autorizar o argumento usual, as trocas de quarks entre núcleons diferentes introduzem correções nas propriedades nucleares, por exemplo, nas funções de estrutura medidas no espalhamento lépton-núcleon profundamente inelástico [28].

No modelo de sólito não - topológico, a estatística bosônica dos quanta do campo de confinamento também deve manifestar-se quando os sólitons se sobrepõem. Assim, é interessante investigar de que modo conclusões alcançadas no modelo de quarks não - relativístico são afetadas por este aspecto adicional. Interpretando o campo confinante como associado a um condensado de glúons, pode-se até especular sobre a possibilidade

de observar os efeitos de estatística em questão nas funções de estrutura gluônicas de um núcleon imerso no meio nuclear.

Já no modelo topológico, a tentativa de abordar estas questões esbarra num obstáculo conceitual considerável, qual seja, a emergência do caráter fermiônico do sóliton como conseqüência da topologia do campo fundamental bosônico. Deste modo, os aspectos das estatísticas fermiônica e bosônica não podem ser separados e uma compreensão das suas conseqüências se torna difícil. Mesmo assim, um esforço neste sentido parece imprescindível para o enquadramento do modelo de Skyrme na física nuclear. Na presente dissertação, realizamos alguns passos nesta direção.

Para realizar este tipo de estudo torna-se necessário construir operadores de criação para núcleons, que levem em conta a estrutura dos mesmos. No modelo de quarks não-relativístico, não é difícil escrever um operador que cria três quarks nos estados desejados, cuja parte espacial é descrita por uma função de onda especificada pelo modelo. A extensão para o sóliton não-topológico é simples, pelo menos se os quarks do mar de Dirac forem ignorados: multiplica-se um operador do tipo anterior para os quarks por um operador para o campo confinante que, quando aplicado sobre o vácuo de Fock, cria um estado coerente no qual o campo médio possui a forma prescrita pelo modelo de confinamento. No modelo de Skyrme a construção, a partir do campo bosônico, de um operador que aumente a carga topológica por uma unidade e satisfaça as relações de anticomutação características de um operador de criação fermiônico representa um desafio considerável. Tentativas no sentido de construir operadores de campo para objetos topológicos podem ser encontradas na literatura. Porém, estas construções em geral incorporam somente alguns aspectos globais da configuração de campo associada ao objeto em questão (por exemplo, o seu comportamento assintótico) e não os detalhes de uma solução solitônica das equações de campo. Assim, os operadores obtidos não servem para criar estados quânticos associados a estas soluções. Diante desta situação, faz sentido considerar primeiro um modelo simplificado definido num espaço unidimensional. Deste modo, reduzimos a dificuldade matemática ao eliminarmos o spin e as outras dimensões do problema e, ao avaliarmos os efeitos oriundos da extensão espacial dos sólitons, adquirimos experiência para um cálculo futuro em três dimensões.

O modelo de sine-Gordon [46] é um modelo unidimensional, que possui propriedades topológicas similares ao modelo de Skyrme, onde um operador de criação de sólitons topológicos pontuais foi construído por S. Mandelstam. Este operador conecta o modelo de sine-Gordon, cujo campo fundamental é bosônico, com o modelo de Thirring massivo, cujo campo básico é fermiônico. Além de criar sólitons no modelo de sine-Gordon, este mesmo operador satisfaz relações de anticomutação e a equação de campo do modelo de Thirring. Portanto o sóliton de sine-Gordon pode ser identificado com o férmion de Thirring. Contudo, o sóliton criado pelo operador em questão é puntual, possuindo um perfil de função degrau [42,43].

Uma modificação do operador, para que ele venha a criar sólitons extensos, não está disponível na literatura, embora esta possibilidade esteja sugerida no artigo original de Mandelstam. Este será o nosso primeiro objetivo nesta dissertação. Partimos da suposição que a estrutura do sóliton é especificada por uma solução clássica estática da equação de campo. No intuito de incorporar esta estrutura ao operador de criação, requeremos que o valor esperado do campo bosônico, no estado coerente obtido pela aplicação do operador sobre o vácuo, reproduza a solução em questão. Esta propriedade, junto com as condições, já satisfeitas pelo operador de Mandelstam, que determinam a estatística e a carga topológica associadas, nos fornece um operador de criação apropriado para o estudo de efeitos de superposição em sistemas multisolitônicos.

Em posse dos operadores de criação para sólitons extensos, podemos gerar a partir do vácuo, pela aplicação repetida destes operadores, estados contendo um número arbitrário de sólitons centrados em pontos diferentes. Por construção, estes estados são anti-simétricos frente à troca de qualquer par de sólitons. Como demonstraremos, são estados coerentes nos quais o valor esperado do campo bosônico é dado pela soma dos campos médios associados a cada sóliton. Devido ao caráter não-linear da equação de campo, o campo médio total evidentemente não é solução desta equação. Este resultado não surpreende, já que as interações entre sólitons não estão levadas em conta na construção do estado multisolitônico. Podemos avaliar a natureza destas interações calculando o valor esperado do hamiltoniano de sine-Gordon no estado de dois sólitons, em função da distância entre seus centros. Ao realizar este cálculo, verificamos o caráter de repulsão da interação, que já tinha sido

aduzido por meios alternativos na literatura.

Para estudarmos efeitos de superposição num gás de Fermi, precisamos dos operadores de criação para sólitons com momentum linear bem definido. Estes podem ser construídos por transformação de Fourier dos operadores que criam sólitons localizados no espaço. Um mar de Fermi pode então ser preenchido pela aplicação de um produto dos operadores assim obtidos sobre o vácuo, de maneira usual. Contudo, este processo revela-se computacionalmente árduo pois, ao contrário do que ocorre no modelo de quarks não - relativístico, se usarmos funções de onda gaussianas para os quarks, não é possível separar o movimento do centro de massa nos modelos de sólito. Como demonstra o estudo realizado por G. Krein [26], no contexto do modelo de quarks, as modificações no gás de Fermi de núcleons devidas à estatística dos seus constituintes originam-se de efeitos já presentes na superposição de dois núcleons extensos localizados no espaço. Consequentemente, justifica-se num trabalho exploratório, restringir a análise a este sistema mais simples.

A um nível intuitivo, o papel da estatística dos constituintes num sistema de núcleons compostos pode ser entendido da seguinte maneira. Se considerarmos um tal sistema, a operação que consiste em acrescentar mais um núcleon será afetada pelo fato que os estados nos quais os quanta elementares devem ser colocados já possuem uma certa probabilidade de serem ocupados. Assim, a adição de quanta obedecendo à estatística de Fermi será inibida, enquanto que, para quanta bosônicos ela será estimulada. Se definirmos o operador de criação para núcleons localizados, de maneira tal que o estado obtido pela aplicação deste operador sobre o vácuo seja normalizado, a norma $Z(d)$ do estado, obtido pela aplicação ao anterior de um operador criando um segundo núcleon, será uma função da distância d entre os centros dos núcleons. Primeiramente, a estatística fermiônica dos próprios núcleons implica que a função $Z(d)$ se anula para $d = 0$. Além disso, se o núcleon conter quanta elementares fermiônicos, a estatística destes tenderá a reduzir a norma para $d \neq 0$ também. Os quanta bosônicos terão o efeito oposto, isto é, o de fazer a norma crescer acima da unidade, valor este que ela deverá assumir para d suficientemente grande, pois a estatística dos constituintes se torna irrelevante quando não há superposição dos objetos compostos.

Utilizando o critério exposto no parágrafo anterior, avaliaremos nesta dissertação os efeitos de estatística que ocorrem na superposição de dois sólitons de sine-Gordon. Também

consideraremos um modelo simplificado de sóliton não - topológico unidimensional consistindo num único férmion confinado por um campo escalar. Pode-se considerar este férmion como representando o sistema, não resolvido, de três quarks do modelo realístico. Assim, o modelo simplificado serve para analisar os efeitos associados ao campo confinante, ignorando os efeitos de estatística dos quarks, que seriam semelhantes àqueles já estudados no modelo não - relativístico. Além do interesse intrínseco em avaliar os efeitos bosônicos no modelo não - topológico, este modelo simples permite uma comparação instrutiva dos resultados para a norma $Z(d)$, obtidos nos modelos topológicos e não - topológicos. Como veremos, observa-se uma notável semelhança: o comportamento da função $Z(d)$ no modelo topológico pode ser elucidado por referência ao não - topológico, no qual os efeitos fermiônicos e bosônicos são claramente separáveis.

A divisão dos capítulos será a seguinte. O capítulo II será destinado a uma revisão geral de assuntos relacionados com as interações hadrônicas e importantes no desenvolvimento e na motivação do trabalho. Na primeira parte do capítulo, discutiremos brevemente a QCD, o modelo de sóliton não - topológico de Friedberg e Lee e o modelo de Skyrme. Resumiremos os aspectos essenciais da análise, realizada por G. Krein, dos efeitos de estatística no modelo de quarks não - relativístico. A segunda parte será dedicada aos aspectos topológicos dos modelos de sóliton, enfocando em especial a origem do spin e da estatística fermiônica em modelos cujo campo fundamental é escalar.

No capítulo III apresentaremos o modelo de sine-Gordon e a sua equivalência com o modelo de Thirring massivo, juntamente com o operador de Mandelstam, mostrando a sua atuação nos dois modelos.

No capítulo IV iniciaremos a parte original da dissertação com a modificação do operador de Mandelstam, destinada a levar em conta a estrutura do sóliton. Formularemos a relação que garante a anticomutação do operador modificado. Invocando o princípio variacional, demonstraremos que o campo médio no estado coerente obtido pela aplicação do operador sobre o vácuo deve ser dado pela solução clássica estática do modelo de sine-Gordon. Resolveremos estas relações para determinar completamente o operador de criação para sólitons extensos localizados.

O capítulo V será de aplicações deste operador no cálculo de quantidades associadas ao

estado de dois sólitons, cujos centros estão separados por uma distância d . Analizaremos os efeitos de estatística na norma $Z(d)$ deste estado. Também calcularemos, em função de d , a energia média de interação sóliton-sóliton, confirmando o seu caráter de repulsão .

No capítulo VI construiremos o modelo simples de sóliton não - topológico, calculando de novo a norma $Z(d)$ do estado de dois sólitons. Compararemos os resultados com aqueles obtidos no modelo de sóliton topológico.

O capítulo VII será o de conclusões e perspectivas, seguido de cinco apêndices onde serão apresentados cálculos complementares aos desenvolvidos ao longo da dissertação .

Capítulo II

Interações Hadrônicas - Uma Revisão

II.1 Cromodinâmica Quântica e Modelos para o Núcleon

II.1.1 Introdução

As experiências destes últimos 20 anos, relacionadas com interações fortes, em física de partículas como também em física nuclear, têm demonstrado que os hádrons são partículas que possuem uma estrutura interna. A descoberta da simetria $SU(3)$ dos bárions e mésons serviu de base para criar o modelo de quarks. Mais tarde estes seriam identificados como sendo os reais constituintes dos hádrons pelas experiências de espalhamento profundamente inelástico. Hoje há seis tipos de quarks (u,d,s,c,t,b) conhecidos, genericamente chamados de *sabores*. Os quarks ainda possuem três *cores*, nome dado à carga responsável pela interação forte. Acredita-se que a cromodinâmica quântica (QCD) seja a teoria fundamental que descreve as interações fortes, com o glúon sendo o seu mediador [1]. Diferente da eletrodinâmica quântica (QED), onde a força eletromagnética decresce com a separação dos corpos interagentes, a QCD descreve um tipo de força que aumenta de intensidade a medida que os corpos se afastam e diminui assim que eles se aproximam. Desta forma, na região de alta energia (distâncias pequenas), os quarks encontram-se essencialmente livres, condição conhecida como liberdade assintótica. Este fato permite o uso de técnicas perturbativas para testar a teoria neste limite. Na região de baixas energias (distâncias longas), o que corresponde ao domínio da física nuclear, os quarks apresentam-se em estados fortemente ligados e os hádrons aparecem como singletos de cor, ocorrendo , então , o

fenômeno conhecido como *confinamento de cor*.

Em princípio toda a física nuclear deveria estar contida dentro da cromodinâmica quântica, no entanto, a resolução das equações da QCD torna-se muito difícil, na região de baixa energia, e propriedades básicas na física nuclear como, por exemplo, as massas ou momentos magnéticos dos hádrons não podem ser calculadas. A forma de contornar estas dificuldades consiste em extrair da QCD algumas de suas propriedades qualitativas, como simetria quirial e confinamento, e incorporá-las em modelos fenomenológicos.

A QCD baseia-se no postulado de simetria local (invariância de gauge) $SU(3)$ associada à cor; a sua lagrangiana é:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{4}\text{Tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \quad (\text{II.1})$$

onde $q_\rho^{fc}(x)$ é o campo de quarks, com f sendo o índice de sabor, c o índice de cor, ρ o índice espinorial; γ^μ são as matrizes de Dirac e m a matriz de massa dos quarks. A derivada covariante D_μ é:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_0 G_\mu \quad (\text{II.2})$$

com ∂_μ sendo a derivada espaço-temporal, g_0 a constante de acoplamento e

$$G^\mu(x) = \frac{1}{2}\lambda_a G_a^\mu(x) \quad (\text{II.3})$$

onde G_a^μ ($a = 1, \dots, 8$) é o campo de glúons e λ_a as matrizes de Gell-Mann. O tensor de campo glúônico é dado por:

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G^\nu(x) - \partial^\nu G^\mu(x) - ig_0[G^\mu(x), G^\nu(x)]. \quad (\text{II.4})$$

Pode-se mostrar que a lagrangiana da QCD de 3 sabores (II.1) no chamado limite quirial, isto é, $m_u = m_d = m_s = 0$, possui uma invariância global do tipo $U(3)_L \otimes U(3)_R$, onde L representa esquerdo (left) e R direito (right). Este grupo de simetria pode ser decomposto em componentes vetoriais e axiais obtendo:

$$U(3)_L \otimes U(3)_R \equiv SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (\text{II.5})$$

Pela conhecida anomalia axial de Adler-Bell-Jackiw [3,4] a simetria $U(1)_A$ é quebrada no processo de quantização, não sendo portanto uma simetria da respectiva teoria quântica.

Afora esta anomalia acredita-se que a simetria quiral é espontaneamente quebrada por:

$$U(3)_L \otimes U(3)_R / U(1)_A \longrightarrow SU(3)_V \otimes U(1)_V \quad (\text{II.6})$$

com o aparecimento de oito bósons de Goldstone, sem massa, que formam o octeto pseudoescalar de mésons: $\pi^0, \pi^\pm, \eta, K^0, \bar{K}^0, K^\pm$. A simetria $SU(3)_V$ corresponde à conservação do isospin e da estranheza, nas interações fortes, enquanto que a simetria $U(1)_V$ está relacionada com a conservação do número bariônico.

II.1.2 O Modelo de Sóliton Não - topológico

Na seção anterior foram mencionadas as dificuldades encontradas no manuseio da QCD na região de baixa energia e a conseqüente necessidade de se recorrer a modelos para descrever a física hadrônica. Apresentaremos a seguir um modelo para o núcleon que incorpora a propriedade de confinamento da QCD que é o modelo de sóliton não - topológico.

Na tentativa de descrever o aspecto qualitativo do confinamento, o vácuo da QCD é usualmente comparado a um material dielétrico fazendo-se uma analogia direta com o eletromagnetismo clássico [5]. Sabe-se que o campo elétrico \mathbf{E} é menor dentro do dielétrico do que no vácuo:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{k} \mathbf{E}_0 \quad (\text{II.7})$$

onde \mathbf{E}_0 é o campo no vácuo e k a constante dielétrica do meio, sendo que $k \geq 1$. O fato de $\mathbf{E} \leq \mathbf{E}_0$ é conhecido como blindagem. Pode-se imaginar um meio hipotético onde

$$0 < k \ll 1. \quad (\text{II.8})$$

Neste meio ocorre o fenômeno de antiblindagem. Uma carga elétrica e^+ colocada num certo ponto (fig.II.1) provoca um rompimento do material, criando um buraco. A carga induzida na superfície tem o mesmo sinal que a carga central, pelo efeito de antiblindagem, impedindo o colapso do buraco. Num dielétrico comum ($k > 1$) a carga induzida seria de sinal oposto e o sistema colapsaria. Assim, retornando à discussão do confinamento na cromodinâmica quântica, assumimos que o vácuo da QCD é um meio dielétrico de cor

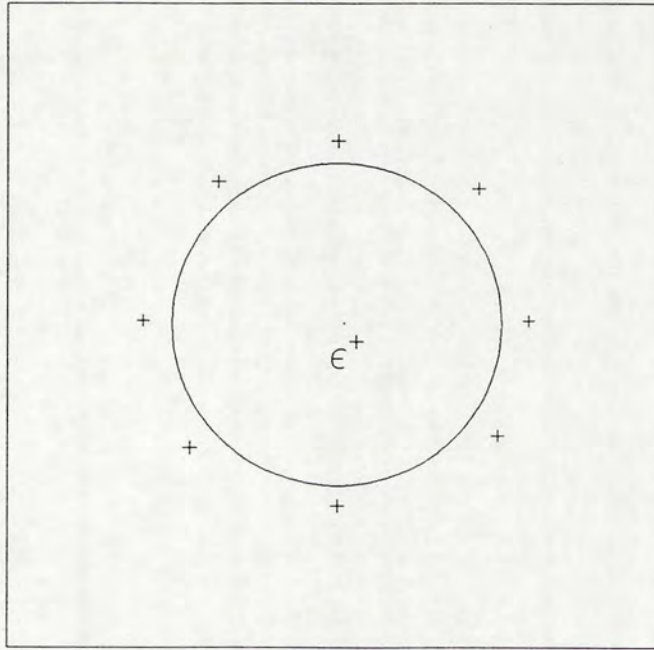


Figura II.1: Modelo do vácuo da QCD

caracterizado por uma constante dielétrica satisfazendo (II.8). Seguindo o argumento feito para o eletromagnetismo podemos dizer que sempre que há quarks ou antiquarks presentes deve existir uma inomogeneidade no espaço ao redor das partículas, criando uma estrutura usualmente denominada de “sacola”.

Na QCD, o vácuo pode ser considerado como um condensado de glúons que surge em consequência das interações não - lineares dos campos de cor. O modelo de sóliton não-topológico [6,7,8,9,10] representa este condensado por um campo escalar σ que assume um valor diferente de zero no vácuo, mas se anula no interior das sacolas. A lagrangiana correspondente pode ser escrita como uma soma de três termos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{q,\sigma}. \quad (\text{II.9})$$

O primeiro termo é o termo de quarks:

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q. \quad (\text{II.10})$$

O segundo termo de (II.9) é associado ao campo σ :

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - U(\sigma), \quad (\text{II.11})$$

Para permitir a renormalização a auto-interação do campo é escolhida da seguinte forma:

$$U(\sigma) = p + \frac{a}{2}\sigma^2 + \frac{b}{6}\sigma^3 + \frac{c}{24}\sigma^4 \quad (\text{II.12})$$

onde as constantes a, b, c, p são parâmetros do modelo. O último termo em (II.9) acopla os quarks ao campo confinante:

$$\mathcal{L}_{q,\sigma} = -g\bar{q}\sigma q. \quad (\text{II.13})$$

O potencial $U(\sigma)$ (fig. II.2) apresenta dois mínimos, um em $\sigma = 0$ e outro em $\sigma = \sigma_{vac}$ com

$$\sigma_{vac} = \frac{3}{2c} \left[-b + (b^2 - \frac{8}{3}ac)^{1/2} \right]. \quad (\text{II.14})$$

Este, sendo o mínimo absoluto, é o valor do campo médio no vácuo; a constante p em (II.12) é determinada pela condição $U(\sigma_{vac}) = 0$. O acoplamento dos quarks ao campo σ introduz uma massa $g\sigma$ que é acrescida à massa m . Os parâmetros do modelo são escolhidos de maneira tal que o acréscimo $g\sigma_{vac}$ à massa do quark no vácuo seja muito grande. Nas regiões onde a densidade de quarks for suficientemente alta, ocorrerá uma transição do mínimo $\sigma = \sigma_{vac}$ para o mínimo $\sigma = 0$, pois o aumento da energia potencial será mais que compensado pela diminuição da massa dos quarks. Os quarks permanecerão confinados nas sacolas onde $\sigma = 0$, minimizando, assim, a sua massa.

Esboçamos a seguir o procedimento seguido na construção de estados hadrônicos a partir da lagrangiana (II.9). Podemos expandir o operador q como:

$$q = \sum_k c_k q_k \quad (\text{II.15})$$

sendo $\{q_k\}$ um conjunto ortonormal completo e arbitrário de funções espinoriais de Dirac e c_k os respectivos operadores de destruição de férmions. O campo escalar pode ser escrito como:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \quad (\text{II.16})$$

onde σ_0 é um campo tipo função - c independente do tempo e σ_1 é um operador. Como preliminar a um cálculo dinâmico mais completo considera-se usualmente a aproximação de

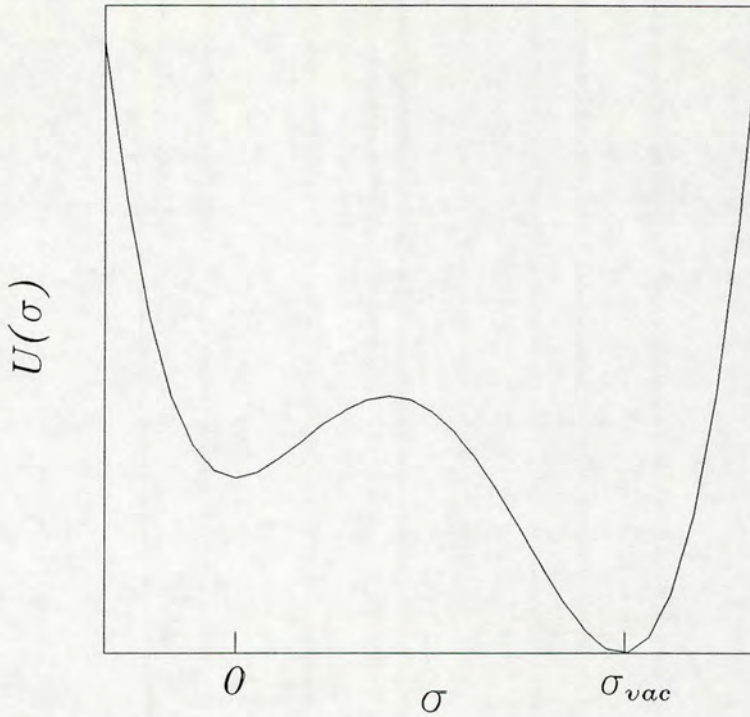


Figura II.2: A forma geral de auto-interação $U(\sigma)$

campo médio, que consiste em desprezar a flutuação quântica σ_1 e em atribuir ao hádron um número fixo de quarks de valência (3 quarks para os núcleons e um par quark-antiquark para os mésons). A minimização do valor esperado do hamiltoniano em relação a q_k e σ_0 leva a um conjunto de equações de movimento acopladas:

$$(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + g\beta\sigma_0)q_i = \epsilon_i q_i \tag{II.17.a}$$

$$\nabla^2\sigma_0 - U'(\sigma_0) = g \sum_{k(\text{valência})} q_k^\dagger \beta q_k \tag{II.17.b}$$

onde $U'(\sigma_0) = dU(\sigma_0)/d\sigma_0$ e $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ são matrizes de Dirac. Os autovalores ϵ_i fornecem as energias dos quarks. Exemplos de resultados [9] obtidos na resolução numérica destas equações estão mostrados nas fig. II.3 e fig. II.4. Verifica-se o comportamento esperado: o campo médio estático σ_0 é pequeno perto da origem (centro da sacola) e tende para o valor σ_{vac} a grande distância; a densidade de quarks decai rapidamente fora da sacola.

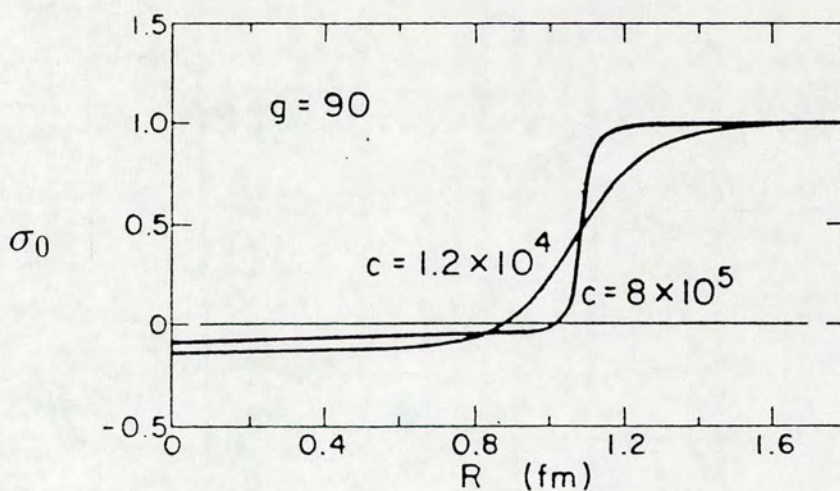


Figura II.3: O campo σ_0 como função da distância do centro do núcleon [9]

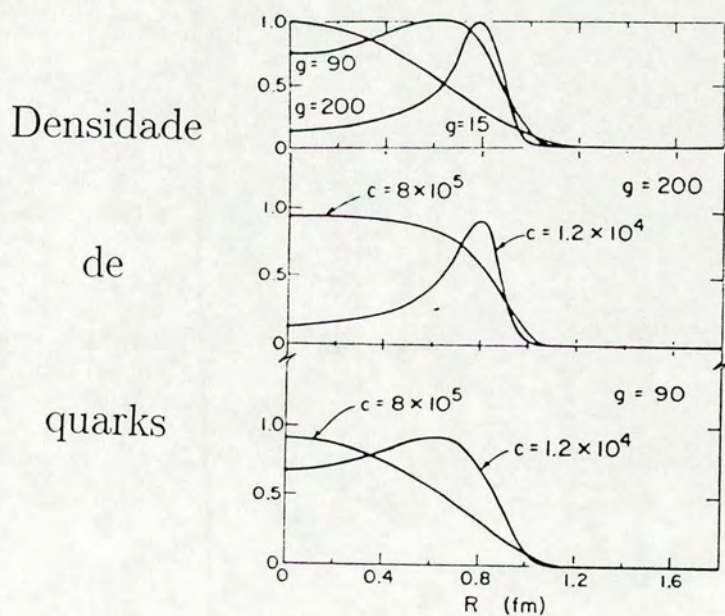


Figura II.4: Densidade de quarks em função da distância do centro do núcleon [9]

II.1.3 O Modelo de Skyrme

A forma fenomenológica de abordar a física hadrônica de baixa energia a partir da QCD, apresentada na seção anterior, era a alternativa existente tendo em vista que uma derivação direta apresentava-se como uma tarefa muito difícil. A constante de acoplamento da QCD varia com a escala de energia e, como foi mencionado, os quarks encontram-se fortemente ligados nos hádrons, impedindo que se use técnicas perturbativas. Para que houvesse qualquer tipo de progresso na investigação das propriedades nucleares extraídas da QCD, era preciso encontrar um parâmetro de expansão que não fosse a constante de acoplamento.

O possível parâmetro de expansão proposto por G. 't Hooft e E. Witten foi o número de cores N_c . A generalização da QCD para o grupo de gauge $SU(N_c)$ apresenta um limite suave quando $N_c \rightarrow \infty$ [11,12]. Os mésons tornam-se não interagentes, neste limite, pelo fato do acoplamento méson-méson g ser da ordem $1/N_c$, portanto pode-se considerar a QCD como representando uma teoria de campos de mésons fracamente interagentes. Witten mostrou que o tamanho e a seção de choque dos bárions independem de N_c enquanto que a sua massa pode ser calculada resultando em:

$$M_B = N_c E_q = \frac{1}{1/N_c} E_q \sim \frac{1}{g} E_q. \quad (\text{II.18})$$

onde E_q é a energia total do quark. Esta dependência da massa na constante de acoplamento é característica de um sóliton. A interpretação final dada por Witten ao mundo de N_c grande é a seguinte: a QCD é reduzida a uma teoria de mésons fracamente interagentes enquanto que os bárions aparecem como sólitons topológicos destes campos mesônicos. O modelo de sóliton topológico proposto por Witten para descrever a física de baixa energia é o modelo de Skyrme [13]-[19].

O modelo de Skyrme $SU(2)$, que corresponde à QCD com dois sabores (u,d), deriva do modelo σ não - linear:

$$\mathcal{L}_{\sigma NL} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma(x)]^2 + \frac{1}{2} [\partial_\mu \boldsymbol{\pi}(x)]^2 \quad (\text{II.19})$$

onde $(\sigma, \boldsymbol{\pi})$ formam um quadruplete de campos escalares que possui o seguinte vínculo:

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = f_\pi^2 \quad (\text{II.20})$$

sendo f_π a constante de decaimento do pión. Este vínculo restringe os campos sobre uma esfera S^3 . A lagrangiana (II.19) pode ser reescrita usando uma matriz do espaço de isospin $SU(2)$ definida por:

$$U(x) = \frac{1}{f_\pi} [\sigma(x) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x)]. \quad (\text{II.21})$$

Obtem-se:

$$\mathcal{L}_{\sigma NL} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger]. \quad (\text{II.22})$$

Para qualquer tempo fixo, $U(\mathbf{x}, t)$ define um mapeamento do espaço tridimensional R^3 à variedade da esfera S^3 , com a condição de contorno natural que garante uma configuração de campo com energia finita, isto é, $\partial_\mu U \rightarrow 0$ quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, ou ainda:

$$U(\mathbf{x}, t)|_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \longrightarrow \text{constante} = U_{vac} = 1 \quad (\text{II.23})$$

onde a constante foi escolhida de maneira a impor que os campos de pions sejam nulos a grande distância. Assim todos os pontos no infinito de R^3 estão mapeados no mesmo ponto, o que permite que R^3 seja compactificado na esfera S^3 . Portanto as configurações de campo são mapeamentos do tipo:

$$U(\mathbf{x}, t) : S^3 \longrightarrow S^3. \quad (\text{II.24})$$

A lagrangiana (II.22) é invariante frente à transformação $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$

$$U(x) \longrightarrow e^{i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}} U(x) e^{i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}} \quad (\text{II.25})$$

onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são vetores constantes. Notamos que a configuração de campo do vácuo (II.23) é invariante frente as transformações (II.25) com $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, que constituem o grupo $SU(2)_V$. Em contrapartida, as transformações com $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, que correspondem a $SU(2)_A$, alteram o vácuo. Assim a simetria $SU(2)_A$ é espontaneamente quebrada e o modelo σ não - linear reproduz o padrão de simetrias da QCD para caso de dois sabores.

A energia associada a uma solução estática é:

$$E_{\sigma NL} = - \int d^3x \mathcal{L}_{\sigma NL}(\mathbf{x}) = \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \text{Tr}[\partial_i U \partial_i U^\dagger]. \quad (\text{II.26})$$

Se fizermos uma troca de escala do tipo $\mathbf{x} = R\mathbf{x}'$, com R representando o tamanho do sólito, obtemos:

$$E_{\sigma NL} = -R \int d^3x' \mathcal{L}_{\sigma NL}(\mathbf{x}') = RE'_{\sigma NL}. \quad (\text{II.27})$$

O mínimo de energia, $E_{\sigma NL} = 0$, é obtido para um objeto de tamanho $R = 0$. Para contornar esta dificuldade, Skyrme acrescentou um termo quártico à lagrangiana $\mathcal{L}_{\sigma NL}$, no sentido de estabilizar o sólito:

$$\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{\sigma NL} + \mathcal{L}_4 \quad (\text{II.28})$$

onde \mathcal{L}_S é a lagrangiana do modelo de Skyrme e

$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[L_\mu, L_\nu]^2 \quad (\text{II.29})$$

sendo $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ e e uma constante adimensional. Assim obtemos:

$$E_S = E_{\sigma NL} + E_4 = \alpha R + \beta/R \quad (\text{II.30})$$

onde α e β são constantes positivas. Desta forma podemos ver que E_S efetivamente possui um mínimo:

$$\begin{aligned} \frac{dE_S}{dR} &= \alpha - \frac{\beta}{R^2} = 0 \\ \frac{d^2E_S}{dR^2} &= 2\frac{\beta}{R^3} > 0. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Em conseqüência do vínculo (II.20), pode-se definir uma corrente conservada, de natureza topológica:

$$B^\mu = \frac{1}{48\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[L_\nu L_\alpha L_\beta] \quad (\text{II.32})$$

juntamente com uma carga topológica:

$$B = \int_{R^3} d^3x B^0. \quad (\text{II.33})$$

Esta carga é um número inteiro que conta quantas vezes o mapeamento (II.24) cobre a variedade de campo S^3 . A associação do modelo de Skyrme com a física nuclear é realizada identificando a corrente topológica com a corrente bariônica e a carga topológica com o

número bariônico. O sólton de Skyrme é o mapeamento U independente do tempo do espaço tridimensional à variedade do $SU(2)$ dada por:

$$U(x) = \exp \left(i\tau \cdot \hat{r}F(r) \right) \quad (\text{II.34})$$

onde a função $F(r)$ é chamada de ângulo quiral. Esta expressão que corresponde à situação de simetria máxima é conhecida pelo nome de hedgehog (ouriço) e é usada para descrever o núcleon. Com o ansatz (II.34) a equação de movimento associada à lagrangiana (II.28) :

$$\partial^\mu L_\mu - \frac{1}{4f_\pi^2 e^2} \partial^\mu [L^\nu, [L_\mu, L_\nu]] = 0 \quad (\text{II.35})$$

fica reduzida a uma equação diferencial não-linear para a função F , que pode ser resolvida numericamente. A massa do sólton estático é dada por:

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{f_\pi^2}{2} \left(F'^2 + 2\frac{s^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2e^2} \frac{s^2}{r^2} \left(2F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right\} \quad (\text{II.36})$$

onde $s = \sin F(r)$. Em qualquer modelo razoável para o núcleon os estados de spin e isospin devem aparecer. No modelo de Skyrme eles aparecem juntos como estados quânticos associados às rotações coletivas do ouriço. Cálculos de quantidades físicas podem ser efetuados avaliando elementos de matriz e valores esperados nestes estados. Usando as massas do núcleon e da ressonância delta como parâmetros de entrada, pode-se determinar as constantes e e f_π e estimar grandezas como, por exemplo, os momentos magnéticos do próton e do neutron e o raio quadrático médio bariônico com uma margem de erro de $\sim 30\%$ [18]:

quantidades físicas	teórico	exper.
μ_p	1.88	2.79
μ_n	-1.32	-1.91
$\langle r \rangle_B^{1/2}$.59 fm	.72 fm

O acordo com os dados experimentais pode ser melhorado pela inclusão de várias correções [20]-[22].

O modelo de Skyrme pode ser generalizado para corresponder ao caso de três sabores (u,d,s), introduzindo a matriz de campo $SU(3)$:

$$U(x) = \exp \left(i\lambda_a \phi_a(x)/f_\pi \right) \quad (\text{II.37})$$

onde $\phi_a(x)$ ($a = 1 \dots 8$) representa o octeto pseudo-escalar de mésons π , K e η . Witten observou [23,24] que a lagrangiana do modelo σ não-linear possuía uma simetria global do tipo $U(3)_L \otimes U(3)_R$ e as duas simetrias discretas:

$$U(\mathbf{x}, t) \longrightarrow U(-\mathbf{x}, t) \quad (\text{II.38.a})$$

$$U(\mathbf{x}, t) \longrightarrow U^\dagger(\mathbf{x}, t). \quad (\text{II.38.b})$$

A simetria (II.38.b) proíbe processos do tipo:

$$K^+K^- \longrightarrow \pi^+\pi^0\pi^- \quad (\text{II.39.a})$$

$$\eta\pi^0 \longrightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \quad (\text{II.39.b})$$

onde um número par de mésons pseudo-escalares decaem num número ímpar, ou vice-versa. Os processos (II.39) são mediados, na QCD, pelas anomalias e são excluídos do modelo σ não-linear. Witten acrescentou às equações de movimento um termo invariante $U(3)_L \otimes U(3)_R$, mas que quebrava (II.38.a) e (II.38.b) separadamente, preservando o seu produto (que é a operação de paridade para um méson pseudo-escalar na QCD). A ação correspondente que realiza esta tarefa sobre as equações de movimento é o chamado termo de Wess-Zumino:

$$S_{WZ} = -\frac{iN_c}{240\pi^2} \int_{\Sigma_5} d^5x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[L_\mu L_\nu L_\alpha L_\beta L_\gamma] \quad (\text{II.40})$$

onde Σ_5 é uma superfície penta-dimensional. O termo de Wess-Zumino também será responsável pelo caráter fermiônico do skyrmion, a ser visto mais adiante.

II.1.4 Compatibilidade dos Modelos para o Núcleon com a Física Nuclear

A forte evidência experimental (números mágicos, grande livre caminho médio para núcleons, espalhamento quase-livre, etc.) indica que o modelo de camadas [25] é uma boa aproximação para a estrutura dos núcleos. Muito da teoria nuclear estabelecida considera o núcleo como um gás de Fermi de núcleons pontuais. No entanto o fato do núcleon ser composto por quarks confinados em sacolas com raios da ordem de 1 fm, ou mesmo ser representado por um sóliton topológico extenso, sugere o aparecimento de efeitos de

superposição nas diversas quantidades físicas, já que a distância média entre núcleons na matéria nuclear é da ordem de 2 fm. Independentemente de possíveis efeitos dinâmicos, o caráter de gás de Fermi dos sistemas nucleares deve ser alterado por efeitos de estatística dos quanta elementares constituindo os núcleons, uma vez que estes podem se superpor. No modelo de quarks, o caráter fermiônico e o princípio de Pauli são transferidos do nível nucleônico para o nível dos quarks, com conseqüências já apontadas na literatura [26,27,28].

Ao se considerar o núcleon composto por apenas três quarks sem impor nenhum mecanismo específico de confinamento pode-se mostrar que a relação de anticomutação entre os operadores de criação e destruição do núcleon é modificada. Para um núcleon puntual, quantizado numa caixa finita com condições de contorno periódicas, temos

$$\{b_i, b_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (\text{II.41})$$

onde o subscrito i indica os números quânticos de momentum (\mathbf{p}_i), spin (m_i) e isospin (t_i) do núcleon e δ_{ij} é a delta de Kronecker. Entretanto se considerarmos o núcleon como uma partícula extensa, isto é, composta de três quarks o seu operador de criação seria dado por:

$$b_i^\dagger = N_i \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{18}} T_i^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{p}_i, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3} \prod_{j=1}^3 \varphi(\mathbf{k}_j) q_{\alpha_j}^j \dagger(\mathbf{k}_j) \quad (\text{II.42})$$

onde $j = 1, 2, 3$ é o índice de cor, α_j representa os números quânticos de spin e isospin do quark de cor j e os $T_i^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ são os coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(4)$. A função de onda de um quark no espaço de momentum é $\varphi(\mathbf{k})$ e a constante N_i garante a normalização do estado de um núcleon. A partir das relações de anticomutação usuais dos operadores de criação e destruição para quarks, não é muito difícil mostrar que:

$$\{b_i, b_j^\dagger\} = \delta_{ij} - \Delta_{ij} \quad (\text{II.43})$$

onde Δ_{ij} é um operador que leva em conta o fato do núcleon ser composto. O estado de gás de Fermi de N núcleons é definido assim:

$$|N\rangle = \prod_{i=1}^N b_i^\dagger |0\rangle. \quad (\text{II.44})$$

Para estimar a degradação do estado de partícula única na matéria nuclear, devido à estrutura interna do núcleon, consideramos um estado de N partículas normalizado com

no máximo um estado não ocupado em comparação ao estado fundamental e construímos um estado de $(N + 1)$ partículas, criando uma partícula extra no buraco ou na superfície do mar de Fermi. A norma deste estado é dada por :

$$Z_{iN} = \frac{\langle N | b_i b_i^\dagger | N \rangle}{\langle N | N \rangle}. \quad (\text{II.45})$$

Para núcleons pontuais $Z_{iN} = 1$, entretanto para núcleons extensos temos $Z_{iN} \neq 1$. A modificação na norma é causada pelo fato de ser possível que dois núcleons venham a se superpor e a estatística dos quarks modificar as suas estruturas. Em particular as componentes das funções de onda de dois núcleons são destruídas quando todos os números quânticos dos quarks coincidirem. O quanto Z_{iN} se afastar da unidade é a medida da degradação da natureza de partícula única do estado i .

Como preliminar ao estudo do gás de Fermi resumido acima, pode-se investigar os efeitos de estatística produzidos pela superposição parcial de dois núcleons extensos localizados. Define-se um operador de criação para um núcleon centrado em \mathbf{R}_i :

$$\psi_i^\dagger = \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{18}} T_i^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \int \prod_{j=1}^3 \varphi(\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_i) q_{\alpha_j}^\dagger(\mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j \quad (\text{II.46})$$

onde $\varphi(\mathbf{r})$ é a transformada de Fourier de $\varphi(\mathbf{k})$. Para este operador:

$$\{\psi_i, \psi_j^\dagger\} = \bar{\delta}_{ij} - \bar{\Delta}_{ij} \quad (\text{II.47})$$

onde $\bar{\Delta}_{ij}$ é um operador e

$$\bar{\delta}_{ij} = \delta_{m_i m_j} \delta_{t_i t_j} (I_{ij})^3 \quad (\text{II.48})$$

com

$$I_{ij} = \int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j). \quad (\text{II.49})$$

A presença deste “overlap” na relação (II.47) deve-se ao fato que o centro-de-massa do núcleon não foi separado na construção (II.46). Mais precisamente, já que os quarks se movem independentemente, o centro-de-massa flutua em torno do ponto \mathbf{R}_i no estado de um núcleon. Sendo o estado de um núcleon:

$$|i\rangle = \psi_i^\dagger |0\rangle \quad (\text{II.50})$$

normalizado, a norma do estado de dois núcleons é

$$Z_{ij} = \langle i | \psi_j \psi_j^\dagger | i \rangle = \bar{\delta}_{ii} \bar{\delta}_{jj} - \bar{\delta}_{ij} \bar{\delta}_{ij} - \langle i | \bar{\Delta}_{jj} | i \rangle. \quad (\text{II.51})$$

O último termo nesta expressão pode ser calculado a partir das definições (II.46) e (II.49); obtemos então :

$$Z_{ij} = 1 - \delta_{m_i m_j} \delta_{t_i t_j} (I_{ij})^6 - 3(\Upsilon_1 I_{ij}^2 - \Upsilon_2 I_{ij}^4) \quad (\text{II.52})$$

onde

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{(18)^2} \sum_{\alpha, \beta} T_i^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_i^{\alpha_1 \alpha_2 \beta_3} T_j^{\beta_1 \beta_2 \beta_3} T_j^{\beta_1 \beta_2 \alpha_3} \quad (\text{II.53.a})$$

$$\Upsilon_2 = \frac{1}{(18)^2} \sum_{\alpha, \beta} T_i^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_i^{\beta_1 \beta_2 \alpha_3} T_j^{\alpha_1 \alpha_2 \beta_3} T_j^{\beta_1 \beta_2 \beta_3}. \quad (\text{II.53.b})$$

Fica claro, a partir das expressões acima, que os termos envolvendo Υ_1 e Υ_2 correspondem respectivamente à troca de um par de quarks e de dois pares entre os núcleons; já o segundo termo de (II.52) corresponde à troca dos três pares de quarks ou, equivalentemente, à troca dos dois núcleons. Para um sistema de dois núcleons em estados de spin e isospin idênticos ($m_i = m_j$; $t_i = t_j$), obtemos $\Upsilon_1 = \Upsilon_2 = 31/81$. Apresentamos na fig. II.5 um cálculo [26] da norma Z_{ij} para este caso, em função de d/\bar{r} , onde $d = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|$ é a distância entre os dois núcleons e \bar{r}^2 é o raio quadrático médio. Utilizou-se uma função de onda gaussiana para os quarks:

$$\varphi(\mathbf{r}) = (\pi r_0^2)^{-3/4} \exp(-\mathbf{r}^2/2r_0^2) \quad (\text{II.54})$$

onde $r_0^2 = 2\bar{r}^2/3$. Com esta escolha obtemos:

$$I_{ij} = \exp(-d^2/4r_0^2). \quad (\text{II.55})$$

O resultado obtido desprezando o termo de (II.51) envolvendo $\bar{\Delta}_{jj}$ também está mostrado na figura. A partir da interpretação das contribuições em (II.52) dada acima, podemos ver que este termo representa o efeito da estatística dos quarks sobre a norma. Evidentemente, quanto menor o raio do núcleon, tanto menor a distância entre núcleons além da qual os efeitos de superposição se tornam desprezíveis. Como demonstrado nas referências [26,27],

para $\bar{r} \gtrsim .7$ fm, estes efeitos alteram significativamente o caráter de gás de Fermi da matéria nuclear.

O principal objetivo do presente trabalho consiste na investigação de efeitos semelhantes nos modelos de sólton do núcleon. No caso do modelo não - topológico, os efeitos de estatística dos quarks também estarão presentes; além disso, efeitos da estatística de Bose dos quanta do campo confinante devem aparecer. No que diz respeito ao modelo topológico, a situação é muito menos transparente, já que os quanta elementares são bósons, mas a topologia do campo confere ao sólton um caráter fermiônico. A construção de um operador de criação para um sólton extenso constitui em si um problema não - trivial, raramente abordado na literatura [29,30]. Por estas razões , o presente trabalho considera modelos simplificados unidimensionais e se limita ao estudo dos efeitos de superposição num sistema de dois sólitons localizados.

Já que a estatística desempenha um papel fundamental neste estudo revisaremos, na próxima seção , as considerações topológicas que conduzem à quantização fermiônica de sólitons em teorias de campos escalares.

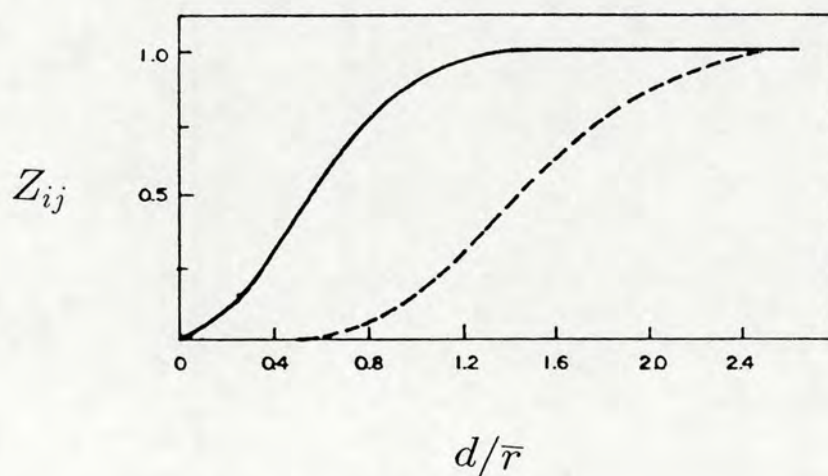


Figura II.5: Resultados para Z_{ij} em função de d/\bar{r} , onde d é a distância entre os núcleons e \bar{r}^2 é o *rqm* da distribuição de quarks num núcleon. As curvas contínua e tracejada são para $\bar{\Delta}_{jj} = 0$ e $\bar{\Delta}_{jj} \neq 0$, respectivamente [23].

II.2 Aspectos Topológicos dos Modelos de Sólitons

II.2.1 Topologia e Grupos de Homotopia

Às vezes é dito que a topologia é a área da matemática que estuda as propriedades comuns de *figuras* que podem ser *deformadas continuamente* umas nas outras, como se estas fossem feitas de borracha. Estas propriedades separam as figuras em classes distintas, existindo, entre todos os membros de uma mesma classe, uma relação de equivalência chamada de *homotopia*. Por exemplo: um cubo pode ser deformado continuamente numa pirâmide e a pirâmide deformada continuamente numa esfera. Estas três figuras são topologicamente equivalentes e dizemos que elas estão na mesma classe homotópica; entretanto um anel (toro) não pode ser transformado em nenhuma destas figuras através de deformações contínuas, pelo fato de possuir um furo central. Ao se definir formalmente uma operação de produto entre as classes homotópicas pode-se mostrar que os seus conjuntos possuem uma estrutura de grupo, os chamados *grupos homotópicos*. A estrutura desses grupos, dentro do contexto da teoria de campos não - lineares, será fundamental para, em primeiro lugar, determinar se uma certa teoria admite a existência de sólitons topológicos e, em segundo lugar, indicar que tipo de estatística tais sólitons obedecerão . Assim o estudo que faremos de sólitons topológicos nos conduz a uma passagem preliminar por esses tópicos introdutórios de topologia [31]-[33].

Concentraremos, temporariamente, a nossa atenção nas classes homotópicas associadas a curvas fechadas num plano. Será feita a seguir a generalização para um espaço n -dimensional onde os objetos centrais são hiper-superfícies fechadas de dimensão menor ou igual a n . Consideremos um plano possuindo um furo e algumas curvas fechadas f neste plano fig. II.6, tendo como ponto de base o ponto y_0 . Dizemos que duas curvas são homotópicas se *uma pode ser deformada na outra de maneira contínua*, usando o símbolo \sim para dizer *é homotópica a* . Desta forma é possível concluir que $f_1 \sim f_2$ e $f_3 \sim f_4$, com as curvas f_1 e f_2 percorrendo uma volta ao redor do furo. Também pode-se ver que f_1 (ou f_2) $\not\sim f_3$ (ou f_4). A importância em destacar o número de voltas percorridas ao redor do furo está no fato de que se considerarmos uma outra curva, f_5 digamos, que con-

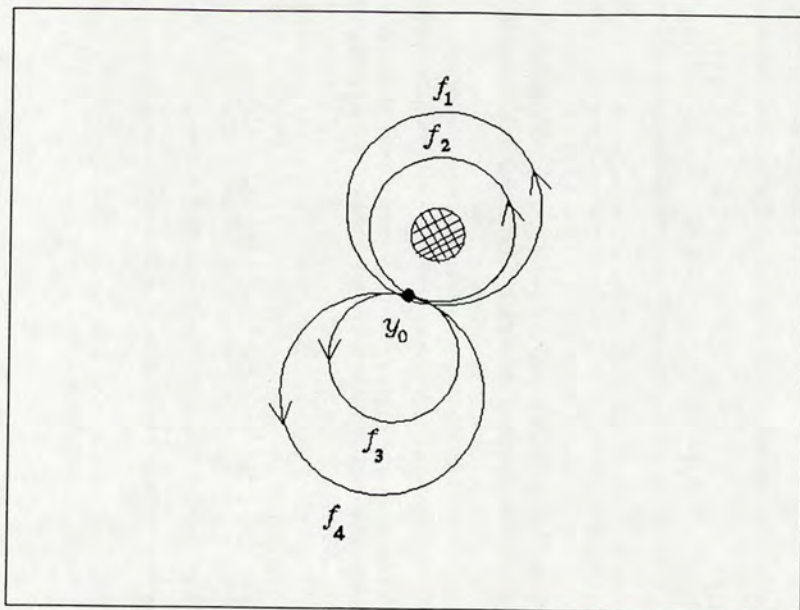


Figura II.6: Definição de homotopia

tornasse o furo duas ou mais vezes, esta curva não seria homotópica a f_1 e f_2 , pois não haveria meios de conectá-las por uma deformação contínua. A cada volta pode-se atribuir um número inteiro chamado de *winding number* que conta o número de voltas que as curvas correspondentes percorrem em torno do furo. Cabe mencionar que as curvas f_3 e f_4 são chamadas de triviais, pois podem ser contraídas até o ponto y_0 .

Formalmente, definimos homotopia da seguinte maneira : sejam X e Y dois espaços topológicos; consideramos duas aplicações contínuas:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ g : X &\longrightarrow Y. \end{aligned} \tag{II.56}$$

Seja $I \equiv [0, 1]$; diremos que f e g estão relacionadas por uma homotopia h (ou $f \sim g$) se $\exists h : X \times I \longrightarrow Y$, tal que $h(x, s)$, com $x \in X$ e $s \in I$, é contínua e tal que $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= f(x) \\ h(x, 1) &= g(x). \end{aligned} \tag{II.57}$$

Vamos denotar por $[f]$ a classe homotópica que possui f como elemento representativo.

Através da definição de uma lei de multiplicação entre mapeamentos, é possível atribuir ao conjunto das classes de homotopia uma estrutura de grupo. Optamos aqui por apenas enunciar algumas definições importantes, nesta construção, e indicar o procedimento restante. Estas definições são também importantes para a conexão da teoria de homotopia com a teoria de campos. Consideremos agora uma curva fechada f , contínua, pertencente ao espaço topológico Y e tendo y_0 como ponto de referência: $f : I \rightarrow Y$, tal que $f(0) = f(1) = y_0$. Representamos por ∂I a fronteira de I (os pontos 0 e 1) e por $F^1(Y, y_0)$ o conjunto das curvas definidas acima fig. II.7, ou seja,

$$F^1(Y, y_0) \equiv \{f \mid f : (I, \partial I) \rightarrow (Y, y_0)\}. \tag{II.58}$$

O conjunto das classes de homotopia das curvas fechadas:

$$\Pi_1(Y, y_0) \equiv \{[f] \mid f \in F^1(Y, y_0)\} \tag{II.59}$$

é chamado de grupo fundamental do espaço topológico Y , com base em y_0 .

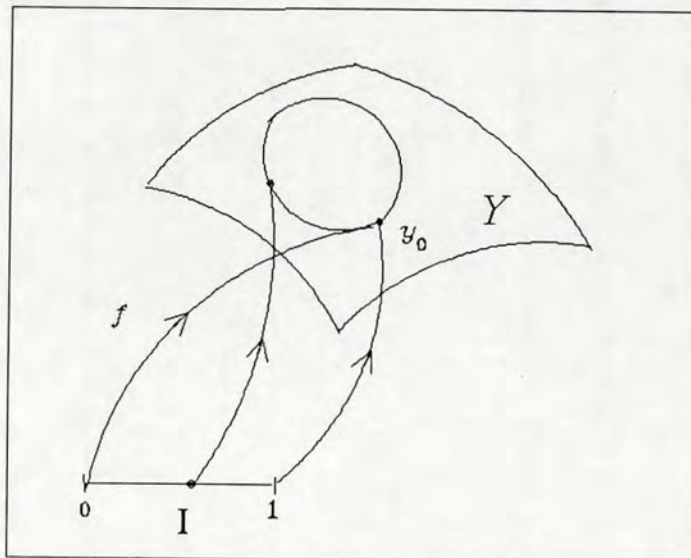


Figura II.7: Representação gráfica de uma curva de $F^1(Y, y_0)$

A generalização para uma hipersuperfície n -dimensional imersa no espaço topológico Y é direta:

$$F^n(Y, y_0) \equiv \{f \mid f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (Y, y_0)\} \tag{II.60.a}$$

$$\Pi_n(Y, y_0) \equiv \{[f] \mid f \in F^n(Y, y_0)\} \tag{II.60.b}$$

onde I^n é um n -cubo unitário e ∂I^n a sua fronteira. A estrutura de grupo de $\Pi_n(Y, y_0)$ pode ser estabelecida começando pela definição do produto em $F^n(Y, y_0)$, fig. II.8. Sejam $f_1, f_2 \in F^n(Y, y_0)$; o seu produto é definido por:

$$f_1 * f_2(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{II.61}$$

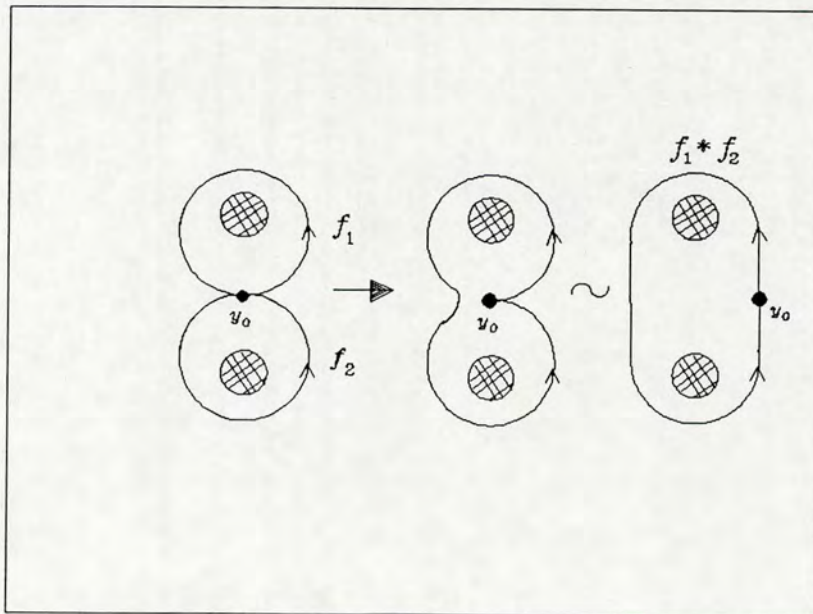


Figura II.8: Multiplicação de funções

Para mostrar que o produto em $F^n(Y, y_0)$ induz um produto em $\Pi_n(Y, y_0)$, precisamos provar que $f_1 * f_2$ sempre pertence à mesma classe de homotopia, sejam quais forem as aplicações representativas escolhidas em $[f_1]$ e $[f_2]$. Para tanto, sejam $f_k \sim f'_k$ ($k = 1, 2$);

isto implica que $\exists h_k(t, s)$ tal que $h_k(t, 0) = f_k(t)$; $h_k(t, 1) = f'_k(t)$. Pode-se definir uma função $H(t, s)$ por:

$$H(t, s) = \begin{cases} h_1(2t_1, t_2, \dots, t_n; s) & \text{se } t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ h_2(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n; s) & \text{se } t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

Vê-se facilmente que $H(t, s)$ é contínua e tal que $H(t, 0) = f_1 * f_2$, $H(t, 1) = f'_1 * f'_2$; portanto constitui uma homotopia entre estes produtos. As propriedades de grupo dos conjuntos $\Pi_n(Y, y_0)$, frente à operação de multiplicação definida acima, apresentamos a seguir sem demonstração :

- a) associatividade: $([f_1] * [f_2]) * [f_3] = [f_1] * ([f_2] * [f_3])$
- b) existência de identidade: $e * [f] = [f]$, onde $e \equiv [y_0]$
- c) existência de elemento inverso: $[f] * [f^{-1}] = e$.

Tendo em vista a aplicação futura destes conceitos nos modelos de sólitons topológicos, é conveniente antecipar alguns resultados envolvendo o cálculo de Π_k para a variedade correspondente a n -esfera S^n . Neste cálculo relaciona-se, através de isomorfismos (cujo símbolo é \approx), o grupo Π_n com outros grupos, com os seguintes resultados [32,33]:

$$\begin{aligned} \Pi_k(S^n) &\approx 0 && \text{para } k < n \\ \Pi_n(S^n) &\approx \Pi_3(S^2) \approx \mathbf{Z} \\ \Pi_4(S^3) &\approx \mathbf{Z}_2 \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

onde 0 representa o grupo trivial de um único elemento; \mathbf{Z} é o grupo dos números inteiros com a adição como operação fundamental e \mathbf{Z}_2 é o grupo dos números inteiros módulo 2, isto é, possui apenas dois elementos.

II.2.2 Sólitons Topológicos

Passaremos agora a uma aplicação dos assuntos desenvolvidos na seção anterior. A nossa intenção é de mostrar que a teoria da homotopia, quando aplicada à teoria de campos não-lineares, relaciona o problema da existência de objetos conservados durante a evolução temporal com a estrutura do grupo $\Pi_n(\Phi)$, onde n é o número de dimensões espaciais e Φ a

variedade do campo. Esta conservação topológica sugere fortemente a identificação destes objetos, denominados *sólitons topológicos*, com partículas estáveis [34]-[36].

Inicialmente vamos considerar um campo clássico $\phi(x)$ num espaço-tempo $\{x\}$ d - dimensional plano como sendo um mapeamento contínuo de $\{x\}$ no espaço topológico Φ localmente conectado. Seja $X = \{\mathbf{x}\} = \{x \mid t = \text{const}\}$ o espaço ordinário de dimensão $n = d - 1$. Definimos o espaço de configuração Q como o conjunto de todos os mapeamentos contínuos $\phi : X \longrightarrow \Phi$, que possuem a seguinte propriedade: $\phi(\mathbf{x}) \longrightarrow \phi_0$, quando $|\mathbf{x}| \longrightarrow \infty$, sendo ϕ_0 um ponto fixo de Φ .

Sejam duas configurações de campo $\phi_1(\mathbf{x})$ e $\phi_2(\mathbf{x})$, em Q ; utilizando a definição de homotopia, da seção anterior, diremos que $\phi_1(\mathbf{x}) \sim \phi_2(\mathbf{x})$ se existir um mapeamento contínuo do tipo $\phi(\mathbf{x}, t) : X \times I \longrightarrow \Phi$ tal que:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, 0) &= \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi(\mathbf{x}, 1) &= \phi_2(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{II.64}$$

Em outras palavras se o parâmetro t representar o tempo, então $\phi_1(\mathbf{x})$ e $\phi_2(\mathbf{x})$ representam duas configurações que o campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ pode assumir em instantes diferentes da sua evolução.

O espaço Q pode ser ou não conectado. Se há mais de uma componente, denotadas por Q_i , dizemos que a teoria *admite a existência de sólitons topológicos*, ou seja, uma configuração pertencente inicialmente à componente $Q_{i \neq 0}$ não pode evoluir para a componente Q_0 do vácuo e é portanto topologicamente estável. Assim o espaço Q está dividido em setores tais que cada Q_i forma uma classe homotópica. Podemos verificar que as classes de homotopia de Q formam um grupo ao usar a definição (II.61) do produto de aplicações para representar a superposição de sólitons num estado composto. Começando a partir de qualquer $\phi_1(\mathbf{x}) \in Q_1$ e $\phi_2(\mathbf{x}) \in Q_2$ realizamos primeiro transformações homotópicas de translação sobre estas configurações, de maneira a conseguir:

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{x}) &= \phi_0 \quad \text{se } x_1 \geq 0 \\ \phi_2(\mathbf{x}) &= \phi_0 \quad \text{se } x_1 \leq 0. \end{aligned} \tag{II.65}$$

Construimos então o produto de campos da seguinte maneira:

$$\phi_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} \phi_1(\mathbf{x}) & \text{se } x_1 \leq 0 \\ \phi_2(\mathbf{x}) & \text{se } x_1 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

Assim a classe homotópica Q_3 de ϕ_3 pode ser considerada como o produto de Q_1 e Q_2 :

$$Q_3 = Q_1 + Q_2. \quad (\text{II.67})$$

É interessante observar que os números quânticos associados ao estado composto podem ser calculados como as somas dos números quânticos de cada sóliton individual. Isto é garantido por um corolário [37] que diz: pelo fato de $\Pi_n(\Phi, \phi_0)$, com $n > 1$, ser abeliano então se ele for gerado finitamente seus elementos podem ser enumerados; ou seja, podemos associar, a cada classe homotópica Q_i , um conjunto de números inteiros, conservados e aditivos:

$$N_i = \{N_i^j ; j = 1, 2, \dots\}. \quad (\text{II.68})$$

Por exemplo, associada à composição (II.66) teríamos a soma:

$$N_3 = \{N_1^j + N_2^j ; j = 1, 2, \dots\} \equiv N_1 + N_2. \quad (\text{II.69})$$

Os resultados (II.63) podem ser aplicados aos modelos conhecidos que mapeiam o espaço usual de n dimensões na esfera S^n . Por exemplo, no modelo de sine-Gordon o espaço é unidimensional e a variedade de campo é $\Phi = S^1$

$$\phi : \mathbf{R}^1 \longrightarrow S^1. \quad (\text{II.70})$$

O grupo homotópico correspondente é $\Pi_1(S^1) \approx \mathbf{Z}$, revelando que existem sólitons. O espaço de configuração está dividido em setores, cada um destes sendo associado a um número inteiro de \mathbf{Z} . Em duas e três dimensões obtemos resultados semelhantes: $\Pi_2(S^2)$, $\Pi_3(S^3)$, ambos isomórficos a \mathbf{Z} . No primeiro caso aparecem os objetos conhecidos como anyons [38] enquanto que no segundo surge o skyrmion, como pode ser visto a partir de (II.24).

Nos casos considerados acima, o conjunto N_i se reduz a um único número cuja interpretação é a seguinte: ele conta quantas vezes a variedade Φ é coberta pela configuração

do campo. Por exemplo, no modelo de sine-Gordon, N_i indica o número de voltas percorridas sobre o círculo pelo campo $\phi(x, t)$ quando x varia de $-\infty$ a ∞ . Neste caso, N_i pode ser identificado com o *winding number*, definido antes. Por extensão esta nomenclatura é utilizada para $n > 1$. Desta forma o setor Q_0 contem as configurações de campo, com *winding number* 0, homotópicas ao estado de vácuo; o setor Q_1 as configurações com *winding number* igual a um e assim sucessivamente. O *winding number* do modelo de Skyrme é o número bariônico (II.33).

II.2.3 Quantização dos Sólitons Topológicos

Consideremos agora a teoria quântica de campos onde os operadores que representam as variáveis dinâmicas atuam sobre os funcionais de estado $\psi[\phi(\mathbf{x})](t)$ associando um número complexo, ou *amplitude*, a cada função de campo $\phi(\mathbf{x})$. Utilizando apenas argumentos topológicos é possível mostrar que, apesar do campo fundamental $\phi(x)$ ser bosônico, obedecendo a relações de comutação canônicas, o sóliton que emerge da não-linearidade deste campo pode admitir uma estatística diferente da bosônica. Este fato origina da possibilidade de quantizar a teoria de modo que o funcional de estado admita múltiplos valores. Tal quantização é chamada de *quantização plurívoca* (ou de múltiplos valores) e está relacionada com a bosonização, a ser apresentada no próximo capítulo.

Seja $T(s)$, $0 \leq s \leq 1$, uma transformação contínua sobre ϕ , tal que

$$T(0)\phi = \phi. \quad (\text{II.71})$$

Para ϕ dado, $T(s)\phi$ descreve um caminho em que Q , com origem em ϕ . Uma trajetória fechada em Q ocorre quando:

$$T(0)\phi = T(1)\phi. \quad (\text{II.72})$$

O funcional de estado é dito monovalente quando:

$$\psi[T(0)\phi] = \psi[T(1)\phi]. \quad (\text{II.73})$$

Tem-se, para qualquer transformação satisfazendo (II.72), um funcional plurívoco se existirem trajetórias fechadas em Q tais que

$$\psi[T(0)\phi] \neq \psi[T(1)\phi]. \quad (\text{II.74})$$

A consideração das trajetórias fechadas associadas à rotação por 2π de uma configuração solitônica e à troca de dois sólitons permite determinar os possíveis valores de spin e estatística dos sólitons. A conexão spin-estatística, para campos não-lineares, pode ser demonstrada usando novamente argumentos homotópicos. Assim, por exemplo, para sólitons em (3+1) dimensões, a componente Q_i do espaço de configuração irá admitir spin semi-inteiro se e somente se admitir estatística ímpar [35].

Estabeleceremos um critério geral para verificar se um sistema admite funcionais plurívocos. Como já foi mencionado a variedade Q contém todas as possíveis configurações do campo e pode ser decomposta em classes homotópicas $Q = \cup Q_i$, onde a configuração trivial de campo $\phi_0 \in Q_0$. Afirmamos que Q_i admite funcionais plurívocos se e somente se:

$$\Pi_1(Q_i) \neq 0. \quad (\text{II.75})$$

Esta condição segue claramente da continuidade do funcional de estado sobre a curva fechada $T(s)\phi$. Se for possível deformar continuamente esta curva na curva trivial

$$T(s)\phi = \phi \quad \forall s \in [0, 1] \quad (\text{II.76})$$

então a continuidade de $\psi[T(s)\phi]$ levará necessariamente à condição (II.73) e à quantização monovalente. Assim, a quantização plurívoca será possível somente se existirem curvas fechadas no espaço de configuração Q_i que não possam ser reduzidas por homotopia à curva trivial. Ou ainda, o grupo fundamental de Q_i deve possuir mais de um elemento; esta é exatamente a condição (II.75).

Dada a variedade Φ onde o campo assume os seus valores, queremos encontrar uma forma de avaliar $\Pi_1(Q_i)$ e verificar se a condição (II.75) é satisfeita. O procedimento esboçado a seguir será no sentido de transferir o problema do cálculo do grupo Π_1 envolvendo o espaço de configuração para o cálculo de $\Pi_d(\Phi)$, onde d é o número de dimensões espaço-temporais. Para fazer isto começamos usando o seguinte isomorfismo [36]:

$$\Pi_1(Q_i) \approx \Pi_1(Q_j) \quad \forall i, j. \quad (\text{II.77})$$

Desta forma reduzimos o problema da determinação de $\Pi_1(Q_i)$ em avaliar a estrutura de caminhos em Q_0 , a classe homotópica cujo elemento representativo é o mapeamento constante $\phi_0(\mathbf{x})$ que leva todo R^{d-1} a ϕ_0 :

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0 \quad \forall \mathbf{x} \in R^{d-1}. \quad (\text{II.78})$$

Seja ξ um mapeamento:

$$\xi : R^1 \longrightarrow Q_0 \quad (\text{II.79})$$

tal que $\xi(-\infty) = \xi(+\infty) = \phi_0$. Assim ξ representa um caminho em Q_0 começando e terminando em ϕ_0 . Definimos um mapeamento

$$f : R^d \rightarrow \Phi \quad (\text{II.80})$$

tal que

$$f(x_1, \dots, x_{d-1}, t) = [\xi(t)](x_1, \dots, x_{d-1}). \quad (\text{II.81})$$

Em conseqüência das definições anteriores, temos $f(x_1, \dots, x_{d-1}, t) \rightarrow \phi_0$ quando $|x_i|, |t| \rightarrow \infty$. Nota-se que foi estabelecida uma correspondência entre um caminho em Q_0 e um mapeamento $R^d \rightarrow \Phi$. O mapeamento de $f(x_1, \dots, x_{d-1}, t)$ é um membro de uma das classes de homotopia que formam o grupo $\Pi_d(\Phi)$ e também pode ser considerado como definindo uma curva em Q_0 . Portanto há isomorfismo entre os grupos:

$$\Pi_1(Q_0) \approx \Pi_d(\Phi). \quad (\text{II.82})$$

Usando (II.77) obtemos o resultado geral:

$$\Pi_1(Q_i) \approx \Pi_d(\Phi). \quad (\text{II.83})$$

No caso dos anyons, em (2+1) dimensões, a variedade do campo é $\Phi = S^2$ e $d = 3$; usando (II.63) encontra-se:

$$\Pi_3(S^2) \approx \mathbf{Z} \quad (\text{II.84})$$

mostrando que cada componente do espaço de configuração é infinitamente conectada. Este fato permite a interessante possibilidade de existirem spin e estatística fracionários [38].

No caso dos skyrmions, em (3+1) dimensões, a variedade do campo é $\Phi = S^3$ e $d = 4$; usando novamente (II.63) encontra-se:

$$\Pi_4(S^3) \approx \mathbf{Z}_2 \quad (\text{II.85})$$

revelando que cada componente do espaço de configuração é duplamente conectada, permitindo quantização fermiônica.

No modelo de Skyrme $SU(3)$, Witten mostrou [23,24] que o termo de Wess-Zumino (II.40) é fundamental para fornecer o caráter de spin-estatística correto do sóliton. Após uma rotação adiabática por 2π , a expressão (II.40) contribui com um fator $\exp(iN_c\pi)$ para o funcional de estado. Como $N_c = 3$ é ímpar o funcional é multiplicado por (-1) resultando num spin semi-inteiro e numa estatística fermiônica.

Para modelos definidos sobre um espaço unidimensional argumentos homotópicos não permitem determinar a estatística dos sólitons. Isto pode ser entendido pelo fato de que não é possível efetuar, por uma transformação contínua, uma troca de posição entre dois sólitons sem que haja uma colisão entre eles. Desta forma a estatística em uma dimensão é indeterminada, podendo ser bosônica ou fermiônica [39,40].

Capítulo III

Modelo de sine-Gordon e Bosonização

III.1 O Modelo Clássico

Neste capítulo faremos uma breve revisão de alguns assuntos importantes para o desenvolvimento desta dissertação. Esta primeira seção será dedicada à apresentação de tópicos gerais sobre o modelo de sine-Gordon, enquanto que a próxima será destinada à demonstração da equivalência entre o modelo de sine-Gordon e o modelo de Thirring massivo.

O modelo de sine-Gordon é um modelo que envolve um campo escalar $\phi(x, t)$ definido num espaço-tempo bidimensional¹. Como já foi mencionado no capítulo anterior a variedade de campo Φ é S^1 , isto é, $\phi(x, t)$ mapeia o espaço sobre a variedade do círculo; desta forma é usual interpretar o campo $\phi(x, t)$ como um ângulo de torção, afora um fator de escala, como será visto adiante. Esta argumentação pode ser visualizada na fig. III.1. A densidade lagrangiana do modelo de sine-Gordon é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos \beta\phi) \quad (\text{III.1})$$

onde m e β são constantes, parâmetros do modelo. A densidade hamiltoniana correspondente é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos \beta\phi). \quad (\text{III.2})$$

¹A partir deste momento a variável x representa apenas a parte espacial

onde $\pi = \partial_0 \phi$. A equação de movimento derivada de (III.1) é :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \phi = 0 \quad (\text{III.3})$$

que é a famosa equação de sine-Gordon. A solução estática desta equação (fig. III.2) é dada por:

$$\phi_c(x) = -\frac{4}{\beta} \arctan e^{-mx}. \quad (\text{III.4})$$

A energia correspondente, obtida pela integração de (III.2), com $\phi(x)$ dado por (III.4) e $\pi(x) = 0$, é:

$$E = \frac{8m}{\beta^2}. \quad (\text{III.5})$$

A partir da forma da auto-interação do campo, vê-se que a hamiltoniana (III.2) apresenta muitas (infinitas) configurações degeneradas de equilíbrio dadas por:

$$\phi_n = \frac{2\pi n}{\beta}. \quad (\text{III.6})$$

Para que a energia associada a qualquer configuração de campo permaneça finita, esta deverá tender, a grande distância, para valores ϕ_{n_+} (para $x \rightarrow \infty$) e ϕ_{n_-} (para $x \rightarrow -\infty$) pertencentes ao conjunto (III.6). A função interpoladora destes mínimos é o que chamamos de *sóliton topológico*, sendo expressa pela equação (III.4).

Seguindo o que foi desenvolvido na seção (II.2.1) pode-se definir o *winding number* W para o modelo de sine-Gordon como sendo o “número de voltas” dadas pelo campo $\phi(x)$ sobre a variedade S^1 . Outro nome dado usualmente a W é de *carga topológica*. A razão deste nome é que W também pode ser derivado, assim como no modelo de Skyrme discutido no capítulo anterior, da integral espacial da componente temporal de uma corrente conservada, a chamada *corrente topológica* W^μ :

$$W^\mu = \frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (\text{III.7})$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é definido por:

$$\begin{aligned} \epsilon^{01} &= -\epsilon^{10} = 1 \\ \epsilon^{00} &= \epsilon^{11} = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

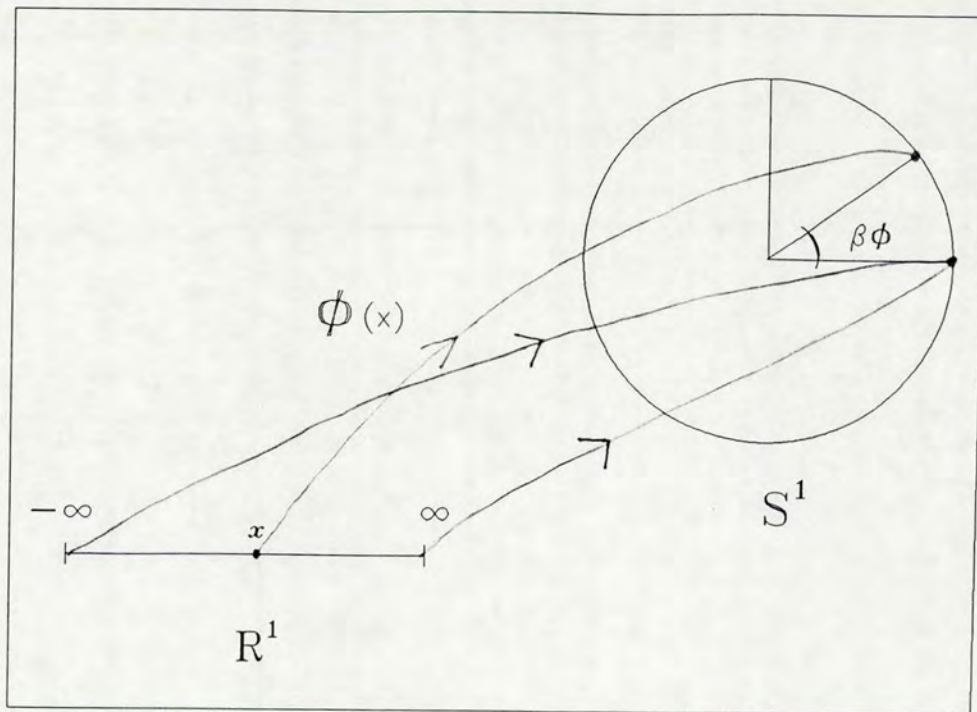


Figura III.1: O mapeamento definido pelo campo de sine-Gordon

Fica claro a partir da assimetria de $\epsilon^{\mu\nu}$ que $\partial_\mu W^\mu = 0$, que implica na conservação da carga topológica W . De (III.7) e (III.8) obtemos:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} W^0 dx = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} dx = \frac{\beta}{2\pi} (\phi(\infty,t) - \phi(-\infty,t)) = n_+ - n_- \quad (\text{III.9})$$

que corresponde à definição do *winding number* dada inicialmente. Como foi dito na seção sobre homotopia, a continuidade da função $\phi(x)$ garante que W satisfaça uma lei aditiva frente à composição homotópica:

$$W = W_1 + W_2 \quad (\text{III.10})$$

ou seja, um estado com dois sólitons $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ tem *winding number* total igual à soma dos individuais.

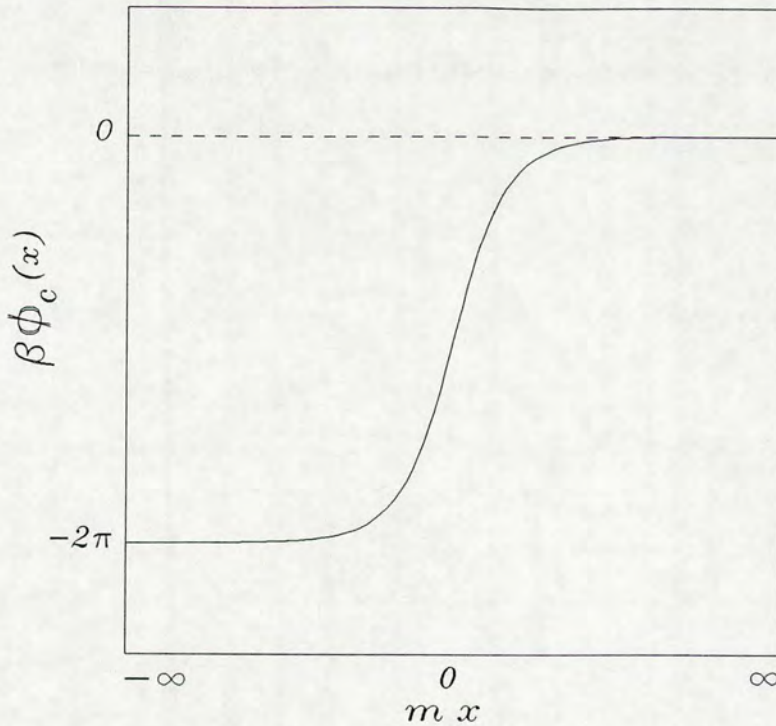


Figura III.2: Sóliton topológico: interpola de $\phi = -2\pi/\beta$ (em $x = -\infty$) até $\phi = 0$ (em $x = +\infty$)

III.2 Bosonização e o Operador de Mandelstam

Um dos aspectos mais interessantes das teorias de campo em duas dimensões espaço-temporais, e que será fundamental para a quantização do modelo de sine-Gordon, é a equivalência entre teorias construídas a partir de férmions e teorias construídas a partir de bósons. Uma teoria onde o operador básico de campo satisfaz uma regra de anticomutação pode ser intrinsecamente relacionada a uma outra cujo operador de campo satisfaz apenas relações de comutação.

Existem duas formas de estabelecer a equivalência entre duas teorias quânticas de campo. Uma delas consiste na comparação das funções de Green das duas teorias. A outra consiste na construção de uma solução operatorial de uma equação de campo numa

teoria usando combinações não - locais dos operadores da outra. Estes métodos pressupõem um certo conhecimento antecipado de quais as duas teorias a serem relacionadas. A construção explícita de um operador fermiônico numa teoria a partir do operador bosônico de outra teoria é conhecida como representação bosônica ou simplesmente bosonização . Neste método uma teoria de férmions é transformada diretamente numa teoria de bósons e a equivalência segue como consequência [41].

Esta técnica pode ser usada para demonstrar a equivalência do modelo de Thirring massivo com o modelo de sine-Gordon. Esta equivalência foi mostrada pela primeira vez por Coleman [42] comparando as séries perturbativas das funções de Green de ambos os modelos. As partículas que eram fundamentais numa descrição eram compostas na outra. No modelo de Thirring o férmion era fundamental enquanto que o bóson era um estado ligado férmion-antiférmion. No modelo de sine-Gordon o bóson era fundamental enquanto que o férmion aparecia como um sóliton topológico.

O modelo de Thirring é um modelo que contém um campo fermiônico com auto-interação e tem a seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - M)\psi - \frac{1}{2}gj_\mu j^\mu \quad (\text{III.11})$$

e correspondente equação de movimento:

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - M)\psi(x) = g\gamma^\mu j_\mu\psi(x) \quad (\text{III.12})$$

onde

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (\text{III.13})$$

A equivalência, via bosonização , do modelo de Thirring com o modelo de sine-Gordon foi obtida por Mandelstam [43] com a seguinte relação :

$$\psi_\mu(x) = \lambda \exp \left(-\frac{2\pi i}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x - \xi)\pi(\xi) d\xi + (-)^\mu \frac{i\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x)\phi(\xi) d\xi \right) \quad (\text{III.14})$$

onde $\mu = 1, 2$ é o índice do espinor de Dirac. Os operadores que aparecem nas integrais obedecem às relações usuais de comutação do campo bosônico, isto é,

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y). \quad (\text{III.15})$$

A bosonização também conecta as constantes de acoplamento das duas teorias:

$$\frac{4\pi}{\beta^2} = 1 + g/\pi. \quad (\text{III.16})$$

O operador (III.14), para efetivamente representar a referida conexão entre o modelo fermiônico e o bosônico, deve satisfazer as relações operatoriais decorrentes da sua interpretação nos dois modelos. No modelo de sine-Gordon este operador é um operador de destruição de sólitons topológicos pontuais. Este fato pode ser verificado considerando a destruição de um sóliton no ponto y . Usando a fórmula (A.2) do apêndice A, pode-se mostrar que

$$[\phi(x), \psi_\mu(y)] = +\frac{2\pi}{\beta}\theta(y-x)\psi_\mu(y). \quad (\text{III.17})$$

O respectivo operador de criação satisfaz portanto:

$$[\phi(x), \psi_\mu^\dagger(y)] = -\frac{2\pi}{\beta}\theta(y-x)\psi_\mu^\dagger(y) \quad (\text{III.18})$$

que pode ser reescrita numa forma aberta como:

$$\begin{aligned} \phi(x)\psi_\mu^\dagger(y) &= \psi_\mu^\dagger(y) \left[\phi(x) - \frac{2\pi}{\beta} \right], & x < y \\ \phi(x)\psi_\mu^\dagger(y) &= \psi_\mu^\dagger(y)\phi(x), & x > y. \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Estas relações indicam que para posições à esquerda do ponto em que o sóliton é criado o campo é diminuído de $\frac{2\pi}{\beta}$, enquanto que à direita ele permanece inalterado. Assim, de acordo com a definição (III.9), o operador ψ_μ^\dagger incrementa de uma unidade a carga topológica, o que legitima a sua interpretação como operador de criação.

Para o operador (III.14) ser capaz de representar o férmion do modelo de Thirring teremos que mostrar que este operador satisfaz as relações de anticomutação usuais, isto é,

$$\{\psi_\mu(x), \psi_\nu(y)\} = \{\psi_\mu^\dagger(x), \psi_\nu^\dagger(y)\} = 0 \quad (\text{III.20.a})$$

$$\{\psi_\mu(x), \psi_\nu^\dagger(y)\} = z\delta(x-y)\delta_{\mu\nu} \quad (\text{III.20.b})$$

onde z é uma constante cujo valor irá depender da escolha do fator λ em (III.14), que define a normalização do operador. Será conveniente reescrever o operador de Mandelstam numa forma compacta:

$$\psi_\mu(x) = \lambda \exp\left((-)^\mu i\sqrt{4\pi} O_\mu(x) \right) \quad (\text{III.21.a})$$

$$\psi_\mu^\dagger(x) = \lambda \exp\left((-)^{\mu+1} i\sqrt{4\pi} O_\mu(x) \right) \quad (\text{III.21.b})$$

onde

$$O_\mu(x) = O_\mu^\dagger(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\phi(x)}{\sigma} - (-)^\mu \sigma \int_{-\infty}^x d\xi \pi(\xi) \right] \quad (\text{III.22})$$

com $\sigma \equiv \sqrt{4\pi}/\beta$. Para verificar (III.20.a) usamos a relação (A.3) do apêndice e chegamos à seguinte expressão para o anticomutador do operador de destruição :

$$\{ \psi_\mu(x), \psi_\nu(y) \} = (1 + e^{(-)^{\mu+\nu+1}4\pi[O_\mu(x), O_\nu(y)]}) \psi_\nu(y) \psi_\mu(x). \quad (\text{III.23})$$

O comutador presente em (III.23) pode ser calculado a partir de (III.22) e (III.15):

$$\begin{aligned} [O_\mu(x), O_\nu(y)] &= -(-)^\nu \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \theta(y - \xi) [\phi(x), \pi(\xi)] + \\ &\quad - (-)^\mu \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \theta(x - \xi) [\pi(\xi), \phi(y)] \\ &= -\frac{i}{4} \left[(-)^\nu \theta(y - x) - (-)^\mu \theta(x - y) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Assim, colocando (III.24) em (III.23) temos:

$$\begin{aligned} \{ \psi_\mu(x), \psi_\nu(y) \} &= (1 + e^{i\pi[(-)^\mu\theta(y-x) - (-)^\nu\theta(x-y)]}) \psi_\nu(y) \psi_\mu(x) \\ &= (1 + e^{si\pi}) \psi_\nu(y) \psi_\mu(x) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

onde s é apenas um sinal, de maneira que:

$$e^{si\pi} = -1. \quad (\text{III.26})$$

Com isto a relação de anticomutação (III.20.a) está verificada. O anticomutador envolvendo os operadores de criação segue obviamente. A verificação da relação (III.20.b) é menos direta; procuraremos colocar o anticomutador em ordenamento normal com relação aos operadores de criação e destruição bosônicos. Para tanto, expandimos o operador de campo bosônico e o seu conjugado em ondas planas, introduzindo um fator de convergência para regularizar a teoria a grandes momenta (curtas distâncias):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} (e^{ikx} a(k) + e^{-ikx} a^\dagger(k)) e^{-\frac{\epsilon|k|}{2}} \quad (\text{III.27.a})$$

$$\pi(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (e^{-ikx} a^\dagger(k) - e^{ikx} a(k)) e^{-\frac{\epsilon|k|}{2}}. \quad (\text{III.27.b})$$

Também introduzimos um outro fator de convergência, na integral da expressão (III.22), de maneira a controlar o seu comportamento a grande distância:

$$O_\mu(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\phi(x)}{\sigma} - (-)^\mu \sigma \int_{-\infty}^x d\xi \pi(\xi) e^{\varepsilon\xi} \right]. \quad (\text{III.28})$$

Os limites $\epsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ serão tomados somente no fim do cálculo. Como mostra a fórmula (A.9) do apêndice o ordenamento normal de um produto de exponenciais do tipo (III.21) fará aparecer o comutador:

$$C_{\mu\nu}(x-y) = [O_\mu^-(x), O_\nu^+(y)] \quad (\text{III.29})$$

onde os superscritos + e - indicam as partes de criação e destruição do operador, respectivamente. Por invariância translacional a expressão (III.29) depende de x e y somente através da diferença $x-y$. Utilizando as expressões (III.21) e a fórmula (A.9) obtemos:

$$\psi_\mu(x) \psi_\nu^\dagger(y) = \lambda^2 e^{Q_{\mu\nu}(x-y)} : e^{i\sqrt{4\pi}[(-)^\mu O_\mu(x) - (-)^\nu O_\nu(y)]} : \quad (\text{III.30.a})$$

$$\psi_\nu^\dagger(y) \psi_\mu(x) = \lambda^2 e^{Q_{\nu\mu}(y-x)} : e^{i\sqrt{4\pi}[(-)^\mu O_\mu(x) - (-)^\nu O_\nu(y)]} : \quad (\text{III.30.b})$$

onde os dois pontos representam o ordenamento normal da exponencial em relação aos operadores de criação e destruição de (III.27). A função $Q_{\mu\nu}$ fica definida como segue:

$$Q_{\mu\nu}(x-y) = 4\pi[(-)^{\mu+\nu} C_{\mu\nu}(x-y) - \frac{1}{2} C_{\mu\mu}(0) - \frac{1}{2} C_{\nu\nu}(0)]. \quad (\text{III.31})$$

Inserindo (III.27) em (III.28) e usando as relações de comutação usuais para os $a(k)$ e $a^\dagger(k)$, chegamos a:

$$C_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{4\pi} \int dk \left[\frac{1}{4\sigma^2 \omega_k} + \frac{(-)^\mu}{4(k-i\varepsilon)} + \frac{(-)^\nu}{4(k+i\varepsilon)} + \sigma^2 \frac{(-)^{\mu+\nu} \omega_k}{4(k^2 + \varepsilon^2)} \right] \times \\ \times e^{ik(x-y) - \varepsilon|k|}. \quad (\text{III.32})$$

Consideramos primeiro o comutador (III.20.b) para $\mu \neq \nu$, por exemplo $\mu = 1$ e $\nu = 2$. De (III.30) e (III.31) segue:

$$\{\psi_1(x), \psi_2^\dagger(y)\} = \lambda^2 \left[e^{-4\pi C_{12}(x-y)} + e^{-4\pi C_{21}(y-x)} \right] e^{-2\pi[C_{11}(0) + C_{22}(0)]} \times \\ \times : e^{-i\sqrt{4\pi}[O_1(x) + O_2(y)]} : . \quad (\text{III.33})$$

Mas, usando (III.32) junto com a fórmula:

$$\frac{1}{k+i\epsilon} = \frac{1}{k-i\epsilon} - 2i\pi\delta(k) \quad (\text{III.34})$$

é fácil mostrar que:

$$C_{21}(y-x) = C_{12}(x-y) + \frac{i}{4}. \quad (\text{III.35})$$

Inserindo esta relação em (III.33), obtemos imediatamente:

$$\{\psi_1(x), \psi_2^\dagger(y)\} = 0. \quad (\text{III.36})$$

A relação semelhante, com $\mu = 2$ e $\nu = 1$ segue obviamente. O anticomutador (III.20.b) para $\mu = \nu$ é mais delicado: precisamos verificar o seu comportamento em regiões $x \approx y$, certificando-nos que a curtas distâncias ele corresponde a uma função δ de Dirac. Analisando as integrais de (III.32), concluímos que:

$$\begin{aligned} C_{\mu\mu}(\alpha) = & -\frac{1}{16\pi}(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}) \log m^2(\alpha^2 + \epsilon^2) + \frac{i}{4\pi}(-)^\mu \arctan \frac{\alpha}{\epsilon} + \\ & + \frac{\sigma^2 m}{16\epsilon} + \bar{C}_{\mu\mu}(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

onde $\alpha \equiv x - y$ e $\bar{C}_{\mu\mu}(\alpha)$ indica termos que permanecem finitos nos limites $\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, mesmo quando $\alpha = 0$. Inserindo (III.37) em (III.31), temos

$$Q_{\mu\mu}(\alpha) = -\frac{1}{4}(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}) \log \frac{\alpha^2 + \epsilon^2}{\epsilon^2} + i(-)^\mu \arctan \frac{\alpha}{\epsilon} + \bar{Q}_{\mu\mu}(\alpha) \quad (\text{III.38})$$

onde $\bar{Q}_{\mu\mu}(\alpha)$ é uma função bem comportada satisfazendo:

$$\bar{Q}_{\mu\mu}(0) = 0. \quad (\text{III.39})$$

Levando (III.38) em (III.30.a) e utilizando (III.16) para reescrever as constantes σ que aparecem nas expressões anteriores em termos da constante de acoplamento do modelo de Thirring:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2 \right) = \frac{1}{2} + \frac{g^2}{4(\pi^2 + \pi g)} \equiv \frac{1}{2} + \rho \quad (\text{III.40})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \psi_\mu(x)\psi_\mu^\dagger(y) = & \lambda^2 \left(\frac{\epsilon^2}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \right)^{\rho+1/2} e^{i(-)^\mu \arctan \frac{x-y}{\epsilon}} e^{\bar{Q}_{\mu\mu}(x-y)} \times \\ & \times : e^{i\sqrt{4\pi}(-)^\mu [O_\mu(x) - O_\mu(y)]} : . \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Ao tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$ nesta expressão, verificamos que ela se anula, exceto para $x = y$. Notando que, neste caso, as duas últimas exponenciais de (III.41) se reduzem à unidade, e fazendo a escolha conveniente de normalização $\lambda = 1/\sqrt{2\pi\epsilon}$ do operador de Mandelstam, temos:

$$\psi_\mu(x)\psi_\mu^\dagger(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{\epsilon^2}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \right)^{\rho+1/2} e^{i(-)^\mu \arctan \frac{x-y}{\epsilon}}. \quad (\text{III.42})$$

Como mostra (III.30), o produto $\psi_\mu^\dagger(y)\psi_\mu(x)$ difere de (III.42) somente pela troca de x e y ; assim o anticomutador fica

$$\begin{aligned} \{\psi_\mu(x), \psi_\mu^\dagger(y)\} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{\epsilon^2}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \right)^{\rho+1/2} \left(e^{i(-)^\mu \arctan \frac{x-y}{\epsilon}} + e^{-i(-)^\mu \arctan \frac{x-y}{\epsilon}} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\epsilon} \left(\frac{\epsilon^2}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \right)^{\rho+1}. \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Finalmente, lembrando uma das definições da função δ de Dirac:

$$\delta(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-y)^2} \quad (\text{III.44})$$

chegamos ao resultado desejado:

$$\{\psi_\mu(x), \psi_\nu^\dagger(y)\} = z\delta(x-y)\delta_{\mu\nu} \quad (\text{III.45})$$

com a constante z determinada por integração de (III.43):

$$\begin{aligned} z &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\pi\epsilon} \left(\frac{\epsilon^2}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \right)^{\rho+1} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} du \left(\frac{1}{1+u^2} \right)^{\rho+1}. \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Fórmulas tabeladas [45] permitem colocar o valor desta integral na seguinte forma:

$$z = \frac{\Gamma(2\rho+1)}{2^{2\rho} \Gamma^2(\rho+1)}. \quad (\text{III.47})$$

Como já foi comentado, este resultado para a constante z está condicionado pela escolha da constante λ em (III.14).

Para completamente demonstrar que o operador (III.14) produz a equivalência total entre os modelos de Thirring e de sine-Gordon, Mandelstam ainda mostrou que este operador satisfaz a equação de movimento (III.12) [43].

Capítulo IV

Operador de Criação para Sólitons Topológicos Extensos

IV.1 Introdução

Iniciaremos, neste capítulo, a parte original desta dissertação com a construção de um operador de criação para sólitons extensos fermiônicos. Como já mencionamos, o operador de Mandelstam corresponde à criação de sólitons pontuais. Esta característica se reflete na presença, no expoente do operador (III.14) das funções θ de Heaviside e δ de Dirac, cuja estrutura não - trivial está concentrada num ponto. Para levar em conta a extensão do sóliton substituiremos as funções θ e δ por funções possuindo propriedades globalmente semelhantes, mas que apresentam um comportamento não - trivial numa região extensa ao redor do centro do sóliton. Mandelstam [43] argumenta que tal substituição poderia ser uma boa aproximação para o sóliton físico. No nosso operador, estas funções serão também funções complexas por razões a serem esclarecidas mais adiante.

Cabe ressaltar, porém, que o nosso operador difere em aspectos fundamentais de um operador de campo canônico, como é o operador de Mandelstam. Em especial, o operador e o seu conjugado hermitico não satisfazem a relação de anticomutação (III.20.b). O nosso operador será construído de maneira a satisfazer as seguintes condições :

a) a aplicação do operador de criação a um estado de carga topológica N produz um estado de carga topológica $N + 1$.

b) o estado obtido pela aplicação de N operadores de criação ao vácuo de Fock é

completamente antissimétrico frente às permutações dos N sólitons. Esta condição será satisfeita requerendo que o anticomutador de dois operadores de criação seja zero.

c) a aplicação do operador de criação ao vácuo de Fock produz um estado normalizado no qual os valores esperados do campo bosônico e do seu momentum conjugado são dados pela solução solitônica estática da equação de campo clássico. Assim podemos dizer que este estado constitui uma realização quântica da aproximação de campo médio.

Já que estamos interessados principalmente em problemas de física nuclear, na qual antipartículas e efeitos relativísticos são usualmente considerados de pouca relevância, limitaremos-nos à construção do operador de criação para sólitons, ignorando os antisólitons e a covariância relativística. Assim, lidaremos com um único operador $\psi^\dagger(x)$, modificação do operador $\psi_{\mu=1}^\dagger(x)$ de Mandelstam, e não com um espinor de Dirac.

IV.2 Topologia e Estatística de Fermi

Postulamos então para o nosso operador de criação uma forma obtida pela substituição das funções θ e δ na expressão (III.14) por funções complexas f e g a serem determinadas:

$$\psi^\dagger(x) = \lambda \exp A^\dagger(x) \tag{IV.1}$$

com

$$A^\dagger(x) = \frac{2\pi i}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)\pi(\xi) d\xi + \frac{i\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi - x)\phi(\xi) d\xi. \tag{IV.2}$$

Utilizando (III.15) e (A.2), não é difícil provar a relação :

$$[\phi(x), \psi^\dagger(y)] = -\frac{2\pi}{\beta} f(y - x)\psi^\dagger(y). \tag{IV.3}$$

O operador $\psi^\dagger(y)$ criará um soliton extenso centrado em y se ele diminuir por $\frac{2\pi}{\beta}$ o valor do campo $\phi(x)$ para $x \ll y$, sem modificar o valor de $\phi(x)$ para $x \gg y$, ou seja, se:

$$\begin{aligned} \phi(x)\psi^\dagger(y) &= \psi^\dagger(y) \left[\phi(x) - \frac{2\pi}{\beta} \right] , & y - x \rightarrow \infty \\ \phi(x)\psi^\dagger(y) &= \psi^\dagger(y)\phi(x) , & y - x \rightarrow -\infty . \end{aligned} \tag{IV.4}$$

É fácil ver a partir de (IV.3), que estas relações serão satisfeitas desde que a função f possua os limites assintóticos de uma função degrau unitário, isto é:

$$f(-\infty) = 0 \quad , \quad f(\infty) = 1. \quad (IV.5)$$

Até aqui, ao operador (IV.1)-(IV.2) não se atribuiu nenhuma estatística específica. O nosso desejo de construir um operador de criação de sólitons extensos obedecendo à estatística de Fermi irá se refletir diretamente numa condição envolvendo as funções f e g , condição esta que garantirá a relação de anticomutação :

$$\{\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(y)\} = 0. \quad (IV.6)$$

Usando a relação (A.3), obtemos:

$$\{\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(y)\} = (1 + e^{[A^\dagger(x), A^\dagger(y)]})\psi^\dagger(y)\psi^\dagger(x). \quad (IV.7)$$

Para (IV.7) ser igual a zero, devemos ter:

$$e^{[A^\dagger(x), A^\dagger(y)]} = -1 \quad (IV.8)$$

ou ainda:

$$[A^\dagger(x), A^\dagger(y)] = (2n_{xy} + 1)i\pi \quad (IV.9)$$

onde n_{xy} é um número inteiro que pode depender de x e y . Este comutador é facilmente calculado, resultando em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(x - \xi)g(\xi - y) - \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(y - \xi)g(\xi - x) = 2n_{xy} + 1. \quad (IV.10)$$

No caso particular do operador de Mandelstam, tinhamos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(x - \xi)g(\xi - y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \theta(x - \xi)\delta(\xi - y) = \theta(x - y) \quad (IV.11)$$

de maneira que (IV.10) era satisfeita com $n_{xy} = 0$ para $x > y$ e $n_{xy} = -1$ para $x < y$. Vemos que, para satisfazermos esta condição no caso geral, com os mesmos valores de n_{xy} , basta que tenhamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(x - \xi)g(\xi - y) = \theta(x - y). \quad (IV.12)$$

Adotamos esta relação como condição fundamental a ser satisfeita pelas funções f e g para a anticomutação dos operadores de criação . Dos argumentos acima, fica claro que uma condição menos restritiva seria a priori aceitável, entretanto com a escolha de (IV.12), mantemos a nossa construção mais próxima, o quanto for possível, à de Mandelstam. Será conveniente para uso futuro reescrever o operador de criação usando as expansões em ondas planas dos operadores ϕ e π (III.27) ¹ e as decomposições de Fourier das funções de f e g :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \bar{f}(k) \quad (\text{IV.13.a})$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \bar{g}(k). \quad (\text{IV.13.b})$$

Assim obtemos:

$$\psi^\dagger(x) = \lambda \exp \left(- \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} [\bar{\phi}(k) a^\dagger(k) - \bar{\chi}(k) a(-k)] \right) \quad (\text{IV.14})$$

onde:

$$\bar{\phi}(k) \equiv a \bar{f}(-k) - i b_k \bar{g}(k) \quad (\text{IV.15.a})$$

$$\bar{\chi}(k) \equiv a \bar{f}(-k) + i b_k \bar{g}(k) \quad (\text{IV.15.b})$$

com $a \equiv 2\pi/\beta$ e $b_k \equiv \beta/2\omega_k$.

Outra relação importante a ser deduzida e que também será usada no futuro é a transformada de Fourier de (IV.12). Simbolizando por $\bar{\theta}(k)$ a transformada de Fourier da função degrau unitário $\theta(x)$ temos ²:

$$\bar{\theta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ik + \epsilon)}. \quad (\text{IV.16})$$

Inserindo na relação (IV.12) as expansões (IV.13) para as funções f e g e usando (IV.16), obtemos a representação , no espaço de momentum, da condição de anticomutação :

$$\bar{f}(k) \bar{g}(k) = \frac{1}{2\pi(ik + \epsilon)}. \quad (\text{IV.17})$$

¹A partir deste momento, e no decorrer do restante desta dissertação , tomaremos $\epsilon = 0$ nas expansões de ϕ e π .

²Para maiores detalhes sobre a transformada da função degrau unitário ver o apêndice B.

IV.3 O Estado Coerente e a Aproximação de Campo Médio

Mesmo que se queira interpretá-lo como descrevendo a estrutura interna de uma partícula subatômica, o sóliton é antes de mais nada uma solução clássica da equação de campo. Para atribuir um significado quântico a esta solução, invoca-se usualmente a aproximação de campo médio, ou aproximação semi-clássica, que consiste em substituir, na equação de campo quântico, o operador de campo por seu valor esperado [44]. Este então satisfaz a equação de campo clássico e pode ser identificado com a solução solitônica. Nesta seção, demonstramos que o estado quântico correspondendo à aproximação de campo médio pode ser obtido pela aplicação, sobre o vácuo de Fock, do operador (IV.1)-(IV.2), com as funções f e g determinadas pela minimização do valor esperado da energia. O estado de um sóliton centrado em y é dado por:

$$|y\rangle = \psi^\dagger(y) |0\rangle. \quad (\text{IV.18})$$

Utilizando a expressão (IV.14) e a fórmula (A.2), obtemos:

$$a(k) |y\rangle = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} h(k) |y\rangle \quad (\text{IV.19})$$

com

$$h(k) = -e^{-iky} \bar{\phi}(k). \quad (\text{IV.20})$$

A relação de autovalor (IV.19) revela que $|y\rangle$ é um estado coerente. As propriedades gerais de tais estados são revisadas no apêndice C, onde extraímos alguns resultados que serão utilizados nesta seção. O valor esperado da energia é dado por (C.12), em termos dos valores esperados ³ $\langle y | \phi(x) | y \rangle$ e $\langle y | \pi(x) | y \rangle$, que podemos considerar como funções variacionais. Minimizando a energia média, obtemos as equações

$$\langle y | \pi(x) | y \rangle = 0 \quad (\text{IV.21})$$

e

$$-\nabla_x^2 \langle y | \phi(x) | y \rangle + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \langle y | \phi(x) | y \rangle = 0. \quad (\text{IV.22})$$

³Supondo que $\langle y | y \rangle = 1$

Da equação (IV.21), usando a relação (C.4), concluímos que $h(k) = h^*(-k)$, ou ainda:

$$\bar{\phi}(k) = \bar{\phi}^*(-k). \quad (\text{IV.23})$$

A equação (IV.22) é a equação para o campo clássico estático, cuja solução solitônica, centrada em y , é

$$\langle y | \phi(x) | y \rangle = \phi_c(x - y) \quad (\text{IV.24})$$

com $\phi_c(x)$ dado por (III.4). O momentum canônico conjugado associado é:

$$\pi_c(x - y) = \frac{\partial}{\partial t} \phi_c(x - y) = 0 \quad (\text{IV.25})$$

em acordo com (IV.21). Com (IV.21) e (IV.24), a expressão do valor esperado da energia fica:

$$\begin{aligned} \langle y | H | y \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} [\nabla_x \phi_c(x - y)]^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta \phi_c(x - y)) \right] \\ &= \frac{8m}{\beta^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

onde usamos o resultado (III.5) para a energia do soliton clássico. Inserindo (IV.21) e (IV.24) na relação (C.5) e usando (IV.20), obtemos:

$$\bar{\phi}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ik(x-y)} \phi_c(x - y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} \phi_c(x). \quad (\text{IV.27})$$

O cálculo desta transformada de Fourier pode ser encontrado no apêndice B; o resultado é:

$$\bar{\phi}(k) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \frac{\text{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right)}{(ik - \epsilon)}. \quad (\text{IV.28})$$

Para efetuar qualquer cálculo com o operador de criação para sólitons extensos precisamos obter a forma das funções f e g ou equivalentemente das suas transformadas \bar{f} e \bar{g} . A primeira relação permitindo a determinação destas funções pode ser obtida comparando (IV.15.a) com (IV.28); trocando $k \rightarrow -k$ por conveniência, obtemos:

$$a\bar{f}(k) - ib_k\bar{g}(-k) = \frac{\sqrt{2\pi}\text{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right)}{\beta(ik + \epsilon)}. \quad (\text{IV.29})$$

A segunda relação é a condição (IV.17) de anticomutação . Da forma das equações (IV.17) e (IV.29), fica claro que as suas soluções apresentarão um pólo em $k = i\epsilon$. Isolamos este pólo definindo funções \tilde{f} e \tilde{g} como segue:

$$\bar{f}(k) \equiv \frac{\tilde{f}(k)}{ik + \epsilon} \quad (\text{IV.30.a})$$

$$\bar{g}(-k) \equiv \frac{\tilde{g}(-k)}{ik + \epsilon}. \quad (\text{IV.30.b})$$

Colocando (IV.30) em (IV.29), temos:

$$a\tilde{f}(k) - ib_k\tilde{g}(-k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \text{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right). \quad (\text{IV.31})$$

Da mesma forma colocamos (IV.30) em (IV.17):

$$\tilde{f}(k)\tilde{g}(k) = \frac{-ik + \epsilon}{2\pi}. \quad (\text{IV.32})$$

Para resolver o sistema de equações (IV.31)-(IV.32), vamos decompor as funções \tilde{f} e \tilde{g} em somas de funções pares (+) e ímpares (-), isto é,

$$\tilde{f}(k) = \tilde{f}^+(k) + \tilde{f}^-(k) \quad (\text{IV.33.a})$$

$$\tilde{g}(k) = \tilde{g}^+(k) + \tilde{g}^-(k) \quad (\text{IV.33.b})$$

Para simplificar a notação definimos, ainda:

$$\tilde{\phi}^+(k) \equiv \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \text{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right). \quad (\text{IV.34})$$

Colocando (IV.33) e (IV.34) em (IV.31) obtemos:

$$\tilde{\phi}^+(k) = a[\tilde{f}^+(k) + \tilde{f}^-(k)] - ib_k[\tilde{g}^+(-k) + \tilde{g}^-(-k)] \quad (\text{IV.35})$$

ou seja:

$$a\tilde{f}^+(k) - ib_k\tilde{g}^+(k) = \tilde{\phi}^+(k) \quad (\text{IV.36.a})$$

$$a\tilde{f}^-(k) + ib_k\tilde{g}^-(k) = 0. \quad (\text{IV.36.b})$$

Reescrevendo:

$$\tilde{f}^+(k) = \frac{1}{a}\tilde{\phi}^+(k) + \frac{ib_k}{a}\tilde{g}^+(k) \quad (\text{IV.37.a})$$

$$\tilde{f}^-(k) = -\frac{ib_k}{a}\tilde{g}^-(k). \quad (\text{IV.37.b})$$

Inserindo as expressões (IV.33.b) e (IV.37) em (IV.32) obtemos:

$$\left[\frac{1}{a} \tilde{\phi}^+(k) + \frac{ib_k}{a} \tilde{g}^+(k) - \frac{ib_k}{a} \tilde{g}^-(k) \right] \left[\tilde{g}^+(k) + \tilde{g}^-(k) \right] = \frac{-ik + \epsilon}{2\pi} \quad (\text{IV.38})$$

onde pode-se desenvolver o produto e novamente separar as partes pares das ímpares, resultando:

$$\frac{1}{a} \tilde{\phi}^+(k) \tilde{g}^+(k) + \frac{ib_k}{a} (\tilde{g}^+(k))^2 - \frac{ib_k}{a} (\tilde{g}^-(k))^2 = \frac{\epsilon}{2\pi} \quad (\text{IV.39.a})$$

$$\tilde{g}^-(k) = -\frac{ika}{2\pi} \frac{1}{\tilde{\phi}^+(k)}. \quad (\text{IV.39.b})$$

Dada a definição (IV.34) a equação (IV.39.b) fica :

$$\tilde{g}^-(k) = -\frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \text{ch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right). \quad (\text{IV.40})$$

Colocando (IV.40) em (IV.39.a) obtemos uma equação do segundo grau para $\tilde{g}^+(k)$, cujas soluções são :

$$\tilde{g}^+(k) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{\beta^2} \omega_k \text{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right) \pm i\sqrt{\frac{2\pi}{\beta^4} \omega_k^2 \text{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \frac{k^2}{2\pi} \text{ch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + i\frac{2\epsilon\omega_k}{\beta^2}}. \quad (\text{IV.41})$$

A função $\bar{g}(k)$ finalmente fica:

$$\begin{aligned} \bar{g}(k) = & \frac{i}{-ik + \epsilon} \left[\omega_k \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta^2} \text{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right) - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \text{ch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\frac{2\pi}{\beta^4} \omega_k^2 \text{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \frac{k^2}{2\pi} \text{ch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + i\frac{2\epsilon\omega_k}{\beta^2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

A função $\bar{f}(k)$ pode ser obtida colocando (IV.34), (IV.40) e (IV.41) em (IV.37) e substituindo os resultados em (IV.33.a) e (IV.30.a):

$$\begin{aligned} \bar{f}(k) = & \frac{\beta^2}{4\pi\omega_k} \frac{1}{ik + \epsilon} \left[\omega_k \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta^2} \text{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right) - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \text{ch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \right. \\ & \left. \mp \sqrt{\frac{2\pi}{\beta^4} \omega_k^2 \text{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \frac{k^2}{2\pi} \text{ch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + i\frac{2\epsilon\omega_k}{\beta^2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

Nas expressões (IV.42) e (IV.43) aparece uma raiz quadrada que possui dois sinais possíveis. A condição (IV.5) sobre os limites assintóticos da função $f(x)$ estabelece um critério para a determinação do sinal correto, pois esta condição deve se refletir no comportamento da

respectiva transformada de Fourier $\bar{f}(k)$ para valores de k pequenos. Se avaliarmos o limite $\bar{f}(k \rightarrow 0)$ para o sinal negativo verificamos que este limite é finito. Calculando o mesmo limite para o sinal positivo obtemos:

$$\bar{f}(k \rightarrow 0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ik + \epsilon)} \quad (IV.44)$$

que é exatamente a transformada de Fourier (IV.16) da função degrau unitário, mostrando que a escolha correta de sinal é o sinal positivo para a função $\bar{f}(k)$ e conseqüentemente o sinal negativo para $\bar{g}(k)$. Com estas escolhas, a função $\bar{\chi}(k)$, dada por (IV.15.b), fica

$$\bar{\chi}(k) = \frac{\beta}{\omega_k(-ik + \epsilon)} \left[\frac{k}{\sqrt{2\pi}} \text{ch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \sqrt{\frac{2\pi}{\beta^4} \omega_k^2 \text{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \frac{k^2}{2\pi} \text{ch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)} \right]. \quad (IV.45)$$

Notamos que o termo proporcional a ϵ na raiz quadrada deve ser mantido em (IV.42) para cancelar o zero do denominador em $ik = \epsilon$, a função \bar{g} não possuindo nenhum pólo. Em contrapartida, o pólo está presente nas funções \bar{f} e $\bar{\chi}$ e o termo em questão pode ser desprezado em (IV.43) e (IV.45), o que já foi feito nesta última expressão. Uma vez conhecidas as funções $\bar{\phi}$ e $\bar{\chi}$, dadas por (IV.28) e (IV.45), o operador de criação (IV.14) fica completamente determinado afora a constante de normalização, que será discutida a seguir.

Para cálculos futuros, será conveniente escrever o operador de criação em ordenamento normal:

$$\psi^\dagger(y) = \eta : e^{A^\dagger(y)} := \eta e^{A^\dagger(+)(y)} e^{A^\dagger(-)(y)} \quad (IV.46)$$

onde η é uma constante, cuja relação com a constante λ introduzida em (IV.1) pode ser escrita utilizando a fórmula (A.8):

$$\lambda = \eta e^{\frac{1}{2}[A^\dagger(+)(y), A^\dagger(-)(y)]}. \quad (IV.47)$$

Por invariância translacional, as constantes λ e η bem como o comutador aparecendo em (IV.47), são independentes de y .

As constantes λ e η são determinadas impondo uma condição de normalização sobre os estados de um sóliton (IV.18). Requerendo:

$$\langle y | y \rangle = 1 \quad (IV.48)$$

obtemos, utilizando a forma (IV.46) e as relações (A.6)

$$\eta^{-2} = \langle 0 | e^{A^{(-)}(y)} e^{A^{\dagger(+)}(y)} | 0 \rangle. \quad (\text{IV.49})$$

Com a ajuda da fórmula (A.3), chegamos a:

$$\eta^{-2} = e^{[A^{(-)}(y), A^{\dagger(+)}(y)]} \equiv e^{\tau_4(0)} \quad (\text{IV.50})$$

onde usamos a notação do apêndice D para o comutador, cujo valor é dado por (D.5.d):

$$\tau_4(0) = \frac{1}{2} \int dk \omega_k | \bar{\phi}(k) |^2. \quad (\text{IV.51})$$

Convém mencionar que (IV.51) é uma constante infinita (no limite $\epsilon \rightarrow 0$) e tal normalização é de caráter formal; mesmo assim as quantidades de interesse físico calculadas no próximo capítulo assumem valores finitos. Com a constante η determinada por (IV.50) e (IV.51), a aplicação do operador (IV.46) sobre o vácuo de Fock produz um estado normalizado de um sóliton extenso. O operador de criação assim definido é análogo ao operador (II.46) do modelo de quarks e apropriado para o estudo de efeitos de superposição . Ele difere porém significativamente de um operador de campo usual, que satisfaria a condição (III.20.b).

Capítulo V

Efeitos de Superposição em Sistemas de Sólitons Topológicos

V.1 Efeitos de Estatística sobre a Norma

É inevitável conjecturar sobre a possibilidade do caráter extenso do sóliton introduzir efeitos interessantes nas diversas quantidades que o caracterizam. Estudaremos, nesta seção, modificações da norma de um estado com dois sólitons, no mesmo espírito do trabalho realizado por G. Krein no quadro do modelo de quarks, como exposto na seção (II.1.4).

Semelhante à (II.51), pode-se definir uma quantidade que meça o quanto a norma de um estado de dois sólitons é afetada pela extensão espacial:

$$Z(d) = \langle y_1 | \psi(y_2) \psi^\dagger(y_2) | y_1 \rangle. \quad (\text{V.1})$$

Pela invariância de translação e reflexão do sistema, esta norma depende somente da distância $d = |y_1 - y_2|$ entre os sólitons; no que segue escolhemos $y_1 > y_2$. Usando (IV.18), (IV.46) e as relações (A.6), podemos colocar $Z(d)$ na forma:

$$Z(d) = e^{-2\tau_4(0)} \langle 0 | e^{A^{(-)}(y_1)} e^{A^{(+)}(y_2)} e^{A^{(-)}(y_2)} e^{A^{\dagger(+)}(y_2)} e^{A^{\dagger(-)}(y_2)} e^{A^{\dagger(+)}(y_1)} | 0 \rangle. \quad (\text{V.2})$$

O procedimento usado para avaliar esta expressão consiste em usar a fórmula (A.3) para conduzir os operadores de criação $A^{(+)}$ e $A^{\dagger(+)}$ para a esquerda e os operadores de destruição $A^{(-)}$ e $A^{\dagger(-)}$ para a direita até atingirem os respectivos vácuos. Utilizando a notação do

apêndice D.1 para os comutadores, obtem-se sucessivamente:

$$\begin{aligned}
 Z(d) &= e^{-2\tau_4(0)+\tau_1(d)+\tau_3(-d)} \langle 0 | e^{A^{(-)}(y_1)} e^{A^{(-)}(y_2)} e^{A^{\dagger(+)}(y_2)} e^{A^{\dagger(+)}(y_1)} | 0 \rangle \\
 &= e^{-\tau_4(0)+\tau_1(d)+\tau_3(-d)+\tau_4(d)} \langle 0 | e^{A^{(-)}(y_1)} e^{A^{\dagger(+)}(y_2)} e^{A^{\dagger(+)}(y_1)} | 0 \rangle \\
 &= e^{\tau_1(d)+\tau_3(-d)+\tau_4(d)+\tau_4(-d)} \langle 0 | e^{A^{\dagger(+)}(y_2)} e^{A^{\dagger(+)}(y_1)} | 0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{V.3}$$

Assim, se definirmos:

$$\tau(d) = \tau_1(d) + \tau_3(-d) + \tau_4(d) + \tau_4(-d) \tag{V.4}$$

podemos escrever:

$$Z(d) = e^{\tau(d)}. \tag{V.5}$$

O expoente de (V.5) é avaliado no apêndice D.2, com o resultado (D.19):

$$\tau(d) = \int_0^\infty dk \cos kd \bar{\tau}(k) \tag{V.6}$$

onde

$$\bar{\tau}(k) = \frac{4\pi}{\beta^2} \omega_k \frac{\text{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)}{k^2 + \epsilon^2} - \frac{2}{k^2 + \epsilon^2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta^2}\right)^2 \omega_k^2 \text{sch}^4\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + k^2}. \tag{V.7}$$

Ao calcular os limites da função $\bar{\tau}(k)$ verificamos que:

$$\bar{\tau}(k \rightarrow 0) \longrightarrow -\frac{\beta^2}{2m\pi} \tag{V.8.a}$$

$$\bar{\tau}(k \rightarrow \infty) \longrightarrow -\frac{2}{k}. \tag{V.8.b}$$

Vemos que ao redor da origem $\bar{\tau}(k)$ tende a uma constante, não possuindo nenhum pólo, de maneira que podemos tomar $\epsilon = 0$ em (V.7). O comportamento do integrando $\bar{\tau}(k)$ no limite infinito implica que a função $\tau(d)$ possua uma divergência logarítmica para $d \rightarrow 0$. O tratamento desta divergência terá que ser feito com cuidado, pois ela será responsável pelo aparecimento do caráter fermiônico no problema. O procedimento que iremos seguir será o de separar uma parte de $\bar{\tau}(k)$, denotada por $\bar{\tau}_{fin}(k)$, que não leva a nenhuma divergência na integral correspondente e uma parte $\bar{\tau}_{div}(k)$ cuja integração produz a divergência logarítmica. No decorrer do cálculo a primeira parte será tratada numericamente; ela possui

um integrando complicado, mas bem comportado. A segunda parte será tratada analiticamente. Assim poderemos escrever:

$$\bar{\tau}(k) = \bar{\tau}_{fin}(k) + \bar{\tau}_{div}(k) \tag{V.9}$$

e função $Z(d)$ ficará:

$$\begin{aligned} Z(d) &= \exp \left(\int_0^\infty dk \cos kd \left[\bar{\tau}_{fin}(k) + \bar{\tau}_{div}(k) \right] \right) \\ &= e^{\tau_{fin}(d) + \tau_{div}(d)}. \end{aligned} \tag{V.10}$$

A separação em dois termos é amplamente arbitrária, pois apenas o comportamento assintótico de $\bar{\tau}_{div}(k)$ é especificado por (V.8.b). Procuramos uma função cuja integração analítica seja relativamente fácil. A candidata mais simples encontrada é a seguinte:

$$\bar{\tau}_{div}(k) = -\frac{2}{k + b}. \tag{V.11}$$

Pelo fato da constante b ser livre, e ter a dimensão de massa, podemos, por questões de conveniência, escolher $b = m$, a massa do bóson. Devemos ressaltar que tal escolha é apenas de natureza matemática, não possuindo maior implicação física. A forma explícita para $\tau_{fin}(d)$ então fica:

$$\begin{aligned} \tau_{fin}(d) &= \int_0^\infty dk \cos kd \left[\omega_k \frac{4\pi \operatorname{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)}{\beta^2 k^2} - \frac{2}{k^2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta^2}\right)^2 \omega_k^2 \operatorname{sch}^4\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + k^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{k + m} \right]. \end{aligned} \tag{V.12}$$

A transformada de (V.11) pode ser realizada analiticamente consultando um resultado da tabela [45]:

$$\int_0^\infty dk \frac{\cos kx}{k + b} = -\sin(bx)\operatorname{si}(bx) - \cos(bx)\operatorname{ci}(bx) \tag{V.13}$$

onde $x > 0$, $\operatorname{si}(x)$ é o seno integral e $\operatorname{ci}(x)$ é o cosseno integral definidos por:

$$\operatorname{si}(x) = -\int_x^\infty dt \frac{\sin t}{t} = -\frac{\pi}{2} + \int_0^x dt \frac{\sin t}{t} \tag{V.14.a}$$

$$\operatorname{ci}(x) = -\int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t} = \gamma + \ln x + \int_0^x dt \frac{\cos t - 1}{t} \tag{V.14.b}$$

com $\gamma = 0.577215\dots$ a constante de Euler. Propriedades importantes das funções integrais definidas acima são :

$$\text{ci}(x \rightarrow 0) = -\infty \quad (\text{V.15.a})$$

$$\text{ci}(x \rightarrow \infty) = \text{si}(x \rightarrow \infty) = 0. \quad (\text{V.15.b})$$

Usando os resultados acima, retornamos ao nosso problema:

$$\tau_{div}(d) = -2 \int_0^\infty dk \frac{\cos kd}{k+m} = 2 \left[\sin(md)\text{si}(md) + \cos(md)\text{ci}(md) \right]. \quad (\text{V.16})$$

Analisando os limites de (V.16) verificamos que:

$$\tau_{div} (d \rightarrow 0) \longrightarrow -\infty \quad (\text{V.17.a})$$

$$\tau_{div} (d \rightarrow \infty) \longrightarrow 0. \quad (\text{V.17.b})$$

O primeiro limite acima mostra que o comportamento fermiônico está presente no nosso cálculo. Quando os sólitos estão próximos a divergência de $\tau_{div}(d)$ faz a norma $Z(d)$ tender a zero.

Para a avaliação numérica da função $Z(d)$, os parâmetros β e m precisam ser fixados de alguma forma. Embora o modelo de sine-Gordon não forneça evidentemente uma descrição realista da estrutura hadrônica, escolheremos estes parâmetros de maneira que a energia e o tamanho do sóliton reproduzam a massa e o raio do núcleon respectivamente. Assim espera-se que os efeitos observados no modelo simplificado permanessem presentes, em nível qualitativo ou semi-quantitativo, num modelo mais realista. Identificando a energia (III.5) com a massa de repouso do núcleon $M_n = 4.75 \text{ fm}^{-1}$ (938 Mev) obtemos a seguinte relação entre β e m :

$$E = \frac{8m}{\beta^2} = M_n. \quad (\text{V.18})$$

Definiremos o “raio” quadrático médio do sóliton unidimensional por:

$$r_0 = \sqrt{\frac{\int_0^\infty dx x^2 |\phi_c(x)|^2}{\int_0^\infty dx |\phi_c(x)|^2}} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty dx x^2 (\arctan e^{-mx})^2}{\int_0^\infty dx (\arctan e^{-mx})^2}} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{\int_0^\infty dy y^2 (\arctan e^{-y})^2}{\int_0^\infty dy (\arctan e^{-y})^2}}.$$

O radicando acima pode ser avaliado calculando a razão das integrais numericamente. O resultado obtido para a raiz é 0.795. Para fins práticos podemos tomar o valor 0.8. Assim:

$$r_0 = \frac{0.8}{m}. \tag{V.19}$$

Uma vez especificado o valor de r_0 esta relação determina a massa m do bóson; a relação (V.18) fixa β :

$$\beta = \frac{2.52}{\sqrt{r_0 M_n}}. \tag{V.20}$$

Será interessante analisar a variação do efeito de superposição com a raio do núcleon, isto é, tomaremos alguns valores típicos de r_0 : $r_0 = 0.5$ fm; $r_0 = 0.8$ fm; $r_0 = 1$ fm. A integração numérica de $\bar{\tau}_{fin}(k)$ é na realidade uma transformada de Fourier em cosseno.

A figura (V.1) mostra que a divergência logarítmica é responsável pela atuação do princípio de Pauli no problema, fazendo a norma tender a zero, no limite de separação nula entre os centros dos sólitos. No limite de grande separação , $d \gg r_0$, os efeitos de superposição se tornam desprezíveis e a norma tende à unidade. Para separações intermediárias, $d \approx 2r_0$, a norma $Z(d)$ excede a unidade e alcança um máximo. A comparação destes resultados com aqueles obtidos no próximo capítulo para o modelo não - topológico nos levará a interpretar este efeito como uma manifestação da estatística de Bose dos quantas elementares que constituem o sóliton. No gráfico (V.2) vemos uma comparação entre os efeitos de superposição para três valores do raio quadrático médio do sóliton. O comportamento geral da norma não se modifica significativamente com r_0 , apenas, quando diminuimos r_0 , a posição do máximo de $Z(d)$ e a região assintótica $Z(d) \approx 1$ se deslocam para valores menores da separação d , como era de se esperar.

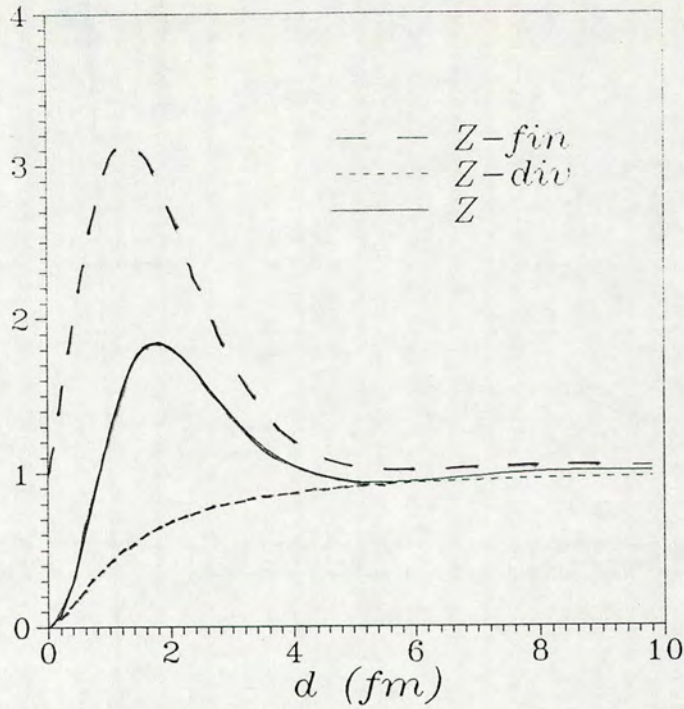


Figura V.1: A norma $Z(d)$ do estado de dois s0litons como função da separação entre seus centros, para $r_0 = 1$ fm. A figura também mostra $\exp(\tau_{div}(d))$ e $\exp(\tau_{fin}(d))$.

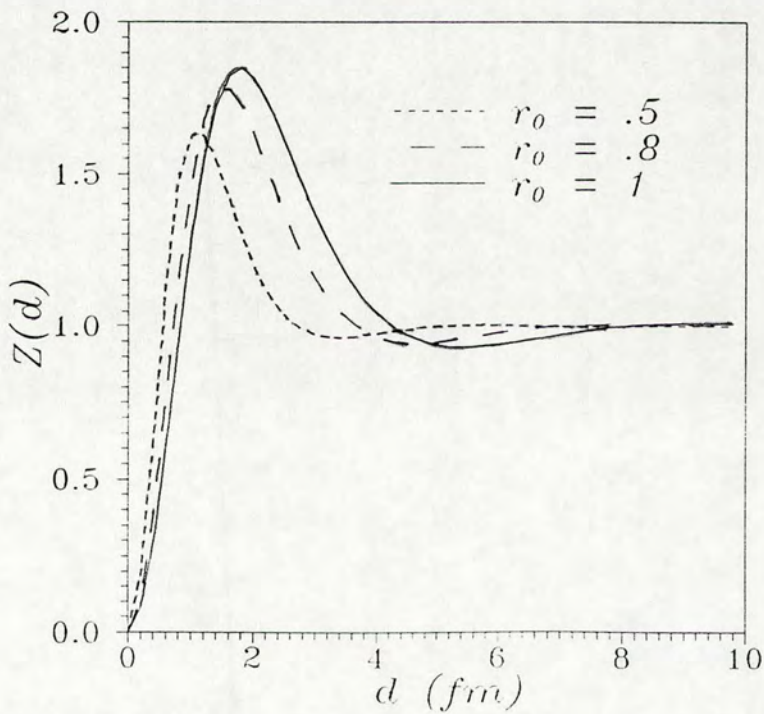


Figura V.2: Comparação entre os efeitos de superposição sobre a norma $Z(d)$ para três valores do raio (em fm) do s0liton.

V.2 Efeitos de Superposição sobre a Energia

Na seção anterior, chamamos de estado de dois sólítos o estado obtido pela aplicação de dois operadores de criação (IV.14) sobre o vácuo de Fock. Pela definição destes operadores, estamos assegurados que o estado assim construído possui uma carga topológica igual a dois e, no limite de grande separação $d = |y_1 - y_2|$, corresponde de fato a um sistema de dois sólítos de campos médios individuais dados pela solução clássica estática (III.4). Podemos porém indagar a respeito da natureza do estado em questão quando a separação d fica suficientemente pequena para que haja superposição entre os sólítos. Nesta seção, demonstramos que o estado obtido pela aplicação sobre o vácuo de N operadores do tipo (IV.14) é um estado coerente, cujo campo médio correspondente é a soma dos campos médios individuais associados aos N sólítos. Além disso, calculamos o valor esperado da energia no sistema de dois sólítos, como função da separação d . O resultado evidencia o caráter de repulsão da interação entre sólítos no modelo de sine-Gordon.

Representaremos o valor esperado de um operador O num estado de N sólítos por $\langle O \rangle_N$, com a definição usual:

$$\langle O \rangle_N = \frac{\langle y_1, \dots, y_N | O | y_N, \dots, y_1 \rangle}{\langle y_1, \dots, y_N | y_N, \dots, y_1 \rangle} \quad (V.21)$$

onde o estado geral de N sólítos é definido por:

$$| y_N, \dots, y_1 \rangle = \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i) | 0 \rangle = \psi^\dagger(y_N) \dots \psi^\dagger(y_1) | 0 \rangle. \quad (V.22)$$

No sentido de provar que este estado é um auto-estado do operador de destruição do campo bosônico $a(k)$, e de determinar o autovalor correspondente, calcularemos o comutador de $a(k)$ com o produto de operadores presente em (V.22). Usando (IV.14) e a fórmula (A.2), obtemos o comutador de $a(k)$ com um membro do produto:

$$[a(k), \psi^\dagger(y)] = u(k, y) \psi^\dagger(y) \quad (V.23)$$

onde definimos a função :

$$u(k, y) = -\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} e^{-iky} \bar{\phi}(k). \quad (V.24)$$

Com o uso repetido da relação operatorial:

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \quad (\text{V.25})$$

tem-se então :

$$\begin{aligned} [a(k), \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i)] &= \psi^\dagger(y_N)[a(k), \prod_{i=1}^{N-1} \psi^\dagger(y_i)] + [a(k), \psi^\dagger(y_N)] \prod_{i=1}^{N-1} \psi^\dagger(y_i) \\ &= \psi^\dagger(y_N)[a(k), \prod_{i=1}^{N-1} \psi^\dagger(y_i)] + u(k, y_N) \psi^\dagger(y_N) \prod_{i=1}^{N-1} \psi^\dagger(y_i) \\ &= \psi^\dagger(y_N) \psi^\dagger(y_{N-1}) [a(k), \prod_{i=1}^{N-2} \psi^\dagger(y_i)] + \\ &\quad + \psi^\dagger(y_N) [a(k), \psi^\dagger(y_{N-1})] \prod_{i=1}^{N-2} \psi^\dagger(y_i) + u(k, y_N) \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i) \\ &= \psi^\dagger(y_N) \psi^\dagger(y_{N-1}) [a(k), \prod_{i=1}^{N-2} \psi^\dagger(y_i)] + \\ &\quad + \left(u(k, y_N) + u(k, y_{N-1}) \right) \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i). \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

Prosseguindo a comutação até o último operador obtemos:

$$\begin{aligned} [a(k), \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i)] &= \prod_{i=2}^N \psi^\dagger(y_i) [a(k), \psi^\dagger(y_1)] + \sum_{j=2}^N u(k, y_j) \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i) \\ &= \sum_{j=1}^N u(k, y_j) \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i) \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

ou seja,

$$[a(k), \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i)] = -\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \bar{\phi}(k) \sum_{j=1}^N \exp(-iky_j) \prod_{i=1}^N \psi^\dagger(y_i). \quad (\text{V.28})$$

Assim fica evidente que a relação de autovalores característica de uma estado coerente é verdadeira:

$$a(k) |y_N, \dots, y_1\rangle = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} h(k) |y_N, \dots, y_1\rangle \quad (\text{V.29})$$

com

$$h(k) = -\bar{\phi}(k) \sum_{j=1}^N \exp(-iky_j). \quad (\text{V.30})$$

Com isto podemos calcular $\langle \phi(x) \rangle_N$ substituindo a forma (V.30) para $h(k)$ na fórmula genérica (C.3) para valor esperado do campo e juntando este resultado com (IV.24). Obtemos:

$$\langle \phi(x) \rangle_N = \sum_{i=1}^N \phi_c(x - y_i). \quad (\text{V.31})$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para $\langle \pi(x) \rangle_N$ com o resultado:

$$\langle \pi(x) \rangle_N = 0. \quad (\text{V.32})$$

Assim verifica-se que campo médio no estado N sólitons é dado pela soma dos campos médios individuais, ou seja, pela soma das soluções clássicas estáticas centradas nos pontos $y_1 \dots y_N$. Este campo médio total não satisfaz a equação de campo, já que esta é não-linear. Em outras palavras, as interações entre sólitons não estão levadas em conta no estado (V.22). Podemos avaliar estas interações perturbativamente calculando o valor esperado do hamiltoniano no estado em questão. De acordo com a propriedade geral de um estado coerente, o valor esperado do hamiltoniano é obtido simplesmente substituindo (V.31) e (V.32) na expressão (C.12), isto é:

$$\langle H \rangle_N = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N \nabla_x \phi_c(x - y_i) \right]^2 + \frac{m^2}{\beta^2} \left(1 - \cos \beta \left[\sum_{i=1}^N \phi_c(x - y_i) \right] \right) \right\}. \quad (\text{V.33})$$

O nosso interesse consiste em calcular a energia quando $N = 2$; chamando $y_1 = y$ e $y_2 = z$ temos:

$$E_2 \equiv \langle H \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} [\nabla_x \phi_c(x - y) + \nabla_x \phi_c(x - z)]^2 + \frac{m^2}{\beta^2} \left(1 - \cos \beta [\phi_c(x - y) + \phi_c(x - z)] \right) \right\}. \quad (\text{V.34})$$

Será conveniente separar as energias individuais dos sólitons da energia de interação entre eles. Com algumas manipulações, podemos reescrever (V.34) na forma:

$$\begin{aligned} E_2 = & \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} [\nabla_x \phi_c(x - y)]^2 + \frac{m^2}{\beta^2} [1 - \cos \beta \phi_c(x - y)] + \right. \\ & + \frac{1}{2} [\nabla_x \phi_c(x - z)]^2 + \frac{m^2}{\beta^2} [1 - \cos \beta \phi_c(x - z)] + \\ & + \nabla_x \phi_c(x - y) \nabla_x \phi_c(x - z) + \frac{m^2}{\beta^2} \left[\cos \beta \phi_c(x - y) + \cos \beta \phi_c(x - z) \right. \\ & \left. \left. - \cos \beta [\phi_c(x - y) + \phi_c(x - z)] - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.35})$$

ou ainda:

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \mathcal{H}_0(x-y) + \mathcal{H}_0(x-z) + \mathcal{H}_i(x,y,z) \right\} \quad (\text{V.36})$$

onde \mathcal{H}_0 é a densidade de energia do sóliton de sine-Gordon estático isolado, cuja integral fornece a massa da partícula associada, e $\mathcal{H}_i(x,y,z)$ é a parte de interação sóliton-sóliton.

De (III.2) e (III.5) obtemos para a soma das massas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \mathcal{H}_0(x-y) + \mathcal{H}_0(x-z) \right\} = \frac{16m}{\beta^2}. \quad (\text{V.37})$$

A nossa preocupação central será, portanto, a de calcular:

$$E_i(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{H}_i(x,y,z) \quad (\text{V.38})$$

que representa a energia de interação de dois sólitons centrados em y e z respectivamente. O cálculo analítico de (V.38) é um pouco elaborado, por isso optamos em discutir os detalhes desta resolução no apêndice E, apresentando a seguir apenas o resultado final. Definindo $d \equiv z - y$ obtemos:

$$E_i(d) = \frac{32m}{\beta^2} \frac{\text{ch}^4\left(\frac{md}{2}\right)}{\text{sh}^3(md)} \left[\text{sh}(md) - md \right] + \frac{8m}{\beta^2} \left[\frac{md}{\text{sh}(md)} - 1 \right]. \quad (\text{V.39})$$

É fácil ver que:

$$\lim_{d \rightarrow 0} E_i(d) = \frac{16m}{3\beta^2} > 0 \quad (\text{V.40.a})$$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} E_i(d) = 0. \quad (\text{V.40.b})$$

O gráfico de $E_i(d)$ pode ser visto na figura (V.3), normalizado pela energia de um sóliton (III.5). Observa-se um efeito de repulsão entre sólitons semelhante a uma barreira finita.

Argumentos apontando para a natureza repulsiva da interação entre sólitons no modelo de sine-Gordon já foram apresentados na literatura [46]. Intuitivamente podemos entender este fato, ao lembrarmos o que foi argumentado no capítulo III onde o campo $\phi(x)$ do modelo de sine-Gordon, que mapeia \mathbb{R}^1 em \mathbb{S}^1 , foi interpretado como um ângulo de torção. Em outras palavras o estado de um sóliton pode ser representado por uma torção de 2π em, por exemplo, um elástico, como é visto na figura (V.4). Um estado com dois sólitons, por sua vez, pode ser representado por uma torção de 4π . Com a aproximação dos dois sólitons vemos na figura V.4.c que surge naturalmente uma força de repulsão entre eles devido a características puramente topológicas.

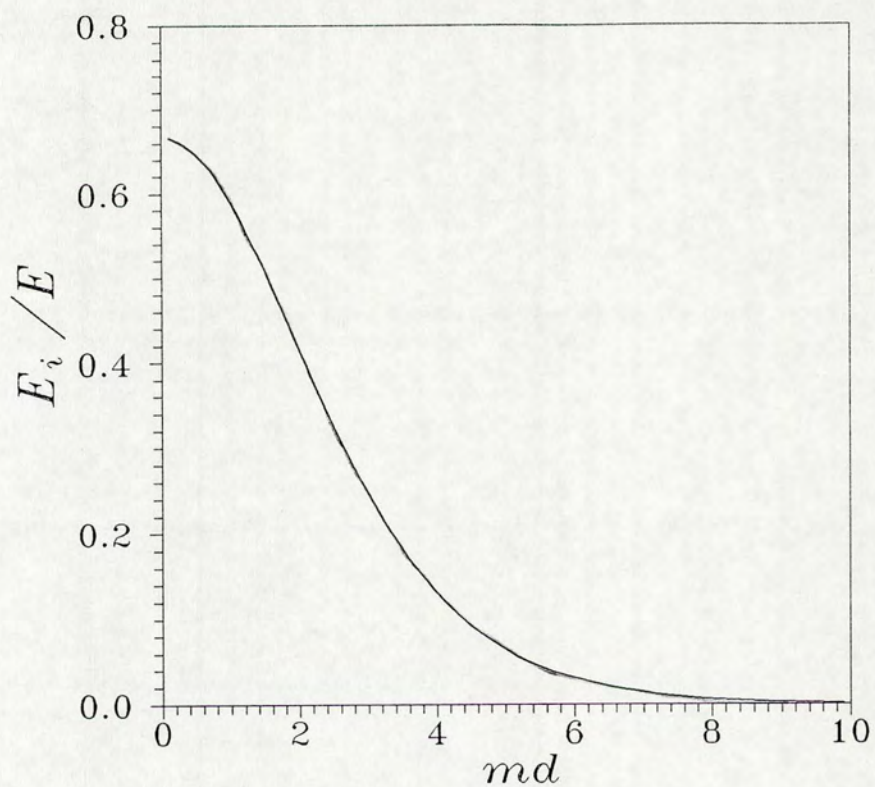
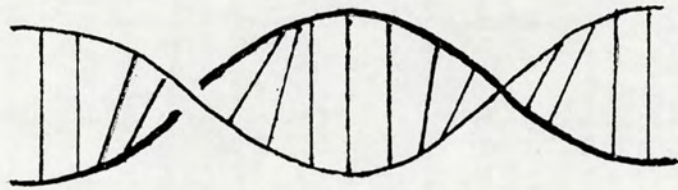
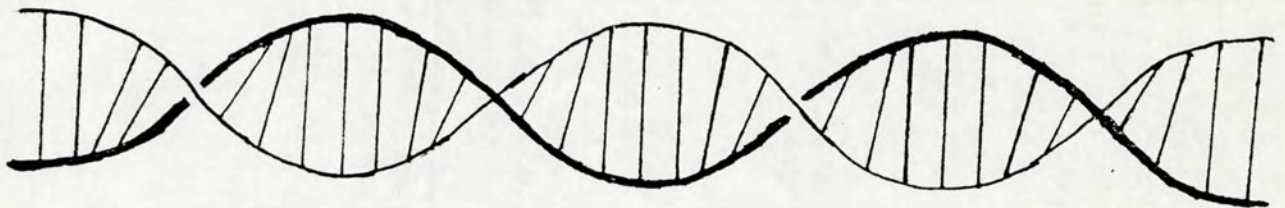


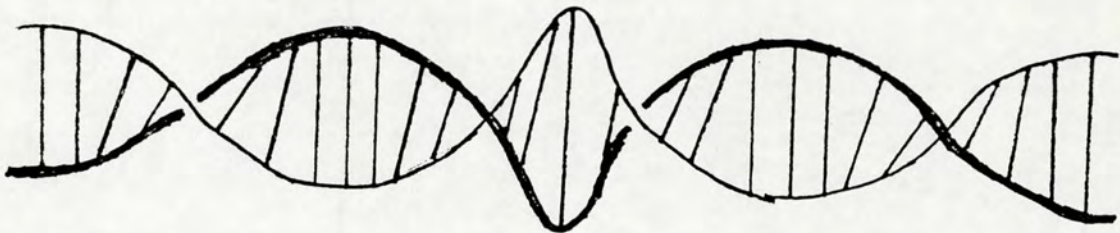
Figura V.3: Energia de interação de dois sólitons como função da distância relativa.



(a)



(b)



(c)

Figura V.4: (a) Estado de um sóliton: torção de 2π ; (b) estado de dois sólitons: torção de 4π ; (c) repulsão entre sólitons.

Capítulo VI

Efeitos de Superposição em Sistemas de Sólitons Não-Topológicos

VI.1 Modelo Unidimensional Simples

Este capítulo será destinado ao estudo de um modelo unidimensional simples de sóliton não - topológico que incorpora as características essenciais do modelo realista em três dimensões descrito no capítulo II.

Num estado com dois sólitons os efeitos de estatística relevantes que podem emergir correspondem às superposições do tipo quark-quark e condensado-condensado de sólitons diferentes. Tendo em vista que efeitos de estatística relacionados com os quarks foram estudados em [26,27] e revisados na seção II.1.4, desprezamos estes efeitos, concentrando a atenção em efeitos novos que podem surgir com o acréscimo do campo de confinamento. Desta forma, consideramos o sistema de três quarks como um único férmion e imaginamos o sóliton não - topológico como um sistema composto deste férmion confinado por um campo escalar. A natureza fermiônica do sistema está inteiramente associada ao férmion em questão, o campo de confinamento possuindo caráter puramente bosônico. Portanto ao se fazer um cálculo dos efeitos de estatística sobre a norma, torna-se possível decompor estes efeitos numa contribuição bosônica e outra fermiônica, para estudá-las separadamente. Este estudo servirá de base para efetuar uma comparação com os efeitos de superposição que aparecem no modelo de sóliton topológico estudado nos capítulos anteriores.

Cabe ressaltar que não formulamos aqui um modelo dinâmico específico; simplesmente

postulamos que a dinâmica do confinamento resulta num campo confinante médio e numa densidade fermiônica semelhantes às aquelas nas figuras II.3 e II.4. Por questão de simplicidade, tratamos o férmion como uma partícula não - relativística cuja função de onda assume uma forma gaussiana:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}r_0)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4r_0^2}\right) \quad (\text{VI.1})$$

onde r_0 é o raio quadrático médio. No intuito de associar um estado coerente ao campo de confinamento, introduzimos um operador de campo cujo valor esperado no vácuo é nulo:

$$\phi(x) = \sigma(x) - \sigma_{vac}. \quad (\text{VI.2})$$

Inspirados pelas figuras II.3 e II.4, aproximamos o campo médio $\phi_c(x)$ do sóliton por uma gaussiana de mesma extensão que (VI.1):

$$\phi_c(x) = -\phi_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4r_0^2}\right) \quad (\text{VI.3})$$

onde ϕ_0 é uma constante positiva.

O operador de campo bosônico $\phi(x)$ pode ser expandido em ondas planas de acordo com (III.27). O vácuo do modelo é o produto tensorial de um vácuo bosônico e um vácuo fermiônico:

$$|0\rangle = |0\rangle_B |0\rangle_F \quad (\text{VI.4})$$

com

$$a(k) |0\rangle_B = 0 \quad \forall k \quad (\text{VI.5.a})$$

$$q(x) |0\rangle_F = 0 \quad \forall x \quad (\text{VI.5.b})$$

onde $q(x)$ é o campo fermiônico não - relativístico associado ao férmion puntual, satisfazendo as relações de anticomutação usuais:

$$\{q(x), q(y)\} = \{q^\dagger(x), q^\dagger(y)\} = 0 \quad (\text{VI.6.a})$$

$$\{q(x), q^\dagger(y)\} = \delta(x - y). \quad (\text{VI.6.b})$$

O estado quântico de um sóliton centrado em y é obtido pela aplicação sobre o vácuo (VI.4) de um operador de criação composto de uma parte bosônica e uma fermiônica:

$$|y\rangle = \psi^\dagger(y) |0\rangle = \psi_B^\dagger(y) \psi_F^\dagger(y) |0\rangle. \quad (\text{VI.7})$$

A parte fermiônica cria um férmion no estado descrito pela função de onda $\varphi(x - y)$:

$$\psi_F^\dagger(y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \varphi(\xi - y) q^\dagger(\xi). \quad (\text{VI.8})$$

A parte bosônica produz um estado coerente no qual os valores esperados dos operadores de campo $\phi(x)$ e $\pi(x)$ são $\phi_c(x - y)$ e zero, respectivamente. A partir das relações (C.1) e (C.5) do apêndice C, conclui-se então que:

$$\psi_B^\dagger(y) = \eta e^{A^\dagger(y)} \quad (\text{VI.9})$$

com

$$A^\dagger(y) = - \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iky} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \bar{\phi}(k) a^\dagger(k) \quad (\text{VI.10})$$

onde

$$\bar{\phi}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} \phi_c(x) = \sqrt{2} \phi_0 r_0 e^{-k^2 r_0^2}. \quad (\text{VI.11})$$

A constante de normalização η será determinada adiante. Notamos que os operadores de criação definidos acima satisfazem obviamente as relações :

$$[\psi_B^\dagger(x), \psi_B^\dagger(y)] = [\psi_B^\dagger(x), \psi_F^\dagger(y)] = \{\psi_F^\dagger(x), \psi_F^\dagger(y)\} = 0 \quad (\text{VI.12})$$

que implicam:

$$\{\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(y)\} = 0. \quad (\text{VI.13})$$

Assim, o caráter fermiônico dos objetos compostos está trivialmente garantido.

Analogamente ao que foi visto na seção (II.1.4), o ingrediente básico na avaliação dos efeitos de superposição fermiônicos será o anticomutador:

$$\begin{aligned} \{\psi_F(x), \psi_F^\dagger(y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \varphi^*(\xi - x) \varphi(\eta - y) \{q(\xi), q^\dagger(\eta)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \varphi^*(\xi - x) \varphi(\xi - y) \equiv C(x - y). \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

Colocando (VI.1) em (VI.14) e introduzindo a distância relativa $d \equiv |x - y|$, obtemos:

$$C(d) = \exp\left(-\frac{d^2}{8r_0^2}\right). \quad (\text{VI.15})$$

Já os efeitos bosônicos serão determinados pelo comutador:

$$\begin{aligned} [A(y), A^\dagger(x)] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-y)} \omega_k |\bar{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\phi_0^2 r_0^2 \int_0^{\infty} dk \cos kd \omega_k \exp(-2k^2 r_0^2) \equiv \tau_4(d) \end{aligned} \quad (\text{VI.16})$$

onde a notação τ_4 foi introduzida em analogia com o caso dos sólitos topológicos (veja¹ apêndice D). Com esta definição, podemos escrever a expressão da constante η introduzida em (VI.9). Requerendo que o estado (VI.7) seja normalizado, obtemos com a ajuda da fórmula (A.3):

$$\eta^{-2} = e^{-\frac{1}{2}\tau_4(0)}. \quad (\text{VI.17})$$

VI.2 Efeitos de Estatística sobre a Norma

Novamente para estudar os efeitos de superposição no sistema de dois sólitos calcularemos a norma do estado obtido pela aplicação de um segundo operador de criação sobre o estado (VI.7):

$$Z(d) = \langle y_1 | \psi(y_2) \psi^\dagger(y_2) | y_1 \rangle \quad (\text{VI.18})$$

com $d \equiv |y_1 - y_2|$ sendo a distância entre os sólitos. Já que tanto o vácuo como o operador de criação são produtos de uma componente bosônica e outra fermiônica independente, é fácil ver que o mesmo será verdade da norma (VI.18):

$$Z(d) = Z_B(d) Z_F(d). \quad (\text{VI.19})$$

Os termos deste produto podem ser avaliados sem muita dificuldade, mediante a comutação dos operadores de criação e destruição até atingirem os respectivos vácuos. Usando (VI.14),

¹As funções τ_i , $i = 1, 2, 3$ definidas no apêndice D são trivialmente nulas no caso dos sólitos não-topológicos.

obtemos para a parte fermiônica:

$$\begin{aligned}
 Z_F(d) &= {}_F\langle 0 | \psi_F(y_1)\psi_F(y_2)\psi_F^\dagger(y_2)\psi_F^\dagger(y_1) | 0 \rangle_F \\
 &= 1 - C^2(d) \\
 &= 1 - \exp\left(-\frac{d^2}{4r_0^2}\right).
 \end{aligned} \tag{VI.20}$$

Das expressões (VI.9) e (VI.17), o termo bosônico na norma é dado por:

$$Z_B(d) = e^{-2\tau_4(0)} {}_B\langle 0 | e^{A(y_1)}e^{A(y_2)}e^{A^\dagger(y_2)}e^{A^\dagger(y_1)} | 0 \rangle_B. \tag{VI.21}$$

Reproduzindo, numa versão simplificada, os passos que levaram da expressão (V.2) ao resultado (V.5), obtemos:

$$Z_B(d) = e^{2\tau_4(d)}. \tag{VI.22}$$

Assim, a avaliação dos efeitos de superposição requer basicamente o cálculo da função $\tau_4(d)$, dada por (VI.16). Nota-se porém que, além de ser proporcional ao quadrado do valor esperado do campo confinante no centro do sóliton, valor este que depende dos pormenores do modelo, a referida integral depende da escolha feita para a função ω_k . Usualmente, toma-se:

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2} \tag{VI.23}$$

onde μ é a massa dos quanta associados ao campo $\phi(x)$. No caso de um campo escalar com auto-interação $U(\phi)$ esta massa é dada por:

$$\mu^2 = \left. \frac{d^2 U(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_{vac}} \tag{VI.24}$$

onde ϕ_{vac} , o valor do campo no vácuo, corresponde ao mínimo absoluto de $U(\phi)$. Por exemplo, no modelo de sine-Gordon (III.1), esta fórmula leva ao resultado $\mu = m$, que foi utilizado nos capítulos (III-V). No modelo de sóliton não - topológico, o valor de μ irá depender dos valores dos coeficientes da auto-interação (II.12). No intuito de evitar a presença, na região de energias de interesse, de partículas fictícias associadas ao campo confinante procura-se geralmente escolher os parâmetros do modelo de maneira tal que

μ seja muito grande na escala de massas hadrônicas. Nestas condições, já que o raio quadrático médio r_0 é da ordem de 1 fm, temos:

$$\mu \gg r_0^{-1}. \tag{VI.25}$$

Mas é fácil ver que a integral presente em (VI.16) recebe as suas contribuições significativas da região de valores de k tais que $k \lesssim r_0^{-1}$. Assim podemos, sem introduzir um erro apreciável aproximar ω_k por μ nesta integral. A contribuição bosônica (VI.22) para a norma fica então:

$$\begin{aligned} Z_B(d) &= \exp\left(4\phi_0^2 r_0^2 \int_0^\infty dk \cos kd \omega_k e^{-2k^2 r_0^2}\right) \\ &\approx \exp\left(\zeta e^{-d^2/8r_0^2}\right) \end{aligned} \tag{VI.26}$$

onde

$$\zeta = \sqrt{2\pi} \phi_0^2 r_0 \mu. \tag{VI.27}$$

Assim, no que diz respeito à norma de um estado de dois sólitons, as incertezas presentes no nosso modelo manifestam-se através do parâmetro adimensional ζ , cujo valor só poderia ser determinado associando um lagrangiano específico ao modelo.

Escolhendo o valor típico $r_0 = 1$ fm para o raio do sóliton, podemos calcular a contribuição fermiônica $Z_F(d)$ à norma usando (VI.20); o resultado é mostrado na figura VI.1. Como era de se esperar, o efeito de superposição é semelhante àquele observado na figura II.5 para $\bar{\Delta}_{jj} = 0$, ou seja, quando os efeitos de estatística devidos à estrutura interna do sistema de três quarks são ignorados. Já para o cálculo da contribuição bosônica $Z_B(d)$, dada por (VI.26), precisamos escolher valores do parâmetro ζ . A figura VI.1 mostra os resultados para os valores $\zeta = .1$, $\zeta = 1$, $\zeta = 2$. Verifica-se que a estatística de Bose dos quanta do campo confinante produz um aumento da norma a medida que os centros dos sólitons se aproximam. A importância deste efeito cresce rapidamente com ζ , sendo os valores acima escolhidos de maneira a produzir um efeito pequeno, moderado e grande, respectivamente.

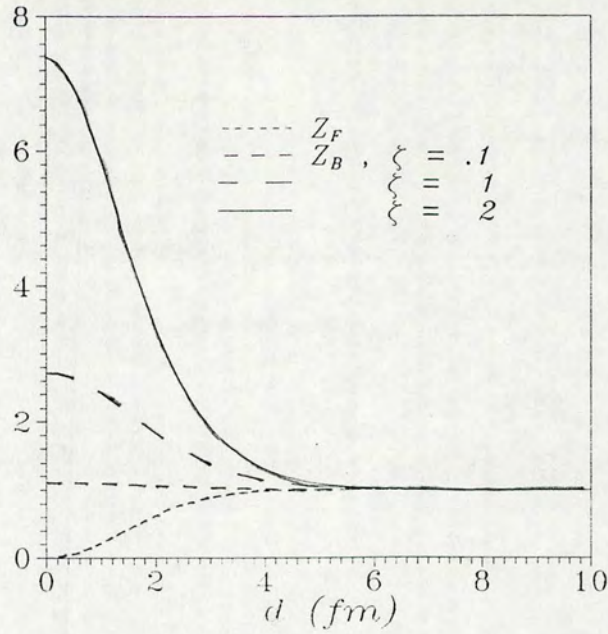


Figura VI.1: Contribuições bosônicas, $Z_B(d)$, e fermiônicas, $Z_F(d)$ à norma do estado de dois sólitons, para o valor de $r_0 = 1$ fm

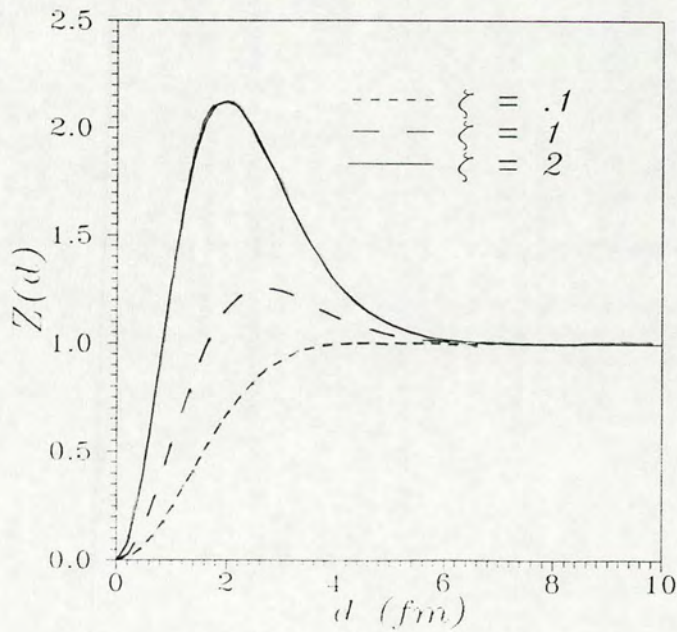


Figura VI.2: Norma $Z(d)$ do estado de dois sólitons para $r_0 = 1$ fm

Os resultados obtidos pela multiplicação das contribuições bosônicas e fermiônicas para obter a norma $Z(d)$ do estado de dois sólitons estão apresentados na figura VI.2. Observa-se uma competição entre a estatística de Fermi dos objetos compostos, responsável pela queda a zero da norma quando os seus centros coincidem, e a estatística de Bose dos quanta do campo confinante, em consequência da qual a norma pode exceder a unidade quando os sólitons se superpõem parcialmente. A comparação da função $Z(d)$ da figura VI.2, para $\zeta = 2$, com a função correspondente ($r_0 = 1$ fm) da figura V.2 referente aos sólitons topológicos, revela uma notável semelhança. Isto sugere fortemente que o pico na função $Z(d)$ origina-se da estatística de Bose dos quanta neste caso também, embora os aspectos bosônicos e fermiônicos não possam ser nitidamente separados nos sólitons topológicos.

Capítulo VII

Conclusão e Perspectivas

A natureza composta do núcleon traz conseqüências importantes para a estrutura nuclear. Afora possíveis efeitos dinâmicos, efeitos devidos à estatística dos constituintes devem manifestar-se quando os núcleons se sobrepõem . No modelo de quarks, é sabido que a possibilidade de trocar um quark com um núcleon vizinho introduz modificações nas funções de estrutura do núcleon quando este está ligado num núcleo. Além disso, tem-se argumentado que, dependendo da extensão espacial do núcleon, estas trocas podem tornar-se ponderáveis, a ponto de invalidar o modelo de camadas.

Os modelos de sóliton envolvem, além dos quarks ou no lugar destes, um campo escalar cuja estatística bosônica pode também levar a efeitos de superposição . No modelo de Skyrme, a própria natureza fermiônica do núcleon deve-se à topologia não - trivial do campo escalar e os aspectos fermiônicos e bosônicos estão relacionados de maneira pouco transparente a priori. Esta dissertação constitui um estudo exploratório destas questões .

O primeiro passo na investigação teórica de efeitos de superposição em estados multinucleônicos consiste na construção de um operador de criação , cuja aplicação repetida produz o referido estado a partir do vácuo. No modelo não - topológico, esta tarefa não apresenta grande dificuldade, bastando combinar um operador fermiônico que cria três quarks com apropriadas funções de onda e um operador bosônico que gera um estado coerente no qual o campo médio de confinamento assume a forma especificada pelo modelo. Já no modelo de Skyrme, a construção de um operador fermiônico, a partir do campo bosônico, ainda representa um desafio teórico. Algumas tentativas foram feitas neste sentido, mas são poucas

as referências na literatura sobre este assunto. Nestas circunstâncias, é razoável abordar o problema considerando um modelo simplificado.

O modelo de sine-Gordon é um modelo unidimensional que possui propriedades topológicas similares ao modelo de Skyrme, onde um operador de criação de sólitons topológicos pontuais fermiônicos foi construído por Mandelstam. Um dos nossos objetivos, nesta dissertação, foi de modificar o operador de Mandelstam de tal forma que ele viesse a criar sólitons topológicos extensos. O operador modificado possui as seguintes propriedades:

- ele incrementa por uma unidade a carga topológica.
- operadores que criam sólitons centrados em pontos diferentes anticomutam, de acordo com a estatística fermiônica.
- os valores médios dos operadores de campo no estado de um sóliton reproduzem a solução clássica estática.
- os valores esperados dos operadores de campo num estado obtido pela aplicação de N operadores de criação sobre o vácuo são as somas dos campos médios associados aos N sólitons individuais.

A consideração de um análogo mecânico para o modelo de sine-Gordon sugere o aparecimento de uma força de repulsão entre os sólitons. Ao avaliar o valor esperado da energia no estado de dois sólitons encontramos para a energia de interação um comportamento de barreira de potencial, revelando o aspecto de repulsão esperado.

Uma vez normalizado o estado obtido pela aplicação de um operador de criação sobre o vácuo, a aplicação de um segundo operador produz um estado de dois sólitons, cuja norma $Z(d)$ é uma função da distância d entre os seus centros. O desvio desta função em relação à unidade fornece um critério para avaliação dos efeitos de estatística devidos à superposição dos objetos extensos. No intuito de comparar os modelos topológicos e não - topológicos, a norma $Z(d)$ foi calculada no modelo de sine-Gordon e também num modelo não - topológico simplificado, definido num espaço unidimensional e constituído de um único férmion confinado num campo escalar.

As principais características dos resultados são as seguintes:

1. Sóliton não - topológico

- A norma $Z(d)$ é produto de partes bosônicas e fermiônicas, isto é, $Z(d) = Z_B(d)Z_F(d)$. Como era de se esperar tanto $Z_B(d)$ como $Z_F(d) \rightarrow 1$ quando $d \rightarrow \infty$, não havendo efeitos de estatística quando os sólitons não se superpõem .
- A extensão da região de valores de d onde $Z_B(d)$ e $Z_F(d)$ diferem significativamente da unidade é aproximadamente proporcional ao tamanho do sóliton.
- O termo $Z_B(d)$, inteiramente devido ao campo confinante, cresce até um valor máximo, maior que 1, quando $d \rightarrow 0$. Esta é obviamente uma manifestação da estatística de Bose dos quanta do campo escalar. A magnitude do aumento de $Z_B(d)$ para d pequena depende fortemente dos detalhes dinâmicos do modelo.
- O termo $Z_F(d)$, devido ao férmion, se anula quando $d \rightarrow 0$. Pode-se considerar este férmion como representando o sistema de três quarks confinados. Como já era sabido, quando se leva em conta a estrutura interna deste sistema, a função $Z_F(d)$ fica deslocada, na direção dos valores maiores de d , por efeitos adicionais devidos à estatística de Fermi dos quarks.
- Em conseqüência das propriedades acima, a norma $Z(d)$ para o sóliton não - topológico tende à unidade para $d \rightarrow \infty$ e apresenta um efeito de competição entre as estatísticas quando d fica suficientemente pequena para que haja superposição apreciável dos sólitons. Enquanto a parte bosônica faz a norma crescer, para $d \rightarrow 0$, a respectiva parte fermiônica faz a norma decrescer até atingir zero.

2. Sóliton topológico

- Já que o caráter fermiônico do sóliton se origina da topologia do campo fundamental bosônico, não é possível separar os efeitos das

duas estatísticas tão nitidamente quanto no caso dos sólitons não - topológicos.

- A norma $Z(d) \rightarrow 1$ quando $d \rightarrow \infty$; a extensão da região de valores de d onde $Z(d)$ se afasta sensivelmente da unidade é quase proporcional ao tamanho do sóliton.
- Verifica-se a existência de uma região onde $Z(d)$ excede a unidade, o que pode ser interpretado como sendo devido aos efeitos bosônicos de superposição dos quanta elementares.
- Pelo fato de estarmos postulando a anticomutação entre os operadores de criação, na situação de superposição total dos sólitons, o efeito fermiônico acaba prevalecendo e a norma vai a zero.
- A norma $Z(d)$ revela um comportamento geral similar àquele obtido para o sóliton não - topológico, expondo a competição entre o caráter bosônico e fermiônico.

Concluindo este estudo, convém admitir que a norma de um vetor de estado é uma quantidade abstrata cuja avaliação não revela efeitos físicos observáveis. A rigor, o vetor sempre pode ser normalizado a posteriori de maneira a permitir o cálculo de valores esperados de quantidades físicas, como feito no presente trabalho para a energia. Porém, como verificou-se no caso do modelo de quarks estudado na referência [26], as características observadas na norma do estado multinucleônico provavelmente irão se refletir em propriedades físicas, tais como funções de estrutura e livre caminho médio do núcleon no meio nuclear. Além disso, a questão da compatibilidade do modelo de camadas com a estrutura do núcleon é um assunto teórico cuja consideração não requer necessariamente a análise de quantidades diretamente mensuráveis. Neste contexto, pode-se objetar também que, na matéria nuclear, os núcleons não estão localizados mas se encontram em estados de momentum bem definido. A partir do operador de criação de um sóliton localizado, seria possível, embora laborioso, construir por transformada de Fourier um operador de criação no espaço de momentum e usá-lo para estudar o gás de Fermi de sólitons extensos. No caso do modelo de sine-Gordon, a equivalência completa com o modelo de Thirring massivo permite

utilizar técnicas alternativas poderosas de resolução do problema de muitos corpos, tais como o Ansatz de Bethe e o espalhamento inverso [47]. Mesmo assim, a comparação entre os resultados fornecidos por estes métodos e aqueles obtidos através do nosso operador de criação poderia se revelar instrutiva.

No modelo de Skyrme, é improvável que se possa estabelecer uma equivalência exata com uma teoria de campo fermiônico. Portanto a construção , em termos do campo bosônico, de um operador de criação para o skyrmion é indispensável para o estudo quântico de sistemas multinucleônicos. A experiência adquirida no modelo de sine-Gordon indica o caminho a ser seguido nesta construção . Operadores de campo tem sido propostos na literatura [48,49] para certos objetos topológicos em duas ou três dimensões , tais como anyons e monopólos. Nestas abordagens, a estrutura do objeto extenso é idealizada por uma linha ou superfície separando a região interna da externa, em analogia com o campo de Mandelstam, que divide o espaço em regiões situadas a esquerda e a direita do sóliton. Métodos semelhantes devem possibilitar a construção de um operador de campo para o skyrmion, que incremente a carga topológica por uma unidade e satisfaça relações de anticomutação fermiônicas. Como realizado no presente trabalho no modelo de sine-Gordon, procuraria-se então incorporar ao operador a estrutura do sóliton especificada pela solução estática “ouriço”, de maneira que o estado obtido pela aplicação do operador sobre o vácuo seja uma realização quântica desta solução . O elemento adicional, que não está presente no modelo de sine-Gordon, seria a atribuição ao operador de números quânticos de spin e isospin, indispensáveis para caracterizar completamente o estado de um núcleon. Esta é uma tarefa desafiadora, particularmente se lembrarmos a necessidade de preservar as propriedades de topologia e estatística do operador.

Apêndice A

Comutadores e Outras Relações Operatoriais

Este apêndice reúne algumas fórmulas operatoriais que estão utilizadas no decorrer desta dissertação .

Sejam A e B dois operadores satisfazendo as condições :

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Mostra-se então

$$[A, e^B] = [A, B]e^B \quad (\text{A.2})$$

como também

$$e^A e^B = e^{[A, B]} e^B e^A \quad (\text{A.3})$$

e

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A, B]} e^A e^B. \quad (\text{A.4})$$

Supomos agora que A e B são combinações lineares dos operadores de campo bosônicos $\phi(x)$, $\pi(x)$. Usando as expansões (III.27), podemos separar A , B e seus adjuntos em partes de criação e destruição , contendo somente operadores $a^\dagger(k)$ e $a(k)$, respectivamente. Por exemplo:

$$A = A^{(+)} + A^{(-)} \quad (\text{A.5.a})$$

$$A^\dagger = A^{\dagger(+)} + A^{\dagger(-)} \quad (\text{A.5.b})$$

onde indicamos as partes de criação pelo superscrito (+) e as partes de destruição pelo superscrito (-). Obviamente:

$$A^{\dagger(+)} = A^{(-)\dagger} \quad (\text{A.6.a})$$

$$A^{\dagger(-)} = A^{(+)\dagger} \quad (\text{A.6.b})$$

$$[A^{(+)}, B^{(+)}] = [A^{(-)}, B^{(-)}] = 0 \quad (\text{A.6.c})$$

$$[A^{(+)}, B^{(-)}] = \text{número-c} \quad (\text{A.6.d})$$

$$A^{(-)} | 0 \rangle = 0 \quad (\text{A.6.e})$$

onde $| 0 \rangle$ é o vácuo de Fock. Por definição, o ordenamento normal da exponencial de um operador deste tipo é tal que:

$$: e^A := e^{A^{(+)}} e^{A^{(-)}}. \quad (\text{A.7})$$

Usando (A.4), obtemos então

$$\begin{aligned} e^A &= e^{-\frac{1}{2}[A^{(+)}, A^{(-)}]} e^{A^{(+)}} e^{A^{(-)}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}[A^{(+)}, A^{(-)}]} : e^A :. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Aplicando esta relação ao operador $A+B$ e invocando (A.4) e (A.6.c), mostra-se facilmente:

$$e^A e^B = e^{[A^{(-)}, B^{(+)}] + \frac{1}{2}[A^{(-)}, A^{(+)}] + \frac{1}{2}[B^{(-)}, B^{(+)}]} : e^{A+B} :. \quad (\text{A.9})$$

Apêndice B

Transformadas de Fourier de Funções

Não-integráveis

Neste apêndice pretendemos mostrar os detalhes do cálculo das transformadas de Fourier de funções $f(x)$ com valores assintóticos diferentes de zero, isto é:

$$\begin{aligned} f(\infty) &= 0 \\ f(-\infty) &= \text{constante} \end{aligned} \tag{B.1}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \text{constante} \\ f(-\infty) &= 0. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Como primeiro caso tomaremos a função degrau unitário $\theta(x)$. O comportamento desta função corresponde ao caso (B.2) com a constante = 1. Representamos a sua transformada por $\bar{\theta}(k)$:

$$\bar{\theta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \theta(x). \tag{B.3}$$

Pelo fato do integrando não se anular quando $x \rightarrow \infty$ a integral correspondente terá um pólo em $k = 0$. Para evitar esta divergência introduzimos um fator de convergência na integral que levará a uma prescrição definida para o contorno do pólo. Assim a transformada de Fourier que iremos calcular será:

$$\bar{\theta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x(ik+\epsilon)} \theta(x) \tag{B.4}$$

com $\epsilon > 0$. Podemos integrar por partes, obtendo:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(k) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(ik + \epsilon)} e^{-x(ik+\epsilon)} \theta(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ik + \epsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x(ik+\epsilon)} \delta(x). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

O primeiro termo do lado direito de (B.5) é nulo, pois para $x \rightarrow -\infty$ a função degrau unitário é zero e para $x \rightarrow \infty$ a exponencial se anula. A integral restante é trivialmente igual a 1. Então a transformada de Fourier da função degrau unitário fica:

$$\bar{\theta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ik + \epsilon)}. \quad (\text{B.6})$$

Outra transformada de Fourier utilizada nesta dissertação é a transformada da solução clássica estática no modelo de sine-Gordon. Usamos a notação do capítulo IV:

$$\bar{\phi}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \phi_c(x) = \frac{4}{\beta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \arctan e^{-mx}. \quad (\text{B.7})$$

Pelo fato de $\phi_c(-\infty) = -2\pi/\beta$ e $\phi_c(\infty) = 0$, a integral (B.7) não converge em $x = -\infty$. Novamente introduziremos um fator de convergência na integral:

$$\bar{\phi}(k) = \frac{4}{\beta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x(ik-\epsilon)} \arctan e^{-mx}. \quad (\text{B.8})$$

Lembrando:

$$\frac{d}{dx} \arctan e^{-mx} = -\frac{m}{2} \text{sch}(mx) \quad (\text{B.9})$$

pode-se integrar por partes a expressão (B.8):

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(k) &= -\frac{4}{\beta\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x(ik-\epsilon)}}{ik - \epsilon} \arctan e^{-mx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &- \frac{2m}{\sqrt{2\pi}\beta(ik - \epsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x(ik-\epsilon)} \text{sch}(mx). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Observando que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x\epsilon} \arctan e^{-mx} = 0 \quad (\text{B.11})$$

se $m > \epsilon$, verifica-se que o primeiro termo de (B.10) é identicamente nulo. No segundo termo pode-se desprezar o fator de convergência ϵ , pelo fato da $\text{sch}(mx)$ tender para zero no limites infinitos. A transformada de Fourier do campo, então fica:

$$\bar{\phi}(k) = -\frac{4m}{\sqrt{2\pi}\beta(ik - \epsilon)} \int_0^{\infty} dx \cos kx \text{sch}(mx). \quad (\text{B.12})$$

Mas esta integral está tabelada:

$$\int_0^{\infty} dx \cos kx \operatorname{sch}(mx) = \frac{\pi}{2m} \operatorname{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right). \quad (\text{B.13})$$

Então temos:

$$\bar{\phi}(k) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \frac{\operatorname{sch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right)}{(ik - \epsilon)}. \quad (\text{B.14})$$

Apêndice C

Propriedades Gerais dos Estados Coerentes

Neste apêndice, provaremos alguns resultados gerais, válidos para um estado coerente [50,51] qualquer $|\Phi\rangle$, definido por:

$$a(k)|\Phi\rangle = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}h(k)|\Phi\rangle \quad (\text{C.1})$$

onde $h(k)$ é uma função complexa arbitrária e o fator $\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}$ foi introduzido por conveniência. Utilizamos a notação $\langle O \rangle$ para indicar o valor esperado de um operador O no estado $|\Phi\rangle$:

$$\langle O \rangle \equiv \frac{\langle \Phi | O | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle}. \quad (\text{C.2})$$

É fácil relacionar a função $h(k)$ com os valores esperados dos operadores de campo. Usando as decomposições de Fourier (III.27) e a relação (C.1), temos:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left(e^{ikx} \langle a(k) \rangle + e^{-ikx} \langle a^\dagger(k) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left(h(k) + h^*(-k) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

e

$$\begin{aligned} \langle \pi(x) \rangle &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(e^{-ikx} \langle a^\dagger(k) \rangle - e^{ikx} \langle a(k) \rangle \right) \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \omega_k \left(h(k) - h^*(-k) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Resolvendo estas equações para $h(k)$, obtemos:

$$h(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} \left[\langle \phi(x) \rangle + \frac{i}{\omega_k} \langle \pi(x) \rangle \right]. \quad (\text{C.5})$$

Esta relação mostra que a função $h(k)$ fica inteiramente determinada se os valores esperados dos operadores de campo $\phi(x)$ e $\pi(x)$ forem especificados.

Num estado coerente, os valores esperados de produtos (ou potências) de operadores de campo, em ordenamento normal, são iguais aos produtos correspondentes dos valores esperados $\langle \phi(x) \rangle$ e $\langle \pi(x) \rangle$. Por exemplo, usando a expansão (III.27.a) juntamente com (C.1) e (C.3), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \langle : \phi^n(x) \phi^m(y) : \rangle &= \langle : \phi^{n-1}(x) \phi(x) \phi^m(y) : \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left(e^{ikx} \langle : \phi^{n-1}(x) a(k) \phi^m(y) : \rangle + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-ikx} \langle : \phi^{n-1}(x) a^\dagger(k) \phi^m(y) : \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left(e^{ikx} \langle : \phi^{n-1}(x) \phi^m(y) : a(k) \rangle + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-ikx} \langle a^\dagger(k) : \phi^{n-1}(x) \phi^m(y) : \rangle \right) \\
 &= \langle \phi(x) \rangle \langle : \phi^{n-1}(x) \phi^m(y) : \rangle.
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Por recorrência, concluímos facilmente a partir deste resultado que:

$$\langle : \phi^n(x) \phi^m(y) : \rangle = \langle \phi(x) \rangle^n \langle \phi(y) \rangle^m. \tag{C.7}$$

Analogamente, usando a expansão (III.27.b) juntamente com (C.1) e (C.4), deduzimos que:

$$\begin{aligned}
 \langle : \pi^n(x) : \rangle &= \langle : \pi^{n-1}(x) \pi(x) : \rangle \\
 &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(e^{-ikx} \langle a^\dagger(k) : \pi^{n-1}(x) : \rangle - e^{ikx} \langle : \pi^{n-1}(x) : a(k) \rangle \right) \\
 &= \langle \pi(x) \rangle \langle : \pi^{n-1}(x) : \rangle.
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Novamente por recorrência, concluímos que:

$$\langle : \pi^n(x) : \rangle = \langle \pi(x) \rangle^n. \tag{C.9}$$

Os resultados (C.7) e (C.9) nos permitem exprimir a energia média no estado coerente, para o modelo de sine-Gordon, em termos dos valores esperados dos operadores de campo.

Usando (C.7), temos

$$\langle : \cos \beta \phi(x) : \rangle = \sum_n c_n \beta^n \langle \phi(x) \rangle^n = \cos \beta \langle \phi(x) \rangle \tag{C.10}$$

e também

$$\begin{aligned} \langle : [\nabla_x \phi(x)]^2 : \rangle &= \lim_{y \rightarrow x} \nabla_x \nabla_y \langle : \phi(x) \phi(y) : \rangle \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \nabla_x \nabla_y \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle = [\nabla_x \langle \phi(x) \rangle]^2. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Com (C.9), (C.10) e (C.11), o valor esperado do hamiltoniano (III.2) no estado coerente fica:

$$\langle H \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \langle \pi(x) \rangle^2 + \frac{1}{2} \left(\nabla_x \langle \phi(x) \rangle \right)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta \langle \phi(x) \rangle) \right]. \quad (\text{C.12})$$

Apêndice D

Cálculos Complementares com o Operador de Criação de Sólitons

D.1 Comutadores entre partes de destruição e criação de $A(x)$ e $A^\dagger(x)$

Definiremos a seguir os comutadores entre as partes de destruição e criação (bosônicas) do expoente do operador de criação fermiônico e do seu adjunto. Escreveremos estes comutadores numa forma conveniente para a sua futura avaliação numérica. É conveniente lembrar a forma do expoente do operador de criação (IV.14) para sólitons fermiônicos extensos:

$$A^\dagger(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} [\bar{\phi}(k) a^\dagger(k) - \bar{\chi}(k) a(-k)] \quad (D.1)$$

cujo conjugado hermítico é:

$$A(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} [\bar{\phi}^*(k) a(k) - \bar{\chi}^*(k) a^\dagger(-k)]. \quad (D.2)$$

A decomposição destes operadores em partes de criação e destruição fica:

$$A^{\dagger(+)}(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \bar{\phi}(k) a^\dagger(k) \quad (D.3.a)$$

$$A^{\dagger(-)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \bar{\chi}(k) a(-k) \quad (D.3.b)$$

$$A^{(+)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \bar{\chi}^*(k) a^\dagger(-k) \quad (D.3.c)$$

$$A^{(-)}(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \bar{\phi}^*(k) a(k). \quad (D.3.d)$$

Definimos os seguintes comutadores:

$$\tau_1(x - y) \equiv [A^{\dagger(-)}(y), A^{\dagger(+)}(x)] \quad (\text{D.4.a})$$

$$\tau_2(x - y) \equiv [A^{\dagger(-)}(y), A^{(+)}(x)] \quad (\text{D.4.b})$$

$$\tau_3(x - y) \equiv [A^{(-)}(y), A^{(+)}(x)] \quad (\text{D.4.c})$$

$$\tau_4(x - y) \equiv [A^{(-)}(y), A^{\dagger(+)}(x)]. \quad (\text{D.4.d})$$

As expressões destas quantidades em termos das funções $\bar{\phi}(k)$ e $\bar{\chi}(k)$ podem ser obtidas facilmente usando (D.3) e a relação de comutação canônica entre $a(k)$ e $a^{\dagger}(k)$. Algumas simplificações podem ser realizadas levando em conta a relação (IV.23). Os resultados são:

$$\tau_1(x - y) = -\frac{1}{2} \int dk e^{ik(x-y)} \omega_k \bar{\phi}^*(k) \bar{\chi}(k) \quad (\text{D.5.a})$$

$$\tau_2(x - y) = \frac{1}{2} \int dk e^{ik(x-y)} \omega_k |\bar{\chi}(k)|^2 \quad (\text{D.5.b})$$

$$\tau_3(x - y) = -\frac{1}{2} \int dk e^{ik(x-y)} \omega_k \bar{\phi}(k) \bar{\chi}^*(k) \quad (\text{D.5.c})$$

$$\tau_4(x - y) = \frac{1}{2} \int dk e^{ik(x-y)} \omega_k |\bar{\phi}(k)|^2. \quad (\text{D.5.d})$$

D.2 Avaliação das Funções de Superposição no Cálculo da Norma

A partir dos resultados obtidos no apêndice anterior podemos avaliar as funções envolvidas no efeito de superposição calculado no capítulo V. São três funções a serem calculadas:

$\tau_1(x)$, $\tau_3(x)$ e $\tau_4(x)$. Começemos pela primeira função, $\tau_1(x)$, dada por (D.5.a):

$$\tau_1(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \omega_k \bar{\phi}^*(k) \bar{\chi}(k). \quad (\text{D.6})$$

A partir de (IV.28) e (IV.45), obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^*(k) \bar{\chi}(k) &= \frac{k}{\omega_k(k^2 + \epsilon^2)} + \\ &+ \frac{1}{\omega_k(k^2 + \epsilon^2)} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta^2}\right)^2 \omega_k^2 \text{sch}^4\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + k^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Pondo (D.7) em (D.6) chegamos na expressão para $\tau_1(x)$:

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left[\frac{k}{k^2 + \epsilon^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^2 + \epsilon^2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta^2}\right)^2 \omega_k^2 \text{sch}^4\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + k^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

O primeiro termo do integrando da integral (D.8) pode ser reescrito assim:

$$\frac{k}{k^2 + \epsilon^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{ik + \epsilon} + \frac{1}{ik - \epsilon} \right). \quad (D.9)$$

Substituindo (D.9) na primeira integral de (D.8) e usando o resultado (B.6) do apêndice B obtemos:

$$\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left(\frac{1}{ik + \epsilon} + \frac{1}{ik - \epsilon} \right) = \frac{i\pi}{2} [\theta(x) - \theta(-x)] = \frac{i\pi}{2} \epsilon(x). \quad (D.10)$$

O segundo termo da integral de (D.8) exibe um integrando complicado do ponto de vista analítico; escrevendo, então, a função $\tau_1(x)$ como a conhecemos no momento:

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= -\frac{i\pi}{2} \epsilon(x) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{k^2 + \epsilon^2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta^2}\right)^2 \omega_k^2 \operatorname{sch}^4\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + k^2} \\ &= -\frac{i\pi}{2} \epsilon(x) - \int_0^{\infty} dk \cos kx \frac{1}{k^2 + \epsilon^2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta^2}\right)^2 \omega_k^2 \operatorname{sch}^4\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + k^2}. \end{aligned} \quad (D.11)$$

Passemos agora para o cálculo de $\tau_3(x)$ dada por (D.5.c):

$$\tau_3(x) = -\frac{1}{2} \int dk e^{ikx} \omega_k \bar{\phi}(k) \bar{\chi}^*(k). \quad (D.12)$$

Mas a expressão (D.7) revela que:

$$\bar{\phi}^*(k) \bar{\chi}(k) = \bar{\phi}(k) \bar{\chi}^*(k) \quad (D.13)$$

portanto, comparando (D.12) e (D.6), concluímos que:

$$\tau_3(x) = \tau_1(x). \quad (D.14)$$

Para obter uma forma explícita para $\tau_4(x)$ dada por (D.5.d), precisamos lembrar (IV.28), obtendo simplesmente:

$$\begin{aligned} \tau_4(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \omega_k |\bar{\phi}(k)|^2 \\ &= \frac{\pi}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \omega_k \frac{\operatorname{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)}{k^2 + \epsilon^2} \\ &= \frac{2\pi}{\beta^2} \int_0^{\infty} dk \cos kx \omega_k \frac{\operatorname{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)}{k^2 + \epsilon^2}. \end{aligned} \quad (D.15)$$

A função de superposição, para um estado de dois sólitons, é dada pela exponencial de uma soma destas funções (ver capítulo V):

$$Z(d) = e^{\tau(d)} \quad (D.16)$$

onde

$$\tau(d) = \tau_1(d) + \tau_3(-d) + \tau_4(d) + \tau_4(-d). \quad (D.17)$$

De (D.11) e (D.14), a soma dos dois primeiros termos de (D.17) é dada por:

$$\tau_1(d) + \tau_3(-d) = -2 \int_0^\infty dk \cos kd \frac{1}{k^2 + \epsilon^2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta^2}\right)^2 \omega_k^2 \operatorname{sch}^4\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + k^2}. \quad (D.18)$$

A contribuição da função $\epsilon(x)$ desaparece pelo fato desta ser ímpar. Já que a função $\tau_4(x)$ é uma função par, os dois últimos termos de (D.17) contribuem da mesma forma, assim temos finalmente:

$$\begin{aligned} \tau(d) = \int_0^\infty dk \cos kd \left[\frac{4\pi}{\beta^2} \frac{\operatorname{sch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)}{k^2 + \epsilon^2} + \right. \\ \left. - \frac{2}{k^2 + \epsilon^2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta^2}\right)^2 \omega_k^2 \operatorname{sch}^4\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + k^2} \right]. \end{aligned} \quad (D.19)$$

Apêndice E

Cálculo da Energia de Interação entre dois Sólitons

Partindo da expressão (V.35) para a energia num estado de dois sólitons, pode-se fazer a separação numa parte que corresponde às energias dos sólitons de sine-Gordon estáticos isolados e noutra associada à interação sóliton-sóliton (V.38) que será calculada a seguir. A energia E_i associada ao termo de interação \mathcal{H}_i é:

$$E_i(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{H}_i(x, y, z) \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(x, y, z) = & \nabla_x \phi_c(x - y) \nabla_x \phi_c(x - z) + \frac{m^2}{\beta^2} \left[\cos \beta \phi_c(x - y) + \cos \beta \phi_c(x - z) + \right. \\ & \left. - \cos \beta \left[\phi_c(x - y) + \phi_c(x - z) \right] - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Para isto pode-se fazer uma mudança de variáveis:

$$\xi = x - y \quad (\text{E.3.a})$$

$$d = z - y \quad (\text{E.3.b})$$

e notar que (III.4) vem a implicar que a derivada de $\phi_c(x)$ seja:

$$\frac{d}{dx} \phi_c(x) = \frac{2m}{\beta} \text{sch}(mx). \quad (\text{E.4})$$

O termo em cosseno pode ser reescrito usando:

$$2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A. \quad (\text{E.5})$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
 E_i(d) = & \frac{m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ -2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \phi_c(m\xi) - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \phi_c(m(\xi - d)) + \right. \\
 & \left. + 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} [\phi_c(m\xi) + \phi_c(m(\xi - d))] \right\} + \\
 & + \frac{4m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \operatorname{sch}(m\xi) \operatorname{sch}(m(\xi - d)). \tag{E.6}
 \end{aligned}$$

As integrais dos dois primeiros termos na expressão acima são iguais e independentes de d . Desta forma podemos definir três integrais a serem calculadas:

$$I_1 = -\frac{2m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sin^2 \frac{\beta}{2} \phi_c(m\xi) \tag{E.7.a}$$

$$I_2(d) = \frac{2m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sin^2 \frac{\beta}{2} [\phi_c(m\xi) + \phi_c(m(\xi - d))] \tag{E.7.b}$$

$$I_3(d) = \frac{4m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \operatorname{sch}(m\xi) \operatorname{sch}(m(\xi - d)). \tag{E.7.c}$$

Será necessário, inicialmente, deduzir algumas relações úteis na resolução das integrais. Primeiro partimos da expressão do campo (III.4) e definimos:

$$\omega(\xi) \equiv -\arctan e^{-m\xi} \tag{E.8}$$

obtemos:

$$\frac{\beta}{2} \phi_c(m\xi) = 2\omega(\xi) \tag{E.9.a}$$

$$\tan^2 \omega(\xi) = e^{-2m\xi}. \tag{E.9.b}$$

Com isso pode-se facilmente mostrar que:

$$\sin \omega(\xi) = \frac{-1}{\sqrt{[1 + \exp(2m\xi)]}} ; \cos \omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{[1 + \exp(-2m\xi)]}} \tag{E.10}$$

e também:

$$\sin 2\omega(\xi) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{[1 + \operatorname{ch}(2m\xi)]}} ; \cos 2\omega(\xi) = \frac{\operatorname{sh}(2m\xi)}{1 + \operatorname{ch}(2m\xi)}. \tag{E.11}$$

Passamos agora à resolução sucessiva das integrais (E.7).

a) Resolução de I_1 :

Usando os resultados anteriores na integral (E.7.a):

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{2m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sin^2 2\omega(\xi) = -\frac{2m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{2}{1 + \text{ch}(2m\xi)} \\ &= -\frac{8m^2}{\beta^2} \int_0^{\infty} d\xi \frac{1}{1 + \text{ch}(2m\xi)} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

mas:

$$2\text{ch}^2 x = 1 + \text{ch} 2x \quad (\text{E.13})$$

portanto (E.12) fica:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{4m^2}{\beta^2} \int_0^{\infty} d\xi \frac{1}{\text{ch}^2(m\xi)} = -\frac{4m^2}{\beta^2} \int_0^{\infty} d\xi \text{sch}^2(m\xi) \\ &= -\frac{4m^2}{\beta^2} \frac{\text{th}(m\xi)}{m} \Big|_0^{\infty} = -\frac{4m}{\beta^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

b) Resolução de $I_2(d)$:

O integrando (E.7.b) pode ser reescrito assim:

$$\begin{aligned} \sin^2 2[\omega(\xi) + \omega(\xi - d)] &= [\sin 2\omega(\xi) \cos 2\omega(\xi - d) + \sin 2\omega(\xi - d) \cos 2\omega(\xi)]^2 \\ &= \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \text{ch}(2m\xi)}} \cdot \frac{\text{sh}(2m(\xi - d))}{1 + \text{ch}(2m(\xi - d))} + \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \text{ch}(2m(\xi - d))}} \cdot \frac{\text{sh}(2m\xi)}{1 + \text{ch}(2m\xi)} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\text{sh}(2m(\xi - d))}{\text{ch}(m\xi)\text{ch}^2(m(\xi - d))} + \frac{\text{sh}(2m\xi)}{\text{ch}^2(m\xi)\text{ch}(m(\xi - d))} \right\}^2. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Definindo $u = e^{2m\xi}$, $q = e^{2md}$ e $t = 1 + \sqrt{q}$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} \text{sh}(2m(\xi - d)) &= \frac{1}{2} (e^{2m(\xi-d)} - e^{-2m(\xi-d)}) = \frac{u^2 - q^2}{2uq} \\ \text{ch}(2m(\xi - d)) &= \frac{1}{2} (e^{2m(\xi-d)} + e^{-2m(\xi-d)}) = \frac{u^2 + q^2}{2uq} \\ \text{ch}(m(\xi - d)) &= \frac{u + q}{2\sqrt{uq}}; \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

no caso particular de $d = 0$ temos, é claro, que $q = 1$. Assim colocando (E.16) em (E.15) obtemos:

$$\sin^2 2[\omega(\xi) + \omega(\xi - d)] = \frac{4ut^2(u - \sqrt{q})^2}{(u + 1)^2(u + q)^2}. \quad (\text{E.17})$$

Lembrando que $du = 2mud\xi$ temos:

$$I_2(q) = \frac{2m^2}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{du}{2mu} \frac{4ut^2(u - \sqrt{q})^2}{(u+1)^2(u+q)^2} = \frac{4mt^2}{\beta^2} \int_0^\infty du \frac{(u - \sqrt{q})^2}{(u+1)^2(u+q)^2}. \quad (E.18)$$

Fazendo outra mudança de variáveis $v = u + 1$ e $p = q - 1$ chegamos a:

$$I_2(p) = \frac{4mt^2}{\beta^2} \int_1^\infty dv \frac{(v-t)^2}{v^2(v+p)^2} = \frac{4mt^2}{\beta^2} \left\{ \int_1^\infty dv \frac{1}{(v+p)^2} + \right. \\ \left. -2t \int_1^\infty dv \frac{1}{v(v+p)^2} + t^2 \int_1^\infty dv \frac{1}{v^2(v+p)^2} \right\}. \quad (E.19)$$

Estas integrais estão tabeladas:

$$\int dx \frac{1}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)} \quad (E.20.a)$$

$$\int dx \frac{1}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2} \ln \left[\frac{x}{ax+b} \right] \quad (E.20.b)$$

$$\int dx \frac{1}{x^2(ax+b)^2} = -\frac{1}{(ax+b)} \left[\frac{1}{bx} + \frac{2a}{b^2} \right] + \frac{2a}{b^3} \ln \left[\frac{ax+b}{x} \right]. \quad (E.20.c)$$

Colocando estes resultados em $I_2(p)$ e avaliando os limites obtemos:

$$I_2(p) = \frac{4mt^2}{\beta^2} \frac{1}{1+p} + \frac{8mt^3}{\beta^2} \left[\frac{1}{p(1+p)} + \frac{1}{p^2} \ln \left(\frac{1}{1+p} \right) \right] + \\ + \frac{4mt^4}{\beta^2} \left[\frac{1}{1+p} \left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} \right) - \frac{2}{p^3} \ln(1+p) \right]. \quad (E.21)$$

Escrevendo a expressão acima em função de d chegamos ao resultado:

$$I_2(d) = \frac{32m}{\beta^2} \frac{\text{ch}^4\left(\frac{md}{2}\right)}{\text{sh}^3(md)} \left(\text{sh}(md) - md \right). \quad (E.22)$$

c) Resolução de $I_3(d)$:

A última integral pode ser calculada sem dificuldade:

$$I_3(d) = \frac{4m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^\infty d\xi \text{sch}(m\xi)\text{sch}(m(\xi-d)) = \frac{4m^2}{\beta^2} \int_{-\infty}^\infty d\xi \frac{1}{\text{ch}(m\xi)\text{ch}(m(\xi-d))}. \quad (E.23)$$

Usando as definições (E.16) podemos escrever esta integral na forma

$$I_3(q) = \frac{8m\sqrt{q}}{\beta^2} \int_0^\infty du \frac{1}{(u+q)(u+1)} \quad (E.24)$$

que é uma caso particular da integral tabelada

$$\int dx \frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad} \ln \left[\frac{cx+d}{ax+b} \right] \quad (E.25)$$

assim obtemos:

$$I_3(d) = \frac{8m^2}{\beta^2} \frac{d}{\text{sh}(md)}. \quad (\text{E.26})$$

Juntando (E.14), (E.22) e (E.26), o resultado final para a energia de interação fica:

$$\begin{aligned} E_i(d) &= 2I_1 + I_2(d) + I_3(d) \\ &= \frac{32m}{\beta^2} \frac{\text{ch}^4\left(\frac{md}{2}\right)}{\text{sh}^3(md)} \left[\text{sh}(md) - md \right] + \frac{8m}{\beta^2} \left[\frac{md}{\text{sh}(md)} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Huang, K., **Quarks, leptons & gauge fields**, Singapore: World Scientific Publishing Co. (1982)
- [2] Isgur, N., Karl, G., **Phys. Rev. D18**, 4187 (1978)
- [3] Adler, S., **Phys. Rev. 117**, 2426 (1969)
- [4] Bell, J., Jackiw, R., **Nuov. Cimento 60A**, 47 (1969)
- [5] Lee, T.D., **Particle physics and introduction to field theory**, New York, Harwood Publishers (1981)
- [6] Lee, T.D., Friedberg, R., **Phys. Rev. D15**, 1694 (1977)
- [7] Lee, T.D., Friedberg, R., **Phys. Rev. D16**, 1096 (1977)
- [8] Lee, T.D., Friedberg, R., **Phys. Rev. D18**, 2623 (1978)
- [9] Goldflam, R., Wilets, L., **Phys. Rev. D25**, 1951 (1982)
- [10] Wilets, L., The non-topological soliton bag model. In: Liu, K.F., **Chiral solitons**, Singapore: World Scientific Publishing Co., p.362-405 (1987)
- [11] 't Hooft, G., **Nucl. Phys. B75**, 461 (1974)
- [12] Witten, E., **Nucl. Phys. B160**, 57 (1979)
- [13] Skyrme, T.H.R., **Proc. Roy. Soc. London 247**, 260 (1958)
- [14] Skyrme, T.H.R., **Proc. Roy. Soc. London 260**, 127 (1961)

- [15] Skyrme, T.H.R., **Proc. Roy. Soc. London** **262**, 237 (1961)
- [16] Skyrme, T.H.R., **J. Math. Phys.** **12**, 1735 (1971)
- [17] Zahed, I., Brown, G.E., **Phys. Rep** **142**, 1 (1986)
- [18] Adkins, G.S., Static properties of skyrmions. In: Liu, K.F., **Chiral solitons**, Singapore: World Scientific Publishing Co., p.99-170 (1987)
- [19] Loiseau, B., **Can. J. Phys.** **67**, 1168 (1989)
- [20] Meissner, U.-G., **Phys. Rep.** **161**, 213 (1989)
- [21] Lacombe, M., Loiseau, B., Vinh Mau, R., Cottingham, W.N., **Phys. Rev.** **D38**, 1491 (1988)
- [22] Nam, S., Workman, R.L., **Phys. Rev.** **D41**, 2323 (1990)
- [23] Witten, E., **Nucl. Phys.** **B223**, 422 (1983)
- [24] Witten, E., **Nucl. Phys.** **B223**, 433 (1983)
- [25] De Shalit, A., Feshbach, H., **Theoretical nuclear physics**, John Wiley, New York (1974)
- [26] Krein, G.I., **A estrutura de quarks dos núcleons e o modelo de camadas nuclear**, Porto Alegre, tese doutorado, UFRGS (1987)
- [27] Betz, M., Krein, G.I., Maris, Th.A.J., **Nucl. Phys.** **A437**, 509 (1985)
- [28] Krein, G., Maris, Th.A.J., **Phys. Rev.** **C36**, 365 (1987)
- [29] Rajeev, S.G., **Phys. Rev.** **D29**, 2944 (1984)
- [30] Zahed, I., Brown, G.E., **Z. Phys. A - Atomic Nuclei** **335**, 349 (1990)
- [31] Choquet-Bruhat, Y., Dewitt-Morette, C., Dillar-Bleick, M., **Analysis, manifolds and physics**, New York, North-Holland Publishing Co. (1977)

- [32] Nash, C., Sen, S., **Topology and geometry for physicists**, Orlando, Florida, Academic Press (1983)
- [33] Steenrod, N., **The topology of fibre bundles**, Princeton, New Jersey, Princeton University Press (1951)
- [34] Finkelstein, D. **J. Math. Phys.** **7**, 1218 (1966)
- [35] Finkelstein, D., Rubinstein, J., **J. Math. Phys.** **9**, 1762 (1968)
- [36] Williams, J.G., **J. Math. Phys.** **11**, 2611 (1970)
- [37] Hu, S.T., **Homotopy theory**, New York, London, Academic (1959)
- [38] Bowick, M.J., Karabali, D., Wijewardhana, L.C.R., **Nucl. Phys.** **B271**, 417 (1986)
- [39] Schroer, B., Swieca, J.A., **Nucl. Phys.** **B170**, 175 (1980)
- [40] Balachandran, A.P., preprint, Syracuse University 4228-453 (1990)
- [41] Ha, Y.K., **Phys. Rev.** **D29**, 1744 (1984)
- [42] Coleman, S., **Phys. Rev.** **D11**, 2088 (1975)
- [43] Mandelstam, S., **Phys. Rev.** **D11**, 3026 (1975)
- [44] Cahill, K., **Phys. Lett.** **53B**, 174 (1974)
- [45] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., **Table of integrals, series and products**, New York, Academic Press (1965)
- [46] Rubinstein, J., **J. Math. Phys.** **11**, 258 (1970)
- [47] Thacker, H.B., **Rev. Mod. Phys.** **53**, 253 (1981)
- [48] Furuya, K., Marino, E.C., **Phys. Rev.** **D41**, 727 (1990)
- [49] Marino, E.C., Nota científica, Física-PUC/RJ, trabalho apresentado em **Applications of statistical and field theory methods in condensed matter**, NATO Advanced Study Institute, Évora, Portugal (1989)

[50] Klauder, J.R., **J. Math. Phys.** 8, 2392 (1967)

[51] Klauder, J.R., Skagerstam, B.S., **Coherent states**, Singapore: World Scientific Publishing Co. (1987)