

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DE SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Estudo sobre a produção inclusiva de hádrons em colisões
próton-próton nos formalismos colinear e do Condensado de
Vidro de Cor (CGC)**

**(Investigating the inclusive hadron production in
proton-proton collisions in the context of QCD collinear
factorization and Color Glass Condensate (CGC)
frameworks)**

Lucas Soster Moriggi

Dissertação realizada sob a orientação do
Prof. Dr. Magno V. T. Machado, apresen-
tada ao Instituto de Física da UFRGS em
preenchimento parcial dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre, 3 de janeiro de 2017

Sumário

1	Introdução	7
2	QCD em colisões de altas energias	9
2.1	A chromodinâmica quântica	9
2.2	Modelo de pártons	11
2.3	Singularidades colineares	14
2.4	Evolução colinear na QCD	15
2.5	O limite de pequeno x	17
3	Produção de hádrons no formalismo colinear com momento transversal inicial	19
3.1	O modelo de fatorização colinear	19
3.2	Momento transversal intrínseco e as limitações do modelo colinear	22
3.3	Seção de choque com k_T intrínseco	24
3.4	Escalonamento da distribuição p_T	26
3.5	Resultados no formalismo colinear	27
4	Condensado de vidro de cor	32
4.1	Limite para as seções de choque	32
4.2	Problema no limite de pequeno x e as evoluções não-lineares	33
4.3	Condensado de vidro de cor	35
4.3.1	Dinâmica dos pártons na função de onda hadrônica	36
4.3.2	Campos clássicos	37
4.3.3	Densidade de glúons	38
4.4	Modelo MV	39
4.5	Equações de evolução JIMWLK/BK	43
4.6	Linhas de Wilson	48
4.7	DIS no referencial de dipolo	51
5	Produção de hádrons em colisão pp no formalismo do CGC	53
5.1	A fatorização híbrida	53
5.1.1	A cinemática $2 \rightarrow 1$	58
5.1.2	Termo inelástico na fatorização híbrida	58
5.2	Fatorização k_T	59
5.3	Modelos fenomenológicos para a seção de choque de dipolo	63

5.3.1	O modelo GBW (Golec-Biernat/Wusthoff)	63
5.3.2	Escalonamento geométrico em k_T/Q_s	64
5.3.3	Modelo DHJ (Dumitru - Hayashigaki - Jalilian-Marian)	65
5.3.4	Modelo BUW (Boer - Utermann - Wessels)	66
5.3.5	Transformada de Hankel de $S_A(x, r)$	67
5.4	Resultados no formalismo do CGC	69
5.4.1	Seção de choque $pp \rightarrow h + X$ no formalismo híbrido	69
5.5	Resultados no formalismo de fatorização k_T	73
6	Conclusões	81

Lista de Figuras

2.1	À esquerda, o espalhamento profundamente inelástico. À direita, sua interpretação no modelo de pártons.	12
2.2	Representação da produção inclusiva de hádrons no modelo de pártons.	13
2.3	DIS visto como duas etapas, o desdobramento $e\gamma$ e a subsequente interação com o próton.	15
2.4	Vértices que contribuem para evolução das PDFs em QCD	16
2.5	Diagramas que apresentam a evolução colinear das PDFs com forte ordenamento em p_T (no fim da evolução há a interação γ -párton no caso do DIS).	17
3.1	Cinemática do processo $2 \rightarrow 2$ no referencial dos pártons	20
3.2	Diagramas de Feynman dos subprocessos partônicos nos canais t, u, s nas três primeiras colunas. A última corresponde ao vértice de quatro glúons.	23
3.3	Cinemática do processo $2 \rightarrow 2$ acrescentando k_T inicial.	25
3.4	Tabela dos autores de [1] que mostra a comparação de n experimental com o cálculo NLO. As referências nesta tabela não são nossas citações, mas as dos autores daquele trabalho.	26
3.5	Seção de choque (3.5) multiplicada por p_T^6 em diferentes energias e rapidez central, multiplicadas por um fator 1, 5 e 200 de maior para menor energia.	27
3.6	Seção de choque no modelo colinear e com k_T inicial comparadas com os dados do LHC.	28
3.7	O mesmo da Figura 3.6 para energias mais baixas.	29
3.8	O mesmo das figuras anteriores para diferentes valores de y e $\sqrt{s} = 200$ GeV	30
4.1	Acima: evolução DGLAP fortemente ordenada em k_T , o que implica numa diminuição da área ocupada pelos pártons. Abaixo: evolução BFKL fortemente ordenada em x que leva à superposição das funções de onda dos glúons.	34
4.2	Figura extraída de [2], que mostra os diagramas fan que geram a evolução não-linear GLR, onde ocorre fusão das escadas BFKL.	34
4.3	Párton de maior momento p^+ é visto como uma fonte localizada ρ para o párton suave k^+	37
4.4	Visão do núcleo no modelo MV a partir de um glúon emitido por quarks de valência de grande momento. A descrição detalhada é apresentada no texto.	40
4.5	Densidade de glúons no espaço de momento dada pelo modelo MV, com o limite assintótico $k_T \rightarrow \infty$	44

4.6	Evolução LLx do condensado, onde os pártons com momento $p^i \gg k^+$ intermediário são incorporados à fonte ρ .	45
4.7	Figura extraída de [3] representa os diagramas associados a σ .	46
4.8	Figura extraída de [3] representa os diagramas associados a χ .	46
4.9	Múltiplos espalhamentos ressonados nas linhas de Wilson correspondentes a troca de n glúons.	49
4.10	DIS no referencial de dipolo, onde o vértice $\gamma \rightarrow q\bar{q}$ é separado da interação com o condensado, representada pela área vermelha que inclui os múltiplos espalhamentos das linhas de Wilson.	51
5.1	Figura extraída de [4], mostrando a interação entre hádrons condensados no formalismo CGC.	54
5.2	Figura extraída de [5], mostrando os diagramas do processo $qA \rightarrow qg + X$.	56
5.3	Vértice de Lipatov que considera as possíveis emissões de glúons.	60
5.4	Representação do esquema de fatorização k_T , incluindo a evolução quântica não-linear das distribuições, com glúon produzido de momento transversal k_T .	62
5.5	Comparação de diferentes modelos para a função de distribuição de glúons de dipolo.	68
5.6	Modelo de fatorização híbrida usando dipolo DHJ, com e sem o termo inelástico, em $\sqrt{s} = 200$ GeV para diferentes valores de rapidez.	71
5.7	O mesmo da Figura 5.6, mas para o dipolo BUW que apresenta o escalonamento.	72
5.8	Comparação BUW e DHJ em $y = 0$ e diferentes valores de energia do LHC. Os dados são de [6, 7].	73
5.9	Comparação BUW e DHJ em diferentes intervalos de rapidez, com $\sqrt{s} = 630$ GeV.	74
5.10	Comparação dos dados de [8] em 7 TeV para produção de pión neutro. Neste caso só é apresentado um modelo de dipolos, já que ambos são idênticos nestes valores de y .	75
5.11	Comparação entre fatorização k_T e híbrida usando a PDF MSTW e a TMD obtida pelo modelo DHJ de dipolos.	76
5.12	O mesmo da Figura 5.11, mas com o modelo de dipolo BUW.	77
5.13	PDFs em função de Q^2 em diferentes valores de x . Consideramos aquelas usuais MSTW e CTEQ5, comparadas com as obtidas pelo modelo de dipolos DHJ e BUW.	78
5.14	Acima: PDFs em função de x com Q fixo. Abaixo: PDFs com a razão $w = Q/Q_s$ constante, mostrando o escalonamento.	79
5.15	Integrando do modelo híbrido para diferentes valores de p_T e y envolvidos em diferentes dados experimentais estudados neste trabalho. As linhas tracejadas são as contribuições de glúons, enquanto as cheias são de quarks. Além disso, x_2 é a fração de momento do alvo (denominada x_A no texto).	80

Resumo

Apresentaremos um estudo sobre a produção inclusiva de hádrons em colisões próton-próton (pp), através do espectro p_T do momento transverso dos hádrons produzidos. É esperado que em regiões de grande densidade de glúons, que começam a serem provadas por aceleradores de grande energia, a abordagem tradicional da QCD perturbativa não seja suficiente. Tal regime é caracterizado por fortes campos de cor descritos pela teoria efetiva do condensado de vidro de cor (CGC), mais apropriado neste caso para descrever os observáveis. Consideramos também uma possível extensão do modelo colinear, obtida pela adição de uma distribuição gaussiana inicial, que considera um momento transverso intrínscio anterior à interação dos pártons. Tal abordagem pode corrigir as deficiências do modelo colinear sem que tenhamos que recorrer ao CGC em algumas regiões cinemáticas.

O modelo colinear é baseado na consagrada evolução DGLAP das funções de distribuição de pártons, prevendo uma forma de fatorização para calcularmos as seções de choque. Mas, quando consideramos regiões de grande densidade, é provável que outra forma de evolução governe a dinâmica das funções de onda hadrônica, levando estas até um regime saturado. Adentrando nesta região incerta, o modelo de fatorização colinear não é satisfatório e devemos considerar outras formas menos estabelecidas para gerar previsões sobre o espectro p_T . Como resultado deste trabalho, comparamos estas abordagens distintas e as confrontamos com dados experimentais do RHIC e LHC.

Abstract

We present a study of single inclusive hadron production in proton-proton collisions (pp) through the spectra of the transverse moment p_T of the produced hadrons. It is expected that in regions of high density of gluons, which begin to be probed by high energy accelerators, the traditional approach of perturbative QCD is not enough. Such a regime is characterized by strong color fields described by the effective theory of color glass condensate (CGC), more appropriate in this case to describe the observables. We also consider a possible extension of the collinear model, given by the addition of an initial Gaussian distribution, which considers an intrinsic transverse moment prior to the interaction of the partons. Such approach can correct the limitation of the collinear model without having to appeal to CGC in some kinematic regions.

The collinear model is based on the established DGLAP evolution of the parton distribution functions, which provides a form of factorization to calculate the cross sections. But when we consider regions of high density, it is likely that another form of evolution governs the dynamics of the hadronic wave functions, guiding them to a saturated regime. Advancing in this uncertain region, the collinear factorization model does not work and we must consider less well-established ways to generate predictions about the p_T spectrum. We compare these distinct theoretical approaches and confront their results against the RHIC and LHC data.

Capítulo 1

Introdução

Todo teste de grande precisão da QCD é baseado em teoria de perturbação, que faz uso da liberdade assintótica. Esta propriedade só é válida para fenômenos onde a QCD é provada em escalas muito pequenas, quando existe um grande momento transferido entre os pártons. Existem vários observáveis que nos permitem concluir que este tipo de interação realmente ocorreu em uma colisão, como por exemplo, a produção de pares de léptons de grande massa, ou a produção de fótons de grande momento. No que diz respeito aos hádrons, o fato destes serem observados no estado final com grande momento transversal p_T em relação ao eixo de colisão é evidência de um evento tipicamente perturbativo.

A QCD perturbativa é então apta a gerar previsões para o espectro destes hádrons observados com momento de pelo menos 1 GeV. Por décadas estes observáveis têm sido uma marca importante no desenvolvimento de métodos de alta precisão para a QCD, desde energias de colisões relativamente moderadas (dezenas de GeV), até aquelas de 13 TeV do LHC.

Começamos este trabalho com uma revisão bastante abreviada da QCD, sendo que o leitor pode encontrar detalhes nos livros-texto indicados como referência. Fizemos uma discussão sobre o modelo de pártons, que constitui uma das primeiras abordagens para descrever as interações fortes em altas energias. Introduzimos o modelo de fatorização colinear, através do qual divergências associadas à emissão de pártons colineares, geram termos logarítmicos na escala de momento somados nas chamadas PDFs (funções de distribuição) no espírito da aproximação de Weizsäcker-Williams da eletrodinâmica, e comentamos como a iteração sucessiva de tal procedimento leva às equações Dokshitzer - Gribov - Lipatov - Altarelli - Parisi (DGLAP).

No segundo capítulo daremos detalhes da obtenção da seção de choque $pp \rightarrow h + X$ pelo esquema de fatorização colinear. Acrescentamos ainda um modelo de momento transversal inicial, que permite uma melhor descrição dos dados experimentais numa região onde as condições necessárias para a evolução DGLAP ocorrer ainda não foram bem estabelecidas.

Os resultados comparando ambas as formas de calcular a seção de choque são dados neste capítulo com nossas conclusões sobre o assunto. Posteriormente seguimos para entender um outro possível problema presente no modelo, associado à evolução das distribuições num regime de grande densidade de glúons.

Fizemos uma introdução sobre a necessidade de se considerar uma evolução não linear além da Balitsky - Fadin - Kuraev - Lipatov (BFKL) para restaurar a unitariedade da ma-

triz de espalhamento, e com isso impedir o crescimento indeterminado das PDFs impostos por DGLAP no limite de x pequeno. Neste sentido introduzimos a teoria efetiva do condensado de vidro de cor, que leva equações de evolução Jalilian-Marian - Iancu - McLerran - Weigert - Leonidov - Kovner (JIMWLK). Tais equações contêm uma grande quantidade de informação sobre a dinâmica dos glúons no regime condensado, desde a dinâmica linear BFKL, passando pela evolução não linear Balitsky - Kovchegov (BK), até o limite saturado de campos clássicos.

O CGC tem mostrado coerência com vários dados experimentais, principalmente associados ao DIS (espalhamento profundamente inelástico), e a colisões assimétricas tipo pA (próton-núcleo). Mas, quando tentamos descrever colisões pp , encontramos bastante dificuldade no sentido de que a forma de fatorização não é muito certa. A princípio é desejável que possamos aplicar estas ideias também em colisões pp , no sentido de que neste caso estamos livres de efeitos nucleares, que tipicamente dificultam a identificação de uma possível falha das PDFs colineares.

Aplicaremos para isso, os modelos de fatorização híbrida e k_T , que são a princípio mais apropriados em colisões pA . Neste sentido, os graus de liberdade fundamental destas teorias não são pártons como na visão do modelo colinear, mas sim objetos conhecidos como dipolos de cor, que são as funções de correlação das linhas de Wilson. Consideraremos dois modelos fenomenológicos para estes objetos, dentre os muitos disponíveis na literatura. No formalismo de fatorização k_T , estes objetos são relacionados às funções de distribuição de glúons dependentes de momento transversal (TMD abreviadamente).

Diferente do modelo colinear, onde os pártons entram na colisão sem nenhum momento transversal inicial; a fatorização k_T é consistente com a dinâmica BFKL, que gera uma difusão de glúons no espaço transversal ao eixo de colisão. Desta forma teremos uma maneira alternativa de se obter as PDFs dos glúons, que devemos considerar em nossos cálculos.

Somando estas diferentes abordagens com um estudo de uma ampla região de energia e rapidez dos hádrons produzidos, esperamos ser capazes de observar indícios de fenômenos além do modelo perturbativo colinear. No último capítulo comparamos as diferentes abordagens teóricas tratadas no texto com dados experimentais de grandes energias, e discutimos a pertinência dos resultados.

Capítulo 2

QCD em colisões de altas energias

Este capítulo se dedica a fazer uma breve apresentação da QCD, e com isso definir as propriedades que serão importantes para os cálculos realizados nos capítulos subsequentes, desde o modelo de pártons até a ressonância de correções de grandes logaritmos na evolução das funções de distribuição de pártons.

2.1 A cromodinâmica quântica

A cromodinâmica quântica (QCD) é uma teoria de gauge (calibre) dada pela simetria sob transformações que formam o grupo $SU(3)$, e identificada como a teoria que rege as interações fortes entre os constituintes dos hádrons. Tal teoria descreve a dinâmica de quarks e glúons (chamados pártons) que constituem os hádrons, mas que nunca são observados livremente devido ao confinamento de cor, propriedade em que pártons que carregam cor ao serem separados do hádron inevitavelmente hadronizam formando novos hádrons de forma a manter o estado sem cor. Além disso, a QCD se caracteriza pelo fenômeno de liberdade assintótica, em que a intensidade da interação diminui com o aumento da energia (pequenas distâncias).

A lagrangiana da QCD é dada pela expressão

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (2.1)$$

em que $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$, e D_μ é a derivada covariante dada por $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$, que pode ser obtida, como em [9], através de argumentos de simetria, já que dada a necessidade de se ter uma lagrangiana invariante por transformações de Lorentz, gauge e paridade, a expressão (2.1) surge como única candidata.

Os campos $\psi, \bar{\psi}$ nesta lagrangiana são referentes a férmions (quark, antiquark), podendo ser expressos por espinores de duas dimensões ψ_L, ψ_R que se transformam de acordo com a representação irredutível $(0, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 0)$ do grupo de Lorentz (Spin 1/2). Estes campos interagem entre si através do campo de gauge A^μ do glúon, que se transforma na representação vetorial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz (Spin 1), sendo que a matriz de Dirac γ^μ nesta expressão é quem faz a ligação entre estas representações. Além destas características dadas pelo grupo de Lorentz, os campos dos quarks também possuem um índice associado ao sabor (a interação forte descrita por esta lagrangiana não distingue sabor),

sendo que deixamos uma soma implícita sobre estes índices. As transformações de gauge, que deixam esta lagrangiana invariante, fazem as seguintes mudanças nestes campos:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow V(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)V(x)^\dagger, \\ A_\mu &\rightarrow V(x) \left(A_\mu(x) - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V(x)^\dagger,\end{aligned}\tag{2.2}$$

sendo $V(x) = e^{-i\alpha(x)^a t^a}$ uma matriz unitária 3×3 , $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$ os geradores do grupo $SU(3)$ que podem ser representados pelas oito matrizes de Gell-Mann λ^a , e $\alpha(x)^a$ é uma função arbitrária. A transformação do campo dos quarks é dada pela representação fundamental (as matrizes $V(x)$ atuam nas três componentes destes campos associadas a três cargas de cor), já os glúons se transformam na representação adjunta com oito possíveis cores (combinações das três cores dos quarks). Além disso, g é uma constante de acoplamento equivalente ao acoplamento e na QED, que mede a intensidade da interação. Na teoria de perturbação os diagramas de Feynman são obtidos usando esta lagrangiana, sendo que em especial o termo $g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ presente no tensor $F_a^{\mu\nu}$ vai gerar um comportamento em QCD que não existe em QED, que é a auto-interação dos bósons de gauge, ou seja, os glúons carregam carga de cor e interagem entre si.

O uso da teoria de perturbação se torna possível se tivermos uma constante de acoplamento pequena, de forma que podemos desprezar termos de ordem mais alta desta constante. Isto ocorre na QCD pelo comportamento conhecido como liberdade assintótica, onde o acoplamento é variável e se torna menor em grandes escalas de energia, ou quando a interação é provada em distâncias muito pequenas (o contrário do que ocorre em QED). Tal comportamento é dado pela equação de renormalização de grupo

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \log(Q^2)} = \beta(\alpha_s) = -\alpha_s^2 (b_0 + b_1 \alpha_s + \dots),\tag{2.3}$$

onde $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ e b_0, b_1 são os primeiros coeficientes da expansão perturbativa relacionados a correções de 1 e 2 laços e dependentes do número de sabores n_f . É o sinal negativo em (2.3) o responsável por tornar α_s menor à medida que o momento Q^2 transferido aumenta, o que pode ser visto da solução desta equação:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + b_0 \alpha_s(\mu^2) \log \frac{Q^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2)},\tag{2.4}$$

onde μ é uma escala de referência, a partir da qual é dada a solução na escala Q . Tal equação pode ser posta na forma

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - n_f) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}},\tag{2.5}$$

onde $\Lambda \sim 200$ MeV é a escala que separa o comportamento perturbativo do não-perturbativo. Desta forma, se $Q^2 > \Lambda^2$, α_s é pequeno e existe a possibilidade de se usar teoria de perturbação. Por outro lado, se $Q^2 \rightarrow \Lambda^2$ o termo $\log \frac{Q^2}{\Lambda^2}$ diverge, implicando que o cálculo

perturbativo que gera a Eq. (2.5) não é mais válido e os pártons se encontram confinados.

Dadas as características gerais da QCD, é necessário traduzi-las em previsões para o cálculo de observáveis nos experimentos. Isto implica em uma separação entre o comportamento de longa e curta distância (perturbativo), dados pelos esquemas de fatorização, que por sua vez devem levar em conta a evolução das funções de onda dos hádrons em função das variáveis cinemáticas envolvidas no processo. Ao final, sempre sobrarão uma parte destes observáveis provenientes do comportamento não-perturbativo que devem ser obtidos experimentalmente. O primeiro passo para o entendimento da QCD no contexto de colisões de grande energia é o antigo modelo de pártons, que é apresentado a seguir.

2.2 Modelo de pártons

Embora nosso objetivo seja estudar colisões próton-próton (pp), a explicação dos modelos envolvidos em colisões de altas energias é mais simples no espalhamento profundamente inelástico (DIS), contexto no qual surgiram as primeiras previsões do modelo de pártons [10]. Então, seguindo o que é feito na maior parte dos livros-texto [9, 11, 12, 2], é conveniente fazer um breve resumo sobre este espalhamento.

No DIS ($e + p \rightarrow e' + X$), representado na Figura 2.1, um elétron prova a estrutura do próton pela troca de um fóton de grande virtualidade $Q^2 = -q^2$, sendo q o quadrimomento do fóton. Devido a esta grande energia transferida o próton é quebrado, produzindo um estado final de muitas partículas de massa invariante $W^2 = (p + q)^2$. Os invariantes de Lorentz, dados num referencial de repouso do próton (de massa M), em que E e E' são as energias do elétron antes e depois da colisão são

$$\begin{aligned} \nu &= p \cdot q = M(E' - E) \\ x &= \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2\nu M} \\ y &= \frac{q \cdot p}{k \cdot p} = \frac{E - E'}{E}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

A seção de choque para este espalhamento tem a forma $d\sigma \sim L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu}$, onde o tensor $L_{\mu\nu}^e$ é dado pelo vértice superior da Fig. 2.1 (Figura da esquerda) representando a corrente do elétron. Já $W^{\mu\nu}$ é o chamado tensor hadrônico que carrega informação sobre a corrente no vértice inferior relacionada a complexa estrutura do próton, e pode ser decomposto em duas componentes $W_1(\nu, Q^2)$ e $W_2(\nu, Q^2)$ independentes, chamadas de funções de estrutura inelásticas, que parametrizam nossa ignorância sobre o vértice γ^*p . Com estas considerações temos [11]:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha}{4E^2 \sin^4(\frac{\theta}{2})} \left[W_2(\nu, Q^2) \cos^2(\frac{\theta}{2}) + 2W_1(\nu, Q^2) \sin^2(\frac{\theta}{2}) \right]. \tag{2.7}$$

À medida que aumentamos Q^2 , o comprimento de onda do fóton diminui, e ele pode sondar a estrutura mais interna do próton. Desta forma, o espalhamento ep funciona como um microscópio, em que o aumento da virtualidade Q^2 permite que se enxergue cada vez mais dentro da estrutura do próton. Com este sentido, o modelo de pártons prevê que (2.7)

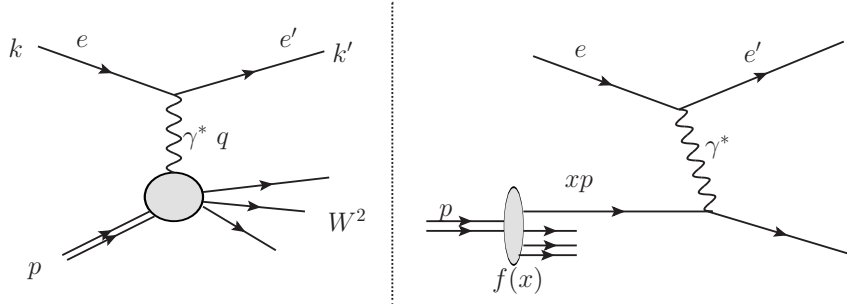


Figura 2.1: À esquerda, o espalhamento profundamente inelástico. À direita, sua interpretação no modelo de pártons.

passa a se comportar como a seção de choque de um espalhamento do elétron com outra partícula pontual sem estrutura (os pártons que constituem o próton). Tal comportamento em grande Q^2 levaria a identificação em (2.7) com as funções de estrutura adimensionais F_1 e F_2 :

$$\begin{aligned} mW_1 &= \frac{Q^2}{2m\nu} \delta \left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu} \right) = F_1(x), \\ \nu W_2 &= \left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu} \right) = F_2(x), \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo m a massa das partículas pontuais (férmions envolvidos no processo). O fato destas funções de estrutura $F_1(x)$ e $F_2(x)$ só dependerem da variável adimensional $x = \frac{Q^2}{2m\nu}$ e não de ν e Q^2 independentemente, como ocorre numa colisão elástica, levam ao comportamento chamado escalonamento (scaling) de Bjorken. Neste contexto, a variável x ganha um significado importante ao se constatar que ela é identificada como a fração de momento do próton carregada por cada párton, de onde surge a idéia das funções de distribuição de pártons (PDF).

As PDFs $f_i(x)$ dão a probabilidade de que o párton atingido pelo fóton tenha momento xp do momento total do próton p , sendo possível expressar as funções de estrutura por $F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_i e_i x f_i(x)$. Neste sentido é possível uma separação entre a seção de choque γ^* - párton e a distribuição inicial que é desconhecida:

$$\left(\frac{d\sigma}{dtdu} \right)_{ep \rightarrow eX} = \sum_i \int dx x f_i(x) \left(\frac{d\sigma}{d\hat{t}\hat{d}\hat{u}} \right)_{e-\text{párton}}, \quad (2.9)$$

sendo \hat{t} e \hat{u} são as variáveis de Mandelstam para o espalhamento dos pártons. Esta equação tem uma forma bastante intuitiva, em que a seção de choque $ep \rightarrow eX$ é dada pela soma dos espalhamentos com pártons de cada possível fração de momento x . Sendo esta uma primeira idéia sobre fatorização representada pelo lado direito da Figura 2.1. feita no modelo de pártons, sem a necessidade, a princípio, de se falar em QCD. No entanto, para que toda esta discussão seja válida, devemos assumir que no momento da interação estes pártons estejam livres, ou seja, não há interação do párton com o resto da função de onda do próton. Além disso, a identificação de x como fração de momento do próton requer que estes pártons se movam na mesma direção do próton colineares ao eixo de colisão.

Para justificar estas afirmações, devemos estar num referencial de momento infinito do próton $p \gg M$, onde a cinemática relativística torna possível a emissão de um parton com $p_T \rightarrow 0$ (momento transverso nulo). Além disso, este referencial também serve para justificar o fato de os páttons estarem livres pelo seguinte argumento exposto em [10]: num referencial em que $p \rightarrow \infty$, o tempo de vida relacionado a um estado virtual, em que um parton é dissociado da função de onda total do próton é

$$\frac{1}{\tau_{virt}} \propto \sqrt{(xp)^2 + \mu_1^2} + \sqrt{((1-x)p)^2 + \mu_2^2} - \sqrt{p^2 + M^2},$$

sendo $\mu_{1,2}$ as massas destes estados, e se desconsiderarmos termos $\mathcal{O}^2(\frac{M}{p})$ chegamos à

$$\frac{1}{\tau_{virt}} \propto \frac{1}{2p} \left[\frac{\mu_1^2}{x} + \frac{\mu_2^2}{1-x} - M^2 \right],$$

e o tempo de interação do elétron com o próton é $\tau_{int} \propto \frac{1}{q_0}$, que no referencial do centro de massa ($\vec{p} = -\vec{k}$) leva a $\frac{1}{\tau_{int}} = \frac{2M\nu + q^2}{4p}$, de onde se conclui que

$$\frac{\tau_{int}}{\tau_{virt}} \propto \frac{1}{2M\nu(1-x)} \ll 1. \quad (2.10)$$

Como ν é grande, o tempo de interação é muito pequeno comparado à lenta dinâmica das interações entre páttons neste referencial, justificando o modelo de páttons. No caso que queremos estudar ($pp \rightarrow h + X$), o modelo de páttons implica no esquema representado na Figura 2.2. Neste caso, existe uma soma sobre todos possíveis espalhamentos dos páttons a e b com diferentes frações de momento x_a, x_b , com a seção de choque partônica $\frac{d\sigma}{dt}(2 \rightarrow 2)$, representando a interação com grande momento transferido entre a e b , cujo produto final são páttons com grande momento transverso seguidos pelo processo de hadronização dado pela função de fragmentação D_h/c .

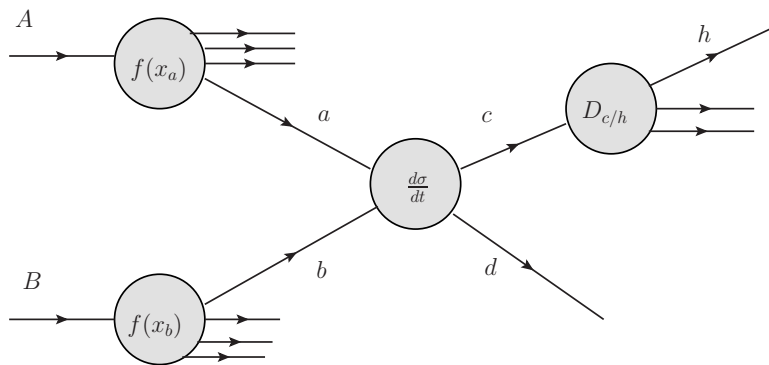


Figura 2.2: Representação da produção inclusiva de hádrons no modelo de páttons.

Vale ressaltar que no caso do DIS, o fóton só pode interagir diretamente com quarks que carregam carga elétrica, levando a uma subestimativa da seção de choque pela ausência de glúons neste modelo. Já no caso pp , não seria nem possível o cálculo exato de $\frac{d\sigma}{dt}$ na

ausência da QCD que determina a interação exata entre estes pártons. Sendo assim, a QCD vai acrescentar correções importantes a este modelo, mesmo que muito do quadro geral do modelo colinear de QCD se baseie no modelo de pártons.

2.3 Singularidades colineares

Tanto na QED quanto na QCD, existem singularidades de massa associadas à emissão colinear, quando por exemplo, um quark emite um glúon quase paralelo à sua direção de movimento. Estas singularidades constituem importantes correções da QCD ao modelo de pártons, levando a modificações das PDFs, que passam a ter uma evolução em Q^2 . Seguindo o que é feito em [9, 11], vamos dar o exemplo de como funciona este mecanismo na aproximação de Weizsäcker-Williams na eletrodinâmica [13, 14].

Se considerarmos o processo $e + p \rightarrow e + X$, podemos vê-lo em duas etapas: o inicial desdobramento (splitting) no vértice $e\gamma$ e a subsequente interação $\gamma + p \rightarrow X$ como mostrado na figura 2.3. O elemento de matriz do vértice, que dá a amplitude para o desdobramento representado, é $\mathcal{M}_{e\gamma} \sim \bar{u}_L(k)ie\gamma_\mu u_L(p)\epsilon_T^{*\mu}(q)$. Esta aproximação sugere que a seção de choque total tem a forma

$$\sigma \sim \int \frac{d^3k}{2k^0} \sum |\mathcal{M}_{e\gamma}|^2 \left(\frac{1}{q^2}\right)^2 \sigma(\gamma p \rightarrow X). \quad (2.11)$$

Para calcular esta seção de choque, podemos pensar num referencial onde o propagador do fóton é quase real (na camada de massa) exceto por um fator p_T :

$$\begin{aligned} p &= (p, 0, 0, p), \\ q &= \left(zp, p_T, 0, zp + \frac{p_T^2}{2(1-z)p} \right), \\ k &= \left((1-z)p, -p_T, 0, (1-z)p - \frac{p_T^2}{2(1-z)p} \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

que satisfaz $q^2 = -\frac{p_T^2}{(1-z)} + \mathcal{O}(p_T^4)$ e $k^2 = 0$, sendo z a fração de momento do elétron inicial carregada pelo fóton, e de forma que o elétron permanece na camada de massa, e o propagador do fóton na Eq. (2.11) vai gerar um termo $\frac{d^2 p_T}{p_T^2}$, deixando claro que a seção de choque recebe grande contribuição da região em que p_T é pequeno. O que está sendo feito, na verdade, é uma aproximação da seção de choque em torno da divergência presente no canal \hat{t} quando o ângulo de emissão do fóton tende a zero, ou $-\hat{t} \ll \hat{s}$.

Fazendo a integral de p_T , cujo limite inferior (massa do elétron) corta a singularidade quando $p_T \rightarrow 0$, a seção de choque é:

$$\sigma = \int_0^1 dz \frac{\alpha}{2\pi} \log \frac{Q^2}{m} \left[\frac{1 + (1-z^2)}{z} \right] \sigma(\gamma p \rightarrow X), \quad (2.13)$$

sendo Q^2 o limite superior de integração da ordem do momento transferido na interação.

A primeira parte da equação (2.13) pode ser entendida como a função de distribuição

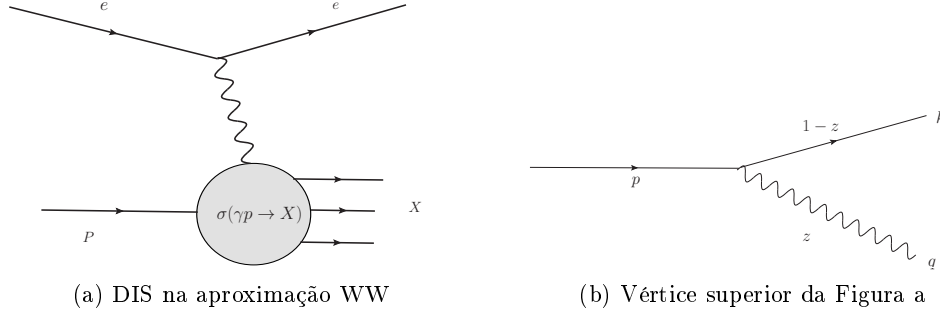


Figura 2.3: DIS visto como duas etapas, o desdobramento $e\gamma$ e a subsequente interação com o próton.

dos fótons no elétron, que dá a probabilidade de encontrar um fóton com fração z do momento do elétron:

$$f_\gamma(z) = \frac{\alpha}{2\pi} \log \frac{Q^2}{m^2} \left[\frac{1 + (1-z)^2}{z} \right], \quad (2.14)$$

de forma que o termo com o grande logaritmo, fica associado a uma função de distribuição separada da interação γp . Nesta aproximação de fóton equivalente (ou fóton real) de Weizsäcker-Williams, a interação com o próton é dada por um feixe de fótons reais vindos de uma distribuição $f_\gamma(z)$.

2.4 Evolução colinear na QCD

O mesmo procedimento adotado na seção anterior pode ser estendido para a QCD, onde existirão singularidades de massa associadas à emissão de pártons colineares, através dos três vértices possíveis representados na Figura 2.4. Cada vértice destes leva a uma amplitude representada pelas funções de desdobramento :

$$\begin{aligned} P_{qq}(z) &= P_{\bar{q}q}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{1-z} \right]_+, \\ P_{gq}(z) &= P_{g\bar{q}}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+(1-z)^2}{z} \right], \\ P_{qg}(z) &= \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2], \\ P_{gg}(z) &= 6 \left[\left[\frac{z}{1-z} \right]_+ + \frac{1-z}{z} + z(1-z) + \left(\frac{33-2n_f}{36} - 1 \right) \delta(1-z) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Podemos ver que algumas destas distribuições têm singularidades associadas à emissão de um glúon suave (soft) com $z \rightarrow 1$. Esta singularidade pode ser tratada pela prescrição $+$, que gera distribuições integráveis (não divergentes), o que é fundamental para a interpretação de probabilidades. Nesta prescrição, é retirada a divergência da integral pelo uso da relação

$$\int_a^1 [g(x)]_+ f(x) dx = \int_a^1 g(x) (f(x) - f(1)) dx - f(1) \int_0^a g(x) dx. \quad (2.16)$$

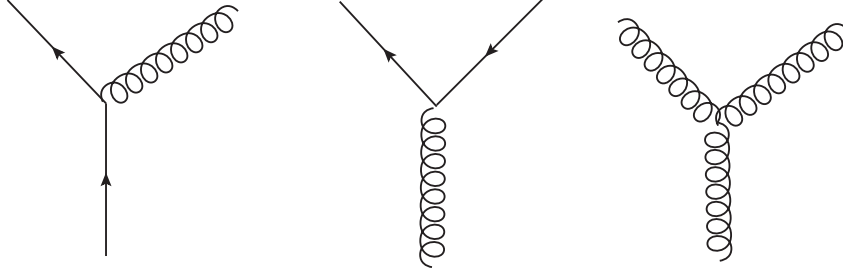


Figura 2.4: Vértices que contribuem para evolução das PDFs em QCD

Se pensarmos em sucessivas emissões, quark-glúons por exemplo, em cada etapa é possível usarmos a mesma aproximação; olhando para a Figura 2.5 o segundo glúon emitido precisa que o propagador anterior esteja quase na camada de massa comparado ao subsequente, ou seja, devemos ter $p_{T2} \gg p_{T1}$, o que garante que tal propagador gere o termo $\frac{1}{p_{T2}^2}$ entre a amplitude anterior e o resto do diagrama, resultando em uma nova divergência tipo $\log(p_{T3}^2)$. Dessa forma, se tivermos um forte ordenamento em p_T ;

$$p_{Tn} \gg p_{Tn-1} \gg \dots \gg p_{T2} \gg p_{T1}, \quad (2.17)$$

teremos contribuições $(\alpha \log \frac{Q^2}{\Lambda^2})^n$ em cada n -ésima etapa. Deve-se notar que, embora α^n seja pequeno, $(\log \frac{Q^2}{\Lambda^2})^n$ é grande e devemos somar estes termos em todas ordens de α . Tal aproximação, que ressona estas correções é usualmente denominada aproximação de logaritmo dominante em Q^2 ou LLQ.

Os múltiplos desdobramentos, dados pelo forte ordenamento (2.17) geram uma evolução para as funções de distribuição, havendo um aumento de virtualidade em cada etapa do processo (à medida que se avança ao topo na Figura 2.5) que modifica as funções de distribuição de pártons. Tal comportamento pode ser descrito pelas equações de evolução DGLAP [15, 16, 17]:

$$\frac{d}{d \log Q^2} \begin{pmatrix} f_i(x, Q^2) \\ f_g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \sum_i \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{q_i q_j}(\frac{x}{z}) & P_{q_i g}(\frac{x}{z}) \\ P_{g q_i}(\frac{x}{z}) & P_{g g}(\frac{x}{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_j(\frac{x}{z}, Q^2) \\ f_g(\frac{x}{z}, Q^2) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Estas equações nos dizem que se aumentarmos Q por um ΔQ devemos somar, por exemplo na distribuição de glúons, aqueles emitidos por um quark devido ao aumento de virtualidade. Outra forma de se ver isso é pela observação de que o ordenamento em p_T leva a uma sucessiva diminuição da área ocupada por estes pártons, já que $r^2 \sim \frac{1}{p_T^2}$, fazendo com que a densidade destes glúons diminua, de forma que não há sobreposição das funções de onda de diferentes pártons, e a função de onda do próton avança para um regime mais diluído.

A ideia de que é possível separar efeitos de longa e curta distância como apresentamos admite uma demonstração mais rigorosa do ponto de vista da QCD, através dos chamados

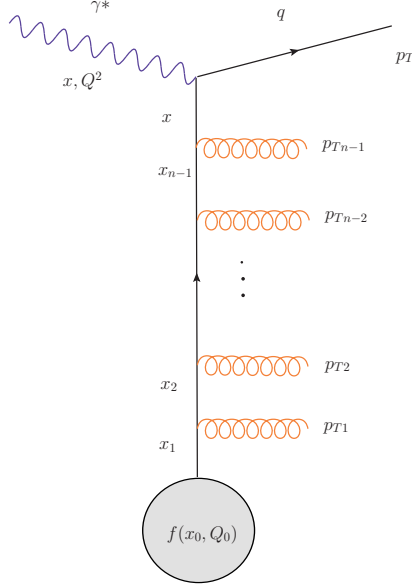


Figura 2.5: Diagramas que apresentam a evolução colinear das PDFs com forte ordenamento em p_T (no fim da evolução há a interação γ -párton no caso do DIS).

teoremas de fatorização colinear [18, 19, 20]. Enquanto o modelo de pártons assumia a fatorização de um ponto de vista fenomenológico, os teoremas de fatorização provam do ponto de vista da QCD em todas as ordens perturbativas esta constatação, e a Figura 2.2 permanece válida, com a ressalva de que as singularidades colineares devem ser realocadas nas PDFs.

A fatorização prevê que as funções de distribuição de pártons são universais, e que a seção de choque pode ser dada pela convolução destas PDFs com a parte dura da interação (grande momento transferido), $\sigma = f \otimes H + \mathcal{O}(\frac{\Lambda}{Q})$, sendo que o termo $\mathcal{O}(\frac{\Lambda}{Q})$ indica a limitação desta abordagem no caso de Q não ser grande o suficiente.

2.5 O limite de pequeno x

No limite de pequeno x as funções de distribuição são dominadas pelo comportamento de $P_{gg} \sim \frac{1}{z}$, em que a evolução da distribuição de glúons fica muito mais rápida que a de quarks, que podem ser desconsideradas. Em tal limite, a evolução DGLAP para glúons fica dada por

$$\frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial \log \frac{1}{x} \partial \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} x G\left(\frac{x}{z}, Q^2\right), \quad (2.19)$$

onde $G(x, Q^2)$ é a função de distribuição de glúons $f_g(x, Q^2)$. Neste limite, além de $\log Q^2$ há também a ressonância de termos com $\log \frac{1}{x}$. Já que x é pequeno estes termos são tão importantes quanto aqueles. Esta aproximação é chamada de aproximação de logaritmo duplo (DLA), em que os termos ressonados são $\alpha \log Q^2 \log \frac{1}{x}$. Olhando para a equação (2.13), vemos que além da integral $\frac{d^2 p_T}{p_T^2}$ também existe uma integral $\frac{dz}{z}$, que no limite

$z \rightarrow 0$ gera o segundo logaritmo desta aproximação. Este comportamento é dado por diagramas que, além do forte ordenamento p_T , também são fortemente ordenados em x :

$$x_1 \gg x_2 \gg \dots \gg x_{n-1} \gg x_n, \quad (2.20)$$

implicando num grande crescimento da distribuição de glúons quando x decresce, que fica ainda mais importante em grandes valores de Q , como podemos ver da solução analítica da Eq. (2.19):

$$xG(x, Q^2) \sim \exp \left(2\sqrt{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \log \frac{1}{x} \log \frac{Q^2}{Q_0^2}} \right). \quad (2.21)$$

A evolução colinear DGLAP ocorre no chamado limite de Bjorken

$$Q^2 \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty, \quad x \sim \frac{Q^2}{s} \sim cte, \quad (2.22)$$

onde, embora Q^2 e s sejam grandes, x permanece quase constante. Podemos, entretanto, observar a dinâmica da QCD num outro limite, o limite de Regge:

$$x \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad Q^2 \sim cte. \quad (2.23)$$

Nesta situação, a evolução LLQ dá lugar a ressonância apenas de termos $(\alpha \log \frac{1}{x})^n \sim 1$, e a equação DGLAP é substituída pela equação BFKL [21, 22] proposta para tratar a ressonância destes termos nas funções distribuição de glúons:

$$\frac{\partial \phi(x, k_T^2)}{\partial \log \frac{1}{x}} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi^2} \int \frac{d^2 q_T}{k_T^2 - q_T^2} \left[\phi(x, q_T^2) - \frac{k_T^2}{2q_T^2} \phi(x, k_T^2) \right], \quad (2.24)$$

sendo que $\phi(x, k_T^2)$ é a função de glúon não-integrada, dada por:

$$\phi(x, Q^2) = \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial Q^2}, \quad (2.25)$$

que tem o sentido de contar o número de glúons com dado momento k_T , enquanto $G(x, Q^2)$ conta todos glúons com $k_T < Q^2$. Nesta equação de evolução, existe uma lenta difusão do momento transversal dos glúons no plano transversal ao eixo de colisão, onde a interação de glúons de diferentes hádrons é dada com um momento transversal já existente (diferente do modelo colinear), portanto, tal visão necessita de uma nova forma para o esquema de fatorização.

A equação BFKL prevê um comportamento das funções de distribuição do tipo:

$$\phi(x, k_T^2) \sim \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{4\alpha_s N_c \log 2}{\pi}}, \quad (2.26)$$

o que implica numa evolução ainda mais rápida do que a aproximação DLA (2.21), e portanto um aumento da densidade de glúons ainda maior. Além disso, na aproximação DLA, a equação BFKL coincide como a previsão dada por DGLAP (2.21). Este aumento indefinido de glúons nas funções de onda dos hádrons, tanto de (2.26) quanto (2.21), leva à necessidade de modificações nesta dinâmica de pequeno x , que discutiremos nos próximos capítulos no contexto da teoria efetiva do condensado de vidro de cor (CGC).

No próximo capítulo analisaremos a produção de hádrons no âmbito do teorema de fatorização colinear, utilizando os conceitos apresentados neste capítulo.

Capítulo 3

Produção de hádrons no formalismo colinear com momento transversal inicial

O objetivo deste capítulo é o cálculo da seção de choque para a produção inclusiva de hádrons em diferentes regiões cinemáticas. Mais especificamente, estamos interessados em estudar a distribuição de hádrons em função do momento transversal para diferentes valores de \sqrt{s} (energia do centro de massa da colisão) e y (rapidez do hádron produzido). Tal observável é sensível a um possível momento transversal dos partons inicialmente presentes na função de onda do próton, e portanto pode nos dar informações sobre a dinâmica destes partons nas funções de distribuição. Soma-se a isso o fato de que nas grandes energias envolvidas nos colisores atuais de hádrons (RHIC, TEVATRON, LHC), torna possível provar estas interações em um regime extremamente denso da QCD.

Primeiramente, calcularemos a seção de choque $pp \rightarrow h + X$ no formalismo de fatorização colinear e compararemos com o modelo que prevê um momento transversal k_T intrínseco, que acrescenta nas PDFs uma distribuição gaussiana nesta variável.

3.1 O modelo de fatorização colinear

A seção de choque para um processo inclusivo (onde estamos observando apenas um dos partons do estado final) $AB \rightarrow C + X$ ou $AB \rightarrow \text{jato} + X$, já que o parton c produz um jato ao hadronizar, é dada como em [23], por:

$$E \frac{d^3\sigma}{d^3p}(AB \rightarrow \text{jato} + X) = \sum_{abcd} \int dx_a dx_b f_{a/A}(x_a, Q^2) f_{b/B}(x_b, Q^2) \times \frac{\hat{s}}{\pi} \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(ab \rightarrow cd) \delta(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u}), \quad (3.1)$$

onde $\frac{d\sigma}{d\hat{t}}$ é a seção de choque para o subprocesso partônico $2 \rightarrow 2$ (entre quarks, antiquarks e glúons); $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ são as variáveis de Mandelstam para o espalhamento dos partons. Nesta equação já estamos incluindo $f(x, Q^2)$ como as funções de distribuição de partons dependentes da escala de fatorização, que têm evolução DGLAP.

Para estudar fenômenos de grande p_T é comum se introduzir as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{2p_T}{\sqrt{s}}, & x_F &= \frac{2p_L}{\sqrt{s}}, \\ y &= \log\left(\frac{E+p_L}{E-p_L}\right), & \eta &= \log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo y a rapidez e η pseudorapidez de uma determinada partícula. Podemos calcular (3.1) num referencial em que os quadrimomentos dos pártons são dados por

$$\begin{aligned} p_a &= x_a \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, 1) \\ p_b &= x_b \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1) \\ p_c &= p_{Tc} (\cosh y, 1, 0, \sinh y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

que são a simples representação da cinemática mostrada na Figura 3.1, o que leva às variáveis de Mandelstam:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= x_a x_b s, \\ \hat{t} &= -x_a p_{Tc} \sqrt{s} e^{-y}, \\ \hat{u} &= -x_b p_{Tc} \sqrt{s} e^y. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esta seção de choque nos dará a produção de um único jato (vários hádrons colimados produzidos por c). No entanto, estamos interessados na seção de choque para a produção de um único hádron, ou seja, precisamos especificar mais uma etapa deste processo: a transformação do párton c em um hádron observado. De forma que precisamos adicionar em (3.1) a probabilidade de que o párton c se torne um hádron de uma espécie h específica com fração z de seu momento. Isto pode ser feito no formalismo colinear através das funções de fragmentação (FF), $D_{h/c}(z, Q^2)$, parametrizadas em um dado Q_0 , que assim como as PDFs, tem uma evolução DGLAP, onde a direção do hádron h é colinear à do párton c , implicando em $p_T = p_{Tc} z$ (p_T é o momento transversal do hádron observado). Devido a esta colinearidade, a rapidez deste hádron permanece a mesma na aproximação em que a massa deste pode ser desconsiderada, ou seja, $y \approx \eta$.

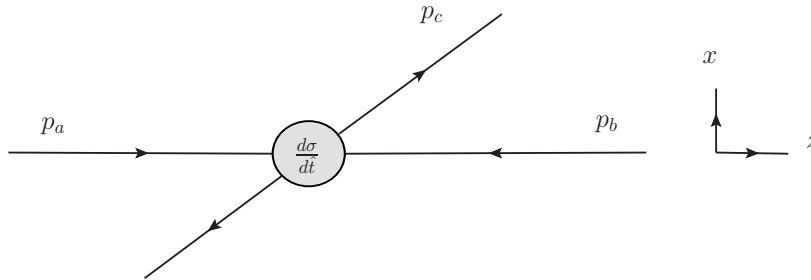


Figura 3.1: Cinemática do processo $2 \rightarrow 2$ no referencial dos pártons

Da equação (3.2) vemos que η é relacionado ao ângulo de espalhamento do hádron observado relativo ao eixo de colisão, de forma que o espectro p_T fica caracterizado por

duas variáveis: \sqrt{s} (energia da colisão) e y (ângulo do hádron observado).

A inclusão da hadronização em (3.1) adiciona uma integral em z que pode ser feita expressando $\delta(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u})$ em termos desta variável, resultando em

$$E \frac{d^3\sigma}{d^3p}(AB \rightarrow h + X) = K \sum_{abcd} \int_{x_{a_{min}}}^1 dx_a \int_{x_{b_{min}}}^1 dx_b f_{a/A}(x_a, Q^2) f_{b/B}(x_b, Q^2) \times \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(ab \rightarrow cd) \frac{D_{h/c}(z, Q^2)}{\pi z}, \quad (3.5)$$

onde z pode ser obtido por $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0$, de onde podemos obter os limites de integração $x_{a,b}$ a partir do valor máximo $z = 1$ e $x_{a_{min}} = 1$, resultando em:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x_T}{2x_b} e^{-y} + \frac{x_T}{2x_a} e^y, \\ x_{b_{min}} &= \frac{x_a x_T e^{-y}}{2x_a - x_T e^y}, \\ x_{a_{min}} &= \frac{x_T e^y}{2 - x_T e^{-y}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A seção de choque $\frac{d\sigma}{d\hat{t}}$ é escrita em termos das variáveis de Mandelstam, como mostrado na tabela 3.1 (o termo $\pi\alpha^2/s^2$ comum a todas estas seções de choque foi retirado da tabela), representando todas as interações possíveis entre os pártons dadas nos diagramas da Figura 3.2. Devemos notar que o somatório da Eq. (3.5) implica que devemos somar todos os pares ab, cd que correspondem a $gg, gq, g\bar{q}, qq, q\bar{q}, \bar{q}q, \bar{q}\bar{q}$.

É comum encontrarmos dados onde em vez da seção de choque invariante (3.5) dão o produto invariante N que é associado ao número de partículas observadas, neste caso a seção de choque é obtida multiplicando-se pela seção de choque total inelástica $E \frac{d^3\sigma}{d^3p} = \sigma_{inel} N \frac{d^3\sigma}{d^3p}$. Uma outra forma comum de se expressar o invariante (3.5) é através das relações

$$E \frac{d^3\sigma}{d^3p} = \frac{d^3\sigma}{d^2p_T dy} = \frac{d^2\sigma}{2\pi p_T dp_T dy}. \quad (3.7)$$

Outra preocupação que devemos ter é referente à escala de fatorização Q^2 das PDFs e FF, que admitem uma certa liberdade de escolha levando a incertezas no cálculo da seção de choque. O argumento utilizado em [24] é que, como as PDFs evoluem até Q^2 , se escolhermos esta escala muito maior que o momento transferido na parte dura do processo, estaremos ressomando na evolução DGLAP emissões de pártons com momento maior do que este, levando a uma recontagem do mesmo processo. O oposto também é verdade, se escolhermos uma escala muito menor. Como o momento transferido entre os pártons é $p_{Tc} = p_T z$, devemos ter algo próximo disso, em geral é aceito o intervalo $\frac{p_{Tc}}{2} < Q < 2p_{Tc}$, o que leva a uma incerteza no resultado de um fator ~ 2 . Não é necessário que a escala que entra na fragmentação seja exatamente a mesma que a das PDFs. De fato muitos autores usam escalas diferentes, no entanto, ela deve ser algo próximo. Para descrever o momento transversal intrínseco dos pártons na próxima seção é comum que seja usado [25, 23] uma escala baseada nas variáveis de Mandelstam $Q^2 = \frac{2\hat{s}\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2 + \hat{t}^2 + \hat{u}^2}$ que no limite

Tabela 3.1: Subprocessos partônicos entre quarks, antiquarks e glúons representados pela figura 3.2 (para simplificar a notação o chapéu foi retirado).

Subprocesso $ab \rightarrow cd$	$\frac{d\sigma}{dt}$
$qq' \rightarrow qq'$	$\frac{4}{9} \frac{s^2+u^2}{t^2}$
$qq \rightarrow qq$	$\frac{4}{9} \left[\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{s^2+t^2}{u^2} \right] - \frac{8}{27} \frac{s^2}{tu}$
$q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$	$\frac{4}{9} \frac{t^2+u^2}{s^2}$
$q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}'$	$\frac{4}{9} \left[\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{u^2+t^2}{s^2} \right] - \frac{8}{27} \frac{u^2}{ts}$
$gq \rightarrow gq$	$-\frac{4}{9} \left[\frac{s}{u} + \frac{u}{s} \right] + \frac{s^2+u^2}{t^2}$
$q\bar{q} \rightarrow gg$	$\frac{32}{27} \left[\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right] - \frac{8}{3} \frac{t^2+u^2}{s^2}$
$gg \rightarrow q\bar{q}$	$\frac{1}{6} \left[\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right] - \frac{3}{8} \frac{t^2+u^2}{s^2}$
$gg \rightarrow gg$	$\frac{9}{2} \left[3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{su}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right]$

$\hat{s} \gg \hat{t}, \hat{u}$ é próxima a $2p_{Tc}$. No entanto, encontramos melhores resultados usando apenas $Q^2 = p_{Tc}^2$ como em [26, 27, 28].

Como a aproximação LLQ considera apenas termos $\log Q^2$, uma mudança da escala por uma constante leva à

$$\frac{\log Q^2}{\log Q'^2} = \left(1 + \frac{\log cte}{\log Q'^2} \right), \quad (3.8)$$

que embora no limite $Q \rightarrow \infty$ seja insignificante, na prática devemos considerá-la, por isso devemos ter cuidado ao escolher esta escala.

Além destes fatores, existe a presença de um fator K na seção de choque (3.5), que leva em conta as correções NLO (além de ordem dominante) e pode ser definida por $K = \frac{\sigma_{NLO}}{\sigma_{LO}}$. Como todos cálculos presentes neste trabalho serão feitos em LO, usaremos o fator K como uma constante para melhor descrever os dados numa região de p_T onde o modelo deva funcionar bem. É comum neste sentido que se use o fator K como a distância entre a previsão teórica e os dados experimentais [29]. De qualquer forma, não faremos nenhuma análise detalhada destes fatores.

3.2 Momento transversal intrínseco e as limitações do modelo colinear

Embora o modelo de fatorização colinear seja capaz de dar uma boa descrição quantitativa de fenômenos dados pela pura dinâmica QCD, devemos observar suas limitações e os possíveis mecanismos mais complexos que possam estar por trás destas interações. Neste

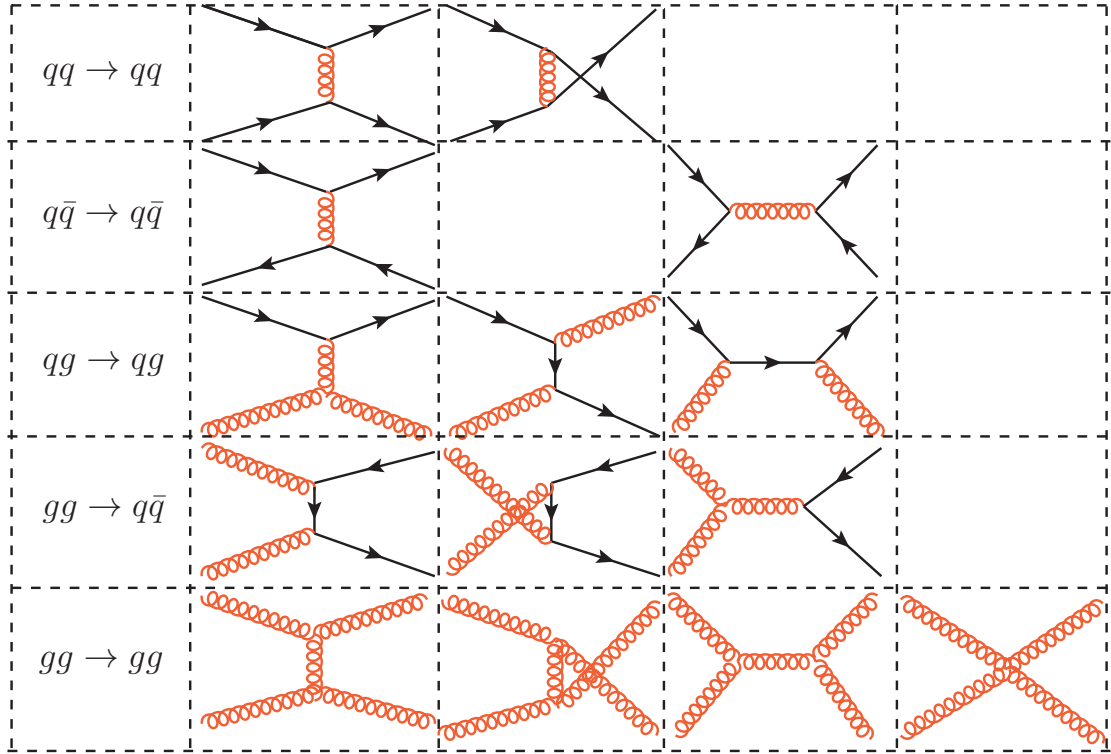


Figura 3.2: Diagramas de Feynman dos subprocessos partônicos nos canais t, u, s nas três primeiras colunas. A última corresponde ao vértice de quatro glúons.

contexto, esta seção e o próximo capítulo se dedicam a descrever diferentes formas de se modificar este formalismo, e com isto teremos uma visão mais realista destes fenômenos. Nesta seção, descreveremos o modelo fenomenológico que acrescenta a possibilidade de que os pártons não entrem colineares na reação $2 \rightarrow 2$, mas sim com um momento transversal k_T preexistente.

A aproximação colinear está baseada nos limites impostos por (2.22), mas na prática não existe um limite exato em que esta visão se torna válida. O que ocorre é que, à medida em que estas relações se tornam mais realistas, nossa visão do fenômeno também, de forma que deve existir uma transição suave que torna a Eq. (3.5) válida. Em [30] é comentado que por volta de $\sqrt{s} \gtrsim 50$ GeV e $p_T \gtrsim 5$ GeV podemos ter uma boa descrição com este modelo, que deve melhorar ao aumentarmos estes valores. Tais restrições são de certa forma relacionadas, já que a aumentando-se a energia da colisão, a probabilidade de que se observe hádrons de grande p_T também cresce.

Estas limitações são muito menos presentes nos colisores de hádrons modernos, que fazem colisões com $\sqrt{s} \sim 1$ TeV, sendo que historicamente as correções ao modelo colinear remontam ao início da descrição perturbativa das interações hadrônicas de altas energias, onde havia uma maior necessidade de se considerar estas correções para descrever os dados experimentais. Para ser mais específico, podemos citar três trabalhos de R. P. Feynman, R. D. Field e G. C. Fox [31, 32, 33] publicados entre 1977 e 1978, que ilustram o desenvolvimento dos modelos para explicar as reações $pp \rightarrow h + X$. No primeiro [31], a seção de

choque é calculada com base no simples modelo de pártons (onde as PDFs só dependem de x), e a seção de choque $\frac{d\sigma}{dt}$ era dado apenas pelo espalhamento elástico quark-quark (a possível presença de glúons ainda era incerta), de forma que a própria seção de choque $\frac{d\sigma}{dt}$ é fenomenologicamente parametrizada por um comportamento $\frac{d\sigma}{dt} \sim s^{-N} f(\hat{t}/\hat{s})$ para descrever o escalonamento (scaling) da seção de choque $E \frac{d^3\sigma}{d^3p} \sim p_T^{-8}$ em dados de \sqrt{s} de dezenas de GeV. Sendo que a troca vetorial (ver $qq \rightarrow qq$ na Tabela 3.1) é descartada por eles por gerar um comportamento p_T^{-4} . Vamos discutir este comportamento de escalonamento mais adiante, no entanto, vale adiantar que nem a QCD em NLO chega a previsões tão grandes para este expoente.

Os autores em [32], acrescentam a este mesmo modelo a possibilidade de que o movimento destes hádrons nas funções de distribuição possa ser fonte de um momento transversal k_T intrínseco, que é descrito pela adição de uma função exponencial $f(k_T) \sim \exp(-|b|k_T)$. Finalmente, em [33] é dado o modelo QCD como usaremos, em que as seções de choque partônicas são dadas como na Tabela 3.1 e as funções de distribuição são dependentes de Q^2 , além de uma distribuição gaussiana descrever um momento transversal inicial médio $\langle k_T \rangle \sim 800$ MeV.

3.3 Seção de choque com k_T intrínseco

Existem basicamente dois mecanismos que podem dar origem ao k_T inicial: o primeiro é o próprio movimento de Fermi dos pártons (não-perturbativo) inicialmente distribuídos no próton. O outro, é devido a correções perturbativas, por exemplo o Bremsstrahlung de glúons com um grande ângulo, que não é computado na aproximação colinear. Este comportamento leva [30] a supor uma distribuição que pode ser dependente de Q^2 na forma

$$\langle k_T^2 \rangle = A + B\alpha_s(Q^2)Q^2, \quad (3.9)$$

com A sendo o momento transversal intrínseco e B leva a uma modificação devido a processos perturbativos. É possível uma outra abordagem (mais comum) em que simplesmente escolhemos $\langle k_T^2 \rangle = A$, e ajustar este valor para cada \sqrt{s} dos dados experimentais, sendo que a dependência perturbativa entraria junto em A e não por uma função de Q^2 . Vamos seguir [25] e usar a distribuição dependente de Q^2 com $A = 1,2$ e $B = 0,2$, sendo que a distribuição gaussiana em k_T é independente de x e portanto separada das PDFs:

$$g(k_T, Q^2) = \frac{e^{-k_T^2/\langle k_T^2 \rangle}}{\pi \langle k_T^2 \rangle}. \quad (3.10)$$

A cinemática do processo agora fica representada pela Figura 3.3 com os quadrimomentos dados por

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_{Ta}^2}{x_a\sqrt{s}} + x_a\sqrt{s}, \quad 2\vec{k}_{Ta}, \quad x_a\sqrt{s} - \frac{k_{Ta}^2}{2x_a\sqrt{s}} \right), \\ p_b &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_{Tb}^2}{x_b\sqrt{s}} + x_b\sqrt{s}, \quad 2\vec{k}_{Tb}, \quad -x_b\sqrt{s} + \frac{k_{Tb}^2}{2x_b\sqrt{s}} \right), \\ p_c &= p_{Tc}(\cosh y, 1, 0, \sinh y), \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde um possível efeito k_T na fragmentação é desconsiderado, o que faria com que o párton c não tivesse a mesma direção do hádron produzido. É possível considerar uma distribuição gaussiana como (3.10) para as FF, como feito em [26, 33], no entanto também é possível argumentar que um possível k_T extra gerado nesta etapa do processo possa já estar incluso em $\langle k_T \rangle$ inicial.

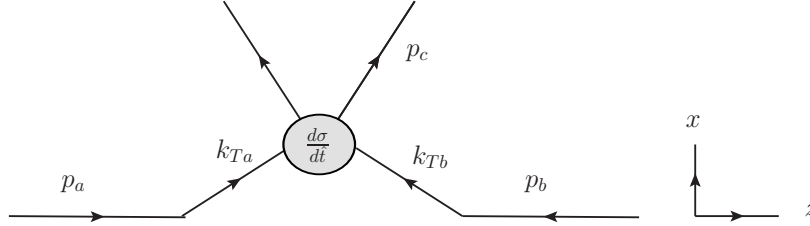


Figura 3.3: Cinemática do processo $2 \rightarrow 2$ acrescentando k_T inicial.

A presença de k_T nos momentos (3.11) faz com que x não seja mais a simples fração de energia ou momento, mas sim variáveis do cone de luz $x_{a,b} = (E_{a,b} \pm p_{La,b})/\sqrt{s}$, sendo que estas mudanças na cinemática produzem as novas variáveis de Mandelstam:

$$\begin{aligned}\hat{s} &= x_a x_b s + \frac{k_{Ta}^2 k_{Tb}^2}{x_a x_b s} - 2k_{Ta} k_{Tb} (\cos \phi_a \cos \phi_b + \sin \phi_a \sin \phi_b), \\ \hat{t} &= -p_{Tc} \left(x_a \sqrt{s} e^{-y} + \frac{k_{Ta}^2 e^y}{\sqrt{s} x_a} - 2k_{Ta} \cos \phi_a \right), \\ \hat{u} &= -p_{Tc} \left(x_b \sqrt{s} e^y + \frac{k_{Tb}^2 e^{-y}}{\sqrt{s} x_b} - 2k_{Tb} \cos \phi_b \right),\end{aligned}\tag{3.12}$$

onde $\phi_{a,b}$ são os ângulos entre os vetores \vec{p}_T e $\vec{k}_{Ta,b}$. Os limites de integração, assim como no caso colinear, podem ser obtidos por $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0$, resultando em expressões muito complicadas de $x_{a,bmin}$ que se tornam funções de muitas variáveis e complicam muito a integração (os limites de x dependem de k_T e os de k_T também dependem de x). Como estas correções são da ordem k_T^2/\sqrt{s} vamos ignorá-las, já que \sqrt{s} é grande e k_T deve ser limitado com as restrições $k_{Ta,b} < \min(\sqrt{s} x_{a,b}, \sqrt{x_{a,b}(1-x_{a,b})})$. Estas restrições existem porque k_T não pode ser tal que o párton tenha energia maior que a do próton, nem que ele se mova numa direção contrária.

Numericamente a gaussiana (3.10) dá uma maior importância para aqueles pártons com momento em torno da média $\langle k_T \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{4} \langle k_T^2 \rangle} \sim 1$, e o rápido decaimento desta função faz com que aqueles pártons de grande k_T não alterem a seção de choque. Se k_T é muito grande, ele seria fonte de todo momento transversal observado, o que torna possível que não haja momento relevante transferido na parte dura do processo, invalidando o cálculo perturbativo. Como vamos ver nos resultados, a diferença entre este modelo e o puro modelo colinear é apenas na região de pequeno p_T .

Ainda devemos ressaltar que k_T pode ser tal que as variáveis de Mandelstam tendem a zero levando a divergências na seção de choque dos pártons. Para evitar este comportamento é comum adicionar-se um regulador μ proposto em [32], que deve ser pequeno

(em torno de 1GeV) para não alterar a seção de choque resultante, desta forma teremos $\hat{t} \rightarrow \hat{t} - \mu^2$, $\hat{u} \rightarrow \hat{u} - \mu^2$, $\hat{s} \rightarrow \hat{s} + 2\mu^2$. Por fim, teremos a seção de choque:

$$E \frac{d^3\sigma}{d^3p}(AB \rightarrow h + X) = K \sum_{abcd} \int dx_a dx_b dk_{T_a}^2 dk_{T_b}^2 g_A(k_{T_a}, Q^2) g_B(k_{T_b}, Q^2) \times f_{a/A}(x_a, Q^2) f_{b/B}(x_b, Q^2) \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(ab \rightarrow cd) \frac{D_{h/c}(z, Q^2)}{\pi z}, \quad (3.13)$$

sendo que em coordenadas polares podemos fazer a integral $d^2k_{T_{a,b}} = dk_{T_{a,b}} d\phi_{a,b} k_{T_{a,b}}$, restando seis integrais a serem feitas, e considerando todas as restrições discutidas.

3.4 Escalonamento da distribuição p_T

A distribuição p_T apresenta um comportamento tipo lei de potência representada no escalonamento:

$$E \frac{d^3\sigma}{d^3p} = \frac{F(x_T, \theta)}{p_T^n}, \quad (3.14)$$

sendo $F(x_T, \theta)$ uma função de \sqrt{s}/p_T e rapidez. Como já comentamos, o modelo de pártons esperaria um escalonamento exato com um expoente $n = 4$, no entanto, as violações do escalonamento impostas pela QCD implicam em n variável, $n = n(x_T, \sqrt{s})$, que tende a crescer com o aumento de x_T até algo em torno de $n \simeq 6$.

Não temos o objetivo de fazer nenhuma análise detalhada deste expoente, mas vale a pena mostrar os resultados da Ref. [1], em que os autores comparam n experimental com o esperado em nível perturbativo NLO:

Exp.	Ref.	Species	\sqrt{s}	p_\perp	x_\perp	n_{data}	$\langle n^{exp} \rangle$	$\langle n^{NLO} \rangle$
E706	[11]	π^0	31.6 , 38.8	2 - 9	$10^{-1} - 4 \times 10^{-1}$	25	8.2 ± 0.11	6.1 ± 0.09
PHENIX/ISR	[9, 10]	π^0	62.4 , 22.4	2 - 7	$2 \times 10^{-1} - 2 \times 10^{-1}$	3	7.5 ± 0.19	6.2 ± 0.30
PHENIX	[9, 12]	π^0	62.4 , 200	2 - 19	$7 \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-1}$	12	6.7 ± 0.05	5.6 ± 0.08
UA1	[15]	h^\pm	500 , 900	2 - 9	$8 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-2}$	18	5.7 ± 0.09	5.2 ± 0.04
CDF	[13]	h^\pm	630 , 1800	2 - 9	$7 \times 10^{-3} - 10^{-2}$	5	5.2 ± 0.15	5.0 ± 0.07
CDF	[14]	tracks	630 , 1800	2 - 19	$7 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-2}$	52	5.7 ± 0.03	5.0 ± 0.02
CDF	[16]	γ	630 , 1800	11 - 81	$3 \times 10^{-2} - 9 \times 10^{-2}$	7	4.7 ± 0.09	4.3 ± 0.01
D0	[17, 18]	γ	630 , 1800	11 - 107	$3 \times 10^{-2} - 10^{-1}$	6	4.5 ± 0.12	4.3 ± 0.01
CDF	[19]	jets	546 , 1800	29 - 190	$10^{-1} - 2 \times 10^{-1}$	9	4.3 ± 0.09	4.6 ± 0.01
D0	[20]	jets	630 , 1800	23 - 376	$8 \times 10^{-2} - 4 \times 10^{-1}$	23	4.5 ± 0.04	4.6 ± 0.01

Figura 3.4: Tabela dos autores de [1] que mostra a comparação de n experimental com o cálculo NLO. As referências nesta tabela não são nossas citações, mas as dos autores daquele trabalho.

Nesta tabela os dados de diferentes experimentos são dados em rapidez central ($y = 0$), com $\langle n^{exp} \rangle$ sendo o n médio extraído da comparação do espectro de x_T em duas energias distintas (x_T é dado na eq. (3.2)), e $\langle n^{NLO} \rangle$ é o esperado pelo cálculo NLO. Mais detalhes do cálculo estão nesta referência [1].

Duas observações são importantes desta tabela: primeiro, o decaimento do espectro p_T é mais rápido que aquele esperado pelo cálculo do modelo colinear, principalmente em

baixas energias. Em segundo, o expoente n para a produção de fótons ou jatos tem uma menor dependência com a variação de x_T mesmo cobrindo uma maior região desta variável, o que pode mostrar a necessidade de se considerar efeitos mais complicados possivelmente presentes na hadronização.

A inclusão de k_T intrínseco visa diminuir a discrepância entre n observado e o esperado pelo modelo colinear. Se olharmos as modificações das variáveis de Mandelstam (3.12), o acréscimo de k_T leva a um aumento da seção de choque partônica, além de um aumento na rapidez com que ela decai (aumento na inclinação), o que significa um aumento de n . A Figura 3.5 mostra a seção de choque que calculamos com o modelo colinear Eq. (3.5) multiplicada por p_T^6 , de onde vemos o comportamento de escalonamento aproximado com $n = 6$ na região de $p_T \gtrsim 5$ em energias de 7 e 0.9 TeV, que é ainda mais preciso para o primeiro caso. Obviamente, o desvio deste escalonamento não significa por si só um problema com a teoria, e é algo esperado pela ressonância de $\log Q^2$. O que queremos mostrar é que a região problemática neste caso não é esta que segue o escalonamento aproximado $n = 6$ imposto pelo modelo colinear em grande p_T , mas sim a região anterior que necessita de k_T para ter um escalonamento mais "correto". No gráfico, a curva referente a 31.56 GeV vimos um comportamento bastante diferente do expoente n . Os detalhes dos nossos cálculos que geraram esta figura estão na próxima seção, assim como uma análise dos dados experimentais a partir dos modelos colinear e sua melhoria com a introdução de k_T inicial.

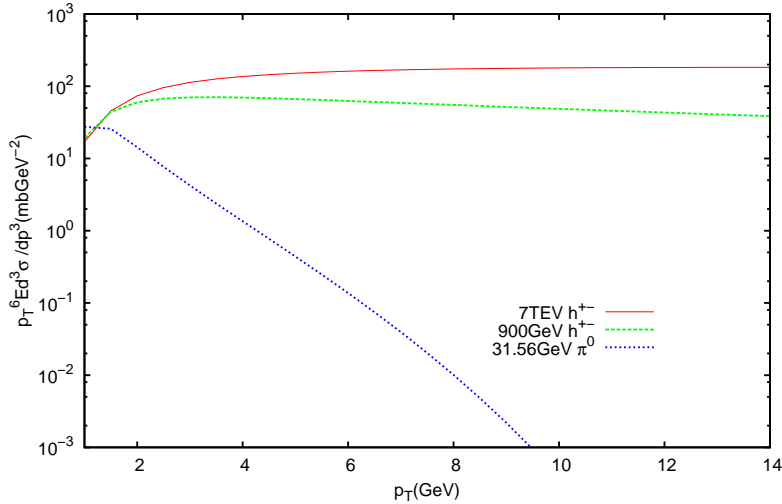


Figura 3.5: Seção de choque (3.5) multiplicada por p_T^6 em diferentes energias e rapidez central, multiplicadas por um fator 1, 5 e 200 de maior para menor energia.

3.5 Resultados no formalismo colinear

Numericamente, as integrais da equação (3.5) são feitas pelas rotinas presentes em QUADPACK [34], que tratam de funções de uma dimensão pela regra de quadratura adaptativa (neste caso a sub-rotina QAG). Já a integral (3.13) envolve seis integrais, sendo

que as quatro com limites constantes ($K_{T_{a,b}}, \phi_{a,b}$) são feitas com o algoritmo VEGAS [35, 36]. No que diz respeito as PDFs e FF usamos MSTW2008 [37] e KKP [38] respectivamente, sendo que todos os cálculos são feitos em LO apresentados nas Figuras 3.6, 3.7, 3.8.

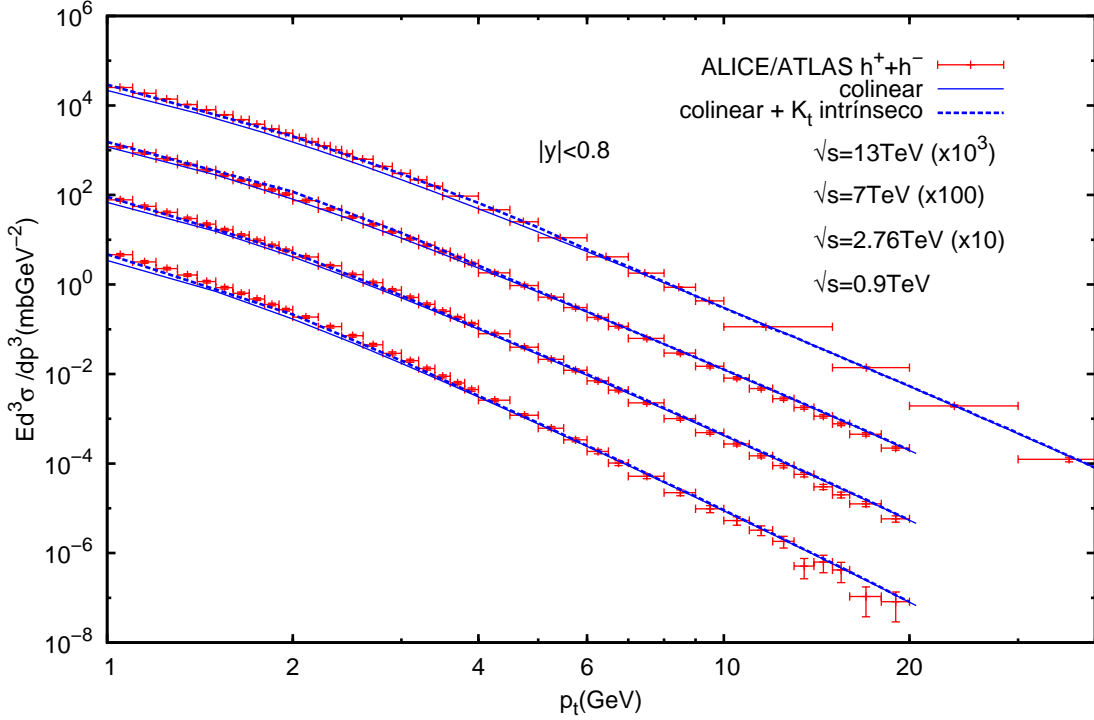


Figura 3.6: Seção de choque no modelo colinear e com k_T inicial comparadas com os dados do LHC.

A Figura 3.6 compara nossas previsões para produção de hádrons carregados ($\pi^\pm + K^\pm + p\bar{p}$) com os dados de [6, 7] na região de rapidez central. Estes são os dados onde se espera o melhor funcionamento do modelo de fatorização colinear, principalmente na região de grande p_T como é constatado. Tal figura nos leva às seguintes conclusões:

1. Existe um pequeno aumento da seção de choque em pequeno p_T que corresponde a uma melhor descrição dos dados, já que sem a inclusão de k_T os dados são subestimados.
2. A partir de um certo valor de p_T estas correções desaparecem e ambos os modelos dão previsões idênticas em grande p_T com um escalonamento de $n \sim 6$.
3. O valor de p_T em que os modelos convergem tende a crescer com o aumento de \sqrt{s} sendo $p_T \sim 3, 4, 6$ GeV para $\sqrt{s} = 2.7, 7, 13$ TeV respectivamente. No entanto, na região onde existe a diferença, a discrepância entre os modelos é praticamente a mesma e não depende muito de \sqrt{s} .

4. Existe um fator K que tende a decrescer com o aumento da energia, sendo $K = 0.9, 0.8, 0.7, 0.8$ para $\sqrt{s} = 0.9, 2.7, 7$ e 13 TeV. Escolhemos este fator para representar os dados em torno de $p_T = 6$ GeV onde o modelo colinear passa a funcionar melhor.

Para termos uma visão mais geral, principalmente na região de \sqrt{s} pequeno onde o modelo colinear não deve ser tão bom, fizemos a mesma comparação com os dados de rapidez central e energias menores de [39, 40]. Os resultados expressos na Figura 3.7, mostram a seção de choque para a produção de píons neutros e carregados em $\sqrt{s} = 31.56, 62.4$ e 200 GeV.

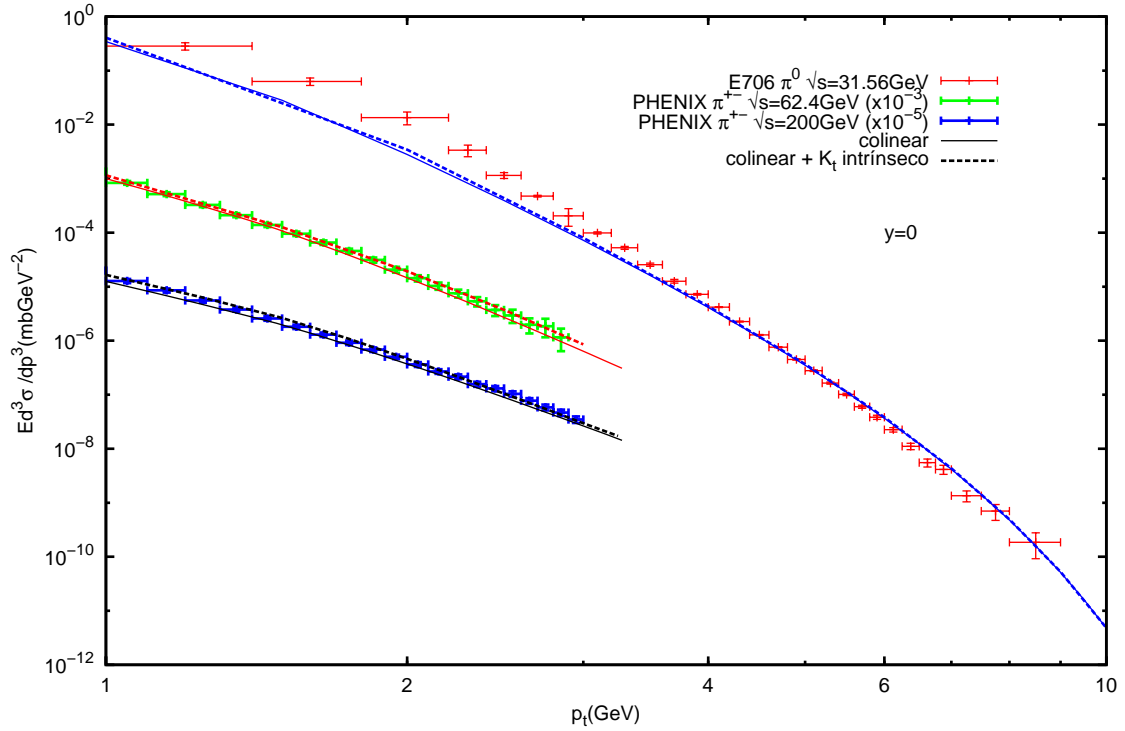


Figura 3.7: O mesmo da Figura 3.6 para energias mais baixas.

As conclusões que podemos tirar desta figura não parecem tão claras quanto no caso anterior de grandes energias. Neste caso, para a produção de π^0 não encontramos nenhuma diferença significativa e as previsões do modelo colinear passam longe dos dados em $p_T < 4$ GeV. Isso parece um pouco questionável, já que em $\sqrt{s} = 62.4$ GeV (energia muito próxima) os dados são bem descritos, havendo um pequeno aumento da seção de choque em relação ao puro modelo colinear. Os resultados em $\sqrt{s} = 200$ GeV seguem as mesmas conclusões da figura 3.6. Em todas as três curvas o fator K também decresce com aumento da energia, $K = 2.5, 2, 1.1$ em $\sqrt{s} = 31.56, 62.4, 200$ GeV, respectivamente.

Todos estes dados discutidos até agora, são de hádrons com $y = 0$ (espalhados num ângulo $\theta \sim \pi/2$), que é a região em que o modelo de k_T intrínseco que estamos usando é geralmente parametrizado (não é comum encontrar este modelo descrevendo dados de grande rapidez). No entanto, à medida que y aumenta $\theta \rightarrow 0$, podemos ver das relações

(3.6) que um dos x fica muito pequeno. E como discutido anteriormente, DGLAP não ressona propriamente termos $\log \frac{1}{x}$ importantes nesta região, então devemos esperar que exista uma mudança na dinâmica refletida nestes dados (tipo BFKL). Além do mais, mesmo o modelo que inclui k_T não diz nada sobre a dependência de x nas funções de distribuição (a hipótese de [33] é que a dependência k_T seria fatorizada da PDF e independente de x).

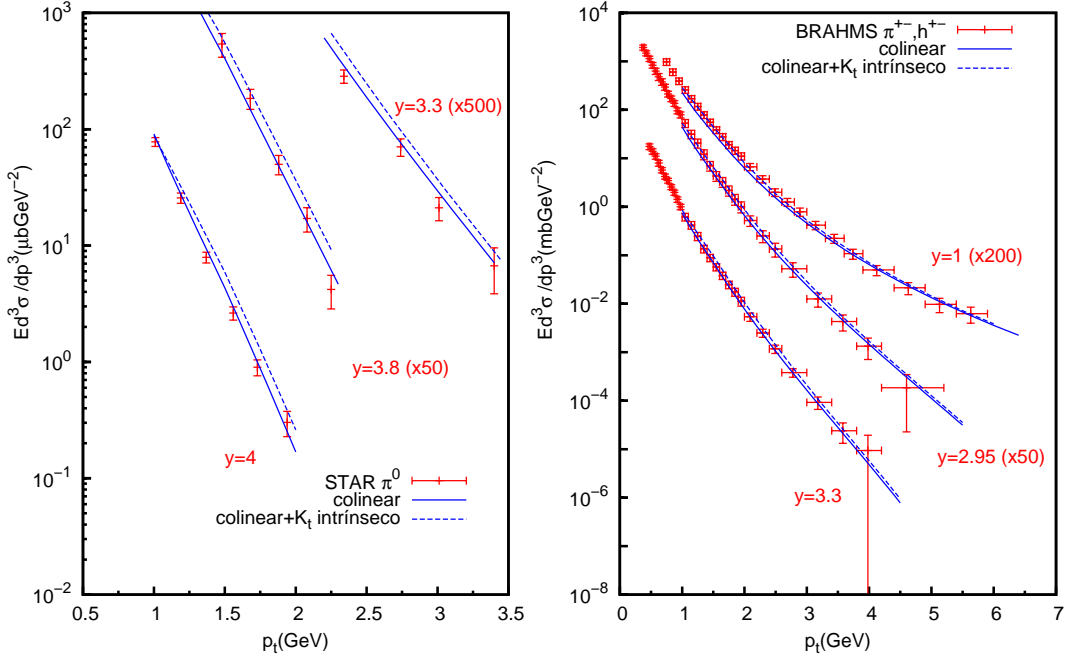


Figura 3.8: O mesmo das figuras anteriores para diferentes valores de y e $\sqrt{s} = 200$ GeV

A Figura 3.8 faz a mesma comparação que as anteriores para descrever dados de [41, 42, 43], sendo todos dados de mesma energia 200 GeV, e diferentes valores de rapidez. Em relação aos dados de rapidez central, existem duas diferenças: há a necessidade de um fator K menor do que aquele na mesma energia e $y = 0$, sendo $K = 0.7$ para os hádrons carregados (gráfico da direita) e $K = 0.5$ para π^0 . Além disso, as correções ao modelo colinear parecem se estender por uma região maior de p_T , mas não parece em geral haver nenhum grande desvio dos dados (pelo menos do comportamento de escalonamento). Devemos notar que em $y = 4$ temos um x muito pequeno, $x \sim 10^{-4}$ e se há alguma evidência de uma dinâmica muito diferente de DGLAP ela não parece presente nestes resultados.

Podemos comparar estes resultados com os de outros trabalhos semelhantes, por exemplo em [26] são calculadas estas seções de choque em energias menores de 200 GeV em rapidez central com resultados muito parecidos com estes, inclusive o fator K que usamos em 200, 62.4, 31.56 GeV são quase os mesmos. Em energias maiores, os resultados que obtivemos têm um comportamento parecido com o de [25], entretanto, este apresenta resultados com grande modificação feitas pelo k_T inicial ao modelo colinear em pequenas

energias (coisa que não constatamos). Em [23], as previsões em torno de 60 GeV também são parecidas com as que obtivemos, a diferença é que neste caso, em energias mais altas não se observou modificações à seção de choque impostas por k_T . Esta diferença parece ser atribuída ao fato de que este último usa $\langle k_T \rangle = cte$, enquanto o anterior usa k_T dependente de Q^2 , o que deve indicar que estamos observando efeitos devidos à correções perturbativas.

O puro k_T intrínseco reflete o tamanho do hádron pelo princípio de incerteza, devendo ser algo em torno de centenas de MeV, no entanto, a maioria das parametrizações encontra um $\langle k_T \rangle > 1$ GeV, o que reforça a ideia de que este não é um fenômeno puramente não-perturbativo. Sendo assim, não deveríamos usar um mesmo fator K em ambas as equações (3.5) e (3.13) como fizemos (e como é feito geralmente), mas tendo em vista que K dá as correções NLO, é possível que parte disso já tenha sido incluso em $\langle k_T \rangle$.

Concluimos o estudo do modelo colinear ressaltando que, fora os dados de $\sqrt{s} = 31.45$ GeV em pequeno p_T , existe uma boa descrição de dados em um grande intervalo de \sqrt{s} e y . O momento transversal k_T inicial, quando incluso, tende a fazer pequenas melhoras na seção de choque, mas mesmo em ordem dominante (LO) o simples modelo colinear gera bons resultados.

No próximo capítulo analisaremos as abordagens que incluem efeitos de ressonância de termos $\log \frac{1}{x}$ através de evoluções além da DGLAP. Descreveremos o efeito de saturação das distribuições partônicas em x muito pequeno, e os efeitos não-lineares que tal efeito introduz nas equações de evolução. Neste sentido o CGC se apresenta como a teoria correta para descrever a QCD em regime de alta densidade.

Capítulo 4

Condensado de vidro de cor

Na seção 3.4, descrevemos uma limitação do modelo colinear no sentido de que ele produziria um escalonamento médio "errado" em regiões de pequeno p_T ou $\sqrt{s} < 50$ GeV. Neste capítulo devemos voltar nossa atenção para outra limitação da abordagem colinear: a taxa de crescimento das funções de distribuição impostas pela DGLAP em pequeno x . Começaremos descrevendo o problema do crescimento indefinido das funções de distribuição implicados pelas equações BFKL e DGLAP, e depois descreveremos modelos baseados na ideia de saturação propostos para resolver este problema. Em particular, voltaremos nossa atenção à teoria efetiva do condensado de vidro de cor; primeiramente com o modelo clássico de McLerran-Venugopalan, e depois introduzindo as evoluções quânticas descritas pela equação de renormalização JIMWLK, que contém a informação sobre a dinâmica dos pártons na função de onda hadrônica.

Faremos também considerações sobre como é tratado o espalhamento nesta teoria do ponto de vista dos dipolos de cor, que leva a uma forma de fatorização diferente daquela colinear. A princípio, devemos tratar da forma mais simples dada pelo espalhamento profundamente inelástico, e deixaremos o caso da colisão próton-próton para o próximo capítulo.

4.1 Limite para as seções de choque

Podemos ver, dos resultados anteriores, que a seção de choque cresce com o aumento da energia \sqrt{s} . Entretanto, não se sabe um comportamento exato das seções de choque em função desta variável. O que existe é um limite superior para que não seja violada a unitariedade da matriz de espalhamento quando $s \rightarrow \infty$, conhecido como limite de Froissart-Martin [44, 45, 46], que estabelece:

$$\sigma^{tot}(s) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \log^2 \left(\frac{s}{s_0} \right), \quad (4.1)$$

ou seja, não podemos ter um crescimento indeterminado da seção de choque, e não podemos sequer exceder um lento crescimento logarítmico. Embora existam demonstrações formais de teoria de campos para esta desigualdade ([47], e as referências deste livro-texto), tal restrição já era conhecida em outros modelos de interação forte. Por exemplo, em [48, 47], são dados argumentos atribuídos a Heisenberg e Feynman sobre a existência do limite

de Froissart-Martin, tendo o próprio Froissart dado argumentos mais heurísticos para tal limite [44], sendo as demonstrações mais rigorosas dadas por Martin [45]. Abaixo apresentaremos uma demonstração dada neste sentido.

Supondo que a interação forte seja dada pelo potencial de Yukawa

$$V = g \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (4.2)$$

com o acoplamento g , a distância r do centro de espalhamento, e μ é um parâmetro relacionado ao alcance (que na teoria de Yukawa é proporcional à massa do pión m_π). A probabilidade máxima para a interação ocorrer é dado em $V = 1$ em um certo $r = r_{max}$, e decai quando aumentamos esta distância, de onde tiramos a relação $r_{max} = \frac{\log g}{\mu}$ (nesta região o termo $\frac{1}{r}$ pode ser desconsiderado). A seção de choque pode ser estimada como na mecânica quântica usual pelo espalhamento em uma esfera dura com $\sigma = \int_0^{r_{max}} r dr = \pi r_{max}^2$, o que leva à $\sigma = \frac{\pi}{m_\pi^2} \log^2 g$. Finalmente, se assumimos que g cresce no máximo como uma potência de s chegamos ao limite de Froissart-Martin.

Colocando valores em (4.1) de $\sqrt{s} \sim 1$ TeV e supondo $s_0 \sim 10$ GeV, teremos uma seção de choque da ordem de dezenas de barns. Estes são valores muito grandes para a seção de choque, tendo em vista que experimentalmente têm-se algo menor que 100 mb. Então não é neste sentido de valor absoluto que o limite de Froissart-Martin representa um problema, mas se olharmos a taxa de crescimento imposta por este limite, teremos problemas com as equações (2.21) e (2.26); a primeira prevê um crescimento de $\sigma \propto s^{\frac{4\alpha_s \tilde{N}_c \log 2}{\pi}}$, enquanto a segunda $\sigma \propto e^{\sqrt{\log s}}$. Como ambas estas funções crescem mais rápido que $\log s$, a primeira mais que a segunda, o limite de Froissart-Martin é violado. Portanto, no limite de pequeno x , as expressões para a seção de choque não satisfazem a unitariedade da matriz S e, portanto, devem ser modificadas.

4.2 Problema no limite de pequeno x e as evoluções não-lineares

A evolução em $\frac{1}{x}$ representada pela equação BFKL é devida a diagramas fortemente ordenados em x , eq. (2.20), porém não ordenados em k_T (como DGLAP), o que faz com que a cada etapa da evolução acrescente mais glúons sem que haja uma diminuição da área transversa ocupada por estes. Este aumento de densidade mostrado na Fig. 4.1, faz com que ocorra uma superposição das funções de onda dos glúons que ocupam um mesmo espaço no hádron, o que leva à ideia de saturação das funções de distribuição. A saturação visa limitar o crescimento indeterminado destes pártons, e com isso restaurar a unitariedade da seção de choque violada pelo crescimento superior ao limite de Froissart. Neste sentido várias teorias foram propostas [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58].

Uma das primeiras abordagens neste sentido é a de Gribov, Levin e Ryskin (GLR) [49], em que é argumentado que no regime de grande densidade onde os pártons se sobrepõem, devemos ter processos de fusão de glúons $g + g \rightarrow g$ que devem ser tão importantes quanto aqueles $g \rightarrow g + g$. Tais processos contribuem no sentido contrário, retirando glúons, e por consequência impedindo o grande crescimento da densidade. Estes processos

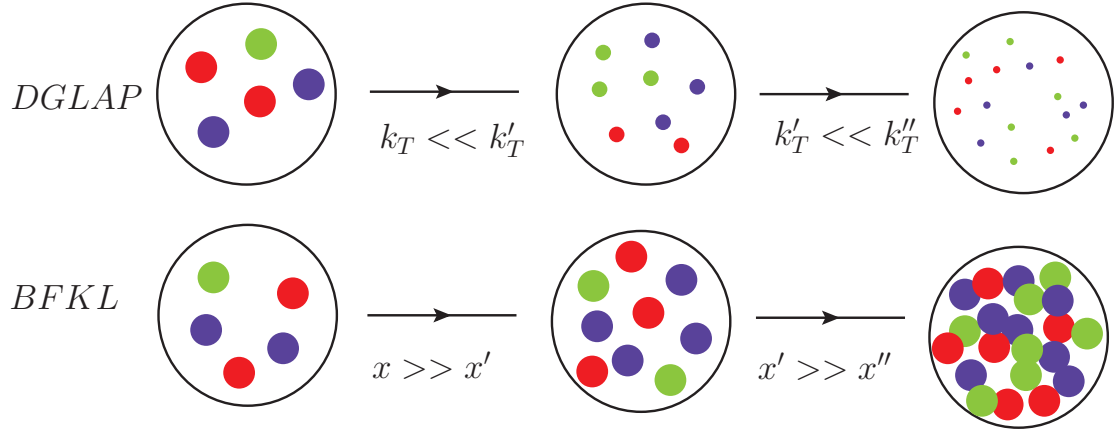


Figura 4.1: Acima: evolução DGLAP fortemente ordenada em k_T , o que implica numa diminuição da área ocupada pelos pártons. Abaixo: evolução BFKL fortemente ordenada em x que leva à superposição das funções de onda dos glúons.

$g \rightarrow g + g$, devem nos dar uma evolução proporcional à densidade de glúons igual a BFKL, já que a aniquilação de glúons na abordagem GLR é dada por um termo não linear $\propto \alpha_s q^2 [xG(x, Q^2)]^2$. Os diagramas tipo leque (fan) que representam estas interações são mostrados na Figura 4.2, representando uma fusão das escadas de glúons BFKL.

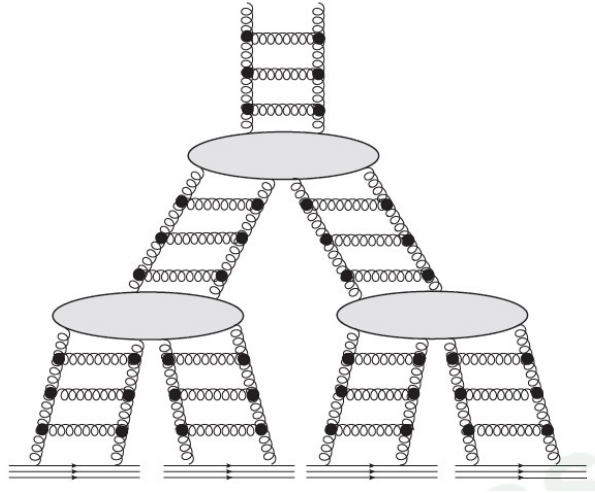


Figura 4.2: Figura extraída de [2], que mostra os diagramas fan que geram a evolução não-linear GLR, onde ocorre fusão das escadas BFKL.

A evolução não linear também foi descrita por Muller e Qui [50] na aproximação DLA, que pode ser representada na seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 xG(x, Q^2)}{\partial \log \frac{1}{x} \partial \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xG(x, Q^2) - \frac{\alpha_s N_c \pi}{2C_F S_T} \frac{1}{Q^2} [xG(x, Q^2)]^2. \quad (4.3)$$

C_F e N_c são fatores de cor associados a álgebra do grupo $SU(3)$. O primeiro definido vem de $t^a t^a = C_F = N_c^2 - 1/2N_c$ relacionado à emissão de um glúon por um quark. O segundo vem da relação $f^{acd} f^{bcd} = N_c \delta_{ab}$ com $N_c = 3$ relacionado à emissão de um glúon por outro glúon. Além disso S_T nesta equação é a área transversa do hádron. Esta equação recebe o nome de GLR-MQ devido aos autores citados. Podemos ver que o primeiro termo é simplesmente aquele da Eq. (2.19), e o segundo termo, não linear, é associado aos efeitos de fusão de glúons.

Um ponto muito importante desta equação é que ela prevê uma escala de saturação Q_s , a partir da qual o segundo termo passa a ser igual ao primeiro, e os efeitos não lineares se tornam importantes. Igualando-se os dois termos, e considerando que a densidade de glúons é dada por (2.26) em pequeno x (no caso de um núcleo esta distribuição fica multiplicada pelo número atômico A), teremos uma estimativa para a escala de saturação

$$Q^2(x) \sim A^{1/3} \left(\frac{1}{x} \right)^\lambda, \quad (4.4)$$

onde o fator $A^{1/3}$ vem da área transversa do núcleo S_T na equação (4.3), já que $S_T \sim A^{2/3}$. Esta escala implica em uma divisão da dinâmica QCD: se $Q > Q_s$, temos ter um regime diluído que pode ser descrito por DGLAP ou BFKL; se $Q < Q_s$, entramos num regime saturado da QCD, implicando na necessidade de se considerar a evolução não linear das distribuições de glúons. A equação (4.4) ainda nos diz que esta escala intrínseca à função de onda do núcleo deve ser amplificada em colisões de grandes núcleos, ou em regiões de x muito pequeno.

Podemos considerar para este limite de saturação do ponto de vista do campo A^μ dos glúons, já que na região onde os termos linear e não linear da equação GLR-MQ (4.3) se igualam temos

$$\frac{xG(x, Q^2)}{Q_s^2} \sim \frac{1}{\alpha_s}. \quad (4.5)$$

Veremos adiante que as funções de distribuição de glúons no gauge do cone de luz pode ser dada pela função de correlação dos campos $\langle A^\mu A^\mu \rangle$, implicando que no limite de saturação teremos $A^\mu \sim \frac{1}{g}$. Se α_s é pequeno, estamos tratando de um campo muito forte destes glúons, em que embora o acoplamento seja pequeno não podemos dar um tratamento perturbativo para estes campos. Neste contexto surge a ideia de McLerran e Venugopalan [51, 52, 59] de tratar classicamente estes campos, descrevendo uma ação efetiva para tratar a QCD neste limite de grande densidade. Esta teoria é conhecida como condensado de vidro de cor (CGC), que descreveremos com detalhes na próxima seção.

4.3 Condensado de vidro de cor

O condensado de vidro de cor (CGC) descreve um novo estado da matéria que deve estar presente nas colisões hadrônicas de altas energias, no regime de grande densidade. O termo vidro é referente ao fato de que existe uma divisão de escalas de tempo, sendo que pártons de pequeno x enxergam fontes de cor estáticas em escalas de tempo típicas de seu tempo de vida; enquanto que em escalas muito maiores, associadas à dinâmica de pártons de grande x , existe uma evolução destas fontes. O termo condensado de cor é

devido ao fato de que neste limite existe uma grande ocupação de glúons na função de onda do hádron, que carregam cor.

Esta teoria tem sido amplamente utilizada para descrever inúmeros observáveis, tanto no espalhamento ep (DIS) a partir de dados de pequeno x do HERA [60, 61, 62, 63], quanto em colisões hadrônicas no RHIC e LHC [64, 65, 66, 67, 68, 69]. Existe um elemento fundamental nesta teoria: a função de correlação das linhas de Wilson, associada à seção de choque de dipolo, que torna possível uma descrição universal destes processos.

Tal teoria é descrita por uma ação efetiva composta de campos clássicos fortes acoplados à fontes de carga de cor dadas por pártons de maior momento, propagando-se próximos a velocidade da luz, e cujas configurações são descritas por uma função de peso. A solução das equações clássicas de movimento nos darão a forma destes campos, e com isso a possibilidade de calcularmos analiticamente as funções de distribuição de glúons. Tal tarefa não é fácil, pois devido à interação forte destes campos, como vimos antes, não é possível tratá-los perturbativamente; de forma que precisamos considerar termos de todas as ordens destes campos. Além disso, existe uma evolução na escala que separa o comportamento do que entendemos como pártons de grande e pequeno x , levando à correções quânticas para esta descrição através das equações JIMWLK, que introduzem a evolução em x das funções de distribuição de glúons.

4.3.1 Dinâmica dos pártons na função de onda hadrônica

A descrição do condensado é dada num referencial de momento infinito do hádron (IMF). Veremos adiante que a quantização desta teoria no cone de luz é indispensável. Em termos das variáveis do cone de luz, temos um hádron que se propaga na direção x^+ ($z = t$) (já tínhamos definido x como fração dos momentos no cone de luz na seção 3.3), situado em $x^- = 0$ (a variável x aqui é referente a coordenadas espaciais, não deve ser confundida com x associado a fração de momento). Pártons com grande fração de momento p^+ vão emitir glúons suaves (soft) com pequeno x e momento k^+ , com $x = \frac{k^+}{p^+}$, sendo $p^\mu = (p^+, \frac{p_\perp^2}{2p^+}, p_\perp)$, satisfazendo a condição da camada de massa $p^- = \frac{p_\perp^2}{2p^+}$ (fizemos algo parecido em coordenadas normais quando tratamos o desdobramento $e\gamma$ na Eq. (2.15)). Pelo princípio da incerteza, o párton pai (de momento p) tem sua dinâmica dada num tempo $\tau_p \sim \frac{2p^+}{p_\perp^2}$, já o tempo do párton filho (suave) é $\tau_k \sim \frac{2xp^+}{k_\perp^2}$. Na dinâmica LLx (BFKL), os momentos transversos são comparáveis, portanto $\tau_k \ll \tau_p$, fazendo com que estes pártons suaves enxerguem aqueles de maior x congelados. Além disso, estes pártons de maior x também são vistos localizados, já que $\Delta x^- \sim 1/p^+ \ll 1/k^+$. Isto sugere que estes pártons de grande x podem ser tratados como fonte de carga de cor ρ para os pártons suaves na escala de tempo τ_k , como mostrado na figura 4.3. Entretanto, se olharmos para a dinâmica numa escala de tempo τ_p , após o párton fonte ter feito várias emissões, deveremos ter uma modificação das coordenadas desta fonte (x^-, x_\perp). Esta dinâmica justifica melhor a característica de vidro que falamos antes. Devemos notar, que este comportamento já estava presente na evolução BFKL através do forte ordenamento em x dado por (2.20).

O grande número de cargas de cor leva a um tratamento clássico desta fonte, já que o

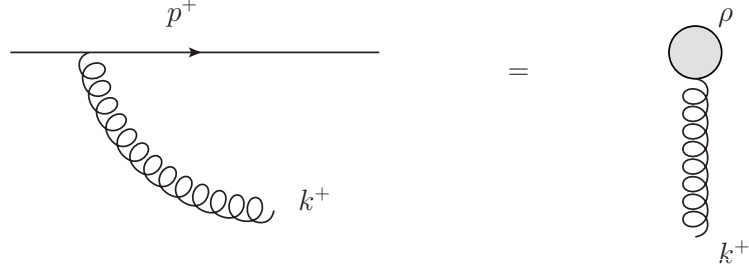


Figura 4.3: Párton de maior momento p^+ é visto como uma fonte localizada ρ para o párton suave k^+ .

comutador das cargas de cor pode ser ignorado:

$$[Q^a, Q^b] = if^{abc} Q^c \ll Q^2, \quad (4.6)$$

Q é a integral de ρ em d^3x . Temos então uma distribuição $\rho^a(x^-, x_\perp)$ contínua, sendo que as funções de correlação que dão os observáveis são calculadas com uma função peso $\mathcal{W}[\rho]$ que dá a densidade de probabilidade para encontrarmos uma certa configuração de ρ .

4.3.2 Campos clássicos

Como vamos lidar com os campos clássicos dos glúons, é interessante termos uma idéia de como são estes campos na eletrodinâmica. Se considerarmos o potencial produzido por uma carga q que se move no eixo z , teremos no gauge de Lorentz:

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \frac{qv}{\sqrt{(z-vt)^2 + x_\perp^2(1-v^2)}}, \quad (4.7)$$

com $\phi = A_z/v$ e $A_\perp = 0$, este se reduz ao simples campo de Coulomb quando $v = 0$. Se escrevermos este potenciais nas coordenadas do cone de luz, e fizermos $v \rightarrow 1$ temos:

$$A^+ \propto \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 x^-^2 + x_\perp^2}}, \quad (4.8)$$

sendo que estes potenciais geram campos clássicos de Weizsäcker–Williams [70, 71, 72]. A transformada de Fourier deste potencial é dada por

$$A^\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx^+ dx^- dx_\perp^2 e^{ik^+x^- + ik^-x^+ - ik_\perp x_\perp} A^\mu(x),$$

tomando o limite $v \rightarrow 1$ novamente após a transformada de Fourier obtemos:

$$A^+(k) \propto q \frac{\delta(k^-)}{k_\perp^2}. \quad (4.9)$$

Vale notar que se após tomar o limite fizermos a transformada inversa temos um campo tipo $\log A^+ \propto \delta(x^-) \log \frac{1}{x_\perp \Lambda}$.

A partir deste potencial podemos obter o potencial no gauge do cone de luz fazendo uma transformação de gauge (o procedimento é feito com detalhes em [71]), que leva aos campos

$$A^i(x) \propto \theta(x^-) \frac{x^i}{x_\perp^2}, \quad A^i(k) \propto \frac{\delta(k^-)}{k^+} \frac{k^i}{k_\perp}. \quad (4.10)$$

Se olharmos esta última equação, vemos que no cone de luz os potenciais são puramente transversais ao eixo z do movimento da carga, com campos elétricos e magnéticos perpendiculares entre si. De fato, a visão do condensado é de um núcleo com muitas cargas, cujos campos clássicos são deste tipo. Embora estes sejam campos clássicos eletromagnéticos, eles são bastante semelhantes com o que vamos encontrar para o potencial clássico do glúon.

4.3.3 Densidade de glúons

Na quantização do cone de luz e no gauge do cone de luz $A^+ = 0$, o hamiltoniano da QCD pode ser escrito como $P_{QCD}^- = P_0^- + V_{QCD}$ (em coordenadas do cone de luz P^0 tem papel de hamiltoniano), sendo que a primeira parte é um termo cinético livre e a segunda é o potencial de interação. É possível mostrar que nesta situação os autoestados P_{QCD}^- podem ser escritos como um conjunto completo de autoestados de Fock do hamiltoniano livre P_0^- , tornando possível que o autoestado da função de onda hadrônica seja escrito como

$$|h\rangle = |qqq\rangle + |qqqg\rangle + \dots + |qqqgg\dots gg\rangle. \quad (4.11)$$

Neste sentido, é apenas na quantização do cone de luz (e no gauge do cone de luz) que a interpretação da função de onda do hádron em termos de pártons é evidente (uma discussão deste assunto com a demonstração está em [73]).

Na quantização do cone de luz temos dois graus de liberdade (duas polarizações dos glúons) dados por [73, 74]:

$$A_a^i(x^+, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^+} \left(e^{i\vec{k}\vec{x}} a_a^i(x^+, \vec{k}) + e^{-i\vec{k}\vec{x}} a_a^{i\dagger}(x^+, \vec{k}) \right), \quad (4.12)$$

com os operadores de criação e destruição satisfazendo as relações de comutação

$$[a_a^i(k), a_b^{j\dagger}(q)] = 2k^+ \delta_{ab} \delta^{ij} (2\pi)^3 \delta^3(k - q).$$

Com este formalismo é possível definir uma densidade de glúons na função de onda do hádron num volume dk^3 :

$$\frac{dN}{dk^3} = \langle h | a_a^{i\dagger} a_a^i | h \rangle \quad (4.13)$$

Esta densidade pode ser escrita em termos dos campos A^μ pela relação Eq. (4.12), que leva à

$$\frac{dN}{dk^3} = \frac{2k^+}{(2\pi)^3} \left\langle A_a^i(x^+, \vec{k}) A_a^i(x^+, -\vec{k}) \right\rangle, \quad (4.14)$$

onde a notação $\langle \rangle$ deixa implícito o autoestado $\langle h |, | h \rangle$. Podemos adicionar uma dependência num parâmetro de impacto $b = (x_\perp + y_\perp)/2$ e esta densidade pode ser interpretada

como uma distribuição de glúons não-integrada num intervalo de rapidez no espaço transverso, dada por:

$$\phi^{WW}(x, k_{\perp}^2) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^2b d^2r e^{-ik_{\perp}r} \langle A_a^i(0) A_a^i(r) \rangle. \quad (4.15)$$

Esta distribuição é frequentemente denominada distribuição de Weizsäcker-Williams, já que é gerada por campos não-abelianos clássicos análogos àqueles da eletrodinâmica. É importante definir esta diferença, porque adiante veremos um outro tipo de função de distribuição de glúons. Esta função não integrada é relacionada à forma comum $xG(x, Q^2)$ integrando-se em k_{\perp} como na eq. (2.25).

O objetivo da teoria efetiva do CGC é tentar calcular explicitamente a função de correlação dos campos de glúons A^{μ} num meio composto por uma densidade de cargas de cor através da equação (4.14), e com isto determinar a função de distribuição ϕ^{WW} . Para isso é necessário um modelo que explique como é dada a média sobre estas configurações de cargas, ou como estas densidades de cargas são correlacionadas.

4.4 Modelo MV

A primeira abordagem nesta direção é a de McLerran-Venugopalan (MV) [51, 52, 59], que descreve a distribuição de glúons em um grande núcleo de número atômico A , onde as fontes de carga de cor ρ são dadas pelos quarks de valência dos nucleons, sem considerar nenhuma evolução em x (como veremos a evolução em x é dada por correções quânticas a este modelo clássico). O grande número atômico neste caso é o responsável por criar campos de cor intensos mesmo em x não muito pequeno. As considerações feitas e representadas na Figura 4.4 são as seguintes: um glúon de $k_{\perp} \gg \Lambda$ emitido por estes quarks de valência, ocupa uma pequena área transversa de cada nucleon que está contraído em uma forma achatada devido ao referencial relativístico; estes glúons têm grande extensão longitudinal pois $x^- \sim \frac{1}{xp^+} > \frac{1}{p^+}$, portanto interagem coerentemente com todos os nucleons; o tubo formado por estas extensões longitudinal e transversa passa por um número de quarks de valência $\sim A^{1/3}$ justificando o tratamento clássico da fonte dada por (4.6); o confinamento dos quarks em cada nucleon faz com que a carga de cor gerada por eles seja decorrelacionada, gerando uma distribuição randômica das fontes ρ , portanto podendo ser representadas por uma função de gaussiana com $\langle Q^a \rangle = 0$.

Para calcular a forma explícita dos campos clássicos A^{μ} , o modelo MV adiciona uma corrente externa na ação de Yang-Mills,

$$S = - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int d^4x J_{\mu} A^{\mu} + i \int d^2x_{\perp} dx^{-} \frac{\rho_a(x_{\perp}, x^{-}) \rho^a(x_{\perp}, x^{-})}{2\mu^2(x^{-})}, \quad (4.16)$$

que pode ser dada por $J_a^{\mu} = \delta^{\mu+} \rho^a(x^{-}, x_{\perp})$. Tal corrente é a simples representação de todas considerações que fizemos acima, onde as fontes são vistas como independentes de tempo (x^+) e localizadas movendo-se na direção $+$, com uma dependência em x_{\perp} (devido a contração de Lorentz a dependência em x^{-} deve ser bastante limitada). O termo imaginário da ação pode ser pensado como uma energia livre que dá um peso a cada configuração das

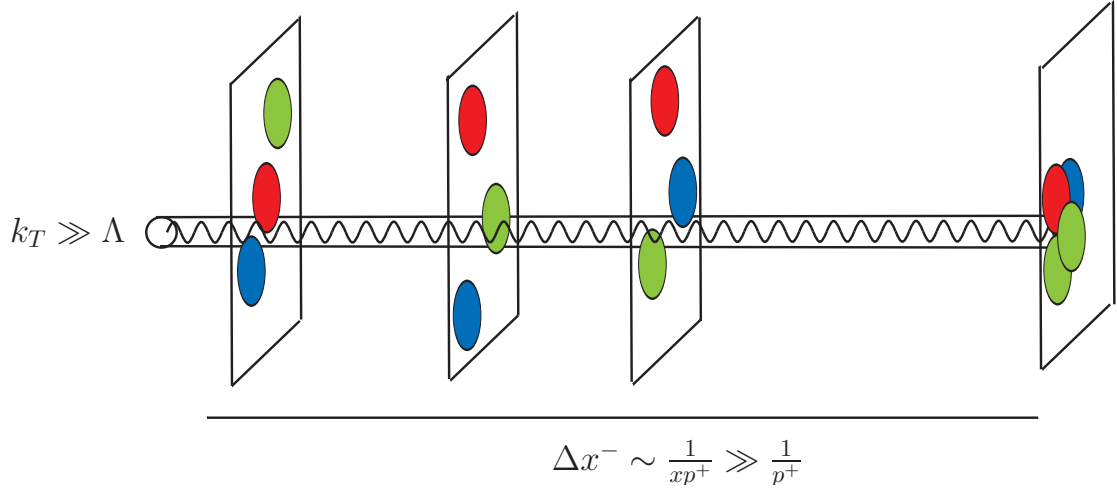


Figura 4.4: Visão do núcleo no modelo MV a partir de um glúon emitido por quarks de valência de grande momento. A descrição detalhada é apresentada no texto.

fontes ρ , que é necessário para o cálculo das funções de correlação, ou para qualquer observável:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int D[\rho] \mathcal{W}[\rho] \mathcal{O}, \quad (4.17)$$

sendo que $D[\rho] = \prod_a \prod_x d\rho^a(x)$, a qual deve ser normalizado por $\int D[\rho] \mathcal{W}[\rho] = 1$. As equações de movimento para o campo A^μ geradas por tal ação são

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \delta^{\nu+} \rho^a(x^-, x_\perp). \quad (4.18)$$

Seguindo as características esperadas por estes campos clássicos (que vimos na subseção 4.3.2), esperamos que as soluções nos deem campos com $\partial_+ A^\mu = \partial^- A^\mu = 0$ (estáticos em x^+) e com $A^- = A_+ = 0$, eq. (4.8). Com estas considerações, temos apenas duas componentes desta equação que interessam :

$$D_i F^{ij} = 0, \quad D_i F^{\mu i} = \rho^a(x^-, x_\perp). \quad (4.19)$$

Sendo que as soluções da primeira equação são campos ditos de gauge puro:

$$A^i(x^-, x_\perp) = \frac{i}{g} V(x^-, x_\perp) \partial^i V^\dagger(x^-, x_\perp), \quad (4.20)$$

onde $V(x)$ é uma rotação de gauge. Podemos verificar que esta é a solução da primeira equação usando a relação $\partial(VV^\dagger) = V\partial V + \partial V V^\dagger = 0$. Se olharmos para a Eq. (2.2) veremos que este é simplesmente o termo somado ao campo do glúon quando este sofre uma transformação de gauge, de forma que mesmo com um campo nulo podemos ter termos deste tipo após a transformação. A segunda equação vai gerar um campo A^+ em função das fontes ρ , entretanto, ainda devemos escolher um gauge para estes campos, o que vai reduzir estas duas componentes para apenas uma.

Se escolhermos o gauge covariante $\partial_\mu A^\mu = 0$, teremos $A^i = 0$, já no caso do gauge de

cone de luz temos $A^+ = 0$. Como precisamos calcular as funções de distribuição no gauge do cone de luz, precisaríamos ter uma solução para A^μ também neste gauge, mas neste caso não será possível encontrar A^i em função de ρ ; a solução é encontrar A^μ no gauge covariante e posteriormente fazer uma transformação de gauge para o cone de luz. A princípio, a fonte ρ também fica transformada quando mudamos o gauge. Entretanto, as expressões que envolvem ρ em (4.17) são invariantes de gauge, o que permite que calculemos as funções de correlação para os campos no cone de luz mantendo a fonte no gauge covariante.

Se escolhermos o gauge covariante temos a solução da segunda equação de (4.19) com a função de Green $G_0(x_\perp - z_\perp)$ que faz a inversão do operador laplaciano em duas dimensões:

$$\begin{aligned} A_{cov}^+(x^-, x_\perp) &= \frac{\rho(x^-, x_\perp)}{\nabla_\perp^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z_\perp^2} G_0(x_\perp - z_\perp) &= \delta(x_\perp - z_\perp), \\ G_0(x_\perp - z_\perp) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k_\perp \frac{e^{ik_\perp \cdot (x_\perp - z_\perp)}}{k_\perp^2} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{(x_\perp - z_\perp)\Lambda}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Fazendo a transformação de gauge (2.2) para o gauge $A^+ = 0$, temos a equação $VA_{cov}^+ = \frac{i}{g} \partial^+ V$, cuja solução é o exponencial ordenado em x^- :

$$V(x^-, x_\perp) = P \exp \left(ig \int_{x^-}^{+\infty} dx'^- A_{cov}^+(x^-, x_\perp) \right). \quad (4.22)$$

Estes objetos são conhecidos como linhas de Wilson, e como veremos mais adiante, são eles que carregam a informação do espalhamento neste formalismo, ao contrário da idéia do espalhamento duro partônico dado no modelo colinear. Se olharmos para a forma dos campos clássicos (4.10), existe uma função $\theta(x^-)$ que limita a dependência em x^- destes campos por $t < z$ o que indica que se a carga se move próxima à velocidade da luz, em um tempo t ela está em $z = t$ e para $z > t$ esta carga ainda não chegou. Portanto, podemos colocar o limite inferior de integração de (4.22) como $-\infty$, e adicionar uma dependência $\theta(x^-)$ nos campos A^i .

Ao contrário dos campos clássicos eletromagnéticos da seção 4.3.2, podemos ver da equação (4.20) que o forte campo dos glúons não tem uma solução simples. Se expandirmos o exponencial (4.22), teremos

$$\begin{aligned} V(x_\perp) &= 1 + ig \int d^2 z_\perp G_0(x_\perp - z_\perp) \int dz^- \rho^a(z) \\ &\quad - g^2 \int d^2 z_\perp d^2 z'_\perp G_0(x_\perp - z_\perp) G_0(x_\perp - z'_\perp) \int dz^- \rho^a(z) \rho^b(z') + \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

Se mantermos apenas o termo linear em ρ , nos dão campos iguais aos da eq. (4.10):

$$A_a^i(k) = \frac{\rho_a(k^+, k_\perp)}{k^+} \frac{k^i}{k_\perp}. \quad (4.24)$$

Entretanto, devido ao caráter forte destes campos não podemos fazer tal aproximação, devemos somar todas as ordens da expressão (4.23).

Tendo em vista como estes campos podem ser calculados, devemos observar que para calcular as funções de distribuição (4.14), temos ainda que calcular a função de correlação nos autoestados da função de onda do núcleo. Pelos argumentos já discutidos antes, a distribuição de carga é descorrelacionada em cada nucleon, e o caráter aleatório destas distribuições no modelo MV é proposto por uma função de peso gaussiana (isto já estava escrito na ação (4.16)):

$$\mathcal{W}[\rho] = \exp \left[- \int dx^- d^2 x_\perp \frac{\rho_a \rho^a}{2\mu^2(x^-)} \right], \quad (4.25)$$

sendo μ a densidade de carga de cor por unidade de volume. Esta gaussiana produz as seguinte função de correlação de ρ_a :

$$\langle \rho_a(x^-, x_\perp) \rho_b(y^-, y_\perp) \rangle = \delta_{ab} \mu^2(x^-) \delta(x^- - y^-) \delta(x_\perp - y_\perp), \quad (4.26)$$

sendo que todas as funções de correlação de mais pontos devem ser nulas. Podemos calcular a função de distribuição (4.14) invariante de gauge com a função de correlação do tensor $F^{+i} = -ik^+ A^i$ como feito em [75]:

$$\begin{aligned} \langle F^{+i}(x) F^{+i}(y) \rangle &= \left\langle (V_{ab}^\dagger \partial^i A_{\text{cov}}^{+b})_x (V_{ac}^\dagger \partial^i A_{\text{cov}}^{+c})_y \right\rangle \\ &= \left\langle V_{ab}^\dagger(x) V_{ac}(y) \right\rangle \left(\partial^i \partial^i \left\langle A_{\text{cov}}^{+b}(x) A_{\text{cov}}^{+c}(y) \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Devido a descorrelação das fontes, os campos só podem ser contraídos com eles mesmos, o que simplifica bastante a expressão. O segundo termo desta expressão é simplesmente calculável usando a Eq.(4.21) juntamente com a Eq. (4.26), o que produz:

$$\partial^i \partial^i \left\langle A_{\text{cov}}^{+b}(x) A_{\text{cov}}^{+c}(y) \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \log \frac{1}{r^2 \Lambda^2} \delta(x^- - y^-) \delta_{ab} \mu^2(x^-). \quad (4.28)$$

O segundo termo dado pela função de correlação das linhas de Wilson não é tão simples de se obter devido ao caráter não perturbativo. Precisamos fazer a expansão do exponencial como na equação (4.23), e considerar todas possíveis contrações destes termos. O cálculo pode ser visto em detalhes em [76, 77, 78], onde é mostrado que o ordenamento das linhas de Wilson simplifica os cálculos, levando à:

$$\langle V(x_\perp) V^\dagger(y_\perp) \rangle = \exp \left\{ -g^2 t_a t^a \int_{-\infty}^{\infty} dz^- \mu^2(z^-) \int d^2 z_\perp [G_0(x_\perp - z_\perp) - G_0(y_\perp - z_\perp)]^2 \right\}, \quad (4.29)$$

onde a integral do expoente pode ser calculada na aproximação de logaritmo dominante em que a seção de choque é dada por pequeno k_\perp :

$$\begin{aligned} \int d^2 z_\perp [G_0(x_\perp - z_\perp) - G_0(y_\perp - z_\perp)]^2 &= \int \frac{d^2 k_\perp}{k_\perp^4} (1 - e^{ikr}) \\ &\cong \frac{1}{4\pi} r^2 \log \frac{1}{r^2 \Lambda^2}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

sendo $r = |x_\perp - y_\perp|$ e o corte Λ , assim como antes, surge devido à singularidade do logaritmo se k_T é muito pequeno. Isto leva ao seguinte resultado para a função de correlação das linhas de Wilson:

$$\langle V(x_\perp) V^\dagger(y_\perp) \rangle = \exp \left(-\frac{Q_s^2 r^2}{4} \log \frac{1}{r\Lambda} \right), \quad (4.31)$$

sendo $Q_s^2 = \alpha N_c \int dz^- \mu^2(z^-) \sim A^{1/3}$ a escala de saturação do modelo MV.

Este resultado é bastante importante porque, embora o modelo MV seja muito simples no sentido que desconsidera qualquer evolução quântica em x , ele nos fornece uma forma analítica para as funções de distribuição que pode ser usada como condição inicial para as evoluções BK que veremos na próxima seção. Isso faz com que o modelo MV seja amplamente utilizado, embora eventualmente com alguma mudança de parametrização para descrever seções de choque. Tendo a função de correlação das linhas de Wilson Eq. (4.31), fica trivial o cálculo das distribuições de glúons não integrada, devemos apenas consideraras eqs. (4.31), (4.27), (4.14) e fazer a transformada de Fourier em x^- e r . A integral em x^- é trivial se identificarmos o termo (4.28) como derivada do exponencial na Eq. (4.31) em x^- :

$$\phi^{WW}(k_T) = \frac{C_F}{\alpha_s 2\pi^3} \int d^2b \int d^2r e^{-ik_\perp r} \frac{(1 - \exp\{-\frac{1}{4}r^2 Q_s^2 \log \frac{1}{r\Lambda}\})}{\alpha_s N_c r^2}. \quad (4.32)$$

Neste caso, a transformada de Fourier tem que ser calculada numericamente, e vamos apresentar os resultados numéricos para estas distribuições mais adiante. No entanto, em certos limites podemos calcular esta transformada analiticamente. No limite $r \ll 1/Q_s$, podemos aproximar o exponencial em primeira ordem e a transformada de Fourier resulta:

$$\phi^{WW}(k_T) \sim \frac{Q_s^2}{k_T^2}, \quad (4.33)$$

que é a solução para campos fracos da QCD perturbativa. Oposto a isso, no limite $r \gg 1/Q_s$, podemos negligenciar o exponencial e a transformada de Fourier nos dá:

$$\phi^{WW}(k_T) \sim \frac{1}{\alpha_s} \log \frac{Q_s^2}{k_T^2}, \quad (4.34)$$

que representa o efeito repulsivo dos fortes campos de cor levando a um crescimento logarítmico muito mais lento da distribuição.

O resultado da transformada de Fourier multiplicada por k_T que calculamos numericamente, junto com o limite (4.33) é mostrado na Figura 4.5. Podemos ver que o crescimento da ocupação de glúons é barrado, em torno de um pico onde existe a densidade máxima destes. Depois disso, temos um lento decaimento dado pelo limite da Eq. (4.34). No próximo capítulo consideraremos outros modelos para esta distribuição. Entretanto, veremos que este comportamento é essencialmente universal e caracteriza o CGC.

Na próxima seção deveremos entender como introduzir correções quânticas neste modelo que levam a uma dependência em x das funções de distribuição através da equação de grupo de renormalização JIMWLK.

4.5 Equações de evolução JIMWKL/BK

Como dissemos antes, é possível tratarmos pártons de maior momento como fontes em relação aos de menor momento devido a contração de Lorentz, em que os pártons de menor momento descritos pelo campo A^μ enxergam os de maior momento estáticos.

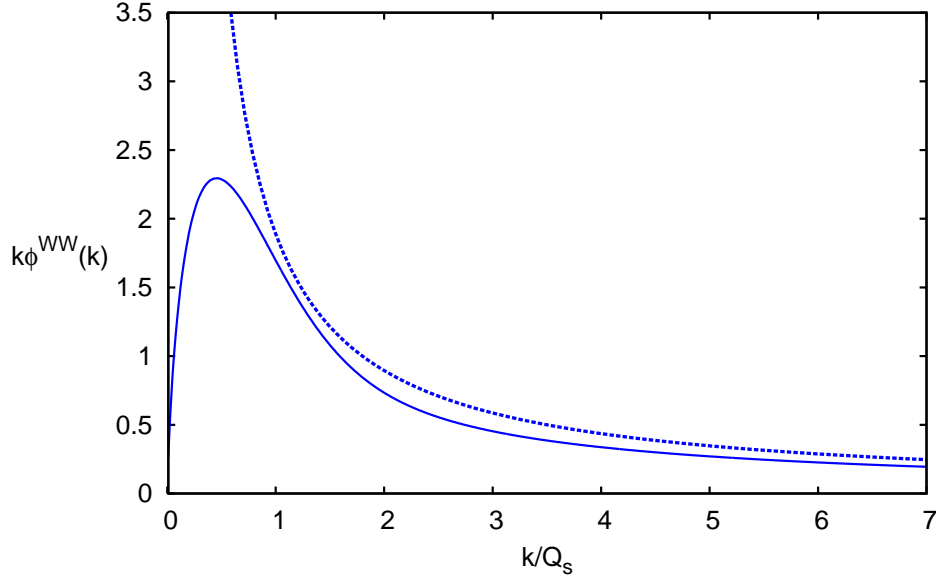


Figura 4.5: Densidade de glúons no espaço de momento dada pelo modelo MV, com o limite assintótico $k_T \rightarrow \infty$.

Podemos então, pensar que existe uma escala de momento Λ^+ que separa estas duas descrições, em que pártons com $p^+ \gg \Lambda^+$ são tratados como fontes clássicas, enquanto aqueles de $p^+ \ll \Lambda^+$ são dados pelo campo A^μ . A idéia de que isto pode ser estendido para correções radiativas do modelo MV, é dada em [3, 57, 58, 76, 79]. A ideia é estender este formalismo descrevendo várias emissões na aproximação de log dominante em x , mas em todas as ordens do campo forte $A^i \sim \frac{1}{g}$ onde se incluem os efeitos não-lineares devido à alta densidade.

Se pensarmos na escada BFKL gerada pela fonte como na Figura 4.6, devido ao forte ordenamento em x , cada degrau da fonte é um glúon emitido mais suave que vê seu antecessor como uma fonte estática, de forma que estas correções podem ser ressomadas numa nova fonte ρ' . Sendo que cada degrau incorpora uma correção à fonte $\rho' = \rho + \delta\rho$. Em [57, 58] é dada uma decomposição do novo campo de gauge $A_a^\mu = b_a^\mu + \delta A_a^\mu + a_a^\mu$, onde b^μ é o simples campo clássico que encontramos antes na escala Λ^+ . Na nova escala $x\Lambda^+$, o campo de gauge é a soma dos campos clássicos a^μ com os campos de glúons suaves de momento $k^+ \sim x\Lambda^+$ dados pelo termo b^μ e a flutuação δA^μ é devido a um campo com momento intermediário ($x\Lambda \ll p^+ \ll \Lambda$) que deve ser integrado na nova ação:

$$S[A, \rho] = - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{gN_c} \int dx^3 Tr \{ \rho(x) W[A^-] \} + i \int d^2x_\perp F[\rho^a(x_\perp)], \quad (4.35)$$

sendo que $W[A^-]$ é uma linha de Wilson na direção do tempo x^+ que reflete o acoplamento eikonal da fonte que se propaga em x^+ com os campos de fundo suave A^- gerando vértices não-locais no tempo proporcionais a $\rho(A^-)^n$. Vale lembrar a solução clássica $A^- = 0$,

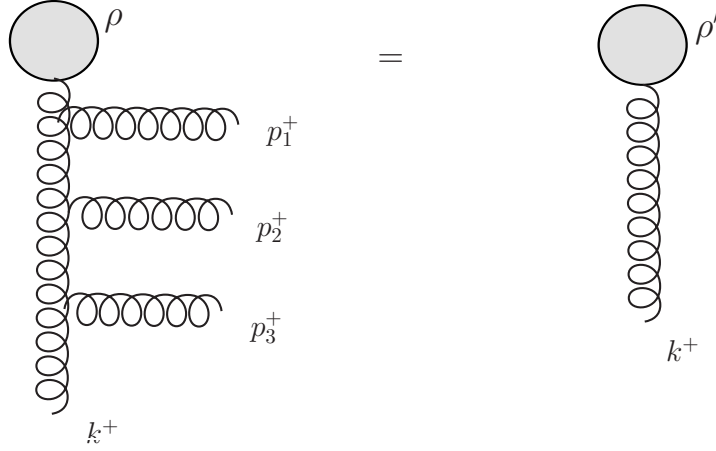


Figura 4.6: Evolução LLx do condensado, onde os pártons com momento $p^i \gg k^+$ intermediário são incorporados à fonte ρ .

que é recuperada em primeira ordem dos campos nesta linha de Wilson gerando o termo $\rho^a A_a^\mu$, que produz a equação de Yang-Mills (4.18). O último termo desta ação é aquele que no modelo MV era dado por ρ^2 . Entretanto quando existe evolução das fontes este termo também sofre uma evolução de escala, sendo que a mudança do funcional $\mathcal{W}_{\Lambda^+}[\rho] \rightarrow \mathcal{W}_{\Lambda'^+}[\rho']$. Tal mudança é proporcional à rapidez $\tau = \log \frac{p^+}{\Lambda^+} = \log \frac{1}{x}$ que neste caso tem um papel de tempo (na verdade esta é uma diferença de rapidez entre as duas escalas, já que a rapidez é definida como $\tau = \frac{1}{2} \log \frac{p^+}{p^-}$), e pode ser representada na equação de evolução JIMWLK:

$$\frac{\partial \mathcal{W}_\tau[\rho]}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \rho_\tau^a(x_\perp) \delta \rho_\tau^b(y_\perp)} \left[\mathcal{W}_\tau \chi_{xy}^{ab} \right] - \frac{\delta}{\delta \rho_\tau^a(x_\perp)} \left[\mathcal{W}_\tau \sigma_x^a \right]. \quad (4.36)$$

Tal equação pode ser vista como uma equação do grupo de renormalização (como a Eq. (2.3)), que descreve como as cargas do condensado mudam quando a escala de momento longitudinal tem uma mudança $x\Lambda^+$. Nesta equação $\chi_{ab}(x, y) = \langle \delta \rho_a(x) \delta \rho_b(y) \rangle$ e $\sigma_a(x) = \langle \delta \rho_a(x) \rangle$ são as funções de correlação da fonte na nova escala $\delta \rho(x)$ que devem ser tratadas quanticamente, de forma que neste caso $\langle \dots \rangle$ indica a integral de caminho quântica com ρ fixo:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\rho = \frac{\int DA \mathcal{O} e^{-S[A, \rho]}}{\int DA e^{-S[A, \rho]}}. \quad (4.37)$$

Além disso, os observáveis ainda precisam ser calculados fazendo a média sobre as configurações de ρ como em (4.17).

A ação (4.35) vai gerar diagramas de Feynman associadas a interação eikonal dos glúons de maior momento com os campos dos glúons suaves, com os termos σ e χ podendo ser representados pelas Figuras 4.7 e 4.8, respectivamente. Nestas figuras, as fontes são representadas por uma linha, F^{+i} é o campo elétrico clássico. Os propagadores de glúons consideram o forte campo de fundo clássico que precisa ser ressonado em todas as ordens (indicado pelo círculo escuro), e as linhas pontilhadas são glúons suaves na escala $x\Lambda$.

Com este sentido, o que a equação (4.36) faz é em cada passo de $\Delta\tau$ ressonar à fonte

correções de LLx devidas a estes diagramas e colocando os efeitos não lineares em ρ devido à interação de glúons com diferente rapidez. Isto pode ser entendido em analogia com a Figura 4.2, onde efeitos não lineares são dados pela fusão de escadas de glúons. Neste formalismo, as emissões de glúons são geradas pelo termo χ com correções virtuais nos vértices das emissões dadas por σ sendo que os efeitos não lineares ficam dados pela interação de diferentes fontes ou pelo propagador do glúon intermediário. Uma demonstração detalhada de (4.36) pode ser encontrada em [3, 79] e de uma outra maneira em [80].

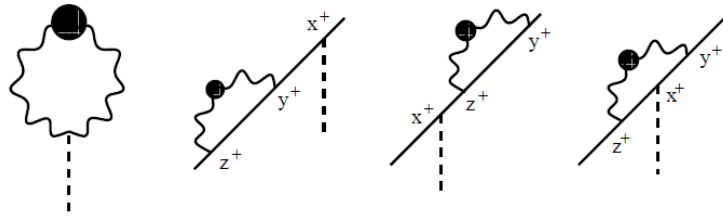


Figura 4.7: Figura extraída de [3] representa os diagramas associados a σ .

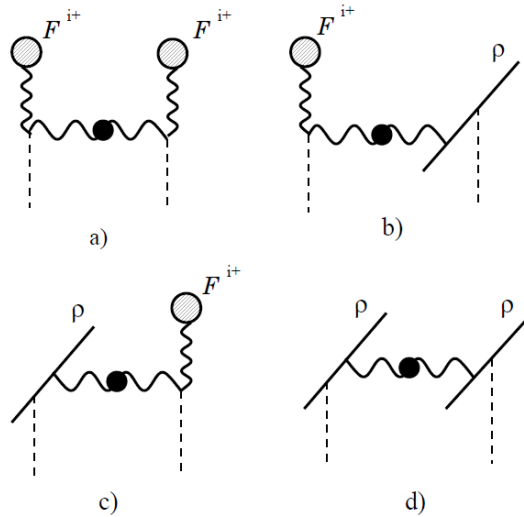


Figura 4.8: Figura extraída de [3] representa os diagramas associados a χ .

Assim como no modelo clássico MV que descrevemos antes, é mais conveniente que a fonte ρ_a esteja no gauge covariante, dessa forma a Eq. (4.36) pode ser escrita como função

dos campos covariantes A^+ dados pela equação (4.21):

$$\frac{\partial W_\tau[\alpha]}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \alpha_\tau^a(x_\perp) \delta \alpha_\tau^b(y_\perp)} [W_\tau \eta_{xy}^{ab}] - \frac{\delta}{\delta \alpha_\tau^a(x_\perp)} [W_\tau \nu_x^a], \quad (4.38)$$

onde α^a é o campo covariante A^+ e as funções de correlação η_{xy} e ν_x são relacionadas à χ e σ (após a transformação de gauge), que podem ser escritas em termos das linhas de Wilson:

$$\begin{aligned} \nu^a(x_\perp) &= \frac{ig}{2\pi} \int \frac{d^2 z_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{(x_\perp - z_\perp)^2} Tr\{t^a V(x_\perp)^\dagger V(z_\perp)\}, \\ \eta^{ab}(x_\perp, y_\perp) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 z_\perp}{(2\pi)^2} \frac{(x^i - z^i)(y^j - z^j)}{(x_\perp - z_\perp)^2 (y_\perp - z_\perp)^2} \{1 + V_x^\dagger V_y - V_x^\dagger V_z - V_z^\dagger V_y\}^{ab}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Se pensarmos nas funções de distribuição, dadas por (4.15), temos que essencialmente as funções de distribuição são dadas pela função de correlação $\langle \rho(x)\rho(y) \rangle$, que neste caso sofre uma evolução em τ . Na verdade, qualquer observável desta teoria é dado por $\mathcal{W}[\alpha]$, o que pela equação (4.17) nos dá a evolução deste observável:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O} \rangle = \int D[\alpha] \mathcal{O} \frac{\partial W[\alpha]}{\partial \tau}. \quad (4.40)$$

Em particular, como dito anteriormente, o observável $\langle V_x^\dagger V_y \rangle$ é o elemento fundamental nesta teoria. Aplicando-se a Eq. (4.40) para este observável e usando o lado direito da Eq. (4.38), temos:

$$\partial_\tau \langle \mathcal{N}_{xy} \rangle = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 z_\perp \frac{(x_\perp - y_\perp)^2}{(x_\perp - z_\perp)^2 (z_\perp - y_\perp)^2} \langle \mathcal{N}_{xz} + \mathcal{N}_{yz} - \mathcal{N}_{xy} - \mathcal{N}_{xz} \mathcal{N}_{zy} \rangle, \quad (4.41)$$

sendo $\langle \mathcal{N}_{xy} \rangle = \langle \frac{1}{N_c} Tr(1 - V_x^\dagger V_y) \rangle$ a amplitude de espalhamento do dipolo (isso é explicado na próxima seção). Nesta equação, para calcular a evolução da função de dois pontos do lado esquerdo precisamos da de 4 pontos no último termo do lado direito, e conseqüentemente uma equação análoga se faz para o observável $\langle \mathcal{N}_{xz} \mathcal{N}_{zy} \rangle$ que precisará da função de 6 pontos, e assim sucessivamente. Este procedimento forma uma hierarquia de infinitas equações acopladas, sendo conhecida por hierarquia de Balitsky [81]. No limite de grande número de cor $N_c \rightarrow \infty$ podemos fazer a aproximação em que esta função de correlação de 4 pontos pode ser quebrada em dois dipolos $\langle \mathcal{N}_{xz} \mathcal{N}_{zy} \rangle = \langle \mathcal{N}_{xz} \rangle \langle \mathcal{N}_{zy} \rangle + \mathcal{O}(1/N_c)$, o que desacopla estas equações, e (4.41) passa a ser conhecida como evolução Balitsky-Kovchegov (BK) [55, 56].

Vale notar que nesta equação derivada na aproximação LLx temos α_s constante. No entanto, a evolução de α_s é uma correção importante para o cálculo dos observáveis. Desta forma, em [82, 83] são acrescentadas correções NLL (próxima ordem do logaritmo) devido aos diagramas de laços de quarks em cada linha de glúons que geram um núcleo K^{run} da equação BK:

$$K^{run}(r, r_1, r_2) = \frac{N_c \alpha_s(r^2)}{2\pi^2} \left[\frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\alpha_s(r_1^2)}{\alpha_s(r^2)} - 1 \right) + \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{r_2^2} \left(\frac{\alpha_s(r_2^2)}{\alpha_s(r_1^2)} - 1 \right) \right], \quad (4.42)$$

que leva à equação conhecida como rcBK (running coupling BK):

$$\partial_\tau \mathcal{N}_r = \int d^2 r_1 K^{run}(r, r_1, r_2) [\mathcal{N}_{r_1} + \mathcal{N}_{r_2} - \mathcal{N}_r - \mathcal{N}_{r_1} \mathcal{N}_{r_2}], \quad (4.43)$$

sendo que r_i é a distância entre os dipolos no espaço transversal $r_i = x_i - x_j$ e a notação $\langle . \rangle$ está implícita. Vale ressaltar também que a prescrição para se adicionar as correções de α_s variável não é única sendo que em [83] apresenta-se diferentes resultados para K^{run} , sendo que usamos é a prescrição de Balitsky [82].

A equação rcBK tem sido muito usada em diversos cálculos [65, 67, 84] devida à sua simplicidade, ao contrário das equações JIMWLK. Tal equação parte da função de correlação das linhas de Wilson em um dado x_0 que então evoluem até um determinado x , de forma que ainda é essencial que tenhamos a forma de N em um determinado x_0 . Neste sentido diferentes parametrizações, principalmente baseadas no modelo MV, são feitas com o intuito de prover tal condição inicial. Além disso, por fim precisaremos fazer uma transformada de Fourier, já que os observáveis estão relacionados à estas funções no espaço de momento. As equações BK ou rcBK foram primeiramente derivadas num formalismo alternativo ao da teoria efetiva do CGC. A abordagem de Kovchegov foi a de utilizar o formalismo de dipolos de Muller [85], em que a evolução em x é vista a partir da função de onda de dipolos no cone de luz.

4.6 Linhas de Wilson

As linhas de Wilson que encontramos anteriormente surgem do acoplamento eikonal dos glúons com as fontes se movendo próximas a velocidade da luz, que não têm seu movimento alterado ao emitir ou absorver estes glúons. Antes de discutirmos propriamente esta idéia na QCD, é conveniente fazer uma breve discussão sobre o espalhamento eikonal em mecânica quântica não-relativística, como é dado em muitos livros-texto do assunto (por exemplo [86]).

A aproximação eikonal do espalhamento é feita no caso de uma partícula que passa por um potencial V com $E \gg V$ (não necessariamente V pequeno), o que torna possível aplicarmos o conceito semi-clássico de trajetória onde a função de onda após o espalhamento adquire uma fase $\psi \sim e^{iS}$, sendo a ação S dada por

$$S \cong kz - \frac{m}{k} \int_{-\infty}^z V(\sqrt{b^2 + z'^2}) dz'$$

(na aproximação $E \gg V$), e b o parâmetro de impacto. Toda informação sobre o espalhamento é contida na alteração de fase que é suficiente para determinar a amplitude de espalhamento, de onde teremos

$$f(\theta) = -ik \int_0^\infty db b J_0(kb\theta) \left(e^{2i\Delta(b)} - 1 \right),$$

sendo o termo entre parênteses a diferença de fase entre a onda incidente e a fase adquirida

$$\Delta(b) = -\frac{m}{2k} \int_{-\infty}^\infty V(\sqrt{b^2 + z^2}).$$

Pelo teorema óptico temos que $Imf(0) = \frac{k\sigma_{tot}}{4\pi}$, o que nos leva à simples expressão para seção de choque total

$$\sigma_{tot} = 2 \int d^2b \left[1 - \text{Re} \left(e^{2i\Delta(b)} \right) \right].$$

Vale notar que se este potencial é fraco, temos $e^{2i\Delta(b)} - 1 \approx 2i\Delta(b)$ e recuperamos a aproximação de Born

$$f(q) \approx -\frac{m}{2\pi} \int V(r) e^{-iqr} d^3r.$$

Passando para a QCD, se pensarmos em um quark movendo-se em x^+ que passa por um campo de cor (do alvo condensado) com uma certa distância transversa x_\perp , podemos pensar que a mesma aproximação se aplica e o campo do quark é espalhado adquirindo apenas uma fase dada por $V(x)$. No gauge covariante, como já discutimos, teremos apenas componente A^+ do potencial do campo dos glúons acoplados a este quark, o que resulta na linha de Wilson:

$$\begin{aligned} V(x_\perp) &= P \exp \left\{ ig \int_{-\infty}^{\infty} dx^- A^+(x^-, x_\perp) \right\} \\ &= 1 + ig \int dx^- A^+(x^-, x_\perp) - \frac{ig^2}{2} \int dx^- \int dx'^- P \{ A^+(x'^-, x_\perp) A^+(x^-, x_\perp) \} + \dots \end{aligned} \quad (4.44)$$

Na situação do espalhamento, estas linhas de Wilson têm um significado mais claro que aquelas que aparecem no modelo MV devido à rotação de gauge (4.22). Com a expansão da exponencial, vemos que cada termo proporcional à $(A^+)^n$ indica espalhamentos do quark com n glúons como mostrado na Figura 4.9, de forma que o significado de $V(x_\perp)$ é o de ressonar múltiplos espalhamentos do quark com os glúons do alvo. Se os campos são fracos mantemos apenas o primeiro termo do campo A^+ o que significa a troca de apenas um glúon, entretanto, como já apontamos no intenso campo de cor do condensado vai fazer com que as sucessivas colisões resolvam a estrutura longitudinal do campo de cor do hádron.

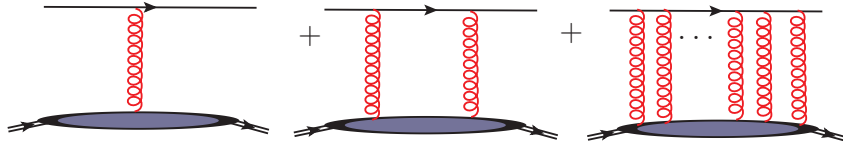


Figura 4.9: Múltiplos espalhamentos ressonados nas linhas de Wilson correspondentes a troca de n glúons.

Outro caso que devemos considerar é o espalhamento de um par quark-antiquark (sem cor), dado pelo autoestado $|\psi_{in}\rangle = \frac{\delta_{i'i'}}{N_c} |q(x)_i \bar{q}(y)_{i'}\rangle_{in}$, que na aproximação eikonal é espalhado com uma fase dada pelas linhas de Wilson $|\psi\rangle_{out} = \frac{\delta_{i'i'}}{N_c} V_{ji}(x) V_{i'j'}(y) |q(x)_j \bar{q}(y)_{j'}\rangle_{out}$,

sendo x e y as coordenadas do quark e antiquark respectivamente. A matriz S é dada por

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \langle \psi_{out} | \psi_{in} \rangle = \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{N_c} \langle q_i(x) \bar{q}_j(y) | V_{ki}(x) V_{jl}^\dagger(y) | q_k(x) \bar{q}_l(y) \rangle \\ &= \frac{1}{N_c} \text{Tr} V(x) V^\dagger(y), \end{aligned} \quad (4.45)$$

sendo que a dependência nas coordenadas x e y é apenas da distância transversa x_\perp e y_\perp . Agora começaremos a falar sobre o espalhamento propriamente dito, onde o momento transversal é diretamente relacionado ao espectro p_T . Portanto, para não misturar a notação, vamos passar a usar o subscrito x_T em vez de x_\perp tanto nas coordenadas quanto no momento.

Na relação (4.45), ainda precisamos tomar a média sobre as distribuições de carga do condensado $S(x_T, y_T) = \frac{1}{N_c} \langle \text{Tr} V(x_T) V^\dagger(y_T) \rangle$. E a seção de choque para o espalhamento do dipolo é dada pela integral no parâmetro de impacto $b = (x_T + y_T)/2$:

$$\sigma_{dip} = \int d^2b (1 - S(x, y)). \quad (4.46)$$

Podemos agora dar uma interpretação melhor para a equação (4.29) como o espalhamento de um quark no condensado a partir do modelo clássico MV (sem considerar a dependência em x). A amplitude de espalhamento $\mathcal{N} = 1 - S$ pode ser aproximada no limite de $k_T \gg Q_s$ onde podemos manter a ordem linear dos campos correspondentes a troca de dois glúons com o dipolo, e o exponencial de (4.29) pode ser expandido, resultando em:

$$\mathcal{N}(r) \sim Q_s^2 \int \frac{d^2k_T}{k_T^4} [1 - e^{ik_T r}], \quad (4.47)$$

sendo que neste caso k_T é o momento transferido do alvo ao dipolo que tem um tamanho $r = x - y$. Se r é muito pequeno e k_T é relativamente pequeno também é possível fazer a aproximação $1 - e^{ik_T r} \approx ik_T \cdot r$ assim como na Eq. (4.30), sendo que neste caso o espalhamento é dado por glúons de menor momento. Por outro lado, existe ainda a possibilidade de existir um grande momento transferido pelo alvo. Neste caso, descartando a unidade na equação (4.47) (que corresponde a um espalhamento sem momento transferido), temos uma amplitude:

$$\mathcal{N}(k_T) \sim \frac{Q_s^2}{k_T^4}, \quad (4.48)$$

que é devido a um único espalhamento duro típico daquele dado pelo modelo de pártons devido a troca vetorial entre quarks com o escalonamento p_T^{-4} como vimos na seção 3.4. Este resultado é importante, porque esperamos que se k_T é grande devemos recuperar algo próximo às características do modelo perturbativo. Na situação oposta, se r é muito grande, temos campos fortes do condensado, e podemos verificar que a equação (4.31) tende a zero, o que leva à $\mathcal{N} \rightarrow 1$. A equação (4.46) implica na saturação da seção de choque em um valor $\sigma_{dip} = 2\pi R^2$, que é a seção de choque para o espalhamento numa esfera dura. Agora temos um limite para o crescimento da seção de choque, e o problema da unitariedade, que discutimos na seção 4.1 sobre o limite de Froissart-Martin fica resolvido.

Na próxima seção vamos começar a analisar como podemos usar estas ideias do condensado para calcular seções de choque, num novo tipo de fatorização diferente daquele

colinear que descrevemos antes. Novamente, neste caso, a descrição do DIS é muito mais simples e vamos começar por este tipo de processo.

4.7 DIS no referencial de dipolo

O DIS foi apresentado na seção 2.2 no modelo colinear, onde o fóton virtual transfere um grande momento transversal para um párton que é posteriormente observado com grande p_T . O quadrivetor do fóton neste caso é $q = (q_0, q_T, 0)$ com q_0 pequeno, e o fóton prova uma área transversal muito pequena $r^2 \sim \frac{1}{Q^2}$ de forma que a interação ocorre apenas com um párton. Para a descrição do espalhamento no condensado é mais conveniente pensarmos num outro referencial, como em [87], o referencial de dipolo, em que o quadrimomento do fóton é dado por $q = (\sqrt{q^2 - Q^2}, 0, 0, -q)$ com $q \gg Q$. Vale lembrar que embora os observáveis não dependam do referencial ou do gauge que escolhermos, os fenômenos podem ter descrição muito diferente dependendo de nossas escolhas. Toda nossa descrição do condensado parte do princípio de que o hádron está num referencial de momento infinito, o referencial de dipolo mantém esta idéia, e toda evolução em x é dada na função de onda do hádron que carrega maior parte da energia. O fóton tem energia suficiente para se dissociar num par quark-antiquark (dipolo) que posteriormente interage eikonalmente com o campo de cor do hádron, sendo que neste caso o espalhamento não é dado por pártons como na visão colinear, mas sim pelas linhas de Wilson como discutimos acima. Como o próton tem um momento infinito, devido à contração de Lorentz ele tem uma extensão $\delta(x^-)$ o que faz com que o dipolo espalhe com uma distância r fixa e na aproximação eikonal sem mudança de trajetória. A representação desse processo é dada na Figura 4.10.

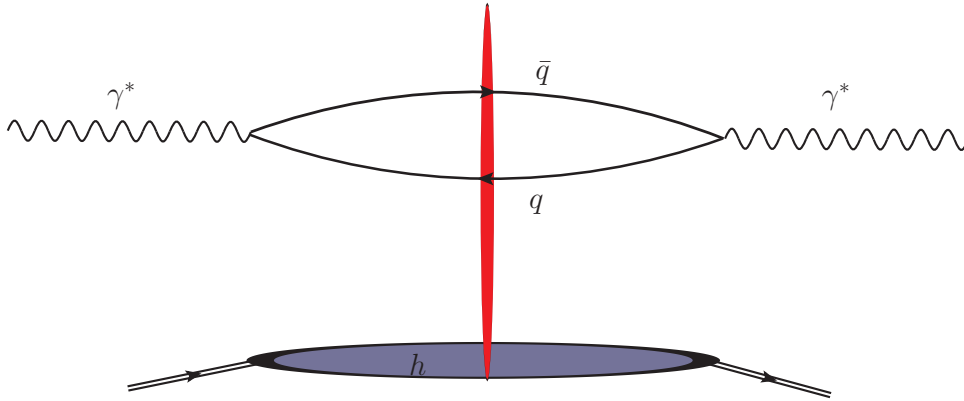


Figura 4.10: DIS no referencial de dipolo, onde o vértice $\gamma \rightarrow q\bar{q}$ é separado da interação com o condensado, representada pela área vermelha que inclui os múltiplos espalhamentos das linhas de Wilson.

A função de onda do fóton neste caso pode ser descrita pelos estados de Fock $|q\rangle, |\bar{q}\rangle$

$$|\gamma^*\rangle = \int d^2r dz \psi(x_T - y_T, z) \delta_{ij} |q(x_T, z)_i \bar{q}(y_T, 1-z)_j\rangle \quad (4.49)$$

sendo $r = x_T - y_T$ a distância do par $q\bar{q}$ com frações de momento z e $1-z$ do fóton. A função de onda neste caso dá a probabilidade que o fóton esteja neste estado e pode ser calculada com teoria de perturbação no cone de luz [48, 88, 89] para polarizações longitudinais e transversais do fóton. As funções de onda ao quadrado são:

$$\begin{aligned} |\psi_L(z, r)|^2 &= \frac{6\alpha_{em}}{(2\pi)^2} \sum_{n_f} 4e_f^2 Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r), \\ |\psi_T(z, r)|^2 &= \frac{6\alpha_{em}}{(2\pi)^2} \sum_{n_f} 4e_f^2 \{ [z^2(1-z)^2] \epsilon^2 K_1^2(\epsilon r) + m_f^2 K_0^2(\epsilon r) \}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

sendo $\epsilon = z(1-z)Q^2 + m_f^2$ e K_ν são funções de Bessel modificadas. A seção de choque γ^*h fica dada pela convolução da probabilidade de se encontrar um dipolo de separação r e fração z de momento com a seção de choque para o espalhamento deste dipolo dada por (4.46):

$$\sigma_{\gamma^*h(L,T)}(x, Q^2) = \int_0^1 dz \int d^2r |\psi_{(L,T)}(r, z)|^2 \sigma_{dip}(x, r), \quad (4.51)$$

sendo x neste caso a variável de Bjorken. Esta seção de choque mostra uma nova forma de fatorização, diferente daquela colinear do modelo de pártons (2.9); o único elemento que precisamos aqui é a função de correlação das linhas de Wilson que evolui de acordo com as equações JIMWLK/BK dadas pelas equações (4.38),(4.41).

Devido à simplicidade da equação (4.51), ela tem sido muito utilizada para parametrizar a seção de choque de dipolo. Em particular a colaboração AAMQS [61, 90] se baseia em modelos conhecidos, como MV e GBW (que veremos adiante), e acrescenta parâmetros para reproduzir os dados experimentais.

Estas mesmas seções de choque de dipolo podem ser usadas para outros processos, como no caso que estudaremos no próximo capítulo $pp \rightarrow h + X$. Nossa abordagem para o cálculo da produção de hádrons não será o de resolver as equações de evolução BK. Iremos utilizar modelos fenomenológicos para a seção de choque de dipolo, que já preveem uma dependência em x para estas. Deixamos para o próximo capítulo o estudo destes modelos, bem como as formas de fatorização para a seção de choque $pp \rightarrow h + X$ seguidas de nossos resultados para este caso.

Capítulo 5

Produção de hádrons em colisão pp no formalismo do CGC

Tendo feito uma breve introdução sobre o assunto no capítulo anterior, devemos agora voltar ao caso de interesse: o processo $pp \rightarrow h + X$. Para a descrição de colisões hadrônicas a partir do formalismo CGC, não existe um esquema de fatorização tão simples como o do DIS. Neste caso a visão da interação mostrada na Fig. 5.1, é a de dois núcleos condensados cujos fortes campos de cor interagem entre si. Entretanto, em certos limites é possível tratarmos o caso de um espalhamento diluído-condensado (projétil-alvo), e dessa forma podemos escrever um tipo de fatorização híbrida, que mistura o conceito do CGC com o formalismo colinear. Devemos definir melhor em quais regiões cinemáticas estaríamos provando um estado condensado, e qual abordagem é mais apropriada neste caso para as colisões pp .

Neste capítulo, teremos também que escolher alguma parametrização para a seção de choque de dipolo (função de correlação das linhas de Wilson), dentre os vários modelos disponíveis na literatura. Neste sentido, discutiremos uma interessante propriedade da região de saturação: um novo escalonamento geométrico, mas desta vez na variável Q_s/k_T . O que implica que para a descrição do condensado a escala de saturação é suficiente para definir as propriedades da interação de uma forma universal.

Uma comparação direta entre o formalismo colinear e o CGC não parece muito apropriada neste caso, já que estes formalismos completamente diferentes se propõem à descrição de regiões cinemáticas distintas. Vamos proceder de forma a comparar vários dados, de vários experimentos, onde esperamos encontrar evidências do CGC, assim como fizemos com o modelo colinear. Tendo uma visão ampla destes conjuntos de dados, poderemos entender melhor as limitações de ambos os modelos, e uma comparação mais profunda entre eles.

5.1 A fatorização híbrida

É possível encontrarmos uma simplificação para a fatorização do CGC, no limite em que um dos hádron é visto diluído e o outro condensado. Esta forma de se descrever o fenômeno leva à uma expressão bastante simples para as seções de choque que devemos

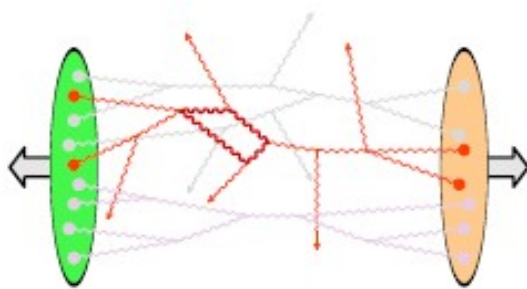


Figura 5.1: Figura extraída de [4], mostrando a interação entre hádrons condensados no formalismo CGC.

utilizar em nossos cálculos. Obviamente, devemos posteriormente nos perguntar em quais casos esta visão é realista na descrição da cinemática do processo.

Nas referências [91, 92] é introduzida a ideia deste tipo híbrido de fatorização, que iremos seguir. A ideia é tratar um projétil diluído do ponto de vista do modelo de partons, em que estes partons de grande x , colineares à direção de movimento do projétil vão ser espalhados pelo campo de cor de um alvo condensado. Este espalhamento é dado pelas linhas de Wilson que acoplam este parton ao campo de cor do alvo condensado, fazendo com que o mesmo sofra múltiplos espalhamentos pela troca de glúons suaves, como representado na Figura 4.9. Estes múltiplos espalhamentos geram um momento transversal k_T da ordem da escala de saturação do alvo para este parton, que após a hadronização é observado com um momento transversal p_T .

Podemos começar pensando no processo mais simples: a produção de um quark de valência pelo espalhamento $qA \rightarrow qX$ (onde A denota um grande núcleo condensado). Seguindo a explicação de [93], temos que o número de quarks produzidos com momento k é dado por:

$$dN_{out} = \langle \text{out} | b^\dagger(k) b(k) | \text{in} \rangle, \quad (5.1)$$

com $b(K)$, $b^\dagger(k)$ sendo os operadores de criação e destruição do quark. Neste caso, o quark se propaga na direção $+$ com momento inicial q e momento final k . Na aproximação eikonal, como fizemos na seção 4.6, o estado final se difere do inicial apenas pela fase V_{ij} :

$$|\text{out}\rangle = N \int \frac{dx_T}{(2\pi)^2} e^{iq_T x_T} V_{ij}(x_T) |p^+, x_T, j\rangle,$$

sendo N um fator de normalização dado por $\langle \text{in} | \text{in} \rangle$. Portanto, temos:

$$dN_{out} = N^2 \int \frac{d^2 x_T}{(2\pi)^2} \frac{d^2 y_T}{(2\pi)^2} e^{iq_T(x_T - y_T)} V_{j'i}^\dagger(y_T) V_{ij}(x_T) \langle q^+, y_T, j' | b_l^\dagger(k) b_l(k) | q^+, x_T, j \rangle \quad (5.2)$$

O último termo pode ser obtido considerando-se a relação de anticomutação:

$$\{b_{i\alpha}(q^+, x_T), b_{j\beta}(k^+, y_T)\} = (2\pi)^2 \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta(q^+, k^+) \delta^2(x_T - y_T), \quad (5.3)$$

sendo os operadores b , b^\dagger dados no espaço de momento transverso pela transformada de Fourier:

$$b_i^\dagger(q^+, q_T) = \int \frac{d^2 x_T}{(2\pi)^2} e^{iq_T x_T} b_i^\dagger(q^+, x_T). \quad (5.4)$$

Para simplificar a notação, estamos omitindo os índices de spin α, β . A seção de choque é obtida dividindo dN_{out} pelo número de partículas por área e somando sobre as cores e spin do estado final. Além disso, existe um fator N_c devido às possíveis cores do estado inicial. Os detalhes dos cálculos podem ser vistos em [91, 93, 94]. Por fim, teremos:

$$\frac{d\sigma^{qA \rightarrow qX}}{dk^3} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 b \int d^2 r e^{-ik_T r} Tr \langle V(r) V^\dagger(0) \rangle, \quad (5.5)$$

onde novamente expressamos x_T e y_T em termos de r e do parâmetro de impacto b . O último termo desta expressão podemos identificar como a transformada de Fourier da matriz de espalhamento do dipolo (4.45). É neste sentido que dissemos que a mesma seção de choque de dipolo usada no DIS pode ser usada para o cálculo de observáveis envolvendo colisões hadrônicas.

Analogamente ao espalhamento de um quark pelo condensado, podemos também escrever a matriz para o espalhamento de um glúon:

$$S_A(r, b) = \frac{1}{N_c^2 - 1} Tr \langle U(r) U^\dagger(0) \rangle, \quad (5.6)$$

sendo $U(r)$ a linha de Wilson na representação adjunta (a única diferença aqui é o fator de cor).

Devemos agora considerar correções de ordem α_s nesta seção de choque. Mais especificamente, vamos abordar a produção de um quark e um glúon no estado final; segundo mostrado por [92], poderemos incorporar estas correções nas funções de distribuição do projétil diluído na aproximação colinear. Os diagramas envolvidos no processo são mostrados na Figura 5.2 e calculados em [5]. O primeiro e o segundo correspondem a um glúon de momento k emitido antes ou depois da interação do quark de momento p com o alvo, que posteriormente adquire momento q . O terceiro e quarto correspondem à interação do alvo com o glúon emitido, e a interação com ambos (quark e glúon). Nestes diagramas, o vértice de interação do alvo com o párton é a abreviação da Figura 4.9 onde múltiplos espalhamentos são ressomados via linhas de Wilson.

Diagramas em que o glúon é emitido entre os múltiplos espalhamentos não são considerados, já que estes glúons são emitidos numa escala de tempo muito maior que o tempo envolvido no processo destes espalhamentos. Vale ainda observar que o último diagrama envolve termos de quadrupolo, já que inclui duas linhas de Wilson. Os diagramas que interessam neste caso são o 1 e o 3, que apresentam singularidades colineares quando o quark e o glúon no estado final são colineares, sendo os outros diagramas ignorados na aproximação colinear.

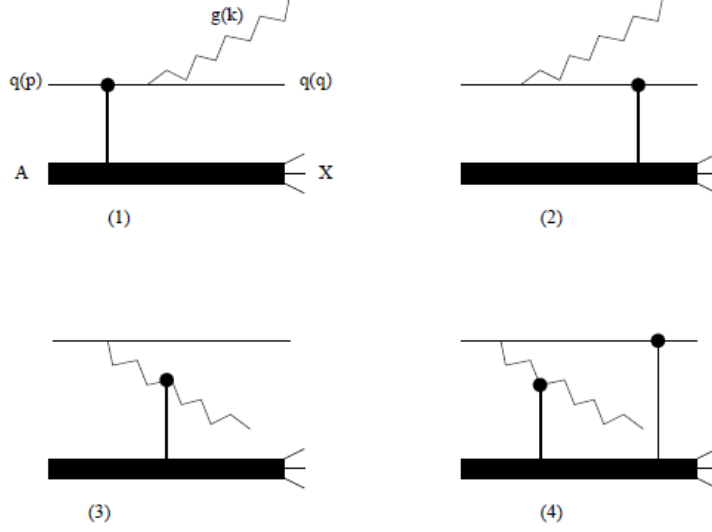


Figura 5.2: Figura extraída de [5], mostrando os diagramas do processo $qA \rightarrow qq + X$.

Não vamos dar detalhes destes cálculos, mas as amplitudes obtidas por [92] são:

$$\begin{aligned}
|M_1|^2 &= 16(p^-)^2 \frac{z(1+z)^2}{[(1-z)q_T - zk_T]^2} \int d^2r e^{i(q_T+k_T)\cdot r} \\
&\quad \times C_F \int d^2b T r \left\langle (V(b-r/2)^\dagger - 1)(V(b+r/2) - 1) \right\rangle, \\
|M_3|^2 &= 16(p^-)^2 \frac{z(1+z)^2}{q_T^2} \int d^2r e^{i(q_T+k_T)\cdot r} \\
&\quad \times \frac{1}{2} \int d^2b T r \left\langle (U(b-r/2)^\dagger - 1)(U(b+r/2) - 1) \right\rangle,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde $z = q^-/p^-$ é a fração de momento carregada pelo quark (nesta descrição o projétil se move na direção -). Quando somarmos estes termos e fizermos a integral sobre o momento q_T do quark para calcular a seção de choque, estas amplitudes nos darão singularidades tipo $\log \frac{Q^2}{\Lambda^2}$. Por exemplo, a seção de choque para produção de quarks é dada por:

$$\begin{aligned}
\xi \frac{d\sigma^{qA \rightarrow qX}}{d\xi d^2k_T d^2b} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \xi P_{q/q}(\xi) \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \left[\mathcal{N}_F(k_T) + \frac{1}{\xi^2} \mathcal{N}_F(k_T/\xi) \right], \\
\xi \frac{d\sigma^{gA \rightarrow qX}}{d\xi d^2k_T d^2b} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \xi P_{q/g}(\xi) \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \left[\mathcal{N}_F(k_T) + \frac{1}{\xi^2} \mathcal{N}_A(k_T/\xi) \right],
\end{aligned} \tag{5.8}$$

neste caso $\xi = 1 - z$ é a fração de momento do glúon, e $\mathcal{N}_{A,F}$ são transformadas de Fourier das amplitudes de dipolo adjunta e fundamental. Somando-se isso ao espalhamento

do quark (sem produção de glúon) dado por (5.5), que contribui com uma função de distribuição $q_0(x)\delta(1-\xi)$, temos:

$$\int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left\{ q_0(x/\xi) \left(\delta(1-\xi) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{q/q}(\xi) \right) + g_0(x/\xi) \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{q/g}(\xi) \right\}, \quad (5.9)$$

que pode ser identificada como a evolução DGLAP para a função de distribuição do quark (2.18) $f_{q/p}(x/\xi, Q^2)$.

Devemos observar, que na verdade os diagramas da Figura 5.2 não são realmente considerados neste processo. São mantidas apenas as divergências colineares de dois destes diagramas e redefinimos nas PDFs, mas emissões em que existe um grande recuo destes pártons, por exemplo, não estão considerados neste caso.

O mesmo que fizemos para os quarks pode ser feito para os glúons, e desta forma temos a seção de choque para produção de quarks e glúons:

$$\frac{d\sigma^{pA \rightarrow \text{párton} + X}}{dy d^2k_T} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2b \{ f_{q/p}(x, Q^2) S_F(k_T, b) + f_{g/p}(x, Q^2) S_A(k_T, b) \}. \quad (5.10)$$

Identificamos esta equação simplesmente como a Eq.(5.5) (neste caso adicionam-se os glúons espalhados), com a mudança de que agora as funções de distribuição de quarks ressomam correções LLQ (logaritmos de Q). Aqui vale ressaltar que muitos autores usam definições diferentes para a amplitude de espalhamento (com ou sem o fator 1), ou com o sinal trocado, e os modelos para a amplitude de dipolo também eventualmente são definidos com ou sem este fator. O que importa é que o fator 1 não entra na transformada de Fourier $S_{(F)A}$, já que como vimos antes, este fator corresponde ao espalhamento sem momento transferido.

A seção de choque (5.10) vai nos dar a produção de um jato proveniente do quark ou glúon do estado final, e precisamos ainda incluir a hadronização do párton produzido. Neste caso, as mesmas singularidades do estado inicial também estão presentes no estado final, que podem ser colocadas nas funções de fragmentação $D_{hB}(z, Q^2)$. Da mesma forma que fizemos para a seção de choque do modelo colinear, podemos considerar $k_T = p_T/z$, ou seja, o hádrón final é colinear ao párton produzido. A convolução neste caso é mais simples e devemos apenas considerar $d^2k_T = d^2p_T/z^2$ e fazer a integral em z até 1. Ou definindo $z = x_F/x$ (x_F é o valor mínimo de x), podemos fazer a integral em x :

$$\begin{aligned} E \frac{d^3\sigma(pA \rightarrow h + X)}{d^3p} = & K \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2b \int_{x_F}^1 \frac{x}{x_F} \{ f_{q/p}(x, Q^2) S_F(k_T, b, x_A) D_{h/q}(z, Q^2) \\ & + f_{g/p}(x, Q^2) S_A(k_T, b, x_A) D_{h/q}(z, Q^2) \}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nesta equação, as funções de distribuição estão definidas multiplicadas por x , e são portanto densidades, como usualmente são dadas as PDFs. Além disso, deixamos um fator K que deve representar correções de ordem mais alta, assim como no formalismo colinear, sendo devidos aos diagramas que não consideramos na aproximação colinear.

Esta seção de choque deve ser comparada com a do modelo colinear (3.5), e é a forma que usaremos para o cálculo da produção de hádróns no formalismo do CGC. Mas, ainda devemos nos perguntar em quais regiões cinemáticas do espectro p_T este esquema de fatorização é apropriado, lembrando que partimos do princípio de que um dos hádróns está

num estado diluído e o outro denso; sendo que a interação é essencialmente de um quark de valência com o condensado. Para isso, vamos analisar a cinemática envolvida neste processo.

5.1.1 A cinemática $2 \rightarrow 1$

O espalhamento neste formalismo é dado da seguinte maneira: um quark do projétil entra colinear ao eixo de colisão (em x^-), e interage eikonalmente (nenhum momento é transferido na coordenada $-$) com o campo de cor do alvo via linhas de Wilson, com um momento transferido k_T . No referencial do centro de massa, tanto o projétil quanto o alvo têm grande momento, $P^- = \sqrt{s/2}$ e $K^+ = \sqrt{s/2}$, respectivamente. O momento transferido é k e o momento do párton no estado final é q , são dados por:

$$\begin{aligned} k &= (0, x_A K^+, k_T), \\ q &= \left(x\sqrt{s/2}, \frac{k_T^2}{2x\sqrt{s/2}}, k_T \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

A fração de momento x é a que o párton diluído carrega do próton, já x_A é a fração de momento do alvo. Podemos desta forma definir as relações:

$$\begin{aligned} x &= \frac{k_T}{\sqrt{s}} e^y, & x_F &= \frac{p_T e^y}{\sqrt{s}}, \\ y_A &= \log \frac{1}{x_A}, & x_A &= x e^{-2y}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde y é a rapidez do hádron observado. Estas relações são diferentes daquelas que obtivemos na cinemática $2 \rightarrow 2$ do modelo colinear (3.6), mas assim como aquelas, estas nos permitem escrever a seção de choque em termos de \sqrt{s} e p_T , caracterizando o espectro p_T .

A última relação de (5.13) deixa claro o que estamos considerando como diluído-condensado, e precisamos ter uma rapidez relativamente grande para que possamos justificar o tratamento. Se temos $y \gtrsim 2$ já teríamos $x_A \sim 0.01x$, o que nos mostra que hádrons produzidos com grande rapidez são provenientes de interações assimétricas de um párton de grande momento, com um de pequeno. Além disso, em colisões pA (próton-núcleo), podemos ter mesmo na rapidez central esta assimetria dada pelo grande número atômico, que tende a aumentar a escala de saturação do núcleo. Outras limitações desta abordagem ficarão mais claras quando apresentarmos nossos resultados.

Na próxima seção discutiremos possíveis correções à esta fórmula de fatorização não incluídas nesta discussão, e com isso poderemos estudar melhor as limitações de tal abordagem.

5.1.2 Termo inelástico na fatorização híbrida

Na ref. [95] é dada uma modificação da fatorização híbrida, que considera pártons do projétil que já possuem um grande momento transversal. Estes termos não são absorvidos na ressonância colinear do quark incidente, e portanto devem ser considerados como fonte de grande k_T . O termo inelástico vem do fato de que as componentes partônicas de grande momento da função de onda do projétil não trocam momento transversal significativo com

o alvo; a interação apenas coloca estes pártons na camada de massa, fazendo com que sejam observados no estado final. Pártons deste tipo são produzidos opostos no espaço transverso, já que devido à conservação de momento, a emissão com grande ângulo gera um recuo oposto do párton emissor (fenômeno conhecido como dijet).

A ideia destas correções é de estender a validade do modelo híbrido para regiões de p_T um pouco maior, já que se $k_T \ll Q_S$ estamos num regime saturado, o que faz com que espalhamentos inelásticos sejam mais sensíveis aos efeitos de saturação do alvo. Neste ponto vale ressaltar que o modelo híbrido não inclui ressonância colinear no alvo, o que implica que não podemos ter p_T muito grande.

Não vamos fazer aqui nenhuma demonstração da obtenção deste termo inelástico, apenas apresentamos o resultado de [95]:

$$E \frac{d^3}{d^3p} \sigma^{ine}(pp \rightarrow h + X) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{x_F}^1 \frac{dx}{x_F} \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \frac{1}{k_T^4} \int^{Q^2} d^2k_T k_T^2 S_F(k_T, x_A) \quad (5.14)$$

$$\times \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \sum_{i,j} w_{i/j}(\xi) P_{i/j}(\xi) f_j\left(\frac{x}{\xi}, Q^2\right) D_{h/i}(z, Q^2).$$

Este é apenas o termo inelástico que deve ser somado na equação (5.11) (omitimos a integral no parâmetro de impacto). $P_{i/j}$ são as funções de desdobramento (2.15), e os termos $w_{i/j}$ são funções de peso, que dão a contribuição de cada párton no processo, dadas por:

$$w_{g/g}(\xi) = 2 \frac{N_c^2}{N_c^2 - 1} (1 - \xi + \xi^2),$$

$$w_{g/q}(\xi) = w_{g/\bar{q}}(\xi) = \frac{N_c^2}{N_c^2 - 1} \left[1 + (1 - \xi)^2 - \frac{\xi^2}{N_c^2} \right], \quad (5.15)$$

$$w_{q/q}(\xi) = w_{q/\bar{q}}(\xi) = \frac{N_c^2}{N_c^2 - 1} \left[1 + \xi^2 - \frac{(1 - \xi)^2}{N_c^2} \right],$$

$$w_{q/g}(\xi) = w_{\bar{q}/g}(\xi) = \frac{1}{2} \left[(1 - \xi)^2 + \xi^2 - \frac{2\xi(1 - \xi)}{N_c^2 - 1} \right].$$

Devido à prescrição + (2.16), estes termos não são necessariamente positivos; o problema é que para alguns valores das variáveis cinemáticas eles se tornam maiores que o termo elástico, levando a uma seção de choque negativa. O problema da positividade da seção de choque ao incluir-se estas correções é citado em [67], e também é presente em nossos resultados em alguns casos. Ultimamente vários autores têm proposto correções completas em NLO (próxima ordem dominante) [96, 97, 98], e acontece que em quase todos os casos existe problema com a positividade da seção de choque. Tal problema ainda é algo em aberto e coloca em questão a validade de tais modelos. Soma-se a isso um problema de positividade da seção de choque de dipolos que veremos adiante.

Na próxima seção vamos abordar um outro formalismo de fatorização, que talvez seja mais apropriado para descrevermos a região de rapidez central.

5.2 Fatorização k_T

Os dados experimentais do LHC apresentam regiões de x extremamente pequeno devido à grande energia da colisão, como vemos da Eq. (5.13). Entretanto, estes dados

estão numa região central de rapidez, onde as colisões são simétricas e não podemos usar a aproximação diluído-condensado. Neste caso, o valor de x do projétil é igual ao do alvo, e ambos estão ou num regime condensado ou diluído.

Neste sentido esperamos que a abordagem dada pela fatorização k_T seja mais realista para descrever eventos simétricos em altas energias, onde a evolução em $\log \frac{1}{x}$ é relevante, bem como efeitos de saturação em pequeno p_T . Tal fatorização é na verdade conhecida há muito mais tempo que a forma híbrida, e é demonstrada nas referências [99, 100], sendo que nesta última é feita a conexão com os dipolos.

No formalismo BFKL, a produção de glúons pode ser dada, por exemplo pelo espalhamento de dois quarks considerando-se os diagramas 5.3. O vértice neste caso é o chamado vértice de Lipatov, que inclui todos os possíveis diagramas para a emissão deste glúon real. Calculando as amplitudes de todos estes diagramas em ordem dominante é possível se chegar a uma expressão bastante simples para a seção de choque (ver em [2]):

$$\frac{d\sigma^{qq}}{d^2k_T dy} = \frac{2\alpha_s^3 C_F}{\pi^2} \frac{1}{k_T^2} \int d^2q_T \frac{1}{q_T^2 (k_T - q_T)^2}, \quad (5.16)$$

sendo k_T o momento transversal do glúon produzido, q_T e $k_T - q_T$ são os momentos transversos dos quarks. Vale lembrar que no regime de pequeno x , as escadas de glúons geradas pela BFKL são glúons com forte ordenamento em x que geram a aproximação LLx. Desta forma este formalismo só nos permite tratar da dinâmica de glúons produzidos; isto seria suficiente para gerar jatos observados com relativamente pequeno p_T . Mas ao avançarmos para regiões de maior p_T , inevitavelmente temos contribuições mais importantes de quarks e a necessidade da evolução DGLAP. Vamos nos limitar neste formalismo para um $x \lesssim 0.05$ que obviamente não é algo exato. Vamos estudar melhor as contribuições de quarks ou de DGLAP quando apresentarmos nossos resultados.

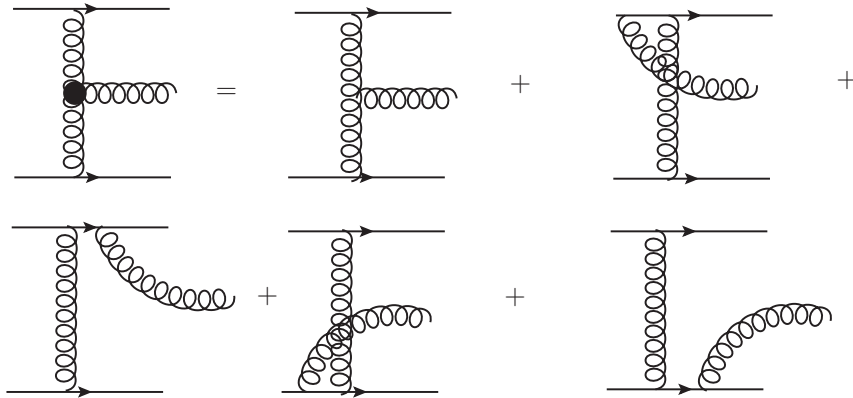


Figura 5.3: Vértice de Lipatov que considera as possíveis emissões de glúons.

Se verificarmos as funções de distribuição em LO (ordem dominante) da Eq. (4.33) podemos identificar este resultado na forma:

$$\frac{d\sigma^{qq}}{d^2k_T dy} = \frac{2\alpha_s}{C_F} \frac{1}{k_T^2} \int d^2q_T \phi(q_T^2) \phi((k_T - q_T)^2), \quad (5.17)$$

que é representado como duas distribuições ligadas pelos vértices de Lipatov.

Nas referências [100, 101] (com uma explicação mais didática em [2, 94]), é apresentado um modo de se obter este tipo de fatorização no formalismo do condensado, onde não podemos mais manter apenas o termo de ordem dominante. Neste caso é considerado o espalhamento do quark num núcleo com a produção de um glúon antes ou depois da interação. O glúon sofre múltiplos espalhamentos pelo alvo condensado, enquanto que a interação deste glúon com o projétil (quark) é dada na aproximação de campo fraco da equação (4.33) (em primeira ordem das funções de correlação das linhas de Wilson). Sem considerar qualquer evolução quântica ($y = 0$), é possível chegar-se ao seguinte resultado:

$$\frac{d\sigma^{qA}}{d^2k_T dy} = \frac{C_F}{\alpha_s \pi (2\pi)^3} \frac{1}{k_T^2} \int d^2B d^2b d^2x_T \left[\nabla_x^2 n^q(x_T, B - b, 0) \right. \\ \left. \times e^{-ik_T \cdot x_T} \nabla_x^2 \mathcal{N}^A(x_T, b, 0) \right] \quad (5.18)$$

Esta equação considera a interação do glúon com o projétil (quark) com amplitude de espalhamento n^q , e do glúon com o alvo nuclear via \mathcal{N}^A ($y=0$ em n^q implica que não estamos considerando evolução quântica). Ambas as amplitudes estão na representação adjunta das linhas de Wilson, já que é o glúon que interage com o projétil ou com o alvo. B e b são os parâmetros de impacto do quark e do glúon, respectivamente, medidos em relação ao alvo nuclear.

Em [100] os autores fazem a identificação dos termos da equação (5.18) como as funções de distribuição de glúons da Eq. (5.17). Neste sentido, as funções de distribuição são definidas como

$$\phi_A(x, k_T) = \frac{C_F}{\alpha_S (2\pi)^3} \int d^2b d^2x_T e^{-ik_T \cdot x_T} \nabla_x^2 \mathcal{N}(x_T, b, y_A), \\ \phi_p(x, k_T) = \frac{C_F}{\alpha_S (2\pi)^3} \int d^2b d^2x_T e^{-ik_T \cdot x_T} \nabla_x^2 n(x_T, b, y). \quad (5.19)$$

Devemos notar que estas funções de distribuição de glúons não são iguais aquelas de Weizsäcker-Williams definidas em (4.15). Estas são frequentemente denominadas funções de distribuição de dipolos. Já colocamos nestas distribuições uma dependência de rapidez ($y = \log \frac{1}{x}$) devido à evolução quântica. É possível demonstrar que esta fatorização continua válida neste caso [2, 94]. Além disso, embora tenhamos falado no espalhamento de um único quark, também podemos generalizar para o próton, desde que mantenhamos a aproximação de que a troca de glúons com o projétil diluído (agora próton) é dada na aproximação de campo fraco (ou grande momento).

Para esclarecimento, o limite de grande k_T (4.33) das TMDs (dependentes de momento transversal) tipo Weizsäcker-Williams coincide com o das distribuições TMDs de dipolos apresentadas aqui. Este fato pode ser verificado multiplicando-se a Eq. (4.48) por k_T^2 (referente ao laplaciano presente nas distribuições de dipolo). Entretanto tal resultado não é em geral verdadeiro, sendo que devemos usar estas de dipolo. Outra observação é sobre a notação, onde neste caso os subscritos A e p indicam distribuições do alvo e do projétil, o que não deve ser confundido com a notação A e F referentes a representação adjunta e fundamental das linhas de Wilson. Como neste caso ambas estão na representação adjunta, tal notação é dispensável.

Vale a pena também notarmos que a identificação destas distribuições na Eq. (5.17) não é óbvia, já que o processo parece bastante diferente daqueles diagramas considerados pelos múltiplos espalhamentos do glúon no alvo. Os autores de [100], ao fazerem tal identificação, dizem que deve existir um gauge onde os diagramas considerados neste caso são equivalentes aos da Figura 5.3. Nesta visão, a interação é dada pelas duas funções de distribuição de glúons separadas por um vértice de Lipatov. Considerando os efeitos não lineares devido à grande densidade de glúons, estes efeitos podem ser representados na Figura 5.4. Neste caso temos a mesma cinemática $2 \rightarrow 1$, onde as variáveis são dadas pelas relações (5.13). Devemos ainda considerar o processo de fragmentação deste glúon final em hádrons, da mesma forma que fizemos no caso híbrido. O resultado que vamos usar em nossos cálculos é:

$$\frac{d\sigma^{pA \rightarrow hX}}{d^2k_T dy} = \frac{2\alpha_S}{c_F} \frac{1}{k_T^2} \int_{x_F}^1 \frac{dx}{x_F} \int d^2q_T \phi_p(x, q_T^2) \phi_A(x_A, (k_T - q_T)^2) D_{h/g}(z, Q^2). \quad (5.20)$$

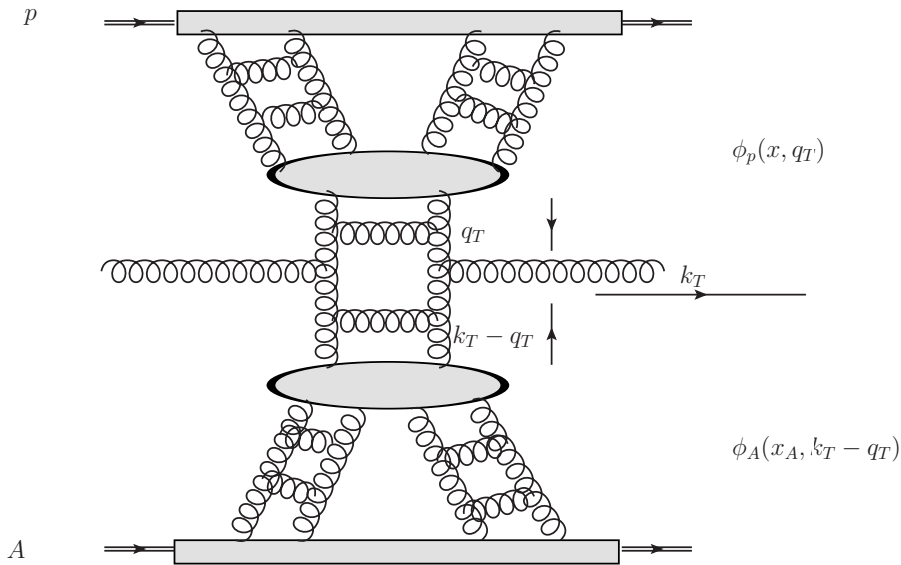


Figura 5.4: Representação do esquema de fatorização k_T , incluindo a evolução quântica não-linear das distribuições, com glúon produzido de momento transversal k_T .

Existe bastante divergência entre diferentes autores sobre o fator $\frac{2\alpha_S}{c_F}$, e os fatores que entram nas funções de distribuição. Além disso, não existe prova muito rigorosa deste tipo de fatorização em termos das funções de distribuição de dipolos. Uma explicação mais detalhada destes problemas é dada em [102]. Outro problema é a existência de duas distribuições TMDs, como mencionamos: a de dipolos e a de Weizsäcker-Williams. Esta diferença é estudada com detalhes em [103, 104].

O formalismo de fatorização k_T , como descrito nesta seção, é limitado ao caso diluído, bem como o caso híbrido. Portanto, a justificativa da aplicação destes formalismos em colisões simétricas (rapidez central) é difícil de se justificar. Mesmo assim, estas são as

melhores ferramentas que temos para descrever efeitos de saturação nas colisões próton-próton de nosso interesse. Infelizmente, dados experimentais para o espectro p_T do LHC estão na região de rapidez central, onde toda esta abordagem não é tão robusta.

5.3 Modelos fenomenológicos para a seção de choque de dipolo

O único ingrediente que falta para calcularmos as seções de choque (5.11), (5.14) e (5.20) são amplitudes de espalhamento de dipolo

$$\mathcal{N}(x, r) = 1 - S(x, r),$$

sendo $S(x, r)$ a função de correlação das linhas de Wilson. Aqui existem duas possibilidades: podemos usar um modelo para condição inicial em um certo x_0 e fazer a evolução BK em direção à menores valores de x . Alternativamente, podemos usar uma seção de choque já dependente de x dada por modelos fenomenológicos. Estes modelos são baseados em certos limites de soluções analíticas da equação BK, com alguns parâmetros livres para serem ajustados aos dados experimentais. Nossa abordagem é esta última, e essencialmente vamos considerar em nossos cálculos dois modelos, apresentados em [92, 105]. Antes disso, faremos uma breve explicação sobre alguns modelos.

5.3.1 O modelo GBW (Golec-Biernat/Wusthoff)

O modelo GBW [106, 107] é desenvolvido para descrever dados do HERA de pequeno x e Q^2 . A amplitude de espalhamento do dipolo é dada por um termo típico do espalhamento eikonal:

$$S(rQ_s) = \exp\left(-\frac{1}{4}(rQ_s(x))^2\right), \quad (5.21)$$

de onde podemos ver o escalonamento (scaling) na variável rQ_s , já que S é função apenas desta combinação, e não de ambas separadamente. Explicaremos melhor esta propriedade tão importante mais adiante neste texto. A escala de saturação neste modelo é dada por uma forma análoga àquela equação (4.4):

$$Q_s^2(x) = Q_{s0}^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^\lambda. \quad (5.22)$$

Tal escala de saturação parte de um valor $Q_{s0} = 1$ GeV em um dado x_0 e passa a aumentar à medida que x diminui. A seção de choque no DIS (4.46) pode ser calculada considerando:

$$\sigma(x, r) = \sigma_0 \mathcal{N}(x, r). \quad (5.23)$$

A dependência de parâmetro de impacto (4.46) é fatorizada na forma $\mathcal{N}(x, r)f(b)$ cuja integral em b é σ_0 . Este fator é relacionado a área transversa do próton provada no DIS.

O modelo GBW tem 3 parâmetros que precisam ser obtidos dos dados experimentais: $\lambda = 0.288$, $\sigma_0 = 23\text{mb}$ e $x_0 = 3.10^{-4}$. A grande vantagem deste modelo é que ele nos

dá uma transformada de Fourier analítica para a matriz de espalhamento de dipolo. A transformada da gaussiana é simplesmente uma gaussiana em k_T :

$$S(x, k_T) = \frac{4\pi}{Q_s^2(x)} \exp\left(-\frac{k_T^2}{Q_s^2(x)}\right). \quad (5.24)$$

Quando $k_T = Q_s$ o expoente passa a ser da ordem 1 e os efeitos de saturação são importantes. Mas, mesmo em k_T um pouco maior que Q_s o decaimento gaussiano é muito rápido; não devemos portanto esperar que este modelo seja capaz de reproduzir o espectro p_T que é dado em geral por uma lei de potência (3.14). Embora este modelo seja bem-sucedido para descrever o DIS, ele não é suficiente em colisões hadrônicas. Na próxima seção introduziremos alguns modelos que podem ser mais realistas neste caso.

Existe uma forma de se modificar o modelo GBW, proposta em [108] para acomodar a evolução DGLAP, e com isso permitir que este formalismo se estenda para regiões um pouco maiores de Q^2 . Para fazer isso, no limite $k \gg Q_s$ (r pequeno), podemos identificar nas equações (4.30), (4.33), (2.25):

$$\sigma_{dip}(x, r) = \frac{\pi^2}{3} \alpha_s r^2 x G(x, Q^2). \quad (5.25)$$

Neste limite o expoente do modelo GBW é pequeno e pode ser expandido:

$$\sigma_{dip}(x, r) \sim \sigma_0 r^2 Q_s^2(x), \quad (5.26)$$

o que leva à identificação da função de distribuição DGLAP no expoente:

$$\sigma_{dip}(x, r) = \sigma_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{3\sigma_0} r^2 \alpha_s (1/r^2) x G(x, 1/r^2)\right) \right\}. \quad (5.27)$$

Esta equação é capaz de descrever bem dados do DIS até $Q^2 \sim 100 \text{ GeV}^2$, e se reduz ao modelo de saturação (5.24) em k_T pequeno. Entretanto a inclusão de tal correção obviamente viola o escalonamento, já que agora temos uma função das duas variáveis x, r no expoente.

Podemos perceber que a descrição correta dos observáveis não se resume apenas à dependência em x dos modelos de dipolo. Precisamos ter um modelo que nos permita avançar da região de saturação, passando numa possível região onde o escalonamento se estende para fora do limite de saturação, e reproduzindo também o comportamento de relativamente grande momento na aproximação de DLA (ressoma de $\log Q^2 \log 1/x$). Só desta forma poderemos ter uma descrição razoável do espectro p_T .

5.3.2 Escalonamento geométrico em k_T/Q_s

A ideia do CGC é que a partir do momento que entramos na região de saturação $k < Q_s$, a dinâmica das interações passa a ser governada por uma única escala, a escala de saturação. Neste sentido podemos esperar que as funções de distribuição nesta região só dependam de $k_T/Q_s(x)$, e não de ambas separadamente. É possível mostrar que esta propriedade está presente também na equação BK, resultado apresentado em [109].

Se considerarmos que muito dentro da região de saturação temos $S(x, r) \rightarrow 0$, a equação BK tem a simples forma (desconsiderando termos de segunda ordem em S):

$$\partial_y S_{xy}(y) = -\frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \int d^2 z_T \frac{(x_T - y_T)^2}{(x_T - z_T)^2 (z_T - y_T)^2} S_{xy}(y), \quad (5.28)$$

que possui uma solução simples

$$S(r, y) = S_0 \exp(-\log^2[r^2 Q_s(y)]/c), \quad (5.29)$$

onde S_0 e c são constantes. Tal solução é função apenas de $rQ_s(x)$, mostrando que a equação BK apresenta escalonamento dentro da região de saturação.

Não devemos confundir este escalonamento com aquele que discutimos no modelo colinear. Aqui estamos nos referindo ao escalonamento na variável rQ_s ou k_T/Q_s (no espaço de posição e momento respectivamente). A presença deste comportamento nos dados experimentais do DIS, pelo modelo GBW, é um dos indícios mais fortes a favor da teoria do CGC.

É possível mostrar através da análise da equação BK, que este escalonamento não se restringe à região de saturação, mas também é válido fora dela (o assunto é discutido em [94]). Tal região é conhecida como região de escalonamento geométrico estendido (EGS), que pode ser estimada a partir de soluções da equação BFKL próxima à região de saturação, já que fora da região de saturação, a equação BK se resume a BFKL. Em [110] é dado que este limite deve ser algo em torno de $Q_s^2 \lesssim Q_{gs}^2 \lesssim Q_s^4/\Lambda^2$. Desta relação podemos ver que, se a escala de saturação é grande (x pequeno), o limite de validade de BFKL é bastante estendido.

Com intuito de estender a descrição do simples modelo GBW, através da consideração da dinâmica BFKL neste limite, foi proposto por E. Iancu, K. Itakura e S. Munier [111] o seguinte modelo de dipolo (conhecido como IIM):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x, r) &= \mathcal{N}_0 \left(\frac{rQ_s}{2} \right)^{2\left(\gamma_s + \frac{\log(2/rQ_s)}{k\lambda y}\right)} && \text{para } rQ_s \leq 2, \\ \mathcal{N}(x, r) &= 1 - e^{-a \log^2(brQ_s)} && \text{para } rQ_s > 2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

A segunda solução é a solução da equação BK na região de saturação (5.29), onde os parâmetros são obtidos para garantir a transição suave dos dois regimes. Já a primeira é dada pela equação BFKL próxima a região de saturação, com $\gamma_s = 0.63$ sendo a solução BFKL na linha de saturação, e o termo $\log(2/rQ_s)/k\lambda y$ sendo um termo de difusão que viola o escalonamento. Este modelo dá uma boa descrição dos dados do HERA na região de x pequeno. Entretanto, não vamos entrar em detalhes deste, já que nosso objetivo é estudar colisões de hádrons.

5.3.3 Modelo DHJ (Dumitru - Hayashigaki - Jalilian-Marian)

O modelo DHJ [112] foi proposto para estudar colisões dAu (deuteron-ouro) no RHIC, tanto na região central, quanto na de grande rapidez. A ideia dos autores é corrigir o comportamento IIM em grande Q^2 , o que é importante para descrição do espectro p_T . A forma

da amplitude de dipolo é semelhante à de GBW com uma função $\gamma(r, x)$, frequentemente chamada dimensão anômala:

$$S(x, r) = \exp \left[-\frac{1}{4} (rQ_s(x_A))^{2\gamma(x_A, r)} \right]. \quad (5.31)$$

No caso da colisão de hádrons, estamos usando x_A para explicitar a cinemática dada nas Eqs.(5.13), em que o alvo condensado tem evolução em $y_A = \log \frac{1}{x_A}$. A dimensão anômala neste modelo é:

$$\gamma(y_A, r) = \gamma_s + (1 - \gamma_s) \frac{|\log(1/(rQ_s)^2)|}{\lambda y_A + |\log(1/(rQ_s)^2)| + d\sqrt{y_A}}. \quad (5.32)$$

Precisaremos calcular a transformada de Fourier de $S(x, r)$, mas com γ em função de r , esta operação é problemática. Mesmo numericamente, ocorrem oscilações e a amplitude se torna negativa; a solução usada pelos autores é de fazer a aproximação $r = 1/k_T$. A princípio parece estranho tal procedimento, já que neste caso a integral em r é feita com a função γ constante. Veremos mais adiante que, na verdade, a maior parte dos modelos de dipolo tem problemas quando $r \rightarrow 0$, tornando um grande problema encontrar uma forma correta para estas amplitudes no espaço de posição que possam ser traduzidas para o espectro de p_T .

O parâmetro $d = 1.2$ da Eq. (5.32) é ajustado pelos dados do RHIC em colisões dAu , já λ e $Q_s(x_A)$ usa-se do modelo GBW, e $\gamma_s = 0.63$ do modelo IIM. Pra simplificar a notação, vamos usar a variável de escalonamento $w = k_T/Q_s$, e analisar o comportamento desta dimensão anômala em alguns limites.

Começando por $w = 1$, estamos na região de saturação, com $\gamma \rightarrow \gamma_s$. Para $w > 1$, podemos estar ou não na região EGS (extended geometric scaling), dependendo de x_A . Se x_A decresce muito, temos $\Delta\gamma \sim 1/y_A$, violando o escalonamento. Entretanto, se mantivermos x_A constante (mesmo que seja pequeno) entramos na região EGS, respeitando as relações $Q_{gs}^2 \lesssim Q_s^4/\Lambda^2$. Por outro lado, se w cresce muito, temos $\gamma \rightarrow 1$ que deve nos aproximar do limite perturbativo da Eq. (4.48). Neste limite, a abordagem da fatorização híbrida não pode mais ser considerada, já que neste caso o alvo está num regime muito diluído (região própria para o modelo colinear).

5.3.4 Modelo BUW (Boer - Utermann - Wessels)

As violações de escalonamento presentes em $S(x, r)$ na verdade não são observadas diretamente dos dados experimentais no modelo de fatorização híbrida. A convolução com as PDFs e FFs, que evoluem acordo com DGLAP, automaticamente violam o escalonamento. Em [105], os autores argumentam que na verdade a violação de escalonamento de $S(x, r)$ não estaria presente nos dados do RHIC analisados por DHJ.

Além disso, é ressaltado que a lenta aproximação do regime DGLAP ($\gamma \rightarrow 1$), dada pelo termo $\log w$ inspirado em BFKL, levaria a um comportamento errado em p_T grande. Com estas considerações é proposta uma dimensão anômala alternativa, que vamos denominar BUW:

$$\gamma(w) = \gamma_1 + (1 - \gamma_1) \frac{(w^a - 1)}{(w^a - 1) + b}. \quad (5.33)$$

Os parâmetros a , b e γ_1 são ajustados dos dados do RHIC. Neste caso existem vários conjuntos destes parâmetros que descrevem igualmente bem os dados. O valor escolhido na análise de [105] é $\gamma_1 = \gamma_s$, $a = 2.82$ e $b = 168$, e usados para fazer previsões tanto no DIS, quanto em colisões de hádrons. Os resultados encontrados pelos autores são bastante diferentes do modelo DHJ na região de rapidez central, e se igualam em grande rapidez. Na verdade, quase todos estes modelos tem um mesmo comportamento na região próxima a de saturação, alcançada em grande rapidez.

Podemos ver da Eq. (5.33), uma aproximação bastante rápida do limite $\gamma \rightarrow 1$, a partir da escala de saturação. Neste caso, não existe o intermédio da região EGS e é previsto um espectro p_T que decai muito mais rápido, mais consistente com o modelo colinear.

5.3.5 Transformada de Hankel de $S_A(x, r)$

A transformada de Fourier da matriz de espalhamento dos dipolos, está diretamente relacionada à seção de choque no formalismo híbrido na Eq. (5.11), ou nas funções de distribuição de glúons não integradas na Eq. (5.19). Como já comentamos, esta transformada não é simples, e gera problemas no cálculo final do espectro p_T . Na verdade, estas são transformadas de Hankel, dadas por:

$$S_A(x, k_T) = \int_0^\infty dr r J_0(k_T r) \exp \left[-\frac{1}{4} (r Q_s)^{2\gamma(k_T, x_A)} \right], \quad (5.34)$$

onde estamos considerando a representação adjunta das linhas de Wilson. A expressão para S_F pode ser obtida pela substituição $(r Q_s)^{2\gamma} \rightarrow [(C_F/N_c)(r Q_s)^2]^\gamma$, com $C_F/N_c = 4/9$, que é válida no limite clássico com $\gamma = 1$.

Podemos ter uma ideia do comportamento destas funções em alguns limites. Se $\gamma = 1$ temos uma gaussiana do modelo GBW, com um decaimento muito rápido mesmo em pequeno p_T (que não é desejável para descrever o espectro p_T). Por outro lado, se $\gamma = 1/2$, temos:

$$S_A(x, k_T) = \frac{32\pi}{Q_s^2} \frac{1}{(1 + 16w^2)^{3/2}}, \quad (5.35)$$

que tem um comportamento de potência para w grande. Mas, para $w < 1$, tende a um valor quase constante caracterizado pela escala de saturação. Nos modelos DHJ e BUW, temos na escala de saturação um valor $\gamma = \gamma_s$, que deve nos dar uma solução próxima a esta. Entretanto, o limite mais importante quando estudamos o espectro p_T é aquele em que w pode ficar grande. Isto se traduz em $r \rightarrow 0$ no espaço de posição, onde o comportamento destas transformadas passa a ser problemático. Neste limite, podemos expandir o exponencial da Eq. (5.34) em segunda ordem de r^2 , na ref. [105] são dados estes limites para DHJ e BUW:

$$S_A(x, k_T) = \frac{2\pi 2^{2\gamma-1} Q_s^{2\gamma} \Gamma(1 + \gamma)}{k_T^{2\gamma+2} - \Gamma(-\gamma)}, \quad (5.36)$$

onde omitimos os argumentos de $\gamma(x_A, k_T)$ e $Q_s(x_A)$. No limite $\gamma \rightarrow 1$ teremos:

$$\begin{aligned} k_T^2 S_A(x, k_T) &\propto \frac{1}{w^2 \log w^2} && \text{para DHJ,} \\ k_T^2 S_A(x, k_T) &\propto \frac{1}{w^{2+a}} && \text{para BUW.} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Estas são as funções de distribuição de dipolos $\phi(x, k_T)$ dadas por (5.19) (O laplaciano no espaço de momento nos dá o fator k_T^2), que escrevemos assim para deixar explícito o escalonamento em ambas. Estamos também desconsiderando a dependência no parâmetro de impacto b .

Podemos comparar estes dois limites com aquele dado pelo espalhamento do modelo clássico MV, da Eq. (4.33), com $\phi(w) \sim 1/w^2$. Tendo $a = 2.82$, o modelo BUW dá um decaimento muito maior que este, e também maior que o dado pelo termo logarítmico do modelo DHJ.

É importante termos estes limites, porque numericamente em grande w , o integrando oscila muito rápido, e inevitavelmente temos algumas oscilações da função de distribuição. Para calcular a transformada de Hankel usamos o código de [113], sendo alguns resultados apresentadas na Figura 5.5. Devido aos problemas mencionados, verificamos que podemos reproduzir o resultados de outros trabalhos que calculam esta transformada, obtendo os mesmos outputs numéricos.

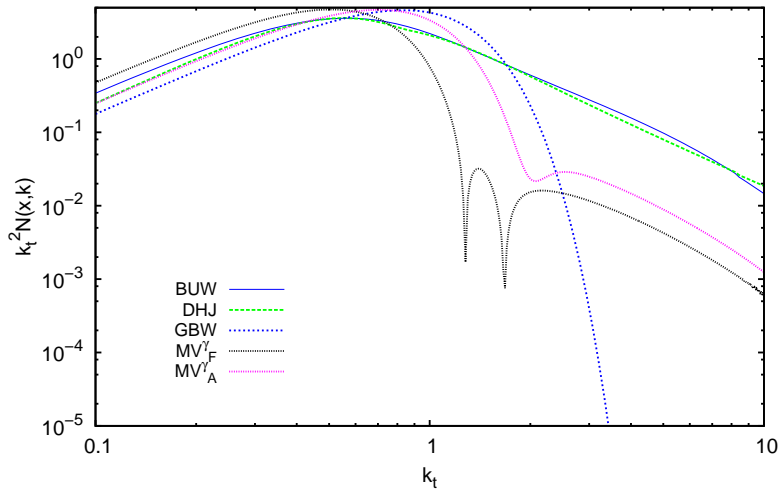


Figura 5.5: Comparação de diferentes modelos para a função de distribuição de glúons de dipolo.

A Figura 5.5 mostra $k_T^2 S(x, k_T)$ em função de k_T até 10 GeV com $x = 10^{-4}$. Podemos ver que os modelos BUW e DHJ ainda são próximos nesta região, diferente do modelo GBW que em $k_T = 3$ GeV já está muito distante dos outros. Os modelos MV^γ na representação fundamental e adjunta também são mostrados com $Q_0 = 0.4$ GeV, tipicamente usado como condição inicial para evolução BK. O modelo MV^γ , com $\gamma = 1.17$ é parametrizado pela colaboração AAMQS [90]. O apresentado no gráfico é o módulo da função, portanto a região com um pico indica que a distribuição ficou negativa, mesmo para valores não muito grandes de k_T . Este resultado é apresentado também em [84], sendo o problema da positividade relatado por vários autores. Em [114] é feita uma análise detalhada da positividade da transformada de Hankel em vários modelos de dipolo. E ocorre que quase todos eles sofrem deste problema, o que segundo os autores, põe em dúvida o formalismo

de dipolos.

Ainda em [114], são propostas duas condições para testar a positividade destas transformadas: $\mathcal{N}(0) > \mathcal{N}(r)$ e $\nabla^2 \mathcal{N}(0) > \nabla^2 \mathcal{N}(r)$. A segunda condição requer que $\gamma \leq 1$, o que não é satisfeito no modelo MV^γ . E também não é satisfeito com expoentes tipo $\log 1/rQ_s$ do modelo IIM, nem na expressão (5.27). Em todo caso, como fizemos a transformada como função de k_T no expoente, em cada valor de k_T a integral é feita com um valor constante deste expoente, o que não deve gerar problemas, já que estes modelos tem $\gamma \leq 1$.

As funções apresentadas na Figura 5.5, embora diferentes em alguns aspectos, mostram uma característica comum, presente em todos os modelos baseados em CGC. Temos um pico em torno da região de saturação, que corresponde ao maior número de glúons. Movendo-se à direita avançamos para regiões mais diluídas descritas por um crescimento mais acentuado (rápido) das funções de distribuição que é interrompido na região de saturação e passa a decrescer lentamente em regiões de menor k_T até $\Lambda \sim 200$ MeV, onde a teoria está fora de seu alcance.

Por fim, na próxima seção apresentaremos nossos resultados com as abordagens descritas neste capítulo para vários experimentos, assim como fizemos no modelo colinear.

5.4 Resultados no formalismo do CGC

Os resultados serão divididos em duas partes: a primeira é separada para o modelo de fatorização híbrida, com ou sem o termo inelástico; a segunda para o formalismo de fatorização k_T com a análise das PDFs geradas por este. No formalismo híbrido, consideraremos tanto a região de grande rapidez do RHIC, quanto a de rapidez central do LHC. Já no segundo caso, a fatorização só é aplicável na região central.

5.4.1 Seção de choque $pp \rightarrow h + X$ no formalismo híbrido

Para calcular a expressão (5.11), precisamos especificar a escala Q^2 da evolução DGLAP onde assumimos $Q^2 = p_T^2$; além disso, não consideraremos a dependência do parâmetro de impacto, desta maneira estaremos calculando o produto invariante N . Como explicamos no caso colinear, para obter a seção de choque invariante, precisaremos da seção de choque total inelástica σ_{inel} , calculada experimentalmente para cada energia. Ao incluirmos o termo inelástico da Eq. (5.14), usaremos $\alpha_s = 0.1$, já que esta equação é deduzida para α_s constante. Vale a ressalva de que se quisermos interpretar o fator K como correção em NLO, parece mais correto manter o termo apenas na parte elástica, já que a parte inelástica é por si só parte da correção de ordem α_s . Embora o valor de K que encontramos não seja muito grande ele nos permite também uma certa liberdade de compensar a ausência do acoplamento variável em Q^2 . Além disso, poderemos manter por intervalo um pouco maior a positividade da seção de choque que, como comentamos, é violada em certas regiões cinemáticas.

Os modelos DHJ e BUW são parametrizados com base nos dados do RHIC, mas para descrever os dados nas energias do LHC vamos usar os valores de [64] para melhor descrever estes dados. Neste caso, para o modelo DHJ os parâmetros são $\gamma_s = 0.7$, $d = 1$; já para o modelo BUW são $\gamma_s = 0.74$, $a = 2$ e $b = 125$.

Vamos começar pela região de grande rapidez do RHIC, onde estes modelos são conhe-

cidos por fornecerem uma boa descrição dos dados. Os modelos de dipolo DHJ e BUW, sem e com escalonamento, estão representados nas Figuras 5.6 e 5.7. Os dados de [41, 42, 43] são os mesmos que usamos no modelo colinear. Neste caso os modelos foram separados em duas figuras para maior clareza. As linhas pontilhadas são a seção de choque calculada incluindo o termo inelástico.

As conclusões que tiramos destes gráficos são dadas a seguir:

1. Tanto DHJ, quanto BUW dão resultados idênticos em grande rapidez. Isto já era esperado, e reflete o fato de que nesta região temos efetivamente $\gamma(x_A, k_T) = \gamma_s$. Considerando apenas o termo elástico, quando avançamos para $y = 1$, o modelo DHJ começa a superestimar os dados, enquanto que o modelo BUW mantém uma descrição um pouco melhor. É difícil tirar alguma conclusão sobre o modelo de dipolo em si, porque nesta região em que $x_A \sim 0.01$, devemos ter passado do limite de validade da fatorização híbrida. Logo, é difícil dizer se o problema é devido ao esquema de fatorização ou ao modelo de dipolo. Precisaremos de outros dados para ter uma visão melhor desta situação.
2. O termo inelástico não parece muito relevante em grande rapidez e pequeno p_T (lado esquerdo), já que ele essencialmente dá a diferença de uma constante. De fato aqui usamos um $K = 1.5$, mas poderíamos ter apenas deixado $K = 1$ e usado apenas o termo elástico. Por outro lado, em $p_T > 4$, estas correções parecem fundamentais e são responsáveis por uma grande melhora em ambos os modelos. Neste caso, usamos $K = 2$ para ajustar o resultado na região de pequeno p_T (onde o modelo funciona melhor).
3. A correção inelástica começa irrelevante em $p_T = 1$ e cresce bastante em grande p_T . Entretanto, no modelo BUW, que chega mais rápido no limite $\gamma \rightarrow 1$, o termo inelástico também se sobrepõe ao elástico em módulo antes do que ocorre em DHJ, tornando a seção de choque negativa.

Para atingirmos as regiões de grande \sqrt{s} e p_T do LHC, precisamos descrever dados de rapidez central. Entretanto, a fatorização híbrida é baseada numa diferença diluído-denso, que não se justifica aqui. Mas seguindo alguns autores [64, 84], que usaram este formalismo também em colisões pp , vamos observar até onde é razoável aplicar tal teoria neste caso.

A Figura 5.8 compara dados de grande energia do LHC com os modelos BUW e DHJ, onde as considerações anteriores são bastante diferentes. Primeiramente, os modelos dão previsões bastante diferentes. Neste caso temos $w \gg 1$ e estamos nos limites de (5.37). Este é o limite de QCD perturbativa, que discutimos no modelo colinear.

Podemos pensar neste limite da seguinte forma: na QCD perturbativa vimos que a evolução DGLAP leva a violações de escalonamento (desta vez estamos nos referindo ao escalonamento em p_T^{-n}), partindo de $n = 4$ no modelo de pártons até $n \sim 6$ devido a convolução com as PDFs. Por estas colisões serem simétricas, a mesma contribuição que a ressonância colinear dá na PDF do projétil, deve existir no lado do alvo (o que não é incluso no modelo híbrido). No entanto, seria desejável que pudessemos aplicar este formalismo nestas colisões de altas energias onde temos um x muito pequeno, próprio para a manifestação de efeitos do CGC. Se o comportamento assintótico da matriz de espalhamento de dipolo,

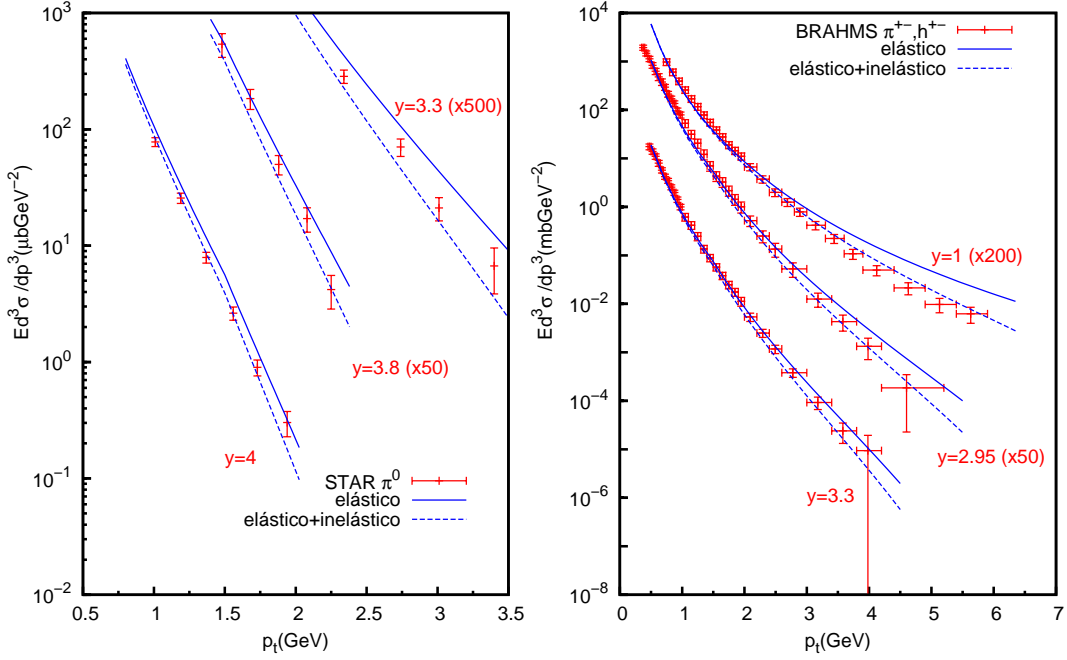


Figura 5.6: Modelo de fatorização híbrida usando dipolo DHJ, com e sem o termo inelástico, em $\sqrt{s} = 200$ GeV para diferentes valores de rapidez.

dada por (5.37), é $S_A(k_T) \sim p_T^{-(4+a)}$, precisaríamos de $a \approx 1$. Este comportamento imitaria um modelo de pártons com um escalonamento $p_T^{-(4+1)}$, onde o fator 1 deve suprir a ressonância DGLAP do alvo.

Como consideramos $a = 2$, constatamos um comportamento $p_T^{-7.3}$, que decai mais rápido que o modelo colinear, subestimando os dados. Devemos considerar que $Q_s(x_A)$ também decresce em grande p_T , já que os hádrons são produzidos por pártons de grande fração de momento em tal limite. O que pode dar uma pequena contribuição para n , já que a escala de saturação decresce com uma potência $\Lambda = 0.3$. No modelo DHJ ocorre o contrário, onde a aproximação do limite colinear é muito lenta.

Devemos observar que neste caso não consideramos o espectro $p_T > 10$ GeV devido aos problemas mencionados. Quanto ao caso inelástico, encontramos o oposto do que esperávamos para grande p_T , já que quase não há desvio do termo elástico, com o modelo BUW ficando negativo em $p_T \sim 10$ GeV. Vale ainda ressaltar que usamos um fator $K = 2$ nestes resultados.

Com a intenção de observar melhor o comportamento do termo inelástico, comparamos estes modelos com dados de uma energia intermediária e em certos valores de y . Neste caso, os dados experimentais de [115] são de colisões $p\bar{p}$ em 630 GeV e diferentes faixas de rapidez, apresentados na Figura 5.9.

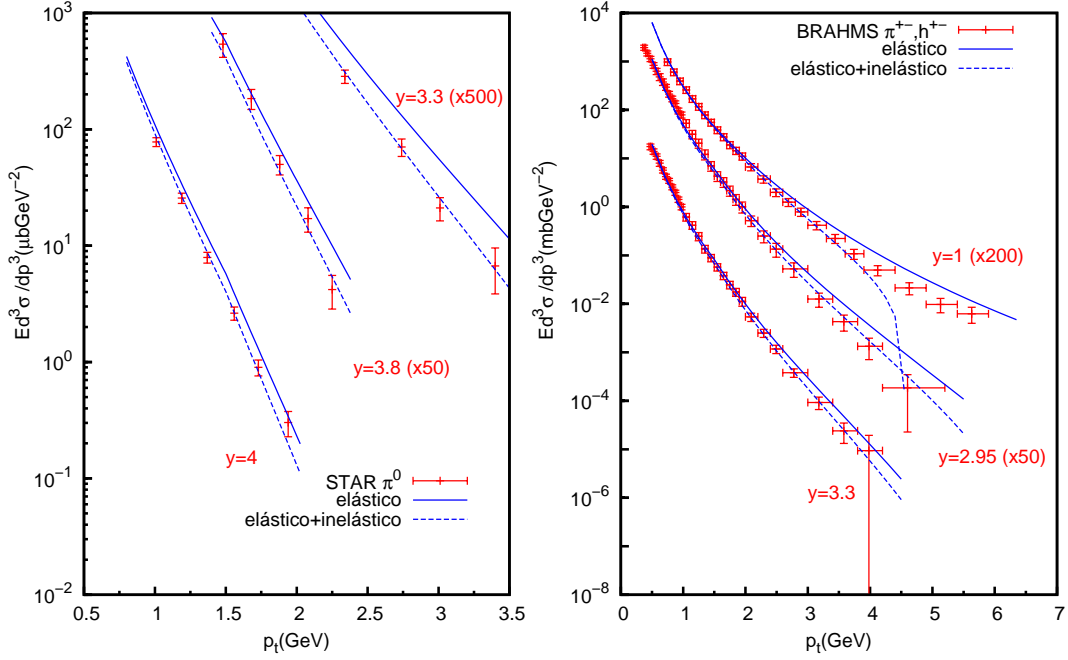


Figura 5.7: O mesmo da Figura 5.6, mas para o dipolo BUW que apresenta o escalonamento.

A região cinemática envolvida nestes dados, de todos os que analisamos, é a que torna maior o efeito do termo inelástico, e mesmo o modelo DHJ produz uma seção de choque negativa. Observa-se que depois de $p_T \approx 2$ o modelo DHJ superestima os dados, e o termo inelástico proporciona uma grande correção, até ficar negativo em $p_T \approx 8$. Já o modelo BUW, é razoável mesmo considerando apenas o termo elástico nas regiões de maior rapidez, piorando um pouco em $y \approx 1$. Neste caso, verificamos que $K = 1.5$.

Por último, vamos apresentar os resultados na região de rapidez muito alta do LHC [8], onde não é válida a abordagem da QCD perturbativa, e os hádrons são observados em p_T muito pequeno. O modelo híbrido é usado em [68] para descrever esta região. Nossos resultados são mostrados na Figura 5.10, em diferentes valores de y , para $\sqrt{s} = 7$ TeV.

Com $w < 1$ estes dados mostram uma região muito saturada. A dimensão anômala de qualquer um dos modelos de dipolo já está fixa em γ_s , e devemos ter um resultado semelhante ao da Eq. (5.35). Além disso, com $w \rightarrow 0$ temos $S(w)$ constante, já que neste intervalo muito pequeno de p_T não podemos observar variações significativas de $Q_s(x)$. Em [68] é atribuída a escala de saturação como argumento das PDFs, supondo que o espalhamento no CGC seja caracterizado pela escala Q_s . Mas é necessário fazer uma modificação em Q_{s0} da Eq. (5.22), que tínhamos considerado 1 GeV até agora. Precisaremos de valores menores deste parâmetro, onde verificamos que $Q_s = 0.4$ produz a Figura 5.10.

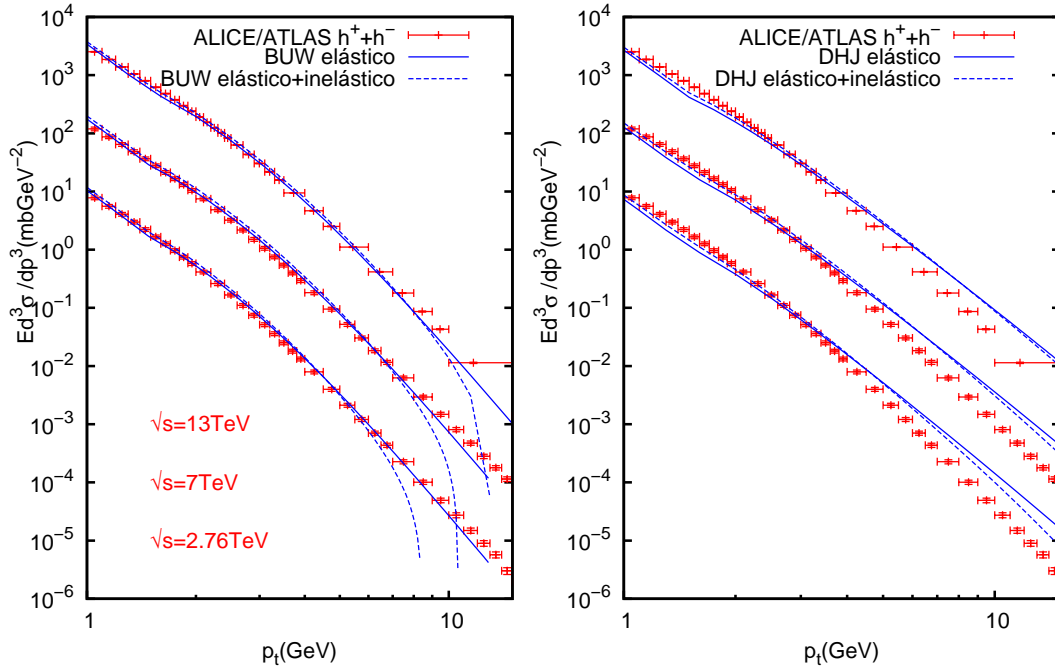


Figura 5.8: Comparação BUW e DHJ em $y = 0$ e diferentes valores de energia do LHC. Os dados são de [6, 7].

Se a seção de choque é dada por $S(Q_s) \sim 1/Q_s^2$, esta mudança meramente desloca a solução por uma constante $\sim 1/Q_{s_0}^2$. Desta forma, o que estamos fazendo é ajustar uma constante para reproduzir os dados do LHCF, o que funciona como um grande fator K . Neste sentido, verificamos que estes resultados podem ser reproduzidos sem nenhuma seção de choque de dipolo, apenas colocando algum número no lugar de $S(w)$, e fazendo a convolução com a PDF e FF.

Isto parece nos dizer que, embora não seja possível dizer muito sobre S nesta região, o fato de podermos obter boa descrição dos dados apenas com esta convolução da Eq. (5.11), pode indicar que estes dados experimentais são gerados por processos $2 \rightarrow 1$ típicos da descrição do CGC. O mesmo não é plausível numa cinemática $2 \rightarrow 2$ típica do modelo de pártons.

5.5 Resultados no formalismo de fatorização k_T

A fatorização k_T está limitada a descrever fenômenos de x muito pequeno, $x \leq 0.01$. Hádrõs produzidos com grande rapidez, têm origem em interações assimétricas, onde o projétil tendo grande x interage com o campo de cor do alvo pela troca de glúons de x_A pequeno ($x \gg x_A$), onde o formalismo híbrido é mais apropriado. Não podemos usar a fatorização k_T para os dados experimentais que descrevemos acima, devemos nos limitar

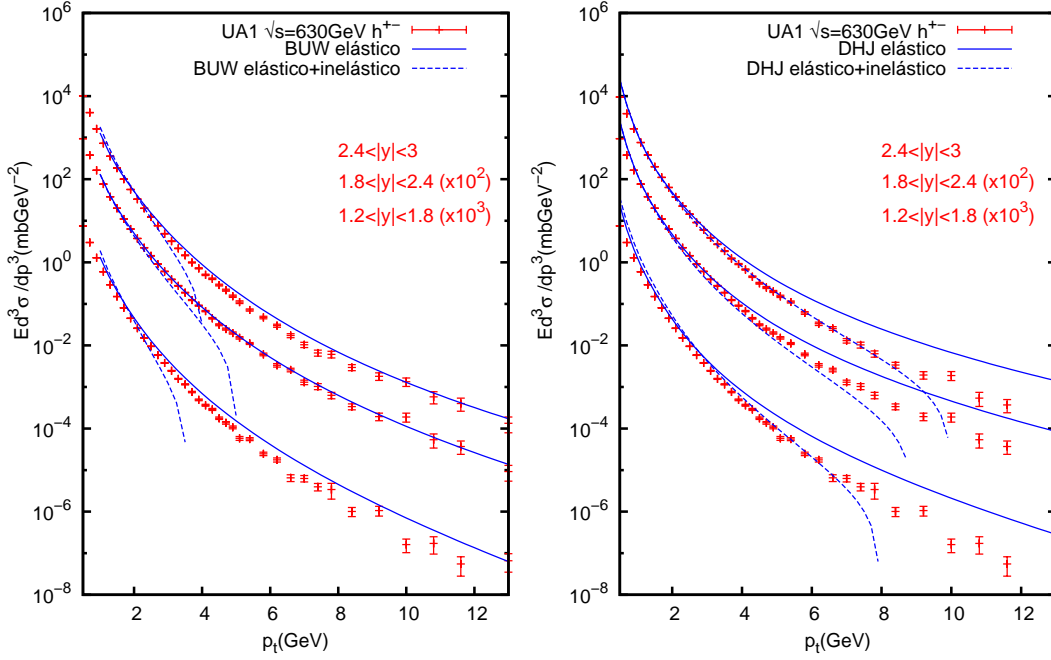


Figura 5.9: Comparação BUW e DHJ em diferentes intervalos de rapidez, com $\sqrt{s} = 630$ GeV.

aos dados do LHC, onde é garantido que teremos sempre na região de x pequeno, tanto do alvo, quanto do projétil.

Para realizarmos os cálculos no formalismo k_T , vamos antes considerar o limite em que um glúon do projétil tem pequeno momento q_T e é espalhado pelo alvo com grande momento transferido $k_T \gg q_T$. Se colocarmos a equação (5.20) em função de $S(k_T)$ (5.19), teremos (desconsiderando a hadronização):

$$\frac{d\sigma}{d^2k_T dy} = \sigma_0^2 \frac{2\alpha_s}{C_F} \frac{1}{k_T^2} \int d^2q_T q_T^2 S(q_T^2) (q_T - k_T)^2 S((q_T - k_T)^2), \quad (5.38)$$

onde σ_0 é a área do próton, que vem da integral do parâmetro de impacto. No limite $k_T \gg q_T$ podemos colocar o termo que depende de k_T para fora da integral, e identificar $\int d^2q_T q_T^2 S(q_T^2)$ como integral da função de distribuição de dipolos TMD:

$$\frac{d\sigma}{d^2k_T dy} = \frac{\sigma_0}{(2\pi)^3} S(k_T) G(x, Q^2), \quad (5.39)$$

que é simplesmente o caso híbrido.

Teremos uma visão melhor sobre a conexão entre o formalismo híbrido e k_T se considerarmos o limite em que elas coincidem. Tal aproximação nos permite usar a função de distribuição de glúons (5.19), no lugar das funções de distribuição tradicionais, que têm

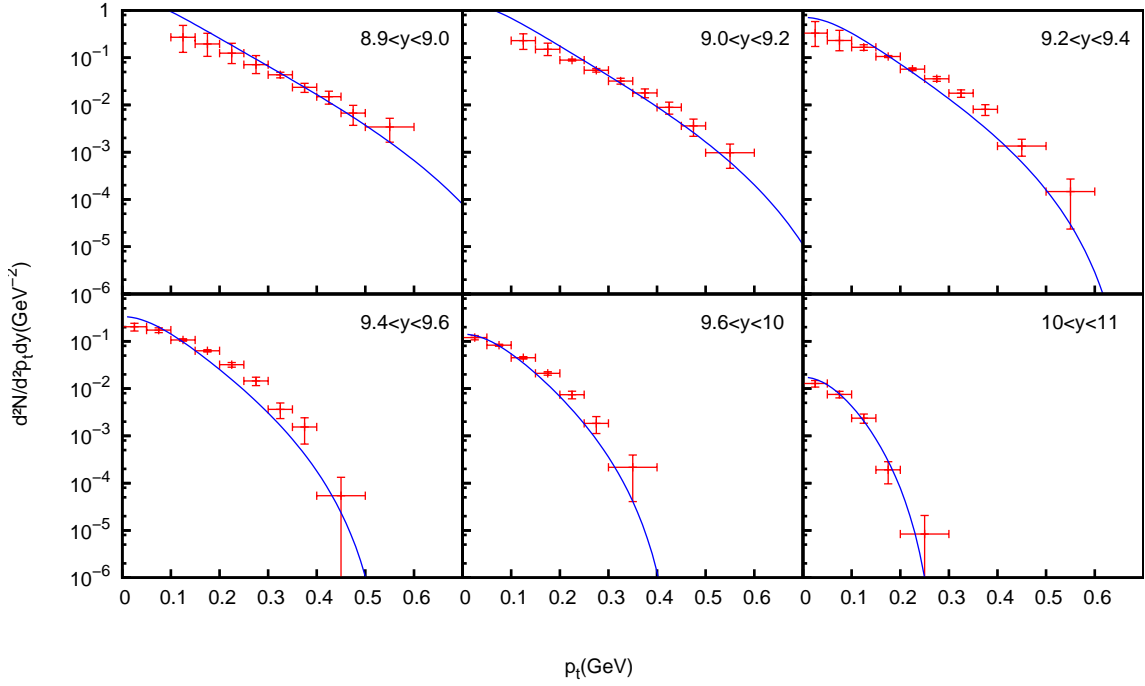


Figura 5.10: Comparação dos dados de [8] em 7 TeV para produção de pión neutro. Neste caso só é apresentado um modelo de dipolos, já que ambos são idênticos nestes valores de y .

evolução DGLAP (isto é feito em [84]). Vamos comparar três abordagens: termo elástico usual com a PDF MSTW, termo elástico com a distribuição de glúons não integrada (TMD), fatorização k_T . Em todos os casos testaremos o modelo de dipolos DHJ e BUW.

Nas Figuras 5.11 e 5.12 a comparação entre estas abordagens é dada usando o modelo de dipolos DHJ e BUW respectivamente. Enquanto o modelo com escalonamento BUW tem uma boa descrição dos dados até 10 GeV, o modelo DHJ rapidamente se desvia dos dados experimentais. É notável nestes gráficos a equivalência entre a fatorização k_T e híbrida, tendo em vista que os resultados são muito próximos. Isto nos sugere que a PDF usual que evolui de acordo com DGLAP pode ser muito parecida com aquela que obtemos considerando a distribuição TMD.

Considerando esta equivalência, podemos fazer uma comparação direta entre as PDFs usuais e as que obtemos pelas TMD tanto do modelo DHJ quanto BUW. Já tínhamos comentado que não é possível uma medição direta da violação de escalonamento dos dados experimentais pelo uso do modelo híbrido, devido à presença da evolução DGLAP nas PDFs e FFs. Entretanto, podemos ter uma estimativa desta violação de escalonamento olhando as PDFs em função de x e Q^2 geradas neste formalismo.

A Figura 5.13 mostra as PDFs em função de Q^2 geradas pelas distribuições TMD

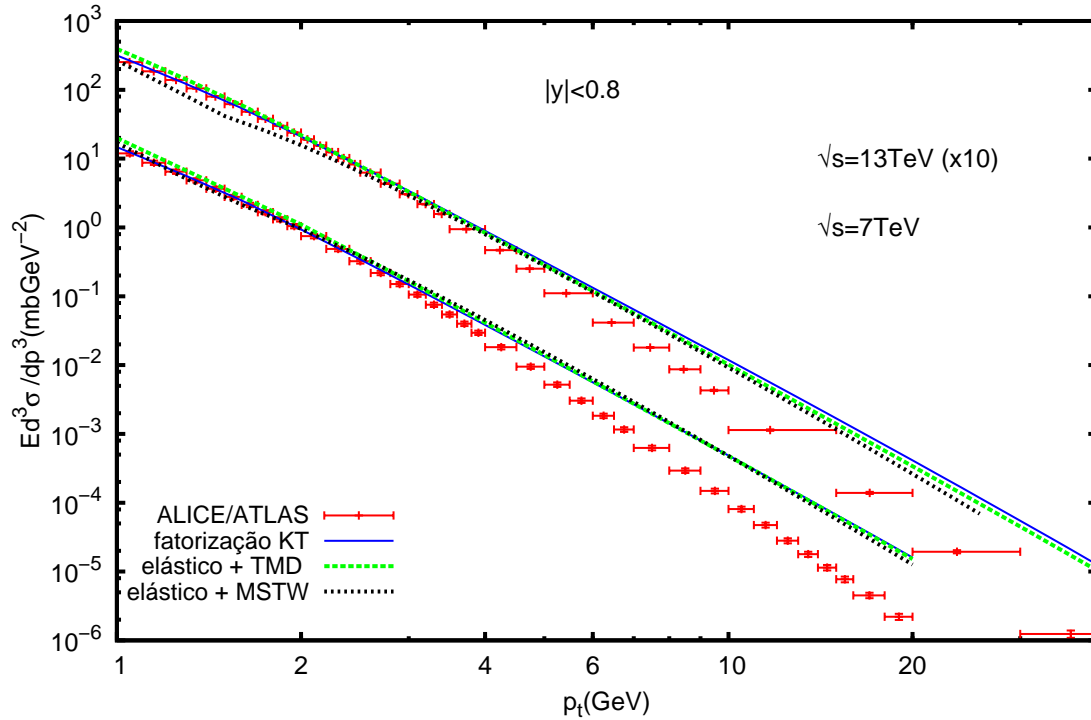


Figura 5.11: Comparação entre fatorização k_T e híbrida usando a PDF MSTW e a TMD obtida pelo modelo DHJ de dipolos.

comparadas com CTEQ5 e MSTW. Vemos que até $x = 10^{-4}$ elas são todas muito próximas, exceto por CTEQ5 que é um pouco maior em Q^2 pequeno. Esta região é tipicamente onde começam a aparecer efeitos de saturação. Quando avançamos para $x = 10^{-5}$, as PDFs de dipolo saturam e ficam abaixo daquelas que tem evolução DGLAP. Este fenômeno fica ainda mais notável em $x = 10^{-6}$.

Esta observação talvez seja a mais fundamental no contexto deste trabalho. Ela nos diz que se quisermos realmente observar uma região onde há discrepância do modelo colinear com o CGC, precisamos de dados experimentais que cubram esta região. Mais adiante faremos uma análise das regiões cinemáticas envolvidas nos gráficos apresentados.

Os gráficos acima na Figura 5.14, mostram as PDFs em função de x com Q^2 fixo. Abaixo, estão as PDFs em função de x mantendo w fixo. Em $x = 10^{-2}$ e grande Q^2 , começamos a ter problemas com as funções TMD. Tal comportamento é esperado, já que nesta região o formalismo k_T já não é tão bom, e a evolução DGLAP passa a ser mais adequada. Na verdade, agora podemos entender melhor os limites de validade destas abordagens. Obviamente não existe um limite descontínuo onde o modelo simplesmente pára de funcionar. Ele começa a se tornar menos realista à medida que nos movemos para grande Q^2 ou grande x . Por isso, podemos ter uma boa descrição dos dados do LHC mesmo em região central, onde estes modelos não são necessariamente corretos.

Na parte inferior da Figura 5.14, temos que mesmo o modelo DHJ na região de sa-

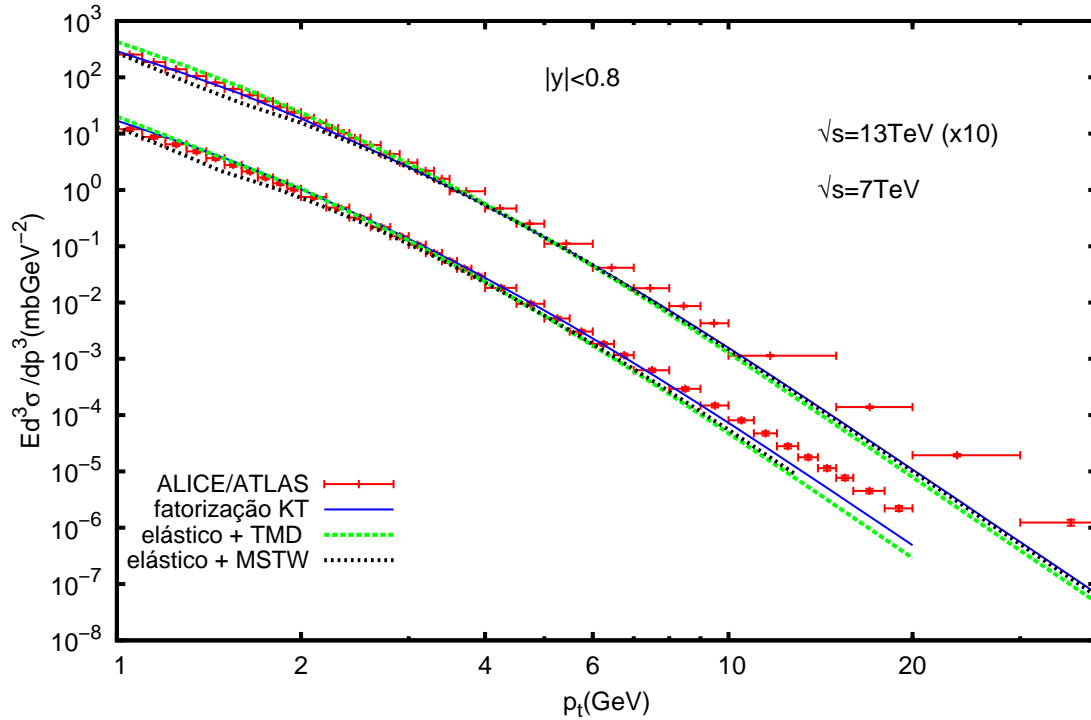


Figura 5.12: O mesmo da Figura 5.11, mas com o modelo de dipolo BUW.

turação $w = 1$ preserva o escalonamento. Em $w = 10$, podemos ver mais claramente o comportamento da região EGS descrita por DHJ. Mesmo com w grande, se tivermos x pequeno mantemos o escalonamento. Quando nos movemos para maiores valores de x a violação do escalonamento cresce, até algo em torno de 30%, que não é muito grande.

Por fim, vale a pena considerarmos quais regiões de x estamos observando nos casos que estudamos. A Figura 5.15 mostra o integrando da seção de choque no modelo híbrido (5.11) em função de x . Podemos ver o efeito da hadronização, que coloca um pico em torno de um x médio a partir de x_F .

A constatação é que em nenhum dos casos realmente chega-se a alcançar a região de $x = 10^{-5}$, exceto nos dados do LHCf, que não podemos comparar com o modelo colinear. Mesmo com x extremamente pequeno $x \sim 10^{-4}$, ainda estamos numa região em que o modelo colinear não apresenta grandes desvios do esperado.

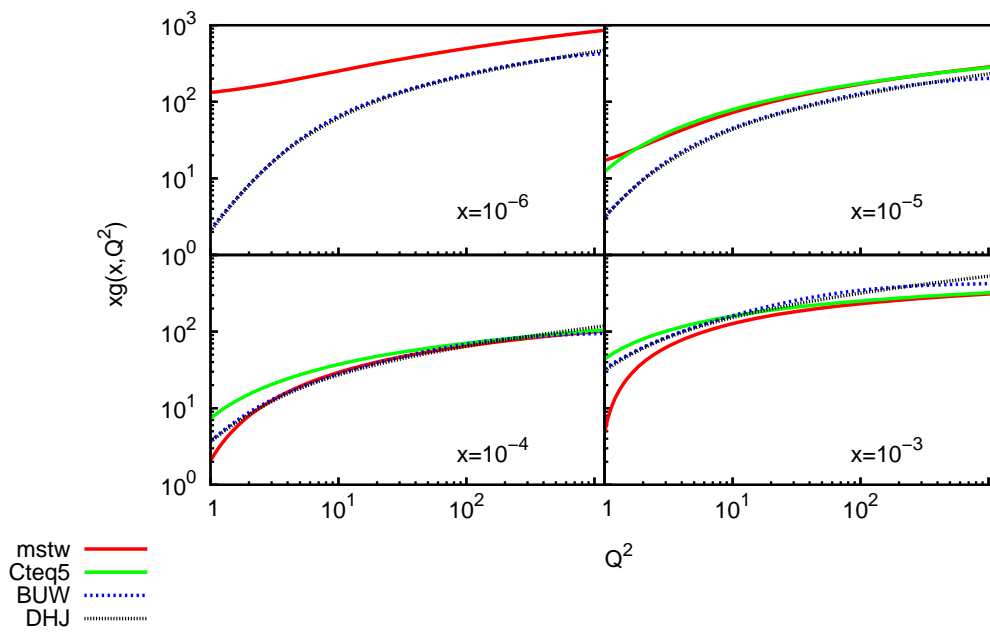


Figura 5.13: PDFs em função de Q^2 em diferentes valores de x . Consideramos aquelas usuais MSTW e CTEQ5, comparadas com as obtidas pelo modelo de dipolos DHJ e BUW

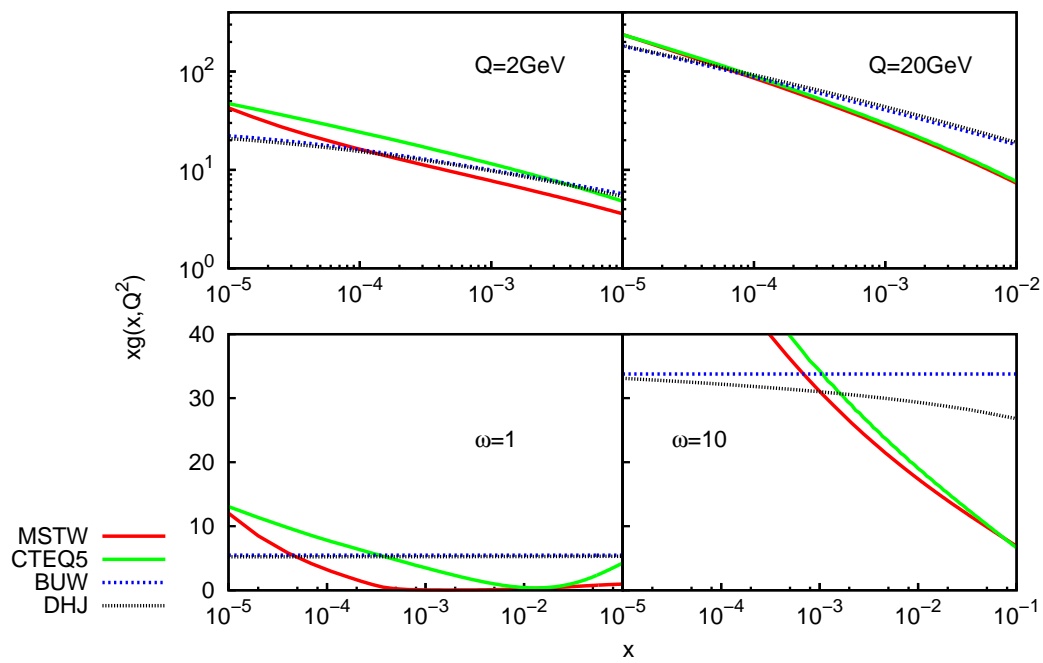


Figura 5.14: Acima: PDFs em função de x com Q fixo. Abaixo: PDFs com a razão $w = Q/Q_s$ constante, mostrando o escalonamento.

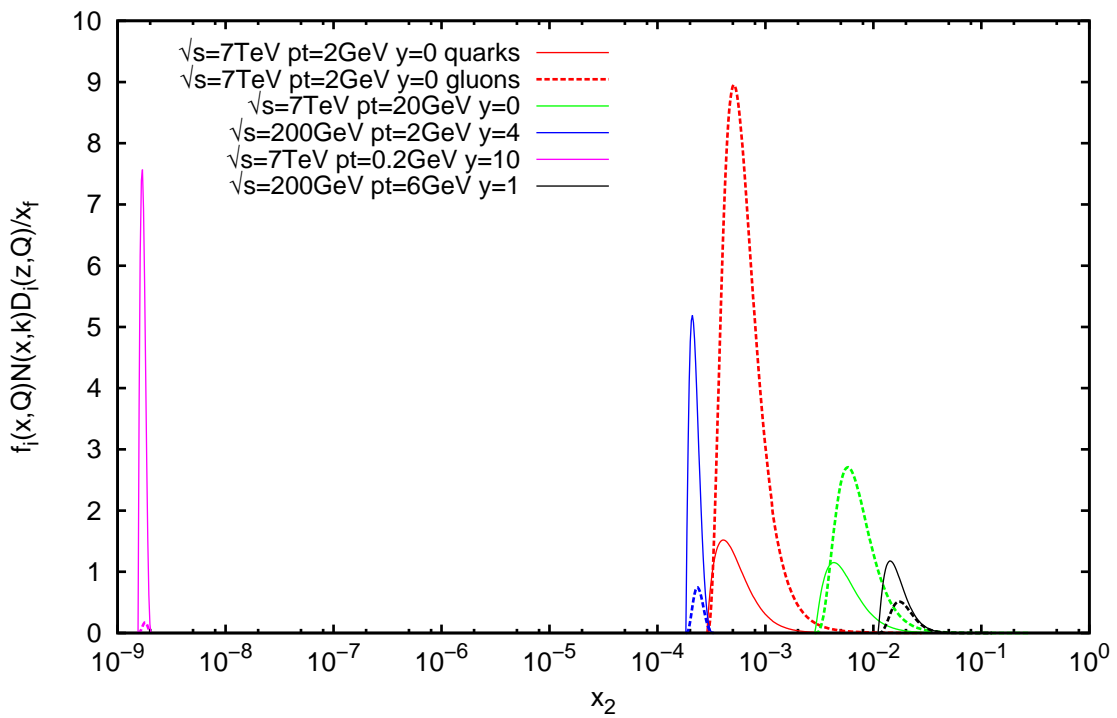


Figura 5.15: Integrando do modelo híbrido para diferentes valores de p_T e y envolvidos em diferentes dados experimentais estudados neste trabalho. As linhas tracejadas são as contribuições de glúons, enquanto as cheias são de quarks. Além disso, x_2 é a fração de momento do alvo (denominada x_A no texto).

Capítulo 6

Conclusões

Ao longo deste trabalho aplicamos várias técnicas para descrever a distribuição p_T de hádrons produzidos num grande intervalo de energias. Vimos, que mesmo em ordem dominante (LO), o modelo perturbativo usual na aproximação colinear tem excelente concordância com os experimentos. Ao mesmo tempo, concluímos que os modelos baseados em CGC também concordam com os dados experimentais exceto em regiões de $p_T > 10\text{GeV}$. Isto leva à uma questão importante: Como é possível que modelos tão distintos funcionem ao mesmo tempo, isto é, numa mesma região cinemática?

Se falarmos mais especificamente nos modelos fenomenológicos de dipolo, podemos entender melhor este problema. Existem muitos destes modelos, todos diferentes, e todos reproduzindo igualmente bem um certo observável. Em geral, parte-se de uma função exponencial para $S(x, r)$ com vários parâmetros no expoente, cuja transformada de Fourier é diretamente relacionada aos observáveis. Particularmente, nos modelos que descrevemos, temos $\lambda, d, \sigma_0, \gamma_s, a, b \dots$, e existem muitos valores possíveis destes parâmetros que descrevem o comportamento observado. Neste sentido fica muito difícil tirar qualquer conclusão sobre a validade desta descrição, já que temos dificuldade em identificar um comportamento mais fundamental destas funções.

A situação não muda muito se ao invés de usar um modelo fenomenológico usarmos a solução da equação BK. Neste caso, modelo MV puro como condição inicial não é suficiente e parametrizações são necessárias. Como já dissemos, estas muitas vezes levam a uma seção de choque negativa, o que ocorre em quase todos modelos de dipolo. Além do problema de positividade da transformada de Fourier, temos o problema das correções NLO gerarem seções de choque negativas, o que tem sido reportado por vários autores.

Analisando a Figura 5.15, podemos ver que já estamos provando uma região de x bastante pequeno $x = 10^{-4}$, em que as evoluções além de DGLAP deveriam ficar evidentes. Entretanto, o modelo colinear mesmo em ordem dominante nos dá uma boa descrição destes dados, o que deve melhorar ainda mais se considerarmos ordens mais altas.

Se pensarmos na saturação em si, podemos comparar as figuras 5.15 e 5.13, que nos mostram que precisamos ter $x \leq 10^{-5}$ para realmente observar grande diferença dos modelos de dipolo com as PDFs usuais. Este limite poderia ser atingido com dados do LHC em $y \sim 2$. Entretanto, tais dados ainda não estão disponíveis.

Devemos considerar também que, se quisermos observar com maior precisão a diferença entre estes modelos, precisamos eventualmente considerar outros observáveis além da dis-

tribuição p_T . Se considerássemos a produção de jatos, por exemplo, estaríamos livres dos efeitos da hadronização. Analisando a Figura 5.15, podemos ver o efeito da hadronização na seção de choque, que leva à um comportamento médio parecido em torno de $\langle x \rangle$. Isto de certa forma torna o resultado final menos sensível a pequenas diferenças nos parâmetros que descrevem os modelos de dipolo. Entretanto as seções de choque para produção de jatos no LHC apresentam um p_T muito grande, onde estes modelos já não são válidos.

Como perspectiva futura deste trabalho, analisaremos as razões nucleares para estes observáveis, e também investigaremos problemas teóricos que surgem na conexão entre abordagem colinear e CGC. Tanto pelo limite $r \rightarrow 0$ nos dipolos (região de grande momento), quanto pelas correções NLO das seções de choque.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Arleo, S. J. Brodsky, D. S. Hwang, and A. M. Sickles, Phys. Rev. Lett. **105**, 062002 (2010), arXiv:0911.4604.
- [2] Y. V. Kovchegov and E. Levin, *Quantum chromodynamics at high energy*, Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics and cosmology Vol. 33 (Cambridge University Press, 2012).
- [3] E. Ferreira, E. Iancu, A. Leonidov, and L. McLerran, Nucl. Phys. **A703**, 489 (2002), arXiv:hep-ph/0109115.
- [4] F. Gelis, Int. J. Mod. Phys. **A28**, 1330001 (2013), arXiv:1211.3327.
- [5] J. Jalilian-Marian and Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D70**, 114017 (2004), arXiv:hep-ph/0405266, [Erratum: Phys. Rev.D71,079901(2005)].
- [6] ALICE, B. B. Abelev *et al.*, Eur. Phys. J. **C73**, 2662 (2013), arXiv:1307.1093.
- [7] ATLAS, G. Aad *et al.*, Phys. Lett. **B758**, 67 (2016), arXiv:1602.01633.
- [8] LHCf, O. Adriani *et al.*, Phys. Rev. **D94**, 032007 (2016), arXiv:1507.08764.
- [9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory* (Westview Press Reading (Mass.), 1995).
- [10] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, Phys. Rev. **185**, 1975 (1969).
- [11] F. Halzen and A. D. Martin, *QUARKS AND LEPTONS: an introductory course in modern particle physics* (New York, Usa: Wiley (1984) 396p, 1984).
- [12] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum chromodynamics* (Berlin, Germany: Springer (2002) 551 p, 2002).
- [13] C. F. von Weizsacker, Z. Phys. **88**, 612 (1934).
- [14] E. J. Williams, Phys. Rev. **45**, 729 (1934).
- [15] Y. L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP **46**, 641 (1977), [Zh. Eksp. Teor. Fiz.73,1216(1977)].
- [16] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **15**, 438 (1972), [Yad. Fiz.15,781(1972)].

- [17] G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. **B126**, 298 (1977).
- [18] J. C. Collins, D. E. Soper, and G. F. Sterman, Nucl. Phys. **B261**, 104 (1985).
- [19] J. C. Collins and D. E. Soper, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **37**, 383 (1987).
- [20] G. F. Sterman, Partons, factorization and resummation, TASI 95, in *QCD and beyond. Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, TASI-95, Boulder, USA, June 4-30, 1995*, pp. 327–408, 1995, arXiv:hep-ph/9606312.
- [21] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977), [Zh. Eksp. Teor. Fiz.72,377(1977)].
- [22] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 822 (1978), [Yad. Fiz.28,1597(1978)].
- [23] J. F. Owens, Rev. Mod. Phys. **59**, 465 (1987).
- [24] P. Z. Skands, QCD for Collider Physics, in *Proceedings, High-energy Physics. Proceedings, 18th European School (ESHEP 2010): Raseborg, Finland, June 20 - July 3, 2010*, 2011, arXiv:1104.2863.
- [25] X.-N. Wang, Phys. Rev. **C61**, 064910 (2000).
- [26] U. D’Alesio and F. Murgia, Phys. Rev. **D70**, 074009 (2004), arXiv:hep-ph/0408092.
- [27] G. G. Barnafoldi, P. Levai, G. Papp, G. I. Fai, and Y. Zhang, Heavy Ion Phys. **18**, 79 (2003), arXiv:nucl-th/0206006.
- [28] Y. Zhang, G. I. Fai, G. Papp, G. G. Barnafoldi, and P. Levai, Phys. Rev. **C65**, 034903 (2002), arXiv:hep-ph/0109233.
- [29] K. J. Eskola and H. Honkanen, Nucl. Phys. **A713**, 167 (2003), arXiv:hep-ph/0205048.
- [30] J. F. Owens and J. D. Kimel, Phys. Rev. **D18**, 3313 (1978).
- [31] R. Field and R. P. Feynman, Phys. Rev. **D15**, 2590 (1977).
- [32] R. Feynman, R. Field, and G. Fox, Nucl. Phys. **B128**, 1 (1977).
- [33] R. Feynman, R. Field, and G. Fox, Phys. Rev. **D18**, 3320 (1978).
- [34] R. Piessens, *Quadpack : a subroutine package for automatic integration* Springer series in computational mathematics (Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983).
- [35] J. M. Hammersley and D. Handscomb, Percolation processes, in *Monte Carlo Methods*, pp. 134–141, Springer, 1964.
- [36] W. H. Press, S. a. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77: the Art of Scientific Computing. Second Edition* (Cambridge University Press, 1996).

- [37] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne, and G. Watt, *Eur. Phys. J.* **C63**, 189 (2009), arXiv:0901.0002.
- [38] B. A. Kniehl, G. Kramer, and B. Potter, *Nucl. Phys.* **B582**, 514 (2000), arXiv:hep-ph/0010289.
- [39] Fermilab E706, L. Apanasevich *et al.*, *Phys. Rev.* **D68**, 052001 (2003), arXiv:hep-ex/0204031.
- [40] PHENIX, A. Adare *et al.*, *Phys. Rev.* **C83**, 064903 (2011), arXiv:1102.0753.
- [41] BRAHMS, I. Arsene *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 242303 (2004), arXiv:nucl-ex/0403005.
- [42] BRAHMS, I. Arsene *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 252001 (2007), arXiv:hep-ex/0701041.
- [43] STAR, J. Adams *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 152302 (2006), arXiv:nucl-ex/0602011.
- [44] M. Froissart, *Phys. Rev.* **123**, 1053 (1961).
- [45] A. Martin, *Nuovo Cim.* **A42**, 930 (1965).
- [46] L. Lukaszuk and A. Martin, *Nuovo Cim.* **A52**, 122 (1967).
- [47] S. Donnachie, H. G. Dosch, O. Nachtmann, and P. Landshoff, *Pomeron physics and QCD*, Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics and cosmology Vol. 19 (Cambridge University Press., 2002).
- [48] J. R. Forshaw and D. A. Ross, *Cambridge Lect. Notes Phys.* **9**, 1 (1997).
- [49] L. V. Gribov, E. M. Levin, and M. G. Ryskin, *Phys. Rept.* **100**, 1 (1983).
- [50] A. H. Mueller and J. Qiu, *Nuclear Physics B* **268**, 427 (1986).
- [51] L. D. McLerran and R. Venugopalan, *Phys. Rev.* **D49**, 3352 (1994), arXiv:hep-ph/9311205.
- [52] L. D. McLerran and R. Venugopalan, *Phys. Rev.* **D49**, 2233 (1994), arXiv:hep-ph/9309289.
- [53] A. L. Ayala, M. B. Gay Ducati, and E. M. Levin, *Nucl. Phys.* **B493**, 305 (1997), arXiv:hep-ph/9604383.
- [54] A. L. Ayala Filho, M. B. Gay Ducati, and E. M. Levin, *Nucl. Phys.* **B511**, 355 (1998), arXiv:hep-ph/9706347.
- [55] I. Balitsky, *Nucl. Phys.* **B463**, 99 (1996), arXiv:hep-ph/9509348.
- [56] Y. V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D60**, 034008 (1999), arXiv:hep-ph/9901281.
- [57] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov, and H. Weigert, *Nucl. Phys.* **B504**, 415 (1997), arXiv:hep-ph/9701284.

- [58] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov, and H. Weigert, Phys. Rev. **D59**, 014014 (1998), arXiv:hep-ph/9706377.
- [59] L. D. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. **D50**, 2225 (1994), arXiv:hep-ph/9402335.
- [60] A. H. Rezaeian, M. Siddikov, M. Van de Klundert, and R. Venugopalan, Phys. Rev. **D87**, 034002 (2013), arXiv:1212.2974.
- [61] J. L. Albacete, N. Armesto, J. G. Milhano, P. Quiroga-Arias, and C. A. Salgado, Eur. Phys. J. **C71**, 1705 (2011), arXiv:1012.4408.
- [62] E. Iancu, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **191**, 281 (2009), arXiv:0901.0986.
- [63] V. P. Goncalves, M. S. Kugeratski, M. V. T. Machado, and F. S. Navarra, Phys. Lett. **B643**, 273 (2006), arXiv:hep-ph/0608063.
- [64] F. O. Durães, A. V. Giannini, V. P. Goncalves, and F. S. Navarra, Phys. Rev. **C94**, 024917 (2016), arXiv:1510.04737.
- [65] J. L. Albacete and A. Dumitru, (2010), arXiv:1011.5161.
- [66] J. L. Albacete and C. Marquet, Phys. Lett. **B687**, 174 (2010), arXiv:1001.1378.
- [67] J. L. Albacete, A. Dumitru, H. Fujii, and Y. Nara, Nucl. Phys. **A897**, 1 (2013), arXiv:1209.2001.
- [68] V. P. Goncalves and M. L. L. da Silva, Nucl. Phys. **A906**, 28 (2013), arXiv:1210.6311.
- [69] E. A. F. Basso, M. B. Gay Ducati, and E. G. de Oliveira, Phys. Rev. **D87**, 074023 (2013), arXiv:1212.5549.
- [70] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, 1998).
- [71] A. H. Mueller, Nucl. Phys. **B307**, 34 (1988).
- [72] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D54**, 5463 (1996), arXiv:hep-ph/9605446.
- [73] R. Venugopalan, (1998), arXiv:nucl-th/9808023, [Lect. Notes Phys.516,89(1999)].
- [74] S. J. Brodsky and H. C. Pauli, Lect. Notes Phys. **396**, 51 (1991).
- [75] E. Iancu, A. Leonidov, and L. McLerran, The Color glass condensate: An Introduction, in *QCD perspectives on hot and dense matter. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Summer School, Cargese, France, August 6-18, 2001*, pp. 73–145, 2002, arXiv:hep-ph/0202270.
- [76] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, L. D. McLerran, and H. Weigert, Phys. Rev. **D55**, 5414 (1997), arXiv:hep-ph/9606337.
- [77] F. Gelis and A. Peshier, Nucl. Phys. **A697**, 879 (2002), arXiv:hep-ph/0107142.
- [78] A. Dumitru and E. Petreska, Nucl. Phys. **A879**, 59 (2012), arXiv:1112.4760.

- [79] E. Iancu, A. Leonidov, and L. D. McLerran, Nucl. Phys. **A692**, 583 (2001), arXiv:hep-ph/0011241.
- [80] A. H. Mueller, Phys. Lett. **B523**, 243 (2001), arXiv:hep-ph/0110169.
- [81] I. Balitsky, (2001), arXiv:hep-ph/0101042.
- [82] I. Balitsky, Phys. Rev. **D75**, 014001 (2007), arXiv:hep-ph/0609105.
- [83] Y. V. Kovchegov and H. Weigert, Nucl. Phys. **A784**, 188 (2007), arXiv:hep-ph/0609090.
- [84] T. Lappi and H. Mäntysaari, Phys. Rev. **D88**, 114020 (2013), arXiv:1309.6963.
- [85] A. H. Mueller, Nucl. Phys. **B415**, 373 (1994).
- [86] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics; rev. ed.* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
- [87] A. H. Mueller, Small x physics, high parton densities and parton saturation in QCD, in *QCD: Perturbative or nonperturbative? Proceedings, 17th Autumn School, Lisbon, Portugal, September 29-October 4, 1999*, pp. 180–209, 1999, arXiv:hep-ph/9911289, [,180(1999)].
- [88] N. N. Nikolaev and B. G. Zakharov, Z. Phys. **C49**, 607 (1991).
- [89] N. N. Nikolaev and B. G. Zakharov, Phys. Lett. **B260**, 414 (1991).
- [90] P. Quiroga-Arias, J. L. Albacete, N. Armesto, J. G. Milhano, and C. A. Salgado, J. Phys. **G38**, 124124 (2011), arXiv:1107.0625.
- [91] A. Dumitru and J. Jalilian-Marian, Phys. Rev. Lett. **89**, 022301 (2002), arXiv:hep-ph/0204028.
- [92] A. Dumitru, A. Hayashigaki, and J. Jalilian-Marian, Nucl. Phys. **A765**, 464 (2006), arXiv:hep-ph/0506308.
- [93] H. Mäntysaari, *Scattering off the Color Glass Condensate*, PhD thesis, Jyväskylä U., 2015, arXiv:1506.07313.
- [94] J. Jalilian-Marian and Y. V. Kovchegov, Prog. Part. Nucl. Phys. **56**, 104 (2006), arXiv:hep-ph/0505052.
- [95] T. Altinoluk and A. Kovner, Phys. Rev. **D83**, 105004 (2011), arXiv:1102.5327.
- [96] E. Iancu, A. H. Mueller, and D. N. Triantafyllopoulos, (2016), arXiv:1608.05293.
- [97] T. Altinoluk, N. Armesto, G. Beuf, A. Kovner, and M. Lublinsky, Phys. Rev. **D91**, 094016 (2015), arXiv:1411.2869.
- [98] G. A. Chirilli, B.-W. Xiao, and F. Yuan, Phys. Rev. Lett. **108**, 122301 (2012), arXiv:1112.1061.

- [99] L. V. Gribov, E. M. Levin, and M. G. Ryskin, Phys. Lett. **B101**, 185 (1981).
- [100] Y. V. Kovchegov and K. Tuchin, Phys. Rev. **D65**, 074026 (2002), arXiv:hep-ph/0111362.
- [101] J. Jalilian-Marian and Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D70**, 114017 (2004), arXiv:hep-ph/0405266, [Erratum: Phys. Rev.D71,079901(2005)].
- [102] E. Avsar and J. C. Collins, (2012), arXiv:1209.1675.
- [103] F. Dominguez, B.-W. Xiao, and F. Yuan, Phys. Rev. Lett. **106**, 022301 (2011), arXiv:1009.2141.
- [104] F. Dominguez, C. Marquet, B.-W. Xiao, and F. Yuan, Phys. Rev. **D83**, 105005 (2011), arXiv:1101.0715.
- [105] D. Boer, A. Utermann, and E. Wessels, Phys. Rev. **D77**, 054014 (2008), arXiv:0711.4312.
- [106] K. J. Golec-Biernat and M. Wusthoff, Phys. Rev. **D59**, 014017 (1998), arXiv:hep-ph/9807513.
- [107] K. J. Golec-Biernat and M. Wusthoff, Phys. Rev. **D60**, 114023 (1999), arXiv:hep-ph/9903358.
- [108] J. Bartels, K. J. Golec-Biernat, and H. Kowalski, Phys. Rev. **D66**, 014001 (2002), arXiv:hep-ph/0203258.
- [109] E. Levin and K. Tuchin, Nucl. Phys. **B573**, 833 (2000), arXiv:hep-ph/9908317.
- [110] E. Iancu, K. Itakura, and L. McLerran, Nucl. Phys. **A708**, 327 (2002), arXiv:hep-ph/0203137.
- [111] E. Iancu, K. Itakura, and S. Munier, Phys. Lett. **B590**, 199 (2004).
- [112] A. Dumitru, A. Hayashigaki, and J. Jalilian-Marian, Nucl. Phys. **A770**, 57 (2006), arXiv:hep-ph/0512129.
- [113] T. Wieder, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS) **25**, 240 (1999).
- [114] B. G. Giraud and R. Peschanski, Phys. Lett. **B760**, 26 (2016), arXiv:1604.01932.
- [115] G. Bocquet *et al.*, Phys. Lett. **B366**, 434 (1996).