

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA CONDUTIVA EM GEOMETRIA
CILÍNDRICA PARA O PROBLEMA DO ESCAPE DO LANÇAMENTO DE FOGUETES

por

Cibele Aparecida Ladeia

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2016

A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA CONDUTIVA EM GEOMETRIA
CILÍNDRICA PARA O PROBLEMA DO ESCAPE DO LANÇAMENTO DE FOGUETES

por

Cibele Aparecida Ladeia

Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do
Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann

Aprovada por:

Prof. Dr. Fernando Carvalho da Silva (UFRJ/RJ)

Prof. Dr. Ricardo Barros de Carvalho (UERJ/RJ)

Prof. Dra. Cynthia Feijó Segatto (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 16 de Dezembro de 2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família que sempre estiveram presentes, pelo amor, pelo incentivo e pelo apoio.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena e ao meu co-orientador, Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann, por seus ensinamentos, suas dedicações e principalmente por seus incentivos que tornaram possível a conclusão desta tese.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela oportunidade.

Agradeço a todos professores que contribuíram na minha trajetória acadêmica, em especial, a Prof. Dra Neyva Maria Lopes, um grande exemplo que me incentivou a seguir a carreira acadêmica.

Agradeço aos meus colegas de curso, Cristiano, Isaias, Larissa, Ruth e Tiago pelas conversas durante estes anos de convivência.

Agradeço especialmente aos meus colegas do GENUC, Dayana, Debora, Celina, Igor, Jaqueline, Juliana, Julio, Marcelo, Luiz Felipe e Rodrigo que me incentivaram neste trabalho.

Agradeço também aos meus amigos, Amanda, Camila, Cláudia, Cristiane, Everton, Fabiano, Juliana, Luana, Michelle, Rubens e Verônica que são de grande importância para mim e que participaram ativamente de minha vida no doutorado.

Por fim, agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Nesta contribuição apresentamos uma solução para a equação de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica. Esta solução é aplicada para simular a radiação e campo de temperatura juntamente com o transporte de energia radiativa e condutiva proveniente do escape liberado em lançamentos de foguetes. Para este fim, discutimos uma abordagem semi-analítica reduzindo a equação original, que é contínua nas variáveis angulares, numa equação semelhante ao problema S_N da transferência radiativa condutiva. A solução é construída usando um método de composição por transformada de Laplace e o método da decomposição de Adomian. O esquema recursivo é apresentado para o sistema de equações de ordenadas duplamente discretas juntamente com as dependências dos parâmetros e suas influências sobre a convergência heurística da solução. A solução obtida, em seguida, permite construir o campo próximo relevante para caracterizar o termo fonte para problemas de dispersão ao ajustar os parâmetros do modelo, tais como, emissividade, refletividade, albedo e outros, em comparação com a observação, que são relevantes para os processos de dispersão de campo distante e podem ser manipulados de forma independente do presente problema. Além do método de solução, também relatamos sobre algumas soluções e simulações numéricas.

Palavras-chave: equação de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica; problema S_N não linear; transformada de Laplace; método da decomposição de Adomian.

ABSTRACT

In this contribution we present a solution for the radiative conductive transfer equation in cylinder geometry. This solution is applied to simulate the radiation and temperature field together with conductive and radiative energy transport originated from the exhaust released in rocket launches. To this end we discuss a semi-analytical approach reducing the original equation, which is continuous in the angular variables, into an equation similar to the S_N radiative conductive transfer problem. The solution is constructed using a composite method by Laplace transform and Adomian decomposition method. The recursive scheme is presented for the doubly discrete ordinate equations system together with parameter dependencies and their influence on heuristic convergence of the solution. The obtained solution allows then to construct the relevant near field to characterize the source term for dispersion problems when adjusting the model parameters such as emissivity, reflectivity, albedo and others in comparison to the observation, that are relevant for far field dispersion processes and may be handled independently from the present problem. In addition to the solution method we also report some solutions and numerical simulations.

Keywords: radiative conductive transfer equation in cylinder geometry; non-linear S_N problem; Laplace transform; Adomian decomposition method.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	FUNDAMENTOS DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA CONDUTIVA	5
2.1	Equação de Transferência Radiativa	5
2.2	Equação de Transferência Radiativa em Geometria Cilíndrica	10
2.3	A Equação de Transferência Radiativa Condutiva em Geometria Cilíndrica	14
3	A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA CONDUTIVA EM GEOMETRIA CILÍNDRICA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO	22
3.1	Método LTS_N	22
3.2	Método da Decomposição de Adomian	33
3.3	O Critério de Estabilidade e Convergência	37
4	PARÂMETROS DO PROBLEMA E RESULTADOS	40
4.1	Correlação entre os Parâmetros	113
5	CONCLUSÃO	117
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118
	APÊNDICE A	122
	APÊNDICE B	131

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	As coordenadas para a derivação da equação de transferência radiativa.	6
Figura 2.2	Uma representação da simetria cilíndrica	12
Figura 2.3	Lançamento do foguete VS-30 V13, na base de Alcântara- Brasil. Fonte: Página da Força Aérea Brasileira *	21
Figura 3.1	A representação do domínio físico na geometria cilíndrica.	28
Figura 4.1	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.	44
Figura 4.2	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.	44
Figura 4.3	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.	45
Figura 4.4	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.	45
Figura 4.5	Profundidade da recursão finita para o problema 1.	46
Figura 4.6	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 1.	46
Figura 4.7	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.	47
Figura 4.8	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.	48
Figura 4.9	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.	48
Figura 4.10	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.	49
Figura 4.11	Profundidade da recursão finita para o problema 2.	49

Figura 4.12	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 2.	50
Figura 4.13	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.	51
Figura 4.14	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.	51
Figura 4.15	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.	52
Figura 4.16	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.	52
Figura 4.17	Profundidade da recursão finita para o problema 3.	53
Figura 4.18	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 3.	53
Figura 4.19	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.	54
Figura 4.20	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.	55
Figura 4.21	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.	55
Figura 4.22	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.	56
Figura 4.23	Profundidade da recursão finita para o problema 4.	56
Figura 4.24	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 4.	57
Figura 4.25	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.	58
Figura 4.26	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.	58
Figura 4.27	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.	59
Figura 4.28	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.	59
Figura 4.29	Profundidade da recursão finita para o problema 5.	60

Figura 4.30	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 5.	60
Figura 4.31	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.	61
Figura 4.32	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.	62
Figura 4.33	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.	62
Figura 4.34	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.	63
Figura 4.35	Profundidade da recursão finita para o problema 6.	63
Figura 4.36	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 6.	64
Figura 4.37	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 7.	65
Figura 4.38	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 7.	65
Figura 4.39	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 7.	66
Figura 4.40	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 7.	66
Figura 4.41	Profundidade da recursão finita para o problema 7.	67
Figura 4.42	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 7.	67
Figura 4.43	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 8.	68
Figura 4.44	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 8.	69
Figura 4.45	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 8.	69
Figura 4.46	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 8.	70
Figura 4.47	Profundidade da recursão finita para o problema 8.	70

Figura 4.48	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 8.	71
Figura 4.49	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 9.	72
Figura 4.50	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 9.	72
Figura 4.51	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 9.	73
Figura 4.52	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 9.	73
Figura 4.53	Profundidade da recursão finita para o problema 9.	74
Figura 4.54	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 9.	74
Figura 4.55	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 10.	75
Figura 4.56	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 10.	76
Figura 4.57	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 10.	76
Figura 4.58	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 10.	77
Figura 4.59	Profundidade da recursão finita para o problema 10.	77
Figura 4.60	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 10.	78
Figura 4.61	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 11.	79
Figura 4.62	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 11.	79
Figura 4.63	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 11.	80
Figura 4.64	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 11.	80

Figura 4.65	Profundidade da recursão finita para o problema 11.	81
Figura 4.66	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 11.	81
Figura 4.67	O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 12.	82
Figura 4.68	O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 12.	83
Figura 4.69	O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 12.	83
Figura 4.70	O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 12.	84
Figura 4.71	Profundidade da recursão finita para o problema 12.	84
Figura 4.72	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 12.	85
Figura 4.73	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 13.	87
Figura 4.74	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 13.	87
Figura 4.75	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 13.	88
Figura 4.76	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 13.	88
Figura 4.77	Profundidade da recursão finita para o problema 13.	89
Figura 4.78	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 13.	89
Figura 4.79	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 14.	91
Figura 4.80	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 14.	92
Figura 4.81	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 14.	92

Figura 4.82	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 14.	93
Figura 4.83	Profundidade da recursão finita para o problema 14.	93
Figura 4.84	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 14.	94
Figura 4.85	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 15.	96
Figura 4.86	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 15.	96
Figura 4.87	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 15.	97
Figura 4.88	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 15.	97
Figura 4.89	Profundidade da recursão finita para o problema 15.	98
Figura 4.90	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 15.	98
Figura 4.91	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 16.	100
Figura 4.92	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 16.	101
Figura 4.93	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 16.	101
Figura 4.94	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 16.	102
Figura 4.95	Profundidade da recursão finita para o problema 16.	102
Figura 4.96	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 16.	103
Figura 4.97	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 17.	105
Figura 4.98	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 17.	105

Figura 4.99	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 17.	106
Figura 4.100	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 17.	106
Figura 4.101	Profundidade da recursão finita para o problema 17.	107
Figura 4.102	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 17.	107
Figura 4.103	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 18. . . .	109
Figura 4.104	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 18. .	110
Figura 4.105	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 18.	110
Figura 4.106	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 18.	111
Figura 4.107	Profundidade da recursão finita para o problema 18.	111
Figura 4.108	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 18.	112
Figura 4.109	Correlação entre os parâmetros para os problemas 1 a 12	114
Figura 4.110	Correlação entre os parâmetros para os problemas 13 a 18.	115
Figura 4.111	Correlação entre os parâmetros para os problemas 9, 11, 12, 14, 15 e 17.	116
Figura B.1	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 1. . . .	139
Figura B.2	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 1. . .	140
Figura B.3	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.	140
Figura B.4	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.	141
Figura B.5	Profundidade da recursão finita para o problema 1.	141

Figura B.6	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 1.	142
Figura B.7	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 2. . . .	144
Figura B.8	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 2. . .	144
Figura B.9	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.	145
Figura B.10	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.	145
Figura B.11	Profundidade da recursão finita para o problema 2.	146
Figura B.12	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 2.	146
Figura B.13	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 3. . . .	148
Figura B.14	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 3. . .	149
Figura B.15	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.	149
Figura B.16	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.	150
Figura B.17	Profundidade da recursão finita para o problema 3.	150
Figura B.18	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 3.	151
Figura B.19	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 4. . . .	153
Figura B.20	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 4. . .	153
Figura B.21	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.	154

Figura B.22	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.	154
Figura B.23	Profundidade da recursão finita para o problema 4.	155
Figura B.24	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 4.	155
Figura B.25	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.	157
Figura B.26	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.	158
Figura B.27	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.	158
Figura B.28	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.	159
Figura B.29	Profundidade da recursão finita para o problema 5.	159
Figura B.30	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 5.	160
Figura B.31	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.	162
Figura B.32	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.	162
Figura B.33	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.	163
Figura B.34	Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.	163
Figura B.35	Profundidade da recursão finita para o problema 6.	164
Figura B.36	Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 6.	164

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Parâmetros para diferentes problemas.	41
Tabela 4.2	Resultados da metodologia proposta para o problema 13.	86
Tabela 4.3	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 13.	86
Tabela 4.4	Resultados da metodologia proposta para o problema 14.	90
Tabela 4.5	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 14.	91
Tabela 4.6	Resultados da metodologia proposta para o problema 15.	95
Tabela 4.7	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 15.	95
Tabela 4.8	Resultados da metodologia proposta para o problema 16.	99
Tabela 4.9	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 16.	100
Tabela 4.10	Resultados da metodologia proposta para o problema 17.	104
Tabela 4.11	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 17.	104
Tabela 4.12	Resultados da metodologia proposta para o problema 18.	108
Tabela 4.13	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 18.	109
Tabela A.1	Resultados da metodologia proposta para o problema 1.	123
Tabela A.2	Resultados da metodologia proposta para o problema 2.	124
Tabela A.3	Resultados da metodologia proposta para o problema 3.	124
Tabela A.4	Resultados da metodologia proposta para o problema 4.	125
Tabela A.5	Resultados da metodologia proposta para o problema 5.	126
Tabela A.6	Resultados da metodologia proposta para o problema 6.	126
Tabela A.7	Resultados da metodologia proposta para o problema 7.	127
Tabela A.8	Resultados da metodologia proposta para o problema 8.	128
Tabela A.9	Resultados da metodologia proposta para o problema 9.	128
Tabela A.10	Resultados da metodologia proposta para o problema 10.	129
Tabela A.11	Resultados da metodologia proposta para o problema 11.	130
Tabela A.12	Resultados da metodologia proposta para o problema 12.	130

Tabela B.1	Parâmetros para diferentes problemas.	138
Tabela B.2	Resultados da metodologia proposta para o problema 1.	138
Tabela B.3	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 1. . .	139
Tabela B.4	Resultados da metodologia proposta para o problema 2.	143
Tabela B.5	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 2. . .	143
Tabela B.6	Resultados da metodologia proposta para o problema 3.	147
Tabela B.7	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 3. . .	148
Tabela B.8	Resultados da metodologia proposta para o problema 4.	152
Tabela B.9	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 4. . .	152
Tabela B.10	Resultados da metodologia proposta para o problema 5.	156
Tabela B.11	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 5. . .	157
Tabela B.12	Resultados da metodologia proposta para o problema 6.	161
Tabela B.13	Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 6. . .	161

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
PROMEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
RS	Rio Grande do Sul
RJ	Rio de Janeiro
LTS_N	Transformada de Laplace no sistema de equações S_N
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Arábicos

A	área [m^2]
\mathbf{A}	matriz diagonal dependente da aproximação considerada
\mathcal{A}_ℓ	polinômios de Adomian
B_ν	função de Planck [$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$]
\mathbf{B}	matriz dependente da aproximação considerada
$\mathbf{C}(r)$	matriz transformada inversa de $(\bar{r}\mathbf{I}_d - \mathbf{U})^{-1}$
$\mathbf{C}^+(r)$	decomposição da matriz $\mathbf{C}(r)$ nos autovalores positivos
$\mathbf{C}^-(r)$	decomposição da matriz $\mathbf{C}(r)$ nos autovalores negativos
\mathbf{D}	matriz de autovalores de \mathbf{U}
\mathcal{D}	matriz de autovalores de \mathbf{U}
\mathbf{E}	matriz diagonal dependente da aproximação considerada
\mathbf{F}	matriz dependente da aproximação considerada
G	termo fonte
h	constante de Planck [$J \cdot s$]
$\mathbf{H}(r)$	vetor convolução da matriz $\mathbf{C}(r)$ com o vetor fonte $\Psi(r)$
H	geração de calor adimensional
\mathcal{I}	intensidade de radiação [$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$]
\mathcal{I}^*	intensidade de radiação adimensional
$\mathcal{I}_{n,m}^*$	intensidade de radiação estendida nas variáveis angulares adimensional
\mathcal{I}_n^*	intensidade de radiação estendida na variável angular adimensional
\mathbf{I}_d	matriz identidade
j^e	termo de emissão [$W \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$]
\mathcal{J}	ordem de truncamento
k	condutividade térmica [$W \cdot m \cdot K$]
\mathcal{L}	grau de anisotropia
\mathcal{L}	operador da transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	operador da transformada inversa de Laplace
\bar{n}	índice de refração

N	ordem da quadratura usada
N_c	parâmetro de radiação e condução
O	operador diferencial parcial não linear geral
O_L	operador diferencial linear inversível
O_R	operador diferencial linear
O_N	operador diferencial não linear
$\mathcal{P}(\xi_0)$	coeficiente diferencial de espalhamento
\mathcal{P}_l	polinômios de Legendre
$\mathcal{P}_l^{\bar{\alpha}}$	funções associadas de Legendre
$q_r(r)$	fluxo radiativo [$W \cdot m^{-2}$]
$q_r^*(r)$	fluxo radiativo adimensional
$Q_r(r)$	fluxo de calor radiativo
$Q_c(r)$	fluxo de calor condutivo
$Q(r)$	fluxo de calor total
r	coordenada radial
\bar{r}	parâmetro complexo proveniente da transformada de Laplace
R	raio do cilindro
s	comprimento medido ao longo de uma direção Ω
$S(r)$	termo fonte espectral [$W \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$]
t	variável temporal [s]
T	temperatura [K]
\mathcal{T}_N	polinômio de Chebyshev de primeira espécie
\mathbf{U}	matriz dependente da aproximação considerada
\mathbf{u}	matriz dependente da aproximação considerada
\mathbf{V}^ℓ	vetor obtido através das condições de contorno
\mathbf{v}^ℓ	vetor obtido através das condições de contorno
W	ganho líquido de energia de radiação [$W \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$]
W_e	ganho de energia de radiação por emissão [$W \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$]

W_a	perda de energia de radiação por absorção [$W \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$]
W_{e_d}	ganho de energia de radiação por espalhamento [$W \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$]
W_{e_f}	perda de energia de radiação por espalhamento [$W \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$]
x	coordenada espacial
\mathbf{X}	matriz de autovetores de \mathbf{U}
\mathcal{X}	matriz de autovetores de \mathcal{U}
\mathbf{Y}_ℓ	termo da expansão da função intensidade de radiação
z	eixo do cilindro; coordenada espacial

2. Caracteres Gregos

α	parâmetro de correção para o esquema recursivo
β	coeficiente de extinção [m^{-1}]
β_l	coeficientes de expansão dos polinômios de Legendre
γ	variável angular azimutal
$\gamma_{n,m}$	discretização na variável γ
Γ	função específica que representa as condições de contorno
ϵ	coeficiente de emissividade
$\hat{\Theta}$	ângulo entre r e o eixo x
Θ	temperatura adimensionalizada
κ	coeficiente de absorção espectral [m^{-1}]
Λ	função específica que representa a condição inicial
ν	frequência da radiação [Hz]
ξ	o cosseno diretor de Ω ; também variável angular polar
ξ_n	discretização na variável ξ
$\varpi_{p,q}$	peso da combinação de quadraturas Gauss-Legendre e de Gauss-Chebyshev
ϖ_p	peso da quadratura Gauss-Legendre
ρ^d	coeficiente de reflexão difusa
σ	coeficiente de espalhamento espectral [m^{-1}]
$\bar{\sigma}$	constante de Boltzmann [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$]
τ	ângulo azimutal sobre eixo z [rad]
φ	ângulo azimutal [rad]
$\varphi_{n,m}$	discretização na variável φ [rad]
ϕ_ℓ	a soma parcial das Y_ℓ
Φ	vetor fonte
Ψ	vetor fonte
Ω	direção da intensidade de radiação [sr]
ω	albedo de espalhamento simples

1 INTRODUÇÃO

O trabalho desta tese faz parte de um grande projeto de pesquisa (Programa de Apoio ao Ensino e à Pesquisa Científica e Tecnológica em Assuntos Estratégicos de Interesse Nacional (Pró-estratégia), CAPES; defesa civil) que tem como objetivo estimar dispersão de poluentes oriundos de lançamento de foguetes. Durante o lançamento, o empuxo é produzido pela queima de combustível sólido ou líquido com a liberação dos produtos quentes da combustão na atmosfera. Os principais campos de lançamento de foguetes (por exemplo, Kennedy Space Center nos Estados Unidos da América ou Centro Espaciais Guyanais na Guiana Francesa), possuem algoritmos que analisam, antes de um lançamento, a trajetória dos gases. As condições meteorológicas são as principais forçantes desta dispersão. Infelizmente, não há no Brasil um modelo pronto para atingir as demandas, embora um modelo com esta finalidade esteja sendo desenvolvido [Moreira et al., 2011]. Em vista disso, justifica-se a importância de se investigar e desenvolver um modelo matemático nacional que prediga a dispersão dos poluentes em lançamentos de foguetes. A iniciativa desta tese é estabelecer o primeiro passo numa direção de desenvolver um código que permita simular esta dispersão. Cumpre observar que existem códigos que consideram aspectos meteorológicos e os da dispersão, que tipicamente são válidos longe o suficiente da fonte e ademais super-simplificam ou descartam efeitos térmicos da fonte poluidora [Buske et al., 2012]. O presente trabalho visa progredir neste aspecto e caracterizar os aspectos térmicos principais da fonte, abordando o campo próximo pela equação radiativa condutiva. O modelo resolvido nesta tese servirá, no futuro, para caracterizar as fontes dos poluentes e mais especificamente as características térmicas que hoje a maior parte dos modelos de dispersão super-simplificam. Sabe-se que alguns aspectos não foram aqui resolvidos, pois vão além do foco desta tese, por exemplo, o movimento da fonte que pode ser levado em consideração através de uma transformação de coordenadas para um referencial em movimento relativo. O enfoque da tese está centrado nas características do problema, apontando a geometria cilíndrica como a mais indicada (e esta foi adotada) e o problema de transferência radiativa condutiva como consequência do resíduo de processos de combustão. Neste contexto, esta tese obtém uma solução para o problema de transferência radiativa condutiva num sistema de coordenadas cilíndricas. Essa solução

permite a simulação do campo de radiação e temperatura, juntamente com o transporte de energia condutiva e radiativa provenientes do escape dos lançamentos de foguetes. Em geral, a equação de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica é de difícil resolução. Tendo isto em mente, é praticamente inviável encontrar uma solução sem introdução de algumas aproximações, tais como linearização ou discretização dos termos angulares, que transformam a equação de forma que seja possível a construção de uma solução aceitável. Soluções encontradas na literatura são geralmente determinadas por meios numéricos, ver, por exemplo, Xia et al., 1995; Li, 2000; Kima e Baek, 2005; Mishra et al., 2011.

Além disso, discute-se nesse trabalho uma abordagem semi-analítica que discretiza as variáveis angulares, reduzindo a equação original em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Este procedimento é semelhante ao utilizado por Vilhena et al., 2011 na resolução do problema de transferência radiativa condutiva em coordenadas cartesianas. A solução é construída usando um método composto pela transformada de Laplace e o método da decomposição baseado na ideia de Adomian [Adomian, 1988; Vilhena et al., 2011]. O método da transformada de Laplace abre caminho para utilização de procedimentos estabelecidos para problemas lineares, enquanto que o método da decomposição permite tratar a contribuição não linear como não-homogeneidade de um problema linear recursivo. Este esquema recursivo abre um caminho para determinação de uma solução a qualquer precisão prescrita.

O método das ordenadas discretas S_N [Chandrasekhar, 1950], consiste na discretização da variável angular Ω na equação de transferência radiativa criando, no caso unidimensional com simetria azimutal, um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares. Particularmente, devido à geometria do problema em questão ser cilíndrica, duas variáveis ξ e γ são requeridas e o termo da integral da equação de transferência radiativa é aproximado por uma combinação de quadraturas de Gauss-Legendre e de Gauss-Chebyshev [Longoni, 2004]. A aplicação da transformada de Laplace no sistema de equações S_N (LTS_N) resume-se em três etapas, sendo elas: a inversão analítica da matriz simbólica; a resolução do sistema linear obtido para intensidade de radiação transformada; e a aplicação da transformada inversa. Esse método foi iniciado na década de 90 [Vilhena e Barichello, 1991].

O método LTS_N tem sido aplicado para uma ampla classe de problemas, dentro os quais destaca-se: problemas unidimensionais [Barichello e Vilhena, 1993] e heterogêneos

[Tavares, 2000]. Ressaltam-se os problemas envolvendo elevadas ordens de quadratura e grandes espessuras, conforme Gonçalves et al., 2000 e Gonçalves et al., 2002 nos quais utiliza-se mudança de variável e aplicação da técnica da diagonalização de Segatto et al., 1999, para inversão da matriz LTS_N associada. Este procedimento elimina o problema de divergências aritméticas, *overflow*, provenientes do caráter exponencial da solução. Vale ressaltar que essa metodologia também foi aplicada com sucesso para obter soluções dos problemas com dependência temporal [Oliveira et al., 2002; Segatto et al., 2010a], problemas considerando geometrias cartesianas multidimensionais [Zabadal et al., 1995; Pazos et al., 2002, 2003; Segatto et al., 2012] e outros problemas de transferência radiativa [Vargas e Vilhena, 1998; Segatto et al., 2001, 2010b]. Convém observar que foi demonstrada a convergência do método LTS_N , utilizando a teoria de semi-grupos fortemente contínuos por Pazos e Vilhena, 1999, o que garante que para $N \rightarrow \infty$ a solução LTS_N se aproxima da solução exata de Case, 1960.

O método da decomposição de Adomian é um método para resolver equações diferenciais não lineares sem linearização. A ideia básica do método consiste em decompor uma dada equação em uma parte linear e outra não linear, isolando o operador linear, facilmente inversível e de maior ordem. O termo não-linear é expandido em série de polinômios, denominados polinômios de Adomian e a função desconhecida é expandida em uma série infinita, cujos termos são calculados de forma recursiva. Assim, substituem-se as expansões na equação a ser resolvida, construindo-se um sistema linear recursivo, que é resolvido analiticamente. Na literatura, existe uma série de trabalhos de pesquisa dedicados à aplicação deste método, sendo trabalhos relevantes Adomian, 1988; Adomian e Rach, 1992; Adomian, 1994; Cherruault et al., 1995. Esta tese utiliza um método da decomposição baseado na ideia do método da decomposição de Adomian [Vilhena et al., 2011].

Para atingir o objetivo proposto, este trabalho está dividido em 5 capítulos. No capítulo 2, encontra-se um breve formalismo da equação de transferência radiativa e apresenta-se a equação de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica. No capítulo 3, apresentam-se os métodos LTS_N para geometria cilíndrica e decomposição baseado na ideia de Adomian. Ainda no mesmo capítulo, mostra-se um critério de convergência heurística por analogia a Lyapunov, o que agrega confiabilidade ao método da decomposição aqui utilizado. No capítulo 4, os resultados são apresentados para um conjunto arbitrário de parâmetros físicos importantes, para a equação de transferência radiativa condutiva em ge-

ometria cilíndrica. Finalmente, no capítulo 5, apresenta-se a conclusão deste trabalho e suas perspectivas futuras.

2 FUNDAMENTOS DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA CONDUTIVA

Neste capítulo, descreve-se de forma breve o formalismo da equação de transferência radiativa, e em seguida mostra-se a interação da radiação em um volume elementar, utilizando os conceitos fenomenológicos, tais como a absorção, a emissão e o espalhamento. Como mencionado na introdução, a modelagem do fenômeno de escape do lançamento de foguetes é dada em geometria cilíndrica. Deste modo, apresenta-se a equação de transferência radiativa e a equação de transferência radiativa condutiva, ambas em geometria cilíndrica. A atenção é dada para a equação de transferência radiativa condutiva, pois ela representa o principal assunto deste trabalho.

2.1 Equação de Transferência Radiativa

A equação que descreve a distribuição espaço-angular da intensidade radiativa $\mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)$ em um meio, é chamada de equação de transferência radiativa. Muitas abordagens podem ser utilizadas para a derivação desta equação. Ela pode ser obtida usando métodos rigorosos da física estatística, por exemplo, utilizando a equação de Boltzmann para a transferência radiativa como sendo a transferência de fótons. Por outro lado, é possível utilizar as características energéticas do problema, escrevendo a equação do balanço de energia para algum volume elementar no caminho de propagação de um feixe [Chandrasekhar, 1950; Ozisik, 1973; Pomraning, 2005].

Considera-se absorção, emissão e espalhamento em um meio caracterizado pelo coeficiente de absorção espectral κ e coeficiente de espalhamento espectral σ . O feixe de radiação monocromática com intensidade $\mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)$ propaga-se através do meio, na direção da observação $\mathbf{\Omega}$ ao longo do trajeto s . A equação de transferência radiativa pode ser derivada convenientemente através de uma abordagem euleriana. Para isto, escolhe-se um volume elementar, como um cilindro de seção transversal dA e comprimento ds sobre a posição s , com o eixo do cilindro situado ao longo de s , como ilustrado na Figura 2.1.

Sejam a intensidade de radiação $\mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)$ no ponto s e a intensidade de radiação

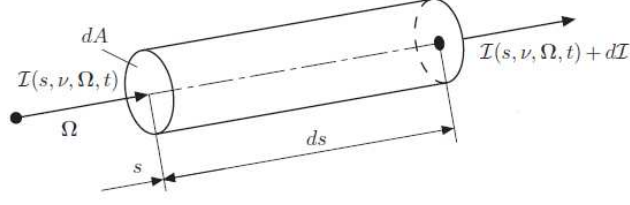


Figura 2.1: As coordenadas para a derivação da equação de transferência radiativa.

$\mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t) + d\mathcal{I}$ no ponto $s + ds$, onde $d\mathcal{I}$ é variação da intensidade do fluxo quando passa no caminho ds . Então a quantidade

$$d\mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)dAd\Omega d\nu dt, \quad (2.1)$$

representa a diferença da energia da radiação, que atravessa a superfície dA nos pontos $s + ds$ e s para o intervalo dt na vizinhança de t , na banda de frequência $d\nu$ na vizinhança de ν , e propaga-se dentro dos limites de um elemento de ângulo sólido $d\mathbf{\Omega}$ com respeito á direção $\mathbf{\Omega}$.

Define-se W o ganho líquido de energia de radiação do feixe neste volume, relacionado por unidade de volume, tempo (na vizinhança de t), frequência (na vizinhança de ν) e ângulo sólido com respeito à direção de observação $\mathbf{\Omega}$. Assim, o aumento de energia de radiação por um feixe [Ozisik, 1973], é dado por

$$WdAds d\mathbf{\Omega} d\nu dt, \quad (2.2)$$

num volume cilíndrico elementar $dsdA$, e propaga-se dentro dos limites de ângulo sólido $d\mathbf{\Omega}$ com respeito à direção $\mathbf{\Omega}$ por um intervalo de tempo dt , dentro da banda de frequência $d\nu$. Do rearranjo das Equações 2.1 e 2.2, obtém-se

$$\frac{d\mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)}{ds} = W. \quad (2.3)$$

Agora, se c denota a velocidade de propagação da radiação em um meio, então a distância

ds que o feixe atravessa, é dado por

$$ds = c dt. \quad (2.4)$$

Pode-se também em termos de d/dt , definir a derivada de comprimento total ao longo de uma direção, por

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt}. \quad (2.5)$$

Assim, a Equação 2.3 pode ser reescrita para um referencial lagrangeano como

$$\frac{1}{c} \frac{DI(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)}{Dt} = W, \quad (2.6)$$

onde D/Dt é a derivada substancial para um elemento movendo com a velocidade da luz c , e é descrita como as derivadas parciais com respeito ao tempo e coordenadas espaciais, por

$$\frac{D\mathcal{I}}{Dt} \equiv \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + c \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}. \quad (2.7)$$

Esta relação 2.7, pode ser escrita de uma forma alternativa como

$$\frac{D\mathcal{I}}{Dt} \equiv \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + c \nabla \cdot (\mathbf{\Omega} \mathcal{I}), \quad (2.8)$$

onde utiliza-se a identidade vetorial (divergente) $\nabla \cdot (\mathbf{\Omega} \mathcal{I}) = \mathcal{I} \nabla \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I} = \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}$. Quando a direção $\mathbf{\Omega}$ é ao longo do caminho s , tem-se que $\nabla \cdot (\mathbf{\Omega} \mathcal{I}) = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial s}$ e a Equação 2.8 pode ser escrita como

$$\frac{D\mathcal{I}}{Dt} \equiv \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial s}, \quad (2.9)$$

Utilizando as relações para a derivada substancial, pode-se escrever a Equação 2.6 na forma

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{\Omega} \mathcal{I}) = W \quad (2.10)$$

ou

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial s} = W, \quad (2.11)$$

utiliza-se apenas a Equação 2.11.

A seguir, apresenta-se uma relação explícita para W . Considerando-se absorção, emissão e espalhamento em um meio, a quantidade W é composta pelas componentes que computam ganhos e perdas de energia de radiação [Ozisik, 1973; Pomraning, 2005]:

$$W = W_e - W_a + W_{e_d} - W_{e_f}. \quad (2.12)$$

O primeiro termo à direita da Equação 2.12 representa o ganho da energia de radiação por um feixe devido à radiação emitida em um meio, por unidades de tempo, de volume, de ângulo sólido e de frequência, e é dado por

$$W_e = j^e(s, \nu, t). \quad (2.13)$$

Já o termo W_a na Equação 2.12, que representa a perda de energia a partir de um feixe devido absorção da radiação em um meio, por unidades de tempo, volume, ângulo sólido e frequência, e é dado por

$$W_a = \kappa(s, \nu, t) \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t). \quad (2.14)$$

Agora, o termo W_{e_d} corresponde ao ganho de energia de radiação por um feixe devido a uma radiação incidente sobre um meio, a partir de todas as direções num espaço esférico, que é espalhado por um meio na direção de observação $\mathbf{\Omega}$, por unidades de tempo, volume, ângulo sólido e frequência. Então, o termo W_{e_d} pode ser expressado como

$$W_{e_d} = \int_{\nu'=0}^{\infty} d\nu' \int_{\mathbf{\Omega}'=4\pi} \sigma(s, \nu' \rightarrow \nu, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}, t) \mathcal{I}(s, \nu', \mathbf{\Omega}', t) d\mathbf{\Omega}'. \quad (2.15)$$

Por fim, o último termo W_{e_f} na Equação 2.12, representa a perda de energia de radiação

a partir do feixe devido ao espalhamento de radiação em um meio, como consequência os feixes são refletidos na direção $\mathbf{\Omega}$. Estas perdas são descritas em um meio, por unidades de tempo, de volume, de ângulo sólido e de frequência. Então, pode-se escrever W_{ef} por

$$W_{ef} = \int_{\nu'=0}^{\infty} d\nu' \int_{\mathbf{\Omega}'=4\pi} \sigma(s, \nu \rightarrow \nu', \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}', t) \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega}'. \quad (2.16)$$

As integrações na Equação 2.16 podem ser realizadas, se desejado, uma vez que a função de distribuição no integrando é independente das variáveis de integração. Isso resulta em

$$W_{ef} = \sigma(s, \nu, t) \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t), \quad (2.17)$$

onde $\sigma(s, \nu, t)$ é o coeficiente de espalhamento total.

Assim, substituem-se as Equações 2.13–2.17 em 2.12 e em seguida na Equação 2.11, e tem-se a equação de transferência radiativa na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)}{\partial s} + [\kappa(s, \nu, t) + \sigma(s, \nu, t)] \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t) = j^e(s, \nu, t) + \\ + \int_{\nu'=0}^{\infty} d\nu' \int_{\mathbf{\Omega}'=4\pi} \sigma(s, \nu' \rightarrow \nu, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}, t) \mathcal{I}(s, \nu', \mathbf{\Omega}', t) d\mathbf{\Omega}'. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nesta Equação 2.18 define-se $S = S(s, \nu, t)$ como

$$S(s, \nu, t) = j^e(s, \nu, t), \quad (2.19)$$

que é a taxa de emissão de energia devido a processos espontâneos. Logo, a Equação 2.18, torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t)}{\partial s} + [\kappa(s, \nu, t) + \sigma(s, \nu, t)] \mathcal{I}(s, \nu, \mathbf{\Omega}, t) = S(s, \nu, t) + \\ + \int_{\nu'=0}^{\infty} d\nu' \int_{\mathbf{\Omega}'=4\pi} \sigma(s, \nu' \rightarrow \nu, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}, t) \mathcal{I}(s, \nu', \mathbf{\Omega}', t) d\mathbf{\Omega}'. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A Equação 2.20 é uma equação íntegro-diferencial e em virtude de seu caráter diferencial, exige condições iniciais e de contorno para o fechamento do problema.

Admite-se que o sistema de interesse é não reentrante e caracterizado por um volume

V e a área de superfície A . Ser não reentrante quer dizer que qualquer fóton que deixa o volume não vai reentrar através de outra parte da superfície.

Por razões físicas, sabe-se que é suficiente indicar a intensidade específica em todos os pontos da superfície A na direção entrante [Pomraning, 2005]. Para uma superfície não-reentrante, isto implica a condição de contorno

$$\mathcal{I}(r, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) = \Gamma(r, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t), \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0 \quad (2.21)$$

$$\mathcal{I}(r, \nu, \boldsymbol{\Omega}, t) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0 \quad (2.22)$$

onde Γ é uma função específica de quatro variáveis, r é um ponto sobre a superfície A e \mathbf{n} é um vetor normal à superfície neste ponto. Na variável temporal, assume-se que para o intervalo de interesse é $0 < t < \infty$, portanto, precisa-se especificar a condição inicial em $t = 0$. Tem-se a condição inicial como

$$\mathcal{I}(r, \nu, \boldsymbol{\Omega}, 0) = \Lambda(r, \nu, \boldsymbol{\Omega}), \quad (2.23)$$

onde Λ é uma função específica de três variáveis.

A equação de transferência Equação 2.20, juntamente com as condições Equação 2.21 e Equação 2.23, caracteriza o problema de transferência radiativa.

2.2 Equação de Transferência Radiativa em Geometria Cilíndrica

Nesta seção, apresenta-se a equação de transferência radiativa em geometria cilíndrica [Pomraning, 2005]. Considera-se as coordenadas espaciais como sendo as convencionais, ou seja, a distância perpendicular r a partir do eixo z , a distância perpendicular z a partir do plano xy , o ângulo $\hat{\Theta}$ definindo um parafuso segundo a regra da mão direita sobre z , entre r e o eixo x . A direção $\boldsymbol{\Omega}$ pode ser definida em termos do ângulo polar θ entre o eixo z e $\boldsymbol{\Omega}$, o ângulo azimutal φ entre r e a projeção de $\boldsymbol{\Omega}$ no plano xy , medindo φ no sentido da regra da mão direita, para mais detalhes ver Pomraning, 2005.

Então, a equação da transferência radiativa em geometria cilíndrica é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \mu \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \hat{\Theta}} + \xi \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \varphi} + [\kappa(r, \nu, t) + \sigma(r, \nu, t)] \mathcal{I} = S(r, \nu, t) + \\ + \int_0^\infty d\nu' \int_{4\pi} d\Omega' \sigma(r, \nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega, t) \mathcal{I}(r, \hat{\Theta}, z, \nu', \theta', \varphi', t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}(r, \hat{\Theta}, z, \nu, \theta, \varphi, t)$ e define-se

$$\xi = \cos \theta \quad (2.25)$$

$$\mu = \text{sen} \theta \cos \varphi \quad (2.26)$$

$$\eta = \text{sen} \theta \text{sen} \varphi \quad (2.27)$$

onde $\xi^2 + \mu^2 + \eta^2 = 1$ e essas grandezas têm a interpretação geométrica de cossenos diretores de Ω .

Neste momento, considere uma particularidade da Equação 2.24. Se o sistema e as condições de contorno têm simetria cilíndrica e se o sistema é infinito na direção de z , a intensidade específica novamente depende de apenas uma variável espacial, a distância perpendicular r , a partir do eixo do cilindro (o eixo z). No entanto, para este caso são requisitados dois ângulos para especificar Ω . Estes ângulos podem ser considerados como θ , o ângulo entre z e Ω e um ângulo correspondente azimutal φ , o ângulo entre a projeção de Ω no plano xy e a coordenada cilíndrica r , com φ sendo medido no sentido da regra da mão direita. Então $I \equiv \mathcal{I}(r, \nu, \theta, \varphi, t)$ e a derivada direcional de \mathcal{I} , é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial r} \left(\frac{dr}{ds} \right) + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \theta} \left(\frac{d\theta}{ds} \right) + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \quad (2.28)$$

As alterações de r , θ e φ seguem o percurso como na Figura 2.2. Desenha-se um ângulo $\tau \equiv 2\pi - \varphi$ em vez de φ . O ângulo τ é também um ângulo azimutal sobre o eixo z , mas no sentido da regra da mão esquerda. Observa-se, primeiramente, a partir desta figura que

$$\frac{d\theta}{ds} = 0, \quad (2.29)$$

e utilizando a Equação 2.32 na equação de transporte 2.20, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \text{sen}\theta \left[\cos\varphi \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial r} - \frac{1}{r} \text{sen}\varphi \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \varphi} \right] + \beta(r, \nu, t) \mathcal{I} = S(r, \nu, t) + \\ + \int_0^\infty d\nu' \int_{4\pi} d\Omega' \sigma(r, \nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega, t) \mathcal{I}(r, \nu', \theta', \varphi', t), \end{aligned} \quad (2.33)$$

no qual $\beta(r, \nu, t) \equiv \kappa(r, \nu, t) + \sigma(r, \nu, t)$ é o coeficiente de extinção e $S(r, \nu, t) = j^e(r, \nu, t)$ é a taxa de emissão de energia devido a processos espontâneos.

Note que na Equação 2.33 a quantidade

$$d\Omega' \sigma(r, \nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega) \mathcal{I}(r, \nu', \theta', \varphi', t), \quad (2.34)$$

representa a quantidade de ganho de energia de radiação por espalhamento. A distribuição direcional da radiação pode ser descrita por um coeficiente diferencial de espalhamento, também chamada de função de fase $\mathcal{P}(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega)$ [Chandrasekhar, 1950]. Assim, se o espalhamento for não coerente, existe uma redistribuição de frequência da radiação e o termo de ganho de energia de radiação por espalhamento [Ozisik, 1973; Pomraning, 2005] é dado por

$$\int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty d\nu' \sigma(r, \nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega, t) \mathcal{P}(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega) \mathcal{I}(r, \nu, \theta', \varphi', t), \quad (2.35)$$

onde a função de fase é normalizada tal que

$$\int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty d\nu' \mathcal{P}(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega) = 1. \quad (2.36)$$

No entanto, se o espalhamento for coerente (sem troca de energia), tem-se

$$\mathcal{P}(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega) = \mathcal{P}(\Omega' \cdot \Omega) \delta(\nu' - \nu), \quad (2.37)$$

onde δ é a delta Dirac. Substituindo a Equação 2.37 nas Equações 2.35 e 2.36, respectiva-

mente, obtém-se

$$\sigma(r, \nu, t) \int_{4\pi} d\Omega' \mathcal{P}(\Omega' \cdot \Omega) \mathcal{I}(r, \nu, \theta', \varphi', t), \quad (2.38)$$

$$\int_{4\pi} d\Omega' \mathcal{P}(\Omega' \cdot \Omega) = 1. \quad (2.39)$$

Portanto, pode-se rescrever a Equação 2.33 considerando o espalhamento coerente, como

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \sin\theta \left[\cos\varphi \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\varphi \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \varphi} \right] + \beta(r, \nu, t) \mathcal{I} = S(r, \nu, t) + \\ + \sigma(r, \nu, t) \int_{4\pi} d\Omega' \mathcal{P}(\Omega' \cdot \Omega) \mathcal{I}(r, \nu, \theta', \varphi', t). \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.3 A Equação de Transferência Radiativa Conduativa em Geometria Cilíndrica

Nesta seção, apresenta-se a equação de transferência radiativa conduativa em geometria cilíndrica, e alguns conceitos físicos importantes para a derivação da mesma. Em seguida, descreve-se o acoplamento da equação de transferência radiativa conduativa em geometria cilíndrica com a equação de energia. Convém ressaltar que a solução desta equação será obtida no capítulo 4. Esta solução é aplicada para simular a radiação e campo de temperatura juntamente com energia de transporte radiativo e conduativo, provenientes do escape liberado em lançamentos de foguetes.

Considere o equilíbrio termodinâmico estabelecido em um meio, e o termo $S = j^e$ estará relacionado com a função de Planck e o coeficiente de absorção espectral [Ozisik, 1973], pela relação

$$j^e(r, \nu, t) = \kappa(r, \nu, t) B_\nu(T(r)), \quad (2.41)$$

onde

$$B_\nu(T(r)) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{[e^{h\nu/\bar{\sigma}T(r)} - 1]}, \quad (2.42)$$

é a função de Planck, $\bar{\sigma}$ e h são as constantes de Boltzmann e de Planck, respectivamente,

onde T é temperatura local e c é a velocidade da luz no vácuo. Se o meio possui propriedades radiativas independentes da frequência, o meio é denominado um meio cinza. Na transferência de calor, aproximação cinza é bastante válida para muitos problemas [Ozisik, 1973]. Neste caso, pode-se utilizar as quantidades de frequência integrando na equação de transferência 2.40, como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t) &\equiv \int_0^\infty \mathcal{I}(r, \nu, \theta, \varphi, t) d\nu, \\ \int_0^\infty B_\nu(T(r)) d\nu &\equiv B(T(r)) = \frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma} T^4(r)}{\pi}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde \bar{n} é o índice de refração do meio. Assim, considerando o espalhamento coerente a Equação 2.40 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t} + \text{sen} \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} \text{sen} \varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right) + \beta(r, t) \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t) \\ &= \kappa(r, \nu, t) \frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma} T^4(r)}{\pi} + \frac{\sigma(r, t)}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega' \mathcal{P}(\Omega' \cdot \Omega) \mathcal{I}(r, \theta', \varphi', t), \end{aligned} \quad (2.44)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta(r, t)} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t} + \text{sen} \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} \text{sen} \varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right) \right) + \\ &+ \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t) = (1 - \omega(r, t)) \frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma} T^4(r)}{\pi} + \frac{\omega(r, t)}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega' \mathcal{P}(\Omega' \cdot \Omega) \mathcal{I}(r, \theta', \varphi', t), \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde $\omega(r, t) = \frac{\sigma(r, t)}{\beta(r, t)}$ é o albedo de espalhamento simples e $1 - \omega(r, t) = \frac{\kappa(r, t)}{\beta(r, t)}$. Para muitas aplicações em engenharia o termo $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t}$ na Equação 2.45 pode ser negligenciado em comparação a outros termos, devido a grande magnitude da velocidade de propagação da luz c . Então a Equação 2.45 torna-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta(r)} \left(\text{sen} \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \text{sen} \varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \right) + \mathcal{I}(r, \theta, \varphi) = \\ &= (1 - \omega(r)) \frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma} T^4(r)}{\pi} + \frac{\omega(r)}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega' \mathcal{P}(\Omega' \cdot \Omega) \mathcal{I}(r, \theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Em muitos problemas de transferência calor radiativa é conveniente definir uma variável

óptica [Ozisik, 1973], r como

$$dr \equiv \beta(r)d\tau \quad \text{ou} \quad r = \int_0^\tau \beta(r)d\tau' \quad (2.47)$$

Então a Equação 2.46 torna-se

$$\begin{aligned} & \text{sen}\theta \left(\cos\varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \text{sen}\varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) + \mathcal{I}(r, \theta, \varphi) = \\ & = (1 - \omega(r)) \frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma} T^4(r)}{\pi} + \frac{\omega(r)}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega' \mathcal{P}(\Omega' \cdot \Omega) \mathcal{I}(r, \theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou ainda, pode-se escrever a Equação 2.48 [Ozisik, 1973; Sen e Wilson, 1990], como

$$\begin{aligned} & \text{sen}\theta \left(\cos\varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \text{sen}\varphi \frac{\partial \mathcal{I}(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) + \mathcal{I}(r, \theta, \varphi) = \\ & = (1 - \omega(r)) \frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma} T^4(r)}{\pi} + \frac{\omega(r)}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \mathcal{P}(\cos\theta_0) \mathcal{I}(r, \theta', \varphi') \text{sen}\theta' d\theta' d\varphi', \end{aligned} \quad (2.49)$$

aqui considera-se o meio isotrópico e homogêneo. Por consequência a função de fase $\mathcal{P}(\cos\theta_0)$ depende somente de θ_0 , o ângulo, entre Ω' e Ω [Ozisik, 1973]. O $\cos\theta_0$ é dado pela seguinte relação

$$\cos(\theta_0) = \cos\theta \cos\theta' + \text{sen}\theta \text{sen}\theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (2.50)$$

Agora tomando $\xi = \cos\theta$ e $\gamma = \cos\varphi$, a Equação 2.49 pode ser reescrita, como

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \xi^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathcal{I}(r, \xi, \gamma)}{\partial r} + \frac{1 - \gamma^2}{r} \frac{\partial \mathcal{I}(r, \xi, \gamma)}{\partial \gamma} \right) + \mathcal{I}(r, \xi, \gamma) = \\ & = (1 - \omega(r)) \frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma} T^4(r)}{\pi} + \frac{\omega(r)}{\pi} \int_{\gamma'=-1}^1 \int_{\xi'=0}^1 \mathcal{P}(\xi_0) \mathcal{I}(r, \xi', \gamma') d\xi' \frac{d\gamma'}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

para $r \in [0, R]$, $\xi \in [0, 1]$ e $\gamma \in (-1, 1)$. Esta Equação 2.51 é o problema unidimensional de transferência de energia descrito em Ozisik, 1973. Este problema representa o acoplamento da equação de transferência radiativa condutiva com a equação de energia.

Por conveniência, costuma-se expandir $\mathcal{P}(\xi_0)$ como uma série finita de polinômios

de Legendre em termos do ângulo do espalhamento θ_0 ($\xi_0 = \cos \theta_0$), ou seja,

$$\mathcal{P}(\xi_0) = \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_0), \quad (2.52)$$

onde os coeficientes β_l são tabelados, com $\beta_0 = 1$. Note que o argumento ξ_0 dos polinômios de Legendre está relacionado com ξ e ξ' na Equação 2.50, no qual $\xi = \cos \theta$ e $\xi' = \cos \theta'$. Utilizando o teorema da adição para os polinômios de Legendre [Ozisik, 1973], pode-se reescrever a Equação 2.52, como

$$\mathcal{P}(\xi_0) = \sum_{\bar{\alpha}=0}^M \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l^{\bar{\alpha}} \mathcal{P}_l^{\bar{\alpha}}(\xi) \mathcal{P}_l^{\bar{\alpha}}(\xi') \cos \alpha(\varphi - \varphi'), \quad (2.53)$$

onde φ é o ângulo azimutal formado com um ângulo de referência φ' , $\mathcal{P}_l^{\bar{\alpha}}$ são polinômios associados de Legendre, e os coeficientes $\beta_l^{\bar{\alpha}}$ são determinados por

$$\beta_l^{\bar{\alpha}} = \frac{(l - \bar{\alpha})!}{(l + \bar{\alpha})!} \beta_l, \quad l = \bar{\alpha}, \dots, \mathfrak{L}; \quad 0 \leq \bar{\alpha} \leq \mathfrak{L}. \quad (2.54)$$

Neste problema é considerado a simetria azimutal, assim $M = 0$ e

$$\mathcal{P}(\xi_0) = \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_l(\xi'). \quad (2.55)$$

Logo, substituindo a integral do lado direito da Equação 2.51 por 2.55, tem-se

$$\int_{\xi'=0}^1 \mathcal{P}(\xi_0) \mathcal{I}(r, \xi', \gamma') d\xi' = \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \int_{\xi'=0}^1 \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_l(\xi') \mathcal{I}(r, \xi', \gamma') d\xi',$$

onde o índice l refere-se a soma do grau de anisotropia e a Equação 2.51, torna-se

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \xi^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathcal{I}(r, \xi, \gamma)}{\partial r} + \frac{1 - \gamma^2}{r} \frac{\partial \mathcal{I}(r, \xi, \gamma)}{\partial \gamma} \right) + \mathcal{I}(r, \xi, \gamma) = \\ & = (1 - \omega(r)) \frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma} T^4(r)}{\pi} + \frac{\omega(r)}{\pi} \int_{\gamma'=-1}^1 \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \int_{\xi'=0}^1 \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_l(\xi') \mathcal{I}(r, \xi', \gamma') d\xi' \frac{d\gamma'}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

para $r \in [0, R]$, $\xi \in [0, 1]$ e $\gamma \in (-1, 1)$, sujeita às condições de contorno opacas [Ozisik, 1973], dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(0, \xi, \gamma) &= \mathcal{I}(0, \xi, -\gamma), \\ \mathcal{I}(R, \xi, \gamma) &= \epsilon(R)\Theta^4(R) + \frac{4\rho^d(R)}{\pi} \int_{\gamma'=0}^1 \int_{\xi'=0}^1 \mathcal{I}(R, \xi', \gamma') \sqrt{1 - \xi'^2} d\xi' \gamma' \frac{d\gamma'}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

para $\xi \in [0, 1]$ e $\gamma \in [0, 1)$, sendo que ρ^d é o coeficiente de reflexão difusa e que ϵ é a emissividade da superfície.

O termo $T(r)$ na Equação 2.56 representa a equação de energia para a temperatura, que conecta o fluxo radiativo com o gradiente de temperatura [Siewert e Thomas Jr., 1992], que representa

$$\beta \frac{d}{dr} \left\{ r \left[k\beta \frac{d}{dr} T(r) - q_r(r) \right] \right\} = 0, \quad (2.58)$$

onde β é o coeficiente extinção e k é a condutividade térmica. Sem perda de generalidade, a Equação 2.58 está sujeita às condições de contorno

$$\frac{d}{dr} T(0)|_{r=0} = T'_A = 0 \quad \text{e} \quad T(R) = T_B. \quad (2.59)$$

Na Equação 2.58, o termo $q_r(r)$ representa o fluxo radiativo e é expressado em termos da intensidade por

$$q_r(r) = 4 \int_{\gamma'=-1}^1 \int_{\xi'=0}^1 \mathcal{I}(r, \xi', \gamma') \sqrt{1 - \xi'^2} d\xi' \gamma' \frac{d\gamma'}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}. \quad (2.60)$$

Ozisik, 1973, adimensionaliza as Equações 2.56, 2.57, 2.58 e 2.60, introduzindo uma temperatura de referência T_r e as seguinte relações são definidas

$$\mathcal{I}(r, \xi, \gamma) = \left(\frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma}}{\pi} T_r^4 \right) \mathcal{I}^*(r, \xi, \gamma) \quad (2.61)$$

$$q_r(r) = \left(\frac{\bar{n}^2 \bar{\sigma}}{\pi} T_r^4 \right) q_r^*(r) \quad (2.62)$$

$$T(r) = T_r \Theta(r). \quad (2.63)$$

Logo, reescrevem-se as Equações 2.56, 2.57, 2.58 e 2.60, como

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\xi^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathcal{I}^*(r, \xi, \gamma)}{\partial r} + \frac{1-\gamma^2}{r} \frac{\partial \mathcal{I}^*(r, \xi, \gamma)}{\partial \gamma} \right) + \mathcal{I}^*(r, \xi, \gamma) = \\ & = (1-\omega(r)) \Theta^4(r) + \frac{\omega(r)}{\pi} \int_{\gamma'=-1}^1 \sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \int_{\xi'=0}^1 \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_l(\xi') \mathcal{I}^*(r, \xi', \gamma') d\xi' \frac{d\gamma'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

para $r \in [0, R]$, $\xi \in [0, 1]$ e $\gamma \in (-1, 1)$, sujeita às condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^*(0, \xi, \gamma) &= \mathcal{I}^*(0, \xi, -\gamma), \\ \mathcal{I}^*(R, \xi, \gamma) &= \epsilon(R) \Theta^4(R) + \frac{4\rho^d(R)}{\pi} \int_{\gamma'=0}^1 \int_{\xi'=0}^1 \mathcal{I}^*(R, \xi', \gamma') \sqrt{1-\xi'^2} d\xi' \gamma' \frac{d\gamma'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

para $r \in [0, R]$, $\xi \in [0, 1]$ e $\gamma \in [0, 1)$. Em adição,

$$r \frac{d^2}{dr^2} \Theta(r) + \frac{d}{dr} \Theta(r) = \frac{1}{4\pi N_c} \frac{d}{dr} [r q_r^*], \quad (2.66)$$

com as condições de contorno

$$\left. \frac{d}{dr} \Theta(r) \right|_{r=0} = \Theta'_T = 0 \quad \text{e} \quad \Theta(r)|_{r=R} = \Theta_B, \quad (2.67)$$

onde N_c é o parâmetro de radiação e condução e é definido como

$$N_c = \frac{k\beta}{4\bar{\sigma}\bar{n}^2 T_r^3}, \quad (2.68)$$

no qual k é a condutividade térmica, β o coeficiente extinção, $\bar{\sigma}$ a constante de Stefan-Boltzmann e \bar{n} o índice de refração. O fluxo radiativo adimensional é dado por

$$q_r^*(r) = 4 \int_{-1}^1 \int_0^1 \mathcal{I}^*(r, \xi', \gamma') \sqrt{1-\xi'^2} d\xi' \gamma' \frac{d\gamma'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}. \quad (2.69)$$

Portanto, tem-se o problema não linear acoplado pelas Equações 2.64 e 2.66 com as condições de contorno dadas por 2.65 e 2.67, que descrevem os efeitos térmicos por trás da saída do bocal do foguete, que é caracterizada predominantemente por radiação e condução

térmica. A Figura 2.3 ilustra o fenômeno devido ao lançamento do foguete real a partir de um referencial terrestre (a base de Alcântara - Brasil), que é foco principal deste trabalho.

Note ainda que, pode-se resolver a Equação 2.66 usando 2.67 para encontrar a temperatura adimensionalizada

$$\Theta(r) = \Theta(0) + \frac{1}{4\pi N_c} \int_0^r q_r^*(r') dr' , \quad (2.70)$$

quando $r = R$, tem-se

$$\Theta(R) = \Theta(0) + \frac{1}{4\pi N_c} \int_0^R q_r^*(r') dr' . \quad (2.71)$$

Logo, pode-se reescrever a Equação 2.70 usando a equação 2.71, como

$$\begin{aligned} \Theta(r) &= \Theta(R) - \frac{1}{4\pi N_c} \int_r^R q_r^*(r') dr' , \\ &= \Theta_B - \frac{1}{4\pi N_c} \int_r^R q_r^*(r') dr' . \end{aligned} \quad (2.72)$$

No próximo capítulo, a solução para este problema será apresentada.



Figura 2.3: Lançamento do foguete VS-30 V13, na base de Alcântara- Brasil. Fonte: Página da Força Aérea Brasileira *.

*Disponível em: <http://www.fab.mil.br/noticias/mostra/19799>; Acesso em maio 2016.

3 A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA CONDUTIVA EM GEOMETRIA CILÍNDRICA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se a solução da equação de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica pelo método de decomposição. Descreve-se uma formalização do problema não linear S_N da equação de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica. A solução deste problema é construída utilizando uma composição por método de transformada de Laplace (LTS_N) e o método da decomposição de Adomian. Além disso, apresenta-se o critério de convergência heurística por analogia a Lyapunov que agrega a confiabilidade ao método da decomposição de Adomian.

3.1 Método LTS_N

Nesta seção, usa-se a aproximação S_N estendida nas variáveis angulares, com $\mathcal{I}_{n,m}^* \equiv \mathcal{I}^*(r, \xi_n, \gamma_m)$. O método das ordenadas discretas S_N [Chandrasekhar, 1950; Lewis e Miller Jr., 1984], baseia-se na discretização da variável angular Ω em um conjunto enumerável de ângulos discretos, em termos de cossenos diretores. Os cossenos diretores são escolhidos de forma que sua integral seja exata para um polinômio na variável angular de até certo grau. Em relação à geometria cilíndrica do problema, duas variáveis ξ e γ são necessárias para determinar a orientação do fóton. Em particular, neste trabalho utiliza-se uma combinação de quadraturas de Gauss-Legendre e de Gauss-Chebyshev [Longoni, 2004].

Considerando-se a integral sobre a variável ξ do lado direito da Equação 2.64 e aplicando-se o método das ordenadas discretas S_N [Chandrasekhar, 1950] e a teoria de polinômios de Chebyshev, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'=-1}^1 \sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \int_{\xi'=0}^1 \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_l(\xi') \mathcal{I}^*(r, \xi', \gamma') d\xi' \frac{d\gamma'}{\sqrt{1-\gamma'^2}} &\simeq \\ &\simeq \sum_{l=0}^{\xi} \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^N \varpi_{p,q} \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}^*(r, \xi_p, \gamma_q) \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que ξ_p são as raízes do polinômio de Legendre, usando-se ordenadas de forma decrescente e N par. Assim

$$-1 < \xi_N < \dots < \xi_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \xi_{\frac{N}{2}} < \dots < \xi_2 < \xi_1 < 1 \quad (3.2)$$

e os ϖ_p são os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre, dados por

$$\varpi_p = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^N \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_p - \xi_j)} d\xi. \quad (3.3)$$

Além disso, considera-se que para cada φ seja fixada a raiz do polinômio de Chebyshev de primeira espécie \mathcal{T}_N . O polinômio de Chebyshev de primeira espécie \mathcal{T}_N de grau N [Kytke e Schäferkötter, 2005] é definido pela relação

$$\mathcal{T}_u[\cos \varphi] \equiv \cos(u\varphi), \quad (3.4)$$

e os polinômios são ortogonais e satisfazem às condições

$$\int_{-1}^1 \mathcal{T}_u(y) \mathcal{T}_v(y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \begin{cases} 0, & u \neq v \\ \pi, & u = v = 0, \\ \pi/2 & u = v \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $y = \cos \varphi$. Assim, utilizando a mesma ordenação de Gauss-Legendre, tem-se

$$\varphi_q = \left(1 - \frac{N - 2q + 1}{N}\right) \frac{\pi}{2}, \quad (3.6)$$

onde $q = 1, \dots, N$.

Logo, as integrais sobre as variáveis ξ e γ do lado direito da Equação 2.64 é substituída por um sistema de quadratura de Gauss com os pesos ϖ_p dados por

$$\varpi_{p,q} = \pi \frac{\varpi_p}{N}, \quad (3.7)$$

onde os pesos ϖ_p são normalizados para um, tal que, $\varpi_{p,q}$ é normalizado para o ângulo sólido de um octante como

$$\sum_{p=1}^{N/2} \varpi_p = 1, \quad \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^N \varpi_{p,q} = \pi. \quad (3.8)$$

Convém ressaltar que as integrais dos termos de espalhamento em 3.1 são aproximadas por uma combinação de quadraturas de Gauss-Legendre e de Gauss-Chebyshev, onde a escolha para a quadratura específica é devida ao fato de que, por um lado, a função de fase está representada por uma expansão de polinômios de Legendre, por outro lado, o segundo esquema de quadratura é motivada pela estrutura singular do integral, que é encontrada em representações de polinômios de Chebyshev.

A seguir, aplica-se o método de colocação que simplifica as Equações 2.64 e 2.66, o qual define o problema de transferência radiativa condutiva na geometria cilíndrica na aproximação S_N , com $\mathcal{I}_{n,m}^* \equiv \mathcal{I}^*(r, \xi_n, \gamma_m)$. Esta aproximação é representada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} & \gamma_m \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} + \left(\frac{1 - \gamma_m^2}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \gamma} \Big|_{\xi=\xi_n, \gamma=\gamma_m} + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \mathcal{I}_{n,m}^* = \\ & = \frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \Theta^4(r) + \frac{\omega(r)}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^N \varpi_{p,q} \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}_{p,q}^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\frac{d}{dr} \Theta(r) - \frac{d}{dr} \Theta(r) \Big|_{r=0} = \frac{1}{\pi N_c} \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^N \varpi_{p,q} [\mathcal{I}_{p,q}^*(r) - \mathcal{I}_{p,q}^*(0)], \quad (3.10)$$

onde ξ_n e γ_m são as discretizações angulares, n para a variável polar e m para a variável azimutal. A integração deve ser feita ao longo de dois octantes com $1 \leq n \leq N/2$ e $1 \leq m \leq N$. Nesta Equação 3.9, n é direção discreta de ξ_n e m é uma direção discreta de γ_m , respectivamente [Lewis e Miller Jr., 1984].

Neste momento, reescreve-se a Equação 3.9 da seguinte forma

$$\gamma_m \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} + \left(\frac{1 - \gamma_m^2}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \gamma} \Big|_{\xi=\xi_n, \gamma=\gamma_m} + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \mathcal{I}_{n,m}^* = \Xi(r, \xi_n, \gamma_m), \quad (3.11)$$

onde

$$\Xi(r, \xi_n, \gamma_m) = \frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \Theta^4(r) + \frac{\omega(r)}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^N \varpi_{p,q} \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}_{p,q}^*. \quad (3.12)$$

Agora, fazendo-se a seguinte mudança de variável em

$$\gamma_m \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} + \left(\frac{1 - \gamma_m^2}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \gamma} \Big|_{\xi=\xi_n, \gamma=\gamma_m} \quad (3.13)$$

e tomando-se como variáveis independentes

$$\mathcal{X} = r\gamma_m, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{Y} = r\sqrt{1 - \gamma_m^2}, \quad (3.15)$$

para $1 \leq n \leq N/2$ e $1 \leq m \leq N$. Logo, as derivadas de \mathcal{X} e \mathcal{Y} com respeito a r e γ_m são

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial r} = \gamma_m, \quad \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial r} = \sqrt{1 - \gamma_m^2} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_m} = r, \quad \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_m} = -\frac{r\gamma_m}{\sqrt{1 - \gamma_m^2}} \quad (3.17)$$

para $1 \leq n \leq N/2$ e $1 \leq m \leq N$.

Assim, pode-se obter uma relação entre as derivadas em \mathcal{X} , \mathcal{Y} , como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} &= \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{Y}} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial r} \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} \gamma_m + \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{Y}} \sqrt{1 - \gamma_m^2}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \gamma} \right|_{\xi=\xi_n, \gamma=\gamma_m} &= \left. \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_m} + \left. \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{Y}} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_m} \\
&= \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} r - \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{Y}} \frac{r\gamma_m}{\sqrt{1-\gamma_m^2}}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Substituindo as Equações 3.18 e 3.19 na Equação 3.13, tem-se

$$\begin{aligned}
&\gamma_m \left(\frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} \gamma_m + \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{Y}} \sqrt{1-\gamma_m^2} \right) + \\
&+ \left(\frac{1-\gamma_m^2}{r} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} r - \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{Y}} \frac{r\gamma_m}{\sqrt{1-\gamma_m^2}} \right) = \\
&= \gamma_m^2 \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} + \gamma_m \sqrt{1-\gamma_m^2} \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{Y}} + \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} - \\
&- \gamma_m^2 \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} - \gamma_m \sqrt{1-\gamma_m^2} \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{Y}} = \\
&= \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Logo, reescrevendo-se a Equação 3.11 a partir de 3.20, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} + \frac{1}{\sqrt{1-\xi_n^2}} \mathcal{I}_{n,m}^* = \Xi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \xi_n), \tag{3.21}$$

onde \mathcal{X} depende de duas variáveis r e γ_m . Vale ressaltar que apesar de não ter nenhum termo de derivada com respeito \mathcal{Y} na Equação 3.21, \mathcal{I}^* depende de \mathcal{Y} . Desta forma, usando o mesmo procedimento de antes para chegar nas derivadas e utilizando $\mathcal{Y} = r\sqrt{1-\gamma_m^2}$.

Note que $\gamma_m = \cos \varphi_m$ com $1 \leq n \leq N/2$ e $1 \leq m \leq N$, logo pode-se escrever r para cada direção de $\varphi = \varphi_m$ em termos de \mathcal{X} e \mathcal{Y} , como

$$r = \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2} \tag{3.22}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}} \right). \tag{3.23}$$

Assim, tem-se as derivadas com respeito a \mathcal{X}

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial \mathcal{X}} &= \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2}}, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{X}} &= -\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2},
\end{aligned} \tag{3.24}$$

com $1 \leq n \leq N/2$ e $1 \leq m \leq N$, e não é necessário o cálculo das derivadas com respeito a \mathcal{Y} , dado que, na Equação 3.21 não tem derivada com respeito a \mathcal{Y} .

Neste momento, calculando-se a derivada da função 3.20 nas novas variáveis r e φ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} &= \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathcal{X}} + \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{X}} \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2}} - \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \varphi} \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

e substituindo $\mathcal{X} = r\gamma_m$ e $\mathcal{Y} = r\sqrt{1 - \gamma_m^2}$ e $\gamma_m = \cos \varphi_{n,m}$ na Equação 3.25 e fazendo-se as operações adequadas, obtém-se

$$\gamma_m \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} + \left(\frac{1 - \gamma_m^2}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_m}. \quad (3.26)$$

Portanto, a nova equação que substitui a Equação 3.9 na aproximação S_N , é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial \mathcal{X}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \mathcal{I}_{n,m}^* = \Xi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \xi_n), \quad (3.27)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_m} \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \mathcal{I}_{n,m}^* &= \frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \Theta^4(r) + \\ &+ \frac{\omega(r)}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^N \varpi_{p,q} \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}_{p,q}^*. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim, o novo problema para a transferência radiativa condutiva na geometria cilíndrica na aproximação S_N é representada pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_m} \frac{\partial \mathcal{I}_{n,m}^*}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \mathcal{I}_{n,m}^* &= \frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \Theta^4(r) + \\ &+ \frac{\omega(r)}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^N \varpi_{p,q} \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}_{p,q}^*, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\left. \frac{d}{dr} \Theta(r) - \frac{d}{dr} \Theta(r) \right|_{r=0} = \frac{1}{\pi N_c} \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^N \varpi_{p,q} [\mathcal{I}_{p,q}^*(r) - \mathcal{I}_{p,q}^*(0)], \quad (3.30)$$

onde ξ_n e γ_m são discretizações angulares, com $1 \leq n \leq N/2$ e $1 \leq m \leq N$. As Equações 3.29 e 3.30 estão sujeitas às condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n,m}^*(0) &= \mathcal{I}_{n,N-m+1}^*(0), \\ \mathcal{I}_{n,N-m+1}^*(R) &= \epsilon(R) \Theta^4(R) + \frac{4\rho^d(R)}{\pi} \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^{N/2} \varpi_{p,q} \mathcal{I}_{p,q}^*(R) \sqrt{1 - \xi_p^2 \gamma_q}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A Figura 3.1 ilustra a representação do domínio físico na geometria cilíndrica.

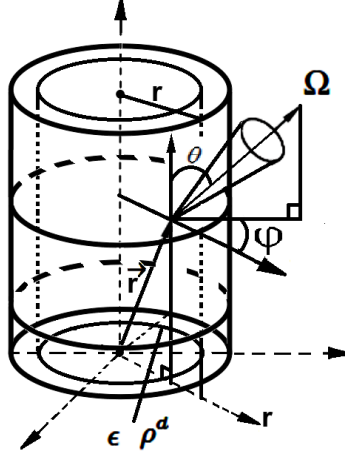


Figura 3.1: A representação do domínio físico na geometria cilíndrica.

Agora, com objetivo de introduzir o método LTS_N , reescreve-se o sistema de Equações 3.29 e 3.30, como uma equação diferencial ordinária matricial de primeira ordem,

$$\mathbf{A} \frac{d}{dr} \mathcal{I} - \mathbf{B} \mathcal{I} = \Psi, \quad (3.32)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz diagonal, $\mathbf{A} = \text{diag}(1/\gamma_1, \dots, 1/\gamma_m)$ de ordem $\frac{N^2}{2} \times \frac{N^2}{2}$, \mathbf{B} é uma

matriz quadrada definida de ordem $\frac{N^2}{2} \times \frac{N^2}{2}$ com elementos

$$B_{i,j} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-\xi_i}} + \frac{\omega_j(r)}{\sqrt{1-\xi_i}} \left[\sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_i) \mathcal{P}_l(\xi_j) \right] & \text{se } i = j \\ \frac{\omega_j(r)}{\sqrt{1-\xi_i}} \left[\sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_i) \mathcal{P}_l(\xi_j) \right] & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.33)$$

e os termos não lineares

$$\Psi = \left(\underbrace{\frac{(1-\omega)\Theta^4}{\sqrt{1-\xi_1^2}}, \dots, \frac{(1-\omega)\Theta^4}{\sqrt{1-\xi_1^2}}}_{N \text{ termos idênticos}}, \dots, \underbrace{\frac{(1-\omega)\Theta^4}{\sqrt{1-\xi_{N/2}^2}}, \dots, \frac{(1-\omega)\Theta^4}{\sqrt{1-\xi_{N/2}^2}}}_{N \text{ termos idênticos}} \right)^T.$$

O vetor de intensidade de radiação \mathcal{I} de ordem $\frac{N^2}{2}$, é definido por

$$\mathcal{I} = \left(\mathcal{I}_{1,1}^*, \dots, \mathcal{I}_{1,N}^*, \dots, \mathcal{I}_{\frac{N}{2},N}^* \right)^T. \quad (3.34)$$

De acordo com a prescrição de Adomian, 1988, a intensidade de radiação é expandida através de uma série infinita conforme

$$\mathcal{I} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{Y}_{\ell}. \quad (3.35)$$

O uso de uma expansão para a intensidade de radiação introduz um número infinito de graus de liberdade artificiais que podem ser utilizados e define um esquema recursivo de equações diferenciais lineares, onde a não linearidade aparece como o termo fonte, porém contendo apenas termos com as soluções de todas as soluções anteriores, para mais detalhes ver [Vilhena et al., 2011].

Logo, reescreve-se a Equação 3.32 como

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\mathbf{A} \frac{d}{dr} \mathbf{Y}_{\ell} - \mathbf{B} \mathbf{Y}_{\ell} \right) = \\ & = \left(\frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_1^2}}, \dots, \frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_{N/2}^2}} \right)^T \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{A}_{\ell-1} (\{\mathbf{Y}_{\iota}\}_{\iota=0}^{\ell-1})}_{\Theta^4(r)}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde a notação $\mathcal{A}_{\ell-1} (\{\mathbf{Y}_{\iota}\}_{\iota=0}^{\ell-1})$ representa

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 \rightarrow \mathcal{A}_0 &= \mathcal{A}_0(\mathbf{Y}_0) \\ \mathbf{Y}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1 &= \mathcal{A}_1(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1) \\ \mathbf{Y}_3 \rightarrow \mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}_2(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \\ &\vdots \\ \mathbf{Y}_{\ell} \rightarrow \mathcal{A}_{\ell-1} &= \mathcal{A}_{\ell-1}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{\ell-1}) \\ &= \mathcal{A}_{\ell-1} (\{\mathbf{Y}_{\iota}\}_{\iota=0}^{\ell-1}) . \end{aligned}$$

O procedimento adotado para resolver o sistema de Equações 3.36 de uma forma recursiva, é inicializar o processo resolvendo o problema homogêneo, como

$$\mathbf{A} \frac{d}{dr} \mathbf{Y}_0 - \mathbf{B} \mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.37)$$

juntamente com as condições de contorno e, logo após, entra em um processo recursivo das equações para os componentes restantes \mathbf{Y}_{ℓ} ,

$$\mathbf{A} \frac{d}{dr} \mathbf{Y}_{\ell} - \mathbf{B} \mathbf{Y}_{\ell} = \left(\frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_1^2}}, \dots, \frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_{N/2}^2}} \right)^T \mathcal{A}_{\ell-1} (\{\mathbf{Y}_{\iota}\}_{\iota=1}^{\ell-1}), \quad (3.38)$$

com $\ell = 1, 2, \dots, \mathcal{J}$.

Agora, para resolver a Equação 3.38 usa-se o método LTS_N , deste modo, aplica-se

a transformada de Laplace sobre a variável radial r definida como

$$\mathbf{Y}_\ell(\bar{r}) = \mathcal{L}[\mathbf{Y}_\ell(r); r \rightarrow \bar{r}], \quad (3.39)$$

juntamente com as condições de contorno, obtém-se a solução

$$\mathbf{Y}_\ell(r) = \mathcal{L}^{-1}[(\bar{r}\mathbf{I}_d - \mathbf{U})^{-1}\mathbf{Y}_\ell(0)] + \mathcal{L}^{-1}[(\bar{r}\mathbf{I}_d - \mathbf{U})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\bar{\Psi}(\bar{r})], \quad (3.40)$$

onde \mathcal{L}^{-1} denota o operador da transformada inversa de Laplace e \bar{r} é um parâmetro complexo. Por simplicidade, usa-se a notação na Equação 3.40 como

$$\mathbf{Y}_\ell(r) = \mathbf{C}(r)\mathbf{Y}_\ell(0) + \mathbf{H}(r), \quad (3.41)$$

onde $\mathbf{C}(r) = \mathcal{L}^{-1}[(\bar{r}\mathbf{I}_d - \mathbf{U})^{-1}]$ e $\mathbf{H}(r)$ é definido por

$$\mathbf{H}(r) = (\mathbf{C} * \Psi)(r) = \int_0^r \mathbf{C}(r - \zeta)\mathbf{A}^{-1}\Psi(\zeta)d\zeta, \quad (3.42)$$

em que o sinal $*$ representa a convolução entre os vetores. Para tornar possível o cálculo de \mathbf{C} , a matriz $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ pode ser decomposta em uma matriz diagonal como

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}, \quad (3.43)$$

onde \mathbf{D} é a matriz diagonal com seus autovalores distintos e \mathbf{X} é a matriz de vetores associados. Neste momento, tem-se condições para aplicar a transformada inversa de Laplace, da solução transformada de \bar{r} para a variável radial r . Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(r) &= \mathcal{L}^{-1}[(\bar{r}\mathbf{I}_d - \mathbf{U})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[(\bar{r}\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1})^{-1}] \\ &= \mathcal{L}^{-1}[(\mathbf{X}(\bar{r}\mathbf{I}_d - \mathbf{D})\mathbf{X}^{-1})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(\bar{r}\mathbf{I}_d - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}] \\ &= \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1}[(\bar{r}\mathbf{I}_d - \mathbf{D})^{-1}]\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}r}\mathbf{X}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Pode-se observar que a solução obtida pelo método LTS_N tem forma exponencial, para mais

detalhes ver Goulart, 2010. Para evitar uma restrição computacional (isto é, problemas aritméticos) por causa dos termos exponenciais positivos para N grande, foi proposto separar as soluções homogênea e particular em componentes que contêm apenas os expoentes positivos e os expoentes negativos, respectivamente [Gonçalves et al., 2002; Gonçalvez et al., 2007; Goulart, 2010].

Logo, denota-se \mathbf{C} por

$$\mathbf{C}(r) = \mathbf{C}^+(r) + \mathbf{C}^-(r), \quad (3.45)$$

onde $\mathbf{C}^+(r)$ e $\mathbf{C}^-(r)$ contêm os autovalores positivos e negativos, respectivamente. Portanto, a partir da propriedade de invariância e a decomposição da matriz \mathbf{C} [Goulart, 2010], reescreve-se a Equação 3.41

$$\mathbf{Y}_\ell(r) = \mathbf{C}^+(r - R)\mathbf{Y}_\ell(R) + \mathbf{C}^-(r)\mathbf{Y}_\ell(0)\mathbf{H}(r), \quad (3.46)$$

no qual $\mathbf{H}(r)$, o vetor convolução, é expresso como

$$\mathbf{H}(r) = \int_r^R \mathbf{C}^+(r - \zeta)A^{-1}\mathbf{\Psi}(\zeta)d\zeta + \int_0^r \mathbf{C}^-(r - \zeta)A^{-1}\mathbf{\Psi}(\zeta)d\zeta, \quad (3.47)$$

De modo que, a Equação 3.46 é a solução do método LTS_N . Logo, o sistema recursivo 3.36 apresenta sua solução geral, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\ell(r) = & \mathbf{X}e^{\mathbf{D}r}\mathbf{V}^\ell + \\ & + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}r}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}^{-1} * \mathcal{A}_{\ell-1}(\{\mathbf{Y}_\iota\}_{\iota=0}^{\ell-1}) \left(\frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_1^2}}, \dots, \frac{(1 - \omega(r))}{\sqrt{1 - \xi_{N/2}^2}} \right)^T, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde \mathbf{V}^ℓ são determinados a partir da aplicação das condições de contorno e com $\ell = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{J}$.

3.2 Método da Decomposição de Adomian

Nesta seção, apresenta-se o método da decomposição baseado na ideia de Adomian, que será aplicado na não linearidade devido à $\Theta^4(r)$ do problema em estudo. Sabe-se que o método da decomposição de Adomian é um método eficaz na resolução de uma ampla classe de equações diferenciais não lineares e equações integrais [Adomian e Rach, 1992; Adomian, 1994; El-Sayed e Abdel-Aziz, 2003; Abassy et al., 2004]. O método da decomposição foi proposto por Adomian, 1988. E a convergência deste método tem sido investigada [Cherruault et al., 1995; Ouedraogo et al., 2000; Babolian e Biazar, 2002; Lesnic, 2002; Babajee et al., 2008].

O método da decomposição de Adomian tem por objetivo facilitar a solução de problemas físicos, e tem se mostrado um ótimo artifício na solução de equações não lineares, em razão de seus resultados analíticos convergirem rapidamente. A solução obtida por este método é uma aproximação, contudo não altera o problema dado e representa o termo não linear de forma mais precisa, de maneira que a série infinita, quando se faz uma aproximação de ℓ termos, a solução se torna adequada como uma solução prática, em que delimita-se a sua validade às regiões no qual o comprimento do domínio seja menor que o raio de convergência da série [Adomian, 1988].

A seguir, apresenta-se o método da decomposição de Adomian. Considere uma equação geral dada por

$$OY(t) = G(t), \quad (3.49)$$

onde O é um operador diferencial parcial não linear geral e $G(t)$ é o termo fonte. Pode-se decompor O em $O_L + O_R + O_N$, ou seja, envolvendo termos lineares e não lineares.

O termo linear é decomposto em $O_L + O_R$, onde O_L tem inversão conhecida, e O_R é a parte restante do operador linear. Esta Equação 3.49 pode, então, ser escrita como

$$O_L Y + O_N Y + O_R Y = G, \quad (3.50)$$

onde O_N é a parte não linear do operador O . Reescrevendo a Equação 3.50, como

$$O_L Y = G - O_N Y - O_R Y. \quad (3.51)$$

Devido a O_L ser inversível, a Equação 3.51, torna-se

$$O_L^{-1} O_L Y = O_L^{-1} G - O_L^{-1} O_R Y - O_L^{-1} O_N Y. \quad (3.52)$$

Se O_L é um operador diferenciável, O_L^{-1} será o operador integral e a Equação 3.52 para Y será

$$Y = Y(0) + Y'(0)t + O_L^{-1} G - O_L^{-1} O_R Y - O_L^{-1} O_N Y. \quad (3.53)$$

O termo não linear $O_N Y$ será igualado a $\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{A}_\ell$, onde \mathcal{A}_ℓ são polinômios de Adomian, que serão discutidos a seguir. Note que, no problema em estudo 3.9, a não linearidade é representada pelo termo $\Theta^4(r)$ e é escrita através dos polinômios de Adomian, como

$$O_N Y = \sum_{\ell=0}^{\mathcal{J}} \mathcal{A}_\ell(r) = \Theta^4(r).$$

Além disso, Y é decomposta em $\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{Y}_\ell$ com $Y_0 = \mathbf{Y}(0) + O_L^{-1} G$. Então,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{Y}_\ell = \mathbf{Y}_0 - O_L^{-1} O_R \mathbf{Y} - O_L^{-1} O_N \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 - O_L^{-1} O_R \mathbf{Y} - O_L^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{A}_\ell(r), \quad (3.54)$$

por consequência,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= -O_L^{-1} O_R \mathbf{Y}_0 - O_L^{-1} \mathcal{A}_0(r) \\ \mathbf{Y}_2 &= -O_L^{-1} O_R \mathbf{Y}_1 - O_L^{-1} \mathcal{A}_1(r) \\ &\vdots \\ \mathbf{Y}_{\ell+1} &= -O_L^{-1} O_R \mathbf{Y}_\ell - O_L^{-1} \mathcal{A}_\ell(r) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Os polinômios $\mathcal{A}_l(r)$ são gerados para a não linearidade, os termos não lineares dependem de todos outros termos anteriores, de modo que, $\mathcal{A}_0(r)$ dependa de \mathbf{Y}_0 , $\mathcal{A}_1(r)$ dependa de \mathbf{Y}_0 e \mathbf{Y}_1 , $\mathcal{A}_2(r)$ dependa de \mathbf{Y}_0 , \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_2 e assim por diante.

Logo, todas as componentes \mathbf{Y}_ℓ são determináveis e

$$Y = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{Y}_\ell . \quad (3.56)$$

E se a série 3.56 converge, a soma parcial de ℓ termos, $\phi_\ell = \sum_{\iota=0}^{\ell-1} \mathbf{Y}_\iota$ será uma solução aproximada, visto que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \phi_\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{Y}_\ell = Y, \quad (3.57)$$

por definição [Adomian, 1988].

Agora, os polinômios de Adomian $\mathcal{A}_\ell(r)$ serão obtidos. Para isto, considere uma equação para a qual $Y(t)$ é solução, contendo um termo não linear

$$O_N Y = f(\mathbf{Y}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{A}_\ell(r). \quad (3.58)$$

Considere a expansão em uma espécie de série funcional de Taylor $f(\mathbf{Y})$ em torno da função $\mathbf{Y}_0(t)$, então

$$O_N Y = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{A}_\ell(r) = f(\mathbf{Y}_0) - (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)f'(\mathbf{Y}_0) + \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^2}{2!}f''(\mathbf{Y}_0) + \dots , \quad (3.59)$$

ou seja,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{A}_\ell(r) = f(\mathbf{Y}_0) + (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \dots)f'(\mathbf{Y}_0) + \dots . \quad (3.60)$$

Pode-se reescrever o termo não linear de forma geral, como

$$\begin{aligned}
O_{NY} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{A}_{\ell}(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \underbrace{\frac{\partial^{\ell}(LY)}{\partial \mathbf{Y}^{\ell}}}_{f_0^{(\ell)}} \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_0} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{Y}_{\nu} \right)^{\ell} \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} f_0^{(\ell)} \sum_{\substack{b_1, \dots, b_a \\ \sum b_i = \ell}} \left(\binom{\ell}{\{b_i\}_1^a} \prod_{\nu=1}^a \mathbf{Y}_{\nu}^{b_{\nu}} \right) \\
&= f_0^{(0)} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(f_0^{(1)} \mathbf{Y}_{\ell} + \sum_{j=2}^{\ell} \frac{1}{j!} f_0^{(j)} \sum_{\substack{b_1, \dots, b_{\ell-1} \\ \sum b_i = j}} \left(\binom{j}{\{b_i\}_1^{\ell-1}} \prod_{\nu=1}^{\ell-1} \mathbf{Y}_{\nu}^{b_{\nu}} \right) \right), \quad (3.61)
\end{aligned}$$

para mais detalhes ver Vilhena et al., 2011, onde a notação $f_0^{(\ell)}$ para a ℓ -ésima derivada em $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0$. Aqui, $\binom{j}{\{b_i\}_1^{\ell-1}}$ são os coeficientes de multinomiais usuais. Já na última linha da Equação 3.61 os termos são reorganizados, de modo que se identifica o primeiro termo $f_0^{(0)}$ e todos os termos subsequentes da série que definem os polinômios de Adomian \mathcal{A}_{ℓ} .

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0(r) &= f_0^{(0)} = f(\mathbf{Y}_0), \\
\mathcal{A}_1(r) &= f_0^{(1)} \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1 \frac{d}{d\mathbf{Y}_0} f(\mathbf{Y}_0) \\
\mathcal{A}_2(r) &= f_0^{(1)} \mathbf{Y}_2 + f_0^{(2)} \mathbf{Y}_1^2 = \mathbf{Y}_2 \frac{d}{d\mathbf{Y}_0} f(\mathbf{Y}_0) + \frac{\mathbf{Y}_1^2}{2!} \frac{d}{d\mathbf{Y}_0} f(\mathbf{Y}_0) \\
&\vdots \\
\mathcal{A}_{\ell}(r) &= f_0^{(1)} \mathbf{Y}_{\ell} + \sum_{j=2}^{\ell} \frac{1}{j!} f_0^{(j)} \sum_{\substack{b_1, \dots, b_{\ell-1} \\ \sum b_i = j}} \left(\binom{j}{\{b_i\}_1^{\ell-1}} \prod_{\nu=1}^{\ell-1} \mathbf{Y}_{\nu}^{b_{\nu}} \right). \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Em princípio, é necessário resolver um número infinito de equações, de modo que para uma implementação computacional tem de introduzir um truncamento de acordo com uma precisão prescrita. A partir do último termo na Equação 3.62, observa-se que para uma não linearidade com estrutura polinomial existe apenas um número limitado de combinações no produto $\prod \mathbf{Y}_{\nu}^{b_{\nu}}$. Consequentemente, para j suficientemente grande o termo fatorial $j!$ controla a magnitude dos termos de correção, que para o aumento de j tende a zero.

Note ainda que fluxo de calor radiativo é conhecido Equação 2.72. Assim, de acordo

com a prescrição de Adomian [Adomian, 1988], a Equação 2.72 é expandida em uma série infinita como

$$\sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l(r) = \Theta_B - \frac{1}{4\pi N_c} \sum_{l=0}^{\infty} \int_r^R q_{l,r}^*(r') dr'. \quad (3.63)$$

Portanto, pode-se escrever os polinômios de Adomian \mathcal{A}_l na Equação 3.62 em função de 3.63 então

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(r) &= f_0^{(0)} = f(\mathbf{Y}_0) = \left(\Theta_B - \frac{1}{4\pi N_c} \int_r^R q_{0,r}^*(r') dr' \right)^4, \\ \mathcal{A}_1(r) &= f_0^{(1)} \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1 \frac{d}{d\mathbf{Y}_0} f(\mathbf{Y}_0) = \left(-\frac{1}{4\pi N_c} \int_r^R (q_{0,r}^*(r') + q_{1,r}^*(r')) dr' \right)^4 \\ \mathcal{A}_2(r) &= f_0^{(1)} \mathbf{Y}_2 + f_0^{(2)} \mathbf{Y}_1^2 = \mathbf{Y}_2 \frac{d}{d\mathbf{Y}_0} f(\mathbf{Y}_0) + \frac{\mathbf{Y}_1^2}{2!} \frac{d}{d\mathbf{Y}_0} f(\mathbf{Y}_0) = \\ &= \left(-\frac{1}{4\pi N_c} \int_r^R (q_{0,r}^*(r') + q_{1,r}^*(r') + q_{2,r}^*(r')) dr' \right)^4 \\ &\vdots \\ \mathcal{A}_\ell(r) &= f_0^{(1)} \mathbf{Y}_\ell + \sum_{j=2}^{\ell} \frac{1}{j!} f_0^{(j)} \sum_{\substack{b_1, \dots, b_{\ell-1} \\ \sum b_i = j}} \left(\binom{j}{\{b_i\}_1^{\ell-1}} \prod_{\nu=1}^{\ell-1} \mathbf{Y}_\nu^{b_\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

A integral em 3.64 foi calculada por integração numérica, no caso, a regra dos trapézios (com 11 pontos).

A metodologia apresentada é, na verdade, de caráter geral. Sua aplicação pode ser estendida para problemas de transferência radiativa condutiva em outras geometrias curvilíneas, como por exemplo, geometria esférica. No apêndice B, apresenta-se a construção da solução bem como aplicações e comparações com resultados da literatura.

3.3 O Critério de Estabilidade e Convergência

Em geral a convergência não é garantida pelo método da decomposição de Adomian, de modo que a solução deve ser determinada através de um critério conveniente. Os critérios simples de convergência de séries como de Cauchy, de D'Alembert, de Leibniz não são aplicadas em razão da não linearidade devido à $\Theta^4(r)$ do problema em estudo.

Apresenta-se um método que é baseado no critério de Lyapunov [Boichenko et al.,

2005], utiliza-se este critério para verificar tanto a convergência heurística quanto a estabilidade da solução obtida. Denota-se

$$|\delta \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}| = \left\| \sum_{\ell=\mathcal{J}+1}^{\infty} \Theta_{\ell} \right\|, \quad (3.65)$$

que representa a diferença máxima entre a solução obtida com o truncamento \mathcal{J} , ou seja, $\Upsilon_{\mathcal{J}} = \sum_{\ell=0}^{\mathcal{J}} \Theta_{\ell}$, e a solução exata, onde $\|\cdot\|$ representa a norma do máximo. Deste modo, tem-se

$$|\delta \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}| = e^{\Upsilon \lambda} |\delta \mathcal{Z}_0|, \quad (3.66)$$

onde se $\lambda < 0$ tem-se que a aproximação usando os polinômios de Adomian convergem. Isolando a exponencial e aplicando logaritmo natural em ambos lados da igualdade 3.66, logo o expoente de Lyapunov λ é determinado calculando

$$\lambda = \frac{1}{\left\| \sum_{\ell=0}^{\mathcal{J}} \Theta_{\ell} \right\|} \ln \left(\frac{|\delta \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}|}{|\delta \mathcal{Z}_0|} \right). \quad (3.67)$$

Inicialmente, utiliza-se o critério de Lyapunov para determinar a influência da variação da condição inicial na solução. Neste momento, este critério tem como finalidade avaliar se as soluções obtidas tem convergência caótica ou se convergem de modo forte para uma única solução. Portanto, se $\lambda > 0$, existe \mathcal{J}_0 tal que $\forall \mathcal{J} > \mathcal{J}_0$ tem-se uma solução com convergência caótica ou divergente. Já, se $\lambda < 0$, existe \mathcal{J}_0 tal que $\forall \mathcal{J} > \mathcal{J}_0$ tem-se uma solução bem comportada e convergente. Deste modo, o primeiro termo da solução Θ_0 tem o papel da condição inicial.

A magnitude do expoente de Lyapunov λ é um indicador da profundidade recursiva em que o comportamento de convergência caótica pode ser previsto ou sequência zero dos termos de correção recursiva, para os casos de expoente positivo e negativo, respectivamente [Wolf, 1986]. Fisicamente, λ é uma medida de quão rapidamente nas proximidades da solução verdadeira, a série converge ou diverge. De modo geral, λ pode ser positivo, negativo e zero. Se $\lambda > 0$ indica instabilidade ou divergência a partir da inicialização da recursão (o requisito caótico). Agora, se $\lambda < 0$ indica estabilidade do sistema recursivo e convergência. Quanto

maior for o valor absoluto do expoente negativo de Lyapunov mais estável é o sistema. Além disso, tem-se a definição de uma solução super estável no qual, $\lambda = -\infty$. Por último, $\lambda = 0$ indica um estado de convergência indiferente, mas não indica divergência ou convergência [Brown, 1995; BenSaïda, 2015].

Para completar a construção da solução da equação de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica pelo método da decomposição, no próximo capítulo serão exibidos os resultados a partir desta metodologia.

4 PARÂMETROS DO PROBLEMA E RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos a partir de alguns parâmetros físicos importantes do problema em estudo, as Equações 2.64–2.67. Estes parâmetros, tais como, emissividade, refletividade e albedo, podem ser relatados na densidade ou no perfil de concentração de poluentes da exaustão do propulsor utilizado lançamento de foguetes. A relação destes parâmetros é essencial, uma vez que, na fonte, os modelos de dispersão de poluentes não são caracterizados pelas propriedades térmicas. Este trabalho tem como objetivo reduzir a deficiência destes modelos.

Para verificar se o método proposto no capítulo 3 é realmente válido para o problema de transferência radiativa condutiva, cujo esquema recursivo apresenta a solução geral, Equação 3.48, avalia-se o comportamento da temperatura adimensionalizada e dos fluxos de calor radiativo $Q_r(r)$, condutivo $Q_c(r)$ e total $Q(r)$:

$$Q_r(r) = \frac{1}{4\pi N_c} q_r^*(r), \quad (4.1)$$

$$Q_c(r) = -\frac{d}{dr} \Theta(r) \quad (4.2)$$

e

$$Q(r) = Q_r(r) + Q_c(r) . \quad (4.3)$$

Todas as avaliações que seguem são baseadas no conjunto de parâmetros dados na Tabela 4.1. Convém mencionar, que neste trabalho os parâmetros ω , ϵ , ρ^d e N_c são escolhidos arbitrariamente, porém esta escolha leva em consideração a solução longe da fonte, cuja modelagem é tipicamente cartesiana, e onde as correlações físicas destes parâmetros são conhecidas, ver Vilhena et al., 2011. Além disso, algumas das avaliações serão comparadas com o artigo Siewert e Thomas Jr., 1992, e neste artigo uma geração de calor constante é

Tabela 4.1: Parâmetros para diferentes problemas.

Problema	ϵ	ρ^d	Θ_B	ω	R	N_c	H	α	Ordem de truncamento
1	0,9	0,1	1	0,9	1	0,05	0	1	181
2	0,8	0,2	1	0,9	1	0,05	0	1	180
3	1	0	1	0,9	1	0,05	0	1	182
4	0,9	0,1	1	0,8	1	0,05	0	1	317
5	1	0	1	0,8	1	0,05	0	1	328
6	0,8	0,2	1	0,9	5	0,5	0	0,1	183
7	0,8	0,2	1	0,9	0,5	0,05	0	10	45
8	0,8	0,2	1	0,9	0,5	0,005	0	10	624
9	1	0	1	0,5	1	0,1	0	1	368
10	0,8	0,2	1	0,5	1	0,05	0	1	1078
11	0,9	0,1	1	0,0	1	0,5	0	1	80
12	0,8	0,2	1	0,99	1	0,1	0	10	40
13	0,8	0,2	1	0,9	1	0,05	1,5	1	280
14	0,9	0,1	1	0,9	0,5	0,05	100	0,1	6361
15	0,9	0,1	1	0,9	0,05	0,0005	4000	10	2376
16	0,9	0,1	1	0,9	0,5	0,005	40	1	9557
17	0,9	0,1	1	0,9	5	0,5	0,4	0,01	4882
18	1	0	1	0,9	1	0,1	1	10	229

adicionada no meio, que é independente da intensidade de radiação, dada por

$$H = (k\beta^2 T_r)^{-1} \bar{h}, \quad (4.4)$$

onde k é a condutividade térmica, β é o coeficiente de extinção, T_r é a temperatura de referência e \bar{h} é a geração de calor constante no meio.

Assim, a equação de energia para a temperatura, que conecta o fluxo radiativo com o gradiente de temperatura é

$$r \frac{d^2}{dr^2} \Theta(r) + \frac{d}{dr} \Theta(r) = \frac{1}{4\pi N_c} \frac{d}{dr} [rq_r^*] - rH, \quad (4.5)$$

com as condições de contorno

$$\left. \frac{d}{dr} \Theta(r) \right|_{r=0} = \Theta'_T = 0 \quad \text{e} \quad \Theta(r)|_{r=R} = \Theta_B. \quad (4.6)$$

Portanto, pode-se encontrar a temperatura adimensionalizada a partir da Equação 4.5 junto com as condições de contorno 4.6, como

$$\Theta(r) = \Theta_B + \frac{H}{4}(R^2 - r^2) - \frac{1}{4\pi N_c} \int_r^R q_r^*(r') dr' , \quad (4.7)$$

desta forma, pode-se reescrever as Equações 4.1, 4.2 e 4.3, como

$$Q_r(r) = \frac{1}{4\pi N_c} q_r^*(r), \quad (4.8)$$

$$Q_c(r) = \frac{r}{2}H - \frac{1}{4\pi N_c} q_r^*(r), \quad (4.9)$$

e

$$Q(r) = \frac{r}{2}H . \quad (4.10)$$

Note que na Tabela 4.1, apresenta-se um parâmetro de correção α para o esquema recursivo, dado que sem essa correção este esquema apresenta propriedades problemáticas de convergência. Desta forma, após a prescrição de Adomian, 1988, na Equação 4.7, o parâmetro α é introduzido, como

$$\sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l(r) = \Theta_B + \frac{H}{4}(R^2 - r^2) - \frac{Z\alpha}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_r^R q_{l,r}^*(r') dr' , \quad (4.11)$$

onde $\frac{1}{N_c} = Z\alpha$, com $Z \in \mathbb{Z}_+$. Por exemplo, para $Z = 3$ tem-se o esquema recursivo para a temperatura, como

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l(r) = & \underbrace{\Theta_B + \frac{H}{4}(R^2 - r^2)}_{\Theta_0(r)} - \underbrace{\frac{\alpha}{4\pi} \int_r^R q_{0,r}^*(r') dr'}_{\Theta_1(r)} - \underbrace{\frac{\alpha}{4\pi} \int_r^R (q_{0,r}^*(r') + q_{1,r}^*(r')) dr'}_{\Theta_2(r)} - \\ & - \underbrace{\frac{\alpha}{4\pi} \int_r^R (q_{0,r}^*(r') + q_{1,r}^*(r') + q_{2,r}^*(r')) dr'}_{\Theta_3(r)} - \underbrace{\frac{\alpha}{4\pi} \int_r^R (q_{1,r}^*(r') + q_{2,r}^*(r') + q_{3,r}^*(r')) dr'}_{\Theta_4(r)} - \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Note que foi escolhido $Z = 3$ para ilustrar o exemplo, porém na implementação do código pode-se escolher $Z \in \mathbb{Z}_+$ de acordo com os problemas dado na Tabela 4.1. A função 4.12 é suave em r e a integração do esquema recursivo é obtida pela regra do trapézio, no qual utilizou-se 11 pontos. Convém observar que a soma de todas as integrais na Equação 4.12 garante que se tenha uma solução estável. De modo geral, o esquema recursivo para temperatura, é dado por

$$\Theta_l(r) = \delta_{0,l} \left[\Theta_B + \frac{H}{4}(R^2 - r^2) \right] - \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \int_r^R q_{l-i,r}^*(r') dr', \quad (4.13)$$

onde $\delta_{0,l}$ é o delta de Kronecker e $\mathcal{M} = \min(Z, l)$. A seguir, considerou-se o espalhamento isotrópico, ou seja, $\mathfrak{L} = 0$ e r em unidade de r/R que varia entre 0 e 1 para todos os 18 problemas para poder comparar os resultados obtidos com os da literatura [Siewert e Thomas Jr., 1992].

Problema 1

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para o seguinte conjunto de parâmetros $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e também o perfil de temperatura para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e (4.4) respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). A fim de estudar estabilidade da metodologia proposta, apresenta-se nas Figuras 4.5 e 4.6 a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

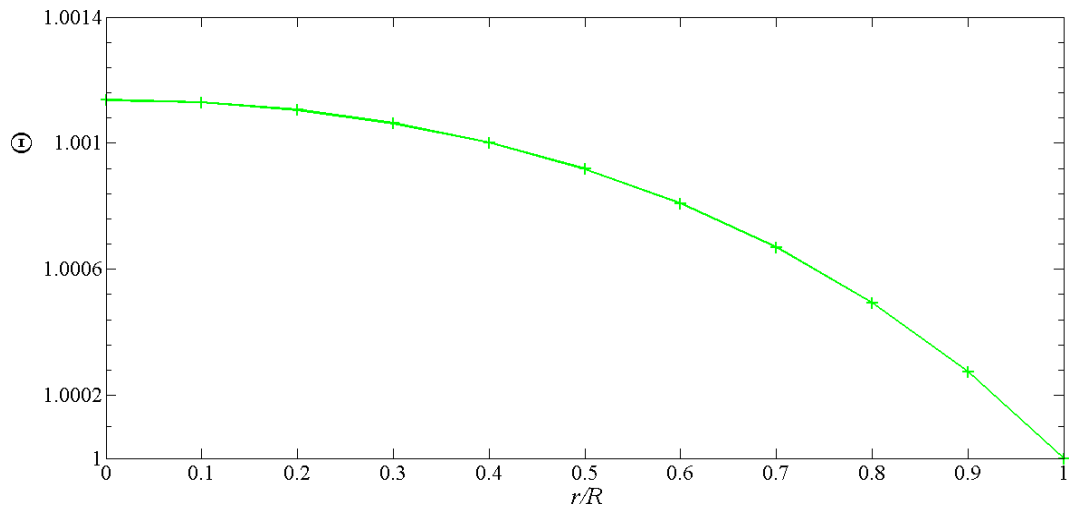


Figura 4.1: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.

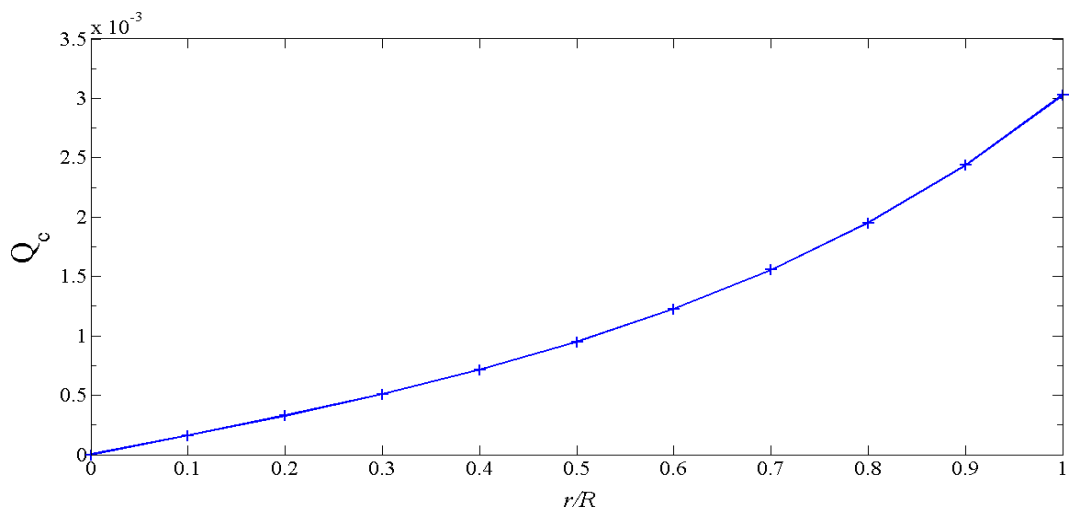


Figura 4.2: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.

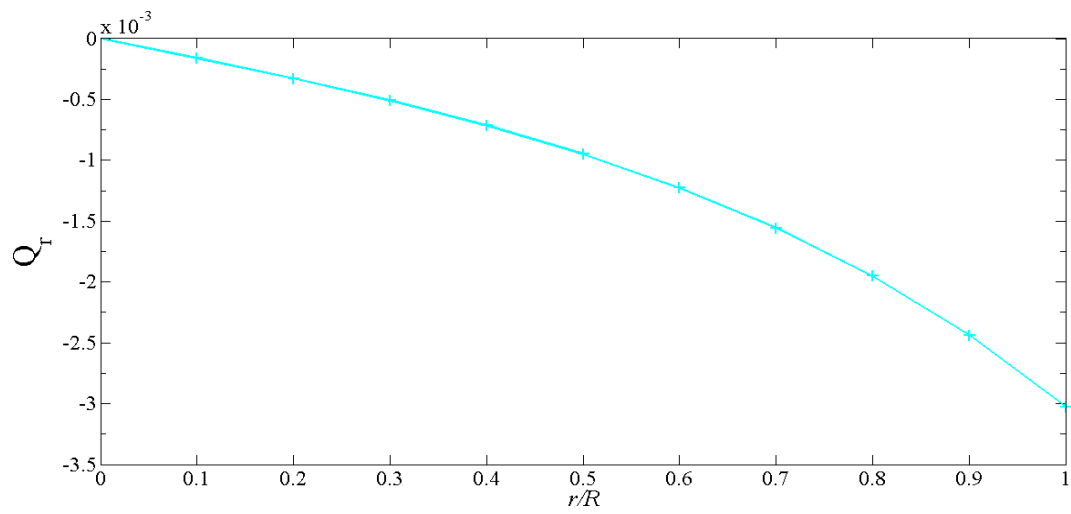


Figura 4.3: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.

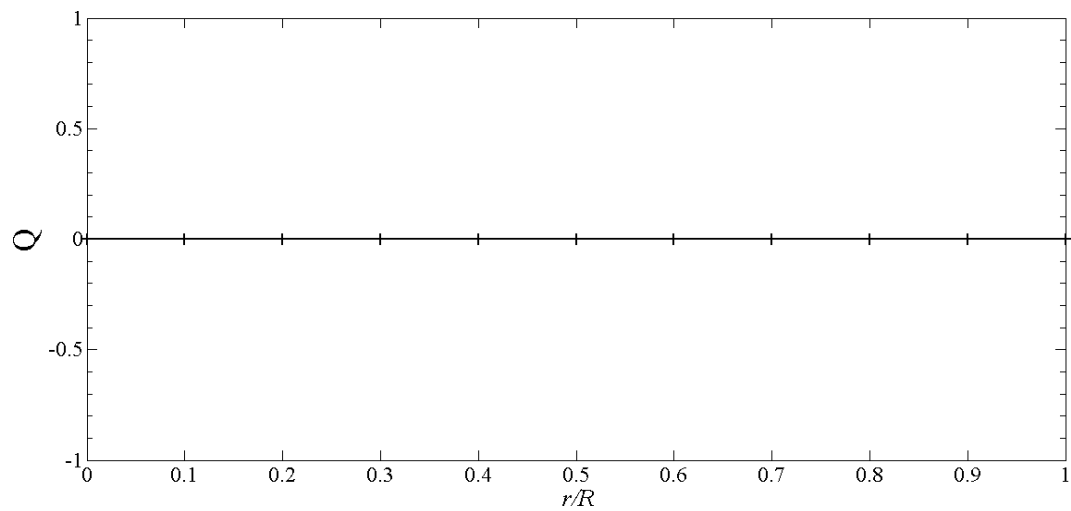


Figura 4.4: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.

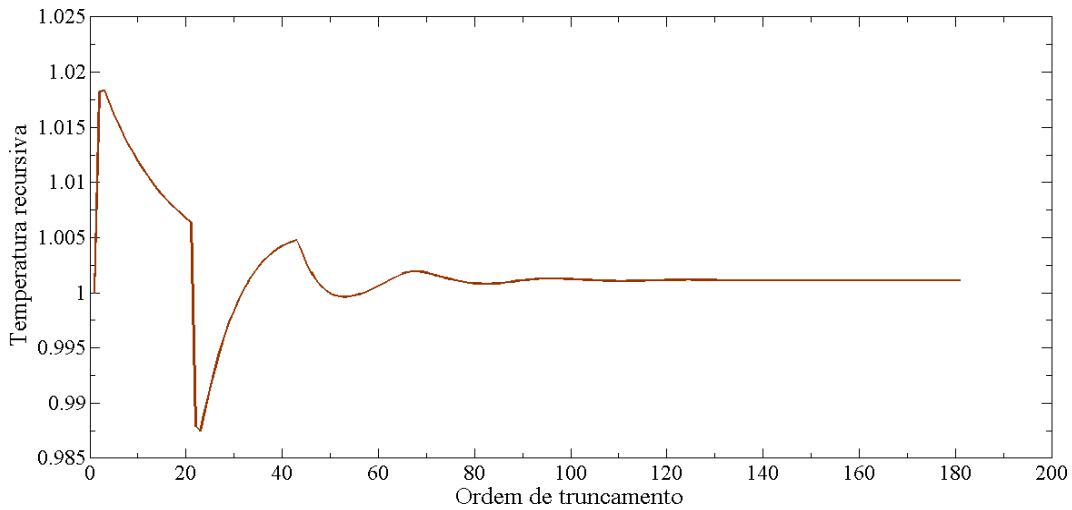


Figura 4.5: Profundidade da recursão finita para o problema 1.

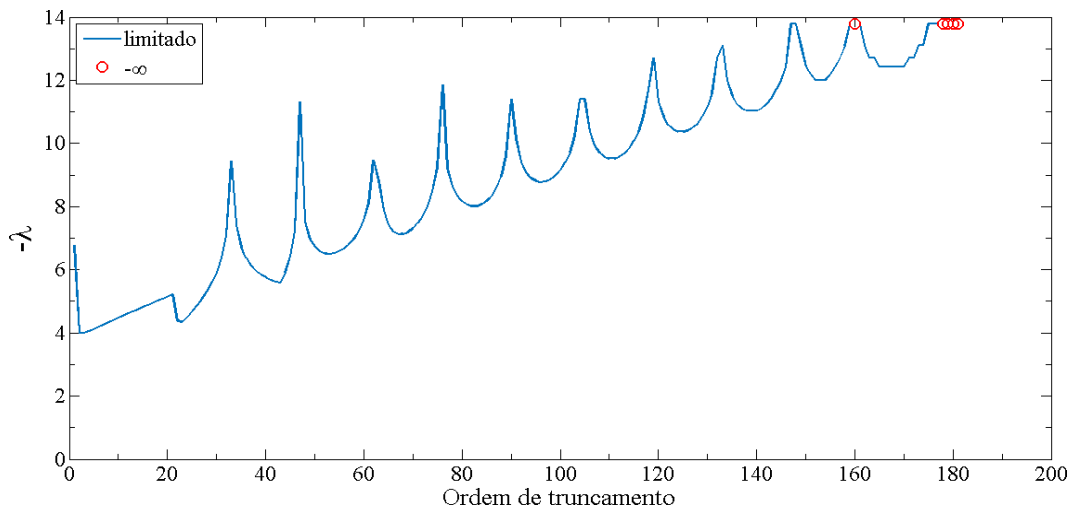


Figura 4.6: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 1.

Pode-se observar que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.1 e 4.2. Nota-se ainda que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.2 e 4.3. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.4 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.5, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 1. Emprega-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 181$, para o problema 1. Já

na Figura 4.6, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 181$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 181$, dado que λ é negativo. Convém ressaltar que para o mesmo problema foi considerado $\alpha = 10$, porém os resultados numéricos demoram para atingir a estabilidade, em comparação com $\alpha = 1$.

Problema 2

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.7, 4.8, (4.9) e 4.10 respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Com a finalidade de estudar estabilidade da metodologia proposta, apresenta-se as Figuras 4.11 e 4.12 a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

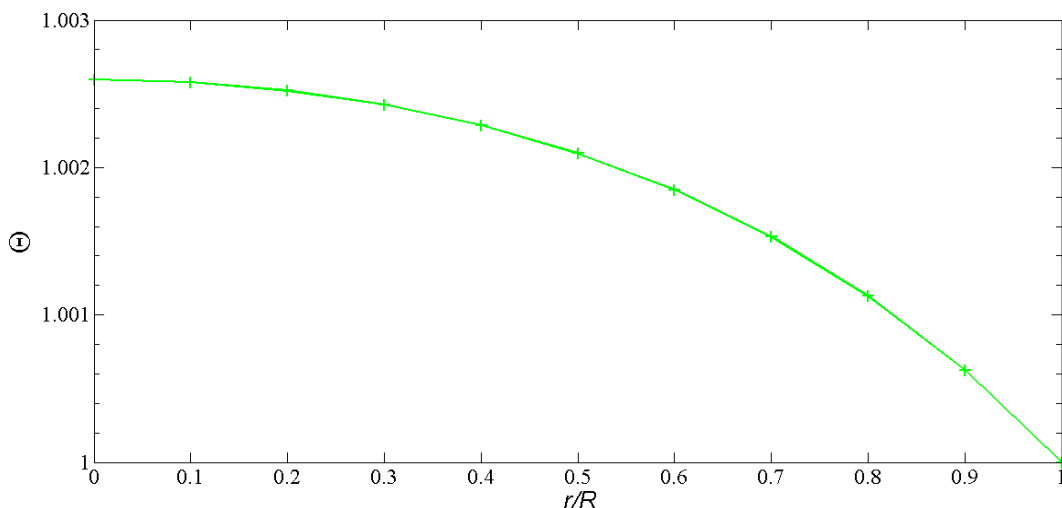


Figura 4.7: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.

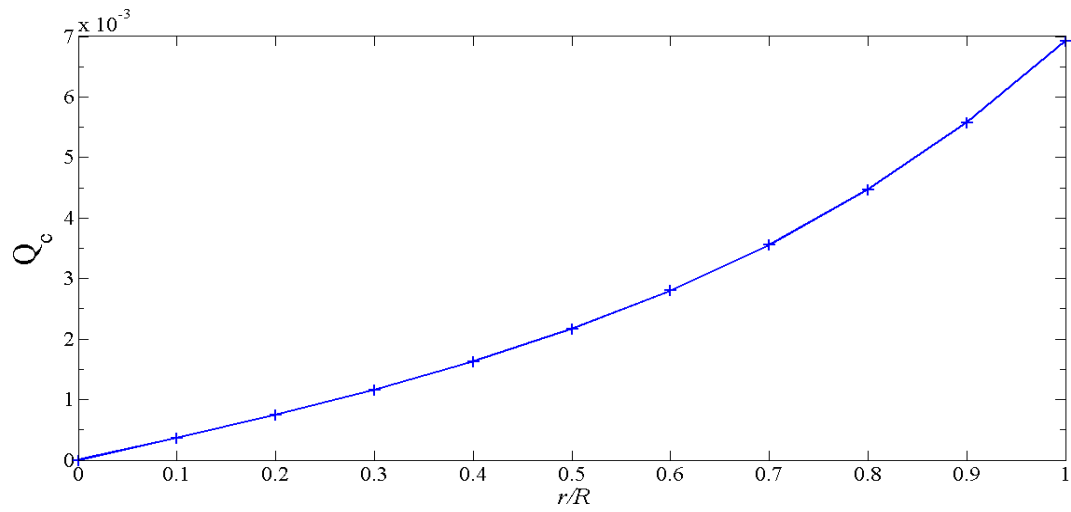


Figura 4.8: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.

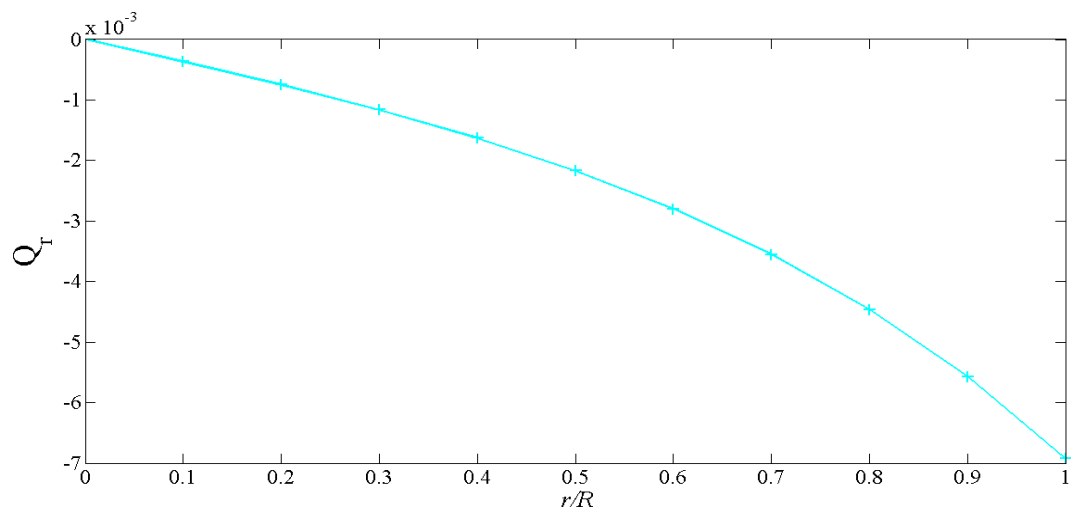


Figura 4.9: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.

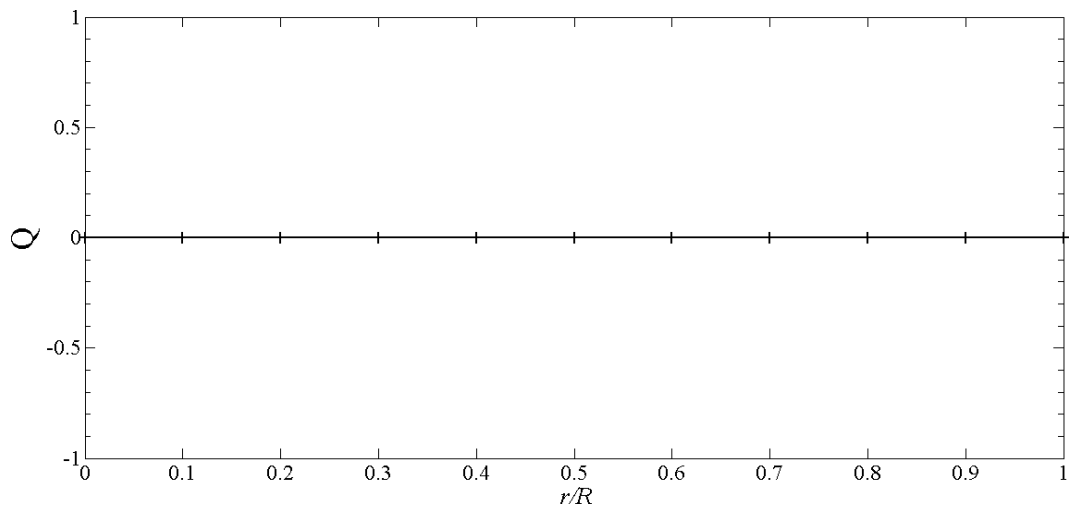


Figura 4.10: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.

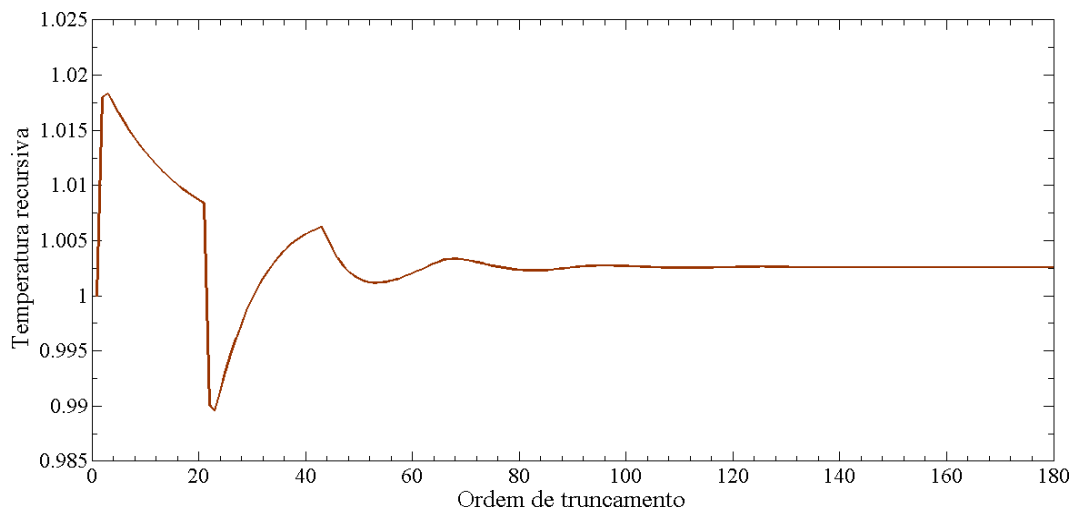


Figura 4.11: Profundidade da recursão finita para o problema 2.

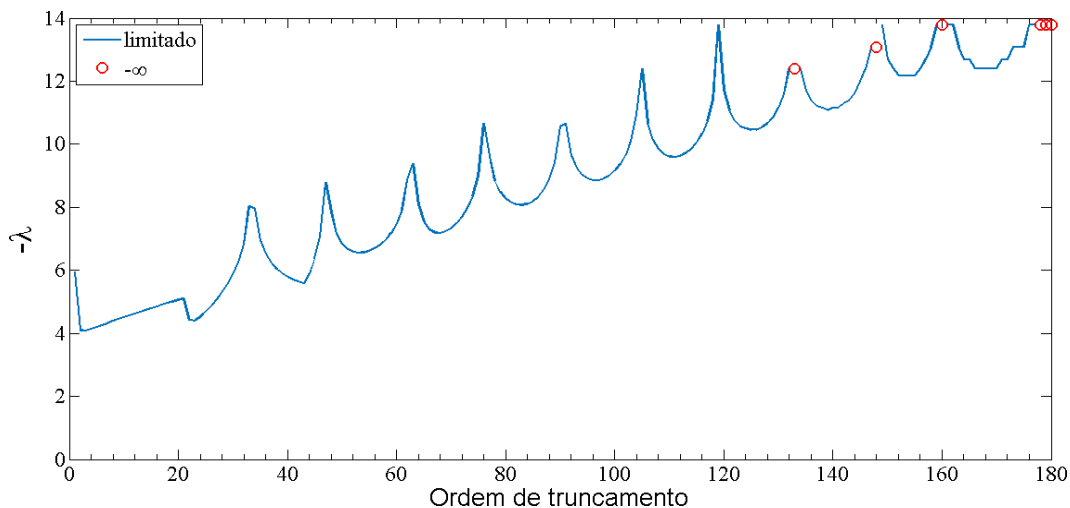


Figura 4.12: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 2.

Pode-se observar que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.7 e 4.8. Outro fator a ser observado é que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.8 e 4.9. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.10 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.11, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 2. Emprega-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 180$, para o problema 2. Já na Figura 4.12, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 180$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresentar um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 180$, dado que λ é negativo. Convém mencionar que para o mesmo problema foi considerado $\alpha = 10$, porém os resultados numéricos demoram para atingir a estabilidade, em comparação com $\alpha = 1$.

Problema 3

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 1$, $\rho^d = 0$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$

ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.17 e 4.18 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

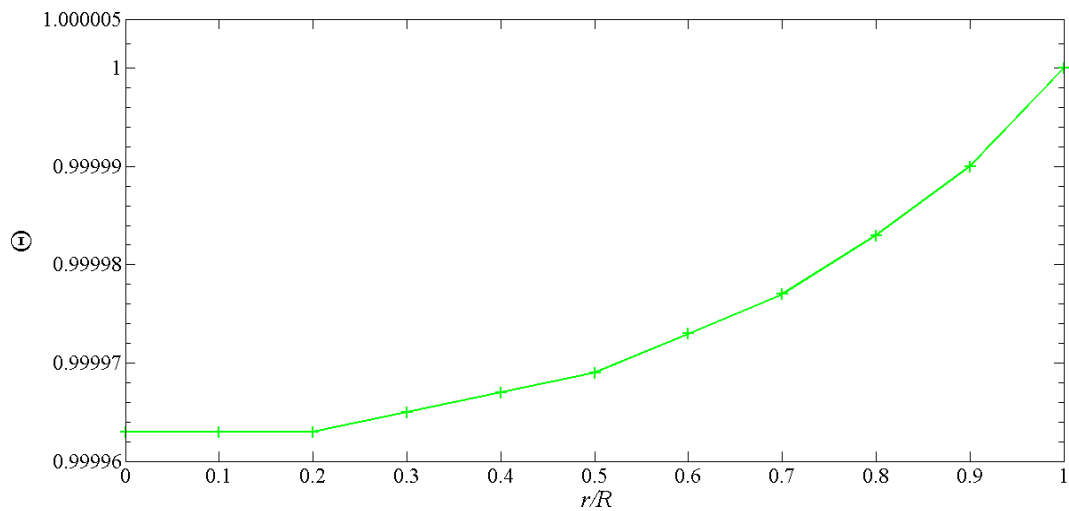


Figura 4.13: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.

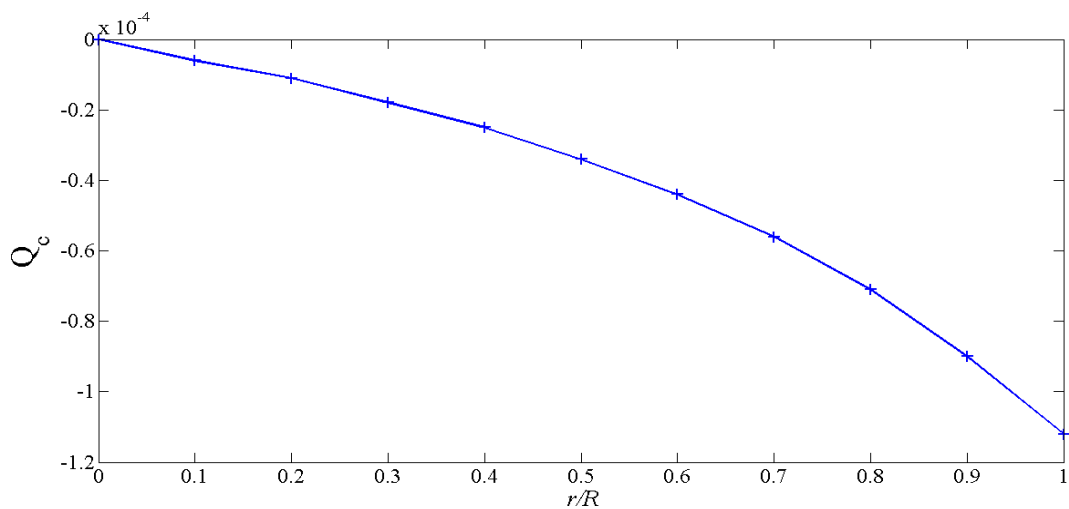


Figura 4.14: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.

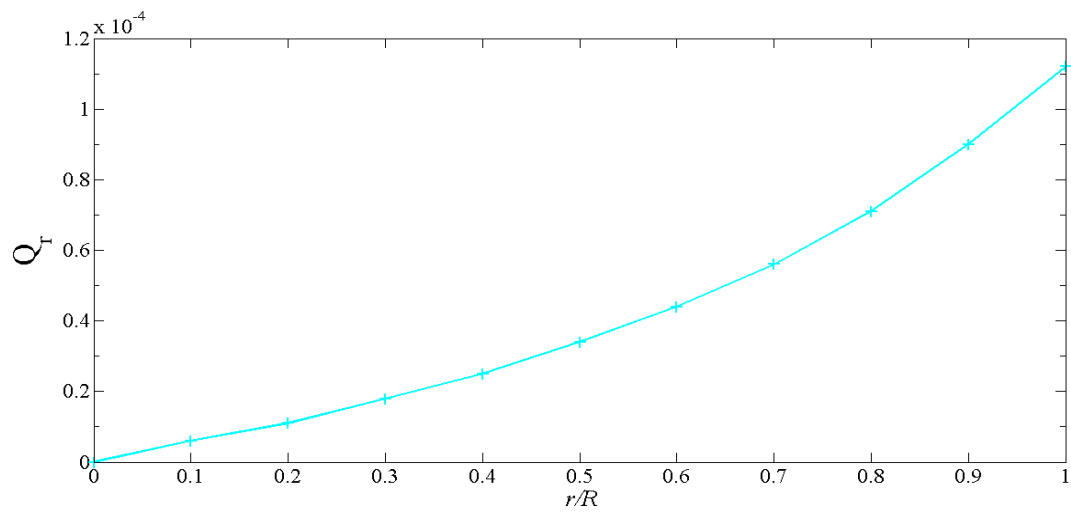


Figura 4.15: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.

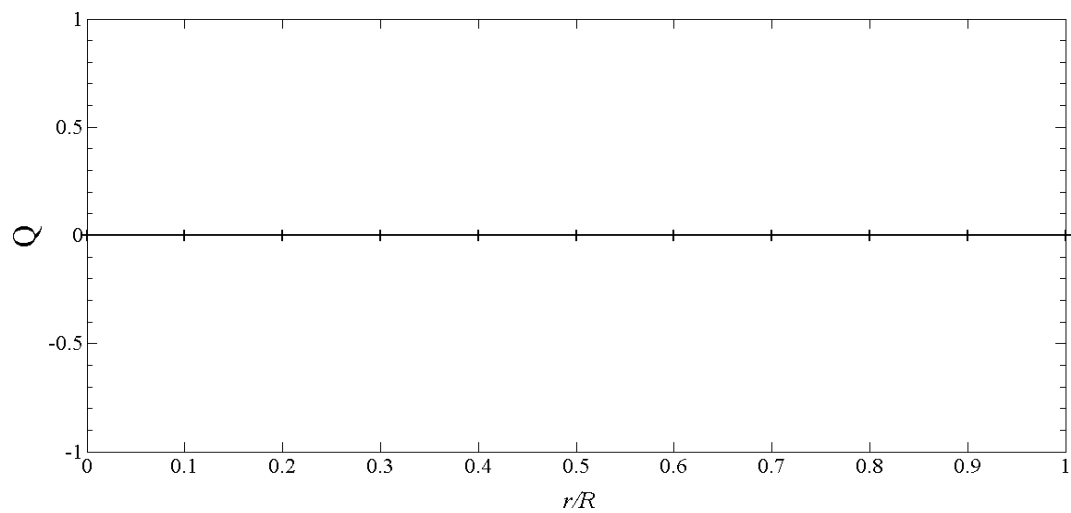


Figura 4.16: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.

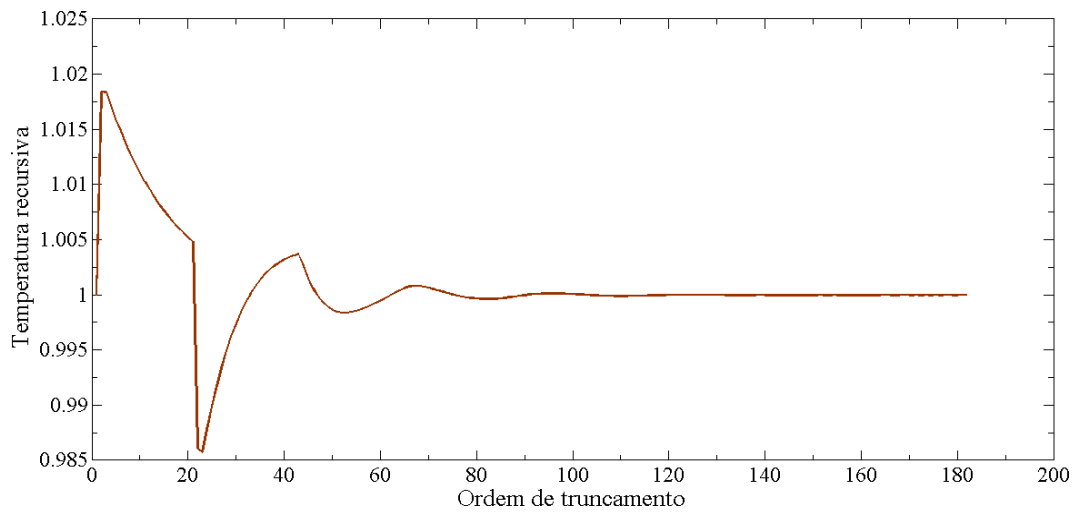


Figura 4.17: Profundidade da recursão finita para o problema 3.

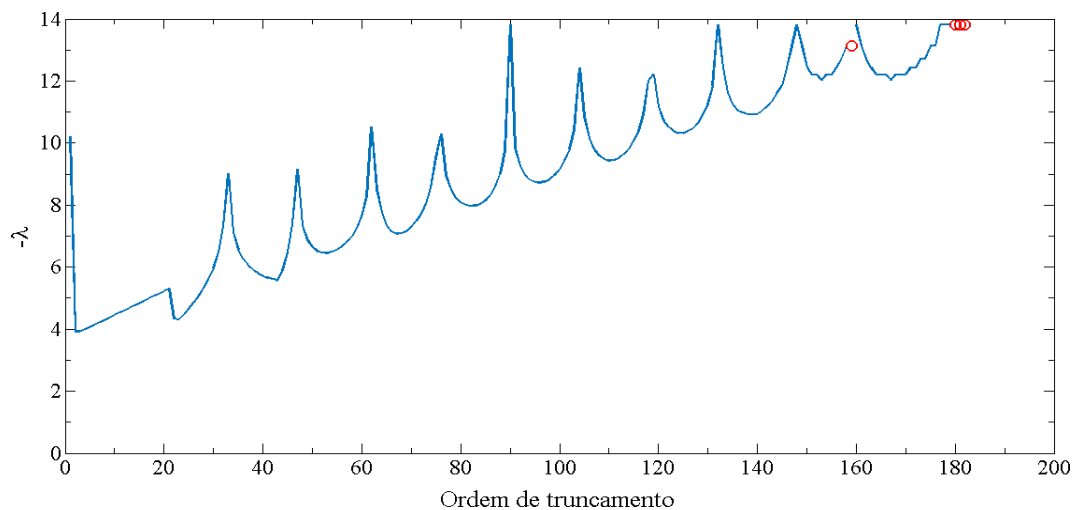


Figura 4.18: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 3.

Observar-se que a medida que a temperatura aumenta o fluxo de calor condutivo Q_c diminui, Figuras 4.13 e 4.14. Outro fator a ser observado é que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de máximo enquanto o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de mínimo correspondente, no mesmo ponto, satisfazendo a lei da conservação da energia, Figuras 4.14 e 4.15. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.16 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.17, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 3. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura menores que 10^{-6} , que fornece a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 182$, para o

problema 3. Já na Figura 4.18, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 182$, nota-se ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 182$, dado que λ é negativo. Convém ressaltar que para o mesmo problema foi considerado $\alpha = 10$, porém os resultados numéricos demoram para atingir a estabilidade, em comparação com $\alpha = 1$.

Problema 4

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,8$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.19, 4.20, (4.21) e 4.22, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.23 e 4.24 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

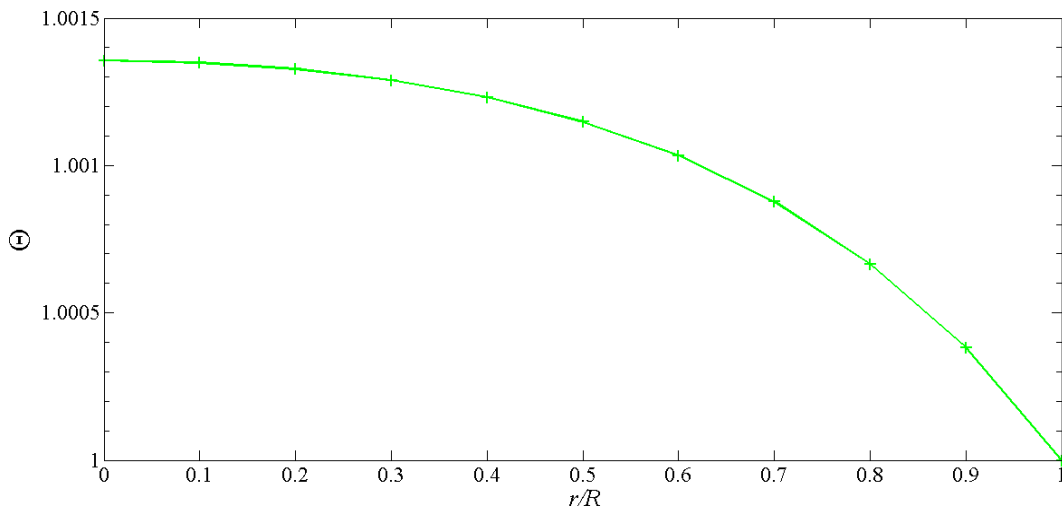


Figura 4.19: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.

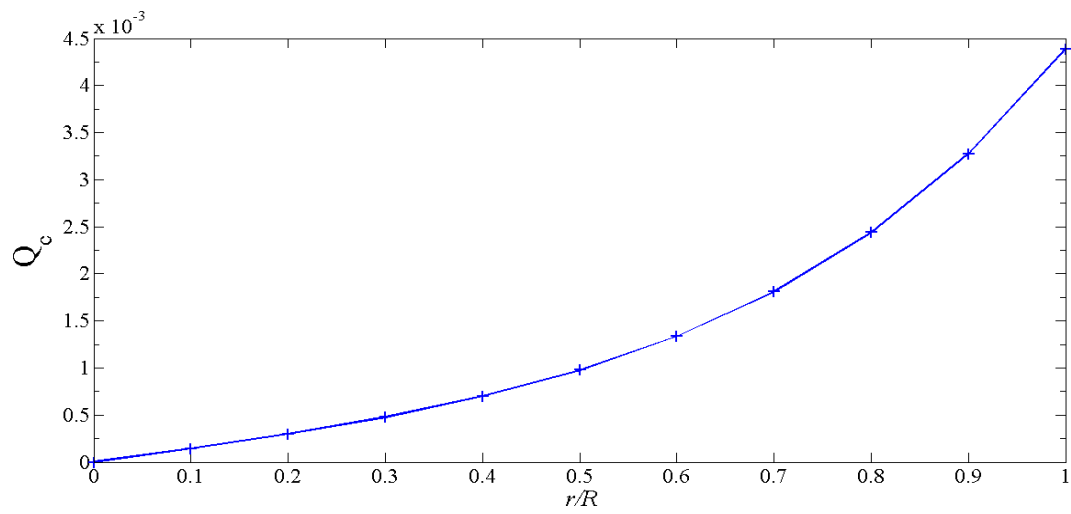


Figura 4.20: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.

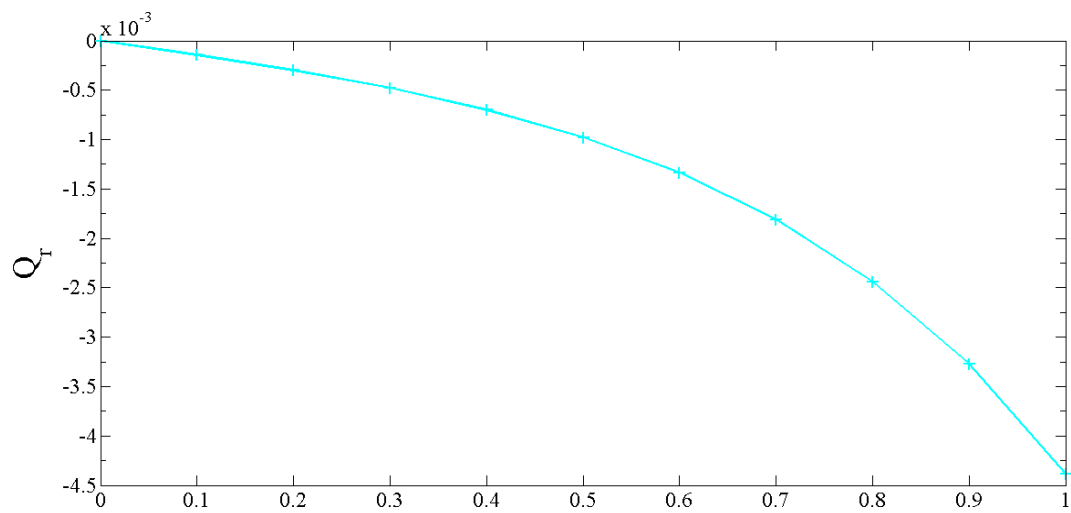


Figura 4.21: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.

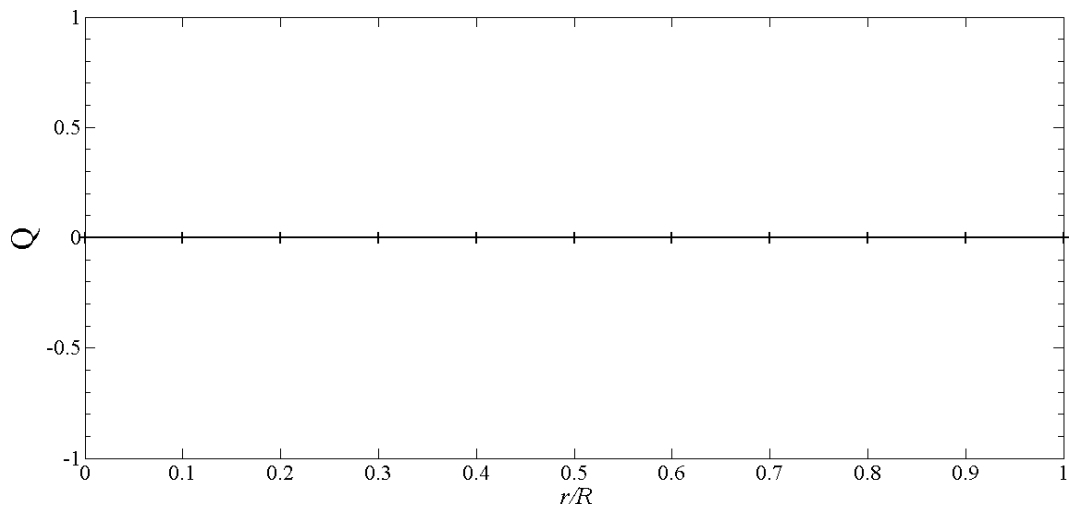


Figura 4.22: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.

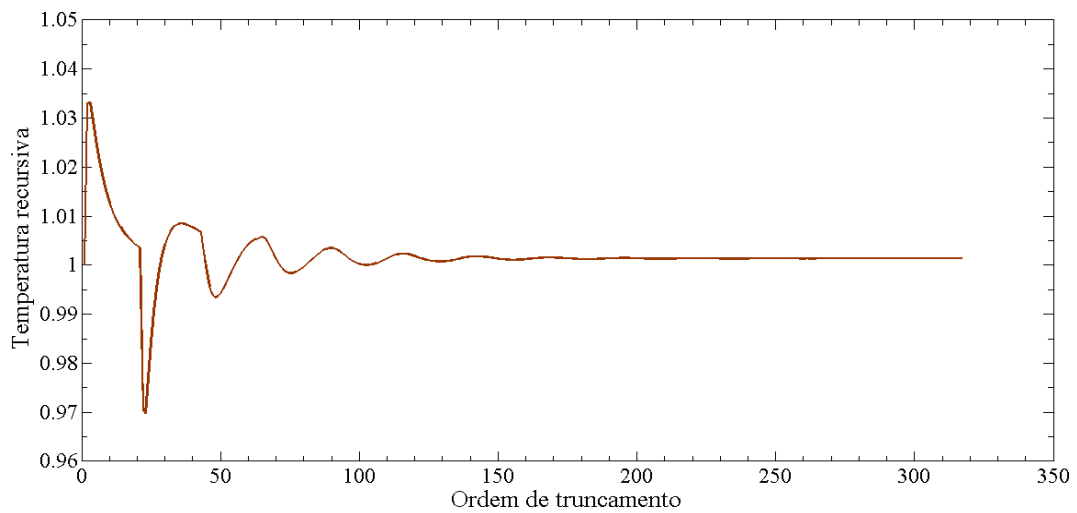


Figura 4.23: Profundidade da recursão finita para o problema 4.

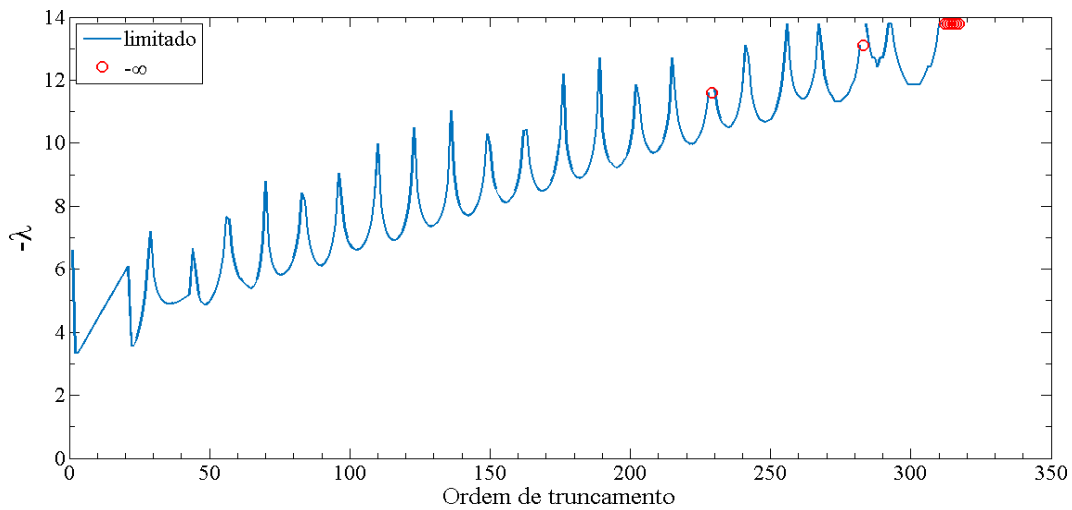


Figura 4.24: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 4.

Pode-se observar que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.19 e 4.20. Note ainda que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, na mesma posição, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.20 e 4.21. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.22 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.23, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 4. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 317$, para o problema 4. Já na Figura 4.24, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 317$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 317$, dado que λ é negativo. Convém ressaltar que para o mesmo problema foi considerado $\alpha = 10$, porém os resultados numéricos divergiram.

Problema 5

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 1$, $\rho^d = 0$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,8$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.25, 4.26, 4.27 e 4.28,

respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.29 e 4.30 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

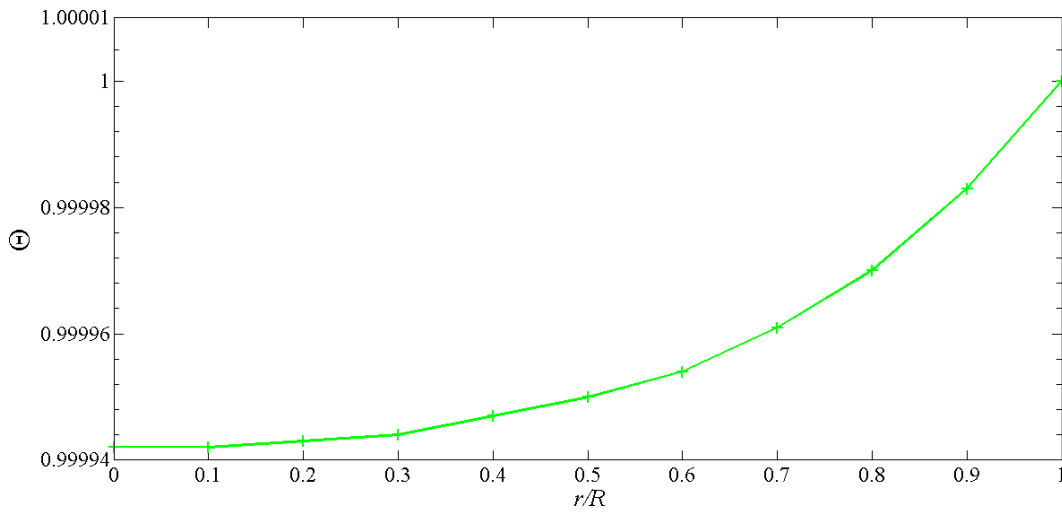


Figura 4.25: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.

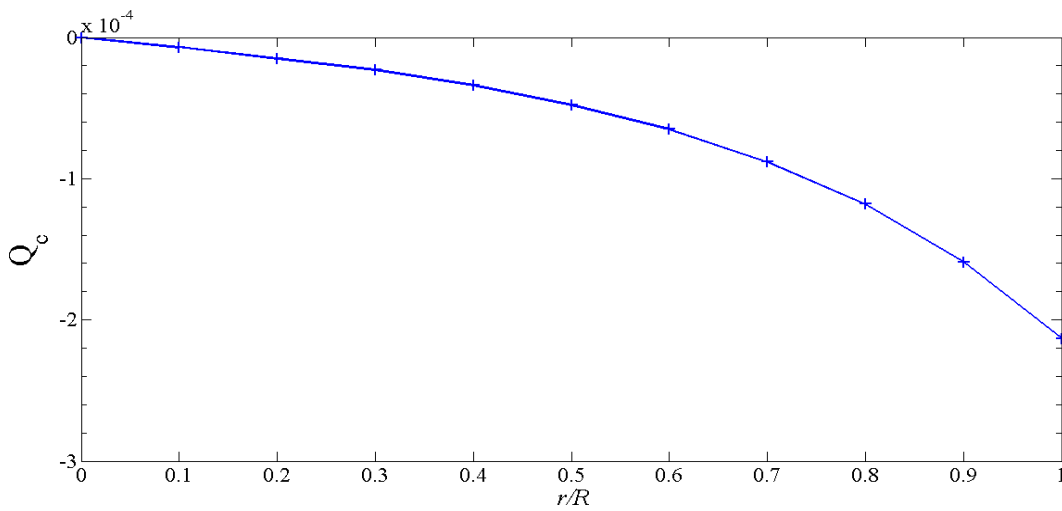


Figura 4.26: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.

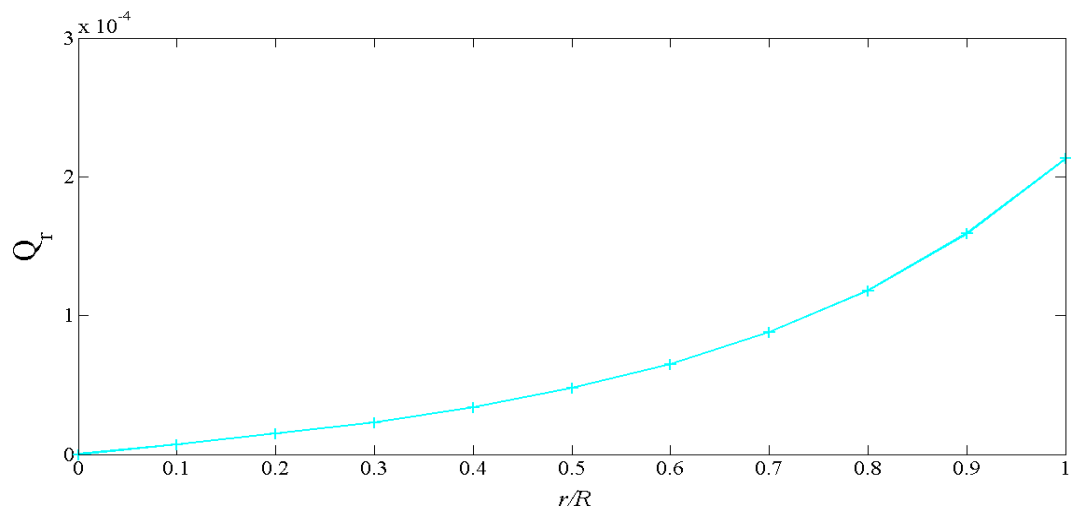


Figura 4.27: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.

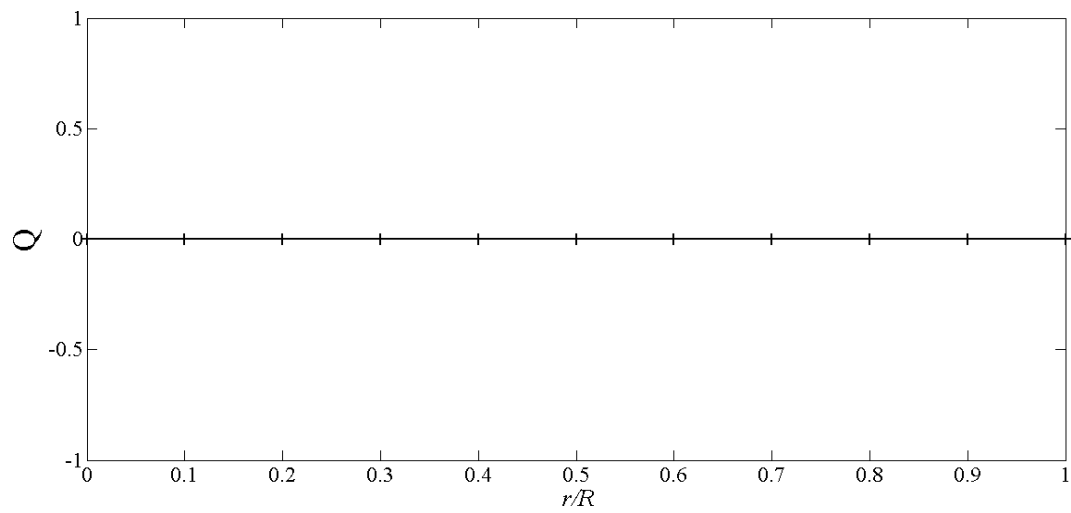


Figura 4.28: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.

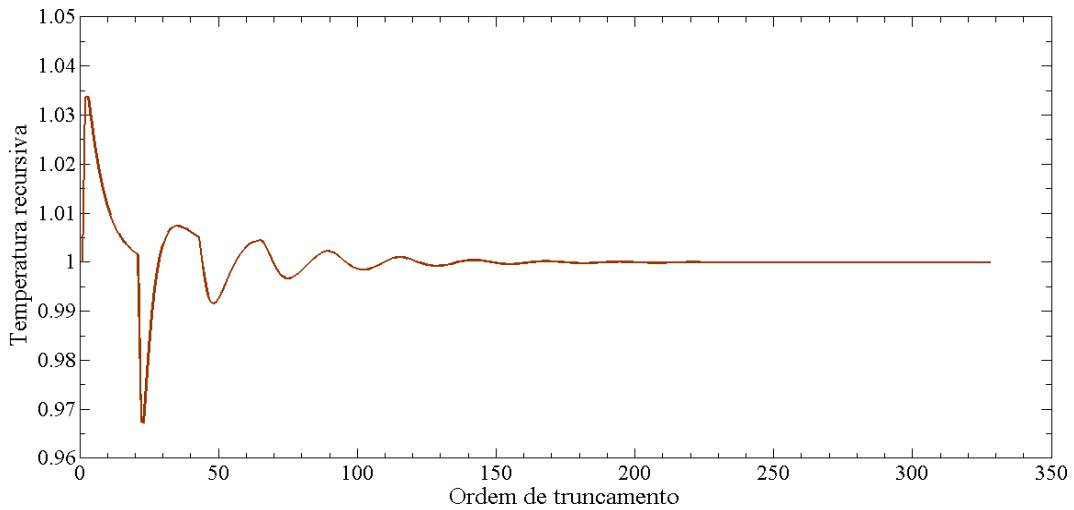


Figura 4.29: Profundidade da recursão finita para o problema 5.

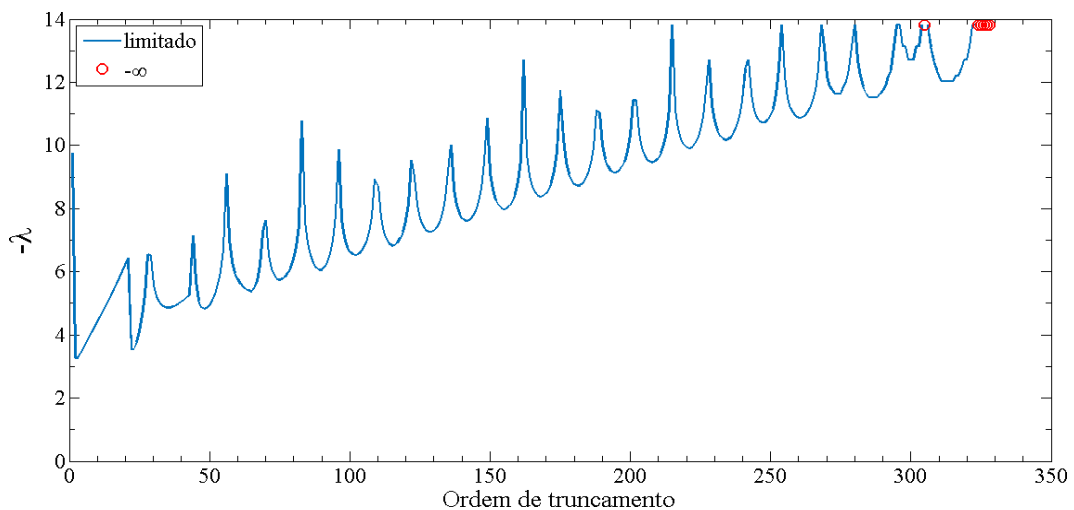


Figura 4.30: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 5.

Pode-se observar que a medida que a temperatura aumenta o fluxo de calor condutivo Q_c diminui, Figuras 4.25 e (4.26). Note ainda que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de máximo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de mínimo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.26, 4.27. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.28 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.29, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 5. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 328$, para o problema 5. Já

na Figura 4.30, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 328$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 328$, dado que λ é negativo. Convém ressaltar que para o mesmo problema foi considerado $\alpha = 10$, porém os resultados numéricos divergiram.

Problema 6

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 5$, $N_c = 0,5$, $H = 0$, $\alpha = 0,1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.31 e 4.32, 4.33 e 4.34, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.35 e 4.36 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

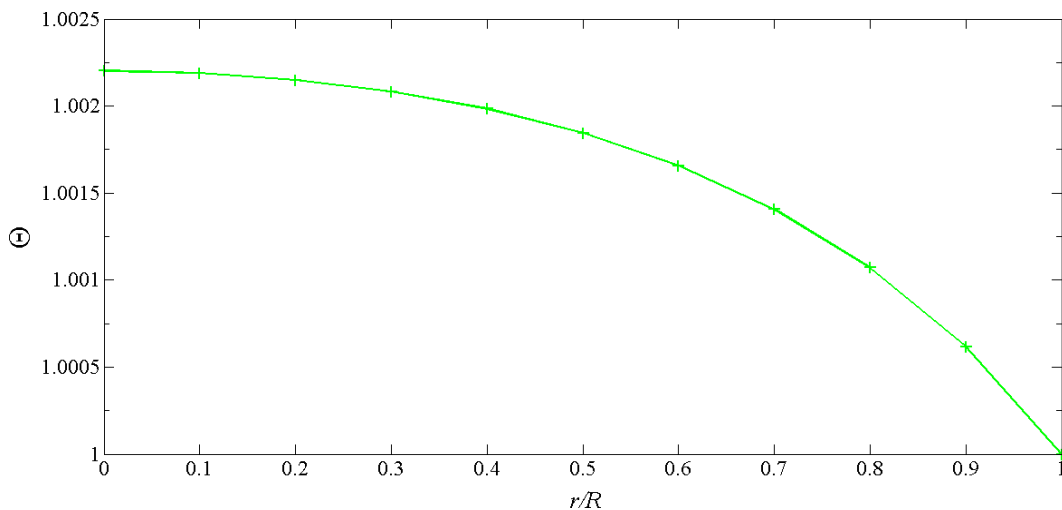


Figura 4.31: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.

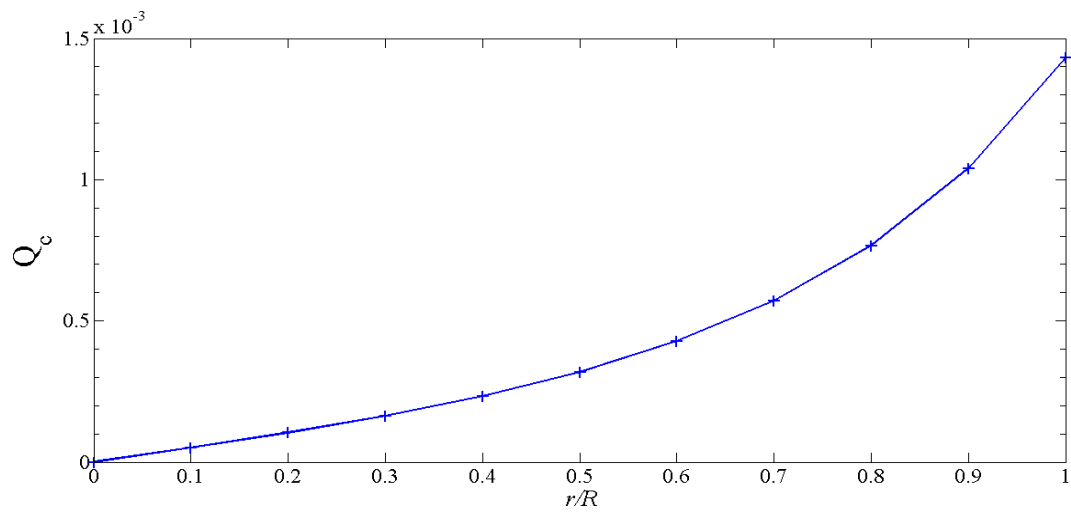


Figura 4.32: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.

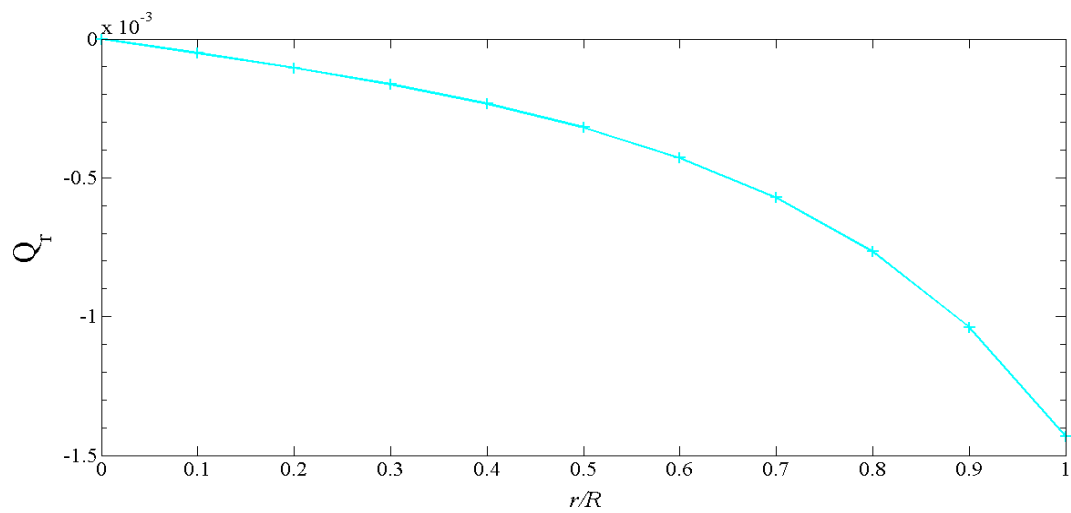


Figura 4.33: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.

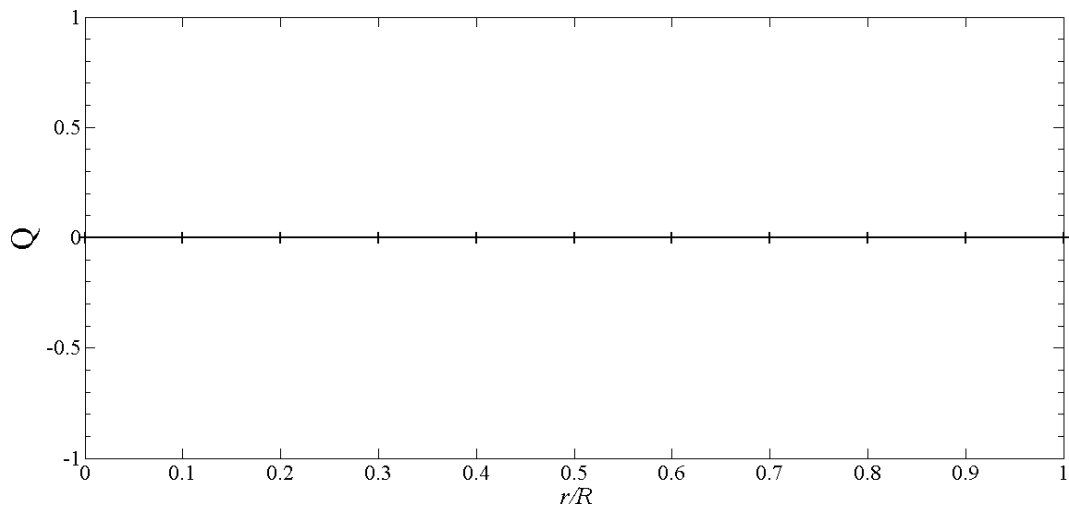


Figura 4.34: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.

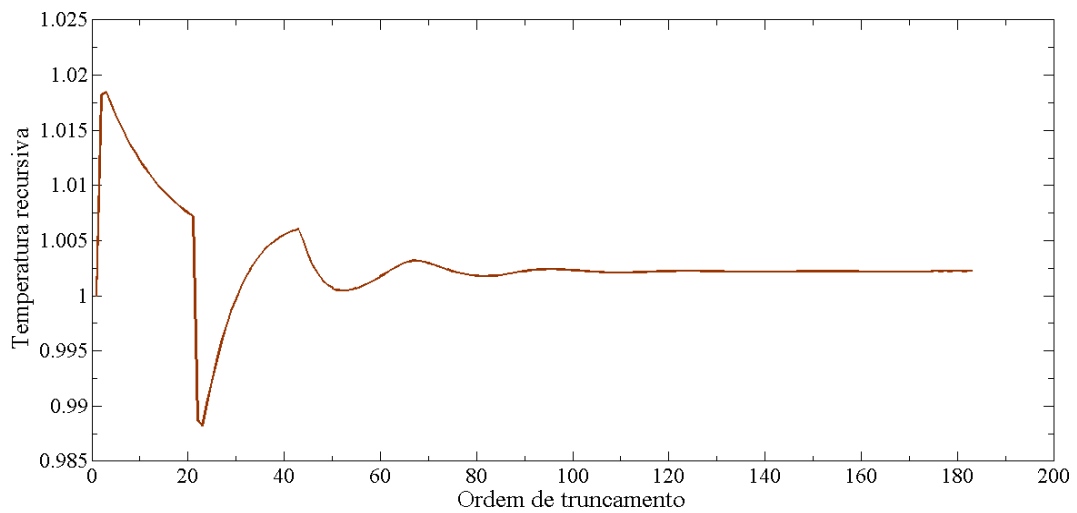


Figura 4.35: Profundidade da recursão finita para o problema 6.

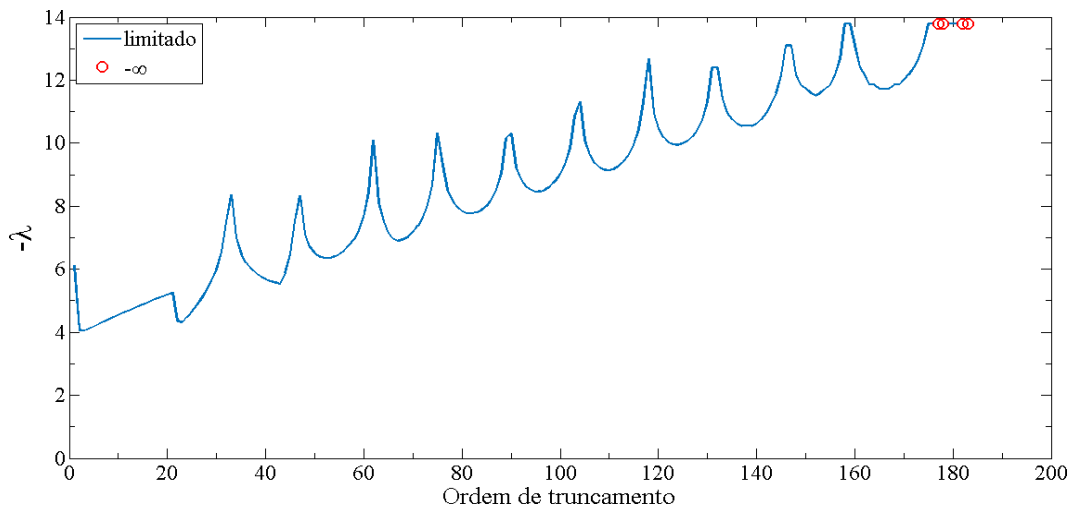


Figura 4.36: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 6.

Nota-se que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.31 e 4.32. Outro fator a ser observado o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, na mesma posição, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.32 e 4.33. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.34 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.35, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 6. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 183$, para o problema 6. Já na Figura 4.36, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 183$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 183$, dado que λ é negativo. Convém salientar que para o mesmo problema foi também considerado um conjunto de parâmetros como $(N_c, \alpha) = \{(0, 005, 1), (0, 5, 1)\}$, porém os resultados numéricos divergiram.

Problema 7

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,5$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 10$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total

$Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.37, 4.38, (4.39) e 4.40, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.41 e 4.42 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

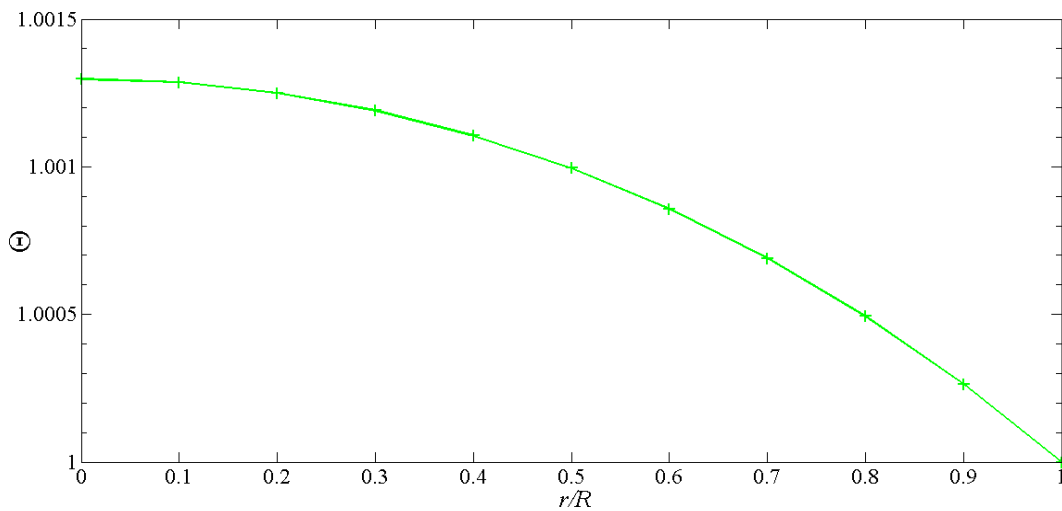


Figura 4.37: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 7.

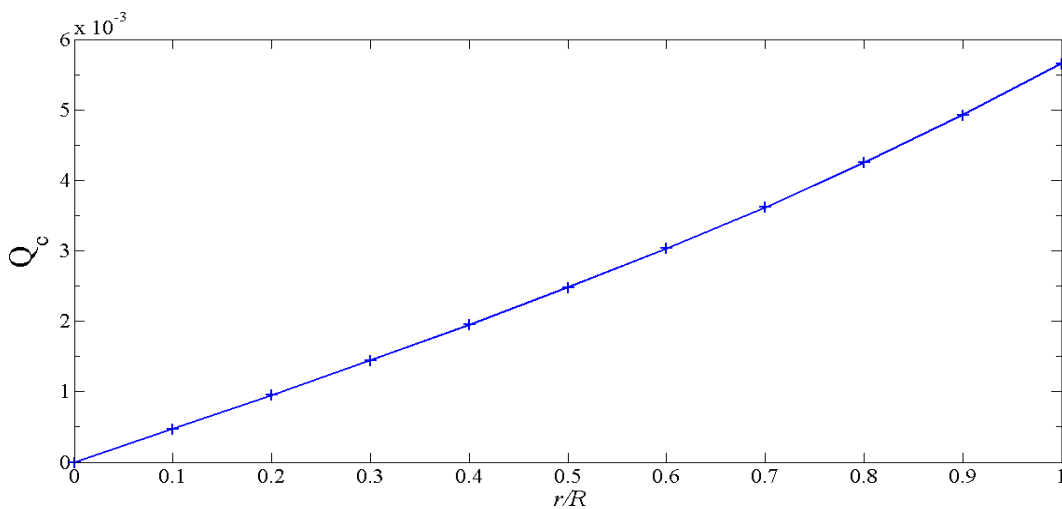


Figura 4.38: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 7.

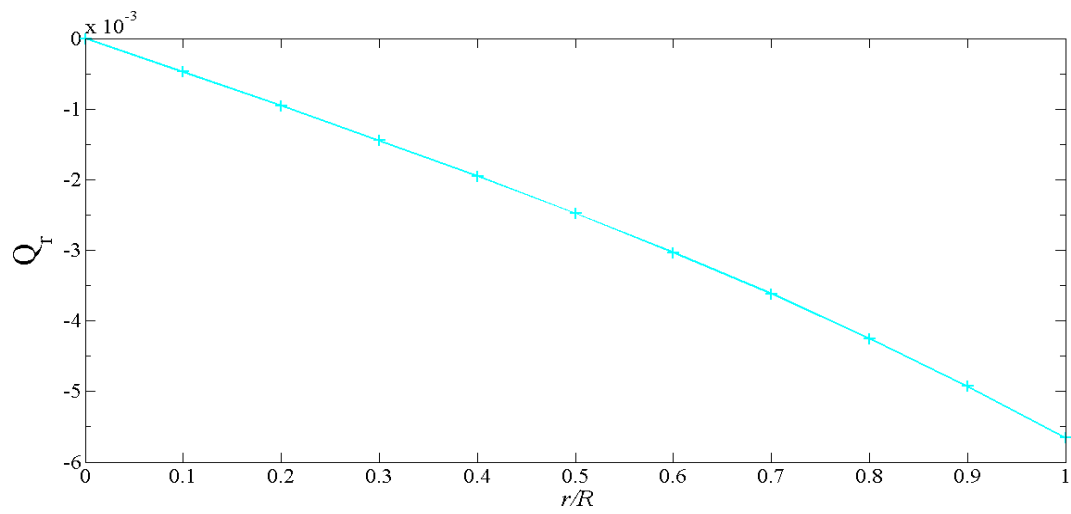


Figura 4.39: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 7.

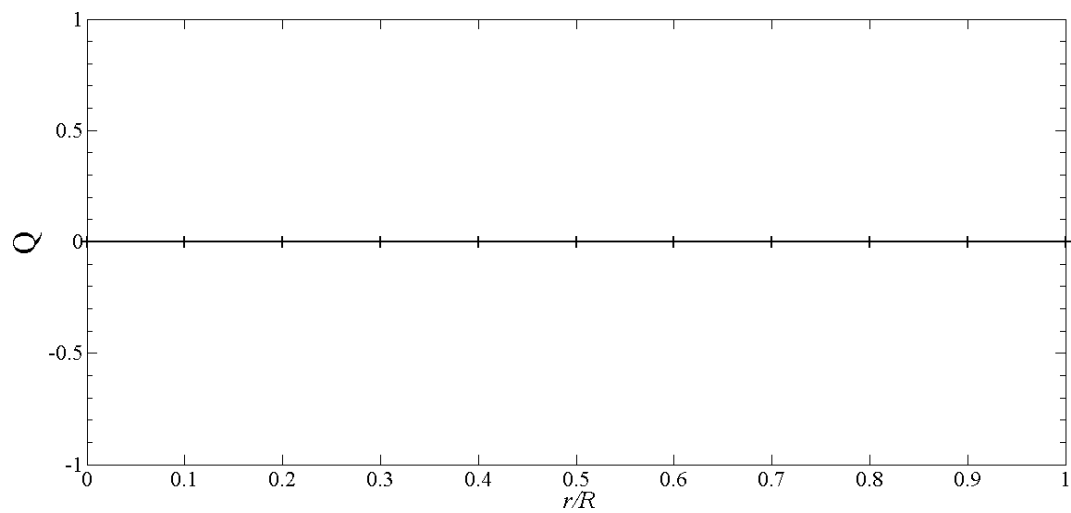


Figura 4.40: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 7.

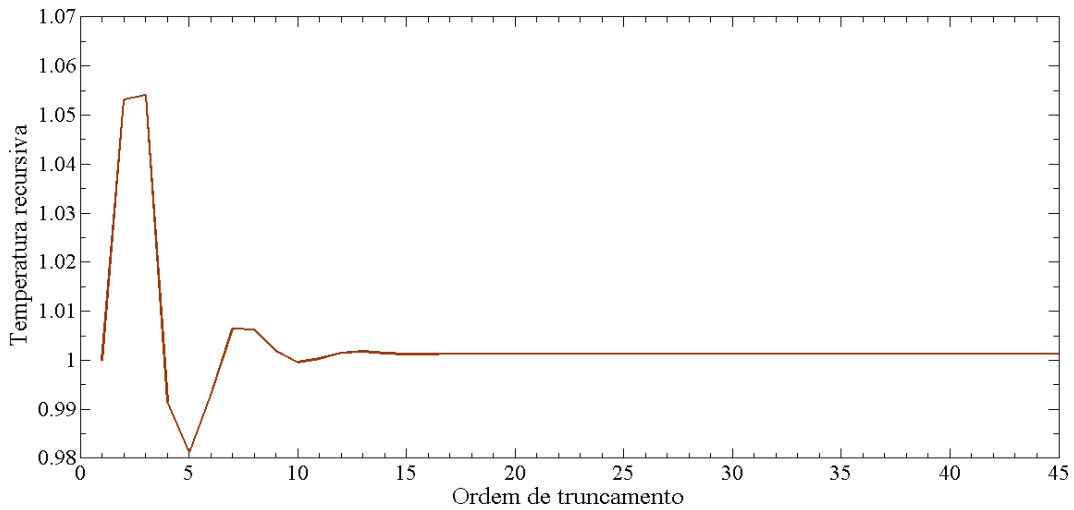


Figura 4.41: Profundidade da recursão finita para o problema 7.

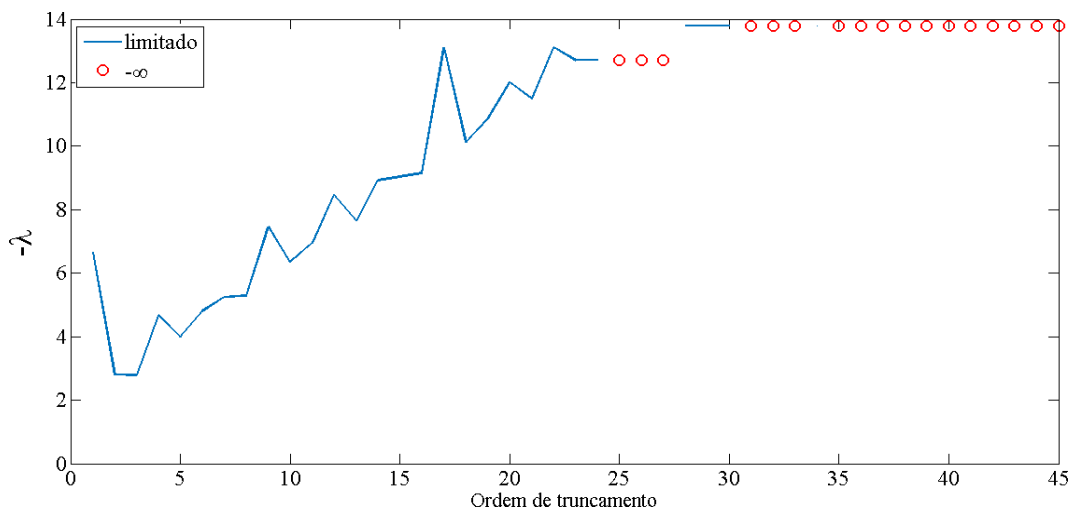


Figura 4.42: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 7.

Pode-se observar que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.37 e 4.38. Note ainda que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.38 e 4.39. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.40 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.41, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 7. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 45$, para o problema 7. Já na Figura

4.42, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 45$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 45$, dado que λ é negativo.

Problema 8

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,5$, $N_c = 0,005$, $H = 0$, $\alpha = 10$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.43, 4.44, 4.45 e 4.46, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.47 e 4.48 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

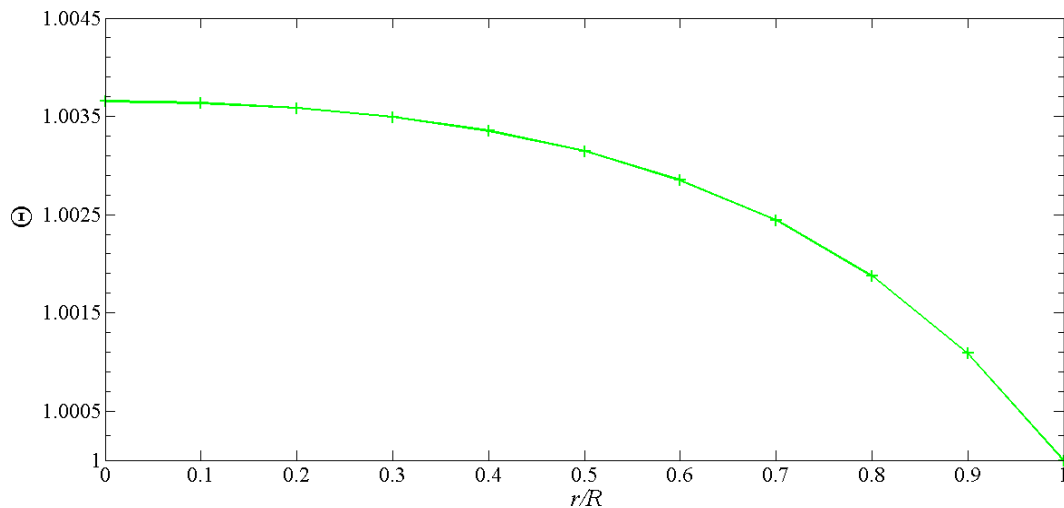


Figura 4.43: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 8.

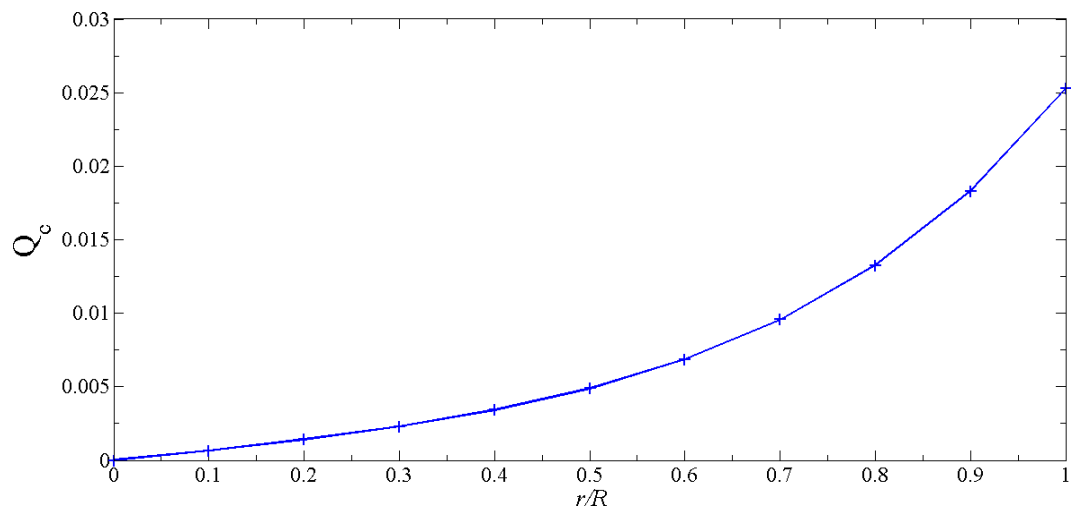


Figura 4.44: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 8.

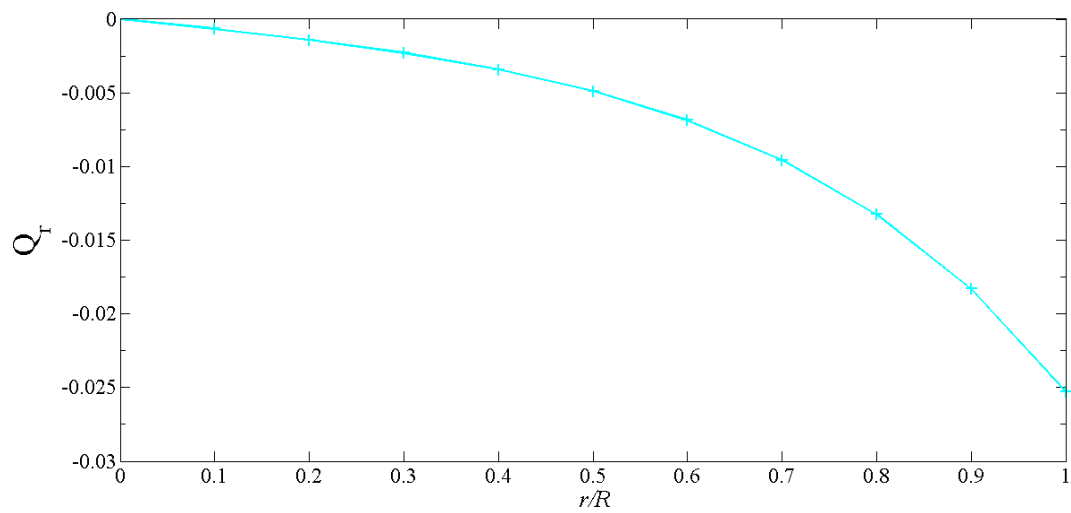


Figura 4.45: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 8.

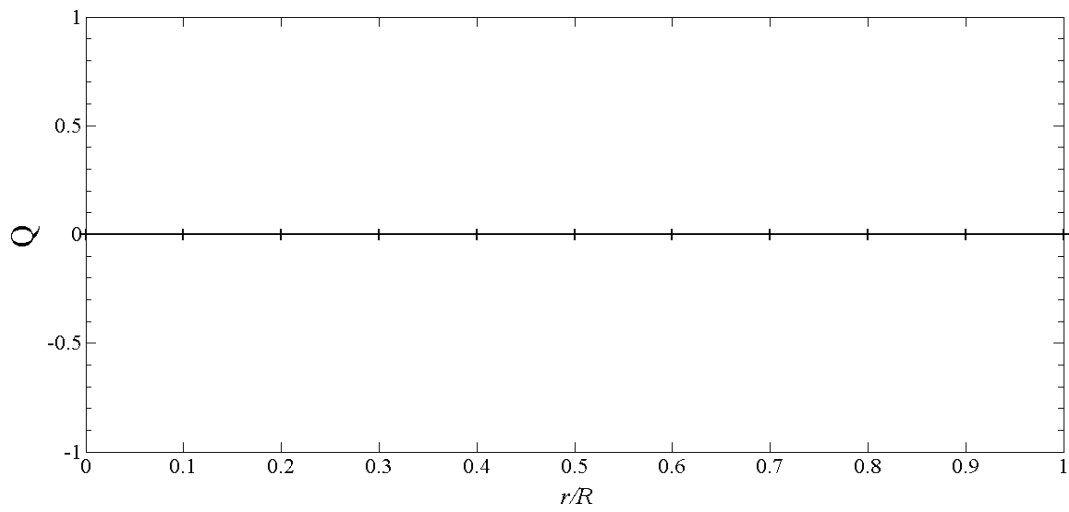


Figura 4.46: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 8.

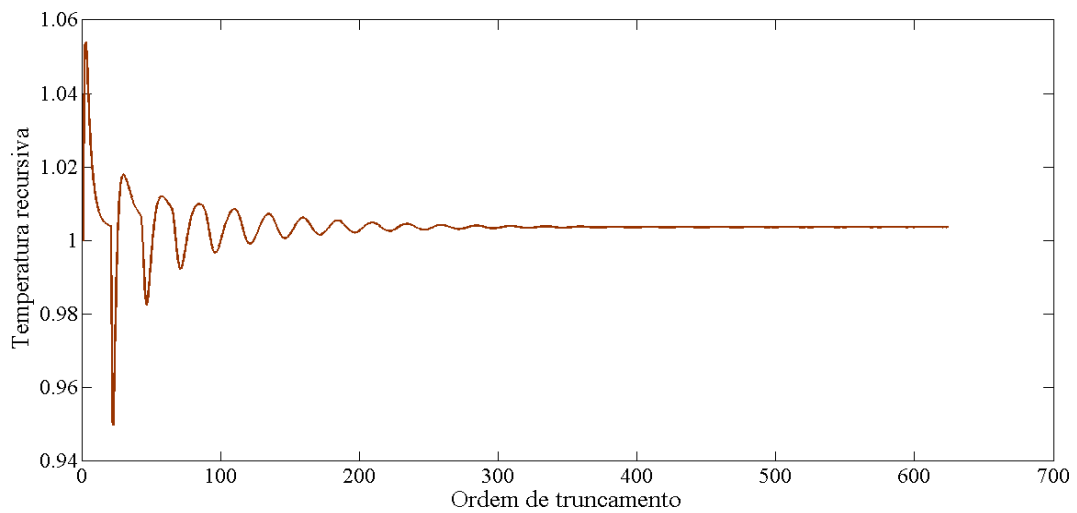


Figura 4.47: Profundidade da recursão finita para o problema 8.

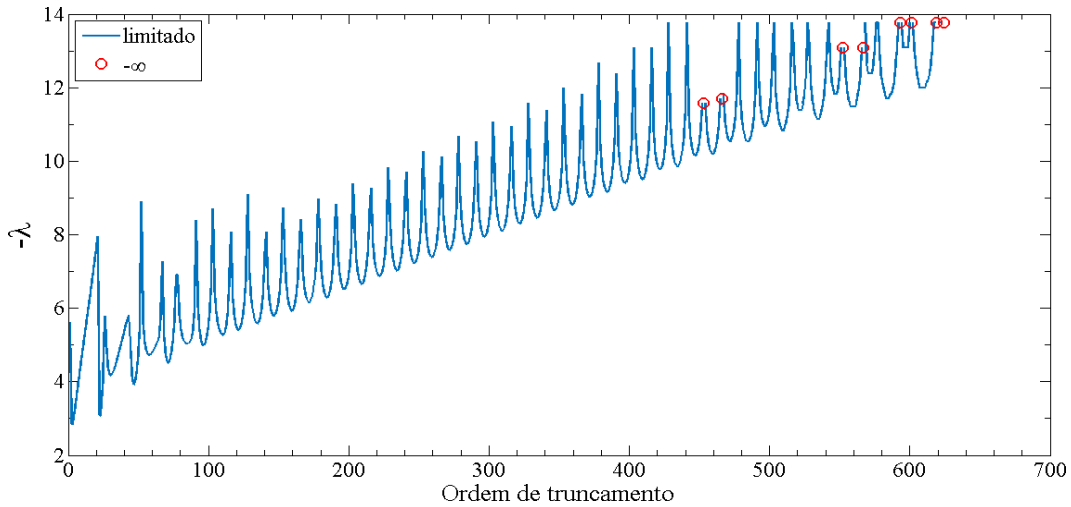


Figura 4.48: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 8.

Observa-se que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.43 e 4.44. Note ainda que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.44 e 4.45. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.46 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.47, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 8. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 624$, para o problema 8. Já na Figura 4.48, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 624$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 624$, dado que λ é negativo.

Problema 9

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,5$, $R = 1$, $N_c = 0,1$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.49, 4.50, 4.51 e 4.52, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para

$N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.53 e 4.54 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

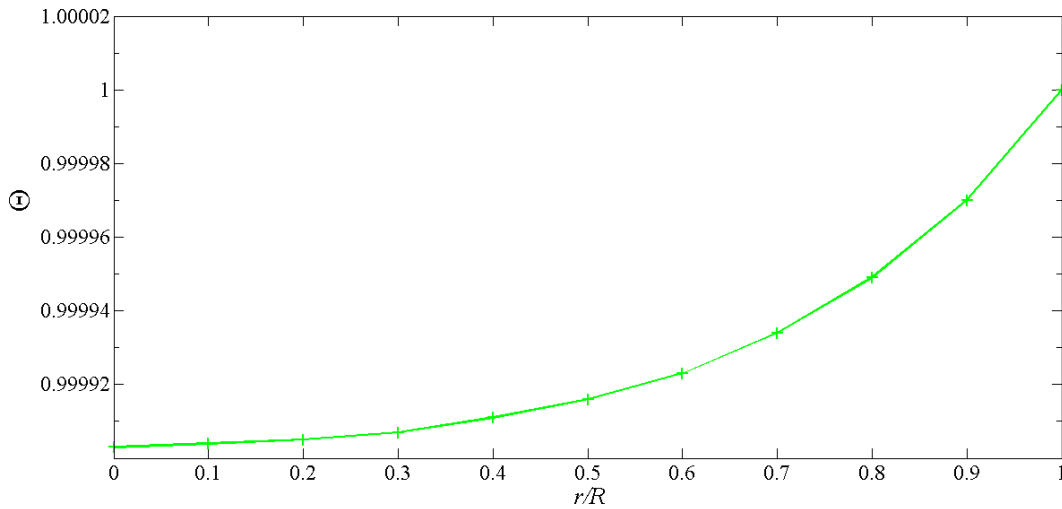


Figura 4.49: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 9.

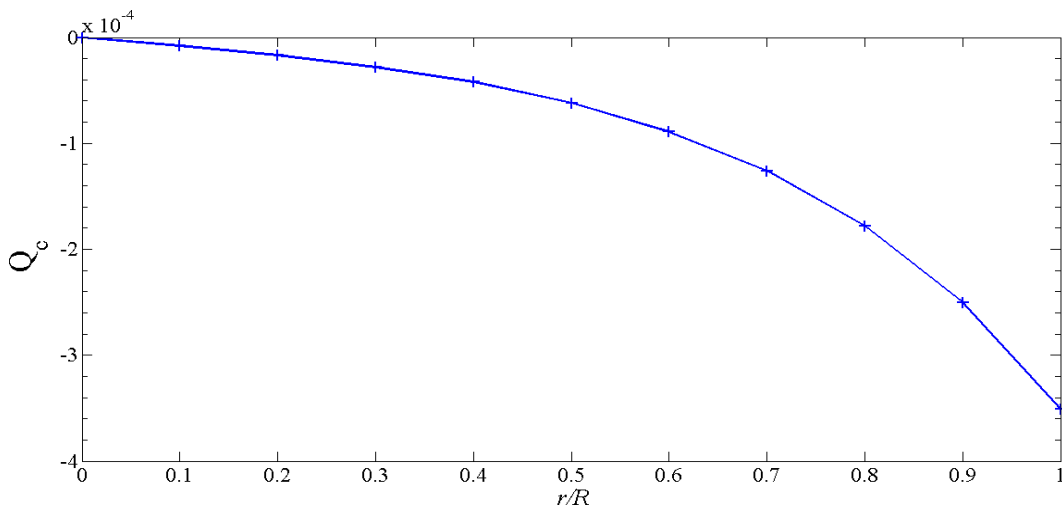


Figura 4.50: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 9.

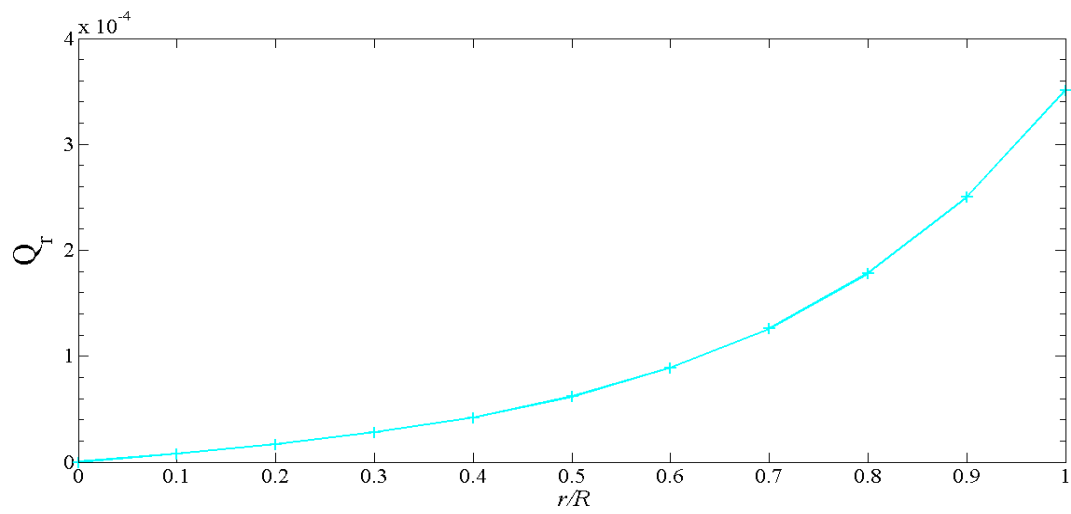


Figura 4.51: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 9.

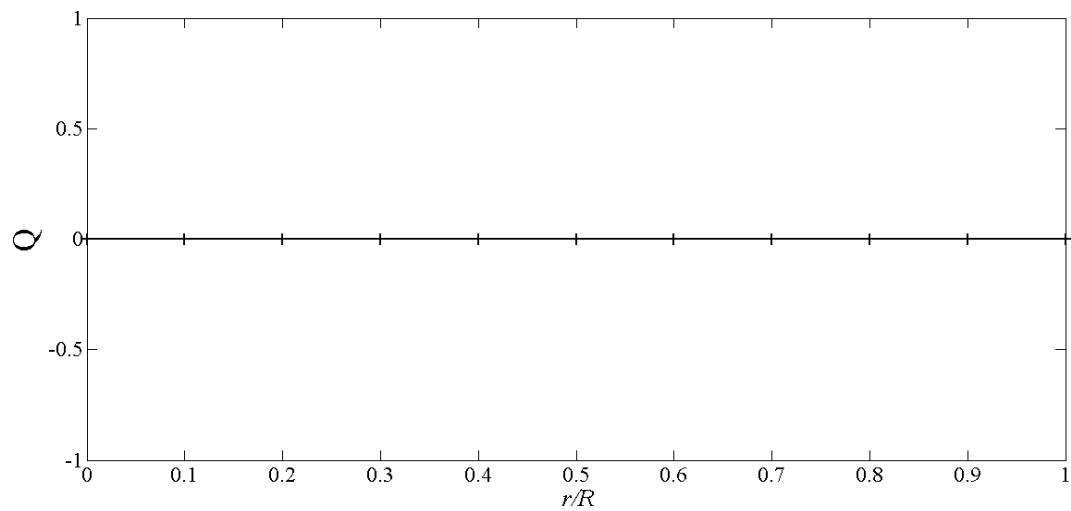


Figura 4.52: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 9.

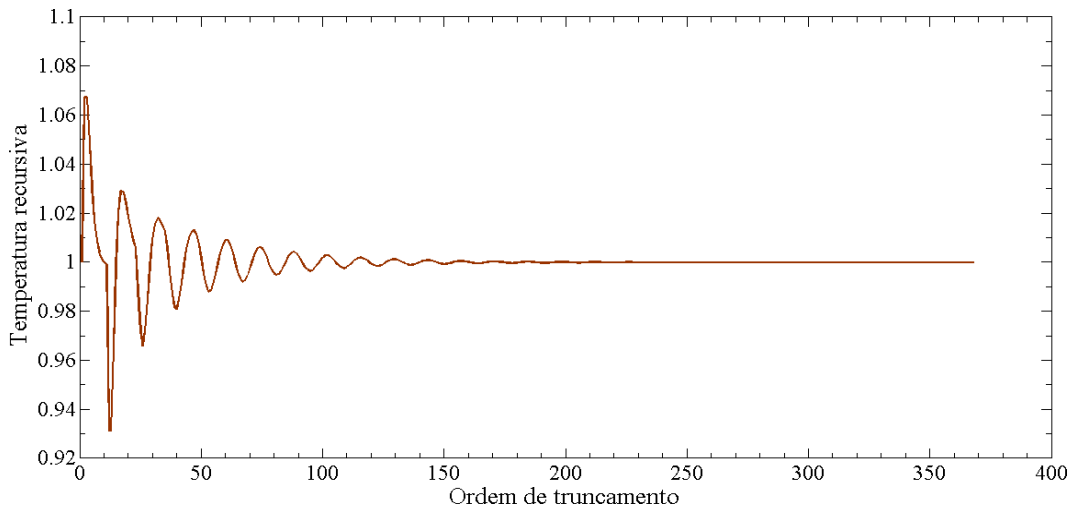


Figura 4.53: Profundidade da recursão finita para o problema 9.

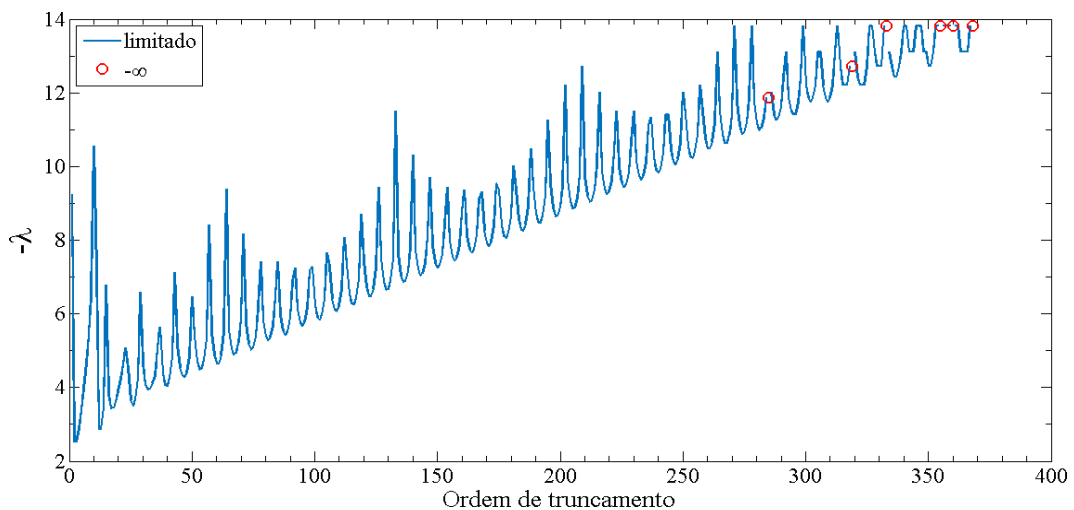


Figura 4.54: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 9.

Observa-se que a medida que a temperatura aumenta o fluxo de calor condutivo Q_c diminui, Figuras 4.49 e 4.50. Note ainda que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de máximo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de mínimo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.50 e 4.51. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.52 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.53, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 9. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 325$, para o

problema 9. Já na Figura 4.54, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 325$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 325$, dado que λ é negativo. Convém mencionar que para o mesmo problema foi considerado o parâmetro $\alpha = 10$, porém os resultados numéricos divergiram.

Problema 10

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,5$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.55, 4.56, 4.57 e 4.58, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.59 e 4.60 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

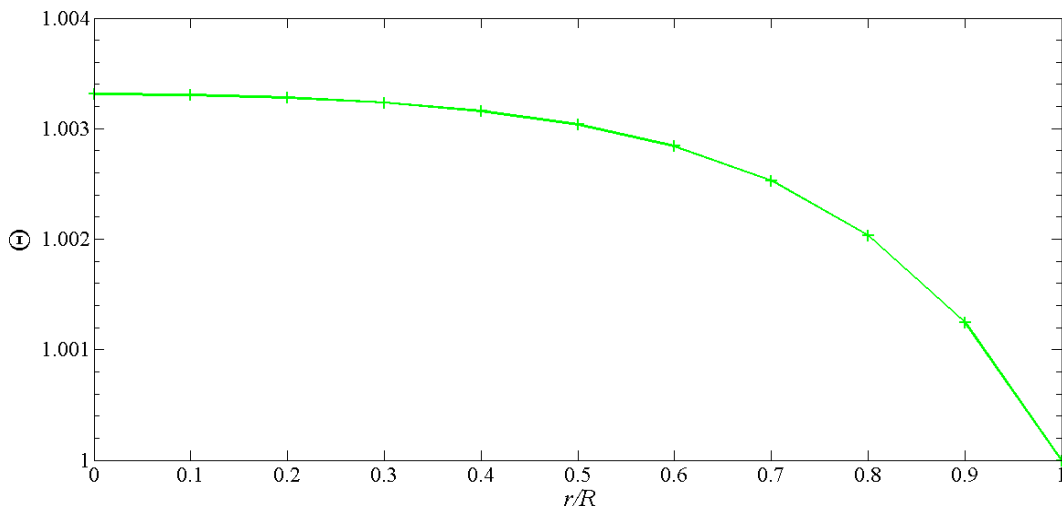


Figura 4.55: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 10.

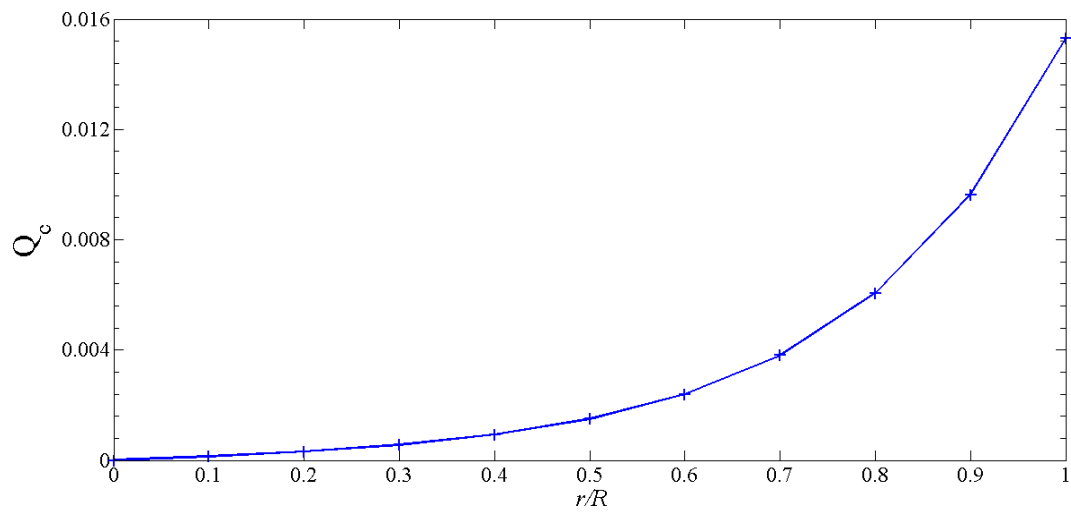


Figura 4.56: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 10.

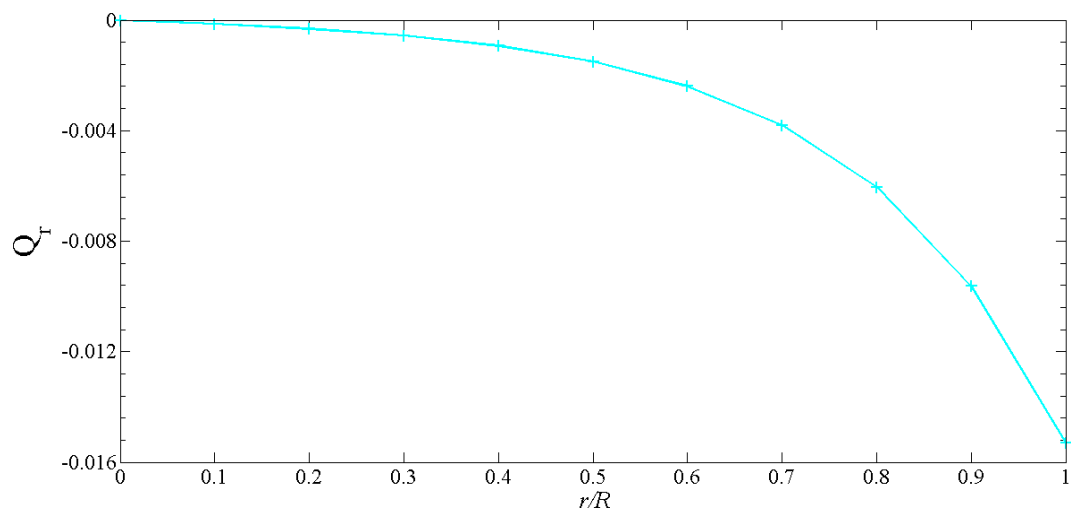


Figura 4.57: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 10.

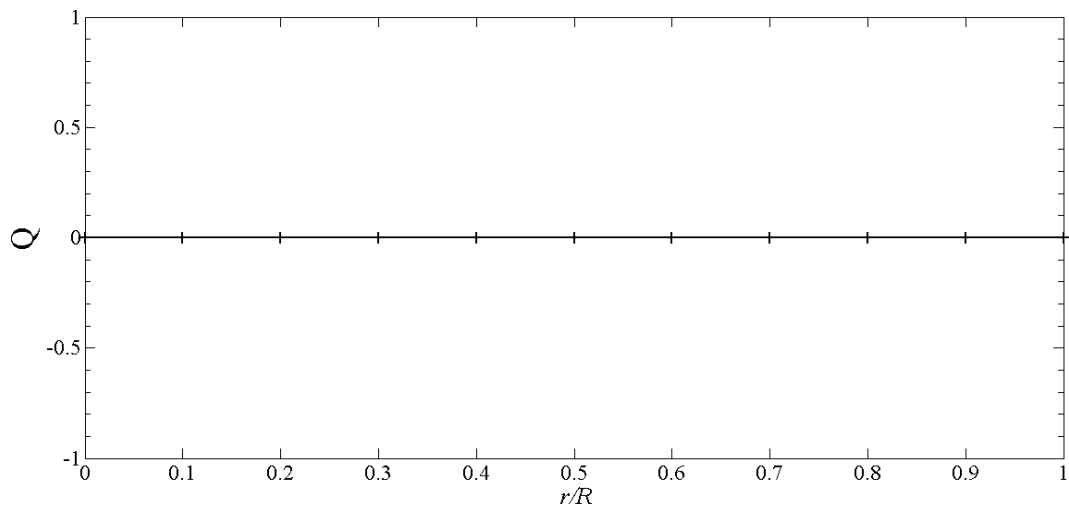


Figura 4.58: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 10.

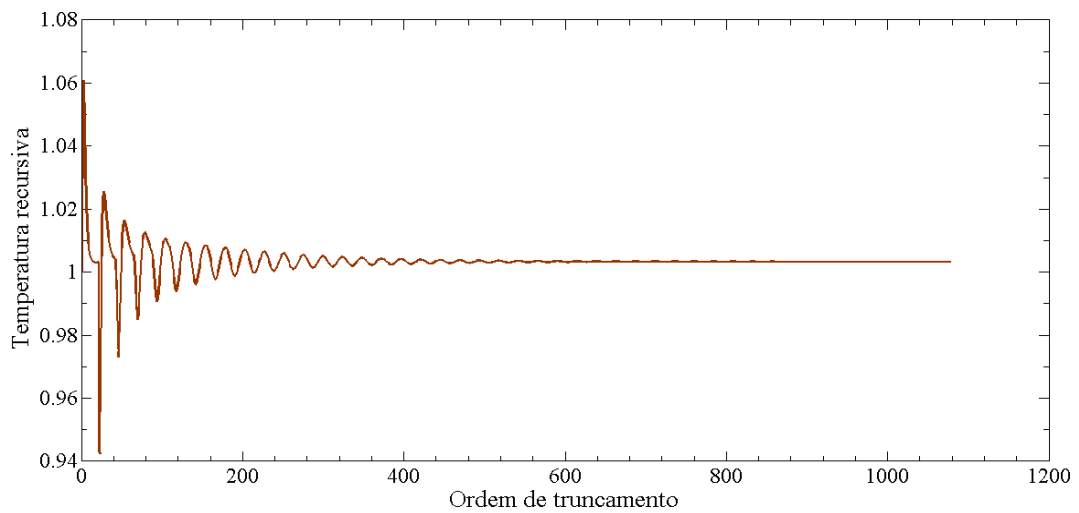


Figura 4.59: Profundidade da recursão finita para o problema 10.

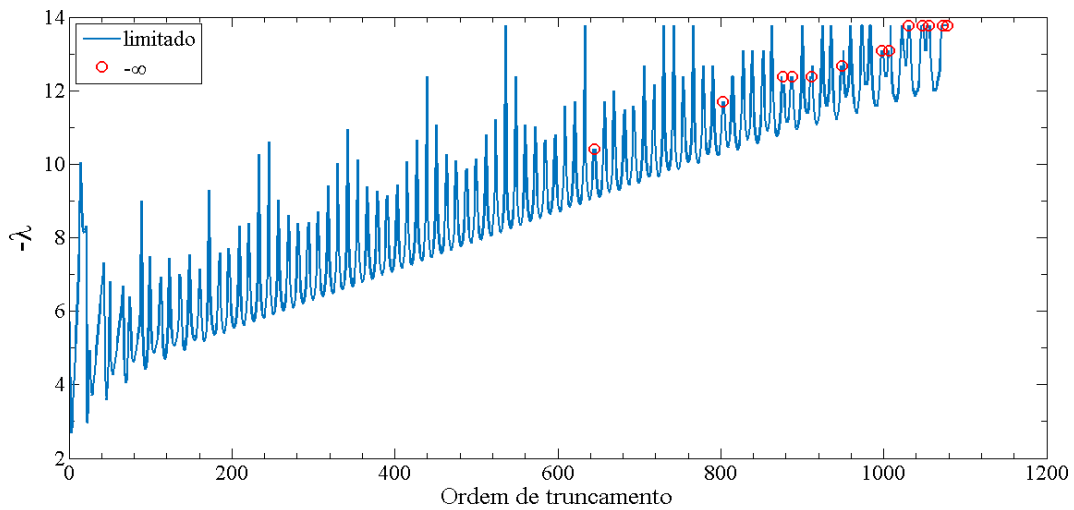


Figura 4.60: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 10.

Pode-se observar que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.55 e 4.56. Note ainda que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.56 e 4.57. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.58 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.59, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 10. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 1078$, para o problema 10. Já na Figura 4.60, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 1078$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 1078$, dado que λ é negativo. Convém mencionar que para o mesmo problema foi considerado o parâmetro $\alpha = 10$, porém os resultados numéricos divergiram.

Problema 11

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,0$, $R = 1$, $N_c = 0,5$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.61,

4.62, 4.63 e 4.64, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.65 e 4.66 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

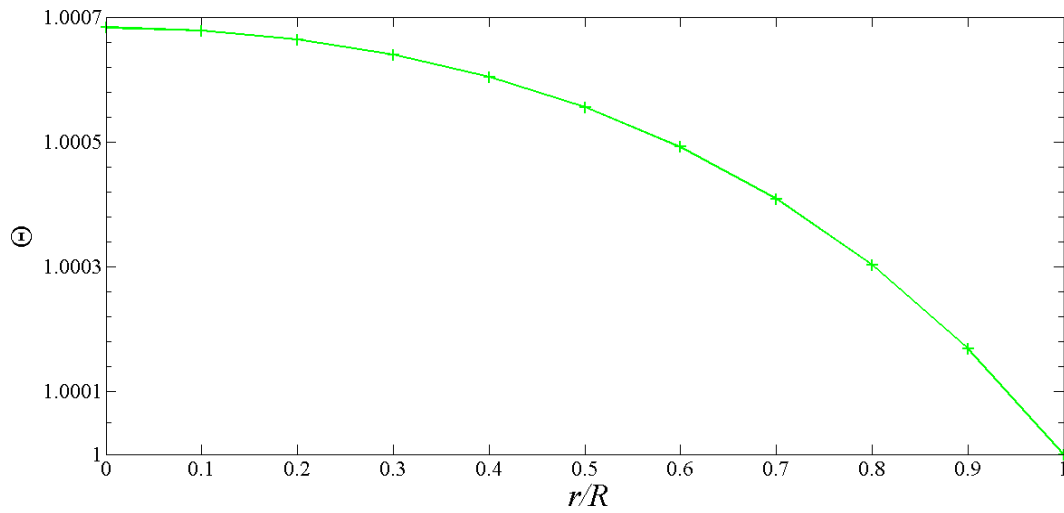


Figura 4.61: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 11.

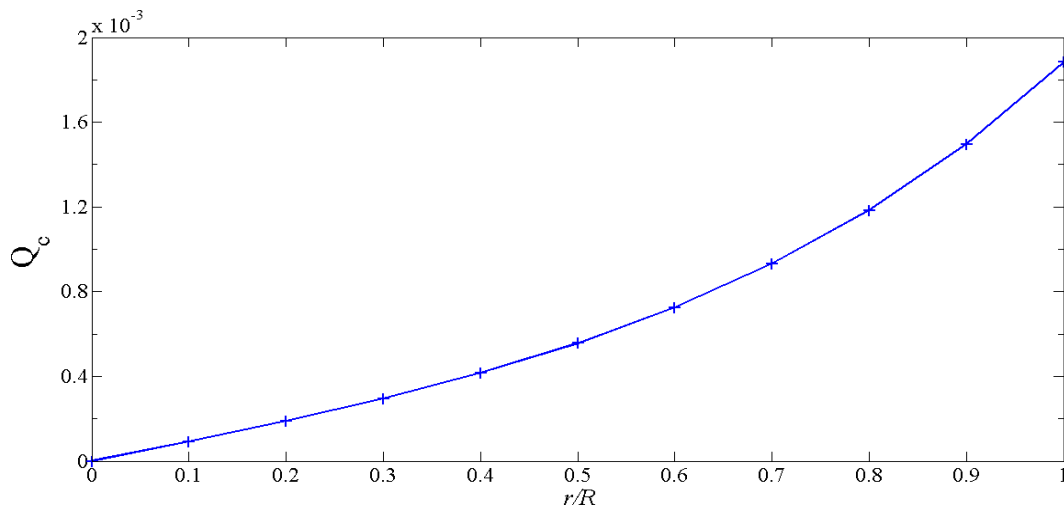


Figura 4.62: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 11.

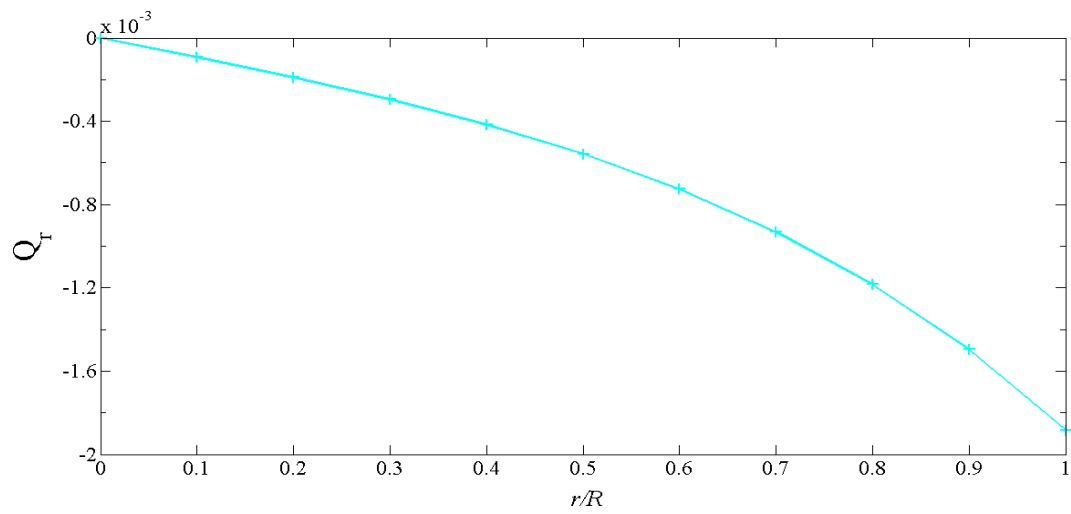


Figura 4.63: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 11.

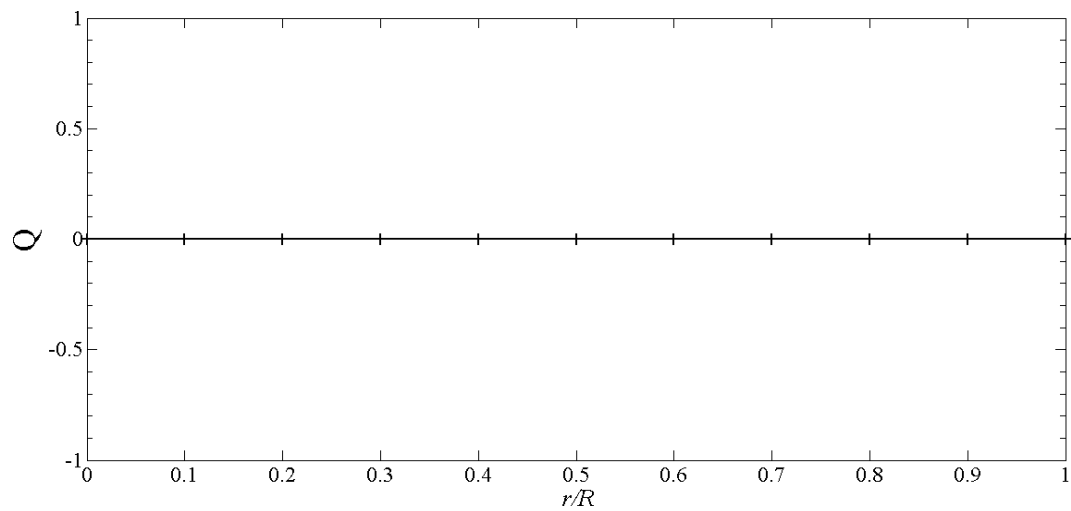


Figura 4.64: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 11.

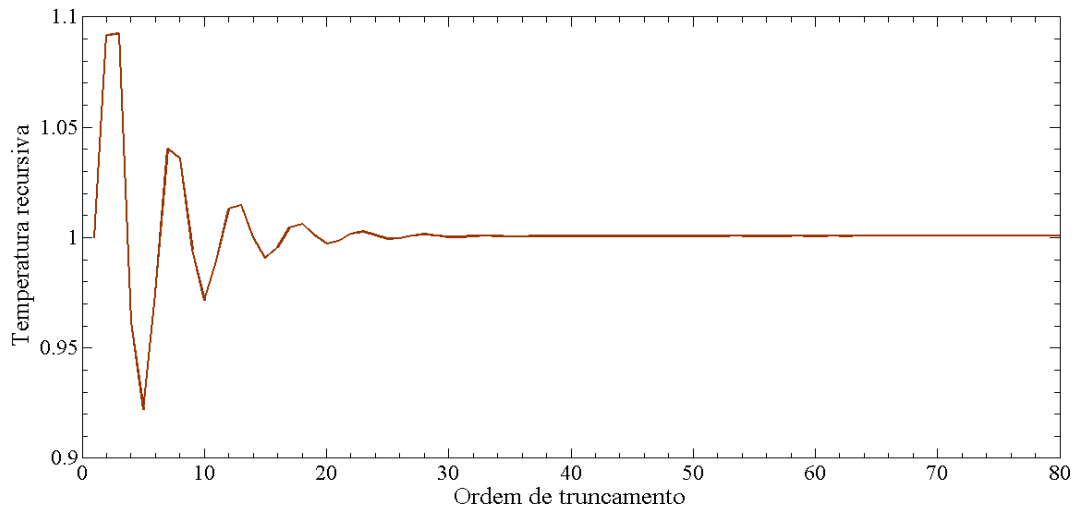


Figura 4.65: Profundidade da recursão finita para o problema 11.

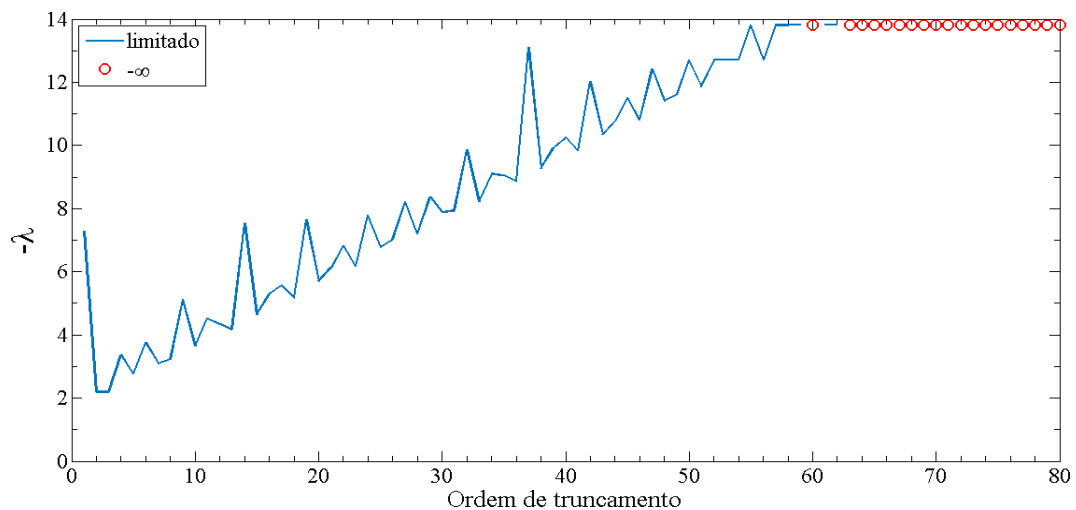


Figura 4.66: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 11.

Pode-se observar que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.61 e 4.62. Outro fato a ser observado é que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.62 e 4.63. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.64 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.65, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 11. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 80$,

para o problema 11. Já na Figura 4.66, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 80$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 80$, dado que λ é negativo. Convém ressaltar que para o mesmo problema o parâmetro $\alpha = 10$ obtém-se Z um número não inteiro, logo não é coerente, uma vez que, $Z \in \mathbb{Z}_+$.

Problema 12

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,99$, $R = 1$, $N_c = 0,1$, $H = 0$, $\alpha = 10$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, são mostrados nas Figuras 4.67, 4.68, 4.69 e 4.70, respectivamente, onde considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8). Além disso, nas Figuras 4.71 e 4.72 ilustram a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

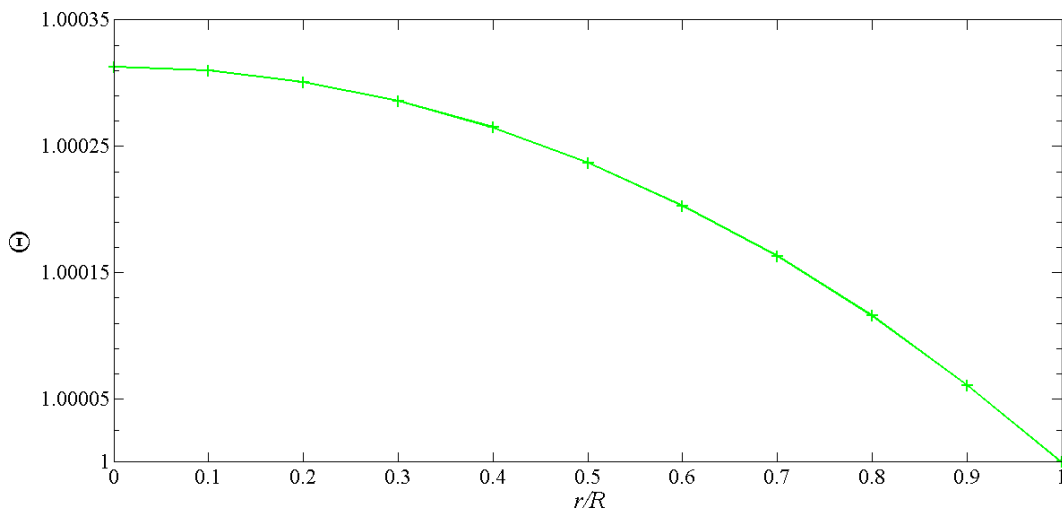


Figura 4.67: O perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 12.

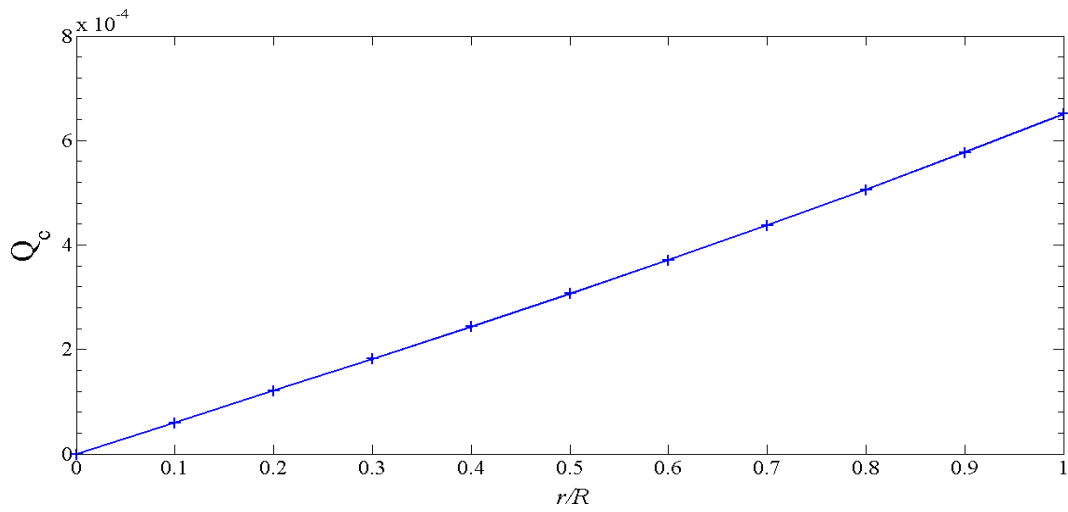


Figura 4.68: O fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 12.

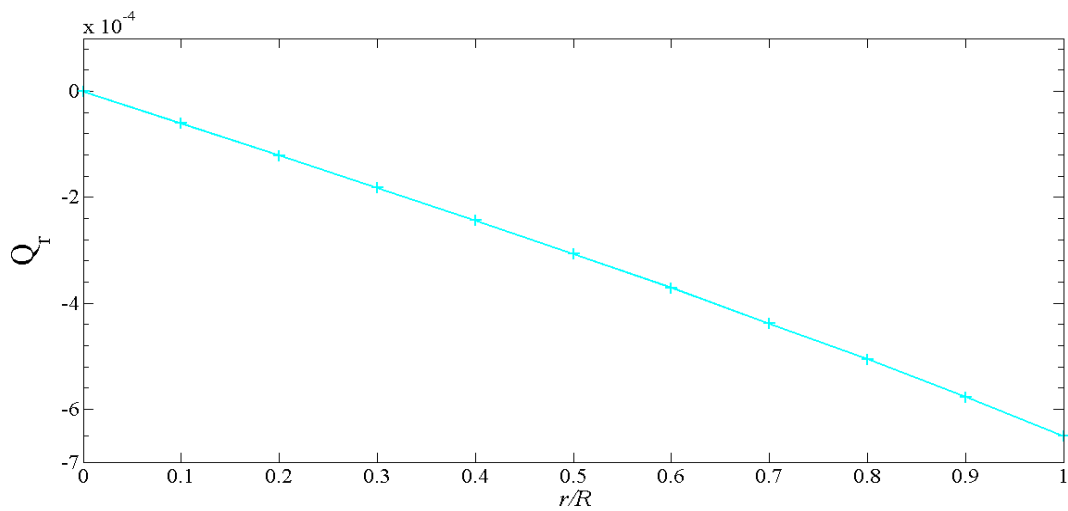


Figura 4.69: O fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 12.

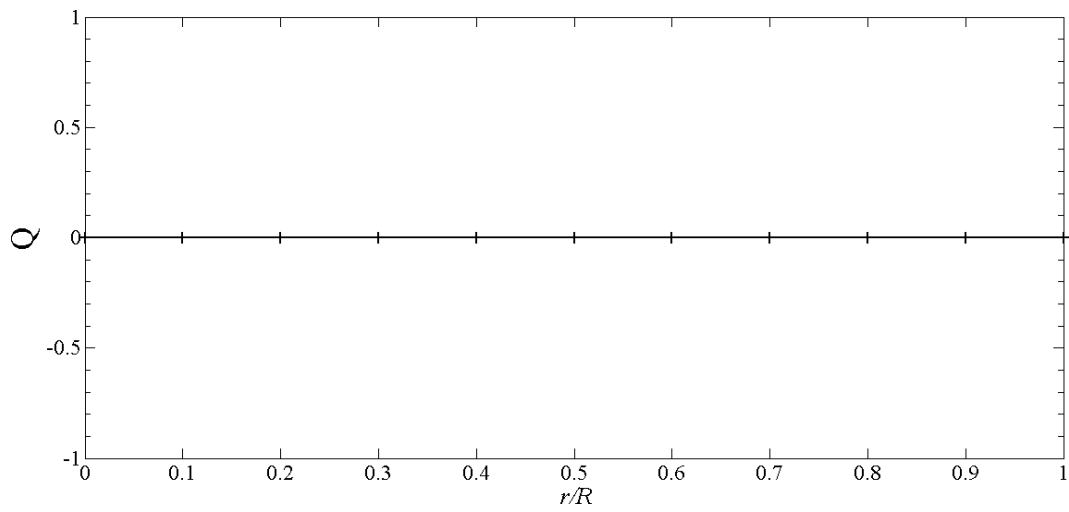


Figura 4.70: O fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 12.

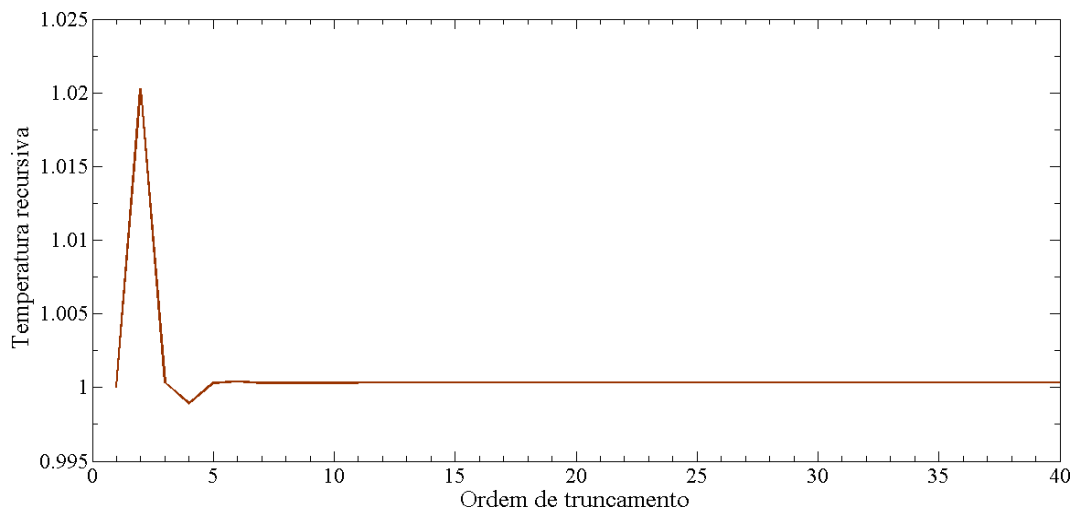


Figura 4.71: Profundidade da recursão finita para o problema 12.

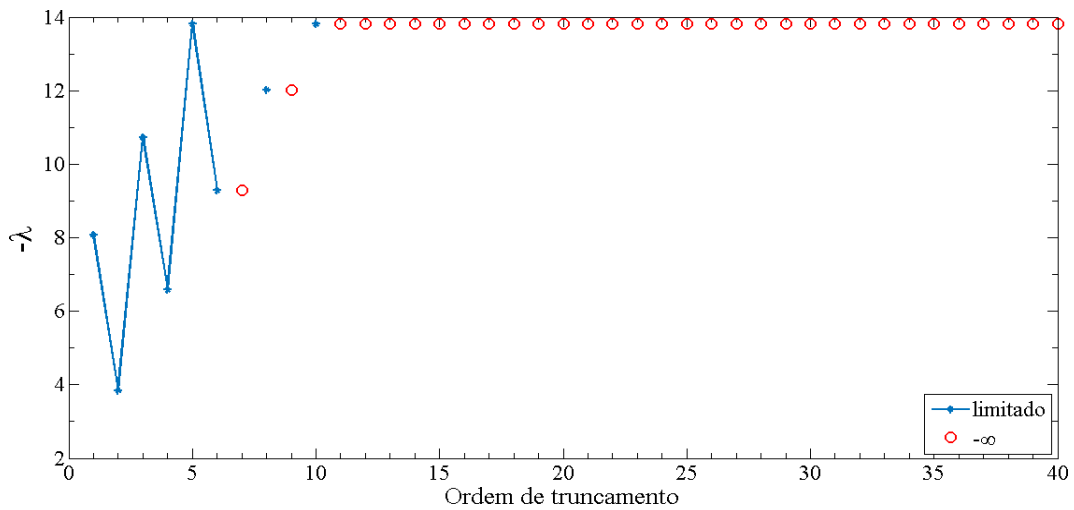


Figura 4.72: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 12.

Pode-se observar que a medida que a temperatura diminui o fluxo de calor condutivo Q_c aumenta, Figuras 4.67 e 4.68. Outro fato a ser observado é que o fluxo de calor condutivo Q_c passa por um ponto de mínimo e já o fluxo de calor radiativo Q_r tem um ponto de máximo correspondente, no mesmo ponto, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, Figuras 4.68 e 4.69. A lei de conservação de energia, Equação 4.3, é mostrada na Figura 4.70 onde o fluxo de calor total igual a zero. Na Figura 4.71, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 12. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 40$, para o problema 12. Já na Figura 4.72, ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 40$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 40$, dado que λ é negativo.

Os seis problemas restantes na Tabela 4.1 são comparados com os dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992].

Problema 13

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 1,5$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total

$Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992]. Além disso, os resultados são ilustrados, nas Figuras 4.73, 4.74, 4.75 e 4.76, também apresenta-se nas Figuras 4.77 e 4.78, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente. Considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8).

Tabela 4.2: Resultados da metodologia proposta para o problema 13.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,148239	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,147232	$2,014200 \times 10^{-2}$	$5,485800 \times 10^{-2}$	$7,500000 \times 10^{-2}$
0,2	1,144159	$4,130500 \times 10^{-2}$	$1,086950 \times 10^{-1}$	$1,500000 \times 10^{-1}$
0,3	1,138866	$6,455500 \times 10^{-2}$	$1,604450 \times 10^{-1}$	$2,250000 \times 10^{-1}$
0,4	1,131085	$9,104700 \times 10^{-2}$	$2,089530 \times 10^{-1}$	$3,000000 \times 10^{-1}$
0,5	1,120429	$1,220650 \times 10^{-1}$	$2,529350 \times 10^{-1}$	$3,750000 \times 10^{-1}$
0,6	1,106372	$1,590500 \times 10^{-1}$	$2,909500 \times 10^{-1}$	$4,500000 \times 10^{-1}$
0,7	1,088238	$2,036100 \times 10^{-1}$	$3,213900 \times 10^{-1}$	$5,250000 \times 10^{-1}$
0,8	1,065181	$2,575140 \times 10^{-1}$	$3,424860 \times 10^{-1}$	$6,000000 \times 10^{-1}$
0,9	1,036173	$3,226260 \times 10^{-1}$	$3,523740 \times 10^{-1}$	$6,750000 \times 10^{-1}$
1	1,000000	$4,008030 \times 10^{-1}$	$3,491970 \times 10^{-1}$	$7,500000 \times 10^{-1}$

Tabela 4.3: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 13.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,14135	0,0	0,0	0,0
0,1	1,14057	$1,58317 \times 10^{-2}$	$5,91683 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-2}$
0,2	1,13815	$3,28689 \times 10^{-2}$	$1,17131 \times 10^{-1}$	$1,50 \times 10^{-1}$
0,3	1,13391	$5,24174 \times 10^{-2}$	$1,72583 \times 10^{-1}$	$2,25 \times 10^{-1}$
0,4	1,12753	$7,59858 \times 10^{-2}$	$2,24014 \times 10^{-1}$	$3,00 \times 10^{-1}$
0,5	1,11852	$1,05392 \times 10^{-1}$	$2,69608 \times 10^{-1}$	$3,75 \times 10^{-1}$
0,6	1,10618	$1,42868 \times 10^{-1}$	$3,07132 \times 10^{-1}$	$4,50 \times 10^{-1}$
0,7	1,08959	$1,91149 \times 10^{-1}$	$3,33851 \times 10^{-1}$	$5,25 \times 10^{-1}$
0,8	1,06748	$2,53521 \times 10^{-1}$	$3,46479 \times 10^{-1}$	$6,00 \times 10^{-1}$
0,9	1,03829	$3,33766 \times 10^{-1}$	$3,41234 \times 10^{-1}$	$6,75 \times 10^{-1}$
1	1,0	$4,35937 \times 10^{-1}$	$3,14063 \times 10^{-1}$	$7,50 \times 10^{-1}$

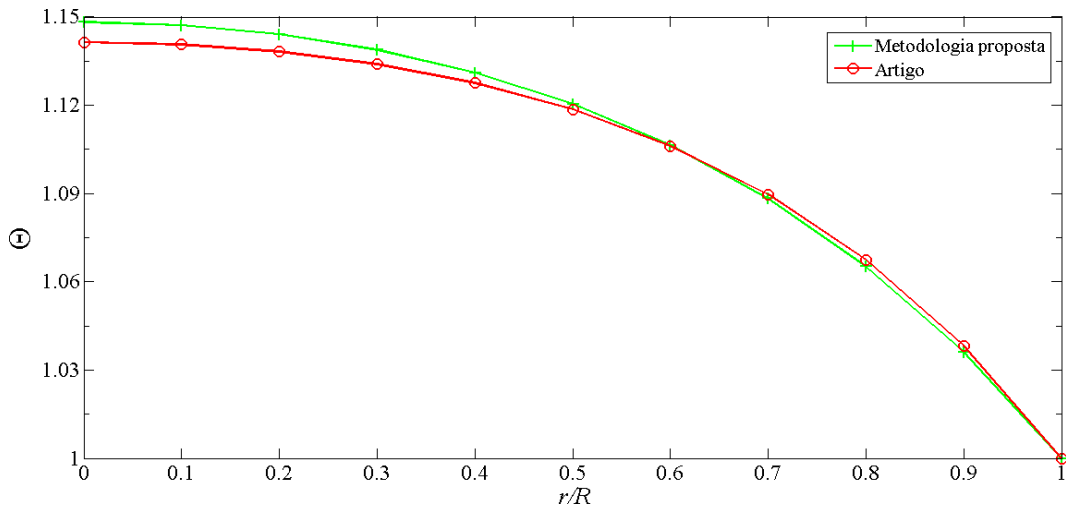


Figura 4.73: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 13.

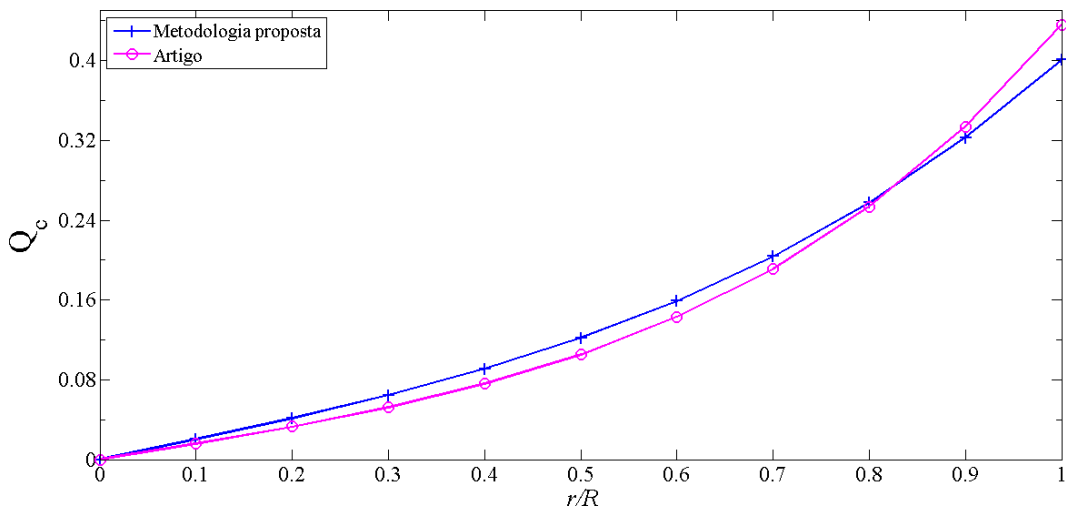


Figura 4.74: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 13.

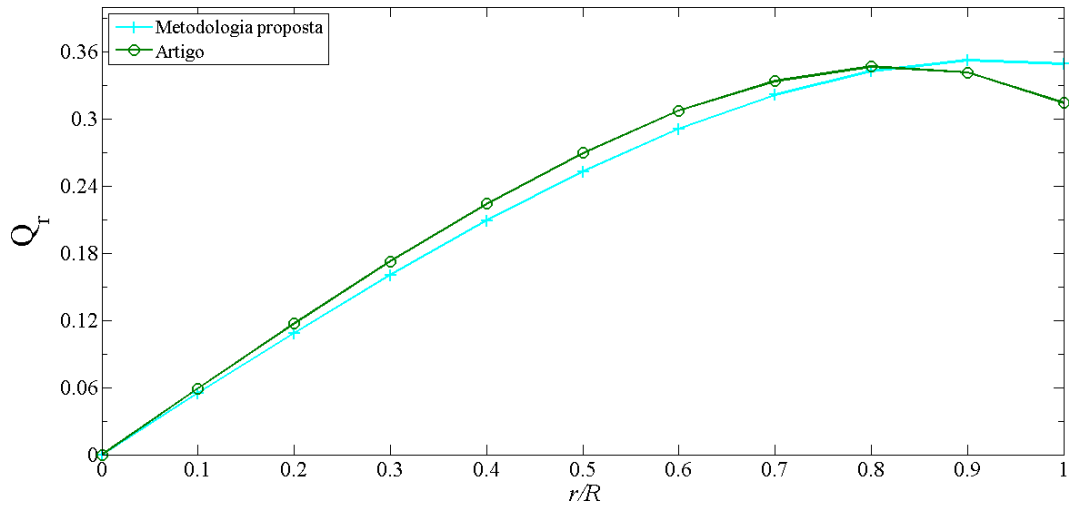


Figura 4.75: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 13.

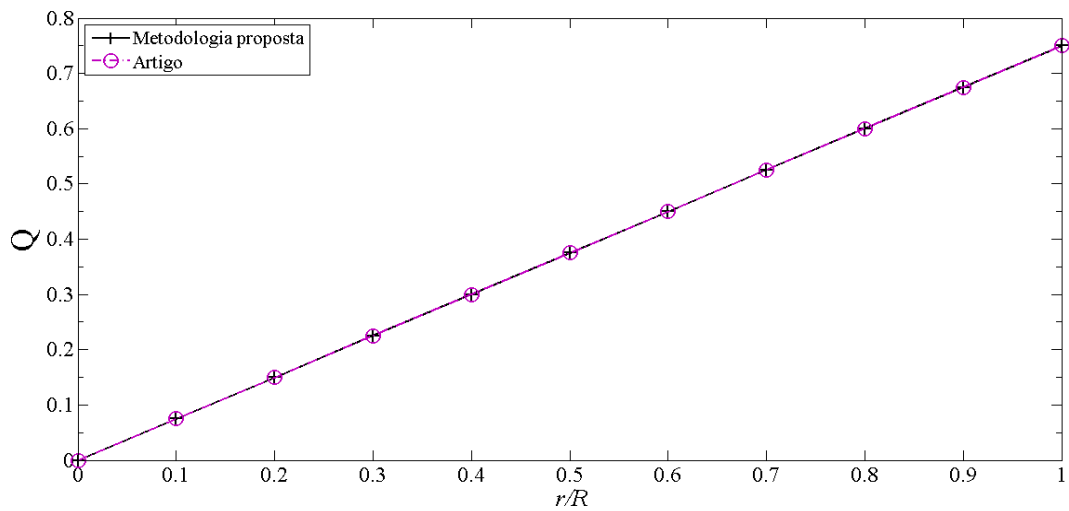


Figura 4.76: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 13.

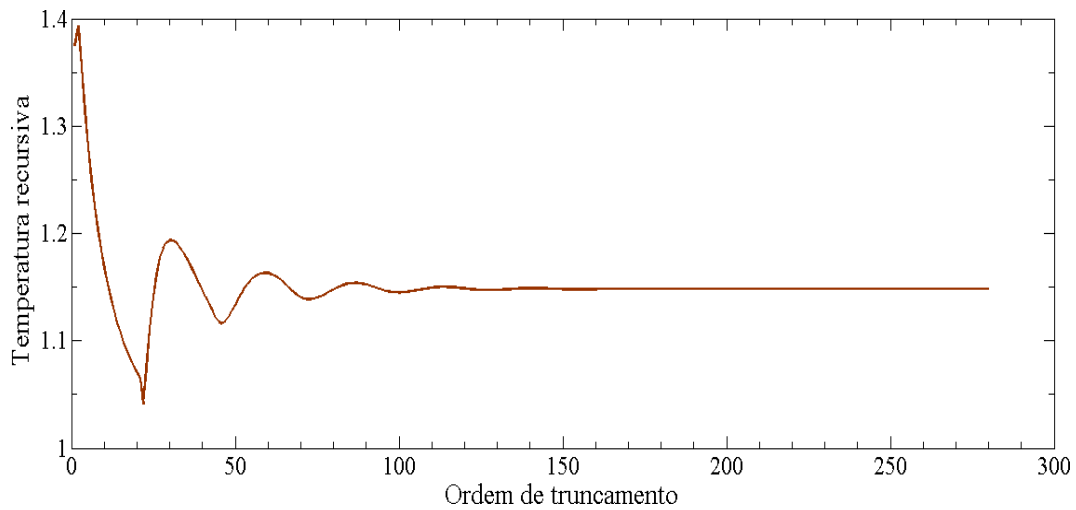


Figura 4.77: Profundidade da recursão finita para o problema 13.

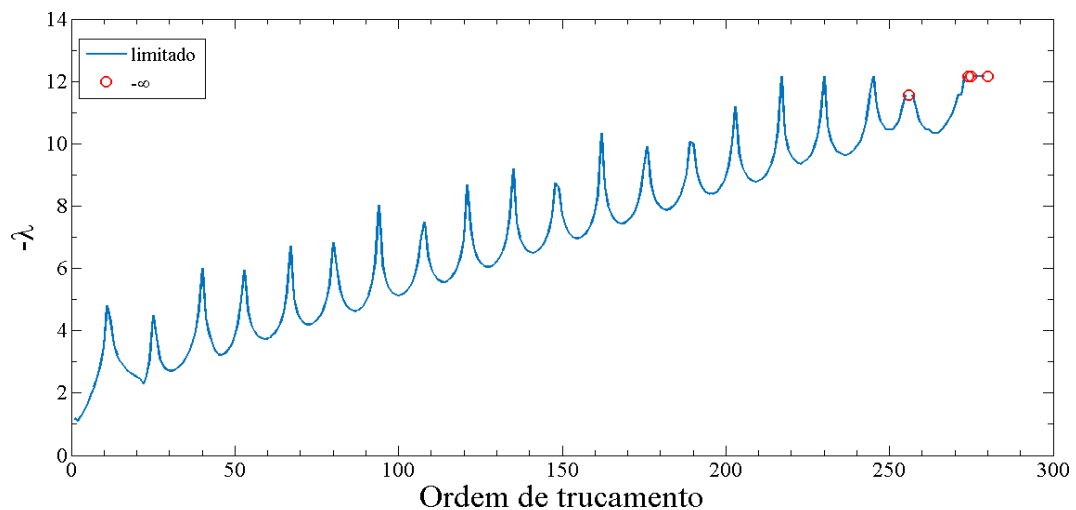


Figura 4.78: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 13.

Pode-se observar nas Figuras 4.73, 4.74, 4.75 e 4.76 que existe uma semelhança entre os resultados comparados com a metodologia proposta e o artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992], esta semelhança é confirmada nas Tabelas 4.2 e 4.3. Visto que, esta diferença deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Outro fato a ser observado é que o fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras 4.74 e 4.75. Conseqüentemente, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação 4.10. Na Figura 4.77, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 13. Emprega-se um critério de parada tal

como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 280$, para o problema 13. Já na Figura 4.78 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 280$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 280$, dado que λ é negativo.

Problema 14

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0.9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,5$, $N_c = 0,05$, $H = 100$, $\alpha = 0,1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992]. Estes resultados são ilustrados, nas Figuras 4.79, 4.80, 4.81 e 4.82, também apresenta-se nas Figuras 4.83 e 4.84, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente. Considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8).

Tabela 4.4: Resultados da metodologia proposta para o problema 14.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	2,706099	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	2,700620	$1,670470 \times 10^{-1}$	2,332953	2,500000
0,2	2,683066	$3,767180 \times 10^{-1}$	4,623282	5,000000
0,3	2,649923	$6,786310 \times 10^{-1}$	6,821369	7,500000
0,4	2,594831	1,135614	8,864386	$1,000000 \times 10^{+1}$
0,5	2,507929	1,827074	$1,067293 \times 10^{+1}$	$1,250000 \times 10^{+1}$
0,6	2,375268	2,845012	$1,215499 \times 10^{+1}$	$1,500000 \times 10^{+1}$
0,7	2,178756	4,275977	$1,322402 \times 10^{+1}$	$1,750000 \times 10^{+1}$
0,8	1,897354	6,165030	$1,383497 \times 10^{+1}$	$2,000000 \times 10^{+1}$
0,9	1,510043	8,473193	$1,402681 \times 10^{+1}$	$2,250000 \times 10^{+1}$
1	1,000000	$1,106601 \times 10^{+1}$	$1,393399 \times 10^{+1}$	$2,500000 \times 10^{+1}$

Tabela 4.5: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 14.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	2,68018	0,0	0,0	0,0
0,1	2,67697	$1,31221 \times 10^{-1}$	2,36878	2,50
0,2	2,66648	$2,97875 \times 10^{-1}$	4,70212	5,00
0,3	2,64585	$5,45711 \times 10^{-1}$	6,95429	7,50
0,4	2,60944	$9,42846 \times 10^{-1}$	9,05715	$1,00 \times 10^{+1}$
0,5	2,54736	1,59384	$1,09062 \times 10^{+1}$	$1,25 \times 10^{+1}$
0,6	2,44331	2,65103	$1,23490 \times 10^{+1}$	$1,50 \times 10^{+1}$
0,7	2,27228	4,30604	$1,31940 \times 10^{+1}$	$1,75 \times 10^{+1}$
0,8	1,99985	6,72698	$1,32730 \times 10^{+1}$	$2,00 \times 10^{+1}$
0,9	1,58658	9,91733	$1,25827 \times 10^{+1}$	$2,25 \times 10^{+1}$
1	1,0	$1,35877 \times 10^{+1}$	$1,14123 \times 10^{+1}$	$2,50 \times 10^{+1}$

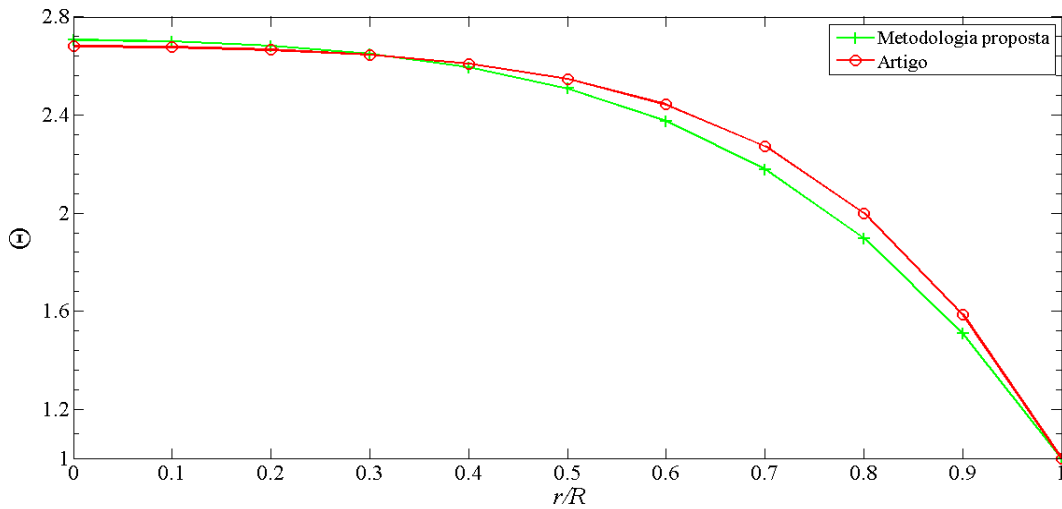


Figura 4.79: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 14.

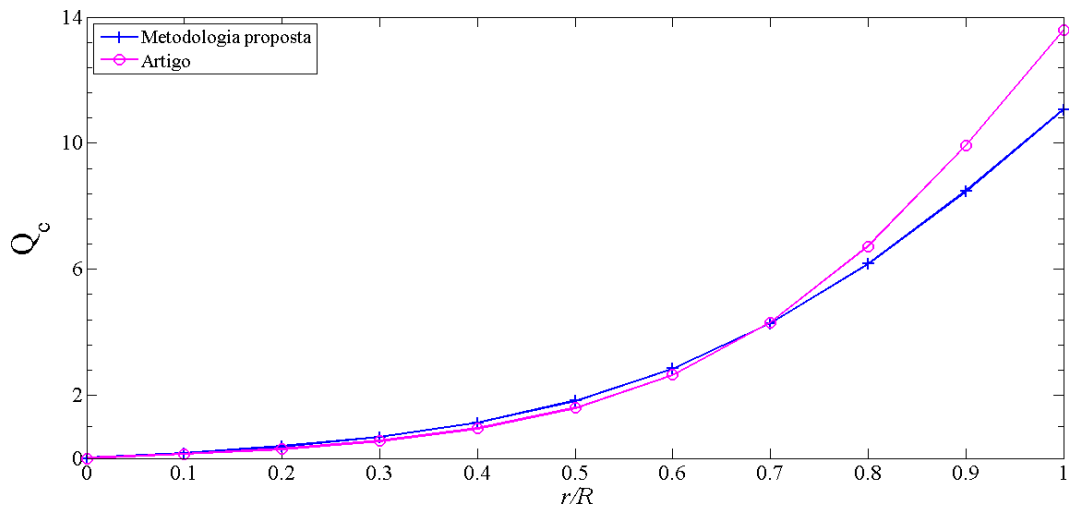


Figura 4.80: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 14.

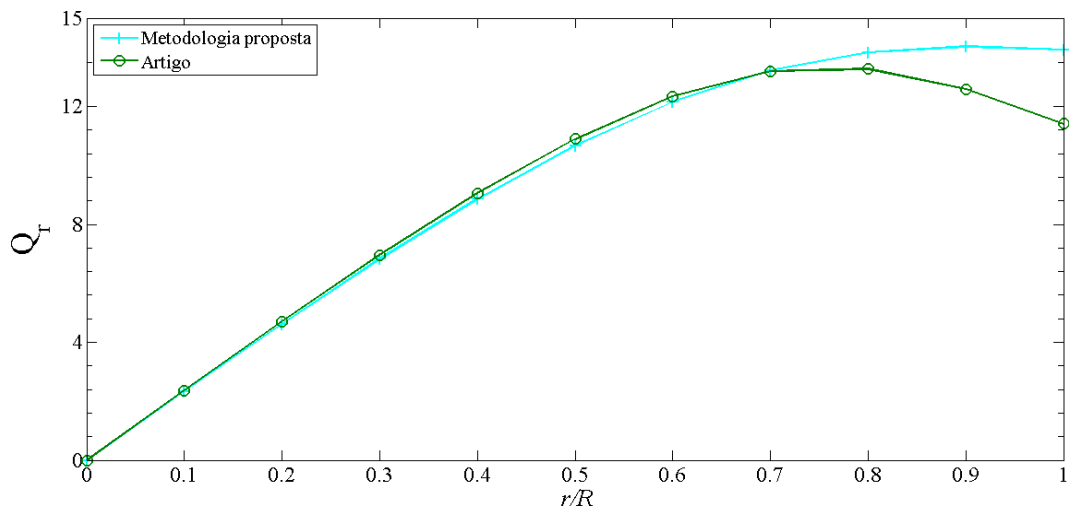


Figura 4.81: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 14.

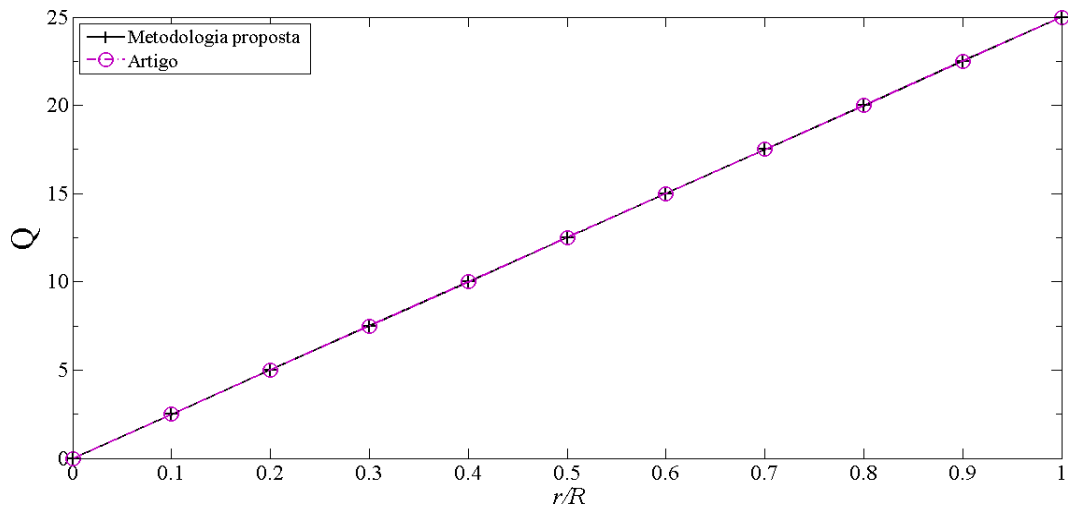


Figura 4.82: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 14.

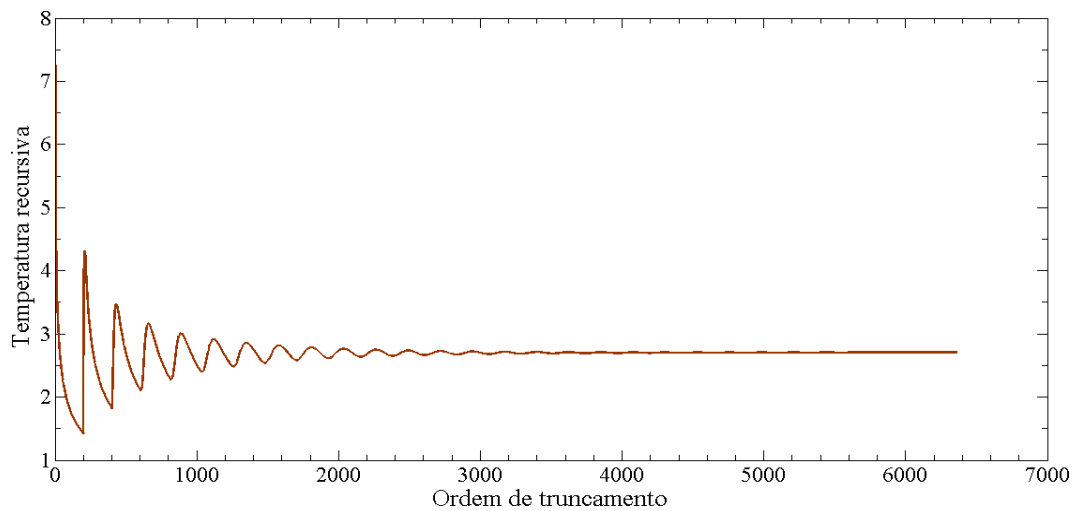


Figura 4.83: Profundidade da recursão finita para o problema 14.

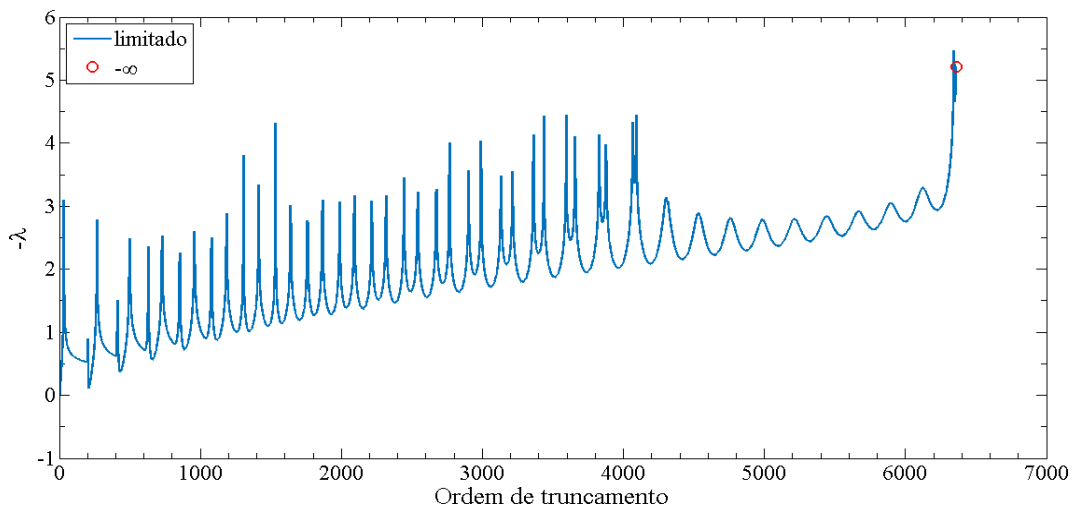


Figura 4.84: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 14.

Existe uma correspondência entre os resultados obtidos pela metodologia proposta e os dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1992], as Figuras 4.79, 4.80, 4.81 e 4.82 que pode ser confirmado nas Tabelas 4.4 e 4.5. Visto que, esta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Outro fato a ser observado é que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras 4.80 e 4.81. O fluxo de calor total Q é linear constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação 4.10. Na Figura 4.83, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 14. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 6361$, para o problema 14. Agora, a Figura 4.84 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 6361$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 6361$, dado que λ é negativo.

Problema 15

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,05$, $N_c = 0,0005$, $H = 4000$, $\alpha = 10$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados

com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992]. Estes resultados são ilustrados, nas Figuras 4.85, 4.86, 4.87 e 4.88, além disso, apresenta-se a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, as Figuras 4.89 e 4.90, respectivamente. Considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8).

Tabela 4.6: Resultados da metodologia proposta para o problema 15.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	2,011182	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	2,005071	2,450961	7,549039	$1,000000 \times 10^{+1}$
0,2	1,986240	5,101001	$1,489900 \times 10^{+1}$	$2,000000 \times 10^{+1}$
0,3	1,953182	8,153193	$2,184681 \times 10^{+1}$	$3,000000 \times 10^{+1}$
0,4	1,903366	$1,181501 \times 10^{+1}$	$2,818499 \times 10^{+1}$	$4,000000 \times 10^{+1}$
0,5	1,833226	$1,629131 \times 10^{+1}$	$3,370869 \times 10^{+1}$	$5,000000 \times 10^{+1}$
0,6	1,738225	$2,176615 \times 10^{+1}$	$3,823385 \times 10^{+1}$	$6,000000 \times 10^{+1}$
0,7	1,613035	$2,837172 \times 10^{+1}$	$4,162828 \times 10^{+1}$	$7,000000 \times 10^{+1}$
0,8	1,451897	$3,614814 \times 10^{+1}$	$4,385186 \times 10^{+1}$	$8,000000 \times 10^{+1}$
0,9	1,249172	$4,500779 \times 10^{+1}$	$4,499221 \times 10^{+1}$	$9,000000 \times 10^{+1}$
1	1,000000	$5,472785 \times 10^{+1}$	$4,527215 \times 10^{+1}$	$1,000000 \times 10^{+2}$

Tabela 4.7: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 15.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	2,04106	0,0	0,0	0,0
0,1	2,03634	1,90642	8,09358	$1,0 \times 10^{+1}$
0,2	2,02159	4,05550	$1,59445 \times 10^{+1}$	$2,0 \times 10^{+1}$
0,3	1,99494	6,71132	$2,32887 \times 10^{+1}$	$3,0 \times 10^{+1}$
0,4	1,95313	$1,01762 \times 10^{+1}$	$2,98238 \times 10^{+1}$	$4,0 \times 10^{+1}$
0,5	1,89126	$1,47952 \times 10^{+1}$	$3,52048 \times 10^{+1}$	$5,0 \times 10^{+1}$
0,6	1,80264	$2,09346 \times 10^{+1}$	$3,90654 \times 10^{+1}$	$6,0 \times 10^{+1}$
0,7	1,67883	$2,89189 \times 10^{+1}$	$4,10811 \times 10^{+1}$	$7,0 \times 10^{+1}$
0,8	1,51008	$3,89136 \times 10^{+1}$	$4,10864 \times 10^{+1}$	$8,0 \times 10^{+1}$
0,9	1,28655	$5,07816 \times 10^{+1}$	$3,92184 \times 10^{+1}$	$9,0 \times 10^{+1}$
1	1,0	$6,40005 \times 10^{+1}$	$3,59995 \times 10^{+1}$	$1,0 \times 10^{+2}$

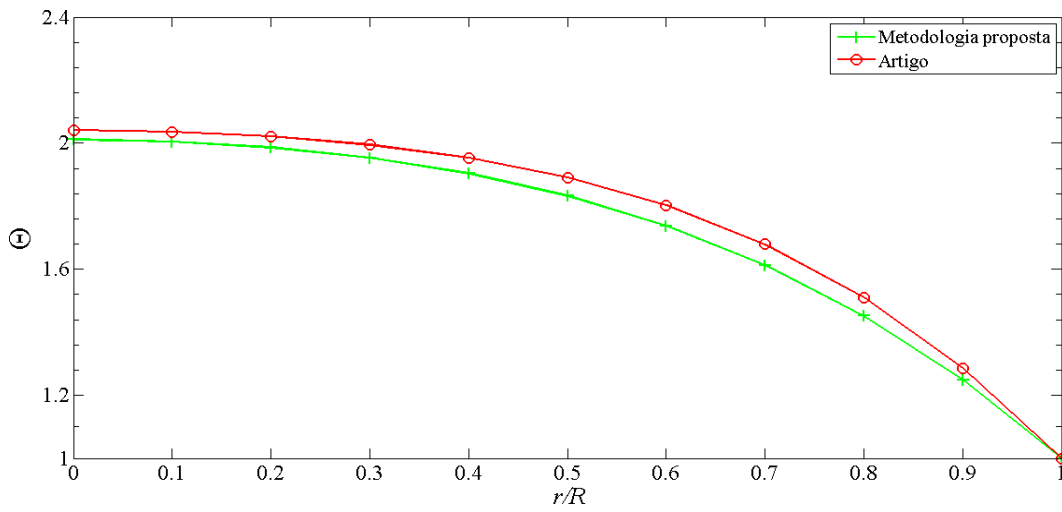


Figura 4.85: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 15.

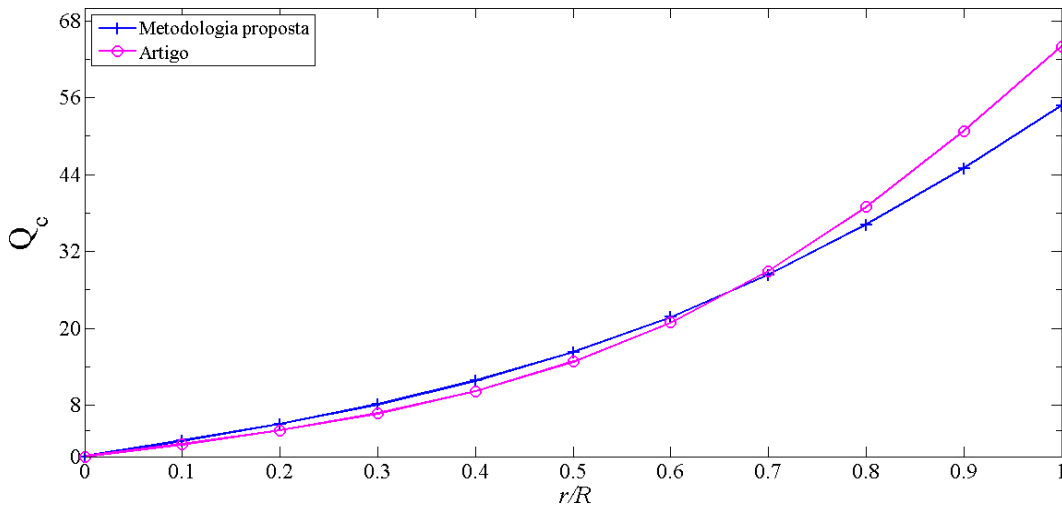


Figura 4.86: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 15.

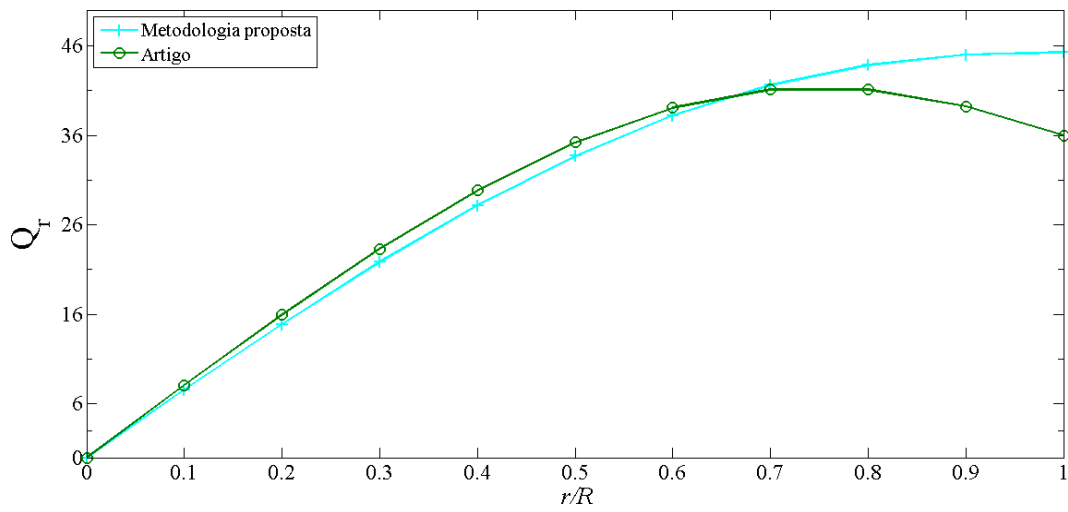


Figura 4.87: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 15.

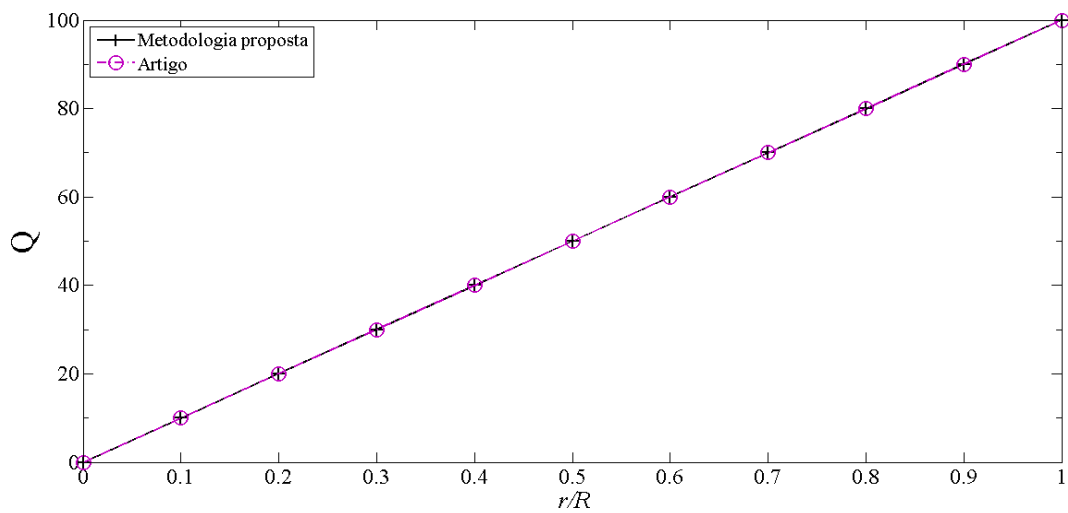


Figura 4.88: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 15.

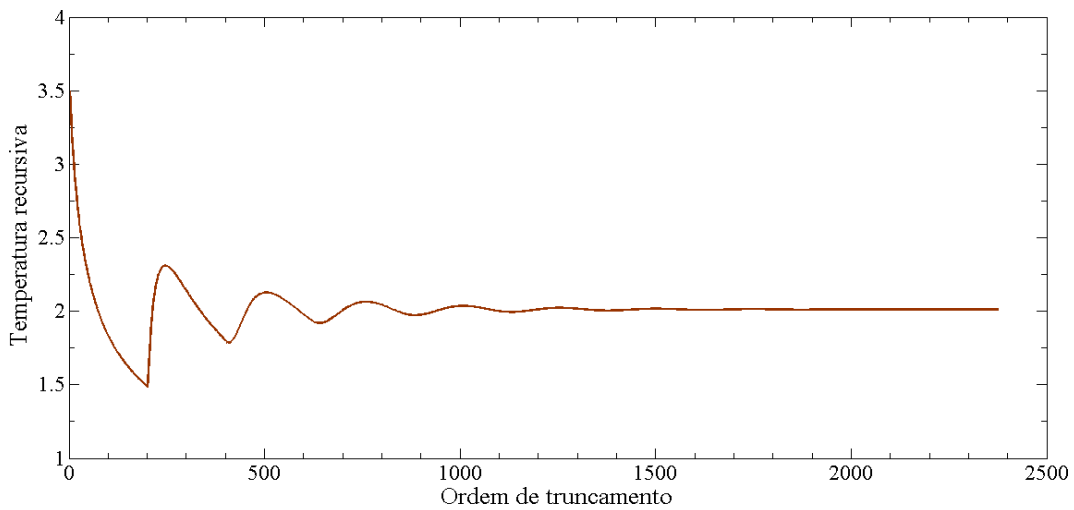


Figura 4.89: Profundidade da recursão finita para o problema 15.

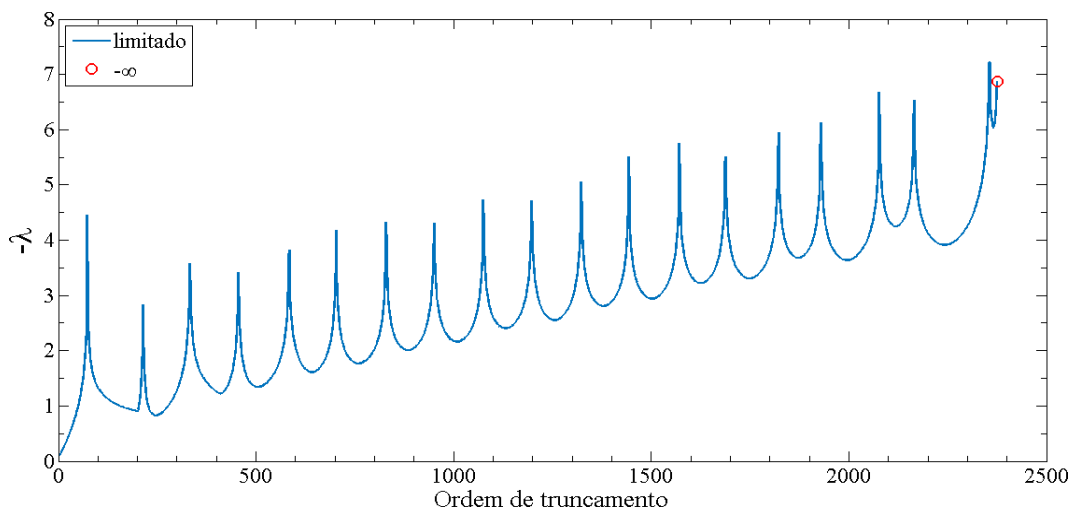


Figura 4.90: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 15.

Pode-se observar que nos resultados obtidos pela metodologia proposta e os dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1992], que existe uma correspondência, as Figuras 4.85, 4.86, 4.87 e 4.88 que pode ser confirmado nas Tabelas 4.6 e 4.7. Posto que, esta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Note ainda que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras 4.86 e 4.87. Assim sendo, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação 4.10. Na Figura 4.89, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 15. Utiliza-se um critério de

parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 2376$, para o problema 15. Já na Figura 4.90 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 2376$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 2376$, dado que λ é negativo.

Problema 16

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,5$, $N_c = 0,005$, $H = 40$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992]. Além disso, os resultados são ilustrados, nas Figuras 4.91, 4.92, 4.93 e 4.94, também apresenta-se nas Figuras 4.95 e 4.96, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente. Considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8).

Tabela 4.8: Resultados da metodologia proposta para o problema 16.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,341050	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,340287	$2,978100 \times 10^{-2}$	$9,702190 \times 10^{-1}$	1,000000
0,2	1,337828	$6,630500 \times 10^{-2}$	1,933695	2,000000
0,3	1,333129	$1,179280 \times 10^{-1}$	2,882072	3,000000
0,4	1,325143	$1,965180 \times 10^{-1}$	3,803482	4,000000
0,5	1,312078	$3,198870 \times 10^{-1}$	4,680113	5,000000
0,6	1,291033	$5,147830 \times 10^{-1}$	5,485217	6,000000
0,7	1,257471	$8,198780 \times 10^{-1}$	6,180122	7,000000
0,8	1,204597	1,286745	6,713255	8,000000
0,9	1,122855	1,974381	7,025619	9,000000
1	1,000000	2,931223	7,068777	$1,000000 \times 10^{+1}$

Tabela 4.9: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 16.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,32936	0,0	0,0	0,0
0,1	1,32896	$1,61753 \times 10^{-2}$	$9,83825 \times 10^{-1}$	1,0
0,2	1,32767	$3,70481 \times 10^{-2}$	1,96295	2,0
0,3	1,32508	$6,91398 \times 10^{-2}$	2,93086	3,0
0,4	1,32039	$1,23314 \times 10^{-1}$	3,87689	4,0
0,5	1,31206	$2,18860 \times 10^{-1}$	4,78114	5,0
0,6	1,29725	$3,90260 \times 10^{-1}$	5,60974	6,0
0,7	1,27079	$6,97497 \times 10^{-1}$	6,30250	7,0
0,8	1,22364	1,23819	6,76181	8,0
0,9	1,14079	2,15037	8,84963	9,0
1	1,0	3,57497	6,42503	$1,0 \times 10^{+1}$

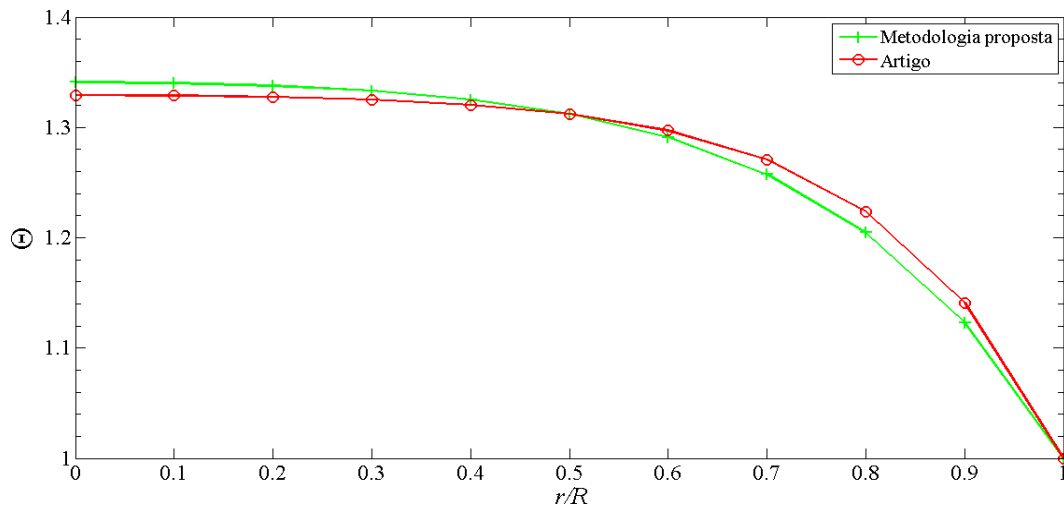


Figura 4.91: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 16.

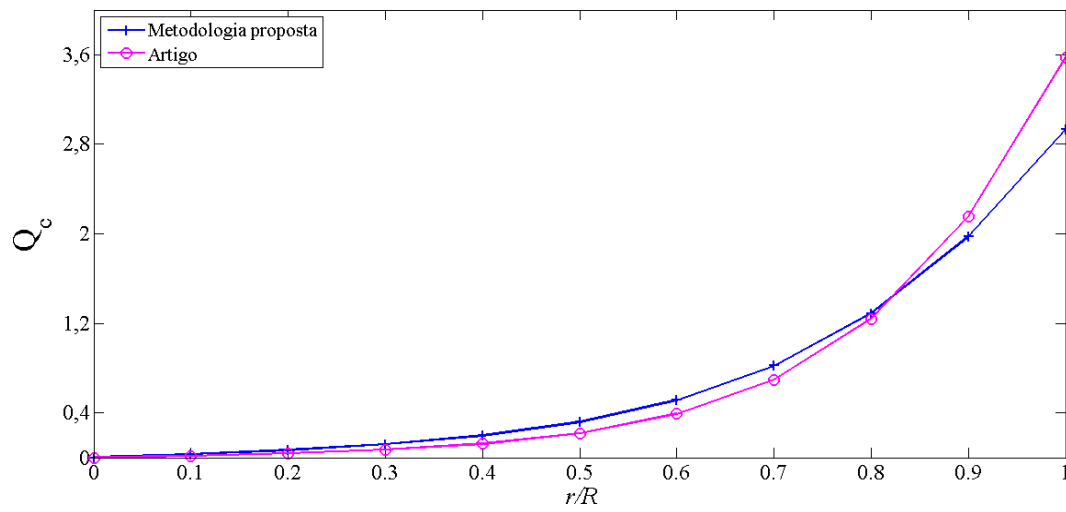


Figura 4.92: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 16.

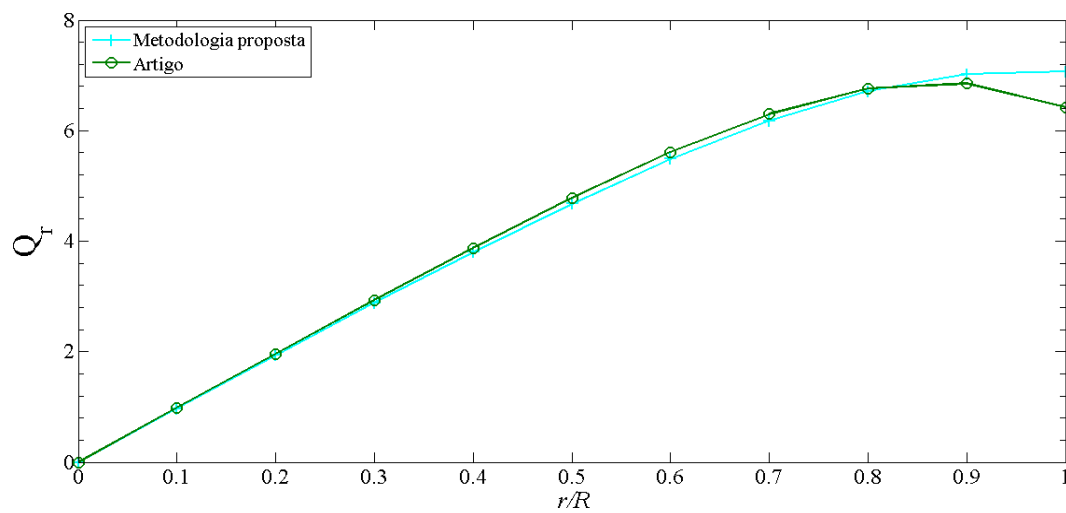


Figura 4.93: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 16.

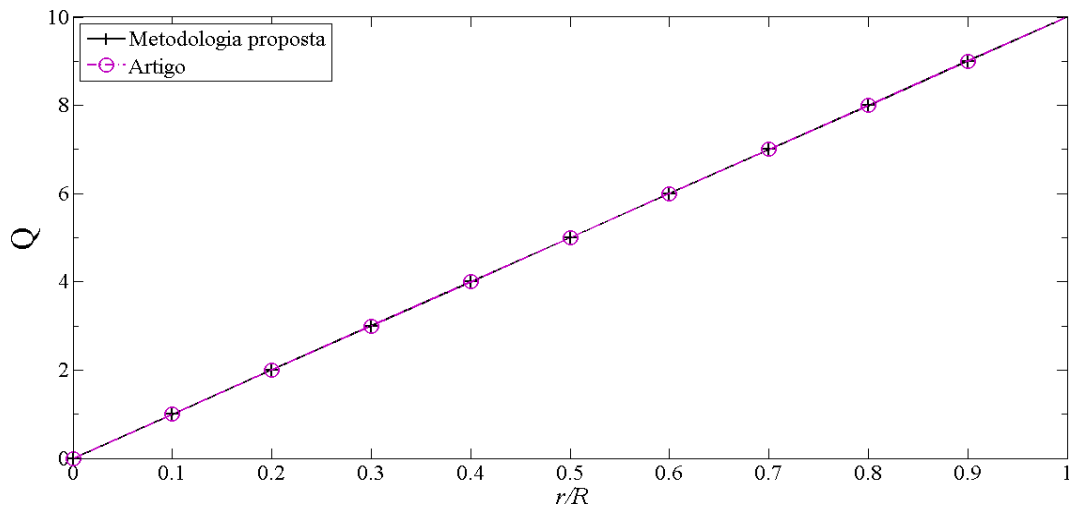


Figura 4.94: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 16.

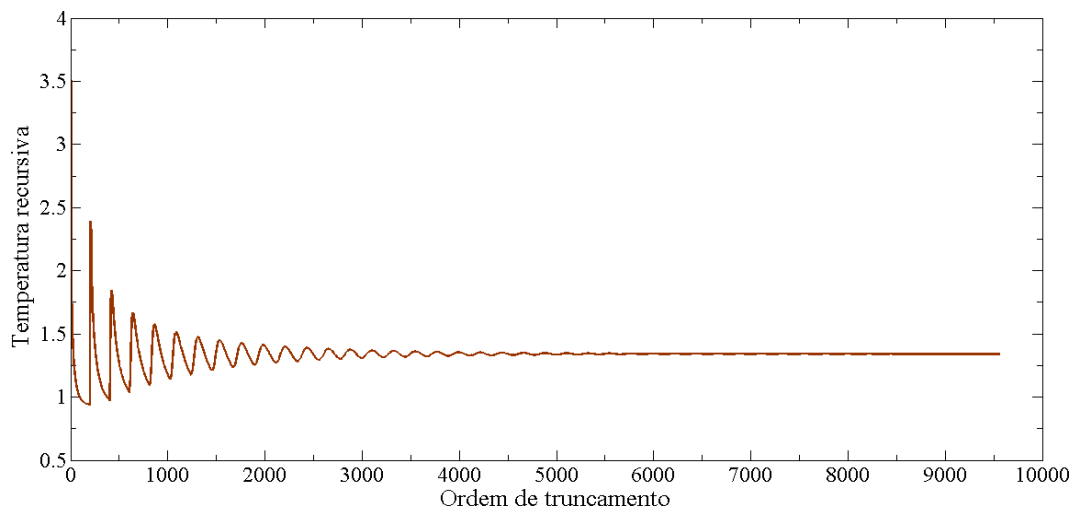


Figura 4.95: Profundidade da recursão finita para o problema 16.

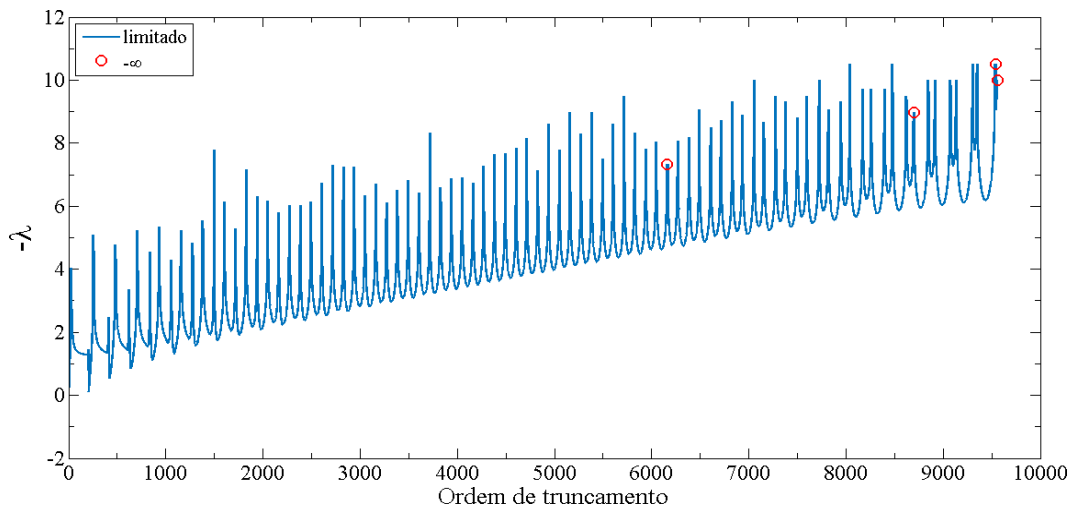


Figura 4.96: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 16.

Pode-se observar que nos resultados obtidos através da metodologia proposta e dos dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1992], existe uma semelhança, as Figuras 4.91, 4.92, 4.93 e 4.94 que pode ser verificado nas Tabelas 4.8 e 4.9. Posto que, esta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Note ainda que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras 4.92 e 4.93. O fluxo de calor total Q é linear constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação 4.10. Na Figura 4.95, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 16. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 9557$, para o problema 16. Agora, a Figura 4.96 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 9557$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 9557$, dado que λ é negativo.

Problema 17

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 5$, $N_c = 0,5$, $H = 0,4$, $\alpha = 0,01$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são

comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992]. Estes resultados são ilustrados, nas Figuras 4.97, 4.98, 4.99 e 4.100, também apresenta-se nas Figuras 4.101 e 4.102, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente. Considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8).

Tabela 4.10: Resultados da metodologia proposta para o problema 17.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,590835	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,588116	$1,079800 \times 10^{-2}$	$8,920200 \times 10^{-2}$	$1,000000 \times 10^{-1}$
0,2	1,579720	$2,256200 \times 10^{-2}$	$1,774380 \times 10^{-1}$	$2,000000 \times 10^{-1}$
0,3	1,564877	$3,644600 \times 10^{-2}$	$2,635540 \times 10^{-1}$	$3,000000 \times 10^{-1}$
0,4	1,542143	$5,400900 \times 10^{-2}$	$3,459910 \times 10^{-1}$	$4,000000 \times 10^{-1}$
0,5	1,509131	$7,746000 \times 10^{-2}$	$4,225400 \times 10^{-1}$	$5,000000 \times 10^{-1}$
0,6	1,462140	$1,098620 \times 10^{-1}$	$4,901380 \times 10^{-1}$	$6,000000 \times 10^{-1}$
0,7	1,395728	$1,551030 \times 10^{-1}$	$5,448970 \times 10^{-1}$	$7,000000 \times 10^{-1}$
0,8	1,302484	$2,171730 \times 10^{-1}$	$5,828270 \times 10^{-1}$	$8,000000 \times 10^{-1}$
0,9	1,173473	$2,981740 \times 10^{-1}$	$6,018260 \times 10^{-1}$	$9,000000 \times 10^{-1}$
1	1,000000	$3,950260 \times 10^{-1}$	$6,049740 \times 10^{-1}$	1,000000

Tabela 4.11: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 17.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,59143	0,0	0,0	0,0
0,1	1,58908	$9,45763 \times 10^{-3}$	$9,05424 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-1}$
0,2	1,58188	$1,94624 \times 10^{-2}$	$1,80538 \times 10^{-1}$	$2,0 \times 10^{-1}$
0,3	1,56940	$3,07732 \times 10^{-2}$	$2,69227 \times 10^{-1}$	$3,0 \times 10^{-1}$
0,4	1,55068	$4,46777 \times 10^{-2}$	$3,55322 \times 10^{-1}$	$4,0 \times 10^{-1}$
0,5	1,52391	$6,35493 \times 10^{-2}$	$4,36451 \times 10^{-1}$	$5,0 \times 10^{-1}$
0,6	1,48559	$9,18078 \times 10^{-2}$	$5,08192 \times 10^{-1}$	$6,0 \times 10^{-1}$
0,7	1,42925	$1,37339 \times 10^{-1}$	$5,62661 \times 10^{-1}$	$7,0 \times 10^{-1}$
0,8	1,34329	$2,12767 \times 10^{-1}$	$5,87233 \times 10^{-1}$	$8,0 \times 10^{-1}$
0,9	1,20882	$3,33971 \times 10^{-1}$	$5,66029 \times 10^{-1}$	$9,0 \times 10^{-1}$
1	1,0	$5,10041 \times 10^{-1}$	$4,89959 \times 10^{-1}$	1,0

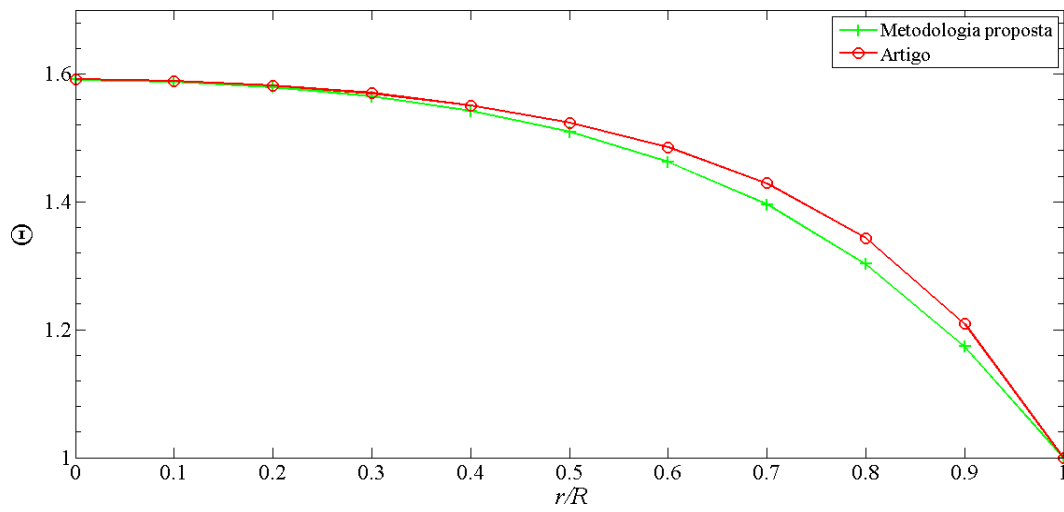


Figura 4.97: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 17.

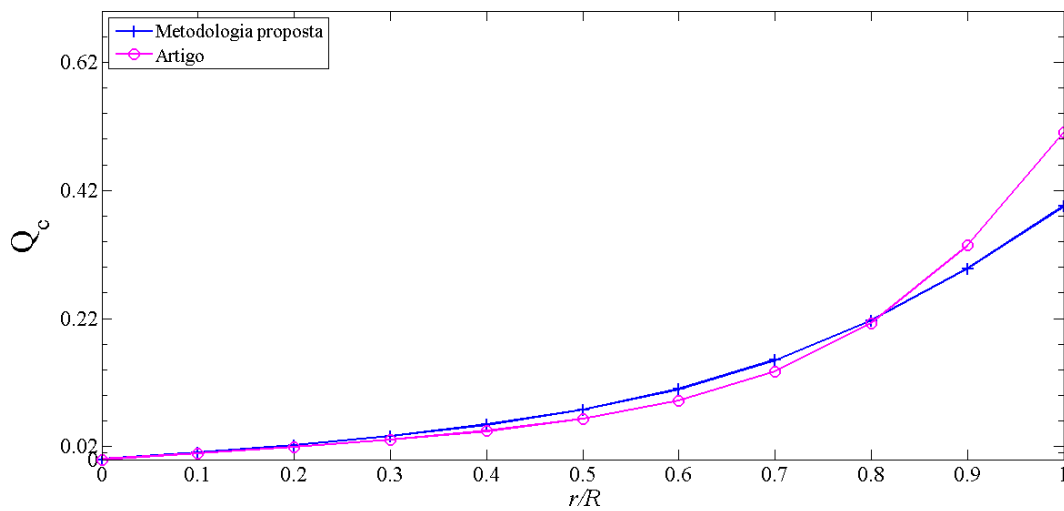


Figura 4.98: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 17.

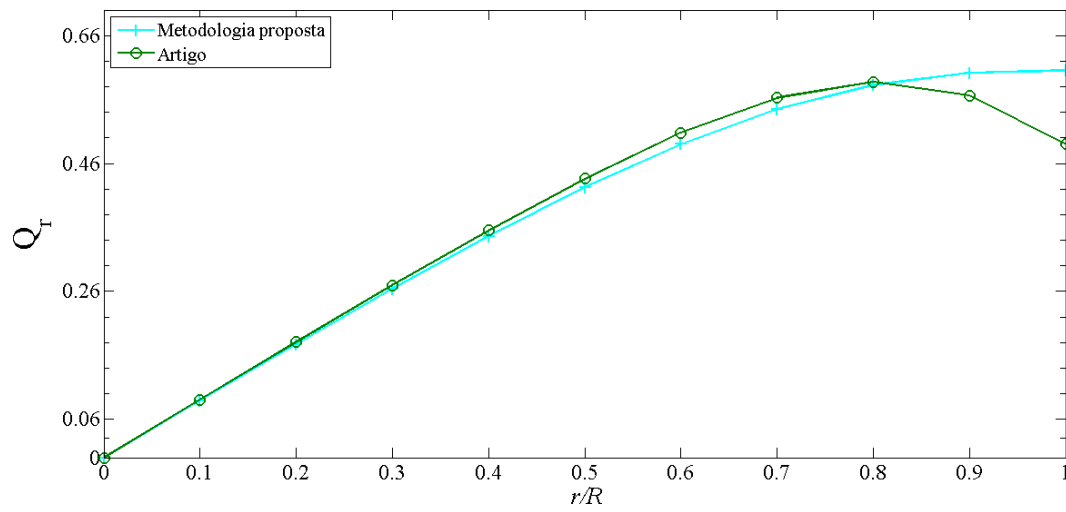


Figura 4.99: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 17.

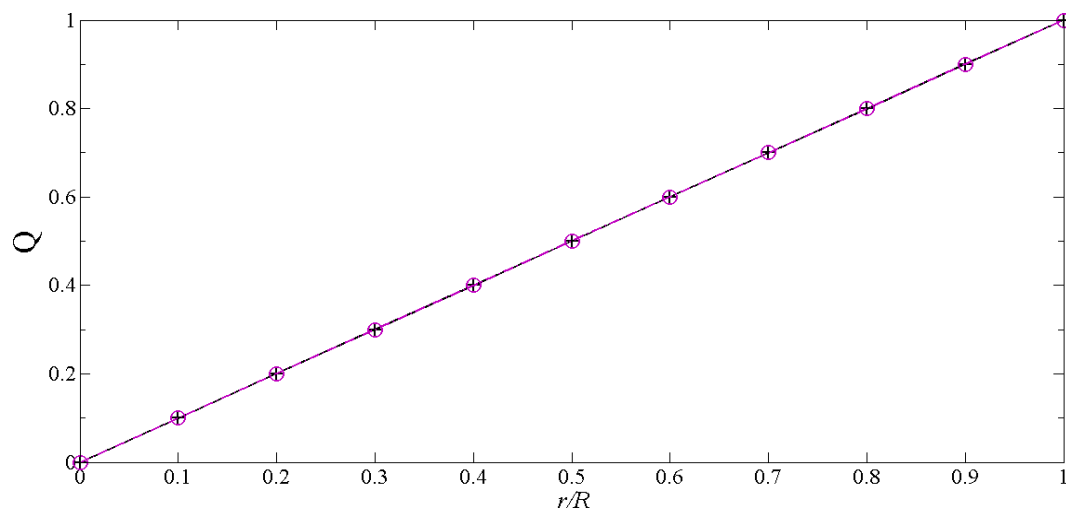


Figura 4.100: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 17.

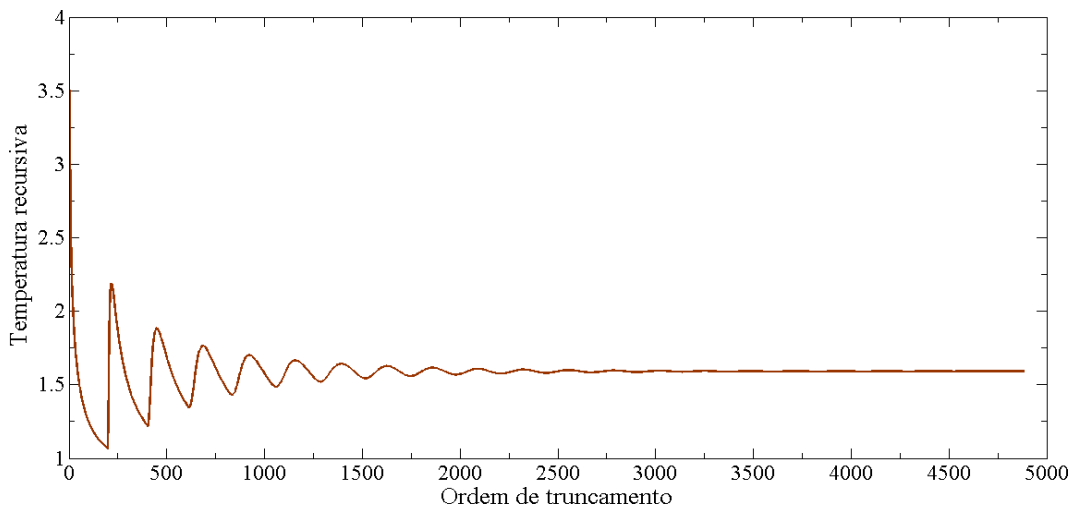


Figura 4.101: Profundidade da recursão finita para o problema 17.

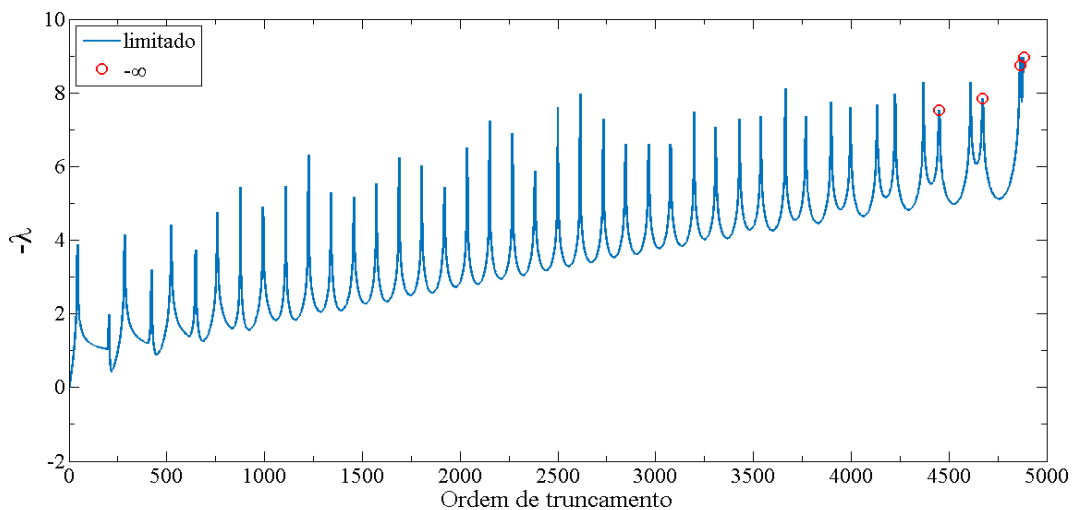


Figura 4.102: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 17.

Pode-se observar que nos resultados obtidos através da metodologia proposta e os dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1992], existe uma correspondência, as Figuras 4.97, 4.98, 4.99 e 4.100 que pode ser confirmado nas Tabelas 4.10 e 4.11. Em razão desta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Note ainda que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras 4.98 e 4.99. Portanto, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação 4.10. Na Figura 4.101, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 17. Utiliza-se um critério de parada tal

como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 4882$, para o problema 17. Já na Figura 4.102 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 4882$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 4882$, dado que λ é negativo.

Problema 18

Finalmente, para este problema apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 1$, $\rho^d = 0$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,1$, $H = 1$, $\alpha = 10$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992]. Estes resultados são ilustrados, nas Figuras 4.103, 4.104, 4.105 e 4.106, também apresenta-se nas Figuras 4.107 e 4.108, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente. Considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ (note que $1 \leq n \leq N/2$ é a direção discreta da variável polar e $1 \leq m \leq N$ é a direção discreta da variável azimutal, logo a ordem da quadratura é igual a 8).

Tabela 4.12: Resultados da metodologia proposta para o problema 18.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,140060	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,138906	$2,308400 \times 10^{-2}$	$2,691600 \times 10^{-2}$	$5,000000 \times 10^{-2}$
0,2	1,135414	$4,675100 \times 10^{-2}$	$5,324900 \times 10^{-2}$	$1,000000 \times 10^{-1}$
0,3	1,129497	$7,158800 \times 10^{-2}$	$7,841200 \times 10^{-2}$	$1,500000 \times 10^{-1}$
0,4	1,121008	$9,819700 \times 10^{-2}$	$1,018030 \times 10^{-1}$	$2,000000 \times 10^{-1}$
0,5	1,109739	$1,271940 \times 10^{-1}$	$1,228060 \times 10^{-1}$	$2,500000 \times 10^{-1}$
0,6	1,095418	$1,592100 \times 10^{-1}$	$1,407900 \times 10^{-1}$	$3,000000 \times 10^{-1}$
0,7	1,077714	$1,948870 \times 10^{-1}$	$1,551130 \times 10^{-1}$	$3,500000 \times 10^{-1}$
0,8	1,056226	$2,348640 \times 10^{-1}$	$1,651360 \times 10^{-1}$	$4,000000 \times 10^{-1}$
0,9	1,030495	$2,797590 \times 10^{-1}$	$1,702410 \times 10^{-1}$	$4,500000 \times 10^{-1}$
1	1,000000	$3,301400 \times 10^{-1}$	$1,698600 \times 10^{-1}$	$5,000000 \times 10^{-1}$

Tabela 4.13: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992] para o problema 18.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,13784	0,0	0,0	0,0
0,1	1,13682	$2,05282 \times 10^{-2}$	$2,94718 \times 10^{-2}$	$5,0 \times 10^{-2}$
0,2	1,13371	$4,18525 \times 10^{-2}$	$5,81475 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-1}$
0,3	1,12839	$6,47934 \times 10^{-2}$	$8,52066 \times 10^{-2}$	$1,5 \times 10^{-1}$
0,4	1,12067	$9,02177 \times 10^{-2}$	$1,09782 \times 10^{-1}$	$2,0 \times 10^{-1}$
0,5	1,11024	$1,19058 \times 10^{-1}$	$1,30942 \times 10^{-1}$	$2,5 \times 10^{-1}$
0,6	1,09671	$1,52323 \times 10^{-1}$	$1,47677 \times 10^{-1}$	$3,0 \times 10^{-1}$
0,7	1,07959	$1,91102 \times 10^{-1}$	$1,58898 \times 10^{-1}$	$3,5 \times 10^{-1}$
0,8	1,05827	$2,36547 \times 10^{-1}$	$1,63453 \times 10^{-1}$	$4,0 \times 10^{-1}$
0,9	1,03202	$2,89839 \times 10^{-1}$	$1,60161 \times 10^{-1}$	$4,5 \times 10^{-1}$
1	1,0	$3,52111 \times 10^{-1}$	$1,47889 \times 10^{-1}$	$5,0 \times 10^{-1}$

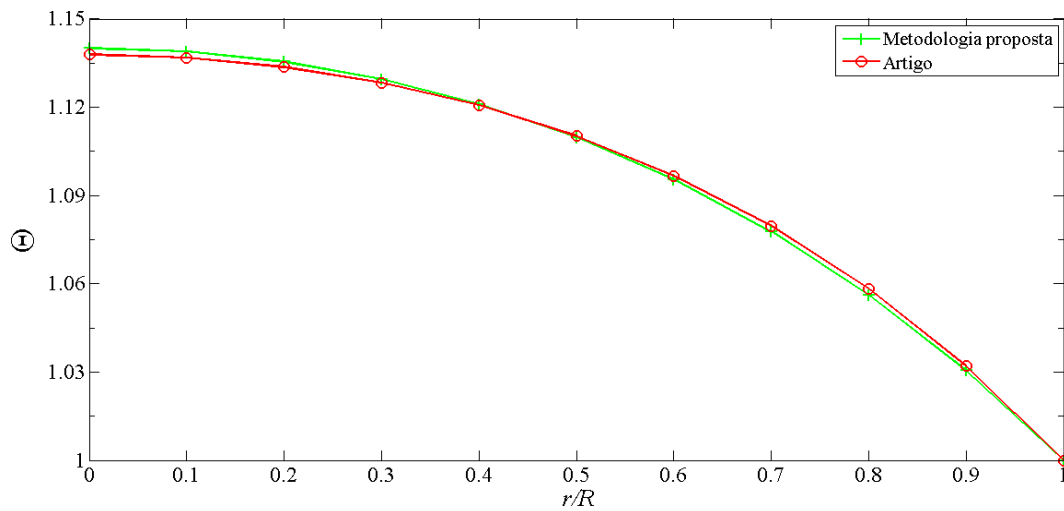


Figura 4.103: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 18.

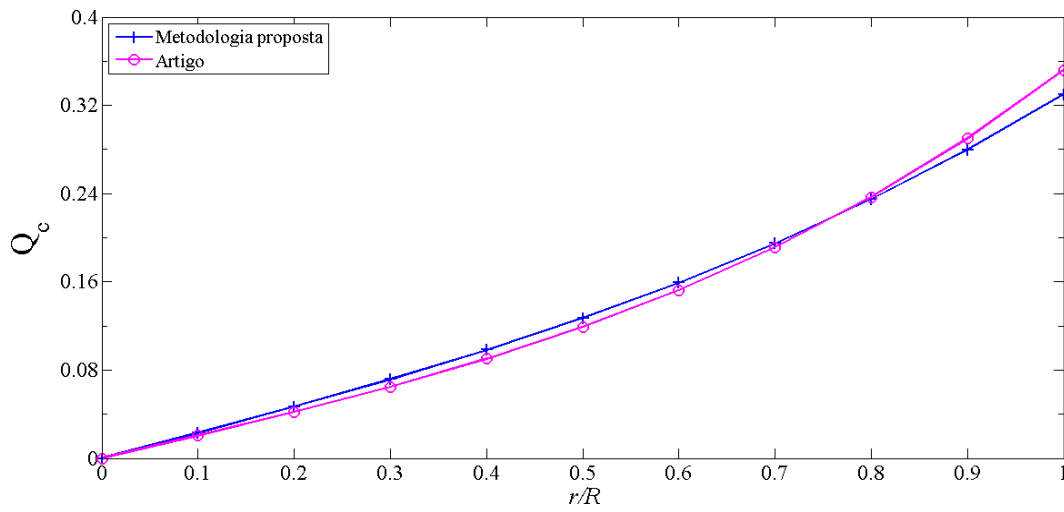


Figura 4.104: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 18.

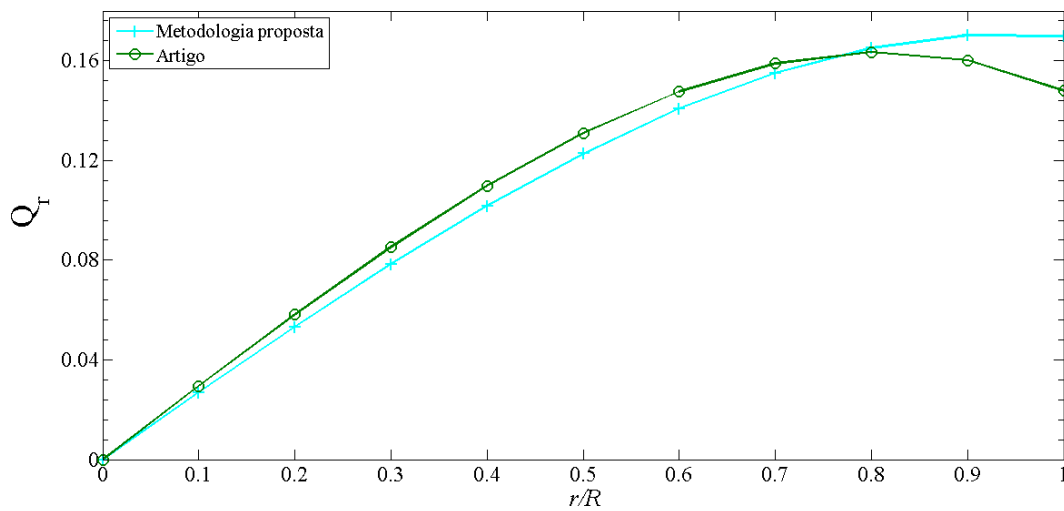


Figura 4.105: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 18.

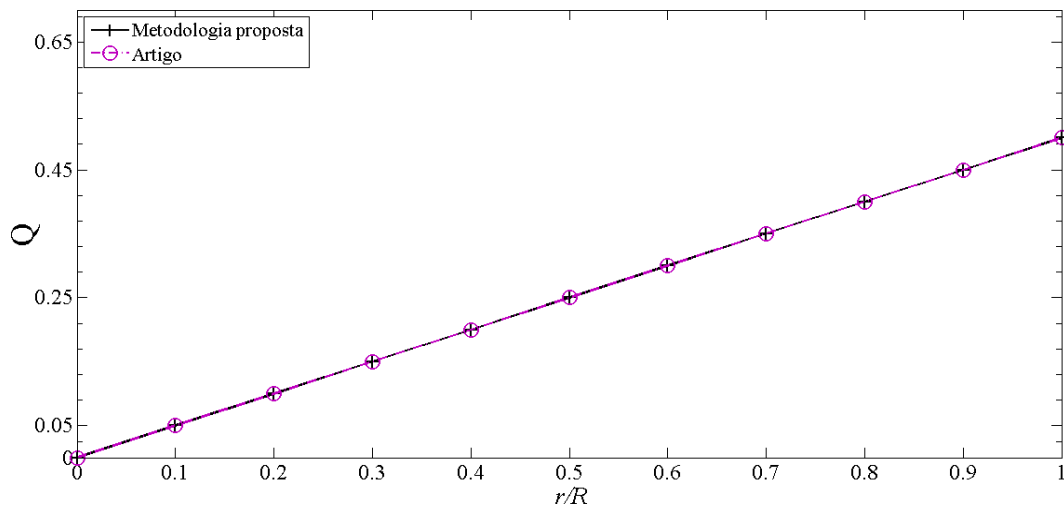


Figura 4.106: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 18.

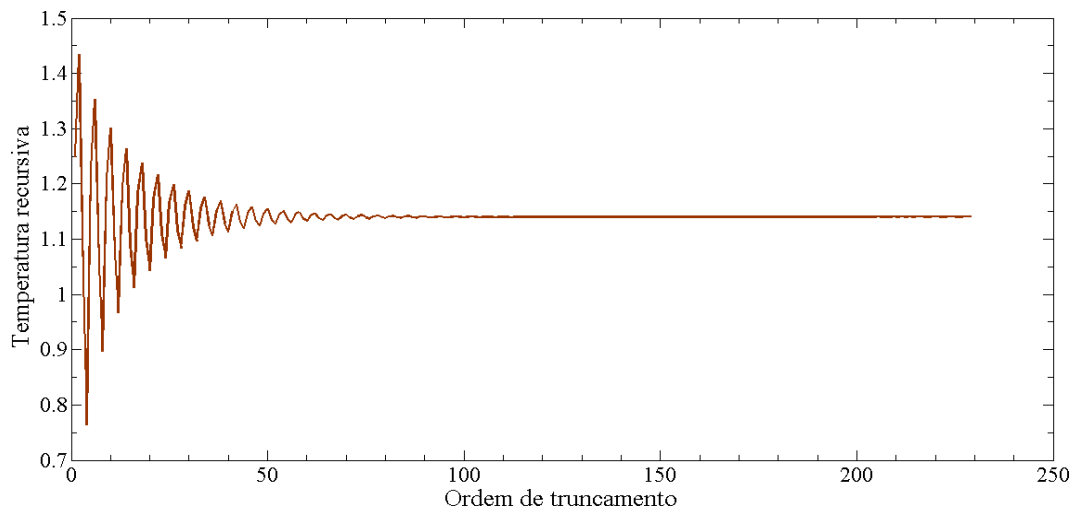


Figura 4.107: Profundidade da recursão finita para o problema 18.

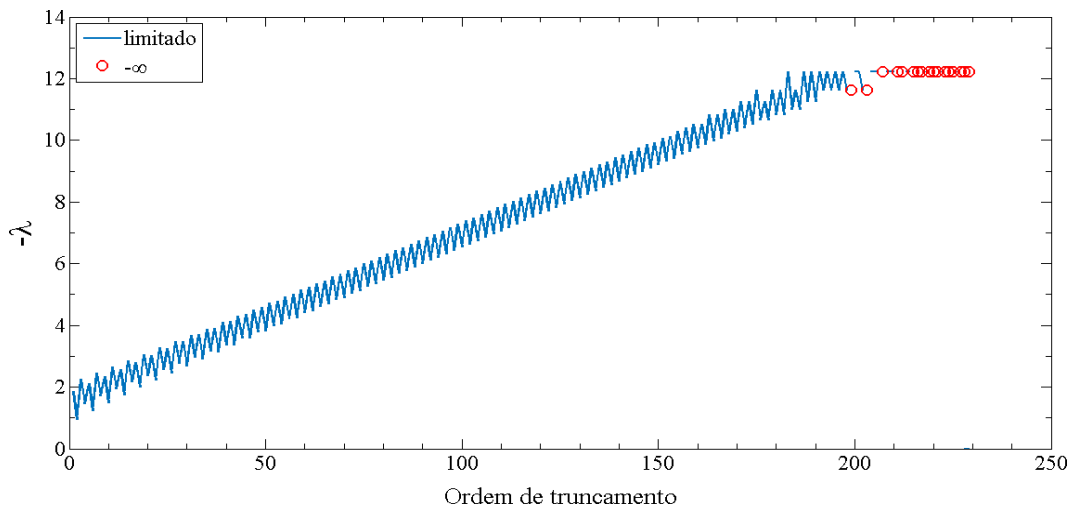


Figura 4.108: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 18.

Existe uma correspondência entre os resultados obtidos pela metodologia proposta e os dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1992], as Figuras 4.103, 4.104, 4.105 e 4.106 que pode ser confirmado nas Tabelas 4.12 e 4.13. Visto que, esta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Observa-se ainda que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras 4.98 e 4.99. O fluxo de calor total Q é linear constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação 4.10. Na Figura 4.107, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 6. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 229$, para o problema 6. Agora, a Figura 4.108 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 229$, note ainda que apesar do esquema recursivo apresenta um carácter oscilatório, a solução já é estável antes do truncamento $\mathcal{J} = 229$, dado que λ é negativo.

Note que para todos os problemas aqui estudados, todos os parâmetros listados na Tabela 4.1 influenciaram diretamente na obtenção da solução através da metodologia proposta.

Primeiramente, observa-se as influências dos parâmetros para os problemas 1 até 12, em que $H = 0$, isto é, sem geração de calor. Nos problemas 1 e 4, pode-se observar que a diferença entre os problemas estão nos valores do ω e a ordem de truncamento. Nota-se que

conforme ω diminui, as oscilações numéricas aumentam Figuras 4.5 e 4.23. Consequentemente, precisa-se de mais termos de Adomian para atingir a estabilidade numérica. Para os problemas 2, 7 e 10, observa-se as influências R e ω . Nota-se que à medida que R aumenta a temperatura também aumenta. Além disso, conforme ω diminui, as oscilações numéricas aumentam Figuras 4.11, 4.41 e 4.59. Assim sendo, para atingir a estabilidade numérica é mandatário mais de termos de Adomian. No que se refere aos problemas 3,5 e 9, nota-se as influências da ϵ e do ω . Para estes problemas nota-se que a temperatura aumenta para fora 4.13, 4.25 e 4.49. No problema 6, os parâmetros R , N_c e α influenciam diretamente na obtenção da solução. Para o problema 8, mostra-se a influência N_c , conforme N_c diminui a temperatura aumenta. No problema 11, mostra-se as influências ω e N_c . Neste problema, $\omega = 0$, o que significa que o meio absorve e emite radiação, mas não espalha. A solução deste problema é altamente não-linear. No entanto, utilizou-se $N_c = 0,5$ que implicou em poucos termos de Adomian para atingir a estabilidade numérica. Já no problema 12, mostra-se a influência do ω . Para este problema com $\omega = 0,99$ tem-se um meio altamente espalhador. Aqui, a temperatura torna-se independente do processo radiativo, ou seja, tem-se um perfil linear.

Por fim, observa-se as influências dos parâmetros para os problemas 13 até 18, no qual $H \neq 0$, isto é, tem-se geração de calor constante. Nos problemas 13 e 18, a ordem de truncamento foi inferior que nos demais casos e aqui os parâmetros que mais influenciaram foram ρ^d , N_c e α . Para os problemas 14, 15 e 16 existe maior influência de R , N_c , H e α . Nota-se que à medida que H aumenta a temperatura também aumenta. Além disso, para obter a estabilidade numérica para estes problemas foram necessários muitos termos de Adomian, ver as Figuras 4.83, 4.89 e 4.95. No problema 17 os parâmetros que mais influenciaram foram R e α . Todavia, não se pode esquecer da influência dos demais parâmetros como a emissividade ϵ que está correlacionada com a condição de contorno da intensidade de radiação e como o albedo de espalhamento simples ω , para os seis últimos problemas fixou-se $\omega = 0,9$ de acordo com o artigo [Siewert e Thomas Jr., 1992].

4.1 Correlação entre os Parâmetros

Nesta seção, apresenta-se uma correlação entre os parâmetros que foram apresentados na Tabela 4.1. Utilizou-se uma parametrização geométrica para mostrar estas cor-

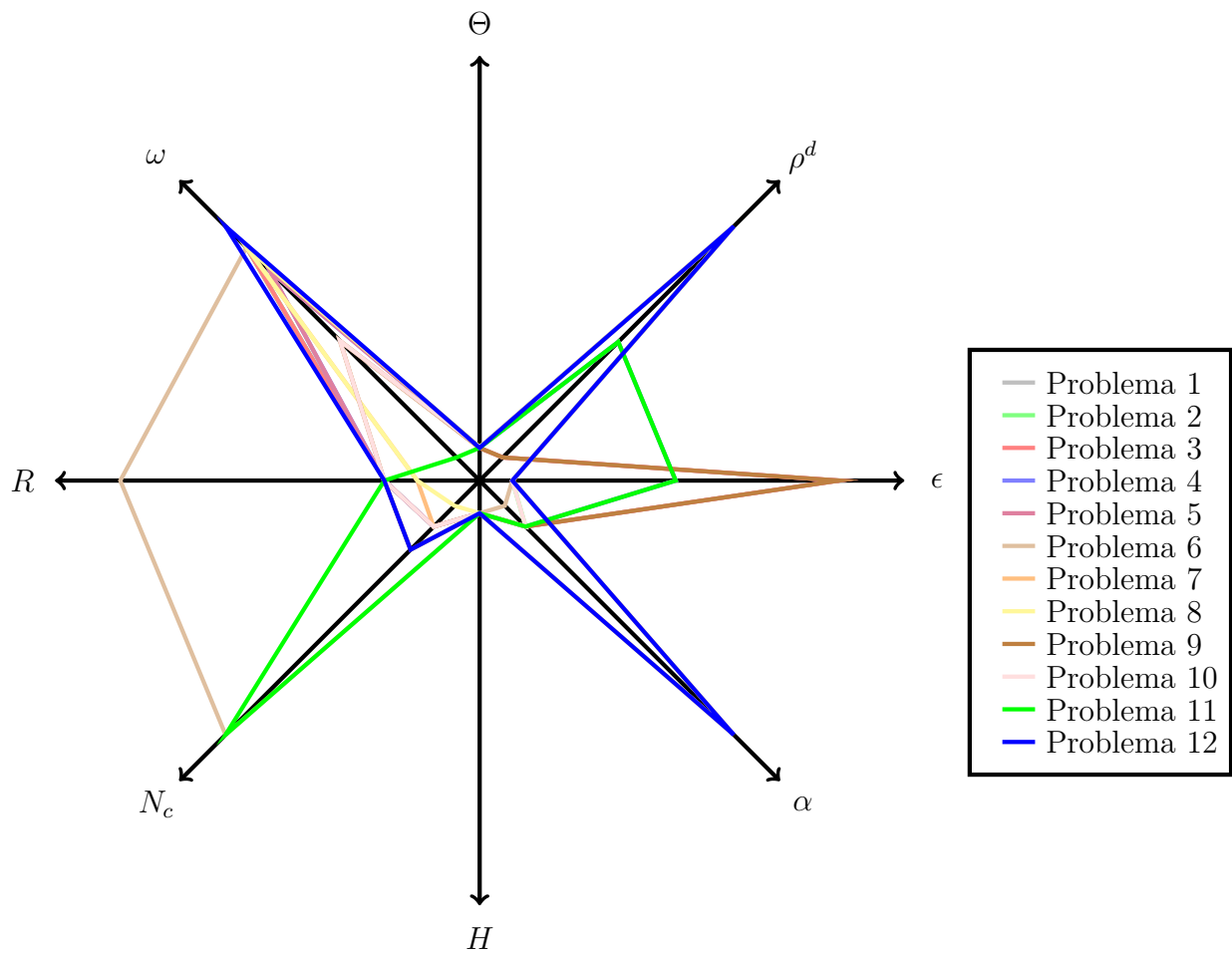


Figura 4.109: Correlação entre os parâmetros para os problemas 1 a 12

relações, uma vez que, foi observado nos problemas estudados as dependências entre os parâmetros. Por consequência, influenciaram diretamente na obtenção da solução. Na Figura 4.109, observam-se as correlações dos parâmetros para os problemas 1 até 12, em que $H = 0$. Note que à medida que aumentam os valores dos parâmetros formam-se as estruturas do tipo poligonais sobre os eixos. Ver os problemas 6, 9, 11 e 12. Na Figura 4.110, mostram-se as correlações dos parâmetros para os problemas 13 até 18, em que $H \neq 0$. Note que com o acréscimo de H a temperatura aumenta. Além disso, tem-se as estruturas do tipo poligonais sobre os eixos, evidenciando os valores dos parâmetros escolhidos na Tabela 4.1. Por fim, na Figura 4.110, mostram-se as estruturas do tipo poligonais que correlaciona os valores de máximo e de mínimo para os parâmetros ϵ , Θ , ω , R , N_c , H e α . Deste modo, de acordo com a Tabela 4.1, tem-se os problemas 9, 11, 12, 14, 15 e 17.

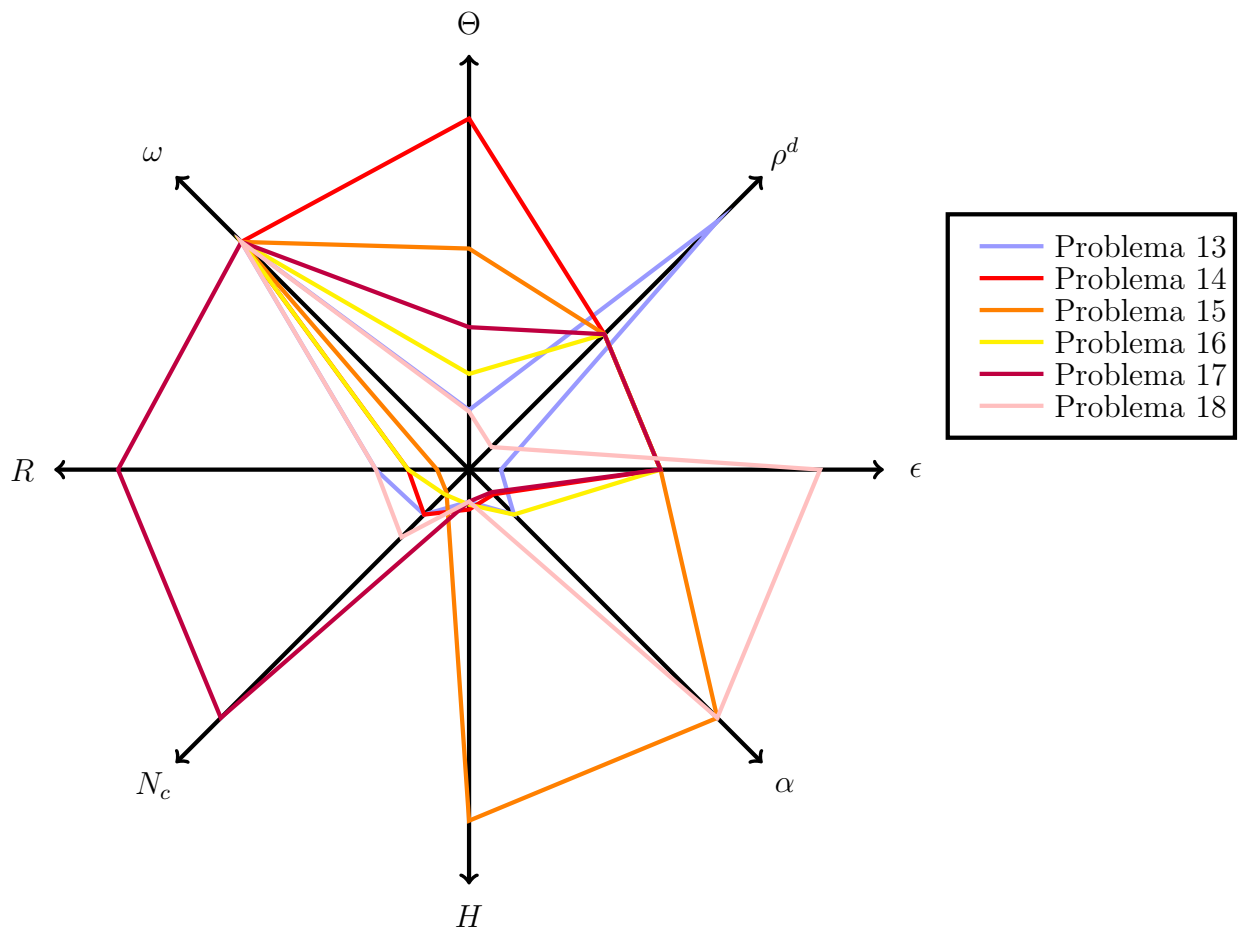


Figura 4.110: Correlação entre os parâmetros para os problemas 13 a 18.

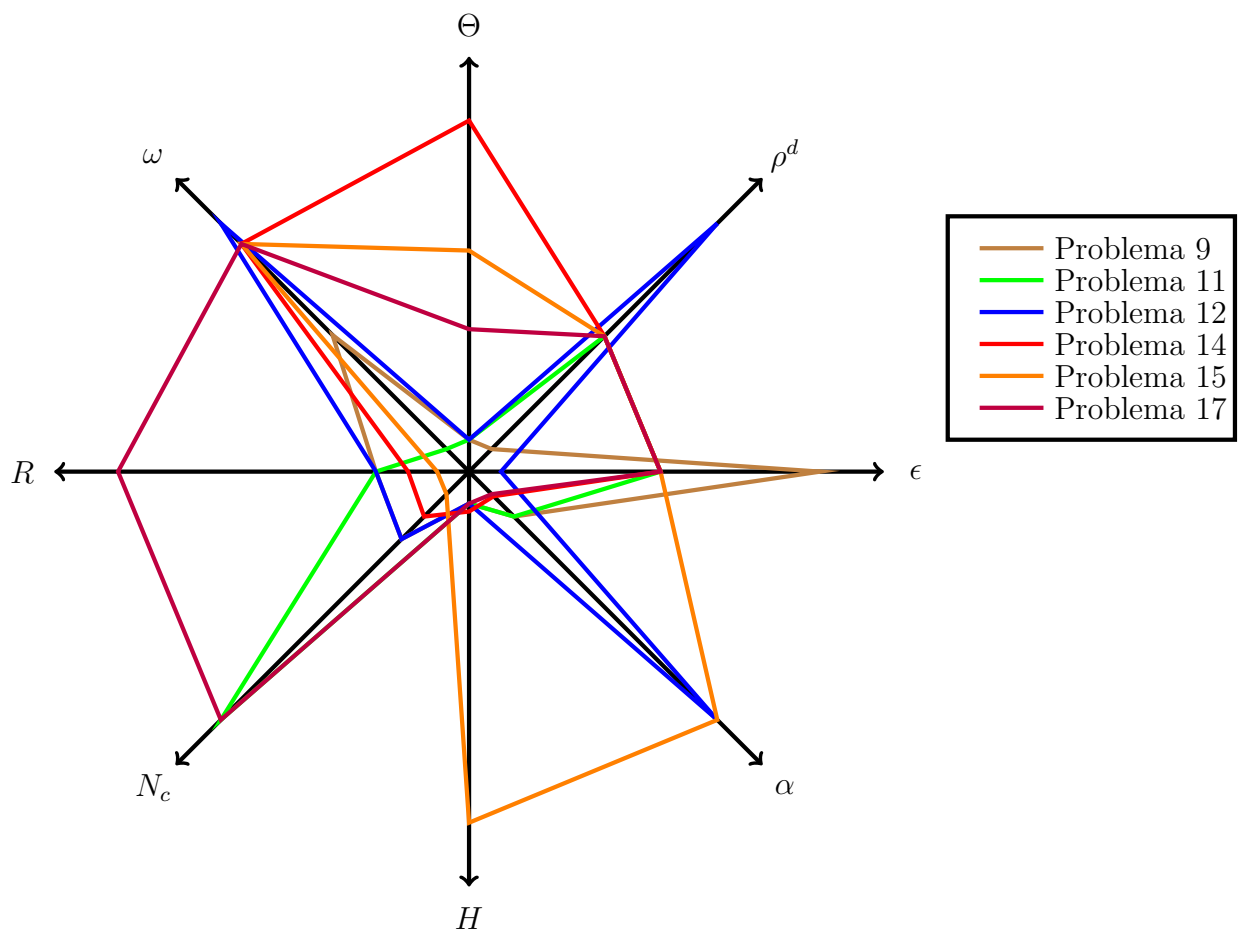


Figura 4.111: Correlação entre os parâmetros para os problemas 9, 11, 12, 14, 15 e 17.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho demonstrou um novo procedimento para resolver a equação de transferência radiativa condutiva em geometria cilíndrica, aproximada em forma de uma representação ordenada duplamente discreta, análoga às equações S_N . A solução desta equação permite simular o campo de radiação e temperatura, em conjunto com transporte de energia condutiva e radiativa proveniente do escape dos lançamentos de foguetes. O problema não linear original foi decomposto em um esquema recursivo de sistemas de equações similar ao método da decomposição descrito por Adomian. A inicialização da recursão é um sistema de equações lineares com solução conhecida. Todos os sistemas de equações subsequentes a serem resolvidos são do tipo linear, onde a não linearidade aparece como o termo fonte, porém contendo apenas termos com as soluções de todas as soluções anteriores. O esquema recursivo não é único e depende fortemente da inicialização da recursão. No presente trabalho, a convergência heurística por analogia a Lyapunov foi implementada. A convergência pode ser caótica, indiferente, ou estável, dependendo se $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$, respectivamente. O truncamento da recursão ocorre quando $\lambda \ll 0$ para todas as etapas de recursão subsequentes. Os vários testes mostraram que para não linearidades polinomiais, o esquema recursivo converge para uma profundidade aceitável de recursão. A metodologia apresentada é geral e universal, e é muito plausível que a mesma metodologia possa ser aplicada para problemas curvilíneos gerais. Para reforçar esta constatação, no apêndice B são apresentadas soluções para o caso esférico utilizando a mesma metodologia. Cumpre observar que o caso cilíndrico e o caso esférico têm topologias diferentes sendo o segundo compacto.

Do ponto de vista físico, escolheu-se um conjunto arbitrário de parâmetros, para o qual verificou-se a lei de conservação de energia como esperado. Além disso, considerou-se um parâmetro de correção para o esquema recursivo dado que sem esta correção o esquema apresenta propriedades problemáticas de convergência. Demonstrou-se quais são as correlações adequadas entre os parâmetros físicos tais como emissividade, refletividade, albedo, entre outros, que podem ser relacionados com a densidade ou perfil de concentração de poluentes nos gases de escape emitidos em lançamento de foguete. Tal relação é essencial, pois modelos de dispersão de poluentes existentes são caracterizados pela ausência de propriedades

térmicas da fonte, de modo que uma extensão do presente estudo nesse sentido poderá abrir caminhos para reduzir esta lacuna. Neste contexto, a presente abordagem é um primeiro passo nessa direção.

Como trabalhos futuros, pretende-se investigar quais parâmetros físicos que são de fato adequados para o problema em questão e fazer a prova rigorosa da convergência da solução proposta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abassy, T. A., El-Tawil, M. A., e Saleh, H. K. The solution of KdV and mKdV equations using adomian padé approximation, **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, vol. 5, pp. 327–339, 2004.

Adomian, G. A review of the decomposition method in applied mathematics, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 145, pp. 501–544, 1988.

Adomian, G. **Solving Frontier Problem of Physics: the Decomposition Method**. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.

Adomian, G. e Rach, R. Modified decomposition solution of nonlinear partial differential equations, **Applied Mathematics Letters**, vol. 5, pp. 29–30, 1992.

Babajee, D. K. R., Dauhoo, M. Z., Darvishi, M. T., e A., B. A note on the local convergence of iterative methods based on Adomian decomposition method and 3-node quadrature rule, **Applied Mathematics and Computation**, vol. 200, pp. 452–458, 2008.

Babolian, E. e Biazar, J. On the order of convergence of Adomian method, **Applied Mathematics and Computation**, vol. 130, pp. 383–387, 2002.

Barichello, L. B. e Vilhena, M. General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation, **Kerntechnik**, vol. 58, pp. 182–184, 1993.

BenSaïda, A. A practical test for noisy chaotic dynamics, **SoftwareX**, vol. 3–4, pp. 1–5, 2015.

Boichenko, V. A., Leonov, G. A., e Reitmann, V. **Dimension theory for ordinary differential**. Teubner, Stuttgart, 2005.

Brown, C. M. **Chaos and catastrophe theories: Quantitative applications in the social sciences**. Sage, Thousand Oaks, CA, 1995.

Buske, D., Vilhena, M. T., Bodmann, B., e Tirabassi, T. Analytical Model for Air Pollution in the Atmospheric Boundary Layer, **In: Dr. Mukesh Khare. (Org.). Air Pollution.**, vol. 1, pp. 39–58, 2012.

Case, K. M. Elementary Solution of Transport Equation and their Application, **Annals of Physics**, vol. 9, pp. 1–23, 1960.

Chandrasekhar, S. **The Radiative Transfer**. Oxford University Press, New York, 1950.

Cherruault, Y., Adomian, G., Abbaoui, K., e Rach, R. Further remarks on convergence of decomposition method, **International Journal of Bio-Medical Computing**, vol. 38, pp. 89–93, 1995.

El-Sayed, S. M. e Abdel-Aziz, M. R. A comparison of Adomian's decomposition method and wavelet-Galerkin method for solving integro-differential equations, **Applied Mathematics and Computation**, vol. 136, pp. 151–159, 2003.

Gonçalves, G. A., Orenço, G., Vilhena, M. T., e Graça, C. O. LTS_N solution of the adjoint neutron transport equation with arbitrary source for high order of quadrature in a homogeneous slab, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 29, pp. 561–569, 2002.

Gonçalves, G. A., Segatto, C. F., e Vilhena, M. T. The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 66, pp. 271–276, 2000.

Gonçalvez, T., Segatto, C. F., e Vilhena, M. T. A Closed form Solution for the One-group Time-depend Transport Equation in a Slab by the LTS_N method, **Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica - ENFIR**, 2007.

Goulart, P. P., 2010. “**Solução das Equações S_N de transferência radiativa-condutiva não lineares através dos métodos LTS_N e Decomposição de Adomian**”, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada – PPGMAP, Porto Alegre, Brasil.

Kima, M. Y. e Baek, S. W. Modeling of radiative heat transfer in an axisymmetric cylindrical enclosure with participating medium, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 90, pp. 377–388, 2005.

Kythe, P. K. e Schäferkötter, M. R. **Handbook of Computational Methods for Integration**. Chapman & Hall/CRC, USA, 2005.

Lesnic, D. Convergence of Adomian's decomposition method: periodic temperatures, **Computers and Mathematics with Applications**, vol. 44, pp. 13–24, 2002.

Lewis, E. E. e Miller Jr., W. F. **Computational Methods of Neutron Transport**. John Wiley & Sons, New York, 1984.

Li, H. Y. A Two-dimensional Cylindrical Inverse Source Problem in Radiative Transfer, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 69, pp. 403–414, 2000.

Longoni, G., 2004. “**Advanced Quadrature Sets, Acceleration and Preconditioning Techniques for The Discrete Ordinates Method in Parallel Computing Environments**”, Tese de doutorado, University of Florida, Nuclear and Radiological Engineering, Gainesville, Florida.

Mishra, S. C., Krishna, C. H., e Kim, M. Y. Analysis of Conduction and Radiation Heat Transfer in a 2-D Cylindrical Medium Using the Modified Discrete Ordinate Method and the Lattice Boltzmann Method, **Numerical Heat Transfer**, vol. 60, pp. 254–287, 2011.

Moreira, D. M., Trindade, L. B., Fisch, G., e Moraes, M. R. A multilayer model to simulate rocket exhaust clouds, **Journal of Aerospace Technology and Management**, vol. 3, pp. 41–52, 2011.

Oliveira, J. P., Cardona, A. V., e Vilhena, M. T. M. B. Solution of the one-dimensional time-dependent discrete ordinates problem in a slab by the spectral and LTS_N methods, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 29, pp. 13–20, 2002.

Ouedraogo, R. Z., Cherruault, Y., e Abbaoui, K. Convergence of Adomian's method applied to algebraic equations, **Kybernetes**, vol. 20, pp. 1298–1305, 2000.

Ozisik, M. N. **Radiative Transfer and Interaction with Conductions and Convection**. John Wiley & Sons Inc., New York, 1973.

Pazos, R. P. e Vilhena, M. T. Convergence of the LTS_N Method: Approach of semi-groups, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 30, pp. 77–86, 1999.

Pazos, R. P., Vilhena, M. T., e Hauser, E. B. Solution and study of two-dimensional nodal neutron transport equation, **In. Proceedings of 10th International Conference of Nuclear Engineering**, 2002.

Pazos, R. P., Vilhena, M. T., e Hauser, E. B. Advances in the solution of threedimensional nodal neutron transport equation, **In. 11th International Conference of Nuclear Engineering**, 2003.

Pomraning, G. C. **The Equations of Radiation Hydrodynamics**. Dover Publ. Inc., New York, 2005.

Segatto, C. F., Gonçalez, T. T., e Vilhena, M. T. An Analytical Solution for the Onedimensional Time-dependent S_N Transport Equation for Bounded and Unbounded Domain in Cartesian Geometry, **Kerntechnik**, vol. 75, pp. 53–57, 2010a.

Segatto, C. F., Vargas, R. M. F., V. M. T., e Bodmann, B. E. J. A Solution for the Non-linear S_N Radiative Conductive Problem in a Grey Plane-parallel Participating Medium, **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 49, pp. 1493–1499, 2010b.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T., e Gomes, M. G. The One-Dimensional LTS_N Solution in a Slab with High Degree of Quadrature, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 26, pp. 925–834, 1999.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T., e Gonçalez, T. T. On the Analytical Solution of the Neutron S_N Equation in a Rectangle Assuming an Exponential Exiting Angular Flux at Boundary, **International Journal of Nuclear Energy Science and Technology**, vol. 7, pp. 45–56, 2012.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T., e Tavares, S. S. The determination of radiant parameters by the LTS_N method, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 70, pp. 227–236, 2001.

Sen, K. K. e Wilson, S. J. **Radiative Transfer in Curved Media: Basic mathematical Methods for Radiative Transfer and Transport Problems in Participating Media of Spherical and Cylindrical Geometry**. World Scientific, Singapore, 1990.

Siewert, C. E. e Thomas Jr., J. R. On coupled conductive-radiative heat transfer problems in a sphere, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 46, pp. 63–72, 1991.

Siewert, C. E. e Thomas Jr., J. R. On coupled conductive-radiative heat transfer problems in a cylinder, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 48, pp. 227–236, 1992.

Tavares, L., 2000. “**Cálculo dos parâmetros superficiais de radiação pelo método LTS_N** ”, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica – PROMEC, Porto Alegre, Brasil.

Vargas, R. M. F. e Vilhena, M. T. A closed-form solution for the one-dimensional radiative conductive problem by the decomposition and LTS_N methods, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 92, pp. 121–127, 1998.

Vilhena, M. T. e Barichello, L. B. A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation, **Kerntechnik**, vol. 56, pp. 334–336, 1991.

Vilhena, M. T. M. B., Bodmann, B. E., e Segatto, C. F. Non-Linear Radiative-Conductive Heat Transfer in a Heterogeneous Gray Plane-Parallel Participating Medium, **In: Amimul Ahsan.(Org.) Heat Transfer: InTech**, vol. 1, pp. 177–196, 2011.

Wolf, A. Quantifying chaos with Lyapunov exponents, **In. Chaos**, 1986.

Xia, X., Tan, H., Yu, Q., Li, L., e Bao, Y. Three Dimensional Transient Coupled Radiative-Conductive Heat Transfer in Cylinders Filled with Semi-Transparent Media with Complicated Surface Characteristics, **Journal of Thermal Science**, vol. 4, pp. 241–249, 1995.

Zabadal, J. R., Barichello, L. B., e Vilhena, M. T. Solution of the Three-dimensional One-group Discrete Ordinates Problems by the LTS_N method, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 22, pp. 131–134, 1995.

APÊNDICE A- Resultados numéricos complementares do capítulo 4

Problema 1

Na Tabela A.1, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.1: Resultados da metodologia proposta para o problema 1.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,001137	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,001129	0,000161	-0,000161	0,000000
0,2	1,001105	0,000328	-0,000328	0,000000
0,3	1,001063	0,000510	-0,000510	0,000000
0,4	1,001001	0,000714	-0,000714	0,000000
0,5	1,000918	0,000949	-0,000949	0,000000
0,6	1,000809	0,001225	-0,001225	0,000000
0,7	1,000669	0,001555	-0,001555	0,000000
0,8	1,000493	0,001952	-0,001952	0,000000
0,9	1,000274	0,002436	-0,002436	0,000000
1	1,000000	0,003026	-0,003026	0,000000

Problema 2

Na Tabela A.2, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.2: Resultados da metodologia proposta para o problema 2.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,002596	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,002578	0,000367	-0,000367	0,000000
0,2	1,002522	0,000749	-0,000749	0,000000
0,3	1,002426	0,001164	-0,001164	0,000000
0,4	1,002286	0,001630	-0,002168	0,000000
0,5	1,002096	0,002168	-0,000949	0,000000
0,6	1,001529	0,002800	-0,002800	0,000000
0,7	1,001128	0,003555	-0,003555	0,000000
0,8	1,000625	0,004466	-0,004466	0,000000
0,9	1,000274	0,005574	-0,005574	0,000000
1	1,000000	0,006927	-0,006927	0,000000

Problema 3

Na Tabela A.3, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 1$, $\rho^d = 0$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.3: Resultados da metodologia proposta para o problema 3.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	0,999963	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	0,999963	-0,000006	0,000006	0,000000
0,2	0,999963	-0,000011	0,000011	0,000000
0,3	0,999965	-0,000018	0,000018	0,000000
0,4	0,999967	-0,000025	0,000025	0,000000
0,5	0,999969	-0,000034	0,000034	0,000000
0,6	0,999973	-0,000044	0,000044	0,000000
0,7	0,999977	-0,000056	0,000056	0,000000
0,8	0,999983	-0,000071	0,000071	0,000000
0,9	0,999990	-0,000090	0,000090	0,000000
1	1,000000	-0,000112	0,000112	0,000000

Problema 4

Na Tabela A.4, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,8$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.4: Resultados da metodologia proposta para o problema 4.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,001356	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,001349	0,000143	-0,000143	0,000000
0,2	1,001328	0,000299	-0,000299	0,000000
0,3	1,001289	0,000479	-0,000479	0,000000
0,4	1,001231	0,000699	-0,000699	0,000000
0,5	1,001148	0,000977	-0,000977	0,000000
0,6	1,001033	0,001337	-0,001337	0,000000
0,7	1,000877	0,001811	-0,001811	0,000000
0,8	1,000666	0,002438	-0,002438	0,000000
0,9	1,000382	0,003272	-0,003272	0,000000
1	1,000000	0,004386	-0,004386	0,000000

Problema 5

Na Tabela A.5, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 1$, $\rho^d = 0$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,8$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.5: Resultados da metodologia proposta para o problema 5.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	0,999942	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	0,999942	-0,000007	0,000007	0,000000
0,2	0,999943	-0,000015	0,000015	0,000000
0,3	0,999944	-0,000023	0,000023	0,000000
0,4	0,999947	-0,000034	0,000034	0,000000
0,5	0,999950	-0,000048	0,000048	0,000000
0,6	0,999954	-0,000065	0,000065	0,000000
0,7	0,999961	-0,000088	0,000088	0,000000
0,8	0,999970	-0,000118	0,000118	0,000000
0,9	0,999983	-0,000159	0,000159	0,000000
1	1,000000	-0,000213	0,000213	0,000000

Problema 6

Na Tabela A.6, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 5$, $N_c = 0,5$, $H = 0$, $\alpha = 0,1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.6: Resultados da metodologia proposta para o problema 6.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,002202	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,002189	0,000051	-0,000051	0,000000
0,2	1,002150	0,000104	-0,000104	0,000000
0,3	1,002083	0,000164	-0,000164	0,000000
0,4	1,001983	0,000234	-0,000234	0,000000
0,5	1,001844	0,000319	-0,000319	0,000000
0,6	1,001657	0,000428	-0,000428	0,000000
0,7	1,001406	0,000572	-0,000572	0,000000
0,8	1,001071	0,000766	-0,000766	0,000000
0,9	1,000618	0,001039	-0,001039	0,000000
1	1,000000	0,001431	-0,001431	0,000000

Problema 7

Na Tabela A.7, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,5$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 10$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.7: Resultados da metodologia proposta para o problema 7.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,001297	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,001286	0,000474	-0,000474	0,000000
0,2	1,001250	0,000954	-0,000954	0,000000
0,3	1,001190	0,001444	-0,001444	0,000000
0,4	1,001105	0,001950	-0,001950	0,000000
0,5	1,000995	0,002477	-0,002477	0,000000
0,6	1,000857	0,003032	-0,003032	0,000000
0,7	1,000690	0,003620	-0,003620	0,000000
0,8	1,000494	0,004249	-0,004249	0,000000
0,9	1,000264	0,004924	-0,004924	0,000000
1	1,000000	0,005654	-0,005654	0,000000

Problema 8

Na Tabela A.8, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,5$, $N_c = 0,005$, $H = 0$, $\alpha = 10$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.8: Resultados da metodologia proposta para o problema 8.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,003652	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,003635	0,000669	-0,000669	0,000000
0,2	1,003584	0,001407	-0,001407	0,000000
0,3	1,003492	0,002291	-0,002291	0,000000
0,4	1,003351	0,003412	-0,003412	0,000000
0,5	1,003145	0,004887	-0,004887	0,000000
0,6	1,002852	0,006869	-0,006869	0,000000
0,7	1,002443	0,009564	-0,009564	0,000000
0,8	1,001875	0,013252	-0,013252	0,000000
0,9	1,001088	0,018315	-0,018315	0,000000
1	1,000000	0,025276	-0,025276	0,000000

Problema 9

Na Tabela A.9, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,5$, $R = 1$, $N_c = 0,1$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.9: Resultados da metodologia proposta para o problema 9.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	0,999903	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	0,999904	-0,000008	0,000008	0,000000
0,2	0,999905	-0,000017	0,000017	0,000000
0,3	0,999907	-0,000028	0,000028	0,000000
0,4	0,999911	-0,000042	0,000042	0,000000
0,5	0,999916	-0,000062	0,000062	0,000000
0,6	0,999923	-0,000089	0,000089	0,000000
0,7	0,999934	-0,000126	0,000126	0,000000
0,8	0,999949	-0,000178	0,000178	0,000000
0,9	0,999970	-0,000250	0,000250	0,000000
1	1,000000	-0,000351	0,000351	0,000000

Problema 10

Na Tabela A.10, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,5$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.10: Resultados da metodologia proposta para o problema 10.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,003312	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,003305	0,000143	-0,000143	0,000000
0,2	1,003281	0,000317	-0,000317	0,000000
0,3	1,003236	0,000561	-0,000561	0,000000
0,4	1,003160	0,000926	-0,000926	0,000000
0,5	1,003038	0,001494	-0,001494	0,000000
0,6	1,002841	0,002388	-0,002388	0,000000
0,7	1,002530	0,003804	-0,003804	0,000000
0,8	1,002034	0,006052	-0,006052	0,000000
0,9	1,001248	0,009624	-0,009624	0,000000
1	1,000000	0,015296	-0,015296	0,000000

Problema 11

Na Tabela A.11, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,0$, $R = 1$, $N_c = 0,5$, $H = 0$, $\alpha = 1$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.11: Resultados da metodologia proposta para o problema 11.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,000683	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,000678	0,000092	-0,000092	0,000000
0,2	1,000664	0,000189	-0,000189	0,000000
0,3	1,000640	0,000295	-0,000295	0,000000
0,4	1,000604	0,000416	-0,000416	0,000000
0,5	1,000556	0,000557	-0,000557	0,000000
0,6	1,000492	0,000726	-0,000726	0,000000
0,7	1,000409	0,000932	-0,000932	0,000000
0,8	1,000303	0,001184	-0,001184	0,000000
0,9	1,000169	0,001496	-0,001496	0,000000
1	1,000000	0,001883	-0,001883	0,000000

Problema 12

Na Tabela A.12, apresenta-se os valores numéricos para, o perfil de temperatura $\Theta(r)$, o fluxo de calor condutivo $Q_c(r)$, o fluxo calor radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ avaliados para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,99$, $R = 1$, $N_c = 0,1$, $H = 0$, $\alpha = 10$ e considera-se r em unidades de r/R que varia entre 0 e 1 e para $N = 4$ direções.

Tabela A.12: Resultados da metodologia proposta para o problema 12.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	$Q(r)$
0	1,000313	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,000310	0,000060	-0,000060	0,000000
0,2	1,000301	0,000121	-0,000121	0,000000
0,3	1,000286	0,000182	-0,000182	0,000000
0,4	1,000265	0,000244	-0,000244	0,000000
0,5	1,000237	0,000307	-0,000307	0,000000
0,6	1,000203	0,000371	-0,000371	0,000000
0,7	1,000163	0,000438	-0,000438	0,000000
0,8	1,000116	0,000506	-0,000506	0,000000
0,9	1,000061	0,000577	-0,000577	0,000000
1	1,000000	0,000651	-0,000651	0,000000

APÊNDICE B- A equação de transferência radiativa condutiva em geometria esférica

Neste apêndice, apresenta-se a equação de transferência radiativa condutiva em geometria esférica. Primeiramente descreve-se o problema e em seguida apresenta-se a solução do problema utilizando a metodologia descrita no capítulo 3. Além disso, mostra-se o critério de convergência heurística nas soluções.

B.1 A equação de transferência radiativa condutiva em geometria esférica

Apresenta-se a equação de transferência radiativa condutiva em geometria esférica, e alguns conceitos físicos importantes para a derivação da mesma.

Considere o equilíbrio termodinâmico estabelecido em um meio, e o termo $S = j^e$ esta relacionado com a função de Planck e o coeficiente de absorção espectral [Ozisik, 1973], pelas relações 2.41 e 2.42. Além disso, assume que o meio é cinza 2.43, ou seja, independente da frequência ou de onda comprimento. Logo, a equação de transferência radiativa condutiva em geometria esférica simétrica unidimensional e estacionária, na forma adimensional [Ozisik, 1973], é dada por

$$\mu \frac{\partial \mathcal{I}^*(r, \xi)}{\partial r} + \frac{1 - \xi^2}{r} \frac{\partial \mathcal{I}^*(r, \xi)}{\partial \xi} + \mathcal{I}^*(r, \xi) = (1 - \omega(r)) \Theta^4(r) + \frac{\omega(r)}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{P}(\xi, \xi') \mathcal{I}^*(r, \xi') d\xi', \quad (\text{B.1})$$

para $r \in (0, R)$ e $\xi \in [-1, 1]$, sujeitas às condições de contorno simétricas, dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^*(0, \xi) &= \mathcal{I}^*(0, -\xi), \\ \mathcal{I}^*(R, \xi) &= \epsilon(R) \Theta^4(R) + 2\rho^d(R) \int_0^1 \mathcal{I}^*(R, \xi') \xi' d\xi', \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

para $r \in [0, R]$ e $\xi \in [0, 1]$. Em adição,

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} \Theta(r) + 2r \frac{d}{dr} \Theta(r) = \frac{1}{4\pi N_c} \frac{d}{dr} [r^2 q_r^*] - r^2 H, \quad (\text{B.3})$$

com as condições de contorno

$$\left. \frac{d}{dr} \Theta(r) \right|_{r=0} = 0 \quad \text{and} \quad \Theta(r)|_{r=R} = \Theta_B, \quad (\text{B.4})$$

onde $N_c = \frac{k\beta}{4\bar{\sigma}\bar{n}^2 T_r^3}$ é o parâmetro de radiação e condução, com k é a condutividade térmica, β o coeficiente extinção, $\bar{\sigma}$ a constante de Stefan-Boltzmann, \bar{n} o índice de refração, T_r é a temperatura de referência, $H = (k\beta^2 T_r)^{-1} \bar{h}$ é a geração de calor adimensional e \bar{h} é a geração de calor constante no meio. O fluxo radiativo adimensional é dado por

$$q_r^*(r) = 2\pi \int_{-1}^1 \mathcal{I}^*(r, \xi) \xi d\xi. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, tem-se o problema não linear acoplado pelas Equações B.1 e B.3 com as condições de contorno dadas por Equação B.2 e Equação B.4. Note ainda que, pode-se resolver a Equação B.3 usando B.4 para encontrar a temperatura adimensionalizada

$$\Theta(r) = \Theta_B + \frac{H}{6} (R^2 - r^2) - \frac{1}{4\pi N_c} \int_r^R q_r^*(r') dr'. \quad (\text{B.6})$$

B.2 A solução da equação de transferência radiativa condutiva em geometria esférica pelo método da decomposição

Utiliza-se a aproximação S_N como descrita no capítulo 3, com $\mathcal{I}_n^* \equiv \mathcal{I}^*(r, \xi_n)$. O método das ordenadas discretas S_N [Chandrasekhar, 1950; Lewis e Miller Jr., 1984] baseia-se na discretização da variável angular Ω em um conjunto enumerável de ângulos discretos, em termos de cossenos diretores. Em particular, para o problema de geometria esférica, apenas uma variável ξ é necessária para determinar a orientação do fóton. Consequentemente, utiliza-se apenas uma quadratura de Gauss-Legendre.

O conjunto de Equações B.1 e B.3 pode ser simplificada utilizando um conjunto enumerável de ângulos seguindo o método da colocação, que define o problema de transferência

radiativa condutiva em geometria esférica na aproximação S_N

$$\xi_n \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial r} + \left(\frac{1 - \xi_n^2}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_n} + \mathcal{I}_n^* = (1 - \omega(r)) \Theta^4(r) + \frac{\omega(r)}{2} \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^N \varpi_p \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}_p^* , \quad (\text{B.7})$$

e

$$\frac{d}{dr} \Theta(r) - \frac{d}{dr} \Theta(r) \Big|_{r=0} = \frac{1}{2N_c} \sum_{p=1}^N \varpi_p [\mathcal{I}_p^*(r) - \mathcal{I}_p^*(0)] . \quad (\text{B.8})$$

Aqui, n indica as direções discretas de ξ_n , a integração é efetuada ao longo $1 \leq n \leq N$. A Equação B.7 pode ser reescrita como

$$\xi_n \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial r} + \left(\frac{1 - \xi_n^2}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_n} + \mathcal{I}_n^* = \Upsilon(r, \xi_n) , \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\Upsilon(r, \xi_n) = (1 - \omega(r)) \Theta^4(r) + \frac{\omega(r)}{2} \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^N \varpi_p \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}_p^* .$$

Agora, fazendo-se a seguinte mudança de variável em

$$\xi_n \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial r} + \left(\frac{1 - \xi_n^2}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_n} , \quad (\text{B.10})$$

tomando-se como variável independente $\psi = r\xi_n$, para $1 \leq n \leq N$. Logo, as derivadas de ψ com respeito a r e ξ são

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \xi_n , \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_n} = r , \quad (\text{B.11})$$

para $1 \leq n \leq N$.

Assim, pode-se obter relação entre as derivadas em ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial r} &= \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} \xi_n \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} &= \left. \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n}, \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} r. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Substituindo-se as Equações B.12 e B.13 na Equação B.10, tem-se

$$\begin{aligned} \xi_n \left(\frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} \xi_n \right) + \left(\frac{1 - \xi_n^2}{r} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} r \right) &= \\ = \xi_n^2 \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} - \xi_n^2 \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \mathcal{X}} &= \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Logo, reescrevendo-se a Equação B.9 a partir de B.14, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial \psi} + \mathcal{I}_n^* = \Upsilon(\psi), \quad (\text{B.15})$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\xi_n} \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial r} + \mathcal{I}_n^* = (1 - \omega(r)) \Theta^4(r) + \frac{\omega(r)}{2} \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^N \varpi_p \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}_p^*. \quad (\text{B.16})$$

Assim, o novo problema para a transferência radiativa condutiva na geometria esférica na aproximação S_N é representada pelas seguintes equações

$$\frac{1}{\xi_n} \frac{\partial \mathcal{I}_n^*}{\partial r} + \mathcal{I}_n^* = (1 - \omega(r)) \Theta^4(r) + \frac{\omega(r)}{2} \sum_{l=0}^{\mathfrak{L}} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_n) \sum_{p=1}^N \varpi_p \mathcal{P}_l(\xi_p) \mathcal{I}_p^*, \quad (\text{B.17})$$

$$\left. \frac{d}{dr} \Theta(r) - \frac{d}{dr} \Theta(r) \right|_{r=0} = \frac{1}{2N_c} \sum_{p=1}^N \varpi_p [\mathcal{I}_p^*(r) - \mathcal{I}_p^*(0)], \quad (\text{B.18})$$

onde ξ_n são os pontos de avaliação, com $1 \leq n \leq N$. Sujeitas às condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n^*(0) &= -\mathcal{I}_{N-n+1}(0), \\ \mathcal{I}_{N-n+1}^*(R) &= \epsilon(R)\Theta^4(R) + 2\rho^d(R) \sum_{p=1}^{N/2} \varpi_p \mathcal{I}_p^*(R) \xi_p. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Note que a integral sobre a variável ξ do lado direito da Equação B.1 é substituída por um sistema de quadratura de Gauss-Legendre com peso $\sum_{p=1}^N \varpi_p = 1$.

Agora, com a finalidade de introduzir o método LTS_N , reescreve-se o sistema de Equações B.17 e B.18, como uma equação diferencial ordinária matricial de primeira ordem,

$$\mathbf{E} \frac{d}{dr} \mathbf{I} - \mathbf{F} \mathbf{I} = \mathbf{\Phi}, \quad (\text{B.20})$$

where \mathbf{E} é uma matriz diagonal, $\mathbf{E} = \text{diag}(1/\xi_1, \dots, 1/\xi_n)$ de ordem $N^2 \times N^2$, \mathbf{F} é uma matriz quadrada de mesma ordem que a \mathbf{E} com elementos

$$F_{i,j} = \begin{cases} 1 + \frac{\omega_j(r)}{2} \left[\sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_i) \mathcal{P}_l(\xi_j) \right] & \text{se } i = j \\ \frac{\omega_j(r)}{2} \left[\sum_{l=0}^{\xi} \beta_l \mathcal{P}_l(\xi_i) \mathcal{P}_l(\xi_j) \right] & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

e os termos não lineares

$$\mathbf{\Psi} = \left(\underbrace{(1 - \omega) \Theta^4, \dots, (1 - \omega) \Theta^4}_{N \text{ vezes}} \right)^T. \quad (\text{B.22})$$

O vetor de intensidade de radiação \mathbf{I} de ordem N^2 , é definido por

$$\mathbf{I} = \left(\mathcal{I}_1^*, \dots, \mathcal{I}_{\frac{N}{2}+1}^*, \dots, \mathcal{I}_N^* \right)^T. \quad (\text{B.23})$$

De acordo com a prescrição de Adomian [Adomian, 1988], a intensidade de radiação

é expandida através de uma série infinita conforme

$$\mathbf{I} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{Y}_{\ell} . \quad (\text{B.24})$$

Logo, reescreve-se a Equação B.20 como

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\mathbf{E} \frac{d}{dr} \mathbf{Y}_{\ell} - \mathbf{F} \mathbf{Y}_{\ell} \right) = ((1 - \omega(r)), \dots, (1 - \omega(r)))^T \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{A}_{\ell-1} (\{\mathbf{Y}_{\ell}\}_{\ell=0}^{\ell-1})}_{\Theta^4(r)} . \quad (\text{B.25})$$

Em ordem, para resolver o sistema de Equações B.25 de uma forma recursiva, a inicialização é escolhida por ser problema homogêneo, como

$$\mathbf{E} \frac{d}{dr} \mathbf{Y}_0 - \mathbf{F} \mathbf{Y}_0 = 0 ,$$

juntamente com as condições de contorno e, logo após, entra em um processo recursivo das equações para os componentes restantes \mathbf{Y}_{ℓ} ,

$$\mathbf{E} \frac{d}{dr} \mathbf{Y}_{\ell} - \mathbf{F} \mathbf{Y}_{\ell} = ((1 - \omega(r)), \dots, (1 - \omega(r)))^T \mathcal{A}_{\ell-1} (\{\mathbf{Y}_{\ell}\}_{\ell=0}^{\ell-1}) , \quad (\text{B.26})$$

com $\ell = 1, 2, \dots, \mathcal{J}$.

Agora, para resolver a Equação B.26 usa-se o método LTS_N , deste modo, aplica-se a transformada de Laplace sobre a variável radial r definida como

$$\mathbf{Y}_{\ell}(\bar{r}) = \mathcal{L} [\mathbf{Y}_{\ell}(r); r \rightarrow \bar{r}] , \quad (\text{B.27})$$

juntamente com as condições de contorno, obtém-se a solução

$$\mathbf{Y}_{\ell}(r) = \mathcal{L}^{-1}((\bar{r} \mathbf{I}_d - \mathbf{U}) \mathbf{Y}_{\ell}(0)) + \mathcal{L}^{-1}((\bar{r} \mathbf{I}_d - \mathbf{U}) \mathbf{E}^{-1} \bar{\Phi}(\bar{r})) , \quad (\text{B.28})$$

onde \mathcal{L}^{-1} denota o operador da transformada inversa de Laplace, \bar{r} é um parâmetro complexo, $\mathbf{U} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}$ e matriz \mathbf{U} pode ser decomposta em $\mathbf{U} = \boldsymbol{\chi} \mathcal{D} \boldsymbol{\chi}^{-1}$, com \mathcal{D} a matriz diagonal

com os autovalores distintos e $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ a matriz de vetores associados.

Em consequência, dos detalhes já observados no capítulo 3 sobre o método LTS_N , tem-se a solução geral B.25 para cada termo \mathbf{Y}_ℓ

$$\mathbf{Y}_\ell(r) = \boldsymbol{\mathcal{X}}e^{\mathcal{D}r}\boldsymbol{\mathcal{V}}^\ell + \boldsymbol{\mathcal{X}}e^{\mathcal{D}r}\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}*\mathbf{E}^{-1}((1-\omega(r)), \dots, (1-\omega(r)))^T \mathcal{A}_{\ell-1}, \quad (\text{B.29})$$

onde \mathbf{V}^ℓ são determinados a partir da aplicação das condições de contorno e com $\ell = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{J}$. A abordagem sobre a não linearidade devido à $\Theta^4(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{A}_\ell(\{\mathbf{Y}_\ell\}_{\ell=0}^{\ell-1})$, em que \mathcal{A}_ℓ são polinômios de Adomian, já foi mostrada no capítulo 3. Conjuntamente utiliza-se o critério de convergência heurística (3.65), a fim de garantir a confiabilidade ao método da decomposição.

B.3 Resultados numéricos da equação de transferência radiativa condutiva em geometria esférica

Apresentam-se os resultados obtidos a partir de alguns parâmetros físicos do problema, as Equações B.1–B.4. Estes resultados numéricos serão comparados com o artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991]. Por essa razão, avalia-se o comportamento da temperatura adimensionalizada $\Theta(r)$ e dos fluxos de calor radiativo $Q_r(r)$, condutivo $Q_c(r)$ e total $Q(r)$:

$$Q_r(r) = \frac{1}{4\pi N_c} q_r^*(r), \quad (\text{B.30})$$

$$Q_c(r) = \frac{r}{3}H - \frac{1}{4\pi N_c} q_r^*(r) \quad (\text{B.31})$$

e

$$Q(r) = \frac{r}{3}H. \quad (\text{B.32})$$

Todas as avaliações que seguem são baseados no conjunto de parâmetros dados na Tabela B.1, considerou-se o espalhamento isotrópico, ou seja, $\mathfrak{L} = 0$ e r em unidade de r/R

que varia entre 0 e 1 para os problemas 1 até 6. Além disso, considerou-se $N = 8$ direções para todos os problemas na Tabela B.1.

Tabela B.1: Parâmetros para diferentes problemas.

Problema	ϵ	ρ^d	Θ_B	ω	R	N_c	H	α	Ordem de truncamento
1	0,8	0,2	1	0,9	1	0,05	1,5	1	191
2	0,9	0,1	1	0,9	0,5	0,05	100	1	906
3	0,9	0,1	1	0,9	0,05	0,0005	4000	10	1358
4	0,9	0,1	1	0,9	0,5	0,005	40	1	4877
5	0,9	0,1	1	0,9	5	0,5	0,4	0,01	2821
6	1	0	1	0,9	5	0,1	1	0,01	53027

Problema 1

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,8$, $\rho^d = 0,2$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 1$, $N_c = 0,05$, $H = 1,5$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991]. Além disso, os resultados são ilustrados, nas Figuras B.1, B.2, B.3 e B.4, também apresenta-se nas Figuras B.5 e B.6, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

Tabela B.2: Resultados da metodologia proposta para o problema 1.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,113396	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,112510	$1,77100 \times 10^{-2}$	$3,22900 \times 10^{-2}$	$5,00000 \times 10^{-2}$
0,2	1,109825	$3,59880 \times 10^{-2}$	$6,40120 \times 10^{-2}$	$1,00000 \times 10^{-1}$
0,3	1,105256	$5,54120 \times 10^{-2}$	$9,45880 \times 10^{-2}$	$1,50000 \times 10^{-1}$
0,4	1,098656	$7,65880 \times 10^{-2}$	$1,23410 \times 10^{-1}$	$2,00000 \times 10^{-1}$
0,5	1,089819	$1,00150 \times 10^{-1}$	$1,49850 \times 10^{-1}$	$2,50000 \times 10^{-1}$
0,6	1,078472	$1,26790 \times 10^{-1}$	$1,73210 \times 10^{-1}$	$3,00000 \times 10^{-1}$
0,7	1,064273	$1,57210 \times 10^{-1}$	$1,92790 \times 10^{-1}$	$3,50000 \times 10^{-1}$
0,8	1,046803	$1,92190 \times 10^{-1}$	$2,07810 \times 10^{-1}$	$4,00000 \times 10^{-1}$
0,9	1,025570	$2,32490 \times 10^{-1}$	$2,17510 \times 10^{-1}$	$4,50000 \times 10^{-1}$
1	1,000000	$2,78910 \times 10^{-1}$	$2,21090 \times 10^{-1}$	$5,00000 \times 10^{-1}$

Tabela B.3: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 1.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,12138	0,0	0,0	0,0
0,1	1,12062	$1,52369 \times 10^{-2}$	$3,47631 \times 10^{-2}$	$5,0 \times 10^{-2}$
0,2	1,11830	$3,13948 \times 10^{-2}$	$6,86052 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-1}$
0,3	1,11428	$4,94546 \times 10^{-2}$	$1,00545 \times 10^{-1}$	$1,5 \times 10^{-1}$
0,4	1,10831	$7,05177 \times 10^{-2}$	$1,29482 \times 10^{-1}$	$2,0 \times 10^{-1}$
0,5	1,10003	$9,58660 \times 10^{-2}$	$1,54134 \times 10^{-1}$	$2,5 \times 10^{-1}$
0,6	1,08894	$1,27020 \times 10^{-1}$	$1,72980 \times 10^{-1}$	$3,0 \times 10^{-1}$
0,7	1,07438	$1,65783 \times 10^{-1}$	$1,84217 \times 10^{-1}$	$3,5 \times 10^{-1}$
0,8	1,05546	$2,14270 \times 10^{-1}$	$1,85730 \times 10^{-1}$	$4,0 \times 10^{-1}$
0,9	1,03112	$2,74873 \times 10^{-1}$	$1,75127 \times 10^{-1}$	$4,5 \times 10^{-1}$
1	1,0	$3,50169 \times 10^{-1}$	$1,49831 \times 10^{-1}$	$5,0 \times 10^{-1}$

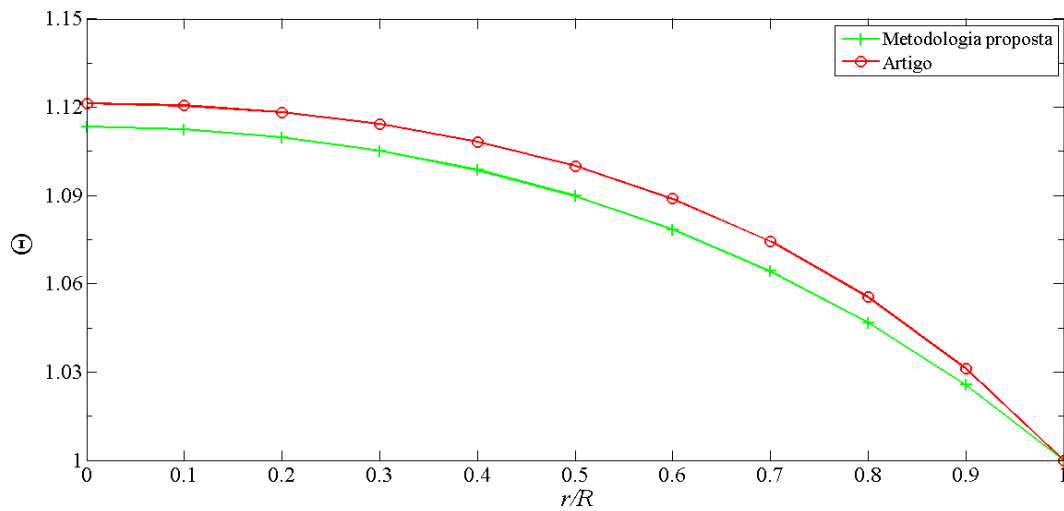


Figura B.1: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.

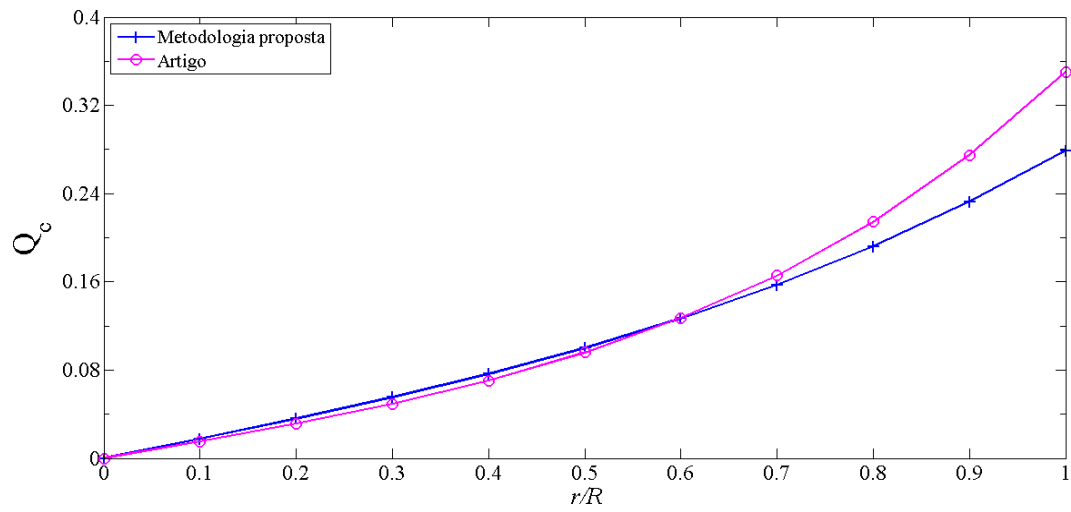


Figura B.2: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.

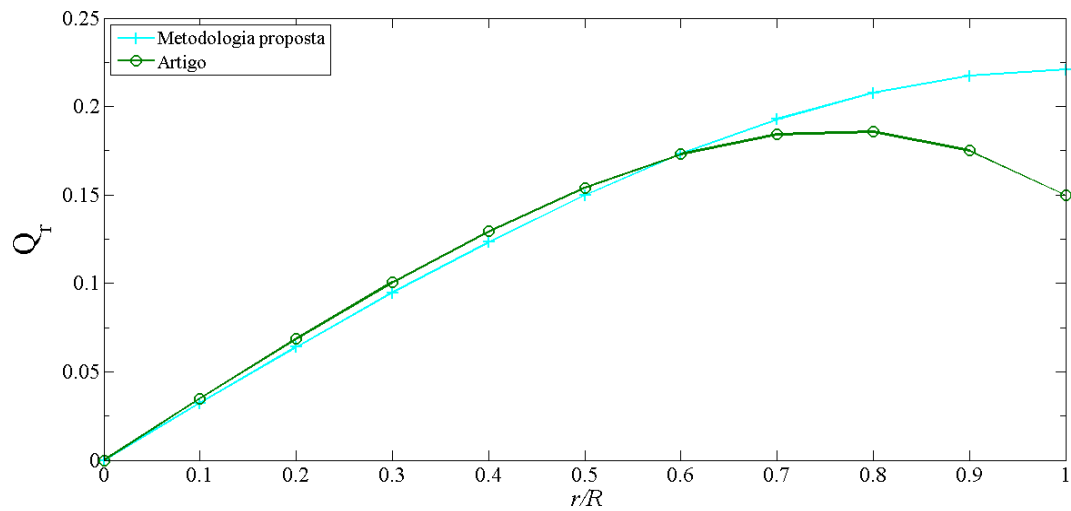


Figura B.3: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.

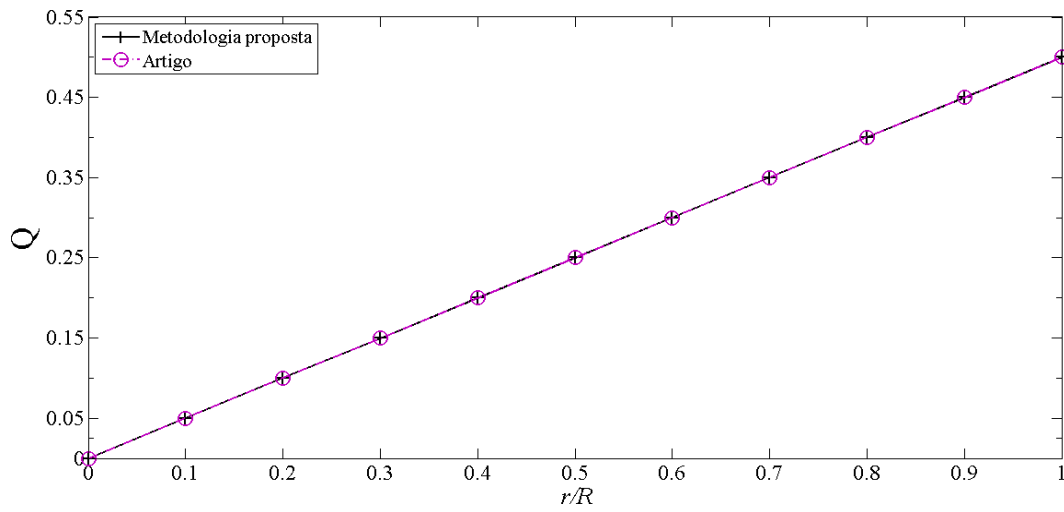


Figura B.4: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 1.

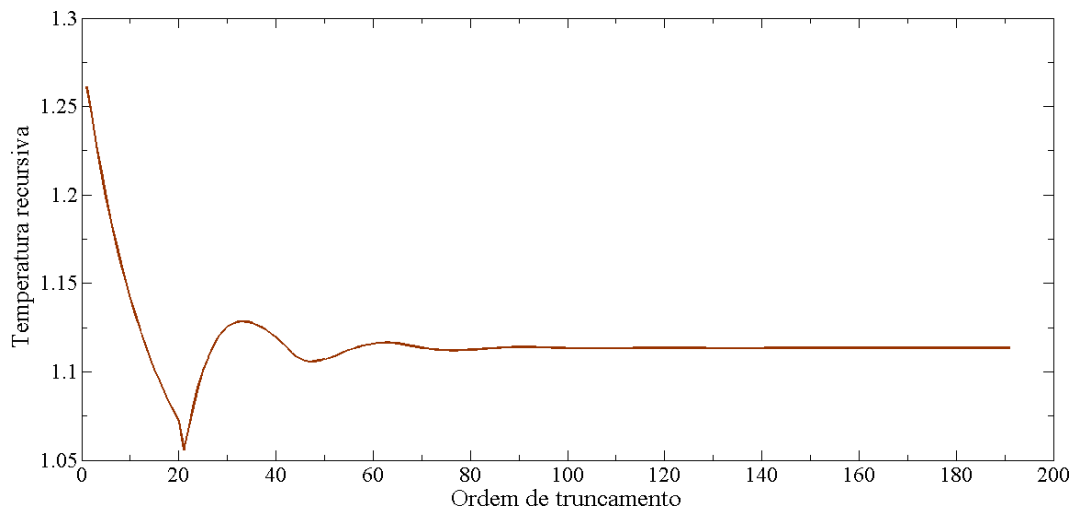


Figura B.5: Profundidade da recursão finita para o problema 1.

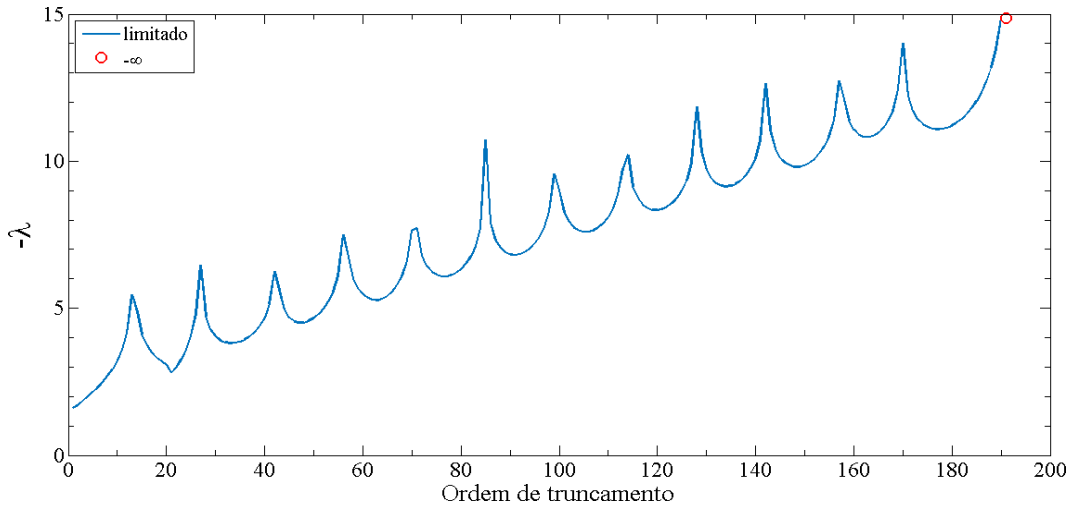


Figura B.6: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 1.

Pode-se observar nas Figuras B.1, B.2, B.3 e B.4 que existe uma semelhança entre os resultados comparados com a metodologia proposta e o artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991], esta semelhança é confirmada nas Tabelas B.2 e B.3. Visto que, esta diferença deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Outro fato a ser observado é que o fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras B.2 e B.3. Conseqüentemente, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação B.32. Na Figura B.5, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 1. Emprega-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 191$, para o problema 1. Já na Figura B.6 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 191$.

Problema 2

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,5$, $N_c = 0,05$, $H = 100$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991]. Estes resultados são

ilustrados, nas Figuras B.7, B.8, B.9 e B.10, também apresenta-se nas Figuras B.11 e B.12, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

Tabela B.4: Resultados da metodologia proposta para o problema 2.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	2,598599	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	2,590463	$3,254570 \times 10^{-1}$	1,341210	1,666667
0,2	2,565119	$6,883760 \times 10^{-1}$	2,644957	3,333333
0,3	2,519709	1,128114	3,871886	5,000000
0,4	2,449339	1,686822	4,979844	6,666666
0,5	2,346969	2,408134	5,925199	8,333333
0,6	2,203465	3,332217	6,667783	$1,000000 \times 10^{+1}$
0,7	2,008007	4,486318	7,180348	$1,166667 \times 10^{+1}$
0,8	1,749047	5,872295	7,461038	$1,333333 \times 10^{+1}$
0,9	1,415818	7,457053	7,542947	$1,500000 \times 10^{+1}$
1	1,000000	9,175883	7,490784	$1,666667 \times 10^{+1}$

Tabela B.5: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 2.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	2,62513	0,0	0,0	0,0
0,1	2,62062	$1,83096 \times 10^{-1}$	1,48357	1,66667
0,2	2,60618	$4,04520 \times 10^{-1}$	2,92881	3,33333
0,3	2,57877	$7,10759 \times 10^{-1}$	4,28924	5,00000
0,4	2,53265	1,16486	5,50181	6,65667
0,5	2,45839	1,85365	6,47968	8,33333
0,6	2,34153	2,88826	7,11174	$1,00000 \times 10^{+1}$
0,7	2,16183	4,38524	7,28143	$1,16667 \times 10^{+1}$
0,8	1,89410	6,41222	6,92111	$1,33333 \times 10^{+1}$
0,9	1,51276	8,90332	6,09668	$1,50000 \times 10^{+1}$
1	1,0	$1,16178 \times 10^{+1}$	5,04885	$1,66667 \times 10^{+1}$

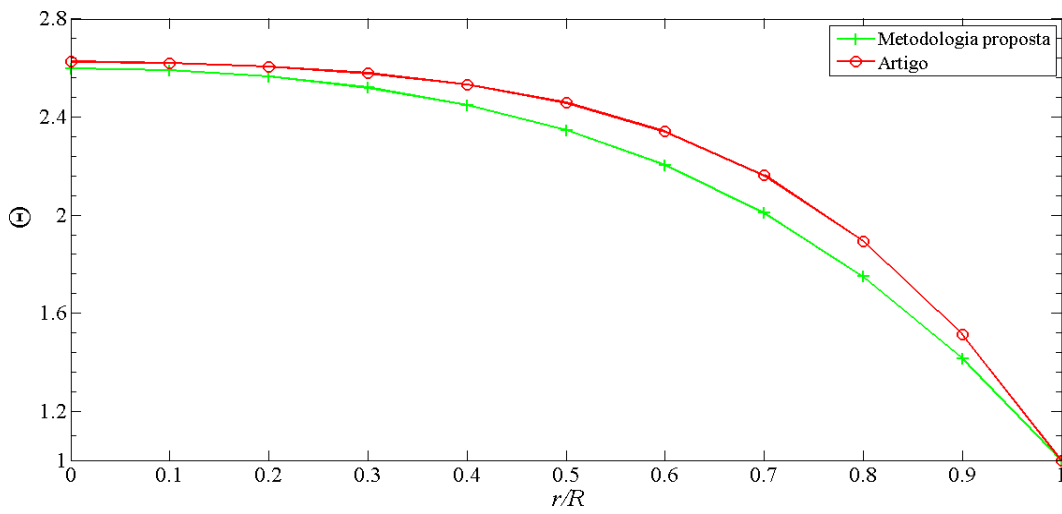


Figura B.7: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.

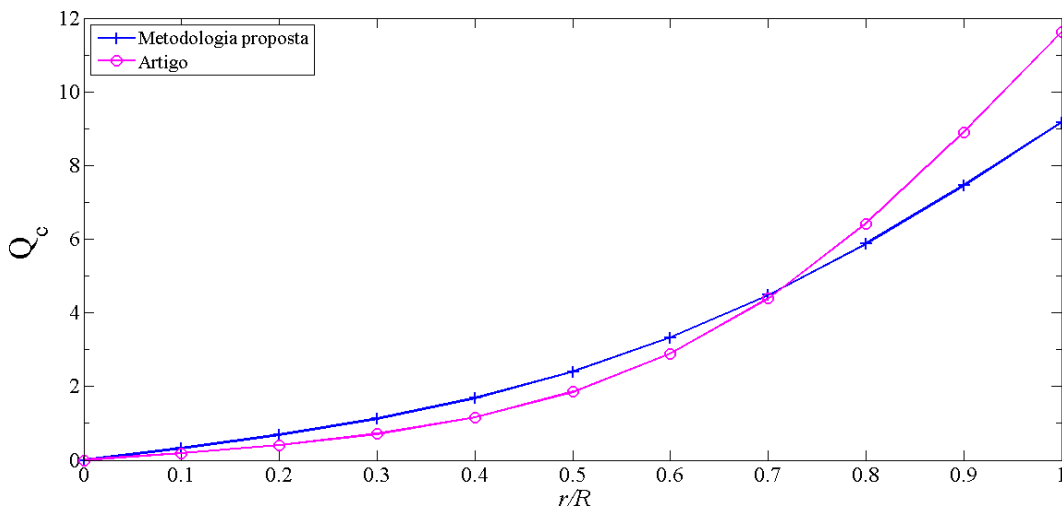


Figura B.8: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.

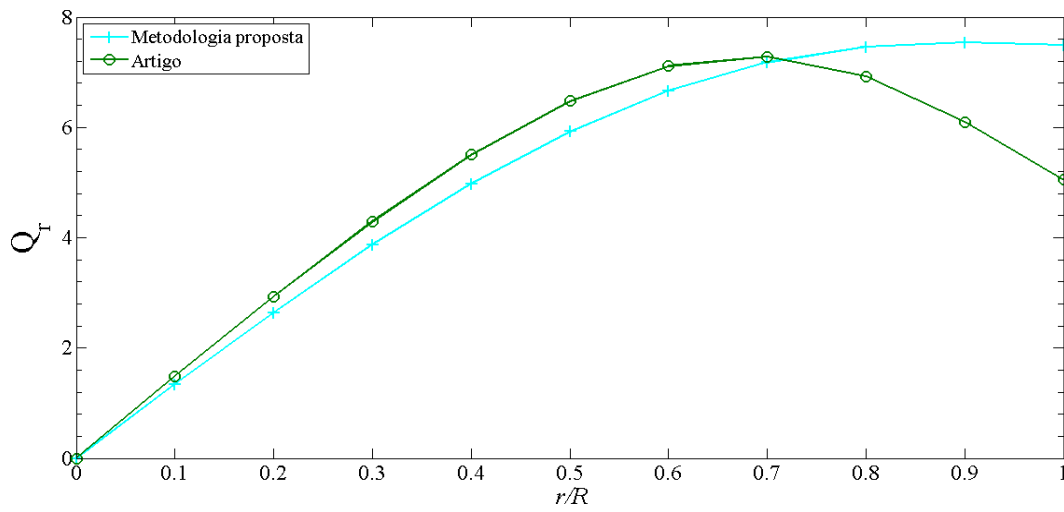


Figura B.9: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.

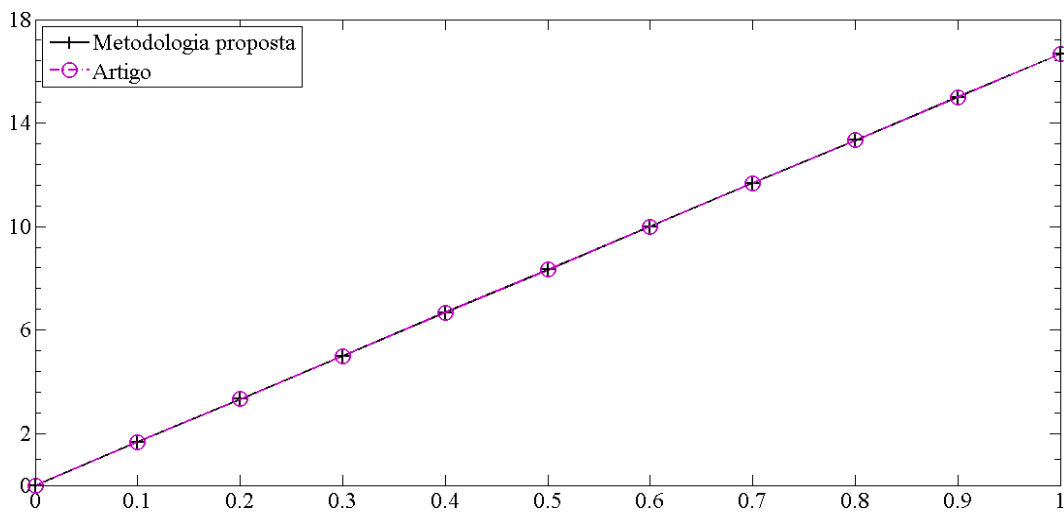


Figura B.10: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 2.

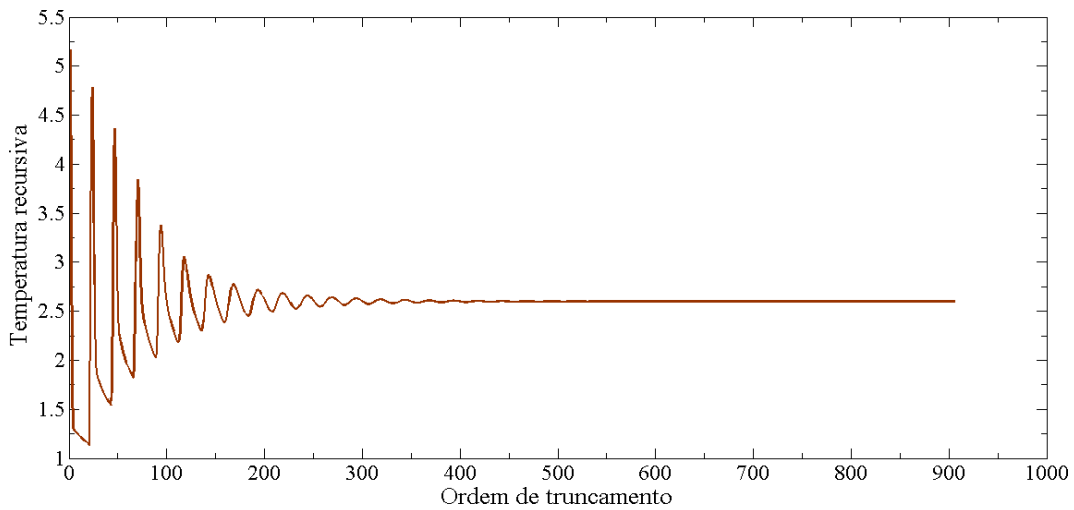


Figura B.11: Profundidade da recursão finita para o problema 2.

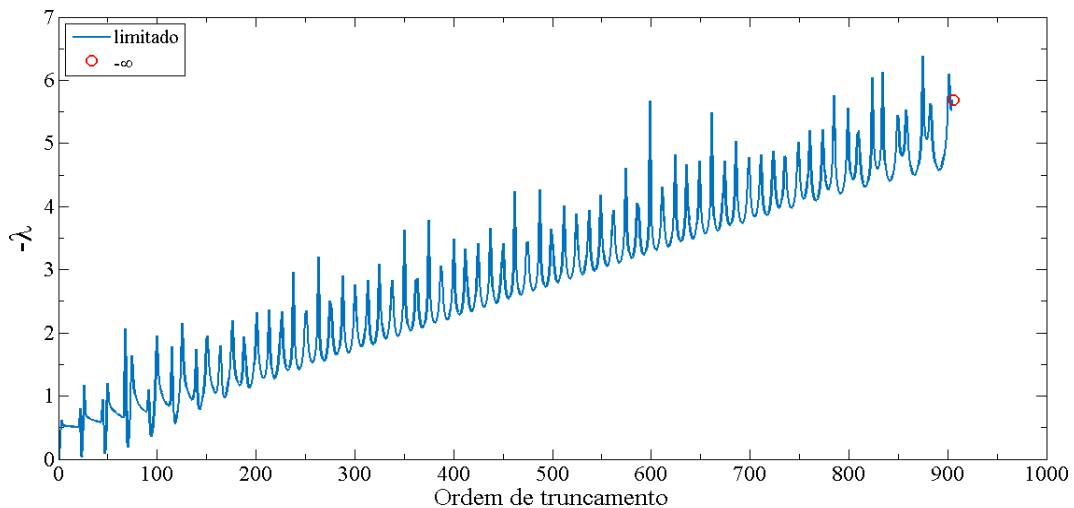


Figura B.12: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 2.

Existe uma correspondência entre os resultados obtidos pela metodologia proposta e os dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1991], as Figuras B.7, B.8, B.9 e B.10 que pode ser confirmado nas Tabelas B.4 e B.5. A diferença nas soluções deve-se ao fato de metodologias distintas adotados para obter a solução do problema. Outro fato a ser observado é que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras B.8 e B.9. Logo, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação B.32. Na Figura B.11, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 2. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte

últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 906$, para o problema 2. Agora, a Figura B.12 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 906$.

Problema 3

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,05$, $N_c = 0,0005$, $H = 4000$, $\alpha = 10$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991]. Estes resultados são ilustrados, nas Figuras B.13, B.14, B.15 e B.16, além disso, apresenta-se a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, as Figuras B.17 e B.18, respectivamente.

Tabela B.6: Resultados da metodologia proposta para o problema 3.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,900810	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,894037	2,704729	3,961937	6,666667
0,2	1,873411	5,532192	7,801141	$1,333333 \times 10^{+1}$
0,3	1,838020	8,602303	$1,1397697 \times 10^{+1}$	$2,000000 \times 10^{+1}$
0,4	1,786371	$1,2028082 \times 10^{+1}$	$1,4638585 \times 10^{+1}$	$2,666667 \times 10^{+1}$
0,5	1,716440	$1,5909275 \times 10^{+1}$	$1,7424058 \times 10^{+1}$	$3,333333 \times 10^{+1}$
0,6	1,625760	$2,0323225 \times 10^{+1}$	$1,9676775 \times 10^{+1}$	$4,000000 \times 10^{+1}$
0,7	1,511560	$2,5313617 \times 10^{+1}$	$2,1353049 \times 10^{+1}$	$4,666667 \times 10^{+1}$
0,8	1,370966	$3,0879394 \times 10^{+1}$	$2,2453939 \times 10^{+1}$	$5,333333 \times 10^{+1}$
0,9	1,201232	$3,6968046 \times 10^{+1}$	$2,3031954 \times 10^{+1}$	$6,000000 \times 10^{+1}$
1	1,000000	$4,3478643 \times 10^{+1}$	$2,3188024 \times 10^{+1}$	$6,666667 \times 10^{+1}$

Tabela B.7: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 3.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,95215	0,0	0,0	0,0
0,1	1,94668	2,20633	4,46034	6,66667
0,2	1,92976	4,60828	8,72506	$1,33333 \times 10^{+1}$
0,3	1,89993	7,40913	$1,25909 \times 10^{+1}$	$2,00000 \times 10^{+1}$
0,4	1,85465	$1,08231 \times 10^{+1}$	$1,58436 \times 10^{+1}$	$2,66667 \times 10^{+1}$
0,5	1,79031	$1,50690 \times 10^{+1}$	$1,82644 \times 10^{+1}$	$3,33333 \times 10^{+1}$
0,6	1,70224	$2,03477 \times 10^{+1}$	$1,96523 \times 10^{+1}$	$4,00000 \times 10^{+1}$
0,7	1,58487	$2,67992 \times 10^{+1}$	$1,98674 \times 10^{+1}$	$4,66667 \times 10^{+1}$
0,8	1,43225	$3,44416 \times 10^{+1}$	$1,88917 \times 10^{+1}$	$5,33333 \times 10^{+1}$
0,9	1,23873	$4,31123 \times 10^{+1}$	$1,68877 \times 10^{+1}$	$6,00000 \times 10^{+1}$
1	1,0	$5,24539 \times 10^{+1}$	$1,42127 \times 10^{+1}$	$6,66667 \times 10^{+1}$

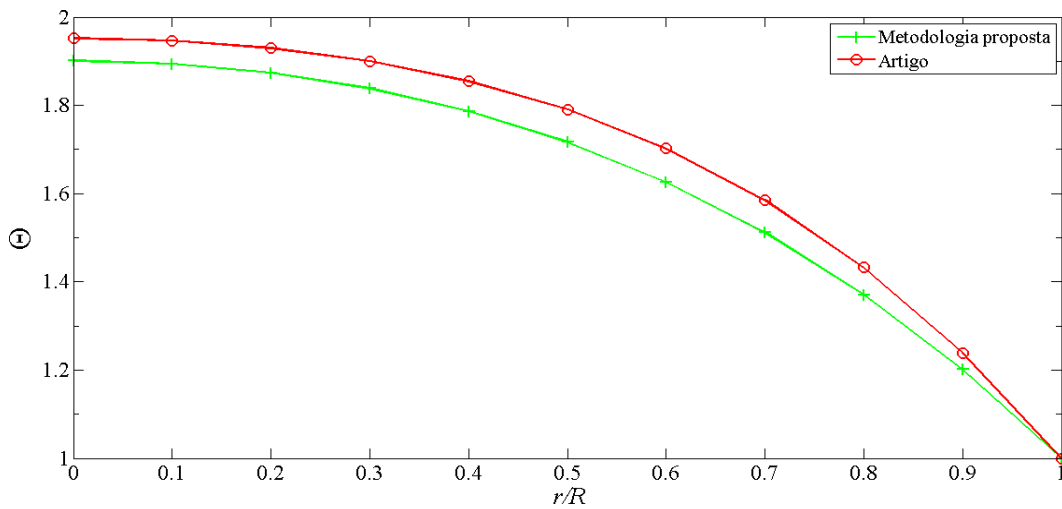


Figura B.13: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.

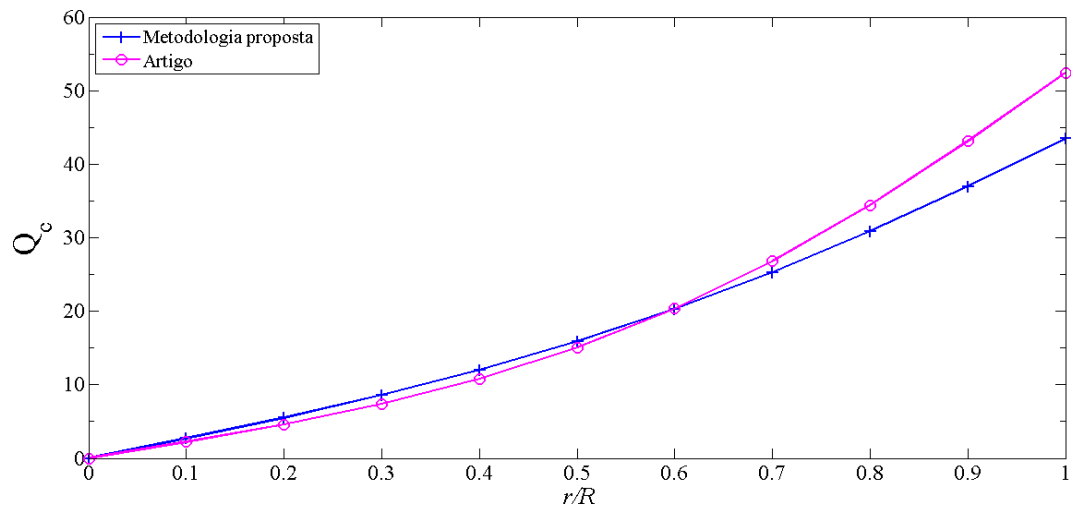


Figura B.14: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.

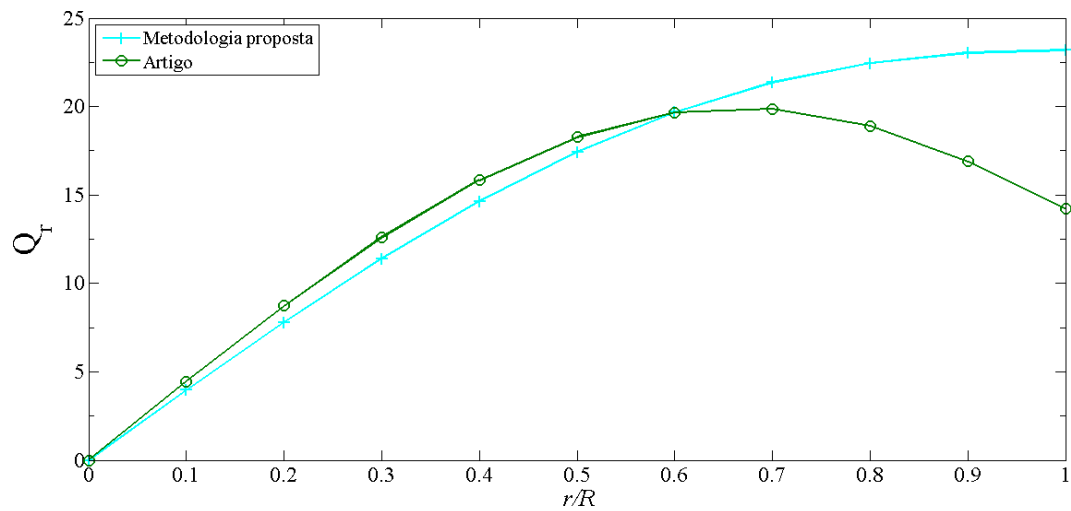


Figura B.15: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.

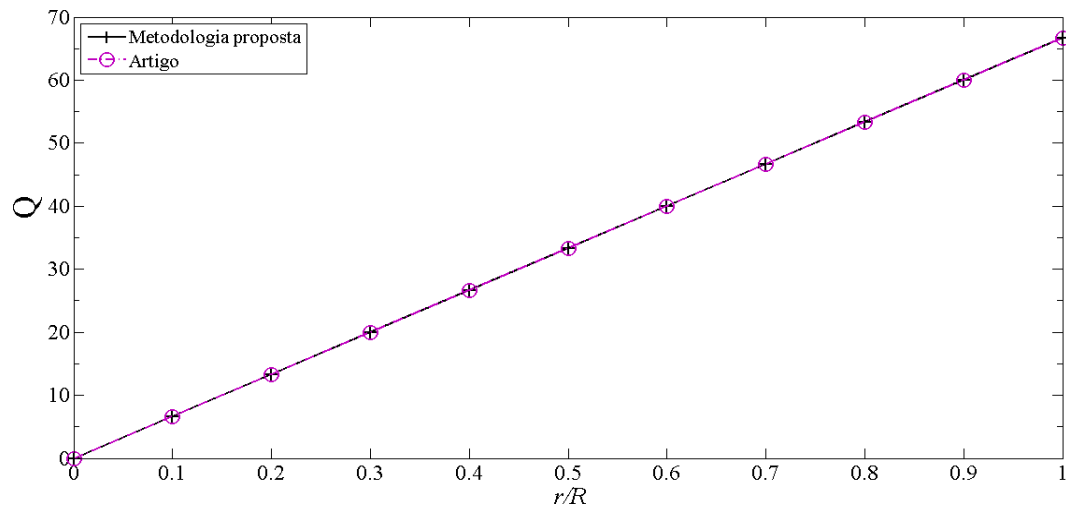


Figura B.16: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 3.

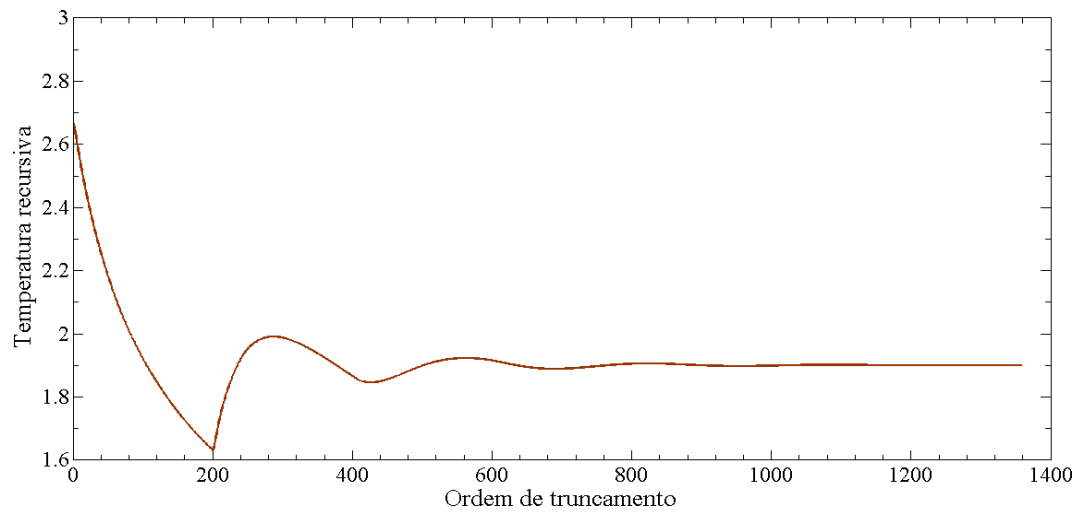


Figura B.17: Profundidade da recursão finita para o problema 3.

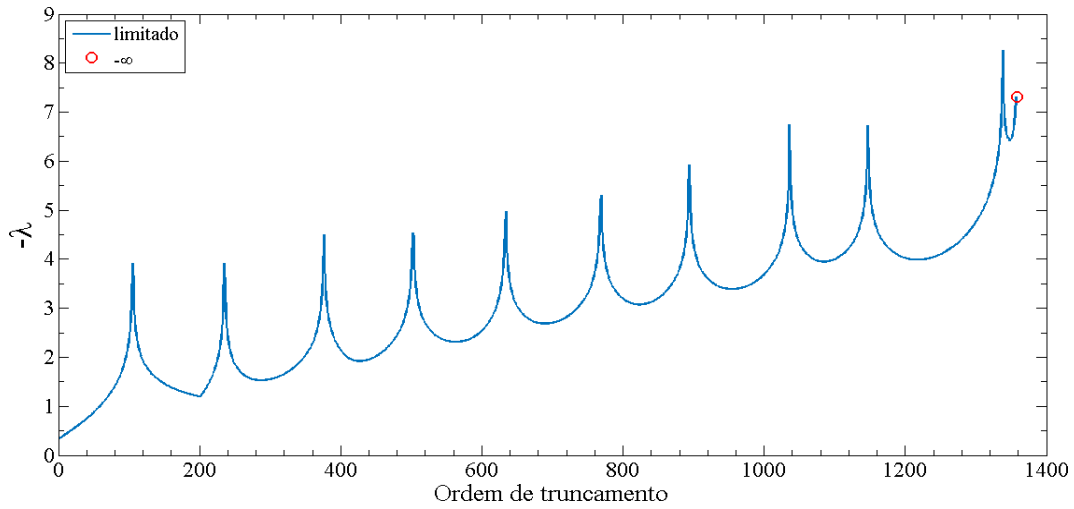


Figura B.18: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 3.

Observar-se que existe uma correspondência entre os resultados obtidos pela metodologia proposta e os dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1991], as Figuras B.14, B.15 e B.16 que pode ser confirmado nas Tabelas B.6 e B.7. Posto que, esta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Note ainda que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras B.14 e B.15. Assim sendo, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação B.32. Na Figura B.17, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 3. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 1358$, para o problema 3. Já na Figura B.18 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 1358$.

Problema 4

Neste problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 0,5$, $N_c = 0,005$, $H = 40$, $\alpha = 1$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991]. Além disso, os resultados são ilustra-

dos, nas Figuras B.19, B.20, B.21 e B.22, também apresenta-se nas Figuras B.23 e B.24, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

Tabela B.8: Resultados da metodologia proposta para o problema 4.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,323031	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,321864	$4,606300 \times 10^{-2}$	$6,206040 \times 10^{-1}$	$6,666670 \times 10^{-1}$
0,2	1,318191	$9,911700 \times 10^{-2}$	1,234216	1,333333
0,3	1,311464	$1,671250 \times 10^{-1}$	1,832875	2,000000
0,4	1,300689	$2,600360 \times 10^{-1}$	2,406631	2,666667
0,5	1,284299	$3,908430 \times 10^{-1}$	2,942490	3,333333
0,6	1,259979	$5,765480 \times 10^{-1}$	3,423452	4,000000
0,7	1,224451	$8,386300 \times 10^{-1}$	3,828037	4,666667
0,8	1,173271	1,202243	4,131091	5,333334
0,9	1,100730	1,692925	4,307075	6,000000
1	1,000000	2,329743	4,336923	6,666666

Tabela B.9: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 4.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,32004	0,0	0,0	0,0
0,1	1,31953	$2,10701 \times 10^{-2}$	$6,45597 \times 10^{-1}$	$6,66667 \times 10^{-1}$
0,2	1,31785	$4,73914 \times 10^{-2}$	1,28594	1,33333
0,3	1,31459	$8,59090 \times 10^{-2}$	1,91409	2,00000
0,4	1,30888	$1,47485 \times 10^{-1}$	2,51918	2,66667
0,5	1,29916	$2,50259 \times 10^{-1}$	3,08307	3,33333
0,6	1,28267	$4,24775 \times 10^{-1}$	3,57523	4,00000
0,7	1,25467	$7,21014 \times 10^{-1}$	3,94565	4,66667
0,8	1,20728	1,21515	4,11818	5,33333
0,9	1,12819	2,00727	3,99273	6,00000
1	1,0	3,19008	3,47659	6,66667

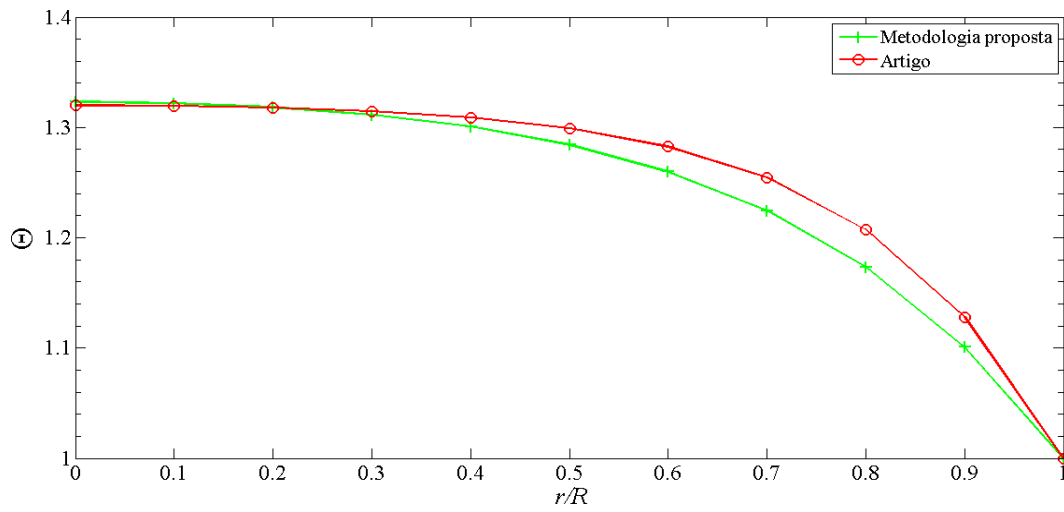


Figura B.19: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.

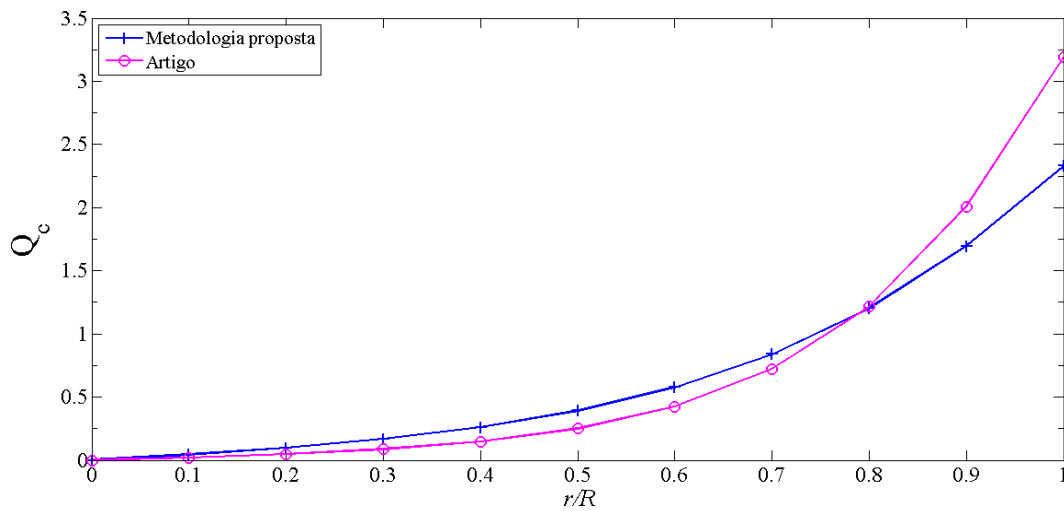


Figura B.20: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.

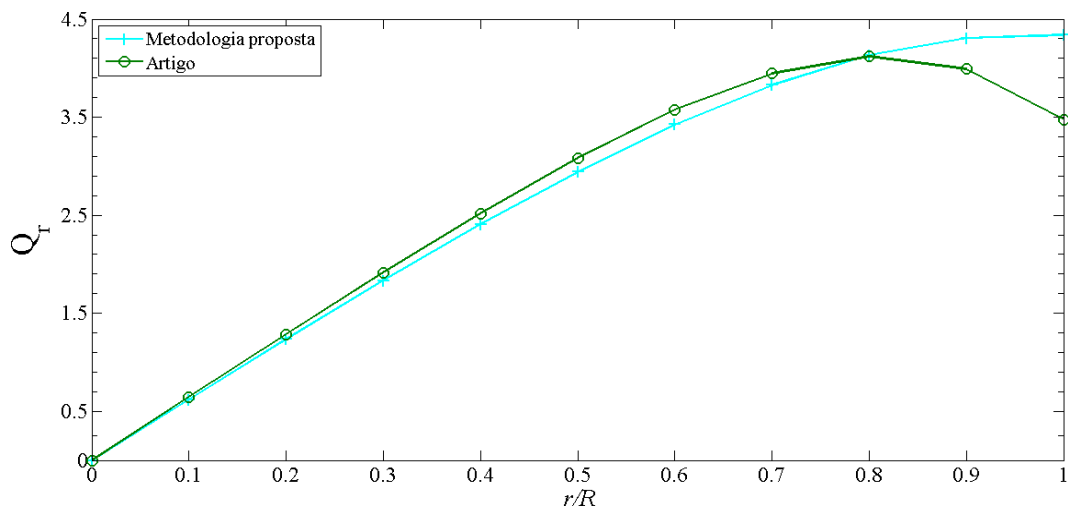


Figura B.21: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.

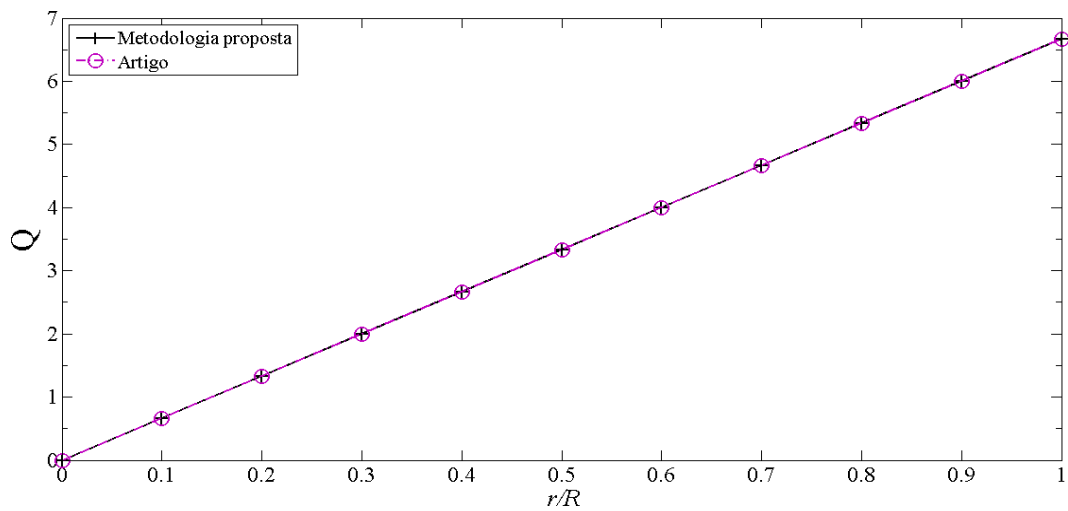


Figura B.22: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 4.

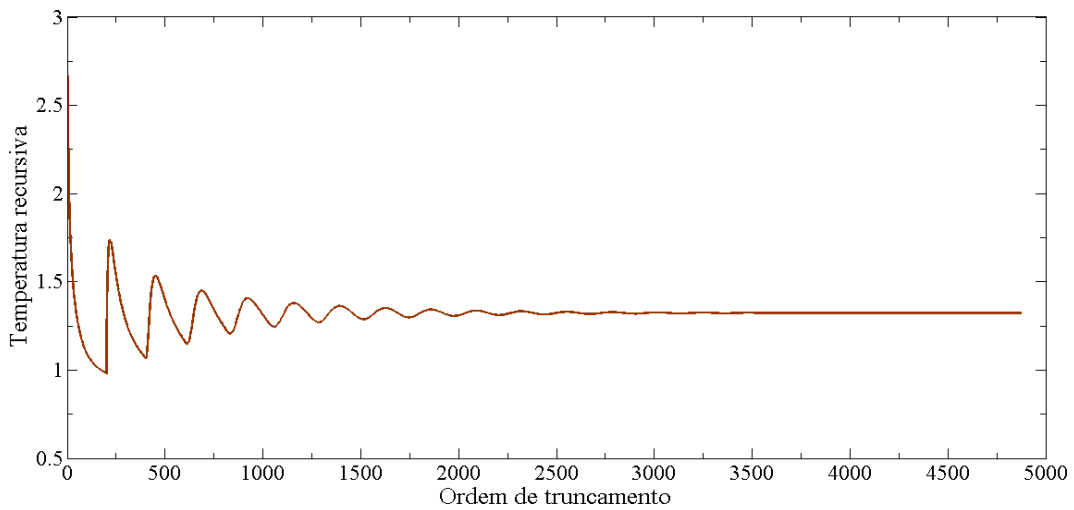


Figura B.23: Profundidade da recursão finita para o problema 4.

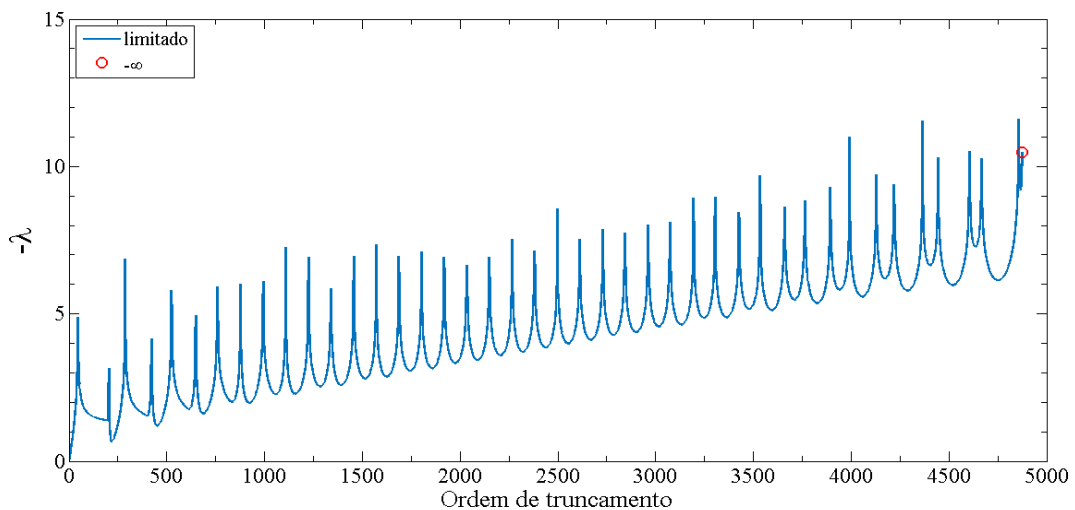


Figura B.24: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 4.

Pode-se observar que nos resultados obtidos através da metodologia proposta e dos dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1992], existe uma semelhança, as Figuras B.19, B.20, B.21 e B.22 que pode ser verificado nas Tabelas B.8 e B.9. Posto que, esta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Note ainda que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras B.20 e B.21. Conseqüentemente, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação B.32. Na Figura B.23, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 4. Utiliza-se um critério de

parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 4877$, para o problema 4. Agora, a Figura B.24 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 4877$.

Problema 5

Para este problema, apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 0,9$, $\rho^d = 0,1$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 5$, $N_c = 0,5$, $H = 0,4$, $\alpha = 0,01$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991]. Estes resultados são ilustrados, nas Figuras B.25, B.26, B.27 e B.28, também apresenta-se nas Figuras B.29 e B.30, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

Tabela B.10: Resultados da metodologia proposta para o problema 5.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,530536	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,527508	$1,215700 \times 10^{-2}$	$5,450900 \times 10^{-2}$	$6,666600 \times 10^{-2}$
0,2	1,518212	$2,516200 \times 10^{-2}$	$1,081720 \times 10^{-1}$	$1,333333 \times 10^{-1}$
0,3	1,501985	$3,996600 \times 10^{-2}$	$1,600340 \times 10^{-1}$	$2,000000 \times 10^{-1}$
0,4	1,477633	$5,772900 \times 10^{-2}$	$2,089370 \times 10^{-1}$	$2,666660 \times 10^{-1}$
0,5	1,443313	$7,989700 \times 10^{-2}$	$2,534370 \times 10^{-1}$	$3,333333 \times 10^{-1}$
0,6	1,396381	$1,082150 \times 10^{-1}$	$2,917850 \times 10^{-1}$	$4,000000 \times 10^{-1}$
0,7	1,333279	$1,446030 \times 10^{-1}$	$3,220640 \times 10^{-1}$	$4,666670 \times 10^{-1}$
0,8	1,249542	$1,907600 \times 10^{-1}$	$3,425730 \times 10^{-1}$	$5,333330 \times 10^{-1}$
0,9	1,140099	$2,474270 \times 10^{-1}$	$3,525730 \times 10^{-1}$	$6,000000 \times 10^{-1}$
1	1,000000	$3,133800 \times 10^{-1}$	$3,532860 \times 10^{-1}$	$6,666660 \times 10^{-1}$

Tabela B.11: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 5.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,49251	0,0	0,0	0,0
0,1	1,49049	$8,14823 \times 10^{-3}$	$5,85184 \times 10^{-2}$	$6,66667 \times 10^{-2}$
0,2	1,48427	$1,68525 \times 10^{-2}$	$1,16481 \times 10^{-1}$	$1,33333 \times 10^{-1}$
0,3	1,47342	$2,68523 \times 10^{-2}$	$1,73148 \times 10^{-1}$	$2,00000 \times 10^{-1}$
0,4	1,45701	$3,93193 \times 10^{-2}$	$2,27347 \times 10^{-1}$	$2,66667 \times 10^{-1}$
0,5	1,43336	$5,62435 \times 10^{-2}$	$2,77090 \times 10^{-1}$	$3,33333 \times 10^{-1}$
0,6	1,39947	$8,10213 \times 10^{-2}$	$3,18979 \times 10^{-1}$	$4,00000 \times 10^{-1}$
0,7	1,35012	$1,19207 \times 10^{-1}$	$3,47460 \times 10^{-1}$	$4,66667 \times 10^{-1}$
0,8	1,27667	$1,79019 \times 10^{-1}$	$3,54314 \times 10^{-1}$	$5,33333 \times 10^{-1}$
0,9	1,16585	$2,70291 \times 10^{-1}$	$3,29709 \times 10^{-1}$	$6,00000 \times 10^{-1}$
1	1,0	$3,99335 \times 10^{-1}$	$2,67331 \times 10^{-1}$	$6,66667 \times 10^{-1}$

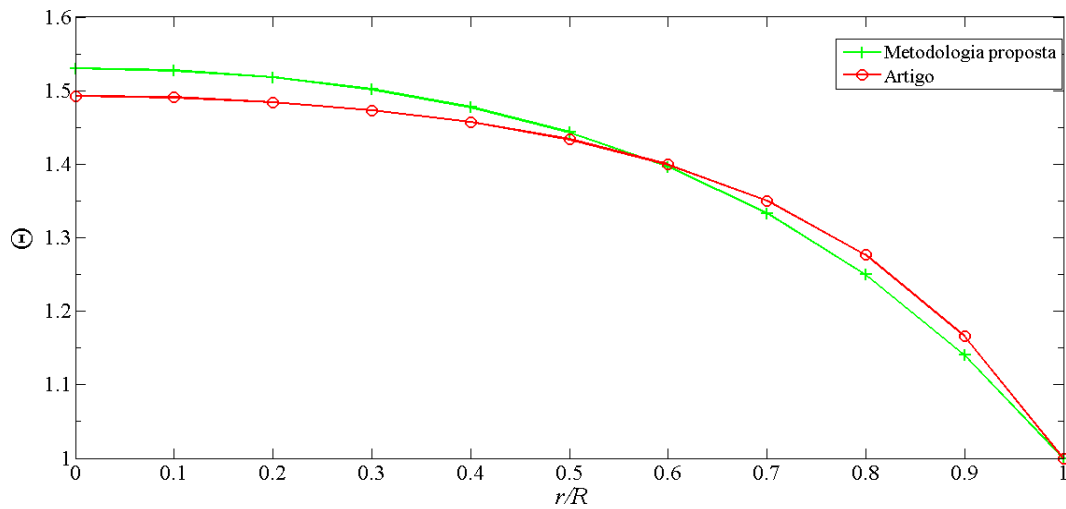


Figura B.25: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.

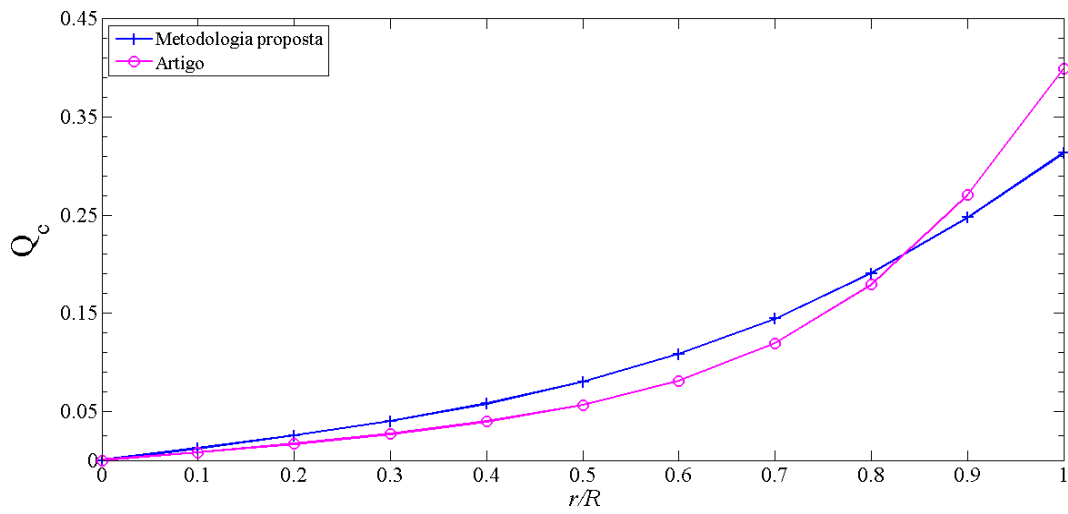


Figura B.26: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.

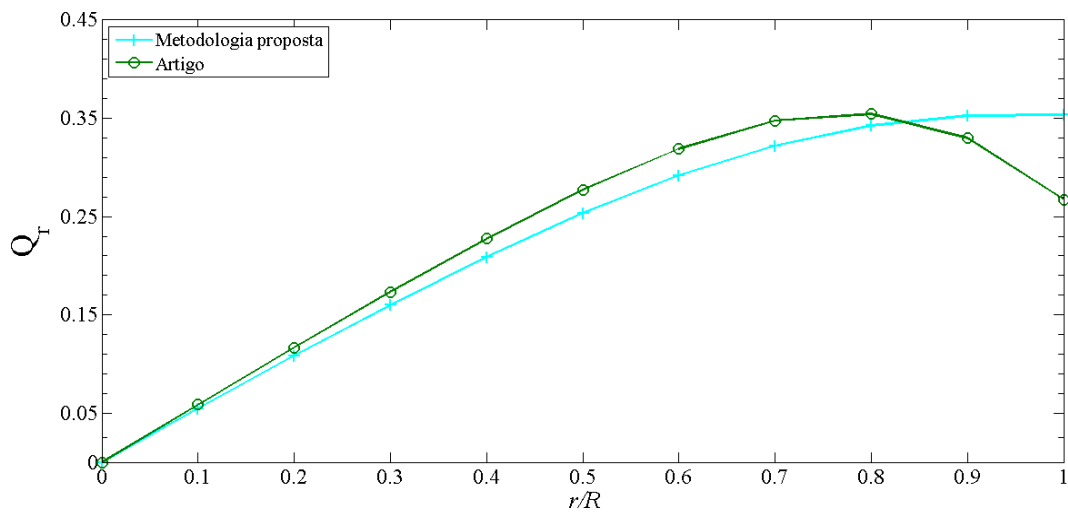


Figura B.27: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.

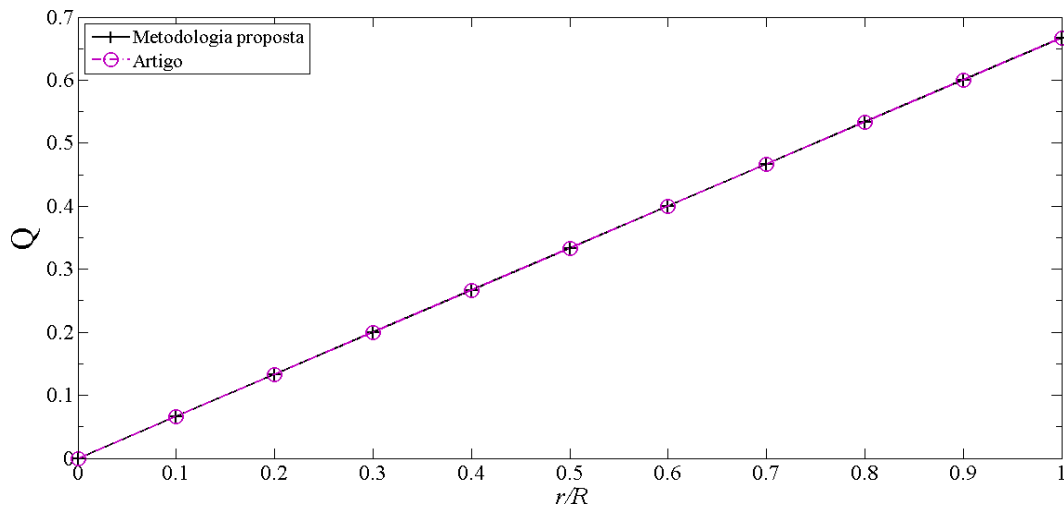


Figura B.28: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 5.

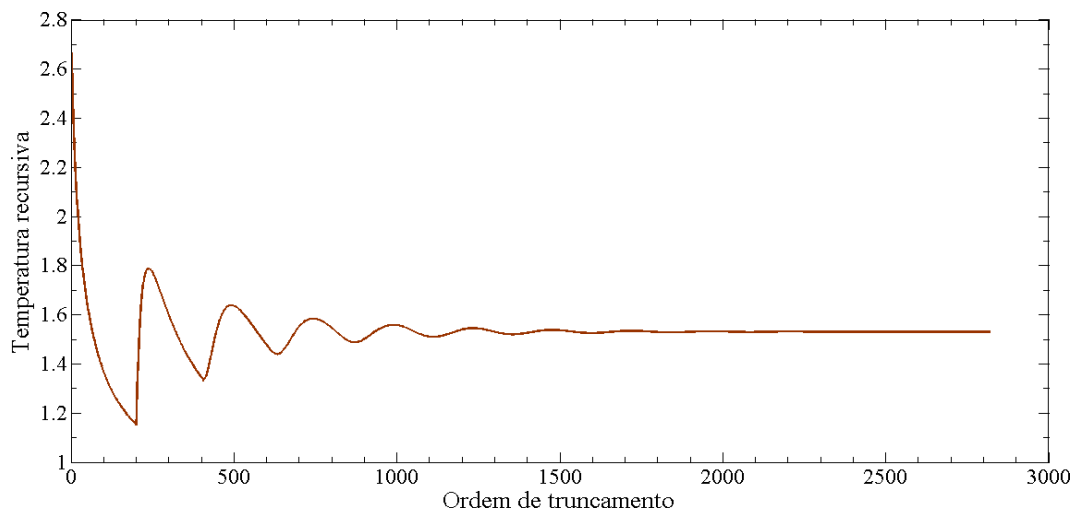


Figura B.29: Profundidade da recursão finita para o problema 5.

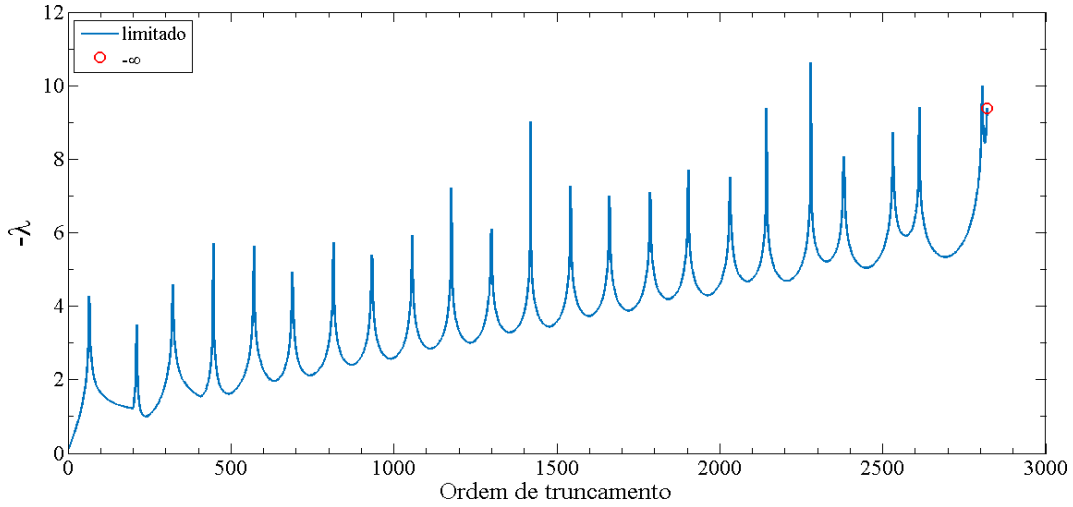


Figura B.30: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 5.

Pode-se observar que nos resultados obtidos através da metodologia proposta e os dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1991], existe uma correspondência, as Figuras B.25, B.26, B.27 e B.28 que pode ser confirmado nas Tabelas B.10 e B.11. Em razão desta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Note ainda que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras B.26 e B.27. Portanto, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação B.32. Na Figura B.29, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 5. Utiliza-se um critério de parada tal como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 2821$, para o problema 5. Já na Figura B.30 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 2821$.

Problema 6

Finalmente, para este problema apresenta-se os resultados numéricos para um conjunto de parâmetros com $\epsilon = 1$, $\rho^d = 0$, $\Theta_B = 1$, $\omega = 0,9$, $R = 5$, $N_c = 0,1$, $H = 1$, $\alpha = 0,01$ e mostra-se o perfil de temperatura, para os fluxos de calor condutivo $Q_c(r)$, radiativo $Q_r(r)$ e o fluxo total $Q(r)$ ao longo da profundidade óptica radial, estes resultados são comparados com dados disponíveis no artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991]. Estes resultados são ilustra-

dos, nas Figuras B.31, B.32, B.33 e B.34, também apresenta-se nas Figuras B.35 e B.36, a profundidade da recursão finita e a estabilidade da recursão finita, respectivamente.

Tabela B.12: Resultados da metodologia proposta para o problema 6.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,399142	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	1,397616	$9,361000 \times 10^{-3}$	$1,573060 \times 10^{-1}$	$1,666670 \times 10^{-1}$
0,2	1,392956	$1,891100 \times 10^{-2}$	$3,144230 \times 10^{-1}$	$3,333340 \times 10^{-1}$
0,3	1,384888	$2,894600 \times 10^{-2}$	$4,710540 \times 10^{-1}$	$5,000000 \times 10^{-1}$
0,4	1,372860	$4,004900 \times 10^{-2}$	$6,266170 \times 10^{-1}$	$6,666660 \times 10^{-1}$
0,5	1,355813	$5,345500 \times 10^{-2}$	$7,798780 \times 10^{-1}$	$8,333330 \times 10^{-1}$
0,6	1,331679	$7,183400 \times 10^{-2}$	$9,281660 \times 10^{-1}$	1,000000
0,7	1,296291	$1,008430 \times 10^{-1}$	1,065824	1,166667
0,8	1,241294	$1,516010 \times 10^{-1}$	1,181732	1,333333
0,9	1,150984	$2,425340 \times 10^{-1}$	1,257466	1,500000
1	1,000000	$3,942080 \times 10^{-1}$	1,272459	1,666667

Tabela B.13: Resultados do artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991] para o problema 6.

r/R	$\Theta(r)$	$Q_c(r)$	$Q_r(r)$	Q
0	1,35750	0,0	0,0	0,0
0,1	1,35626	$4,95826 \times 10^{-3}$	$1,61708 \times 10^{-1}$	$1,66667 \times 10^{-1}$
0,2	1,35253	$1,00184 \times 10^{-2}$	$3,23315 \times 10^{-1}$	$3,33333 \times 10^{-1}$
0,3	1,34621	$1,53099 \times 10^{-2}$	$4,84690 \times 10^{-1}$	$5,00000 \times 10^{-1}$
0,4	1,33714	$2,10549 \times 10^{-2}$	$6,45612 \times 10^{-1}$	$6,66667 \times 10^{-1}$
0,5	1,32499	$2,77786 \times 10^{-2}$	$8,05555 \times 10^{-1}$	$8,33333 \times 10^{-1}$
0,6	1,30896	$3,70412 \times 10^{-2}$	$9,62959 \times 10^{-1}$	1,00000
0,7	1,28673	$5,40039 \times 10^{-2}$	1,11266	1,16667
0,8	1,25097	$9,59937 \times 10^{-2}$	1,23734	1,33333
0,9	1,17804	$2,16897 \times 10^{-1}$	1,28310	1,50000
1	1,0	$5,43128 \times 10^{-1}$	1,12354	1,66667

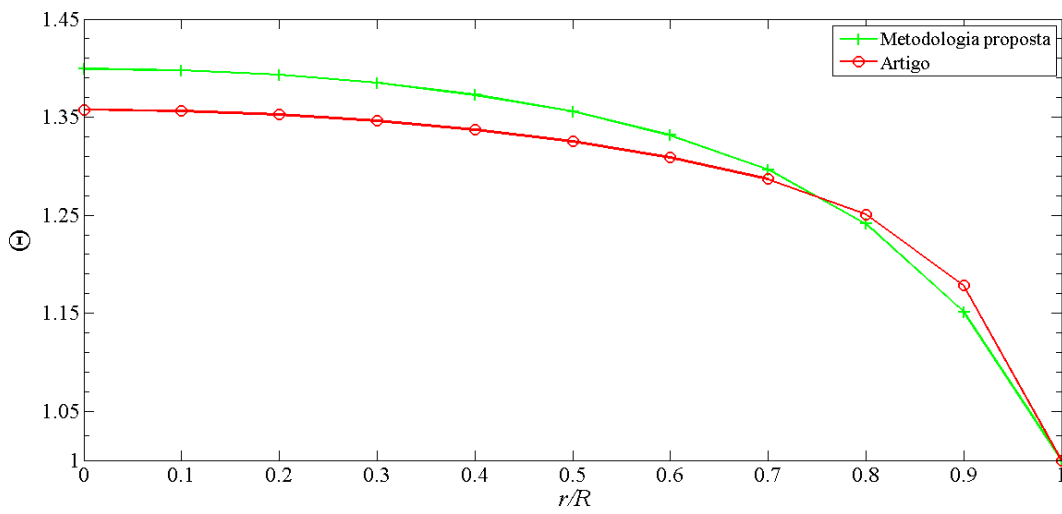


Figura B.31: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o perfil de temperatura ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.

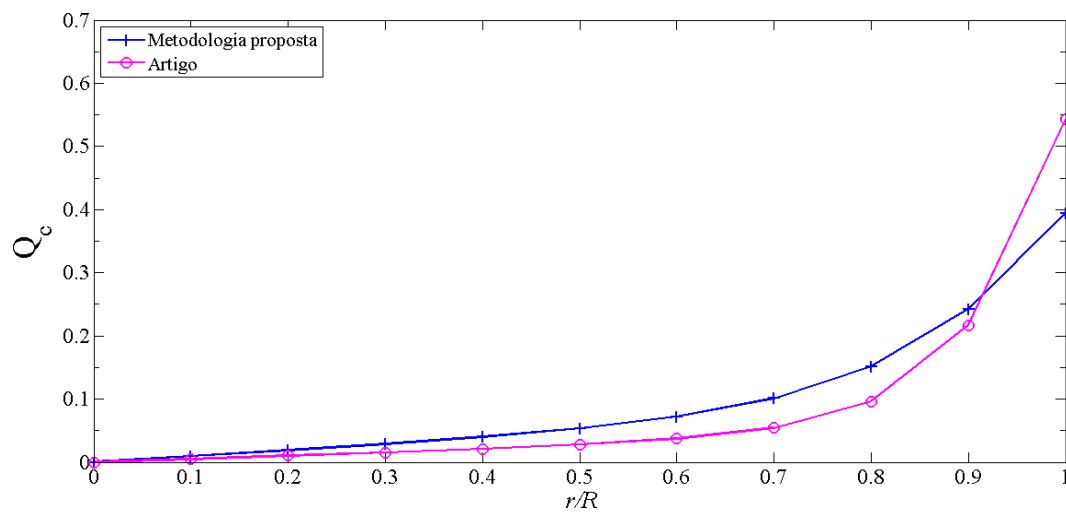


Figura B.32: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor condutivo ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.

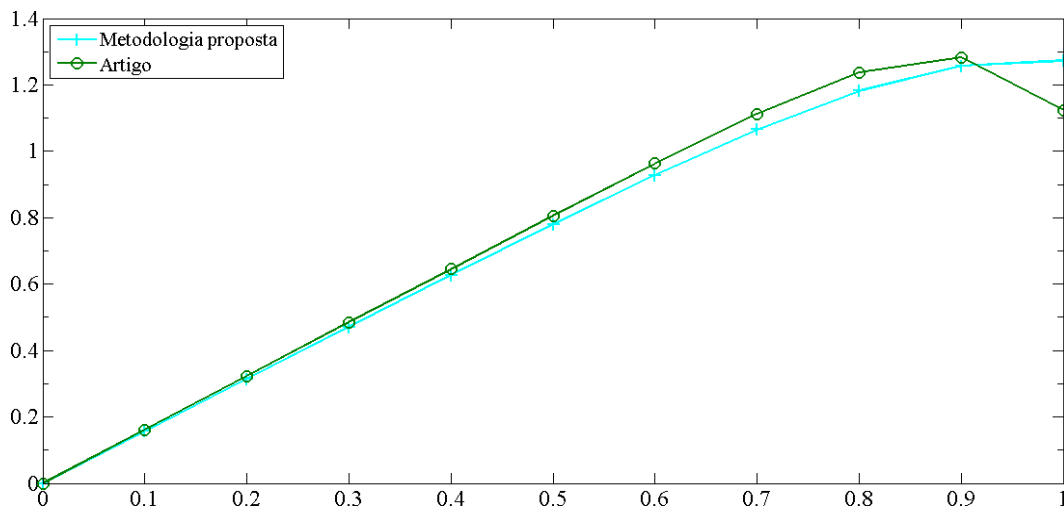


Figura B.33: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor por radiação ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.

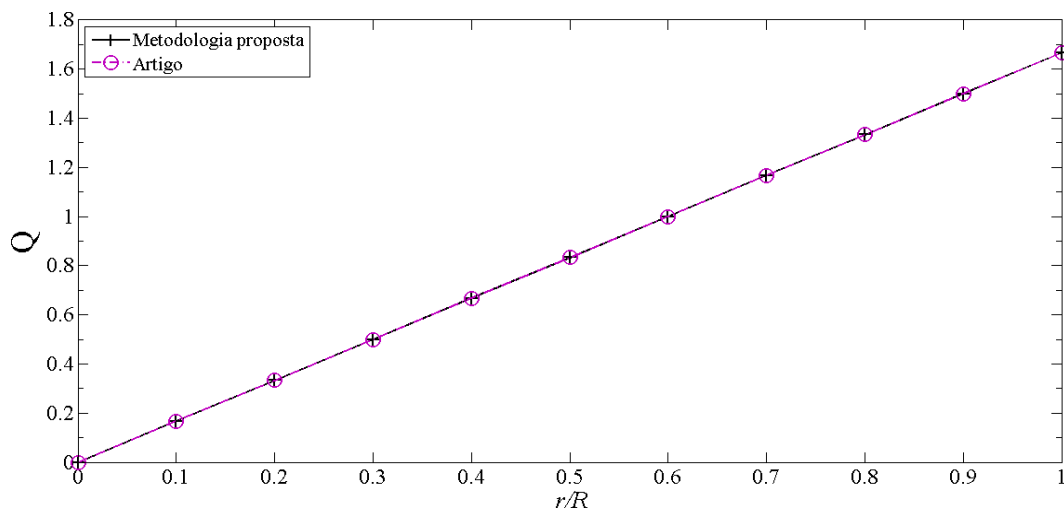


Figura B.34: Comparação entre a metodologia proposta e o artigo para o fluxo de calor total ao longo da profundidade óptica radial, problema 6.

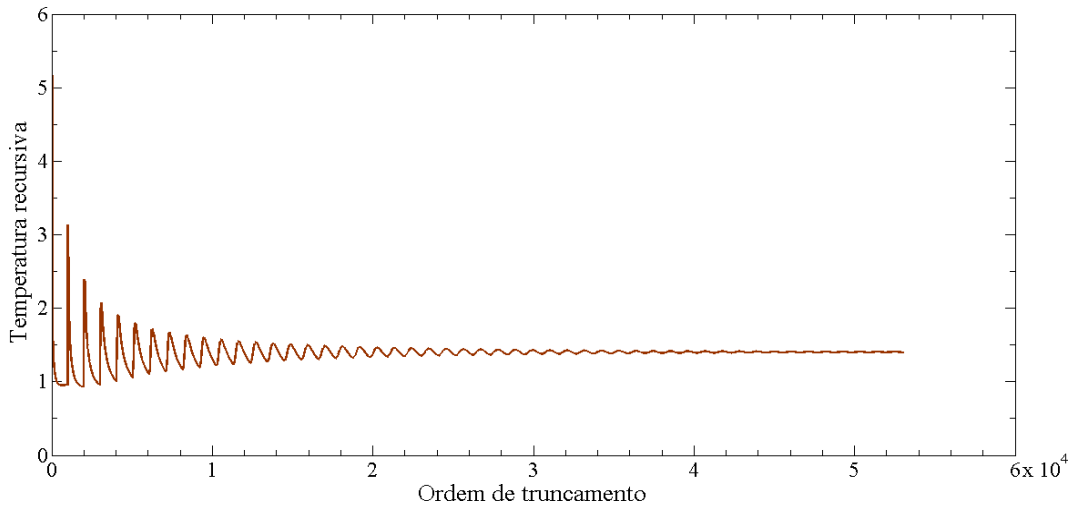


Figura B.35: Profundidade da recursão finita para o problema 6.

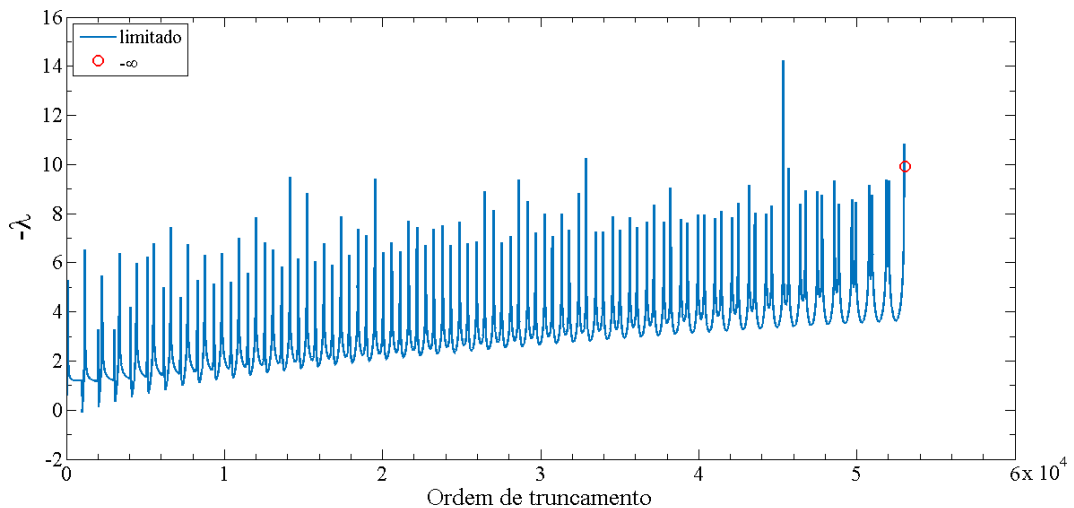


Figura B.36: Expoente de Lyapunov negativo ($-\lambda$) ao longo da recursão finita para o problema 6.

Existe uma correspondência entre os resultados obtidos pela metodologia proposta e os dados disponíveis em [Siewert e Thomas Jr., 1991], as Figuras B.31, B.32, B.33 e B.34 que pode ser confirmado nas Tabelas B.12 e B.13. Visto que, esta diferença nas soluções deve-se ao fato de métodos distintos adotados para obter a solução do problema. Observa-se ainda que os fluxos de calor condutivo e radiativo, Q_c , Q_r , respectivamente, possuem valores diferentes, Figuras B.32 e B.33. Em consequência, o fluxo de calor total Q é constante, isso ocorre para satisfazer a lei da conservação da energia, a Equação B.32. Na Figura B.35, ilustra-se o esquema recursivo para o problema 6. Utiliza-se um critério de parada tal

como, as vinte últimas recursões da temperatura forem menores que 10^{-6} tem-se a ordem de truncamento $\mathcal{J} = 53027$, para o problema 6. Agora, a Figura B.36 ilustra-se a estabilidade da metodologia proposta, observa-se que o critério de Lyapunov foi satisfeito para a ordem de truncamento de $\mathcal{J} = 53027$.

Note que para todos os problemas aqui estudados, os parâmetros listados na Tabela B.1 influenciaram diretamente na obtenção da solução através da metodologia proposta. Observa-se as influências dos parâmetros para os problemas 1 até 6, no qual $H \neq 0$, isto é, tem-se geração de calor constante. No problema 1, a ordem de truncamento foi inferior que nos demais casos e aqui os parâmetros que mais influenciaram foram ρ^d , N_c e α . Para os problemas 2, 3, 4 e 5 existem maiores influências de R , N_c , H e α . Nota-se que à medida que H aumenta a temperatura também aumenta. Além disso, para obter a estabilidade numérica para estes problemas foi necessário muitos termos de Adomian, ver as Figuras B.11, B.17, B.23 e B.29. Já o problema 6, para obter estabilidade numérica deste problema foi necessário muitos termos de Adomian que nos outros problemas, ver a Figura B.35, e os parâmetros que mais influenciaram foram R e α . Entretanto, não se pode esquecer das influências dos demais parâmetros como a emissividade ϵ que está correlacionada com a condição de contorno da intensidade de radiação e outro parâmetro o albedo de espalhamento simples ω , para os seis problemas fixou-se $\omega = 0.9$ de acordo com o artigo [Siewert e Thomas Jr., 1991].