

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Ferramentas probabilísticas aplicadas a problemas de coloração em grafos

por

Juliana Sanches

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutora em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Orientador

Porto Alegre, Dezembro de 2016.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Sanches, Juliana

Ferramentas probabilísticas aplicadas a problemas de coloração em grafos / Juliana Sanches.—Porto Alegre: PPG-MAp da UFRGS, 2016.

151 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2016.

Orientador: Hoppen, Carlos

Tese: Matemática Discreta

Teoria de grafos, Teoria da probabilidade, grafos aleatórios e colorações de grafos

Ferramentas probabilísticas aplicadas a problemas de coloração em grafos

por

Juliana Sanches

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutora em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Matemática Discreta

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Banca examinadora:

Profa. Dra. Adriana Neumann de Oliveira

Profa. Dra. Cristiane Maria Sato

Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro M. F. de Oliveira

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Tese apresentada
15/12/2016.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS	ix
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1 INTRODUÇÃO	1
2 PRELIMINARES	10
2.1 Teoria de Grafos	10
2.2 Teoria da Probabilidade	14
2.3 Grafos Aleatórios	19
2.4 Grafos Aleatórios Coloridos e Funções Limiar	25
2.5 Grafos Aleatórios Regulares	28
2.5.1 Probabilidade de um grafo simples	32
2.5.2 Enumeração de subgrafos do grafo completo	36
3 ÁRVORES PROPRIAMENTE COLORIDAS EM $\mathcal{G}_{n,p}$	39
3.1 Demonstração do Lema 3.1	44
3.2 Demonstração do Lema 3.2	53
3.3 Demonstração do Lema 3.3	57
3.4 Generalização para mais cores	64

4	EMPARELHAMENTO MÁXIMO	69
4.1	Demonstração do Lema 1.2	70
4.1.1	Demonstração do Passo 1	76
4.1.2	Demonstração do Passo 2	78
4.1.3	Demonstração do Passo 3	82
4.2	Extensão do Lema 1.2	88
5	UM PROBLEMA DE ENUMERAÇÃO DE GRAFOS	91
5.1	Ferramentas básicas	92
5.2	Demonstração do Teorema 5.1	98
6	PROIBINDO ESTRELAS ARCO-ÍRIS	107
6.1	Um caso particular	111
6.2	Caso geral	121
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	136
7.1	Função limiar para a existência de uma árvore propriamente colorida	137
7.2	Proibindo estrelas arco-íris	140
7.3	Jogos de polícia e ladrão em grafos	142

LISTA DE SÍMBOLOS

$ V(G) $	Número de vértices de um grafo G
$ E(G) $	Número de arestas de um grafo G
$N(v)$	vizinhança de v
$d(v)$	Grau do vértice v
$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo G
$\Delta(G)$	Grau máximo do grafo G
\overline{G}	Grafo complementar do grafo G
K_n	Grafo completo com n vértices
P_n	Caminho de n vértices
C_n	Ciclo de n vértices
S_n	Estrela $K_{1,n}$ com $n + 1$ vértices
$\nu(G)$	cardinalidade de um emparelhamento máximo em G
$\mathbb{P}(A)$	Probabilidade do evento A
$\mathbb{E}(X)$	Esperança da variável aleatória X
$\text{Var}(X)$	Variância da variável aleatória X
$\text{Cov}(X, Y)$	Covariância das variáveis aleatórias X e Y
$\text{Bin}(n, p)$	Variável aleatória com distribuição binomial
$\mathcal{G}_{n,p}$	Espaço de probabilidade dos grafos rotulados com n vértices em que as arestas são escolhidas independentemente com a mesma probabilidade p

$\mathcal{G}_{n,m}$ Espaço de probabilidade uniforme de todos os grafos rotulados com n vértices e m arestas

$\mathcal{G}_{n,d}$ Espaço de probabilidade uniforme dos grafos rotulados d -regulares com n vértices (onde dn é par)

RESUMO

Nesta tese apresentamos soluções de dois problemas de coloração de grafos. Para as soluções de ambos problemas, utilizamos ferramentas probabilísticas. Em um desses problemas de coloração, consideramos o espaço de probabilidade $\mathcal{G}_{n,p}^k$ dos grafos aleatórios coloridos. Provamos que, para cada $k \geq 3$, o limiar para a propriedade de que um grafo aleatório colorido contém uma árvore geradora propriamente colorida é $\log n/n$, que é precisamente o limiar para a conexidade. Para resolver esse problema, utilizamos uma cota para a cardinalidade de um emparelhamento máximo em $\mathcal{G}_{n,(1+\epsilon)\log n/n}$, provada por Frieze em 1986. Embora tal cota seja suficiente para resolver esse problema, investigamos o problema da cardinalidade de um emparelhamento máximo no grafo aleatório $\mathcal{G}_{n,(1+\epsilon)\log n/n}$ e obtivemos um resultado mais preciso. O outro problema de coloração é um problema determinístico, porém, para a solução deste, utilizamos um resultado de enumeração de grafos cuja demonstração apresenta argumentos probabilísticos. Dados $r \geq t \geq 3$ e $\ell \geq 1$, procuramos por grafos com n vértices que admitem o maior número de r -colorações tais que no máximo $t - 1$ cores aparecem pelo menos ℓ vezes em arestas incidentes a cada vértice, isto é, r -colorações livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris (estrelas com $t\ell$ arestas coloridas com t cores distintas tal que cada cor é atribuída a exatamente ℓ arestas). Para n grande, mostramos que, o grafo completo K_n é o único grafo extremal.

ABSTRACT

In this thesis, we obtain solutions for two graph coloring problems, both of which rely on probabilistic tools. In one of these coloring problems, we consider the probability space $\mathcal{G}_{n,p}^k$ of edge-colored random graphs. We prove that, for all fixed $k \geq 3$, the threshold for the property that an edge-colored random graph contains a properly colored spanning tree is $\log n/n$, precisely the threshold for connectivity. To solve this problem, we used a bound for the size of a maximum matching in $\mathcal{G}_{n,(1+\epsilon)\log n/n}$, proved by Frieze in 1986. Although such bound is sufficient to solve this problem, we investigated the problem of the size of a maximum matching in the random graph $\mathcal{G}_{n,(1+\epsilon)\log n/n}$ and we obtained a more precise result. Even though the other coloring problem is deterministic, we used a graph enumeration whose proof is probabilistic. Given $r \geq t \geq 3$ and $\ell \geq 1$, we look for n -vertex graphs that admit the maximum number of r -edge-colorings such that at most $t - 1$ colors appear at least ℓ times in edges incident with each vertex, that is, r -edge-colorings avoiding rainbow- $S_{t,\ell}$ (stars with $t\ell$ edges colored with t distinct colors such that each color is assign to exactly ℓ edges). For large n , we show that, the complete graph K_n is always the unique extremal graph.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus.

Aos meus pais Amarildo e Neide.

Ao meu orientador Carlos.

Ao meu irmão Fernando.

Ao meu namorado Bruno.

À minha amiga Simone.

À Capes e ao CNPq.

Aos professores do Programa de Pós-graduação de Matemática Aplicada da UFRGS.

Aos meus colegas de doutorado.

1 INTRODUÇÃO

Problemas de coloração sempre tiveram uma posição de destaque em Combinatória. Podemos dizer que problemas de coloração são problemas sobre partições de objetos discretos em classes, onde cada classe satisfaz alguma propriedade particular. Um exemplo de grande valor histórico é o Problema de Coloração de Mapas: um mapa de vários países, desenhado em uma folha de papel, deve ser colorido de modo que dois países com uma fronteira em comum tenham cores distintas. O célebre Teorema das Quatro Cores, demonstrado por Appel e Haken na década de 70 [6], garante que são necessárias apenas quatro cores para colorir qualquer mapa. Esse teorema trata do número de cores necessárias para colorir as faces de um grafo qualquer imerso no plano (um mapa) com a propriedade de que faces adjacentes tenham cores diferentes e, no caso de grafos planares, é equivalente ao problema de coloração dos vértices de um grafo com a propriedade de que vértices adjacentes tenham cores diferentes.

O presente trabalho está inserido no contexto dos problemas clássicos de coloração de arestas de um grafo. Na sua versão original, uma coloração (própria) de arestas consiste em uma associação de cores às arestas de um grafo de tal forma que arestas distintas com algum vértice em comum tenham cores diferentes. Naturalmente, o interesse está em determinar o menor número de cores que é suficiente para que uma coloração seja obtida. Outro problema clássico envolvendo colorações de arestas é o Problema de Ramsey. Nesse caso, deseja-se conhecer, dados um grafo F e um conjunto de k cores, o menor número de vértices em um grafo completo para que qualquer coloração de arestas com esse conjunto de cores tenha uma cópia monocromática de F . Essas questões básicas admitem muitas variantes, tanto nas condições impostas às colorações, quanto na natureza da estrutura discreta a ser colorida. As definições básicas de Teoria de Grafos encontram-se na Seção 2.1.

Como ilustramos nos parágrafos anteriores, existem dois tipos básicos de condições impostas às colorações: colorações de arestas que contêm um determinado padrão e colorações de arestas que evitam um determinado padrão. Dado um número r de cores e um grafo F , um r -padrão P de F é uma partição do seu conjunto de arestas em até r classes. Se o padrão de F consiste em uma única classe, então o padrão de F é uma cópia monocromática de F .

O problema clássico de Ramsey é um exemplo de problema de coloração em que se procura uma subestrutura colorida de acordo com um determinado padrão, neste caso uma cópia monocromática de um grafo F (um compêndio dos resultados obtidos para grafos fixos pode ser encontrado em [59]). Por outro lado, o problema da coloração própria de um grafo é um exemplo de coloração que evita determinado padrão, neste caso o padrão evitado é um caminho P_3 monocromático. O nosso trabalho faz contribuições a problemas destes dois tipos, como veremos a seguir.

No problema de coloração em que se procura por padrões, pode-se considerar outros tipos de padrões, por exemplo, o padrão arco-íris. Uma coloração arco-íris de um grafo é uma coloração em que cada aresta possui uma cor diferente das demais, isto é, as arestas de F são particionadas em classes de tamanho um. Nesse contexto o problema clássico de Ramsey não faz sentido, visto que se colorimos o grafo completo K_n com uma única cor, evitamos todos os padrões não-monocromáticos. Ou seja, são necessárias condições adicionais para garantir que o padrão não pode ser evitado de modo trivial. Pode-se impor condições adicionais em relação ao tipo de coloração, por exemplo, limitando o uso de cada cor ou tratando de colorações aleatórias. Na primeira vertente, encontramos diversos trabalhos, entre eles o de Albert, Frieze e Reed [2]. Eles provaram que, se o grafo completo K_n é colorido de tal forma que nenhuma cor aparece mais de $\lceil cn \rceil$ vezes, com $c < 1/32$, então para n suficientemente grande existe um ciclo hamiltoniano arco-íris.

Outra variação quanto à natureza da estrutura discreta a ser colorida é considerar colorações em grafos aleatórios. Dois modelos clássicos de grafos aleatórios com n vértices são os modelos $\mathcal{G}_{n,p}$ e $\mathcal{G}_{n,m}$, que são conhecidos como modelos de Erdős-Rényi e serão tratados na Seção 2.3. Neste ambiente, pode-se definir problemas similares aos apresentados em grafos simples. Dados inteiros positivos n e k , e um modelo de grafos aleatórios \mathcal{G}_n ($\mathcal{G}_{n,p}$ ou $\mathcal{G}_{n,m}$, por exemplo), definimos o modelo dos grafos aleatórios aresta-coloridos \mathcal{G}_n^k da seguinte forma. Para gerar um elemento desse modelo, realizamos a amostragem de um grafo G em \mathcal{G}_n , e então colorimos cada aresta de G independentemente e uniformemente com uma cor do conjunto $[k]$. Um modelo desse tipo foi introduzido por Cooper e Frieze [23], que consideraram grafos aresta-coloridos obtidos do grafo aleatório $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n,m}$. Em [23], eles apresentaram condições sobre n , $m = m(n)$ e $k = k(n)$ que implicam que um elemento de $\mathcal{G}_{n,m}^k$ contém um ciclo hamiltoniano arco-íris com probabilidade tendendo a 1, quando n tende ao infinito.

Desde então, diversos autores apresentaram condições para a existência, assintoticamente quase certamente (a.q.c.), de ciclos hamiltonianos [9, 30, 39] em elementos do grafo aleatório colorido $\mathcal{G}_{n,p}^k$ construído a partir do modelo $\mathcal{G}_{n,p}$. O artigo [9] também fornece condições sobre p que garantem a existência de um emparelhamento perfeito arco-íris quando o número de cores é $k = n/2$. Recentemente, Ferber, Nenadov e Peter [32] investigaram a ocorrência de outros tipos de subgrafos geradores arco-íris no grafo aleatório colorido. Em outro modelo de grafo aleatório, Janson e Wormald [50] analisaram a existência de ciclos hamiltonianos arco-íris no grafo aleatório d -regular com uma coloração $d/2$ -limitada (isto é, onde cada cor aparece no máximo $d/2$ vezes). Espig, Frieze e Krivelevich [29] analisaram colorações de arestas em grafos aleatórios procurando outro tipo de padrão para ciclos hamiltonianos. O padrão procurado por eles é chamado de *zebrado*, mais especificamente, ciclos zebrados, isto é, ciclos cujas arestas alternam de cor.

Em geral, o estudo de propriedades em elementos de $\mathcal{G}_{n,p}$ é uma análise assintótica em que $p = p(n)$ e $n \rightarrow \infty$. Dada uma propriedade \mathcal{P} , comparamos o comportamento dos grafos em $\mathcal{G}_{n,p}$ para diferentes funções $p = p(n)$. Em outras palavras, estudamos como um grafo típico $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ se comporta em relação à propriedade \mathcal{P} à medida em que p muda. Assim como em fenômenos que envolvem mudanças de fase, as mudanças de comportamento do grafo aleatório ocorrem em saltos. A probabilidade em torno da qual o salto ocorre é o que chamamos de *função limiar*. Grosseiramente, dada uma função limiar $t = t(n)$ para a propriedade \mathcal{P} , temos o seguinte comportamento: para valores de p abaixo de t quase nenhum grafo $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ possui a propriedade \mathcal{P} e para valores de p acima de t quase todo grafo $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ possui a propriedade \mathcal{P} .

Um exemplo disso é a função limiar da conexidade de $\mathcal{G}_{n,p}$ [26]. Dado $\epsilon > 0$ e $p < (1 - \epsilon)\frac{\log n}{n}$, então a probabilidade de que $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ é conexo tende a 0 quando $n \rightarrow \infty$; e para $p \geq (1 + \epsilon)\frac{\log n}{n}$ a probabilidade de que $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ é conexo tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$. Curiosamente, a função $\frac{\log n}{n}$ também é o limiar para as propriedades de existência de um emparelhamento perfeito e de que o grau mínimo seja maior ou igual a 1. Em [29], Espig, Frieze e Krivelevich provaram que a função limiar para a propriedade de que um grafo de $\mathcal{G}_{n,p}^2$ contenha um ciclo hamiltoniano zebrado é $2 \log n/n$. Em particular, eles mostraram que essa é a função limiar para a existência de uma árvore geradora propriamente colorida em $\mathcal{G}_{n,p}^2$, que é simplesmente um caminho hamiltoniano nesse grafo. No presente trabalho, mostramos que a função limiar para a existência de uma árvore geradora propriamente colorida em $\mathcal{G}_{n,p}^k$, onde $k \geq 3$, é a função limiar de conexidade.

Teorema 1.1. *Seja $k \geq 3$ fixo, e seja $\epsilon > 0$. Se $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ satisfaz $p(n) \geq (1 + \epsilon) \log n/n$, então um grafo aleatório aresta-colorido $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$ contém uma árvore geradora propriamente colorida a.q.c.*

Claramente não é possível provar que $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$ contém uma árvore geradora propriamente colorida a.q.c. para $p \leq (1 - \epsilon) \log n/n$, pois neste caso sabemos que $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ é a.q.c. desconexo, logo $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ não contém árvore geradora.

Dentre as ferramentas utilizadas para provar esse teorema, um resultado que merece menção é a existência de um emparelhamento suficientemente grande para $G \in \mathcal{G}_{n,p/3}^k$, onde $p = (1 + \epsilon) \log n/n$. A existência de um emparelhamento perfeito é uma propriedade que já foi estudada por vários autores. Como já mencionado, Erdős e Rényi [27] provaram que a função limiar para conexidade e para existência de um emparelhamento perfeito é $\log n/n$. Bollobás e Thomason [15] garantem a existência de um emparelhamento que satura todos os vértices de grau 1, com exceção de no máximo um, para $p = \frac{\log n + 2 \log \log n + \omega(n)}{2n}$ onde $\omega(n) \rightarrow \infty$. Além disso, diversos autores estudaram a cardinalidade de um emparelhamento máximo de $G \in \mathcal{G}_{n,c/n}$, onde c é uma constante [36, 51]. Nesse caso, pode-se mostrar que pelo menos $e^{-c}n$ vértices não podem ser saturados. Em particular, Frieze [36] provou a existência de um emparelhamento de cardinalidade $\frac{1}{2}(1 - (1 + \varepsilon(c))e^{-c})n$ em que $\varepsilon(c) \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow \infty$. Denota-se por $\nu(G)$ a cardinalidade de um emparelhamento máximo em um grafo G . O resultado de Frieze [36] garante que para $c = \frac{1+\epsilon}{3} \log n$ temos $\left| \nu(G) - \frac{1}{2} \left(n - n^{\frac{2-\epsilon}{3}} \right) \right| = o \left(n^{\frac{2-\epsilon}{3}} \right)$ para $G \in \mathcal{G}_{n,c/n}$. Estendendo a técnica utilizada por Bollobás e Thomason [15] obtivemos o resultado a seguir, que caracteriza os vértices que não são saturados por um emparelhamento máximo em $\mathcal{G}_{n,q}$ para $q = (1 + \epsilon) \log n/3n$.

Lema 1.2. *Seja $q(n) = (1 + \epsilon) \log n/3n$. Dado $G \in \mathcal{G}_{n,q}$ sejam os seguintes conjuntos*

$$V_0 = \{v \in V(G) : d(v) = 0\} \text{ e}$$

$$V_c = \{v \in V(G) : d(v) = 1 \text{ e } v \text{ pertence a uma cereja}\}.$$

Considere o grafo $H = G - V_0 - V_c$, então a.q.c. existe um emparelhamento que incide em todos os vértices de H com exceção de no máximo um vértice.

Um segundo problema que tratamos nessa tese envolve colorações que evitam um determinado padrão, que são chamadas de colorações ‘livres’ do padrão. Dado um grafo F e um padrão de coloração P em F , dizemos que uma coloração de arestas de um grafo G é *livre de* (F, P) , se G não contém cópia de F cuja coloração segue o padrão P . Neste âmbito, podemos considerar diversos problemas. Há problemas de existência, por exemplo, fixado o grafo G , deseja-se garantir a existência de uma coloração de G livre de (F, P) . Ou então podemos procurar por estruturas que admitem muitas colorações livres de (F, P) , ou seja, dados n e r , procuramos determinar qual é o grafo hospedeiro G de n vértices que (dentre todos os grafos de n vértices) possui o maior número de r -colorações (F, P) -livres. Esse problema está relacionado com o problema clássico de Turán [61] que, para inteiros n e ℓ , consiste em determinar o grafo de n vértices com o maior número de arestas que é livre de grafo completo com ℓ vértices (K_ℓ). O Teorema de Turán garante que o grafo $(\ell - 1)$ -partido completo balanceado é o grafo K_ℓ -livre com o maior número de arestas. Um grafo G é *s-partido completo* se seu conjunto de vértices admite uma partição em s classes tal que vértices da mesma classe não são adjacentes e tal que todo par de vértices de classes distintas são adjacentes. Dizemos que o grafo s -partido é balanceado quando a cardinalidade de quaisquer duas classes difere em no máximo uma unidade.

Logo, dentre todos os grafos que não contêm K_ℓ , o grafo de Turán é o grafo que apresenta o maior número de colorações livres de K_ℓ , uma vez que podemos colorir as arestas de todas as maneiras possíveis. Erdős e Rothschild [28] consideraram a questão anterior sob a seguinte ótica: se considerarmos colorações de arestas evitando uma cópia monocromática de F , isso levaria a configurações extremas que são substancialmente diferentes do Problema de Turán? Yuster [65] provou que o grafo de n vértices com o maior número de 2-colorações K_3 -livres é o grafo de Turán 2-partido; e Alon, Balogh, Keevash e Sudakov [3] mostraram que o grafo de Turán $(\ell - 1)$ -partido é o grafo de n vértices que admite o maior número de

2-colorações K_ℓ -livres para $\ell \geq 4$. Além disso, esses autores provaram que a mesma conclusão é válida para 3-colorações. Para 4-colorações, o grafo ótimo não é o grafo de Turán.

Balogh [10] foi o primeiro a considerar colorações evitando padrões fixos que não são monocromáticos. Mais precisamente, ele mostrou que o grafo de Turán $(\ell-1)$ -partido ainda é o ótimo para bicolorações quando proibimos qualquer 2-padrão de K_ℓ (isto é, K_ℓ com uma bicoloração qualquer). Por outro lado, ele observou que isto não é verdadeiro para 3-colorações e 3-padrões arbitrários de K_ℓ . Com relação a isso, devemos mencionar que é conjecturado que, para n grande, o grafo completo é o grafo ótimo para triângulos arco-íris no caso de 3-colorações (um resultado aproximado pode ser encontrado em [12]). Por outro lado, o grafo de Turán bipartido foi provado ser ótimo em [46] para toda r -coloração, para $r \geq 10$. Existe também uma extensa descrição de grafos extremais quando considera-se emparelhamentos com vários padrões proibidos [45], o qual inclui todos os casos de arco-íris.

Neste trabalho, utilizamos uma ferramenta probabilística para resolver um problema de coloração de arestas. Para qualquer grafo G , seja $\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)$ o conjunto de todas as r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris (estrela com $t\ell$ arestas coloridas com t cores distintas, tal que cada cor é atribuída a exatamente ℓ arestas). Note que o caso particular em que $\ell = 1$ trata de colorações arco-íris.

Escrevemos,

$$c_{r,t,\ell}(n) = \max \{ |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)| : |V(G)| = n \},$$

e dizemos que um grafo G de n vértices é $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal se $|\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)| = c_{r,t,\ell}(n)$.

Teorema 1.3. *Para todo $r, t \geq 3$ e $\ell \geq 1$, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $c_{r,t,\ell}(n) = |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(K_n)|$. Além disso, o grafo completo K_n é o único grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal com n vértices.*

Para provar esse resultado, utilizamos um resultado de enumeração de grafos cuja demonstração apresenta argumentos probabilísticos. O uso de ferramentas probabilísticas para resolver problemas extremais é bastante difundido e, em problemas de colorações, isso não é diferente. Em 1947, Erdős, por meio de argumentos probabilísticos, garantiu a existência de um K_t monocromático em qualquer bicoloração do grafo completo com $2^{t/2}$ vértices, obtendo assim o limitante inferior para um número de Ramsey (veja [4]). A técnica utilizada por Erdős ficou conhecida como método probabilístico.

Como este trabalho é sobre ferramentas probabilísticas aplicadas a problemas de colorações, no próximo capítulo fixamos notações e apresentamos conceitos básicos de Teoria de Grafos e Teoria da Probabilidade, incluindo definições e propriedades de grafos aleatórios e grafos aleatórios coloridos. Em particular, apresentamos os modelos de grafos aleatórios utilizados nesse trabalho.

A demonstração do Teorema 1.1 encontra-se no terceiro capítulo. Apresentamos a prova detalhada para o caso $k = 3$ e, ao final do capítulo, expomos o resultado geral.

O Lema 1.2 é demonstrado no quarto capítulo. A estratégia utilizada para demonstrar esse resultado é baseada na prova de Bollobás e Thomason [20] para a existência de um emparelhamento incidente a todos os vértices não-isolados, exceto no máximo um, em elementos do grafo aleatório $\mathcal{G}_{n,p}$ tal que $p = \frac{\log n + 2 \log \log n + \omega(n)}{2n}$ onde $\omega(n) \rightarrow \infty$. A ferramenta principal utilizada na prova é o Teorema de Tutte [62] para emparelhamentos perfeitos.

O objetivo do quinto capítulo é obter uma cota inferior para o número de subgrafos com uma dada sequência de graus de um grafo G (não necessariamente completo). Mais especificamente, consideramos grafos obtidos através da remoção

de um conjunto arbitrário de $O(n \ln n)$ arestas. Para alcançar tal objetivo, demonstramos uma generalização de um resultado de Gao [41].

Uma aplicação deste resultado de enumeração é a prova do Teorema 1.3 apresentada no sexto capítulo. A primeira seção trata do caso de estrela arco-íris e a segunda seção generaliza o resultado, utilizando o resultado de enumeração exibido no Capítulo 5.

Encerramos este texto com considerações finais e problemas em aberto.

No que diz respeito aos resultados desta tese até o momento, os capítulos 5 e 6 formam um único trabalho, intitulado “Edge-coloring avoiding fixed rainbow stars” cujo resumo expandido foi publicado nos anais da conferência VIII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium realizado no Ceará em maio de 2015 [47]. Em dezembro do mesmo ano, apresentei este trabalho na conferência 39th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing realizado em Brisbane, Austrália. Além disso, o trabalho completo foi submetido a um periódico. Ressaltamos que este trabalho foi realizado em parceria com Hanno Lefmann e Knut Odernann, pesquisadores alemães que participam de um projeto CAPES/PROBAL-DAAD em conjunto com o nosso grupo de pesquisa. Os capítulos 3 e 4 resultaram em outro trabalho, que teve seu resumo expandido intitulado “The threshold for the appearance of a properly coloured spanning tree in an edge coloured random graph”, publicado nos anais da conferência Bordeaux Graph Workshop, realizada em novembro deste ano em Bordeaux, França [42]. A versão completa está em estágio final de preparação. Este trabalho está sendo realizado em parceria com Pu Gao e, em parte, foi realizado durante o doutorado sanduíche na Monash University.

2 PRELIMINARES

Este capítulo contém diversas definições, resultados e terminologia que serão utilizadas no decorrer do texto. Apresentamos algumas ferramentas básicas de Teoria de Grafos e Teoria da Probabilidade, em seguida introduzimos modelos de grafos aleatórios, apresentando algumas de suas propriedades. Concluimos o capítulo com um breve estudo dos grafos aleatórios regulares por meio do Modelo das Configurações. O conhecimento desses assuntos é primordial para nossos estudos nos capítulos posteriores.

2.1 Teoria de Grafos

O primeiro indício do uso de um grafo foi em 1736 por meio do famoso problema das Pontes de Königsberg, proposto pelo lendário Leonhard Euler. Passaram-se 150 anos até que Gustav Robert Kirchhoff utilizou grafos para modelar circuitos elétricos. Diversos estudiosos, dentre eles Arthur Cayley e William Rowan Hamilton, contribuíram para formar os pilares da Teoria de Grafos. Atualmente existem vários livros tratando desta teoria. Dois excelentes textos são os de Diestel [24] e Bollobás [19].

Dado um conjunto finito V , denotemos $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u \neq v, u, v \in V\}$. Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, E)$, onde $E \subseteq \binom{V}{2}$. Em particular, nossa definição coincide com o que também se conhece por grafo simples. O conjunto V é chamado o conjunto dos vértices (ou rótulos) do grafo G e E é chamado o conjunto das arestas de G , frequentemente escrevemos $V = V(G)$ e $E = E(G)$. Se $v \in V$, dizemos que v é um *vértice*, e $\{u, v\}$ é uma *aresta* se $\{u, v\} \in E$. O número $|V| = n$ é dito a *ordem* de G . O vértice v é *adjacente* a u se $\{u, v\} \in E$. A *vizinhança* de v (ou conjunto de vizinhos de v) corresponde ao conjunto $N(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$.

Denotamos por $d(v) = d_G(v) = |N(v)|$ o *grau* de v , por $\delta(G)$ e por $\Delta(G)$ o grau mínimo e o grau máximo de G , respectivamente. Se G tem vértices v_1, v_2, \dots, v_n a sequência $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ é chamada uma *sequência de graus* de G . Uma sequência $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ é *gráfica* se existe um grafo com a sequência de graus \mathbf{d} . Se $\delta(G) = \Delta(G) = k$, isto é, se todo vértice de G tem grau igual a k , então dizemos que G é um grafo *k-regular*.

Dois grafos são isomorfos se existe uma correspondência entre seus conjuntos de vértices preservando adjacências. Mais precisamente, $G = (V, E)$ é isomorfo a $G' = (V', E')$, o que denotamos por $G \approx G'$, se existe uma bijeção $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $\{x, y\} \in E$ se e somente se $\{\phi(x), \phi(y)\} \in E'$.

Algumas classes de grafos serão muito utilizadas no decorrer do trabalho: o grafo $G = (V, E)$ é denominado *completo* quando E possui todas as arestas possíveis, ou seja, quando $E = V^{(2)}$. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices. Dado um grafo $G = (V, E)$, define-se o *complementar* de G por $\overline{G} = (V, V^{(2)} - E)$. Para $m \geq 3$, um *ciclo*, $C_m = (V, E)$, consiste em um grafo isomorfo ao grafo tal que $V = \{1, \dots, m\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \dots, \{m-1, m\}, \{m, 1\}\}$. Um *caminho* $P_m = (V, E)$ é um grafo isomorfo ao grafo $G = (V, E)$, com $V = \{1, \dots, m\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{m-1, m\}\}$. Um ciclo (ou caminho) *hamiltoniano* de um grafo G é um ciclo (ou caminho) que contém todos os vértices do grafo G .

Um grafo $G = (V, E)$ é denominado *r-partido* se V admite uma partição em r classes tal que vértices de uma mesma classe não são adjacentes. Um grafo em que todo par de vértices de classes distintas são adjacentes é chamado *r-partido completo*. Em particular, quando $r = 2$, dizemos que o grafo é bipartido completo. Denotamos por $K_{n,m}$ o grafo bipartido completo em que uma das classes possui n vértices e a outra possui m vértices. Uma *estrela* $S_n = K_{1,n}$ denota o grafo bipartido onde uma classe possui apenas 1 vértice e a outra, n .

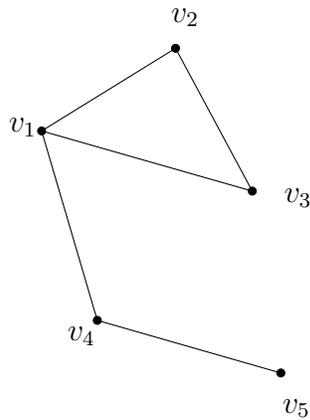
Um grafo é denominado *conexo* se quaisquer dois vértices podem ser ligados por um caminho, caso contrário é denominado *desconexo*. Um subgrafo maximal conexo do grafo G é uma *componente conexa* de G . Um grafo acíclico (não contém ciclos) é chamado de *floresta*, uma floresta conexa é uma *árvore*.

Dado um grafo $G = (V, E)$, um *emparelhamento* M é um subconjunto de E , cujas arestas são duas a duas disjuntas. Se todos os vértices de G pertencem a elementos de M , em outras palavras, se M incide em todos os vértices de G , então o chamamos de *emparelhamento perfeito*. Um emparelhamento M é *máximo* se não existe emparelhamento M' tal que $|M'| > |M|$. Denotamos por $\nu(G)$ o tamanho de um emparelhamento máximo em G . Uma *clique* em G é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Um *conjunto independente* de G é um conjunto de vértices tal que quaisquer dois vértices não são adjacentes.

Dizemos que um grafo $G' = (V', E')$ é um *subgrafo* de $G = (V, E)$ se satisfaz $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$ simultaneamente. Neste caso, escrevemos $G' \subseteq G$. Se G' contém todas as arestas de G que ligam dois vértices em V' então G' é dito ser o *subgrafo induzido por V'* , denotado por $G[V']$. Se G' contém todos os vértices de G dizemos que G' é um *subgrafo gerador de G* . Uma *cópia* de H em G é um subgrafo de G isomorfo a H .

Um *multigrafo* é um par ordenado $G = (V, E)$ com V sendo um conjunto dos vértices, e E um multiconjunto de pares não ordenados de vértices, chamados arestas.

Exemplo 2.1. Dados os conjuntos $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}$, a figura a seguir é uma representação para o grafo $G = (V, E)$.



Observe que,

- Os graus dos vértices são: $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 2$ e $d(v_5) = 1$, logo $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 3$.
- O grafo G é um grafo conexo.
- O grafo $G' = (V', E')$, tal que o conjunto dos vértices é $V' = \{v_1, v_2, v_3\}$, e o conjunto das arestas é $E' = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$, é um subgrafo induzido de G .
- O caminho $P = (V', E')$, tal que o conjunto dos vértices é $V' = \{v_1, v_2, v_3\}$, e o conjunto das arestas é $E' = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$, é um subgrafo de G que não é induzido.
- O conjunto $S = \{v_1, v_5\}$ é um conjunto independente de G .
- O conjunto $M = \{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_5\}\}$ é um emparelhamento em G .

2.2 Teoria da Probabilidade

Nesta seção, introduzimos conceitos relacionados à teoria da probabilidade, ferramentas de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho. Os conceitos apresentados aqui podem ser encontrados em [4], [18] e [48].

Um *espaço de probabilidade* é uma tripla $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto, Σ é uma σ -álgebra dos subconjuntos de Ω e \mathbb{P} é uma função densidade de probabilidade em Σ .

Dizemos que Σ é uma σ -álgebra dos subconjuntos de Ω se a coleção Σ dos subconjuntos de Ω satisfaz

- (i) $\Omega \in \Sigma$;
- (ii) $A \in \Sigma$ implica $A^c \in \Sigma$;
- (iii) $(A_n)_{n \geq 1} \subset \Sigma$ implica $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

A função densidade de probabilidade \mathbb{P} satisfaz

- (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (ii) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ se $A \subset \Omega$;
- (iii) Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos, isto é $A \cap B = \emptyset$, então

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Frequentemente chamamos o conjunto Ω de *espaço amostral* e um subconjunto do espaço amostral é um *evento*. A probabilidade de um evento A é definida por

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} \mathbf{P}(\{w\}), A \subset \Omega.$$

Um *espaço de probabilidade finito* consiste de um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto finito.

A distribuição de probabilidade mais conhecida é a *distribuição uniforme*, que no caso de espaços finitos é definida como $\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ para todo $w \in \Omega$.

Para eventos A e C , com $\mathbb{P}(C) > 0$, a probabilidade de A *condicional a* C , ou seja, probabilidade de o evento A ocorrer, dado que C ocorreu, é definida por

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)}.$$

Uma *variável aleatória* real X é uma função de valores reais definida sobre um espaço amostral, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se A é um evento, denotamos por $X_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ a *variável aleatória indicadora de* A :

$$X_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{se } w \in A \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

A *esperança* de X é o número

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(\{w\}) \cdot w.$$

Se X é uma variável de valores inteiros positivos, podemos escrever

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

Além disso, o operador $\mathbb{E}(X)$ é linear, e costumamos denotar $\mu = \mathbb{E}(X)$. A *variância* de X é dada por $\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$. Também denotamos $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Suponha que $X = X_1 + \dots + X_m$ é escrita como soma de variáveis aleatórias indicadoras X_1, \dots, X_m , então $\text{Var}(X)$ pode ser calculada da seguinte forma

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^m \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j), \quad (2.1)$$

onde a *covariância* é definida por

$$\text{Cov}(Y, Z) = \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z).$$

Observe que a esperança é uma média ponderada, enquanto que a variância é uma medida de dispersão. A variância e a esperança de X são muito úteis na demonstração de diversos resultados, a seguir vemos duas desigualdades simples, mas importantes, envolvendo esses elementos: a Desigualdade de Markov [24, Lema 11.1.4] e a Desigualdade de Chebyshev [24, Lema 11.4.1].

Lema 2.2 (Desigualdade de Markov). *Se X é uma variável aleatória não-negativa com esperança μ e $a > 0$, então*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}.$$

Lema 2.3 (Desigualdade de Chebyshev). *Seja X uma variável aleatória real com esperança μ e variância σ^2 . Se $\lambda > 0$, então*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Definimos o *r-ésimo momento* de uma variável aleatória X como $\mathbb{E}[X]_r$, onde $[x]_r = x(x-1)\dots(x-r+1)$. Note que, se X denota o número de objetos em um conjunto aleatório, então $\mathbb{E}[X]_r$ é o número esperado de r -uplas ordenadas de elementos desse conjunto.

Variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n são ditas independentes se

$$\mathbb{P}(X_i = k_i, i = 1, \dots, n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = k_i),$$

para toda escolha de k_1, \dots, k_n .

Variáveis aleatórias podem ter diferentes distribuições. Adotamos a convenção de que $0 < p < 1$. Dizemos que X é uma *variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p* se X assume somente dois valores, 0 e 1, e $\mathbb{P}(X = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Então X pode ser vista como o resultado de lançar uma moeda viciada, com probabilidade p de sair cara. Além disso,

$$\text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Seja X_1, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias de Bernoulli independentes, em que cada X_i tem como parâmetro p . Então a variável aleatória $X = \sum_{i=1}^n X_i$ satisfaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{Bin}(n, p) = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

e dizemos que X tem uma *distribuição binomial com parâmetros n e p* e denotamos X por $\text{Bin}(n, p)$. Por definição $\mathbb{P}(\text{Bin}(n, p) = k)$ é a probabilidade de obtermos k caras quando lançamos uma moeda n vezes, sabendo que a probabilidade de obter cara é p . A Desigualdade de Chernoff [49, Corolário 2.3] é frequentemente utilizada para analisar a concentração de uma variável aleatória binomial em torno de sua esperança.

Lema 2.4 (Desigualdade de Chernoff). *Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n e p , e seja $0 < \delta \leq \frac{3}{2}$, então*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \delta\mu) \leq 2 \exp\left(-\frac{\delta^2}{3}\mu\right).$$

Uma variável aleatória X é dita ter *distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$* se

$$\mathbb{P}(X = k) = p(k; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

Denotamos essa distribuição por $P(\lambda)$. Os momentos de $X = \sum_{i=1}^n X_i$ e $P(\lambda)$ são dados por: $\mathbb{E}[X]_r = p^r [n]_r$ e $\mathbb{E}[P(\lambda)]_r = \lambda^r$.

Se X é a soma de variáveis aleatórias indicadoras independentes ou com dependência pequena e $\mu = \mathbb{E}(X)$, gostaríamos de dizer que X tem aproximadamente uma distribuição de Poisson com parâmetro μ e que $\mathbb{P}(X = 0)$ está próximo de $e^{-\mu}$; este é o chamado *Paradigma de Poisson*. Uma abordagem muito conhecida para o paradigma de Poisson é o *Crivo de Brun* também conhecido como o método dos momentos. Sejam B_1, \dots, B_m eventos em um espaço de probabilidade Ω , seja X_i a variável aleatória indicadora para B_i e $X = X_1 + \dots + X_m$ a variável aleatória que controla o número de B_i que valem. Defina

$$B^{(r)} = \sum \mathbb{P}(B_{i_1} \wedge \dots \wedge B_{i_r}),$$

a soma é sobre todos os conjunto $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, m\}$.

Teorema 2.5 (Crivo de Brun). *Nas condições acima, suponha que existe uma constante μ tal que*

$$\mathbb{E}(X) = B^{(1)} \rightarrow \mu$$

e para todo r fixo,

$$\mathbb{E} \binom{X}{r} = B^{(r)} \rightarrow \frac{\mu^r}{r!}.$$

Então

$$\mathbb{P}(X = t) \rightarrow \frac{\mu^t}{t!} e^{-\mu},$$

para todo $t \geq 0$.

Notações e aproximações

No decorrer do texto, utilizamos algumas notações assintóticas, fixamos-as aqui para referência futura. Dada duas funções $f(n)$ e $g(n)$, escrevemos

- $f(n) = O(g(n))$ se existem $c, n_0 > 0$ tais que $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ para todo $n \geq n_0$;

- $f(n) = \Omega(g(n))$ se existem $c, n_0 > 0$ tais que $|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$ para todo $n \geq n_0$;
- $f(n) = o(g(n))$ se para todo c existe $n_0 > 0$ tal que $|f(n)| < c \cdot |g(n)|$ para todo $n \geq n_0$;
- $f(n) = \omega(g(n))$ se para todo c existe $n_0 > 0$ tal que $|f(n)| > c \cdot |g(n)|$ para todo $n \geq n_0$;
- $f(n) \approx g(n)$ se $f(n) = (1 + o(1))g(n) = g(n) + o(g(n))$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para aproximar o fatorial de n temos a famosa fórmula de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (2.2)$$

Utilizaremos também as seguintes desigualdades nos capítulos posteriores

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k, \quad (2.3)$$

para n e k inteiros positivos.

$$1 + x \leq e^x, \quad (2.4)$$

para $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{-x} \approx 1 - x, \quad (2.5)$$

quando $x \rightarrow 0$.

2.3 Grafos Aleatórios

O surgimento de grafos aleatórios deu-se a partir do método probabilístico que Erdős, em 1947, utilizou para provar propriedades de grafos por meio de ferramentas probabilísticas. O modelo introduzido por Erdős pode ser descrito

como a escolha aleatória de um grafo no conjunto de todos os $2^{\binom{n}{2}}$ grafos cujo conjunto de vértices é $[n] = \{1, \dots, n\}$, onde os grafos têm a mesma probabilidade. Em outras palavras, ele pode ser descrito como o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é o conjunto de todos os grafos com conjunto de vértices $[n]$, \mathcal{F} é a família de todos os subconjuntos de Ω e para todo $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{P}(\omega) = 2^{-\binom{n}{2}}.$$

De modo geral, um grafo aleatório é um grafo construído por meio de um procedimento aleatório. De acordo com as definições padrão em teoria da probabilidade, isto é formalizado representando o “procedimento aleatório” por um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e a “construção” por uma função do espaço de probabilidade em uma família de grafos adequada. A *distribuição* de um grafo aleatório é a distribuição de probabilidade induzida pela família de grafos. Por muitas razões isto é a única característica relevante na construção e geralmente não distinguimos as diferenças entre grafos aleatórios com a mesma distribuição. De fato, frequentemente é conveniente definir um grafo aleatório especificando sua distribuição, isto é, especificamos a família de grafos e uma distribuição de probabilidade nela.

O estudo de grafos aleatórios combina teoria de grafos e teoria da probabilidade. Existem vários livros que tratam desse assunto, como Diestel [24] e, Alon e Spencer [4]. Além disso, os livros de Bollobás [18] e o de Janson, Luczak e Ruciński [49], têm um estudo mais aprofundado sobre o assunto. Apresentamos a seguir dois modelos clássicos de grafos aleatórios.

Usamos $\mathcal{G}_{n,p}$ para denotar o espaço de probabilidade onde Ω é o conjunto de todos os grafos G com conjunto de vértices $[n]$ em que $\mathbb{P}(G) = p^{|E(G)|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E(G)|}$, com $p = p(n)$ e $0 < p < 1$. Dado um inteiro m tal que $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$, denotamos por $\mathcal{G}_{n,m}$ o espaço de probabilidade onde Ω é o conjunto de todos os grafos com conjunto de vértices $[n]$ e m arestas, e \mathbb{P} é a probabilidade uniforme em

Ω

$$\mathbb{P}(G) = \binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1}.$$

Para n grande, esses dois espaços de probabilidade se comportam de maneira similar quando o número de arestas m em $\mathcal{G}_{n,m}$ é igual ou próximo ao número esperado de arestas de $\mathcal{G}_{n,p}$.

Uma *propriedade de grafos* é uma classe de grafos fechada em relação a isomorfismos, ou seja, uma propriedade que contém um grafo G também contém os grafos isomorfos a G . Considere uma propriedade de grafos \mathcal{P} e seja $p = p(n)$ uma função fixa. Podemos questionar como a probabilidade $\mathbb{P}(G \in \mathcal{P})$ se comporta para $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ quando $n \rightarrow \infty$. Dizemos que $G \in \mathcal{P}$ *assintoticamente quase certamente* (*a.q.c.* se a probabilidade $\mathbb{P}(G \in \mathcal{P})$ tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$).

Com o intuito de entender melhor este novo conceito, vamos mostrar algumas propriedades de $G \in \mathcal{G}_{n,q}$ para $q = (1 + \varepsilon) \log n / 3n$. Essas propriedades serão utilizadas no Capítulo 4.

Lema 2.6. *Um grafo $G \in \mathcal{G}_{n,q}$ tem no máximo $n^{\frac{2-\varepsilon}{3}} + n^{\frac{2-\varepsilon}{6}} \log n + O\left(n^{\frac{1-2\varepsilon}{6}} (\log n)^{3/2}\right)$ vértices isolados e no máximo $n^{\frac{1-2\varepsilon}{3}} \log^2 n$ arestas isoladas a.q.c.*

Demonstração. Dado $G \in \mathcal{G}_{n,q}$, seja $X_i = X_i(G)$ a variável aleatória indicadora

$$X_i(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é um vértice isolado em } G; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $X = X_1 + \dots + X_n$ associa a G seu número de vértices isolados.

Claramente, quando $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = (1 - q)^{n-1} \approx e^{-qn} = e^{\frac{-(1+\varepsilon)}{3} \log n} = n^{-\frac{1+\varepsilon}{3}}.$$

Consequentemente, o número esperado de vértices isolados é

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot (1 - q)^{n-1} \approx ne^{-qn} = ne^{\frac{-(1+\varepsilon)}{3} \log n} = n^{\frac{2-\varepsilon}{3}}.$$

Para calcular $\text{Var}(X)$, usamos a fórmula (2.1). Temos que

$$\text{Var}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1)(1 - \mathbb{P}(X_i = 1)) \approx n^{-\frac{1+\epsilon}{3}} \left(1 - n^{-\frac{1+\epsilon}{3}}\right).$$

Além disso, dados dois vértices v_i e v_j temos que a probabilidade de ambos serem isolados é $(1 - q)^{2n-3}$ assim

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) \\ &= (1 - q)^{2n-3} - (1 - q)^{2n-2} = q(1 - q)^{2n-3} \\ &\approx \frac{(1 + \epsilon) \log n}{3n} n^{-\frac{2}{3}(1+\epsilon)}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &\approx n \cdot n^{-\frac{1+\epsilon}{3}} \left(1 - n^{-\frac{1+\epsilon}{3}}\right) + n^2 \cdot \frac{(1 + \epsilon) \log n}{3n} n^{-\frac{2}{3}(1+\epsilon)} \\ &= n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + O\left(n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log n\right). \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Chebyshev (Lema 2.3), aplicada para $\lambda = \log n$ e usando a desigualdade $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ válida para todo $a, b \geq 0$, concluímos que, com probabilidade $1 - \frac{1}{\log^2 n}$,

$$n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - \left[n^{\frac{2-\epsilon}{6}} \log n + O\left(n^{\frac{1-2\epsilon}{6}} (\log n)^{3/2}\right) \right] < X < n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + \left[n^{\frac{2-\epsilon}{6}} \log n + O\left(n^{\frac{1-2\epsilon}{6}} (\log n)^{3/2}\right) \right].$$

Agora, considere a variável aleatória indicadora $Y_e = Y_e(G)$ para o evento de que a aresta e é uma aresta isolada. Então,

$$\mathbb{P}(Y_e = 1) = q(1 - q)^{2(n-2)} \approx \frac{(1 + \epsilon) \log n}{3n} \cdot n^{-\frac{1+\epsilon}{3} \cdot \frac{2(n-2)}{n}}.$$

Note que $Y = \sum_{e \in E(G)} Y_e$ é o número de arestas isoladas em $G \in \mathcal{G}_{n,q}$.

Assim, o número esperado de arestas isoladas é

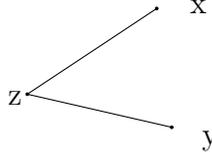
$$\binom{n}{2} \cdot \frac{(1 + \epsilon) \log n}{3n} \cdot n^{-\frac{(1+\epsilon)}{3} \cdot \frac{2(n-2)}{n}} \approx \frac{(1 + \epsilon)}{6} n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log n.$$

Pela Desigualdade de Markov, Lema 2.2,

$$\mathbb{P}(Y \geq n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log^2 n) \leq \frac{(1+\epsilon) n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log n}{6 n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log^2 n} = \frac{(1+\epsilon)}{6} \frac{1}{\log n},$$

consequentemente, $Y < n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log^2 n$ com probabilidade $1 - O\left(\frac{1}{\log n}\right)$. \square

Dizemos que um conjunto $\alpha = \{\{x, y\}, z\}$, onde x, y é um par não-ordenado de vértices em G e z é um terceiro vértice, induz uma *cereja* no grafo G se x e y são ambos adjacentes a z e têm grau 1 em G .



Lema 2.7. *Um grafo $G \in \mathcal{G}_{n,q}$ tem $\frac{(1+\epsilon)^2}{18} n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} (\log n)^2 + O(n^{\frac{1-\epsilon}{6}} \log n)$ cerejas a.q.c.*

Demonstração. Seja \mathcal{A} o conjunto de todos os conjuntos $\alpha = \{\{x, y\}, z\}$ onde x, y é um par de vértices não-ordenado em G e z é um terceiro vértice. Seja Y_α a variável aleatória indicadora

$$Y_\alpha(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ induz uma cereja em } G; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $Y = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha$ é o número de cerejas em G . É claro que

$$\mathbb{P}(Y_\alpha = 1) = q^2(1-q)^{2n-5} \approx \left(\frac{(1+\epsilon) \log n}{3}\right)^2 \cdot n^{-\frac{8+2\epsilon}{3}}.$$

Consequentemente, o número esperado de cerejas em G é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \binom{n}{2} (n-2) q^2 (1-q)^{2n-5} \approx \frac{n^3}{2} \cdot \left(\frac{(1+\epsilon) \log n}{3}\right)^2 \cdot n^{-\frac{8+2\epsilon}{3}} \\ &= \frac{(1+\epsilon)^2}{18} n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} (\log n)^2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Var}(Y_\alpha) \approx \frac{n^3}{2} (q^2(1-q)^{2n-5} - q^4(1-q)^{4n-10}) \approx \frac{n^{\frac{1-2\epsilon}{3}}}{2} \left(\frac{(1+\epsilon) \log n}{3} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \neq \beta} \text{Cov}(Y_\alpha, Y_\beta) &\approx \frac{n^6}{4} q^4 (1-q)^{4n-14} + n^4 q^3 (1-q)^{3n-9} + \frac{n^5}{4} q^4 (1-q)^{4n-14} - \frac{n^6}{4} q^4 (1-q)^{4n-10} \\ &= o(n^{-1/6}) \end{aligned}$$

Então, a variância de Y satisfaz

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Var}(Y_\alpha) + \sum_{\alpha \neq \beta} \text{Cov}(Y_\alpha, Y_\beta) \\ &\approx \frac{n^{\frac{1-2\epsilon}{3}}}{2} \left(\frac{(1+\epsilon) \log n}{3} \right)^2 + o(n^{-1/6}) \end{aligned}$$

Assim a Desigualdade de Chebyshev (Lema 2.3) com $\lambda = n^{\epsilon/6}$ implica que, com probabilidade $1 - O(n^{-\epsilon/3})$, temos

$$\left| Y - \frac{n^{\frac{1-2\epsilon}{3}}}{2} \left(\frac{(1+\epsilon) \log n}{3} \right)^2 \right| < \frac{n^{\frac{1-\epsilon}{6}}}{\sqrt{2}} \frac{(1+\epsilon) \log n}{3} + o(1).$$

□

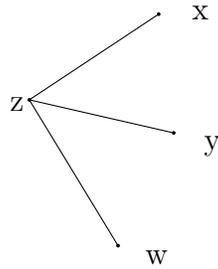
Lema 2.8. *Para qualquer inteiro positivo $k > 0$, com probabilidade $1 - o(1)$ não existem cerejas em $\mathcal{G}_{n,q}$ cujo vértice central tem grau no máximo k .*

Demonstração. O número esperado de cerejas $\{\{x, y\}, z\}$ tais que $d(z) = j$, onde j é um inteiro positivo fixo, é

$$\begin{aligned} &\binom{n}{2} (n-2) q^2 (1-q)^{2n-5} \binom{n-3}{j-2} q^{j-2} (1-q)^{n-j-1} \\ &\leq n^{j+1} \cdot \left(\frac{(1+\epsilon)(\log n)}{3n} \right)^j \cdot e^{\frac{-2(1+\epsilon)}{3} \log n + \frac{-(1+\epsilon)}{3} \log n} \\ &= O\left(\frac{(\log n)^j}{n^\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Somando isso de 2 até k , deduzimos pela desigualdade de Markov que a probabilidade de que existe uma cereja cujo vértice central tem grau no máximo k é $o(1)$. \square

Dizemos que um conjunto $\{\{x, y, w\}, z\}$ induz uma *pinça* em um grafo G se x, y e w são adjacentes a z , e possuem grau 1 em G .



Lema 2.9. *Dado um grafo $G \in \mathcal{G}_{n,q}$, a probabilidade de que G contenha uma pinça tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. O resultado segue imediatamente da Desigualdade de Markov, já que o número esperado de pinças em G é

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} (n-3)q^3(1-q)^{3n-9} &\leq n^4 \cdot \frac{(1+\epsilon)^3 (\log n)^3}{(3n)^3} \cdot e^{-(1+\epsilon)\log n} \\ &= O\left(\frac{(\log n)^3}{n^\epsilon}\right). \end{aligned}$$

\square

2.4 Grafos Aleatórios Coloridos e Funções Limiar

No próximo capítulo, trataremos de um problema de coloração em grafos aleatórios coloridos. Espaços de probabilidade como esse foram introduzidos por Cooper and Frieze [23]. Problemas da teoria clássica de coloração de grafos podem ser investigados nesses espaços, como por exemplo, colorações próprias, problema de Ramsey, etc.

Fixado um número de cores $k \geq 1$ (k fixo), consideramos o espaço de probabilidade $\mathcal{G}_{n,p}^k$ de grafos aleatórios aresta-coloridos, cujos elementos são produzidos da seguinte forma: primeiro gera-se um grafo G no espaço de probabilidade $\mathcal{G}_{n,p}$ e então colore-se cada aresta de G independentemente e uniformemente com uma cor do conjunto $[k] = \{1, \dots, k\}$. Em particular, quando $k = 1$, o espaço de probabilidade produzido é precisamente $\mathcal{G}_{n,p}$.

Erdős e Rényi [25] descobriram um importante fato: para muitas propriedades de grafos \mathcal{P} a probabilidade para que um grafo aleatório $\mathcal{G}_{n,p}$ satisfaça \mathcal{P} salta de 0 para 1 rapidamente, isto é, com um pequeno aumento no número esperado de arestas. Mais ainda, Bollobás e Thomason [20] mostraram que propriedades monótonas possuem este comportamento (uma propriedade *monótona* é uma propriedade que é preservada quando arestas são adicionadas. Por exemplo, a propriedade de ser conexo e propriedades da forma $\{G : G \supset H\}$ são exemplos de propriedades monótonas).

Chamamos de *função limiar para uma propriedade* \mathcal{P} uma função real positiva $t(n)$ que satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G \in \mathcal{P}) = \begin{cases} 0, & \text{se } p/t \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty; \\ 1, & \text{se } p/t \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

para todo $p = p(n)$ e $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$.

Se t é uma função limiar para uma propriedade \mathcal{P} , então qualquer múltiplo positivo ct de t é também uma função limiar para tal propriedade.

Com o estudo das funções limiar, temos uma visão geral de como propriedades de um grafo $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$ se comportam conforme $p = p(n)$ cresce. Mais ainda, podemos aprofundar esse estudo analisando a evolução dos grafos aleatórios em relação a determinada propriedade.

Por exemplo, Erdős e Rényi [26] e Bollobás [17] estudaram a evolução dos grafos aleatórios em relação a uma das propriedades mais básicas de um grafo, a conexidade. Erdős e Rényi começaram a análise com $p = o(1/n)$: neste estágio, o grafo aleatório $\mathcal{G}_{n,p}$ é quase sempre a união disjunta de árvores. Quando $p \approx c/n$ com $0 < c < 1$, ciclos começam a aparecer, as componentes ou são árvores ou são unicíclicas e a maior componente tem $O(\log n)$ vértices. Para $c > 1$, o grafo apresenta uma componente gigante com $\Omega(n)$ vértices e as demais componentes são pequenas: a segunda maior tem no máximo $O(\log n)$ vértices, as componentes pequenas são árvores ou unicíclicas, enquanto que a componente gigante contém muitos ciclos. À medida em que p aumenta, essa componente gigante cresce até ‘engolir’ as demais quando $p \approx \log n/n$, tornando o grafo aleatório quase certamente conexo. Em particular, quando $p = \frac{1}{k} \frac{\log n}{n} + \frac{k-1}{k} \frac{\log \log n}{n} + \omega(n)$ ($\omega(n) \rightarrow \infty$), existem somente árvores de ordem menor ou igual a k fora da componente gigante, com probabilidade tendendo a 1 quando $n \rightarrow \infty$. Agora se $p = \omega(n) \log n/n$ onde $\omega(n) \rightarrow \infty$ as ordens dos graus de todos os vértices do o grafo aleatório são, quase certamente, iguais.

Em alguns casos, para provar que t é uma função limiar de \mathcal{P} , procedemos da seguinte maneira: primeiro utilizamos a desigualdade de Markov para provar que quase nenhum grafo $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$ está em \mathcal{P} quando p é pequeno comparado com t , e depois provamos com o auxílio da desigualdade de Chebyshev, que quase todo grafo está em \mathcal{P} quando p é grande. Com o propósito de calcular a função limiar, é conveniente moldar a propriedade \mathcal{P} da seguinte forma

$$\mathcal{P} = \{G : X(G) > 0\},$$

onde X é uma variável aleatória não-negativa apropriada em $\mathcal{G}_{n,p}^k$.

Proposição 2.10. *Se $\mu > 0$ para todo n suficientemente grande e $\text{Var}(X)/\mu^2 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então $X(G) > 0$ para quase todo grafo $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$.*

Demonstração. Qualquer grafo G com $X(G) = 0$ satisfaz $|X(G) - \mu| = \mu$. Consequentemente o Lema 2.3 (Desigualdade de Chebyshev) implica que

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \mu) \leq \text{Var}(X)/\mu^2 \rightarrow 0.$$

Como $X \geq 0$, isto significa que $X > 0$ assintoticamente quase certamente. \square

Entretanto, certas propriedades possuem funções limiar mais precisas. Chamamos de *função limiar severo para uma propriedade* \mathcal{P} uma função real positiva $t(n)$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, dados $p = p(n)$ e $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$, tenhamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G \in \mathcal{P}) = \begin{cases} 0, & \text{se } p(n) \leq (1 - \epsilon)t(n), \forall n \\ 1, & \text{se } p(n) \geq (1 + \epsilon)t(n), \forall n. \end{cases}$$

para $p = p(n)$ e $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$.

Um exemplo de limiar severo é a função limiar da conexidade de $\mathcal{G}_{n,p}$ em [26]. Dado $\epsilon > 0$ e $p < (1 - \epsilon)\frac{\log n}{n}$, então a probabilidade de que $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ é conexo tende a 0 quando $n \rightarrow \infty$; e para $p \geq (1 + \epsilon)\frac{\log n}{n}$ a probabilidade de que $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ é conexo tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$. Todas as propriedades globais monótonas admitem limiar severo, como mostram Friedgut e Kalai [35], e Friedgut [34].

No Capítulo 3 determinamos, para todo $k \geq 3$ a função limiar severo $p = p_k(n)$ para a propriedade de que um grafo aleatório colorido contém uma árvore geradora propriamente colorida, o que coincide com a função limiar da conexidade.

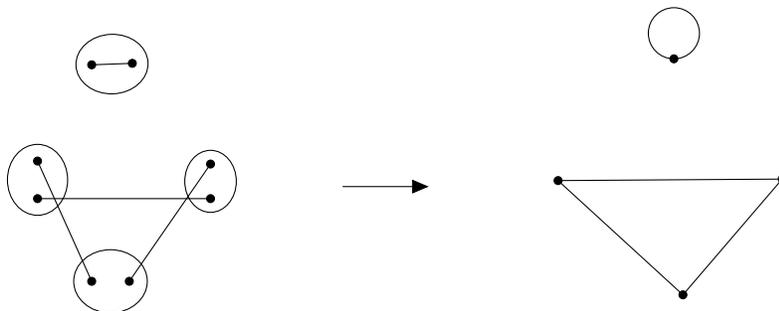
2.5 Grafos Aleatórios Regulares

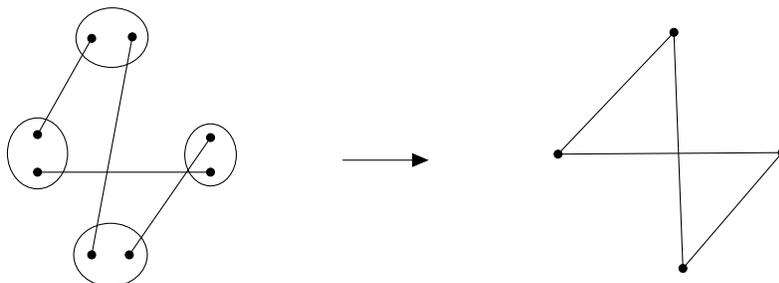
O espaço $\mathcal{G}_{n,d}$ consiste no espaço de probabilidade uniforme dos grafos rotulados d -regulares com n vértices (onde dn é par). Para mais informações sobre esse espaço, veja [18], [49] e [64]. Poderíamos tentar definir $\mathcal{G}_{n,d}$ a partir de $\mathcal{G}_{n,p}$

tomando $p = d/n$, porém um grafo aleatório sorteado nessas condições quase nunca é regular. Por isso, veremos um modelo para construir grafos em $\mathcal{G}_{n,d}$, o *Modelo das Configurações*. A seguir apresentamos este modelo de construção de grafos que foi dado explicitamente por Bollobás [16]. Anteriormente Bender e Canfield [11] usaram um modelo similar para matrizes. Wormald também estudou o modelo das configurações, como podemos ver em [63].

Sejam $d \geq 1$ e n números naturais tais que dn é par. Considere um conjunto de dn pontos particionados em n células v_1, \dots, v_n , com d pontos em cada célula. Chamamos de *configuração* um emparelhamento perfeito $P = \{a_1, \dots, a_{dn/2}\}$ desses pontos em $dn/2$ pares. Podemos associar um multigrafo $G(P)$ a cada configuração P : cada célula de P é um vértice de G , cada par de pontos de P é uma aresta de G . Ou seja, P corresponde a um multigrafo $G(P)$ com vértices v_1, \dots, v_n e exatamente $dn/2$ arestas, de tal forma que, para $x \in v_i$ e $y \in v_j$, o par (x, y) em P corresponde à aresta (v_i, v_j) em $G(P)$.

As figuras a seguir são exemplos de configurações que geram multigrafos 2-regulares. Na primeira figura, a configuração gera um multigrafo (contém um laço) e na segunda figura, temos um exemplo de configuração de gera um grafo 2-regular simples.





Assumindo que tratamos apenas de grafos simples (sem laços e multiarestas), cada grafo corresponde a exatamente $(d!)^n$ configurações P , pois cada célula contém d pontos e não importa a ordem desses pontos quando olhamos para o grafo $G(P)$. Um grafo regular pode ser escolhido uniformemente escolhendo uma configuração P e rejeitando o resultado se ele não produzir um grafo simples. Os multigrafos que não são simples não são gerados uniformemente, pois para cada laço o número de configurações é dividido por 2 e para cada k -aresta este número é dividido por $k!$. Denotamos o espaço de probabilidade uniforme das configurações por $\mathcal{P}_{n,d}$. Podemos assumir que os pontos são elementos de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, d\}$, então $G(P)$ é produzido por uma projeção.

Com o Modelo das Configurações é possível provar propriedades de grafos em $\mathcal{G}_{n,d}$ por meio de contagens em $\mathcal{P}_{n,d}$, condicionando ao evento de que o multigrafo produzido não possui laços e nem multiarestas. Este evento é chamado de “simples”. Conhecendo o valor de $\mathbb{P}(\text{simples})$ é fácil de obter uma conexão entre $\mathcal{P}_{n,d}$ e $\mathcal{G}_{n,d}$.

Lema 2.11. *Seja H um evento em $\mathcal{G}_{n,d}$ e H' o conjunto das configurações em $\mathcal{P}_{n,d}$ que correspondem a grafos em H . Então,*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{G}_{n,d}}(H) = \mathbb{P}_{\mathcal{P}_{n,d}}(H' | \text{simples}) = \frac{\mathbb{P}_{\mathcal{P}_{n,d}}(H')}{\mathbb{P}(\text{simples})}.$$

Observe que uma configuração pode ser selecionada uniformemente de diversas maneiras. Em particular, os pontos nos pares podem ser escolhidos sequencialmente. Em qualquer estágio, o primeiro ponto no próximo par pode ser escolhido

de qualquer modo, desde que o segundo ponto naquele par seja escolhido uniformemente dentre os pontos remanescentes. Denominamos este fato de *Propriedade da Independência* do Modelo das Configurações.

Por meio deste modelo, é possível enumerar assintoticamente o número de grafos d -regulares. Podemos escolher uma configuração ordenando os dn pontos e agrupando-os dois a dois, formando os pares. A ordem dos dois pontos de cada par não importa e, se mudarmos a ordem com que os pares aparecem, não alteramos a configuração. Logo, o número de configurações com t pontos é

$$f(t) = \frac{t!}{(t/2)!2^{t/2}} \quad (2.6)$$

consequentemente o número de grafos d -regulares com n vértices é

$$|\mathcal{G}_{n,d}| = \frac{(dn)!\mathbb{P}(\text{simples})}{(dn/2)!2^{dn/2}d!^n}. \quad (2.7)$$

Bender e Canfield [11] determinaram o valor de $\mathbb{P}(\text{simples})$ para d fixo,

$$\mathbb{P}(\text{simples}) \approx \exp\left(\frac{1-d^2}{4}\right). \quad (2.8)$$

Isso nos leva a seguinte fórmula

$$|\mathcal{G}_{n,d}| \approx \sqrt{2}e^{(1-d^2)/4} \left(\frac{d^d n^d}{e^d (d!)^2}\right)^{\frac{1}{2}n}. \quad (2.9)$$

Na próxima seção, apresentamos uma maneira de obter $\mathbb{P}(\text{simples})$.

Bollobás apresentou uma prova probabilística desta fórmula em [16] onde introduziu o Modelo das Configurações e Wormald encontrou essa fórmula independentemente em [63].

Outra conexão entre $\mathcal{P}_{n,d}$ e $\mathcal{G}_{n,d}$ segue diretamente do Lema 2.11 e de (2.8). Para um evento H em $\mathcal{P}_{n,d}$, definimos $G(H)$ como sendo o evento em $\mathcal{G}_{n,d}$ contendo precisamente todos os grafos da forma $G(P)$ para algum $P \in H$. Assim como em $\mathcal{G}_{n,p}$, dizemos que um evento H ocorre a.q.c. (assintoticamente quase certamente) se $\mathbb{P}(H) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Proposição 2.12. *Dado $d \geq 1$, seja H um evento que é válido a.q.c. em $\mathcal{P}_{n,d}$. Então $G(H)$ é válido a.q.c. em $\mathcal{G}_{n,d}$.*

O Modelo das Configurações para $\mathcal{G}_{n,d}$ pode ser estendido para um grafo aleatório com qualquer sequência de graus $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$, onde d_i é um número natural, $1 \leq i \leq n$. Neste caso, a célula v_i contém d_i pontos e um emparelhamento perfeito desses pontos é selecionado uniformemente, rejeitando-se o resultado se possuir laços ou multiarestas. Denotamos esse modelo uniforme de grafos por $\mathcal{G}_{n,\mathbf{d}}$. No que segue, assumimos que \mathbf{d} está restrito a sequências limitadas com soma par.

A fórmula de Bender e Canfield [11], demonstrada também por Bollobás [16], para uma sequência de graus uniformemente limitados quando $n \rightarrow \infty$, é dada por

$$|\mathcal{G}_{n,\mathbf{d}}| \approx \frac{(2m)! e^{-\lambda - \lambda^2}}{m! 2^m \prod_{i=1}^n d_i!}, \quad (2.10)$$

onde $2m = \sum_{i=1}^n d_i$ e $\lambda = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2}$.

2.5.1 Probabilidade de um grafo simples

Observe que dizer que um multigrafo é um grafo simples é o mesmo que dizer que o multigrafo não possui ciclos de comprimento um e de comprimento dois. De uso deste fato, a ideia aqui é estudar o número de ciclos curtos em um multigrafo de uma configuração aleatória para calcular $\mathbb{P}(\text{simples})$.

Definição 2.13. Dizemos que um conjunto de variáveis $X_i = X_i^{(n)}$, para i em um conjunto finito I , definidas sobre uma sequência de espaços de probabilidades indexados por n , são variáveis aleatórias de Poisson assintoticamente independentes com parâmetros λ_i , se suas distribuições conjuntas tendem a variáveis de Poisson independentes cujos parâmetros são números fixos λ_i . Precisamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigwedge_{i \in I} \{X_i = r_i\} \right) \rightarrow \prod_{i \in I} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{r_i}}{r_i!} \quad (2.11)$$

para todo conjunto fixo de inteiros não-negativos $r_i, i \in I$.

Usamos $P(\lambda)$ para denotar uma variável aleatória de Poisson com esperança λ . Precisaremos de uma generalização do Crivo de Brun (Teorema 2.5) dada a seguir.

Lema 2.14. *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ números reais não-negativos, e sejam $X_{1,n}, \dots, X_{k,n}$, variáveis aleatórias inteiras não-negativas definidas no mesmo espaço \mathcal{G}_n para cada n . Se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^k [X_i]_{r_i} \right) \rightarrow \prod_{i=1}^k \lambda_i^{r_i}$$

para cada conjunto fixo de inteiros não-negativos r_1, \dots, r_k , então as variáveis $X_{1,n}, \dots, X_{k,n}$ são variáveis aleatórias de Poisson assintoticamente independente com parâmetro λ_i .

Demonstração. Vide [64, Lema 2.8]

□

Com as ferramentas apresentadas anteriormente, podemos demonstrar que as variáveis aleatórias correspondentes aos números de ciclos de comprimentos dados, satisfazem (2.11).

Teorema 2.15 (Bollobás [16]). *Para d fixo, seja $X_i = X_{i,n}$ ($i \geq 1$) o número de ciclos de comprimento i no multigrafo aleatório obtido de uma configuração em $\mathcal{P}_{n,d}$. Para $k \geq 1$, X_1, \dots, X_k são variáveis aleatórias de Poisson assintoticamente independentes com parâmetros $\lambda_i = \frac{(d-1)^i}{2^i}$*

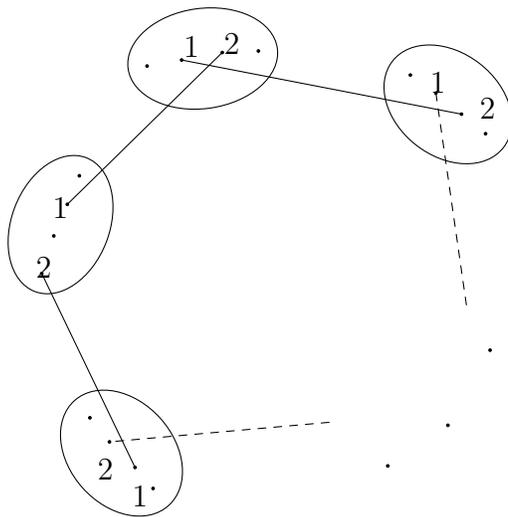
Demonstração. Primeiramente vamos calcular $\mathbb{E}[X_i]_{r_i}$, onde X_i é a variável definida como a quantidade de ciclos de comprimento i no multigrafo aleatório obtido de uma configuração em $\mathcal{P}_{n,d}$. Dado $\vec{v} = (v_1, \dots, v_i)$ em que $v_j \in \{1, \dots, n\}$ para $j \in \{1, \dots, i\}$, definamos a variável indicadora $Y_{\vec{v}}$ para o evento de que $\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{i-1}, v_i\}, \{v_i, v_1\}$ sejam arestas do multigrafo.

Dessa forma,

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2i} \sum_{\vec{v}} \mathbb{P}(Y_{\vec{v}} = 1),$$

onde divimos por $2i$ porque cada ciclo no grafo é identificado com $2i$ vetores (2 pois existem dois sentidos e i pois há i posições no vetor).

Podemos formar um vetor \vec{v} de $[n]_i$ maneiras, pois cada ponto de \vec{v} corresponde a uma célula de $\mathcal{P}_{n,d}$. Escolhidas as i células, precisamos contar quantas configurações geram um ciclo de comprimento i , C_i , para isso precisamos escolher dois elementos de cada célula ($\binom{d}{2}^i$ maneiras de fazer isso). Com o intuito de formar um ciclo, devemos ligá-los ciclicamente, para isso precisamos ordená-los em cada célula para ligarmos os pontos (2^i maneiras de realizar esse processo).



Assim construímos um emparelhamento que gera um ciclo de comprimento i , por fim, completamos esse emparelhamento para gerar uma configuração em $\mathcal{P}_{n,d}$ ($f(dn - 2i)$ possibilidades). Dividindo tudo pelo número total de confi-

gurações $f(dn)$, obtemos a esperança desejada:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i) &= \frac{1}{2i} \cdot [n]_i \cdot \binom{d}{2}^i \cdot 2^i \cdot \frac{f(dn - 2i)}{f(dn)} \\
&\approx \frac{1}{2i} \cdot \frac{n^i (d(d-1))^i}{(dn)^i} \\
&= \frac{(d-1)^i}{2i} = \lambda_i
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Na aproximação usamos a fórmula de Stirling (2.2) e o fato de que $[n]_i \approx n^i$ para i constante. O r -ésimo momento de X_i é dado por,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_i]_{r_i} &= \mathbb{E}(X_i(X_i - 1) \dots (X_i - r_i + 1)) \\
&= \frac{1}{(2i)^{r_i}} \sum_{\substack{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{r_i} \\ \text{distintos}}} \mathbb{P}((Y_{\vec{v}_1} = 1) \wedge \dots \wedge (Y_{\vec{v}_{r_i}} = 1))
\end{aligned}$$

O termo $\frac{1}{(2i)^{r_i}}$ vem do fato de estarmos tomando r_i ciclos, pois para cada ciclo temos o termo $\frac{1}{2i}$. Observe que, quando os vetores têm interseção, escolhemos uma quantidade menor de células, nesse caso o somatório tem no máximo $O(n^{r_i i - 1})$ elementos. Porém, o número de arestas do emparelhamento que forma o ciclo é o mesmo, ou seja, temos o termo

$$\frac{f(dn - 2r_i i)}{f(dn)} \approx \frac{1}{(dn)^{r_i i}}.$$

Consequentemente, tal somatório é assintoticamente nulo. Dessa forma, estamos interessados apenas no caso em que os ciclos são disjuntos, pois assintoticamente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_i]_{r_i} &\approx \frac{1}{(2i)^{r_i}} \sum_{\substack{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{r_i} \\ \text{disjuntos}}} \mathbb{P}((Y_{\vec{v}_1} = 1) \wedge \dots \wedge (Y_{\vec{v}_{r_i}} = 1)) \\
&= \frac{1}{(2i)^{r_i}} \cdot [n]_{r_i i} \cdot \binom{d}{2}^{r_i i} \cdot 2^{r_i i} \cdot \frac{f(dn - 2r_i i)}{f(dn)} \\
&\approx \left(\frac{(d-1)^i}{2i} \right)^{r_i} = \lambda_i^{r_i}.
\end{aligned}$$

Note que isso é válido para qualquer $1 \leq i \leq k$. Resta provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^k [X_i]_{r_i} \right) \rightarrow \prod_{i=1}^k \lambda_i^{r_i}. \quad (2.13)$$

Considere, para cada $1 \leq i \leq k$, uma configuração em $\mathcal{P}_{n,d}$ que corresponde a um conjunto de r_i ciclos distintos de comprimento i . A esperança desejada é o número de tais configurações dividido pelo número total de configurações, $f(dn)$. Tome $s = r_1 + 2r_2 + \dots + kr_k$, o número de maneiras de escolher um emparelhamento de tamanho s tal que a configuração que contenha esse emparelhamento gera r_1 ciclos distintos de comprimento 1, r_2 ciclos distintos de comprimento 2, e assim sucessivamente, é assintoticamente

$$n^s \cdot \binom{d}{2}^s \cdot 2^s \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^k (2i)^{r_i}} \approx \frac{(d(d-1)n)^s}{\prod_{i=1}^k (2i)^{r_i}}.$$

Esse número é obtido quando os s vértices envolvidos são distintos, ou seja, não produzem ciclos com interseção. Caso contrário, como já mencionamos, esse número é $O(n^{s-1})$. Tais emparelhamentos podem ser completados de $f(dn - 2s)$ maneiras, conseqüentemente obtemos

$$\frac{(d(d-1)n)^s}{\prod_{i=1}^k (2i)^{r_i}} \cdot \frac{f(dn - 2s)}{f(dn)} + O(n^{s-1}) \cdot \frac{f(dn - 2s)}{f(dn)} \rightarrow \prod_{i=1}^k \left(\frac{(d-1)^i}{2i} \right)^{r_i} = \prod_{i=1}^k \mathbb{E}[X_i]_{r_i},$$

portanto pelo Lema 2.14 temos o desejado. \square

Agora aplicando o Teorema 2.15 considerando $X_1 = X_2 = 0$ obtemos a probabilidade de G ser um grafo simples (sem ciclos de comprimento 1 e sem ciclos de comprimento 2). Pelo teorema,

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0) \rightarrow \exp \left(-\frac{d-1}{2} \right) \exp \left(-\frac{(d-1)^2}{4} \right) = \exp \left(\frac{1-d^2}{4} \right).$$

2.5.2 Enumeração de subgrafos do grafo completo

Observe que o número $|\mathcal{G}_{n,d}|$ é exatamente a quantidade de subgrafos d -regulares em K_n . Equivalentemente, $|\mathcal{G}_{n,d}|$ é o número de subgrafos com sequência

de graus \mathbf{d} em K_n . Denotamos por $N_H(\mathbf{d})$ o número de subgrafos com sequência de graus \mathbf{d} em H . Mais amplamente, $N_H(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k)$ denota o número de maneiras de escolher k subgrafos H_1, \dots, H_k aresta-disjuntos de H com sequência de graus $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ respectivamente. Em particular, $N_{K_n}(\mathbf{d}) = |\mathcal{G}_{n,\mathbf{d}}|$ e quando \mathbf{d} é a sequência constante $\mathbf{d} = (d, \dots, d)$ escrevemos $N_{K_n}(d) = |\mathcal{G}_{n,d}|$. De acordo com a notação acima, $N_{K_n}(d, r)$ denota o número de maneiras de tomar dois subgrafos de K_n disjuntos, sendo um deles d -regular e o outro r -regular e $N_{K_n}(\mathbf{d}, \mathbf{r})$ é o número de maneiras de escolher dois subgrafos de K_n disjuntos, sendo um com a sequência de graus \mathbf{d} e outro com a sequência \mathbf{r} . Nesse sentido, podemos pensar em calcular os números $N_{K_n}(d, r)$ e $N_{K_n}(\mathbf{d}, \mathbf{r})$, onde $d, r \geq 1$ são números naturais e \mathbf{d}, \mathbf{r} são sequências de graus uniformemente limitados quando $n \rightarrow \infty$.

Para calcular o número $N_{K_n}(d, r)$ imaginamos um modelo de configurações colorido com duas cores, vermelho e azul, onde desejamos obter um grafo vermelho d -regular e um grafo azul r -regular. Considere n células com $d + r$ pontos em cada célula, sendo d pontos vermelhos e r pontos azuis. Uma *configuração colorida* é um emparelhamento perfeito P^* tal que pontos vermelhos são emparelhados apenas com pontos vermelhos e azuis com azuis. Como antes, associamos cada célula com um vértice e cada par de pontos com uma aresta. Dessa forma a configuração P^* gera um multigrafo bicolorido $G(P^*)$. Se assumimos que tratamos apenas de grafos simples, então $G(P^*)$ é a união de dois grafos disjuntos, um grafo vermelho d -regular e um grafo azul r -regular. Assim, dois subgrafos de K_n regulares e disjuntos podem ser escolhidos uniformemente escolhendo uma configuração colorida P^* e rejeitando o resultado se $G(P^*)$ não for simples.

Chamamos o evento de que o multigrafo produzido não possui laços e multiarestas de *simples*^{*}. Mais especificamente, o evento *simples*^{*} é o evento de que o multigrafo $G(P^*)$ não possui arestas múltiplas monocromáticas, arestas múltiplas

bicoloridas e laços. Dessa forma, teremos

$$N_{K_n}(d, r) \approx \frac{f(dn)}{(d!)^n} \cdot \frac{f(rn)}{(r!)^n} \cdot \mathbb{P}(\text{simples}^*), \quad (2.14)$$

onde f é dada em (2.6).

Observe que precisamos apenas de duas variáveis aleatórias para calcular $\mathbb{P}(\text{simples})$; analogamente, para calcular $\mathbb{P}(\text{simples}^*)$, precisamos contar apenas ciclos e comprimento 1 e 2. Porém, nesse caso, teremos cinco variáveis aleatórias, a saber, para $i = 1, 2$ defina X_i^v e X_i^a como o número de ciclos monocromáticos de comprimento i da cor vermelho e azul, respectivamente; e X^b o número de ciclos de comprimento 2 com uma aresta de cada cor. As variáveis X_i^v e X_i^a com $i = 1, 2$ se comportam exatamente como as variáveis estudadas X_1 e X_2 e a variável X^b também tem um comportamento similar porém o parâmetro desta variável é $\frac{dr}{4}$. Do mesmo modo que no Teorema 2.15, mostra-se que $X_1^v, X_2^v, X_1^a, X_2^a, X^b$ são variáveis aleatórias assintoticamente independentes com distribuição de Poisson com parâmetros $\frac{d-1}{2}, \frac{(d-1)^2}{4}, \frac{r-1}{2}, \frac{(r-1)^2}{4}, \frac{dr}{4}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{simples}^*) &= \mathbb{P}(X_1^v = 0 \wedge X_2^v = 0 \wedge X_1^a = 0 \wedge X_2^a = 0 \wedge X^b = 0) \\ &\rightarrow \exp\left(\frac{1-d^2}{4}\right) \exp\left(\frac{1-r^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{dr}{4}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$N_{K_n}(d, r) = \exp\left(-\frac{dr}{4}\right) \cdot N_{K_n}(d) \cdot N_{K_n}(r).$$

Analogamente, obtemos

$$N_{K_n}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \Gamma(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) \cdot \prod_{i=1}^k N_{K_n}(\mathbf{d}_i),$$

onde $\Gamma(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k)$ uma constante positiva.

3 ÁRVORES PROPRIAMENTE COLORIDAS EM $\mathcal{G}_{n,p}$

Determinaremos a função limiar $p = p_k(n)$ para a propriedade de que um grafo aleatório aresta-colorido $\mathcal{G}_{n,p}^k$ contenha uma árvore geradora propriamente colorida, para cada $k \geq 3$. O limiar encontrado coincide com o limiar da conexidade, que é $\log n/n$. Este caso se diferencia do caso $k = 2$, onde a função limiar é $2 \log n/n$, devido a Espig, Frieze and Krivelevich [29].

Cooper e Frieze [23] foram os primeiros a considerar grafos aresta-coloridos obtidos do modelo de grafo aleatório $\mathcal{G}_{n,m}$. Eles estudaram condições sobre n , m e k que implicam que um elemento de $\mathcal{G}_{n,m}^k$ contenha um ciclo hamiltoniano arco-íris a.q.c. Desde então, diversos autores encontraram condições suficientes para a ocorrência de ciclos hamiltonianos arco-íris [9, 30, 39] em $\mathcal{G}_{n,p}^k$. O artigo [9] também fornece condições sobre p que garantem a existência de um emparelhamento perfeito arco-íris quando o número de cores utilizadas é $k = n/2$. Além disso, um trabalho recente de Ferber, Nenadov e Peter [32] investiga a ocorrência de outros tipos de subgrafos geradores arco-íris no grafo aleatório colorido. Em relação a outros espaços de probabilidade, Janson e Wormald [50] provaram que o grafo aleatório d -regular colorido, tal que cada uma das n cores aparece $d/2$ vezes, contém um ciclo hamiltoniano arco-íris a.q.c., enquanto que Ferber, Kronenberg, Mousset e Shikhelman [31] procuraram por cópias arco-íris aresta-disjuntas de algum subgrafo fixo em percolações aleatórias coloridas de grafos com grau mínimo suficientemente grande. Uma percolação em um grafo H com n vértices é o grafo aleatório obtido da seguinte forma: para cada aresta em H decidimos independentemente manter a aresta com probabilidade p ou descartá-la com probabilidade $1 - p$.

Recentemente, Espig, Frieze e Krivelevich [29] determinaram a função limiar $p(n)$ para a existência de ciclos hamiltonianos zebrados (isto é, ciclos hamil-

tonianos bicoloridos cujas aretas alternam de cor) em $\mathcal{G}_{n,p}^2$, que é dada por $2 \log n/n$. Mais precisamente, eles estudaram tal propriedade no processo aleatório. Um *processo aleatório* G_m é uma sequência (G_m) , $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$, tal que o grafo G_m é obtido de G_{m-1} pela adição aleatória de uma aresta. O processo inicia com o grafo vazio, dessa forma G_m possui m arestas. Com o processo aleatório é possível determinar o ‘tempo’ m em que determinada propriedade monótona ocorra. Suponha que Q é uma propriedade monótona de grafos. O tempo τ em que Q aparece é o *tempo crítico* de Q :

$$\tau = \tau_Q = \min\{m \geq 0; G_m \text{ tem } Q\}.$$

Espig, Frieze e Krivelevich definiram uma versão k -colorida do processo aleatório, denotada por G_m^k . Isto significa que G_m^k é obtido de G_{m-1}^k pela adição de uma aresta aleatória, que é colorida aleatoriamente com uma cor de $[k]$, com probabilidade uniforme. No caso de ciclo hamiltoniano zebrado, os autores tomaram $k = 2$ e mostraram que o tempo crítico para a propriedade de G_m^2 conter um ciclo hamiltoniano zebrado coincide com o tempo crítico de que cada cor possua grau pelo menos um. Este resultado implica que $p_2(n) = 2 \log n/n$ é a função limiar para a existência de uma árvore geradora propriamente colorida em $\mathcal{G}_{n,p}^2$.

Frieze e McKay [40] consideraram um processo aleatório colorido aleatoriamente com cores em um conjunto W , $|W| \geq n - 1$ e demonstraram que o tempo crítico para a propriedade do grafo aleatório G_m conter uma árvore geradora arco-íris é o máximo entre o tempo crítico de G_m ser conexo e o tempo crítico para a propriedade de que o conjunto das arestas de G_m esteja colorido com pelo menos $n - 1$ cores distintas. Árvores geradoras também foram investigadas no contexto de listas aleatórias de cores [8]. Nesse artigo, cada aresta do grafo aleatório é uniformemente atribuída a um subconjunto de k cores de $[n - 1]$, e o objetivo era encontrar uma árvore geradora arco-íris.

Provaremos neste capítulo que para cada $k \geq 3$, $p_k(n) = \log n/n$. O fato de que $\mathcal{G}_{n,p}^k$ não contém uma árvore geradora propriamente colorida a.q.c. se $p \leq (1 - \epsilon) \log n/n$ é imediato, pois $\mathcal{G}_{n,p}$ é a.q.c. desconexo neste caso [26]. Enunciamos novamente o Teorema 1.1.

Teorema 1.1. *Seja $k \geq 3$ fixo, e seja $\epsilon > 0$. Se $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ satisfaz $p \geq (1 + \epsilon) \log n/n$, então um grafo aleatório aresta-colorido $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$ contém uma árvore geradora propriamente colorida a.q.c.*

A demonstração do Teorema 1.1 está dividida em três lemas: Lema 1.2 cuja demonstração encontra-se no próximo capítulo, Lema 3.1 demonstrado na Seção 3.1 e Lema 3.2 demonstrado na Seção 3.2. Descreveremos a seguir a ideia da demonstração do Teorema 1.1.

Para provar o Teorema 1.1, focaremos inicialmente no caso $k = 3$, e consideramos grafos aleatórios aresta-coloridos $G \in \mathcal{G}_{n,q}^3$ com cores vermelha, azul e verde. Intuitivamente, este é o caso mais difícil, e a prova do caso geral será obtida com argumentos similares (de fato, se existem $k = 3m$ cores, onde m é um inteiro positivo, então o resultado é derivado diretamente do caso de 3-colorações simplesmente separando as cores em três classes de cardinalidade m , sendo “daltônico” para cores em uma mesma classe).

Usamos a conhecida técnica de exposição em duas rodadas (vide [49]), a fim de evitar problemas com dependência, obtemos um grafo aleatório colorido $\mathcal{G}_{n,p}^3$, nesta estratégia, como a união de três grafos aleatórios $\mathcal{G}_{n,q} \cup \mathcal{G}_{n,q'} \cup \mathcal{G}_{n,q''}$, onde $q = \frac{p}{3}$, $q' = \frac{q}{1-q}$ e $q'' = \frac{q}{1-2q}$. Nossa prova consiste em três passos principais. No primeiro passo, mostramos que a.q.c. os conjuntos de arestas vermelhas e azuis em $G \in \mathcal{G}_{n,p}^3$ produzem emparelhamentos monocromáticos grandes, o que gera uma família de caminhos e ciclos zebrados que incidem em quase todos os vértices. Para provar isto, obtemos uma cota para a cardinalidade de um emparelhamento máximo em $\mathcal{G}_{n,q}$, a seguir, enunciamos novamente tal resultado, cuja demonstração encontra-se no

próximo capítulo. (Lembre que $\nu(G)$ denota a cardinalidade de um emparelhamento máximo em um grafo G .)

Lema 1.2. *Seja $q(n) = (1+\epsilon) \log n/3n$. Dado $G \in \mathcal{G}_{n,q}$ sejam os seguintes conjuntos*

$$V_0 = \{v \in V(G) : d(v) = 0\} \text{ e}$$

$$V_c = \{v \in V(G) : d(v) = 1 \text{ e } v \text{ pertence a uma cereja}\}.$$

Considere o grafo $H = G - V_0 - V_c$, então a.q.c. existe um emparelhamento que incide em todos os vértices de H com exceção de no máximo um vértice.

Dizemos que um emparelhamento M de um grafo com n vértices é *quase-gerador* se ele cobre pelo menos $n - 2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$ vértices. No segundo passo da nossa prova, selecionamos aleatoriamente dois emparelhamentos monocromáticos quase-geradores M_1 e M_2 , escolhidos independentemente em $G_{n,q}$ e em $G_{n,q'}$ respectivamente, e mostramos que a união $M_1 \cup M_2$ induz um número razoavelmente pequeno de componentes. Note que as componentes de $M_1 \cup M_2$ consistem em caminhos, ciclos e vértices isolados. Além disso, separamos as componentes de $M_1 \cup M_2$ em classes \mathcal{L} e \mathcal{S} , satisfazendo $D \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |D| \geq n^{\frac{\epsilon}{3}}$. Se uma componente pertence a \mathcal{S} , dizemos que ela é uma *componente pequena*, caso contrário, dizemos que ela é uma *componente grande*. Seja $s = |\mathcal{S}|$ e $\ell = |\mathcal{L}|$.

Lema 3.1. *Sejam M_1 e M_2 emparelhamentos quase-geradores aleatórios escolhidos independentemente em $G_{n,q}$ e em $G_{n,q'}$, respectivamente. Separamos as componentes de $M_1 \cup M_2$ em classes \mathcal{L} e \mathcal{S} como acima. As seguintes afirmações são válidas com probabilidade $1 - o(1)$:*

- (a) $M_1 \cup M_2$ tem $2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + O(n^{\frac{1-2\epsilon}{3}})$ caminhos.
- (b) $M_1 \cup M_2$ tem no máximo $\log^2 n$ ciclos.
- (c) $M_1 \cup M_2$ tem $O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}})$ componentes pequenas.

Em particular, $s = O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}})$ e $\ell \leq 3n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$.

Para concluir a prova, mostramos que podemos escolher arestas verdes para criar uma árvore geradora propriamente colorida. Com este intuito, dados emparelhamentos M_1 e M_2 como no Lema 3.1, sejam C_1, \dots, C_s as componentes de $M_1 \cup M_2$ em \mathcal{S} e sejam D_1, \dots, D_ℓ as componentes em \mathcal{L} .

Lema 3.2. *Com probabilidade $1-o(1)$, encontramos vértices distintos $u_i \in \cup_{D \in \mathcal{L}} V(D)$, $i \in \{1, \dots, s\}$, tais que*

(a) *existe uma aresta verde entre C_i e u_i ;*

(b) *para toda componente $D \in \mathcal{L}$, temos $|V(D) \cap \{u_1, \dots, u_s\}| < \frac{|D|}{2}$.*

Este lema nos permite conectar todas as componentes pequenas a componentes grandes usando arestas verdes. Além disso, pelo menos metade do número de vértices em cada componente grande não é incidente a arestas usadas neste passo. Estes vértices são chamados *insaturados*. Para concluir a prova, mostramos que é possível encontrar um emparelhamento composto de arestas verdes, cujos extremos são insaturados, conectando as componentes grandes.

Lema 3.3. *Com probabilidade $1-o(1)$, existe uma árvore T incidente no conjunto de vértices $[\ell]$ satisfazendo a seguinte propriedade. Para toda aresta $e = \{i, j\} \in E(T)$, existem vértices insaturados $u_i^e \in D_i$ e $u_j^e \in D_j$ tal que $\{u_i^e, u_j^e\}$ é uma aresta verde no grafo aleatório colorido. Além disso, para qualquer $i \in [\ell]$, temos $u_i^e \neq u_i^{e'}$ sempre que e e e' são arestas distintas da árvore.*

Com isso provamos o Teorema 1.1. Primeiramente usamos a técnica de exposição em duas rodadas para obter uma versão de $\mathcal{G}_{n,2q}$ bicolorido como união de dois grafos aleatórios disjuntos $\mathcal{G}_{n,q}$. Pelo Lema 1.2 podemos escolher um emparelhamento M_1 em $\mathcal{G}_{n,q}$ e, independentemente um emparelhamento M_2 em $\mathcal{G}_{n,q'}$ cobrindo

$n - 2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$ vértices cada um. A união desses emparelhamentos gera um grafo zebrado desconexo com no máximo $3n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$ componentes, sendo $O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}})$ delas componentes pequenas. Pelo Lema 3.2, existe um emparelhamento verde M_3 que conecta componentes pequenas a componentes grandes, e, finalmente, pelo Lema 3.3 encontramos um emparelhamento verde vértice-disjunto de M_3 que conecta componentes grandes a componentes grandes, produzindo uma árvore geradora propriamente colorida com três cores.

3.1 Demonstração do Lema 3.1

O objetivo desta seção é provar o Lema 3.1, que garante que, se escolhermos aleatoriamente dois emparelhamentos M_1 e M_2 quase-geradores, escolhidos independentemente em $G_{n,q}$ e em $G_{n,q'}$ respectivamente, então na união $M_1 \cup M_2$ o número de componentes pequenas (i.e. componentes com no máximo $n^{\frac{\epsilon}{3}}$ vértices) é $O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}})$ a.q.c., e existem no máximo $3n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$ componentes no total.

Como já mencionado, um grafo aleatório colorido em $\mathcal{G}_{n,2q}^2$ será gerado revelando, sucessivamente, as arestas de cada cor. Para obter o conjunto de arestas vermelhas geramos um grafo em $\mathcal{G}_{n,q}$, revelando arestas no conjunto de vértices $[n]$ com probabilidade q e atribuindo a cor vermelha a cada uma das arestas reveladas. Então, independentemente, geramos um outro grafo aleatório em $\mathcal{G}_{n,q'}$ revelando arestas no mesmo conjunto de vértices com probabilidade $q' = \frac{q}{1-q}$. Deletamos arestas que, por um acaso, estiverem no grafo aleatório vermelho, e atribuímos a cor azul às arestas remanescentes. Claramente, existe uma aresta azul com probabilidade

$$\frac{q}{1-q} - q \frac{q}{1-q} = q,$$

consequentemente geramos um grafo aleatório azul $\mathcal{G}_{n,q}$ que é disjunto do grafo vermelho. Além disso, se $G \in \mathcal{G}_{n,q} \cup \mathcal{G}_{n,q'}$ então a probabilidade de que não existe

aresta entre dois vértices quaisquer é

$$(1 - q)(1 - q') = (1 - q) \left(1 - \frac{q}{1 - q}\right) = 1 - 2q,$$

então $\mathcal{G}_{n,2q}^2 = \mathcal{G}_{n,q} \cup \mathcal{G}_{n,q'}$, onde substituímos as arestas duplas por arestas simples.

Lema 3.4. *Quando revelamos a segunda cor criamos no máximo $2\frac{(1+\epsilon)^2}{9}(\log n)^2$ arestas duplas em $\mathcal{G}_{n,q} \cup \mathcal{G}_{n,q'}$.*

Demonstração. A probabilidade de que existe uma aresta dupla entre dois vértices i e j em $[n]$ é $\frac{q^2}{1-q}$.

Seja X_e a variável aleatória indicadora para o evento de que $e \in \binom{[n]}{2}$ é uma aresta dupla. Então $X = \sum_{e \in \binom{[n]}{2}} X_e$ é o número de arestas duplas no grafo aleatório. Logo o número esperado de arestas duplas é

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{e \in E} \mathbb{P}(X_e = 1) = \binom{n}{2} \frac{q^2}{1-q} = \left(\frac{1+\epsilon}{3}\right)^2 (\log n)^2 \frac{1}{1-q}.$$

Além disso,

$$\text{Var}(X_e) = \frac{q^2}{1-q} - \frac{q^4}{(1-q)^2} \text{ e } \text{Cov}(X_e, X_f) = \mathbb{E}(X_e X_f) - \mathbb{E}(X_e)\mathbb{E}(X_f) = 0.$$

Assim,

$$\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}(X).$$

Então pela Desigualdade de Chebyshev (Lema 2.3) tomando $\lambda = \frac{\log n}{3}$ e $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}(X)}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \frac{\log n}{3} \sqrt{\mathbb{E}(X)}\right) &= \mathbb{P}\left(\left|X - \left(\frac{1+\epsilon}{3}\right)^2 \log^2 n\right| \geq \frac{(1+\epsilon) \log^2 n}{9}\right) \\ &\leq \frac{9}{\log^2 n}, \end{aligned}$$

consequentemente

$$\mathbb{P}\left(X \geq 2\frac{(1+\epsilon) \log^2 n}{9}\right) \leq \frac{9}{\log^2 n}.$$

Logo com probabilidade $1 - \left(\frac{\log n}{3}\right)^{-2}$,

$$X \leq 2 \left(\frac{1+\epsilon}{3} \log n \right)^2.$$

□

Pelo Lema 1.2, é possível escolher um emparelhamento quase-gerador (vermelho) M_1 uniformemente dentre todos os emparelhamentos quase-geradores (vermelhos) de $\mathcal{G}_{n,q}$. Como $q' > q$, $\mathcal{G}_{n,q'}$ contém um emparelhamento cobrindo $n - \left(n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + O(n^{\frac{1}{3}})\right)$ vértices. Conseqüentemente, para $\eta = 2\frac{(1+\epsilon)^2}{9}$, podemos escolher um emparelhamento cobrindo $B = n - 2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + \eta(\log n)^2$ vértices uniformemente dentre todos os emparelhamentos cobrindo B vértices. Isto produz um emparelhamento azul M_2 independente e disjunto de M_1 cobrindo a.q.c. pelo menos $n - 2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$ vértices e no máximo $n - 2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + \eta(\log n)^2$ vértices. Os emparelhamentos são independentes pois, $\mathcal{G}_{n,q}$ e $\mathcal{G}_{n,q'}$ foram gerados independentemente por meio da técnica de exposição de arestas em duas rodadas.

Lembre que vamos separar as componentes de $M_1 \cup M_2$ em classes $\mathcal{L} = \{D_1, \dots, D_\ell\}$ e $\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_s\}$, satisfazendo $D \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |D| \geq n^{\frac{\epsilon}{3}}$. Se uma componente pertence a \mathcal{S} , dizemos que ela é uma *componente pequena*, caso contrário, dizemos que ela é uma *componente grande*.

Lema 3.1. *Sejam M_1 e M_2 emparelhamentos quase-geradores aleatórios, escolhidos independentemente em $\mathcal{G}_{n,q}$ e em $\mathcal{G}_{n,q'}$, respectivamente. Separamos as componentes de $M_1 \cup M_2$ em classes \mathcal{L} e \mathcal{S} como acima. As seguintes afirmações são válidas com probabilidade $1 - o(1)$:*

- (a) $M_1 \cup M_2$ tem $2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + O(n^{\frac{1-2\epsilon}{3}})$ caminhos.
- (b) $M_1 \cup M_2$ tem no máximo $\log^2 n$ ciclos.
- (c) $M_1 \cup M_2$ tem $O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}})$ componentes pequenas.

Em particular, $s = O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}})$ e $\ell \leq 3n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$.

Demonstração. Analisando cada emparelhamento como um grafo (separadamente), temos que, cada emparelhamento M_x tem apenas vértices de grau 1 e vértices isolados, para $x = \{1, 2\}$. Denote por m_x o número de vértices de grau 1 em M_x e por i_x os vértices de grau 0 em M_x , para $x = \{1, 2\}$.

Para provar o item (a), provaremos que o número de vértices isolados em $M_1 \cup M_2$ é $n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} + O(n^{1/6})$. Seja X_v a variável aleatória indicadora para o evento de que v em $M_1 \cup M_2$ é um vértice isolado, então $X = \sum_{v \in V(M_1 \cup M_2)} X_v$ é o número de vértices isolados em $M_1 \cup M_2$. Temos que

$$\mathbb{P}(X_v = 1) = \frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}}{n} \cdot \frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - \eta \log^2 n}{n} = 4n^{\frac{-2-2\epsilon}{3}} - \eta n^{\frac{-4-\epsilon}{3}} \log^2 n,$$

consequentemente, o número esperado de vértices isolados é

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \left(4n^{\frac{-2-2\epsilon}{3}} - \eta n^{\frac{-4-\epsilon}{3}} \log^2 n \right) = 4n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} - O(n^{\frac{-1-\epsilon}{3}} \log^2 n).$$

Como

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_v) &= \mathbb{P}(X_v = 1)(1 - \mathbb{P}(X_v = 1)) \\ &= \left(4n^{\frac{-2-2\epsilon}{3}} - \eta n^{\frac{-4-\epsilon}{3}} \log^2 n \right) \left(1 - \left(4n^{\frac{-2-2\epsilon}{3}} - \eta n^{\frac{-4-\epsilon}{3}} \log^2 n \right) \right) \\ &= 4n^{\frac{-2-2\epsilon}{3}} + O\left(n^{\frac{-4-\epsilon}{3}} \log^2 n \right) \end{aligned}$$

então

$$\sum_{v \in V(M_1 \cup M_2)} \text{Var}(X_v) = 4n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} + O(n^{\frac{-1-\epsilon}{3}} \log^2 n).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_v, X_w) &= \mathbb{P}(X_v = 1)\mathbb{P}(X_w = 1|X_v = 1) - \mathbb{P}(X_v = 1)\mathbb{P}(X_w = 1) \\ &= \frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}}{n} \cdot \frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - \eta \log^2 n}{n} \cdot \frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - 1}{n} \cdot \frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - \eta \log^2 n - 1}{n} \\ &\quad - \left(\frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}}{n} \cdot \frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - \eta \log^2 n}{n} \right)^2 \\ &< -8n^{-(2+\epsilon)}, \end{aligned}$$

dessa forma

$$\sum_{u \neq w} \text{Cov}(X_u, X_w) < 0.$$

Portanto, pela equação 2.1,

$$\text{Var}(X) \geq 4n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} + O(n^{\frac{-1-\epsilon}{3}} \log^2 n).$$

Dessa forma, pela Desigualdade de Chebyshev (Lema 2.3), temos que com probabilidade $1 - O(n^{-\frac{2\epsilon}{3}})$,

$$4n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} - O(n^{\frac{1}{6}}) < X < 4n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} + O(n^{\frac{1}{6}}).$$

Se uma componente de $M_1 \cup M_2$ é um caminho então essa componente tem dois vértices de grau 1 em $M_1 \cup M_2$. Cada um desses vértices é um vértice isolado em algum dos emparelhamentos. Como cada emparelhamento tem $2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$ vértices isolados e $M_1 \cup M_2$ tem $O(n^{\frac{1-2\epsilon}{3}})$ vértices isolados, segue que existem $2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + O(n^{\frac{1-2\epsilon}{3}})$ caminhos em $M_1 \cup M_2$.

Para provar o item (b), vamos contar o número de ciclos em $M_1 \cup M_2$ por meio de argumentos similares aos de Frieze e Luczak em [38]. Seja v_1 um vértice arbitrário em $M_1 \cup M_2$.

Analisamos a probabilidade de que v_1 pertence a um ciclo C de comprimento $2k$. Temos que v_1 deve ser um vértice de grau 1 em M_1 e M_2 e a probabilidade de que isso acontece é $\frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n}$. Considere a M_1 -aresta $\{v_1, v_2\} \in C$ contendo o vértice v_1 . O vértice v_2 deve ser um vértice de grau 1 em M_2 , o que acontece com probabilidade $\frac{m_2-1}{n-1}$. Seja $\{v_2, v_3\} \in C$ a M_2 -aresta contendo o vértice v_2 : a probabilidade de que $v_3 \neq v_1$ e v_3 é um vértice de grau 1 em M_1 é $\frac{m_1-2}{n-1}$. Assuma que $v_3 \neq v_1$ e seja $\{v_3, v_4\} \in C$ a M_1 -aresta contendo o vértice v_3 : a probabilidade de que v_4 é um vértice de grau 1 em M_2 é $\frac{m_2-3}{n-3}$. Seja $\{v_4, v_5\} \in C$ a M_2 -aresta contendo v_4 : então a probabilidade de que $v_5 \neq v_1$ e $d_1(v_5) = 1$ é $\frac{m_1-4}{n-3}$. Esse argumento pode ser repetido

notando que a condição $v_j \neq v_1$ só aparece quando j é ímpar, já que a aresta em M_1 incidente a v_1 já foi revelada. Note que $\mathbb{P}(v_{2k+1} = v_1) = \frac{1}{n-2k+1}$. Portanto

$$\mathbb{P}(|V(C)| = 2k) = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{m_1 - 2i}{n - 2i + 1} \cdot \frac{m_2 - 2i + 1}{n - 2i + 1} \right) \cdot \frac{m_2 - 2k + 1}{n - 2k + 1} \cdot \frac{1}{n - 2k + 1}.$$

Observe que

$$\mathbb{P}(|V(C)| = 2k) < \frac{1}{n - 2k + 1}. \quad (3.1)$$

Queremos calcular o número de ciclos em $M_1 \cup M_2$, para isso definimos a seguinte variável aleatória. Dado $v \in V(M_1 \cup M_2)$, definimos

$$X_v = \begin{cases} 0, & \text{se } v \text{ não está em um ciclo } C; \\ \frac{1}{|V(C)|}, & \text{se } v \text{ está em um ciclo } C. \end{cases}$$

Note que $X = \sum_{v \in V(M_1 \cup M_2)} X_v$ é o número de ciclos em $M_1 \cup M_2$.

Assim

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{v \in V(M_1 \cup M_2)} \mathbb{E}(X_v) = \sum_{v \in V(M_1 \cup M_2)} \sum_{k=1}^{\bar{n}/2} \frac{1}{2k} \mathbb{P}(|V(C)| = 2k)$$

onde $\bar{n} = n - 2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$. Então, pela equação 3.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &\leq \bar{n} \sum_{k=1}^{\bar{n}/2} \frac{1}{2k} \frac{1}{n - 2k + 1} \\ &< n \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{2k} \frac{1}{n - 2k + 1} \\ &= n \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{1}{(n+1)2k} + \frac{1}{(n+1)(n-2k+1)} \right) \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 2 \log n + O(1). \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Markov (Lema 2.2), temos que

$$\mathbb{P}(X \geq \log^2 n) \leq \frac{2 \log n + O(1)}{\log^2 n}.$$

Logo, com probabilidade $1 - o(1)$ o número de ciclos em $M_1 \cup M_2$ é no máximo $\log^2 n$.

O item (c) trata de componentes pequenas em $M_1 \cup M_2$. Para contar o número de componentes pequenas, precisamos saber a probabilidade de que um vértice v pertence a um caminho P de comprimento j . Temos que P tem dois extremos, que são vértices isolados em um dos dois emparelhamentos e tem grau 1 no outro emparelhamento. Seja v_1 um vértice arbitrário em $M_1 \cup M_2$. Temos duas possibilidades para v_1 : v_1 é um extremo ou não.

Suponha que v_1 seja um extremo de P , então v_1 deve ser um vértice de grau 1 em M_1 e um vértice isolado em M_2 : a probabilidade desse evento é $\frac{m_1}{n} \cdot \frac{i_2}{n}$. Denote esta M_1 -aresta por $\{v_1, v_2\} \in P$. O vértice v_2 deve ser um vértice de grau 1 em M_2 , o que acontece com probabilidade $\frac{m_2}{n-1}$. Seja $\{v_2, v_3\} \in P$ a M_2 -aresta contendo o vértice v_2 : a probabilidade de que v_3 é um vértice de grau 1 em M_1 é $\frac{m_1-2}{n-2}$. Seja $\{v_3, v_4\} \in P$ a M_1 -aresta contendo o vértice v_3 : a probabilidade de que v_4 é um vértice de grau 1 em M_2 é $\frac{m_2-2}{n-3}$. Seja $\{v_4, v_5\} \in P$ a M_2 -aresta contendo v_4 : então a probabilidade de que $d_1(v_5) = 1$ é $\frac{m_1-4}{n-4}$ e assim por diante. Note que, a probabilidade de que v_j é o extremo é $\frac{i_1}{n-j+1}$ se P termina com uma M_2 -aresta, e é $\frac{i_2-1}{n-j+1}$ se P termina com uma M_1 -aresta. Portanto, temos as seguintes probabilidades:

- Probabilidade de que P começa e termina com M_1 -aresta é

$$\frac{i_2}{n} \cdot \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n-1} \cdot \frac{m_1-2}{n-2} \cdots \frac{m_1-j+2}{n-j+2} \cdot \frac{i_2-1}{n-j+1}$$

- Probabilidade de que P começa com M_1 -aresta e termina com M_2 -aresta é

$$\frac{i_2}{n} \cdot \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n-1} \cdot \frac{m_1-2}{n-2} \cdots \frac{m_2-j+3}{n-j+2} \cdot \frac{i_1}{n-j+1}$$

- Probabilidade de que P começa com M_2 -aresta e termina com M_1 -aresta é

$$\frac{i_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n} \cdot \frac{m_1}{n-1} \cdot \frac{m_2-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{m_1-j+3}{n-j+2} \cdot \frac{i_2}{n-j+1}$$

- Probabilidade de que P começa e termina com M_2 -aresta é

$$\frac{i_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n} \cdot \frac{m_1}{n-1} \cdot \frac{m_2-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{m_2-j+2}{n-j+2} \cdot \frac{i_1-1}{n-j+1}$$

Como $i_2 \leq i_1$ temos

$$\mathbb{P}(|V(P)| = j) < \frac{i_1(i_1-1)}{n(n-j+1)}.$$

Suponha que v_1 não é um extremo, de modo análogo provamos que

$$\mathbb{P}(|V(P)| = j) < \frac{i_1(i_1-1)}{(n-j)(n-j+1)}.$$

Como

$$\mathbb{P}(|V(C)| = j) < \frac{1}{n-j+1} < \frac{i_1(i_1-1)}{n(n-j+1)} < \frac{i_1(i_1-1)}{(n-j)(n-j+1)},$$

podemos afirmar que a probabilidade de uma componente K de $M_1 \cup M_2$ ter tamanho j é no máximo

$$\mathbb{P}(|V(K)| = j) < \frac{i_1(i_1-1)}{(n-j)(n-j+1)}.$$

Dado um vértice $v \in M_1 \cup M_2$, seja Y_v a variável aleatória indicadora

$$Y_v = \begin{cases} 1, & \text{se a componente } K, \text{ onde } v \in K, \text{ é pequena;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo $Y = \sum_{v \in M_1 \cup M_2} Y_v$ é um limitante superior para o número de componentes pequenas. Pelo item anterior,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_v = 1) &= \mathbb{P}(|V(K)| \leq n^{\frac{\epsilon}{3}}) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{n^{\frac{\epsilon}{3}}} \frac{i_1(i_1 - 1)}{(n - \ell)(n - \ell + 1)} \\ &\leq n^{\frac{\epsilon}{3}} \cdot \frac{2n^{\frac{2-\epsilon}{3}}(2n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - 1)}{(n - n^{\frac{\epsilon}{3}})(n - n^{\frac{\epsilon}{3}} + 1)} = O(n^{-\frac{2-\epsilon}{3}}). \end{aligned}$$

O número esperado de componentes pequenas é

$$\mathbb{E}(Y) = n \cdot \mathbb{P}(Y_v = 1) = O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}}).$$

Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{v \in M_1 \cup M_2} \text{Var}(Y_v) &= n \cdot \mathbb{P}(Y_v = 1)(1 - \mathbb{P}(Y_v = 1)) \\ &= O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}}), \end{aligned}$$

Denote por K_v a componente de do vértice v , então

$$\begin{aligned} \sum_v \sum_{w \neq v} \text{Cov}(Y_v, Y_w) &= \sum_v \sum_{w \neq v} \mathbb{E}(Y_v Y_w) - \mathbb{E}(Y_v) \mathbb{E}(Y_w) \\ &= \sum_v \sum_{w \neq v} [\mathbb{P}(Y_v = Y_w = 1) - \mathbb{P}(Y_v = 1) \mathbb{P}(Y_w = 1)] \\ &= \sum_v \sum_{w \neq v} [\mathbb{P}(Y_v = 1) \mathbb{P}(Y_w = 1 | Y_v = 1) - \mathbb{P}(Y_v = 1) \mathbb{P}(Y_w = 1)] \\ &= \sum_v \mathbb{P}(Y_v = 1) \left\{ \sum_{w \neq v} [\mathbb{P}(Y_w = 1 | Y_v = 1) - \mathbb{P}(Y_w = 1)] \right\} \\ &= \sum_v \mathbb{P}(Y_v = 1) \{ \sum_{w \in K_v} [\mathbb{P}(Y_w = 1 | Y_v = 1) - \mathbb{P}(Y_w = 1)] + \sum_{w \notin K_v} [\mathbb{P}(Y_w = 1 | Y_v = 1) - \mathbb{P}(Y_w = 1)] \} \\ &\leq n \cdot \mathbb{P}(|V(K)| \leq n^{\frac{\epsilon}{3}}) \{ n^{\frac{\epsilon}{3}} + n \cdot \mathbb{P}(|V(K)| \leq n^{\frac{\epsilon}{3}}) \cdot O(n^{\frac{\epsilon}{3}-1}) \} \\ &= O(n^{\frac{1}{3}}), \end{aligned}$$

pois

$$\sum_{w \in K_v} [\mathbb{P}(Y_w = 1 | Y_v = 1) - \mathbb{P}(Y_w = 1)] \leq n^{\frac{\epsilon}{3}}$$

e

$$\sum_{w \notin K_v} [\mathbb{P}(Y_w = 1 | Y_v = 1) - \mathbb{P}(Y_w = 1)] \leq n \cdot \mathbb{P}(|V(K)| \leq n^{\frac{\epsilon}{3}}) \cdot O(n^{\frac{\epsilon}{3}-1}),$$

visto que, em um grafo com $n - n^{\frac{\epsilon}{3}}$ vértices a probabilidade de que a componente de um dado vértice v é pequena, é $\mathbb{P}(|V(K)| \leq n^{\frac{\epsilon}{3}}) (1 + O(n^{\frac{\epsilon}{3}-1}))$. Pois, $\frac{1}{n - n^{\epsilon/3}} = \frac{1}{n} (1 + O(n^{\epsilon/3-1}))$.

Dessa forma, pela desigualdade de Chebyshev 2.3 temos que, com probabilidade alta, o número de componentes pequenas é $O(n^{\frac{1-\epsilon}{3}})$. \square

3.2 Demonstração do Lema 3.2

Na Seção 3.1, usamos a técnica da exposição em duas rodadas para obter uma versão de $\mathcal{G}_{n,2q}$ cujas arestas são coloridas aleatoriamente de vermelho ou azul. Repetimos o mesmo argumento para expor a terceira cor: basta selecionar arestas, no mesmo conjunto de vértices $[n]$, com probabilidade $q'' = \frac{q}{1-2q}$, removendo as arestas que já foram escolhidas para o grafo vermelho ou o azul. Note que podemos ter dois tipos de arestas duplas, vermelho e verde ou azul e verde, e que a probabilidade de obter uma aresta dupla é

$$\frac{2q^2}{1-2q}.$$

Como no Lema 3.4, podemos provar que o número de arestas duplas é no máximo $2 \left(\frac{1+\epsilon}{3}\right)^2 \log^2 n$.

Vamos provar que podemos encontrar arestas verdes que conectam todas as componentes de $M_1 \cup M_2$. Além disso, garantiremos que essas arestas verdes formam um emparelhamento. Primeiramente, mostraremos que temos arestas verdes suficientes entre componentes pequenas e grandes para produzir um emparelhamento verde tal que cada componente pequena é conectada por uma aresta verde

a uma componente grande. Denominamos os vértices incidentes com arestas deste emparelhamento de *saturados*. Um importante aspecto do emparelhamento produzido desta maneira é que é improvável saturar uma proporção substancial de alguma das componentes grandes, o que nos permite produzir um emparelhamento verde entre componentes grandes, conectando-as, usando somente vértices insaturados.

Lembre que C_1, \dots, C_s denotam componentes de $M_1 \cup M_2$ em \mathcal{S} e D_1, \dots, D_ℓ componentes em \mathcal{L} . Enunciamos novamente o Lema 3.2.

Lema 3.2. *Com probabilidade $1-o(1)$, encontramos vértices distintos $u_i \in \cup_{D \in \mathcal{L}} V(D)$, $i \in \{1, \dots, s\}$, tais que*

(a) *existe uma aresta verde entre C_i e u_i ;*

(b) *para toda componente $D \in \mathcal{L}$, temos $|V(D) \cap \{u_1, \dots, u_s\}| < \frac{|D|}{2}$.*

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos que a.q.c. cada vértice é incidente a no máximo uma aresta dupla em $\mathcal{G}_{n,2q} \cup \mathcal{G}_{n,q''}$. Claramente, quaisquer dois vértices v e w são conectados por uma aresta dupla com probabilidade $\frac{2q^2}{1-2q}$.

Seja $v \in V(G)$ e considere o evento E_v que v é incidente a pelo menos duas arestas duplas. Então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_v) &= \mathbb{P}\left(\text{Bin}\left(n, \frac{2q^2}{1-2q}\right) \geq 2\right) \leq \binom{n}{2} \left(\frac{2q^2}{1-2q}\right)^2 \\ &\leq \frac{n^2}{2} \cdot \frac{4(1+\epsilon)^4(\log n)^4}{(3n)^4} \cdot \left(\frac{1}{1-2q}\right)^2 \\ &= \frac{2(1+\epsilon)^4(\log n)^4}{3^4 n^2} \cdot \left(\frac{1}{1-2q}\right)^2. \end{aligned}$$

A probabilidade de que algum vértice é incidente a pelo menos duas arestas duplas é no máximo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\cup_{v \in V(G)} E_v\right) &\leq n \cdot \frac{2(1+\epsilon)^4(\log n)^4}{3^4 n^2} \cdot \left(\frac{1}{1-2q}\right)^2 \\ &= \frac{2(1+\epsilon)^4(\log n)^4}{3^4 n} \cdot \left(\frac{1}{1-2q}\right)^2 = o(1), \end{aligned}$$

como desejado.

Agora, descrevemos um procedimento guloso para provar a parte (a): primeiro, mostramos que, em $\mathcal{G}_{n,q''}$, todo vértice em C_1 tem a.q.c. pelo menos dois vizinhos em \mathcal{L} . Então fixamos um vértice arbitrário v_1 em C_1 e, pela afirmação do parágrafo anterior, sabemos que existe uma aresta verde conectando-o a um vértice $u_1 \in \cup_{D \in \mathcal{L}} V(D)$. Indutivamente, condicionando ao evento de que as componentes C_1, \dots, C_i foram conectadas por arestas verdes incidentes em vértices distintos $u_1, \dots, u_i \in \cup_{D \in \mathcal{L}} V(D)$, mostramos que, em $\mathcal{G}_{n,q''}$, todo vértice em C_{i+1} tem pelo menos dois vizinhos em $\cup_{D \in \mathcal{L}} V(D) - \{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ a.q.c. Isso nos permite encontrar, para um vértice arbitrário v_{i+1} em C_{i+1} , uma aresta verde conectando-o a um vértice insaturado u_{i+1} em \mathcal{L} .

Para provar isso, denote por $N_{\mathcal{L}}$ o número de vértices em \mathcal{L} , lembre que $N_{\mathcal{L}} = n - O(n^{\frac{1}{3}})$ pelo Lema 3.1. Seja v um vértice arbitrário de C_1 . Temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Bin}(N_{\mathcal{L}}, q'') \leq 1) &= \sum_{j=0}^1 \binom{N_{\mathcal{L}}}{j} q''^j (1 - q'')^{N_{\mathcal{L}} - j} \\ &= (1 - q'')^{N_{\mathcal{L}}} + N_{\mathcal{L}} q'' (1 - q'')^{N_{\mathcal{L}} - 1} \\ &\approx e^{-q'' N_{\mathcal{L}}} (1 + N_{\mathcal{L}} q''). \end{aligned}$$

Então, a probabilidade de que existe no máximo uma aresta verde entre algum vértice em C_1 e \mathcal{L} é limitada superiormente por

$$n^{\frac{\epsilon}{3}} \cdot e^{-q'' N_{\mathcal{L}}} (1 + N_{\mathcal{L}} q'').$$

Agora, assumindo que fixamos vértices u_1, \dots, u_i adjacentes a componentes C_1, \dots, C_i , respectivamente, a probabilidade de que existe um vértice em C_{i+1} adjacente a no máximo um vértice em $\cup_{D \in \mathcal{L}} V(D) - \{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ é no máximo

$n^{\frac{\epsilon}{3}} \cdot e^{-q''(N_{\mathcal{L}}-i)}(1 + (N_{\mathcal{L}} - i)q'')$, já que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Bin}(N_{\mathcal{L}} - i, q'') \leq 1) &= \sum_{j=0}^1 \binom{N_{\mathcal{L}} - i}{j} q''^j (1 - q'')^{N_{\mathcal{L}} - i - j} \\ &= (1 - q'')^{N_{\mathcal{L}} - i} + (N_{\mathcal{L}} - i)q''(1 - q'')^{N_{\mathcal{L}} - i - 1} \\ &\approx e^{-q''(N_{\mathcal{L}} - i)}(1 + (N_{\mathcal{L}} - i)q''). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a probabilidade de que o procedimento guloso descrito anteriormente falha em algum passo $i \in \{1, \dots, s\}$ é no máximo

$$\begin{aligned} &n^{\frac{\epsilon}{3}} \cdot \sum_{j=1}^s e^{-q''(N_{\mathcal{L}} - j + 1)}(1 + (N_{\mathcal{L}} - j + 1)q'') \\ &\leq O(n^{1/3}) \cdot n^{-\frac{1+\epsilon}{3} \cdot \frac{n - O(n^{1/3})}{n}} \cdot \frac{1}{1-2q} \left(1 + (n - O(n^{1/3})) \cdot \frac{(1 + \epsilon) \log n}{3n} \cdot 2 \right) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Isso prova o item (a).

Para o item (b), dado $D \in \mathcal{L}$, denote por E_D o evento de que existem mais do que $|D|/2$ arestas entre D e \mathcal{S} então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_D) &\leq \binom{|D||V(\mathcal{S})|}{|D|/2} \cdot q''^{|D|/2} \\ &\leq \left(\frac{e|D||V(\mathcal{S})|}{|D|/2} \right)^{|D|/2} \cdot \left(\frac{(1 + \epsilon) \log n}{3n} \cdot \frac{3n}{3n - 2(1 + \epsilon) \log n} \right)^{|D|/2} \\ &\leq \left(\frac{2e|V(\mathcal{S})|(1 + \epsilon) \log n}{3n} \cdot 2 \right)^{|D|/2} \\ &\leq \left(\frac{4e(1 + \epsilon) \log n}{3n^{2/3}} \right)^{|D|/2}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{D \in \mathcal{L}} E_D \right) \leq 27n^{\frac{2-\epsilon}{3}} \cdot \left(\frac{4e(1 + \epsilon) \log n}{3n^{2/3}} \right)^{\frac{n\epsilon/3}{2}} = o(1),$$

como queríamos demonstrar. \square

3.3 Demonstração do Lema 3.3

Na Seção 3.1, mostramos que a união de dois emparelhamentos quase-geradores disjuntos monocromáticos resulta em um grafo com ‘poucas’ componentes e, na Seção 3.2, provamos que conseguimos conectar todas as componentes pequenas saturando, no máximo, metade dos vértices de cada componente grande. Nesta seção, mostraremos que existe um emparelhamento verde incidente em vértices insaturados que conecta as componentes grandes, produzindo assim uma árvore geradora propriamente colorida.

Lema 3.3. *Com probabilidade $1-o(1)$, existe uma árvore T com conjunto de vértices $[\ell]$ satisfazendo a seguinte propriedade. Para toda aresta $e = \{i, j\} \in E(T)$, existem vértices insaturados $u_i^e \in D_i$ e $u_j^e \in D_j$ tais que $\{u_i^e, u_j^e\}$ é uma aresta verde no grafo aleatório colorido. Além disso, para todo $i \in [\ell]$, temos $u_i^e \neq u_i^{e'}$ sempre que e e e' são arestas distintas da árvore.*

Demonstração. Para provar que existe um emparelhamento verde que conecta todas as componentes grandes, faremos uma busca em largura no grafo $\mathcal{G}_{n,q''}$, começando a partir de uma componente arbitrária e gerando uma aresta somente quando o processo de busca precisa saber se essa aresta existe.

Comece com uma componente grande arbitrária e marque todos os vértices insaturados nesta componente como descobertos e não-explorados. Dizemos que estes vértices estão no nível 1. Em geral, o nível i é composto por todos os vértices insaturados que pertencem a componentes para as quais existe um vértice v que está ligado a um vértice do nível $i - 1$. Em um passo arbitrário, selecione um vértice descoberto e não-explorado v no menor nível i para o qual tal vértice existe e explore-o do seguinte modo. Para cada componente não-descoberta D_j , revele as adjacências entre v e os vértices insaturados de D_j para decidir se existe uma aresta verde entre v e D_j . Se essa aresta existir, marque o extremo desta aresta, $N(v)$,

como saturado e marque todos os vértices insaturados de D_j como descobertos e não-explorados, e adicione-os ao nível $i + 1$. Depois disso, marque v como explorado e proceda para o próximo passo.

O processo de revelar arestas termina se

- (i) o número de vértices descobertos e não-explorados é αn , para algum $\alpha > 0$; ou
- (ii) o número de níveis excede $3/\epsilon$; ou
- (iii) o conjunto de vértices descobertos e não-explorados está vazio.

Temos ℓ componentes grandes D_1, \dots, D_ℓ cujos conjuntos $\tilde{D}_j \subseteq D_j$ de vértices insaturados satisfazem $|\tilde{D}_j| \geq \frac{n^{\frac{2}{3}}}{2}$. Lembre que $\ell \leq 3n^{\frac{2-\epsilon}{3}}$. Seja T_r o conjunto dos vértices descobertos até o momento em que terminamos de explorar o $(r - 1)$ -ésimo vértice, e, seja $T'_r = \left(\bigcup_{D \in \mathcal{L}} V(\tilde{D}) \right) \setminus T_r$, isto é, o conjunto dos vértices insaturados e não-descobertos até o momento em que terminamos de explorar o $(r - 1)$ -ésimo vértice. Observe que $|T'_r| \geq \frac{N_\ell}{2} - |T_r|$.

Afirmção 3.5. *Seja $r > 0$. Suponha que no r -ésimo passo do processo de busca em largura descrito anteriormente o item (i) seja verdadeiro, então existe um emparelhamento verde que conecta as componentes grandes.*

Demonstração. Se (i) for verdadeiro no r -ésimo passo, temos que o processo de busca em largura descrito acima conectou $\Omega(n)$ vértices com a exploração de r vértices. Logo, basta conectar os vértices remanescentes. Por hipótese, existe um conjunto E com αn vértices descobertos e não-explorados. Como existem ℓ componentes grandes, segue que existem no máximo ℓ componentes não-descobertas. Agora, escolhamos uma aresta verde entre E e cada uma das componentes não-descobertas.

Descrevemos um procedimento guloso para conectar as componentes não-descobertas D_1, \dots, D_k a E , onde $k \leq \ell$: inicialmente, mostramos que a.q.c.

para algum vértice em \tilde{D}_1 existe uma aresta verde entre esse vértice e E . Seja v_1 em \tilde{D}_1 tal que existe uma aresta verde conectando-o a um vértice $u_1 \in E$. Marcamos u_1 como saturado.

Indutivamente, condicionando ao evento de que as componentes grandes D_1, \dots, D_i foram conectadas por arestas verdes incidentes em vértices distintos $u_1, \dots, u_i \in E$, mostraremos que a.q.c. para algum vértice em \tilde{D}_{i+1} existe uma aresta verde entre esse vértice e $E - \{u_1, \dots, u_i\}$. Isso nos permite encontrar um vértice v_{i+1} em \tilde{D}_{i+1} tal que existe uma aresta verde conectando-o a um vértice insaturado $u_{i+1} \in E$.

Para provar isso, seja D_1 uma componente não-descoberta. Calculamos a probabilidade de que existem pelo menos $10 \log^2 n$ arestas em $\mathcal{G}_{n,q''}$ entre \tilde{D}_1 e E . Pelo Lema 3.4, existe aresta verde entre \tilde{D}_1 e E . Como existem $\frac{n^{\frac{\epsilon}{3}}}{2} \alpha n$ possibilidades de arestas e escolhemos cada aresta com probabilidade q'' , então a probabilidade de que existem no máximo $10 \log^2 n$ arestas em $\mathcal{G}_{n,q''}$ entre \tilde{D}_1 e E é

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\text{Bin} \left(|\tilde{D}_1| \cdot |E|, q'' \right) \leq 10 \log^2 n \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\text{Bin} \left(\frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot \alpha n, q'' \right) \leq 10 \log^2 n \right) \\ & = \sum_{j=0}^{10 \log^2 n} \binom{\frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot \alpha n}{j} q''^j (1 - q'')^{\frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot \alpha n - j} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \leq 10 \log^2 n \left(\frac{e \alpha n^{1+\epsilon/3}}{20 \log^2 n} \right)^{10 \log^2 n} \cdot e^{-q'' \cdot \frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot \alpha n - 10 \log^2 n} \\ & = 10 \log^2 n \left(\frac{e \alpha n^{1+\epsilon/3}}{20 \log^2 n} \right)^{10 \log^2 n} \cdot n^{-\frac{1+\epsilon}{3} \cdot \frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot \frac{1}{1-2q} \cdot \frac{\alpha n - 10 \log^2 n}{n}} \\ & = p_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De (3.2) para (3.3) utilizamos a desigualdade (2.3). Logo, com probabilidade pelo menos $1 - p_1$, existe $u_1 \in E$ tal que existe uma aresta verde entre u_1 e \tilde{D}_1 .

Agora, assumimos que fixamos os vértices u_1, \dots, u_i adjacentes a componentes D_1, \dots, D_i , respectivamente. Analisemos a probabilidade de que existem no máximo $10 \log^2 n$ arestas entre \tilde{D}_{i+1} e $E - \{u_1, \dots, u_i\}$. Temos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\text{Bin} \left(|\tilde{D}_{i+1}| \cdot (|E| - i), q'' \right) \leq 10 \log^2 n \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(\text{Bin} \left(\frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot (\alpha n - i), q'' \right) \leq 10 \log^2 n \right) \\
& \leq \sum_{j=0}^{10 \log^2 n} \binom{\frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot (\alpha n - i)}{j} q''^j (1 - q'')^{\frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot (\alpha n - i) - j} \\
& \leq 10 \log^2 n \left(\frac{e(\alpha n - i)n^{\epsilon/3}}{20 \log^2 n} \right)^{10 \log^2 n} \cdot n^{-\frac{1+\epsilon}{3n} \cdot \frac{1}{1-2q} \cdot \frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot (\alpha n - i) - 10 \log^2 n} \\
& = 10 \log^2 n \left(\frac{e(\alpha n - i)n^{\epsilon/3}}{20 \log^2 n} \right)^{10 \log^2 n} \cdot n^{-\frac{1+\epsilon}{3} \cdot \frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot \frac{1}{1-2q} \cdot \frac{\alpha n - i - 10 \log^2 n}{n}} \\
& = p_{i+1}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a probabilidade de que existem no máximo $10 \log^2 n$ arestas entre \tilde{D}_{i+1} e $E - \{u_1, \dots, u_i\}$ é limitada superiormente por p_{i+1} . Consequentemente, a probabilidade de que o procedimento guloso descrito falhe em algum passo $i \in \{1, \dots, \ell\}$ é de no máximo $o(1)$, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\ell} p_{i+1} & \leq 3n^{\frac{2-\epsilon}{3}} \cdot 10 \log^2 n \left(\frac{e(\alpha n - 3n^{\frac{2-\epsilon}{3}})n^{\epsilon/3}}{20 \log^2 n} \right)^{10 \log^2 n} \cdot n^{-\frac{1+\epsilon}{3} \cdot \frac{n^{\epsilon/3}}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{1-2q} \cdot \frac{n - O(n^{\frac{2-\epsilon}{3}})}{n}} \\
& = o(1),
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação. \square

Logo, se **(i)** ocorrer temos o desejado. Agora, resta mostrar que a probabilidade de que **(ii)** ou **(iii)** ocorra antes de **(i)** é pequena. Neste caso, mostraremos que **(ii)** implica **(i)**, e que **(iii)** não ocorre antes de **(ii)**.

Em um nível $i < \frac{\epsilon}{3}$, denotamos por L_i o número de vértices no nível i após a exploração de todos os vértices do nível $i - 1$. Como **(i)** não ocorre antes de

(ii) e (iii) queremos estimar o número de vértices no nível i para garantir que (iii) não ocorre antes de (ii). Em relação a isso, temos o seguinte resultado.

Afirmção 3.6. *Dado um conjunto $E \subseteq \mathcal{L}$, tal que $|E| = o(n)$ e $E = E_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E_k$ com $|E_j| = 6$ para todo $1 \leq j \leq k$ exceto no máximo um índice i para o qual $1 \leq |E_i| \leq 5$. Então existe uma aresta verde entre cada classe E_j com seis vértices e $E' = \left(\cup_{D \in \mathcal{L}} V(\tilde{D}) \right) \setminus E$, com probabilidade $1 - o(n^{-\epsilon/2})$.*

Demonstração. Temos que $|E'| \geq \frac{n}{2} - o(n)$ pois $|E| = o(n)$ e sabemos que $N_{\mathcal{L}} = n - O(n^{1/3})$, pelo Lema 3.1 (lembre que $N_{\mathcal{L}}$ denota o número de vértices em \mathcal{L}). Dessa forma, a probabilidade de que existe no máximo uma aresta (em $\mathcal{G}_{n,q''}$) entre um vértice $v \in E$ e E' é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Bin}(\frac{n}{2} - o(n), q'') \leq 1) &= \sum_{i=0}^1 \binom{\frac{n}{2} - o(n)}{i} q''^i (1-q'')^{\frac{n}{2} - o(n)} \\ &= (1-q'')^{\frac{n}{2} - o(n)} + \binom{\frac{n}{2} - o(n)}{1} q'' (1-q'')^{\frac{n}{2} - o(n)} \\ &\approx e^{-q''(\frac{n}{2} - o(n))} (1 + (\frac{n}{2} - o(n)) q'') \\ &\leq n^{-\frac{1+\epsilon}{6} \frac{n-o(n)}{n(1-2q)}} (1 + (\frac{n}{2} - o(n)) \cdot \frac{2(1+\epsilon) \log n}{3n}). \end{aligned}$$

A probabilidade de que não existe aresta verde entre uma classe de E e E' é limitada superiormente por

$$\left[\mathbb{P} \left(\text{Bin} \left(\frac{n}{2} - o(n), p'' \right) \leq 1 \right) \right]^6 \approx \left(n^{-\frac{1+\epsilon}{6}} (1 + O(\log n)) \right)^6 = n^{-1-\epsilon} (1 + O(\log n))^6.$$

Logo, a probabilidade de que não há aresta verde entre alguma classe de E e E' é no máximo

$$\lfloor |E|/6 \rfloor \cdot n^{-1-\epsilon} (1 + O(\log n))^6 = \frac{o(n)}{6} \cdot n^{-1-\epsilon} (1 + O(\log n))^6 = o(n^{-\epsilon/2}).$$

□

Aplicamos a Afirmção 3.6 para $E = \{\text{todos os vértices no nível } i\}$ e $E' = T'_r$, em que $r > 0$ é o passo r tal que todos os vértices do nível $i - 1$ já foram

explorados e vamos iniciar a exploração do nível i . Por hipótese, temos $|L_i| = o(n)$. Particionamos os vértices do nível i em classes de seis vértices, então pela Afirmação 3.6, cada classe descobre uma componente grande com probabilidade $1 - o(n^{-\epsilon/2})$. Além disso, podemos estimar L_{i+1} :

Afirmação 3.7. *Dado um conjunto $E \subseteq \mathcal{L}$, tal que $|E| = o(n)$ e $E = E_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E_k$ com $|E_j| = 6$ para todo $1 \leq j \leq k$ exceto no máximo um índice i para o qual $1 \leq |E_i| \leq 5$. Então depois de explorar todos os vértices de E temos que o conjunto W dos vértices descobertos pelos vértices de E satisfaz*

$$|W| \geq \left\lfloor \frac{|E|}{6} \right\rfloor \left(\frac{n^{\epsilon/3}}{2} - 1 \right),$$

com probabilidade $1 - o(n^{-\epsilon/2})$.

Demonstração. Pela Afirmação 3.6, todas as classes de E descobrem novas componentes. Sendo assim, o conjunto W é composto por $\left\lfloor \frac{|E|}{6} \right\rfloor$ componentes. Como cada componente grande tem pelo menos $\frac{n^{\epsilon/3}}{2}$ vértices insaturados e nesse procedimento de conectar uma componente saturamos um vértice de cada nova componente, segue que

$$|W| \geq \left\lfloor \frac{|E|}{6} \right\rfloor \left(\frac{n^{\epsilon/3}}{2} - 1 \right),$$

com probabilidade $1 - o(n^{-\epsilon/2})$. □

Aplicando a Afirmação 3.7 para $E = \{\text{todos os vértices no nível } i\}$ e $W = \{\text{todos os vértices no nível } i + 1\}$, temos que o número de vértices no nível $i + 1$ no exato momento em que todos os vértices do nível i foram explorados é pelo menos

$$\left\lfloor \frac{L_i}{6} \right\rfloor \left(\frac{n^{\epsilon/3}}{2} - 1 \right),$$

com probabilidade $1 - o(n^{-\epsilon/2})$. Então a probabilidade de que isso falhe para algum nível $i \leq \epsilon/3$ enquanto o número de vértices explorados é $o(n)$ é

$$\frac{3}{\epsilon} o(n^{-\epsilon/2}) = o(n^{-\epsilon/2}).$$

O fato de que

$$L_{i+1} \geq \left\lfloor \frac{L_i}{6} \right\rfloor \left(\frac{n^{\epsilon/3}}{2} - 1 \right),$$

garante que **(iii)** não ocorre antes de **(ii)**. Em particular, sempre que $n > 2^{3/\epsilon}$ temos

$$L_i < 6L_{i+1}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{L_1 + \cdots + L_i}{L_i} &= \frac{L_1 + \cdots + L_{i-1}}{L_i} + 1 \\ &< 6^i + 6^{i-1} + \cdots + 6 + 1 = \frac{6^{i+1} - 1}{5} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Portanto,

$$L_1 + \cdots + L_{i+1} = \Omega(L_{i+1}).$$

Em particular, se o número de vértices descobertos até o nível $i + 1$, $L_1 + \cdots + L_{i+1}$ é igual a $\Omega(n)$, segue que o número de vértices descobertos e não-explorados L_{i+1} é também $\Omega(n)$.

Agora, se **(ii)** for verdadeiro, temos $3/\epsilon$ níveis e o número de vértices no nível $3/\epsilon$ satisfaz

$$L_{\frac{3}{\epsilon}} \geq \frac{1}{6^{\frac{3}{\epsilon}-1}} \frac{n^{\epsilon/3}}{2} \left(\frac{n^{\epsilon/3}}{2} - 1 \right)^{\frac{3}{\epsilon}-1} = \Omega(n).$$

Logo **(i)** é verdadeiro, pois o nível $\frac{3}{\epsilon}$ é composto por vértices descobertos e não-explorados. Consequentemente, pela Afirmação 3.5 temos o emparelhamento verde desejado.

□

3.4 Generalização para mais cores

Provamos o Teorema 1.1 para três cores. A ideia para provar para $k \geq 4$ cores é dividir os conjuntos de cores em três grupos (vermelho, azul e verde) e usar a mesma estratégia utilizada para o caso $k = 3$. Se $k = 3m$ para algum m , podemos criar três grupos de m cores cada, supondo que as arestas do mesmo grupo têm a mesma cor. Se $k = 3m + 1$, criamos dois grupos de m cores, digamos grupo vermelho e grupo azul, e o grupo verde com $m + 1$ cores. Se $k = 3m + 2$, criamos dois grupos de $m + 1$ cores, digamos grupo vermelho e grupo azul, e o grupo verde com m cores e aplicamos a mesma estratégia de antes, supondo que as arestas do mesmo grupo tem a mesma cor.

Denote por $x_1 = \frac{m}{3m+1}$, $x_1^* = \frac{m+1}{3m+1}$, $x_2 = \frac{m+1}{3m+2}$ e $x_2^* = \frac{m}{3m+2}$. Note que $x_i + x_i^* = 1$ para $i \in \{1, 2\}$. Então em $\mathcal{G}_{n,p}^k$ para $k = 3m + i$ temos que, a probabilidade de uma aresta “ser vermelha” é $q_i = x_i \frac{(1+\epsilon) \log n}{n}$ e a probabilidade de uma aresta “ser azul” é a mesma. E para o terceiro grupo de cores, grupo verde, a probabilidade de uma aresta “ser verde” é $q_i^* = x_i^* \frac{(1+\epsilon) \log n}{n}$.

Note que, para $i \in \{1, 2\}$

$$p = \frac{(1 + \epsilon) \log n}{n} = (2x_i + x_i^*) \frac{(1 + \epsilon) \log n}{n} = 2q_i + q_i^*.$$

Analogamente ao caso $k = 3$, aplicamos duas vezes a técnica de exposição em duas rodadas. Primeiro geramos

$$\mathcal{G}_{n,2q_i} = \mathcal{G}_{n,q_i} \cup \mathcal{G}_{n,q_i'}, q_i' = \frac{q_i}{1 - q_i}.$$

Depois, revelemos a terceira cor,

$$\mathcal{G}_{n,p} = \mathcal{G}_{n,2q_i} \cup \mathcal{G}_{n,q_i''}, q_i'' = \frac{q_i^*}{1 - 2q_i}.$$

Provamos um lema análogo ao Lema 1.2.

Lema 3.8. *Se $q_i = x_i(1 + \epsilon) \log n/3n$ então \mathcal{G}_{n,q_i} a.q.c. contém um emparelhamento de cardinalidade*

$$\frac{1}{2} (n - n^{1-x_i(1+\epsilon)}) - O(n^{1-2x_i(1+\epsilon)} \log^2 n).$$

Então podemos escolher, independentemente, dois emparelhamentos disjuntos M_1 e M_2 , um do grupo vermelho e outro do grupo azul. Dessa forma a união $M_1 \cup M_2$ é formada por vértices isolados, caminhos e ciclos propriamente coloridos.

Assim como procedemos com três cores, dividimos as componentes de $M_1 \cup M_2$ em duas classes \mathcal{L} (grande) e \mathcal{S} (pequena), satisfazendo $D \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |D| \geq n^{x_i \epsilon}$, e usamos as arestas do grupo verde para conectar essas componentes.

Lema 3.9. *Sejam M_1 e M_2 emparelhamentos quase-geradores aleatórios, escolhidos independentes em \mathcal{G}_{n,q_i} e em \mathcal{G}_{n,q'_i} , respectivamente. Separamos as componentes de $M_1 \cup M_2$ em classes \mathcal{L} e \mathcal{S} como acima. As seguintes afirmações são válidas com probabilidade $1 - o(1)$:*

(a) $M_1 \cup M_2$ tem $2n^{1-x_i(1+\epsilon)} + O(n^{1-2x_i(1+\epsilon)})$ caminhos.

(b) $M_1 \cup M_2$ tem no máximo $\log^2 n$ ciclos.

(c) $M_1 \cup M_2$ tem $O(n^{1-x_i(2+\epsilon)})$ componentes pequenas.

Em particular, $s = O(n^{1-x_i(2+\epsilon)})$ e $\ell \leq 3n^{1-x_i(1+\epsilon)}$.

Esboço da prova. As componentes de $M_1 \cup M_2$ são vértices isolados, caminhos e ciclos. Como cada emparelhamento tem $2n^{1-x_i(1+\epsilon)}$ vértices isolados, segue que o número esperado de vértices isolado em $M_1 \cup M_2$ é

$$n \cdot (2n^{-x_i(1+\epsilon)})^2 = 4n^{1-2x_i(1+\epsilon)},$$

analogamente ao caso $k = 3$, mostramos que $M_1 \cup M_2$ tem no máximo $\log^2 n$ ciclos e o número esperado de caminhos é $2n^{1-x_i(1+\epsilon)} + O(n^{1-2x_i(1+\epsilon)})$, então que o número de componentes em $M_1 \cup M_2$ é no máximo $3n^{1-x_i(1+\epsilon)}$, dentre elas, o número esperado de componentes pequenas é

$$O(n^{1-x_i(2+\epsilon)}).$$

□

Sejam C_1, \dots, C_s componentes em \mathcal{S} e D_1, \dots, D_ℓ componentes em \mathcal{L} . Ao revelar a terceira cor vemos que podemos escolher arestas verdes entre componentes grandes facilmente, por isso conectamos primeiro as componentes pequenas as componentes grandes e depois conectamos as componentes grandes entre si. Enunciamos o resultado análogo ao Lema 3.2.

Lema 3.10. *Com probabilidade $1-o(1)$, encontramos vértices distintos $u_i \in \cup_{D \in \mathcal{L}} V(D)$, $i \in \{1, \dots, s\}$, tais que*

(a) *existe uma aresta verde entre C_i e u_i ;*

(b) *para toda componente $D \in \mathcal{L}$, temos $|V(D) \cap \{u_1, \dots, u_s\}| < \frac{|D|}{2}$.*

Esboço da prova. Afirmamos que cada vértice é incidente a no máximo uma aresta dupla em $\mathcal{G}_{n,2q_i} \cup \mathcal{G}_{n,q_i''}$. De fato, a probabilidade de que algum vértice é incidente a pelo menos duas arestas duplas é no máximo

$$\begin{aligned} n \cdot \mathbb{P} \left(\text{Bin} \left(n, \frac{2q_i q_i^*}{1-2q} \right) \geq 2 \right) &\leq n \cdot \frac{2(1+\epsilon)^4 (\log n)^4}{n^2} \cdot \left(x_i \cdot x_i^* \cdot \frac{1}{1-2q_i} \right)^2 \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Afirmamos que existem pelo menos duas arestas verdes entre cada vértice de \mathcal{S} e \mathcal{L} . De fato, por meio do mesmo procedimento guloso descrito no Lema 3.2, temos que a probabilidade de que existe no máximo uma aresta entre

$v \in \mathcal{S}$ e \mathcal{L} é no máximo

$$\begin{aligned}
& n^{x_i \epsilon} \cdot \sum_{j=1}^s \mathbb{P}(\text{Bin}(N_{\mathcal{L}} - j, q_i'') \leq 1) \\
&= n^{\frac{\epsilon}{3}} \cdot \sum_{j=1}^s (1 - q_i'')^{N_{\mathcal{L}} - j} + (N_{\mathcal{L}} - j) q_i^{*''} (1 - q_i'')^{N_{\mathcal{L}} - j - 1} \\
&\approx n^{x_i \epsilon} \cdot \sum_{j=1}^s e^{-q_i''(N_{\mathcal{L}} - j + 1)} (1 + (N_{\mathcal{L}} - j + 1) q_i'') \\
&\leq O(n^{1 - x_i(\epsilon + 2)}) \cdot n^{-x_i^*(1 + \epsilon) \cdot \frac{n - O(n^{1 - 2x_i})}{n}} \cdot \frac{1}{1 - 2q_i} \left(1 + (n - O(n^{1 - 2x_i})) \cdot \frac{x_i^*(1 + \epsilon) \log n}{n(1 - 2q_i)} \right) \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

Isso prova o item (a).

Para o item (b), dado $D \in \mathcal{L}$, denote por E_D o evento de que existem mais do que $|D|/2$ arestas entre D e \mathcal{S} então

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_D) &\leq \binom{|D||V(\mathcal{S})|}{|D|/2} \cdot q_i'^{|D|/2} \\
&\leq \left(\frac{2ex_i^*(1 + \epsilon) \log n}{n^{2x_i}} \cdot \frac{1}{1 - 2q_i} \right)^{|D|/2}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{D \in \mathcal{L}} E_D \right) \leq (3n^{1 - x_i(1 + \epsilon)}) \cdot \left(\frac{2ex_i^*(1 + \epsilon) \log n}{n^{2x_i}(1 - 2q_i)} \right)^{\frac{n^{x_i \epsilon}}{2}} = o(1).$$

□

Então conseguimos conectar todas as componentes pequenas a componentes grandes usando arestas do grupo verde. Após conectá-las, pelo menos metade dos vértices são insaturados. O próximo resultado garante que podemos conectar as componentes grandes a.q.c.

Lema 3.11. *Com probabilidade $1 - o(1)$, existe uma árvore T com conjunto de vértices $[\ell]$ satisfazendo a seguinte propriedade. Para toda aresta $e = \{i, j\}$, existem*

vértices insaturados $u_i^e \in D_i$ e $u_j^e \in D_j$ tais que $\{u_i^e, u_j^e\}$ é uma aresta do grupo verde no grafo aleatório colorido. Além disso, para todo $i \in [\ell]$, temos $u_i^e \neq u_i^{e'}$ sempre que e e e' são arestas distintas da árvore.

Esboço da prova. Fazemos uma busca em largura no grafo \mathcal{G}_{n,q_i} de maneira idêntica a prova do Lema 3.3:

Comece com uma componente grande arbitrária e marque todos os vértices insaturados nesta componente como descobertos e não-explorados. Dizemos que estes vértices estão no nível 1. Em geral, o nível i é composto por todos os vértices insaturados que pertencem a componentes para as quais existe um vértice v que está ligado a um vértice do nível $i - 1$. Em um passo arbitrário, selecione um vértice descoberto e não-explorado v no menor nível i para o qual tal vértice existe e explore-o do seguinte modo. Para cada componente não-descoberta D_j , revele as adjacências entre v e os vértices insaturados de D_j para decidir se existe uma aresta verde entre v e D_j . Se essa aresta existe, marque o extremo desta aresta, $N(v)$, como saturado e marque todos os vértices insaturados de D_j como descobertos e não-explorados, e adicione-os ao nível $i + 1$. Depois disso, marque v como explorado e proceda para o próximo passo.

O processo de revelar arestas termina se

- (i) o número de vértices descobertos e não-explorados é αn , para algum $\alpha > 0$; ou
- (ii) o número de níveis excede $1/x_i \epsilon$; ou
- (iii) o conjunto de vértices descobertos e não-explorados está vazio.

Demonstramos que o processo conecta as componentes grandes de modo análogo a prova do Lema 3.3. □

4 EMPARELHAMENTO MÁXIMO

Uma propriedade que já foi estudada por vários autores é a cardinalidade de um emparelhamento máximo em um grafo G , isto é, o número $\nu(G)$. Erdős e Rényi [27] provaram que a condição necessária de que todo vértice tenha grau pelo menos 1 é também a condição suficiente para a existência de um emparelhamento perfeito em um grafo aleatório com um número par de vértices. Mais especificamente, eles provaram que para $p = \frac{\log n + c(n)}{n}$, com $c(n) \rightarrow \infty$, tem-se que $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ a.q.c. contém um emparelhamento perfeito. Bollobás e Frieze [14] mostraram que, o grafo aleatório com $\frac{1}{4}n \log n + \frac{1}{2}n \log \log n + c(n)$ arestas condicionado ao evento de que seu grau mínimo é 1, contém a.q.c. um emparelhamento perfeito. Bollobás e Thomason [15] garantem a existência de um emparelhamento que satura todos os vértices de grau 1, com exceção de no máximo um vértice, para $p = \frac{\log n + 2 \log \log n + \omega(n)}{2n}$ onde $\omega(n) \rightarrow \infty$. Eles mostraram que a condição necessária de que o grafo não contenha cerejas é também a condição suficiente para o que o grafo contenha um emparelhamento que satura todos os vértices de grau 1 com exceção de no máximo um vértice a.q.c.

Vários autores estudaram a cardinalidade de um emparelhamento máximo no grafo aleatório $\mathcal{G}_{n,c/n}$. Define-se uma função $m(c)$ tal que se $c > 0$ e $p = c/n$, então quase todo $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ é tal que o número máximo de arestas independentes em G é $(m(c) + o(1))n$. Não se conhece uma fórmula para $m(c)$, mas para valores grandes de c temos cotas mais precisas. Como $\mathcal{G}_{n,c/n}$ tem aproximadamente $e^{-c}n$ vértices isolados temos $m(c) \leq (1 - e^{-c})/2$. Em 1986, Frieze [36] provou que $\mathcal{G}_{n,c/n}$ contém um emparelhamento de tamanho $\frac{1}{2}(1 - (1 + \varepsilon(c))e^{-c})n$ onde $\varepsilon(c) \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow \infty$.

Os resultados mencionados se referem a provas existenciais, mas existem também algoritmos que encontram emparelhamentos grandes com probabili-

dade alta. Angluin e Valiant [5] apresentaram um algoritmo que encontra emparelhamentos perfeitos em $\mathcal{G}_{n, c \frac{\log n}{n}}$ com probabilidade $1 - O(n^{-2})$, onde n é par e c é uma constante suficientemente grande. Karp e Sipser [51] apresentaram algoritmos para encontrar emparelhamentos no grafo aleatório esparsa $\mathcal{G}_{n, c/n}$; esses algoritmos encontram $(m(c) + o(1))n$ arestas independentes com probabilidade tendendo a 1. Anos depois, Aronson, Frieze e Pittel [7] melhoraram os resultados apresentados em [51].

O resultado de Frieze [36] garante que para $c = \frac{1+\epsilon}{3} \log n$ temos $\nu(G) \geq \frac{1}{2}(1 - (1 + \epsilon(c))n^{-\frac{1+\epsilon}{3}})n$ para $G \in \mathcal{G}_{n, c/n}$. Em outras palavras, ele mostrou que $\left| \nu(G) - \frac{1}{2} \left(n - n^{\frac{2-\epsilon}{3}} \right) \right| = o(n^{\frac{2-\epsilon}{3}})$. Embora tal cota seja suficiente para a demonstração do Teorema 1.1, investigamos esse problema com maior profundidade e obtivemos um resultado mais preciso.

4.1 Demonstração do Lema 1.2

Nosso objetivo nesta seção é provar o Lema 1.2.

Lema 1.2. *Seja $q(n) = (1+\epsilon) \log n / 3n$. Dado $G \in \mathcal{G}_{n, q}$ sejam os seguintes conjuntos*

$$V_0 = \{v \in V(G) : d(v) = 0\} \text{ e}$$

$$V_c = \{v \in V(G) : d(v) = 1 \text{ e } v \text{ pertence a uma cereja}\}.$$

Considere o grafo $H = G - V_0 - V_c$, então a.q.c. existe um emparelhamento que incide em todos os vértices de H com exceção de no máximo um vértice.

Claramente, nenhum vértice isolado será coberto por um emparelhamento; além disso, nenhum emparelhamento pode conter duas arestas de uma cereja. Seja H o subgrafo de G obtido pela remoção dos vértices isolados e de todos os vértice de grau 1 que pertencem a cerejas. Note que H contém pelo menos

$n - n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - n^{\frac{2-\epsilon}{6}} \log n + O(n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log^2 n)$ vértices pelos Lemas 2.6 e 2.7. Mais ainda, H não contém vértices isolados ou cerejas devido ao Lema 2.9, que garante que a.q.c. nenhum vértice é incidente a três ou mais vértices de grau 1, e ao Lema 2.8, que garante que a.q.c. nenhum vértice de grau no máximo três é incidente ao vértice central de uma cereja. Mostraremos que H a.q.c. contém um emparelhamento que cobre todos, exceto no máximo um vértice. Antes de demonstrar esse resultado formalmente, vamos descrever a estrutura da prova.

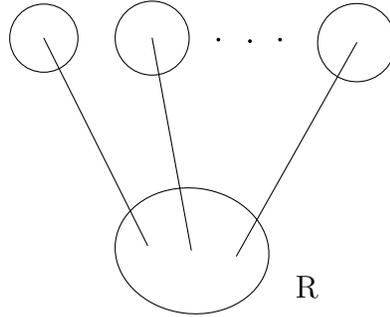
A prova deste resultado é baseada na prova de Erdős e Rényi [27] para a existência para um emparelhamento perfeito em um grafo aleatório conexo com um número par de vértices, e na prova de Bollobás e Thomason [20] para a existência de um emparelhamento incidente a todos os vértices não-isolados, com exceção de no máximo um vértice não-isolado, no grafo aleatório $\mathcal{G}_{n,p}$ tal que $p = \frac{\log n + 2 \log \log n + \omega(n)}{2n}$ onde $\omega(n) \rightarrow \infty$.

A prova usa basicamente a conhecida extensão do Teorema de Tutte [62] devida a Berge [13]. Uma componente de um grafo é dita ser *ímpar* se ela tem um número ímpar de vértices. Se $q(H)$ é o número de componentes ímpares de um grafo H , o Teorema de Tutte implica que nenhum emparelhamento cobre todos os vértices exceto no máximo um vértice de H se, e somente se, existe um conjunto $R \subset V(H)$ tal que

$$q(H - R) \geq |R| + 2. \quad (4.1)$$

Para provar nosso resultado, mostramos que não existe tal conjunto R em H a.q.c.

Como é muito difícil controlar a paridade das componentes em um grafo aleatório, seja B_r o evento de que existe um conjunto minimal $R \subset V(H)$ tal que, $|R| = r$ e $H - R$ tem pelo menos $r + 2$ componentes que estão ligadas a R e cada uma é um vértice isolado ou tem pelo menos três vértices.

Figura 4.1: evento B_r

Claramente, se provarmos que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=0}^{n/2} B_r \right) = o(1),$$

temos o desejado. Observe que, como a remoção do conjunto R produz pelo menos $r + 2$ componentes, existe um conjunto independente de $r + 2$ vértices em H .

Descrevemos a estratégia de demonstração em passos. No passo 1, limitamos o número de possibilidades para a cardinalidade de R demonstrando que H a.q.c. não contém conjunto independente com $r_0 = \frac{6 \log \log n}{\log n} n$ vértices. Dessa forma, reduzimos nosso problema a mostrar que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=0}^{r_0} B_r \right) = o(1). \quad (4.2)$$

Podemos escrever o evento B_r de outra maneira: seja $B(r, s)$ o evento de que B_r seja válido e a união das $r + 1$ componentes menores de $H - R$, que denotamos por S , tenha s vértices. Veja Figura 4.2.

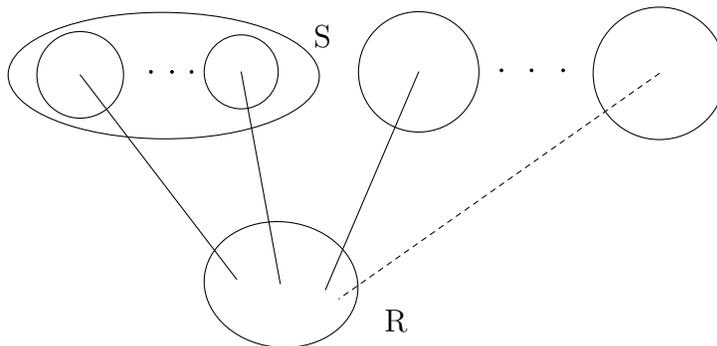


Figura 4.2: evento $B(r, s)$

Reescrevendo (4.2) nesse contexto, queremos provar que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=0}^{r_0} \bigcup_{s=r+1}^n B(r, s) \right) = o(1).$$

O passo 2 consiste em analisar o caso $s > r_0$ separadamente, e reduzir a demonstração a

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=0}^{r_0} \bigcup_{s=r+1}^{r_0} B(r, s) \right) = o(1).$$

Depois disso, mostramos que para valores de S maiores do que $s_0 = n^{2/3}$, tal probabilidade é pequena. Então podemos substituir o limitante superior da união por s_0 , ou seja, precisamos mostrar que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=0}^{s_0} \bigcup_{s=r+1}^{s_0} B(r, s) \right) = o(1).$$

Finalmente no passo 3, definimos dois eventos, C_a e $C(t, u, w)$, cuja união contém os eventos $B(r, s)$ acima.

O evento C_a ($a \geq 1$) considera o caso em que $V(H)$ contém conjuntos, dois a dois disjuntos, T, T', A e D , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $0 \leq |T| = t \leq s_0 - a$, $|A| = a$, $3 \leq |D| = d \leq s_0$;
- (ii) D induz uma componente de $H - T \cup A$;
- (iii) cada vértice de $T \cup A$ é ligado por uma aresta a algum vértice de D ;

(iv) para cada $x \in T$, existe um vértice y que é isolado em $H - T \cup A$ e é adjacente a x . O conjunto T' é o conjunto dos vértices isolados em $H - T \cup A$, onde $|T'| = t$, com a propriedade de que existe um emparelhamento perfeito entre T e T' .

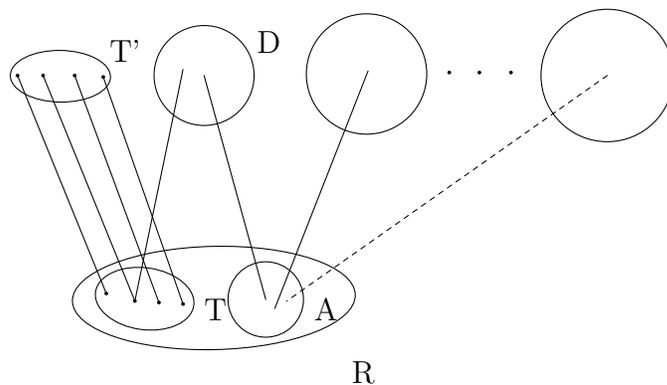


Figura 4.3: evento C_a

Para definir o segundo evento, seja $a_0 \geq 6$ e fixe $t \geq 0, u \geq a_0$ e $w \geq 3(u + 1)$. Considere o evento $C(t, u, w)$ definido para $r = t + u$ e $s = t + w$ tal que:

- (i) o evento B_r vale para $R = T \cup U$ e $S = T' \cup W$, onde $|T| = |T'| = t, |U| = u$ e $|W| = w$;
- (ii) o conjunto T' consiste de vértices isolados em $H - T \cup U$;
- (iii) H contém um emparelhamento entre T e T' ;
- (iv) cada vértice em T é adjacente a pelo menos um vértice em W ;
- (v) W consiste de $u + 1$ componentes de $H - T \cup U$ e cada uma dessas componentes é ligada à U por pelo menos a_0 arestas.

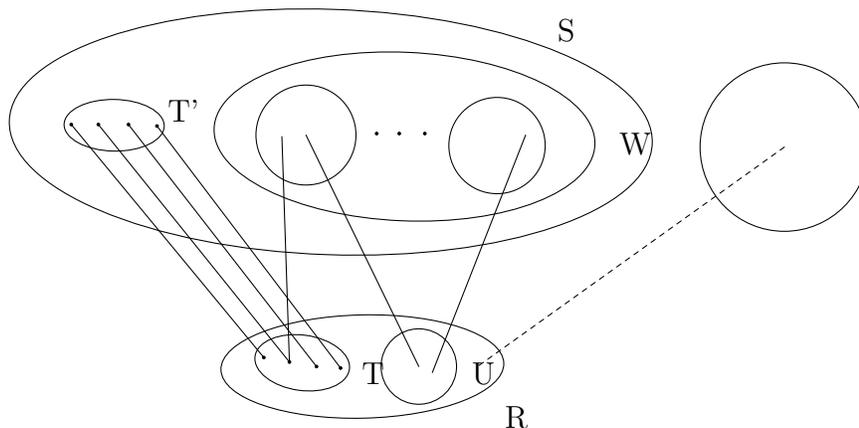


Figura 4.4: evento $C(t, u, w)$

Observe que, se $B(r, s)$ é válido temos que existe um conjunto R tal que $H - R$ tem pelo menos $r + 2$ componentes e a união das $r + 1$ menores formam um conjunto S que pode ser da seguinte forma. O conjunto S em $H - R$ é formado por vértices isolados (podendo ser zero vértices isolados) e componentes de tamanho maior ou igual a 3. Temos que o conjunto R que determina S deve conter um conjunto de vértices que é emparelhado em H com os vértices de S , que são isolados em $H - R$, e os vértices remanescentes de R devem estar conectados a componentes de tamanho maior ou igual a 3. Quando o número desses vértices remanescentes é no máximo a_0 temos o evento C_a e quando esse número é pelo menos a_0 temos o evento $C(t, u, w)$.

$$\bigcup_{r=1}^{s_0} \bigcup_{s=r+1}^{s_0} B(r, s) \subset \bigcup_{a=0}^{a_0} C_a \cup \bigcup_{t=0}^{s_0} \bigcup_{u=a_0}^{s_0} \bigcup_{w=3u+3}^{s_0} C(t, u, w).$$

Os passos 1, 2 e 3 consistem em provar que a probabilidade de algum desses eventos ocorrer é $o(1)$.

No restante dessa seção, demonstraremos o Teorema ?? seguindo a estratégia descrita até agora.

4.1.1 Demonstração do Passo 1

Lema 4.1. *Seja A_1 o evento de que G não tem um conjunto independente de tamanho $r_0 = \frac{6 \log \log n}{\log n} n$. Então A_1 ocorre com probabilidade $1 - o(1)$.*

Demonstração. A probabilidade de que G contém um conjunto independente de tamanho r_0 é no máximo

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r_0} (1-p)^{\binom{r_0}{2}} &= \binom{n}{r_0} \cdot e^{-\frac{(1+\epsilon) \log n}{3n} \binom{r_0}{2}} \\
&\leq \left(\frac{en}{r_0}\right)^{r_0} e^{-\frac{(1+\epsilon) \log n}{3n} \frac{r_0(r_0-1)}{2}} \\
&= e^{r_0} \cdot e^{r_0 \left(\log n - \frac{(r_0-1)(1+\epsilon) \log n}{6n} - \log r_0 \right)}. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Note que (4.3) tende a zero pois

$$\begin{aligned}
&\log n - \frac{(r_0-1)(1+\epsilon) \log n}{6n} - \log r_0 = \log n + \frac{(1+\epsilon) \log n}{6n} - r_0 \frac{(1+\epsilon) \log n}{6n} - \log r_0 \\
&= \log n + \frac{(1+\epsilon) \log n}{6n} - \frac{6 \log \log n}{\log n} n \frac{(1+\epsilon) \log n}{6n} - \log \left(\frac{6 \log \log n}{\log n} n \right) \\
&= \frac{(1+\epsilon) \log n}{6n} - (1+\epsilon) \log \log n - \log(6 \log \log n) + \log \log n \\
&= \frac{(1+\epsilon) \log n}{6n} - \epsilon \log \log n - \log(6 \log \log n) < -1.
\end{aligned}$$

Portanto, A_1 ocorre com probabilidade $1 - o(1)$. \square

Lema 4.2. *Seja A_2 o evento de que o complemento \bar{G} de G não contém K_{r_0, r_0} como subgrafo. Então A_2 ocorre com probabilidade $1 - o(1)$.*

Demonstração. A probabilidade de que \bar{G} contém alguma cópia de K_{r_0, r_0} é no máximo

$$\binom{n}{r_0}^2 (1-p)^{r_0^2} < \left(\frac{en}{r_0}\right)^{2r_0} e^{-pr_0^2}. \tag{4.4}$$

Note que

$$\frac{pr_0}{2} = (1 + \epsilon) \log \log n,$$

então

$$e^{\frac{pr_0}{2}} = (1 + \epsilon) \log n \geq 2 \frac{en}{r_0}.$$

Assim,

$$\left[\left(\frac{en}{r_0} \right)^2 e^{-pr_0} \right]^{r_0} \leq \left[\left(\frac{e^{\frac{pr_0}{2}}}{2} \right)^2 e^{-pr_0} \right]^{r_0} < 2^{-2r_0} = o(1),$$

consequentemente, $\mathbb{P}(A_2) = 1 - o(1)$. □

Lembre que H é o subgrafo de G obtido pela remoção dos vértices isolados e de todos os vértice de grau 1 que pertencem a cerejas. Como $H \subseteq G$, os eventos A_1 e A_2 também vale para H . Denote $|V(H)| = n'$ tal que

$$n - n^{\frac{2-\epsilon}{3}} - n^{\frac{2-\epsilon}{6}} \log n + O\left(n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log^2 n\right) \leq n' \leq n - n^{\frac{2-\epsilon}{3}} + n^{\frac{2-\epsilon}{6}} \log n + O\left(n^{\frac{1-2\epsilon}{3}} \log^2 n\right).$$

Nos cálculos utilizaremos $n' = n - O\left(n^{\frac{2-\epsilon}{3}}\right)$.

Para $r = 0, 1, \dots$ denote por B_r o evento de que existe um conjunto minimal $R \subset V(H)$ tal que $|R| = r$, e $H - R$ tem pelo menos $r + 2$ componentes que são ligadas à R e cada uma delas é um vértice isolado ou tem pelo menos três vértices.

Se $r = 0$ temos o grafo H . Erdős e Rényi [26] provaram o seguinte resultado.

Lema 4.3 ([26]). *Para quase todo $G \in \mathcal{G}_{n,m}$ com $m(n) = \frac{n \log n}{2k} + \frac{k-1}{2k} n \log \log n + yn + o(n)$, temos que existem somente árvores de ordem menor ou igual a k fora da componente gigante.*

Pelo resultado acima, como o número esperado de arestas em $\mathcal{G}_{n,q}$ é

$$\frac{(1 + \epsilon)n \log n}{6} \gg \frac{n \log n}{6} + \frac{2}{6} n \log \log n + yn + o(n),$$

temos que a.q.c. as componentes de G são: uma componente gigante, arestas e vértices isolados. Logo, removendo os vértices isolados e os vértices de grau 1 que percentem a cerejas, segue que a.q.c. B_0 não é válido. Portanto, podemos analisar o evento para $r = 1, 2, \dots$

Seja $B(r, s)$ o evento de que B_r vale e a união das $r + 1$ componentes menores na definição acima, denotada por S , tem s elementos. Note que, se $s \leq r$, então $B(r, s) = \emptyset$.

Queremos provar que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=1}^{n'/2} B_r \right) = o(1). \quad (4.5)$$

Se B_r vale, então H contém um conjunto de $r+2$ vértices independentes (basta escolher um vértice de cada componente de $H - R$). Consequentemente,

$$\bigcup_{r=r_0}^{n'/2} B_r \subset A_1. \quad (4.6)$$

Portanto, para mostrar que (4.5) é verdade, basta mostrar que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=1}^{r_0} B_r \right) = o(1). \quad (4.7)$$

4.1.2 Demonstração do Passo 2

Lema 4.4. *Seja A_3 o evento de que não existe conjunto $R \subset V(H)$ tal que $1 \leq |R| \leq r_0$, $H - R$ tem pelo menos duas componentes, e a união de todas exceto uma das maiores componentes de $H - R$ tem pelo menos r_0 vértices. Então A_3 é verdadeiro com probabilidade $1 - o(1)$.*

Demonstração. Para provar o resultado, mostraremos que $A_2 \subset A_3$.

Suponha que $H - R$ tem x componentes de ordens $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_x$ e assumamos que $\sum_{i=1}^{x-1} a_i \geq r_0$. Seja j o menor índice tal que $\sum_{i=1}^j a_i \geq r_0$. Então

$$s_1 = \sum_{i=1}^j a_i \leq r_0 + a_j < r_0 + \frac{n' - r_0}{2} = \frac{n' + r_0}{2},$$

e

$$s_2 = \sum_{i=j+1}^x a_i \geq n' - r_0 - \frac{n' + r_0}{2} \geq r_0.$$

Como nenhuma aresta conecta uma das primeiras j componentes às demais, \bar{H} contém uma cópia de

$$K_{s_1, s_2} \supset K_{r_0, r_0}.$$

Portanto, se A_2 não é válido, então A_3 também não é, logo $A_2 \subset A_3$. \square

Note que

$$\bigcup_{r=1}^{r_0} B_r = \bigcup_{r=1}^{r_0} \bigcup_{s=r+1}^{n'} B(r, s)$$

e

$$\left(\bigcup_{r=1}^{r_0} \bigcup_{s=r_0}^{n'} B(r, s) \right) \cap A_3 = \emptyset.$$

Pelo Lema 4.4, a equação (4.7) será válida se provarmos que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=1}^{r_0} \bigcup_{s=r+1}^{r_0} B(r, s) \right) = o(1). \quad (4.8)$$

Nosso próximo objetivo é substituir r_0 por $s_0 = n^{2/3} \ll r_0$ nas uniões acima, para obter uma união menor que $\bigcup_{s=r+1}^{r_0} B(r, s)$.

Lema 4.5. *Seja $s_0 = n^{2/3}$. A equação (4.8) será válida se*

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{r=1}^{s_0} \bigcup_{s=r+1}^{s_0} B(r, s) \right) = o(1). \quad (4.9)$$

Demonstração. Queremos provar que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{r_0} \bigcup_{s=s_1}^{r_0} B(r, s)\right) = o(1), \quad (4.10)$$

onde $s_1 = \max\{r + 1, s_0\}$.

Para isso, seja R novamente um conjunto minimal de tamanho r tal que $H - R$ contém pelo menos $r + 2$ componentes, e seja S a união das $r + 1$ componentes menores de $H - R$, onde $|S| = s$. Existem $\binom{n'}{r} \binom{n'-r}{s}$ maneiras de escolher os conjuntos R e S . A minimalidade de R implica que as arestas entre R e S , e as arestas ligando vértices de S formam um subgrafo conexo G . De fato, se esse não fosse o caso, esse subgrafo G teria pelo menos duas componentes, sendo uma delas X e denote $Y = G - X$. Temos que, o subgrafo induzido pela componente X é formado por vértices R e componentes de S , escrevemos $X = R_X \cup S_X$. E como $Y = G - X$, temos $Y = R_Y \cup S_Y$. Como $|S| = |R| + 1$, segue que $|S_X| \geq |R_X| + 1$ ou $|S_Y| \geq |R_Y| + 1$. Sendo assim, existe um conjunto R' (R_X ou R_Y) menor que R tal que $H - R'$ contém pelo menos $r' + 2$ componentes, contrariando a minimalidade de R . Consequentemente, existem pelo menos $2r$ arestas de R a S . Além disso, por definição nenhum vértice em S é ligado a um vértice fora de $R \cup S$. Logo, como $1 \leq r < s \leq r_0$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B(r, s)) &\leq \binom{n'}{r} \binom{n'-r}{s} \binom{rs}{2r} p^{2r} (1-p)^{s(n'-r-s)} \\ &\leq \left(\frac{en}{r}\right)^r \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{eps}{2}\right)^{2r} e^{-psn'_0} =: b(r, s), \end{aligned}$$

onde $n'_0 = n' - 2r_0$.

Pela definição de p e n'_0

$$\begin{aligned} e^{-pn'_0} &= e^{-\frac{(1+\epsilon)\log n}{3n} \left(n - O(n^{(2-\epsilon)/3}) - 12 \frac{n \log \log n}{\log n}\right)} \\ &= e^{-\frac{(1+\epsilon)\log n}{3}} e^{\frac{(1+\epsilon)\log n}{3n} O(n^{(2-\epsilon)/3})} e^{(1+\epsilon)4 \log \log n} \\ &= n^{-\frac{(1+\epsilon)}{3}} (\log n)^{4(1+\epsilon)} \delta(n), \end{aligned}$$

onde $\delta(n) \rightarrow 1$.

Consequentemente, como $s_0 \leq s \leq r_0$ e $r \leq s$, usando que $\left(\frac{s+1}{s}\right)^r \leq e$ e que $\left(\frac{s}{s+1}\right)^s \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{b(r, s+1)}{b(r, s)} &= \frac{\left(\frac{en}{r}\right)^r \left(\frac{en}{s+1}\right)^{s+1} \left(\frac{ep(s+1)}{2}\right)^{2r} e^{-p(s+1)n'_0}}{\left(\frac{en}{r}\right)^r \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{eps}{2}\right)^{2r} e^{-psn'_0}} \\
&= \left(\frac{en}{s+1} \cdot \frac{s}{en}\right)^s \frac{en}{s+1} e^{-pn'_0} \left(\left(\frac{s+1}{s}\right)^r\right)^2 \\
&\leq \frac{e^3}{s_0} \cdot n^{\frac{2-\epsilon}{3}} (\log n)^{4(1+\epsilon)} \cdot \delta(n) \\
&= \frac{e^3 (\log n)^{4(1+\epsilon)}}{n^\epsilon} \cdot \delta(n) < \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

Para $s_1 = \max\{r, s_0\}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{s=s_1}^{r_0} b(r, s) &\leq b(r, s_1) + \frac{1}{2}b(r, s_1) + \frac{1}{4}b(r, s_1) + \dots \\
&\leq 2b(r, s_1),
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{r_0} \sum_{s=s_1}^{r_0} b(r, s) &= \sum_{r=1}^{s_0} \sum_{s=s_1}^{r_0} b(r, s) + \sum_{r=s_0}^{r_0} \sum_{s=s_1}^{r_0} b(r, s) \\
&\leq 2 \sum_{r=1}^{s_0} b(r, s_0) + 2 \sum_{r=s_0}^{r_0} b(r, r).
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{s_0} b(r, s_0) &= \sum_{r=1}^{s_0} \left(\frac{en}{r}\right)^r \left(\frac{en}{s_0}\right)^{s_0} \left(\frac{eps_0}{2}\right)^{2r} e^{-ps_0n'_0} \\
&= \sum_{r=1}^{s_0} \frac{e^{3r+s_0} (1+\epsilon)^{2r}}{2^{2r} 3^{2r} r^r} \cdot \frac{n^{\frac{2-\epsilon}{3} s_0 - r} s_0^{2r}}{s_0^{s_0}} (\log n)^{2r+4(1+\epsilon)s_0} \\
&\leq \sum_{r=1}^{s_0} \left(\frac{e^3(1+\epsilon)^2}{36}\right)^r \cdot e^{s_0} \cdot \frac{n^{\frac{r}{3} - \frac{\epsilon}{3}s_0}}{r^r} (\log n)^{6s_0+4\epsilon s_0} \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

Para ver que a soma acima tende a zero, observe que o termo $\frac{n^{\frac{r}{3}-\frac{\epsilon}{3}s_0}}{r^r}$ controla a convergência de toda a expressão. Quando $r = o(s_0)$ temos $\frac{n^{\frac{r}{3}-\frac{\epsilon}{3}s_0}}{r^r} \leq n^{-\frac{\epsilon}{3}s_0}$ para n grande. Quando $r = \Omega(s_0)$, temos $\frac{n^{\frac{r}{3}-\frac{\epsilon}{3}s_0}}{r^r} = O(n^{-\Omega(s_0)})$. Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{r=s_0}^{r_0} b(r, r) &= \sum_{r=s_0}^{r_0} e^{4r} \left(\frac{pn}{2}\right)^{2r} e^{-prn'_0} \\ &\leq \sum_{r=s_0}^{r_0} \left[e^4 \left(\frac{(1+\epsilon)\log n}{6}\right)^2 n^{-\frac{1+\epsilon}{3}} (\log n)^{4(1+\epsilon)} \delta(n) \right]^r \\ &= o(1), \end{aligned}$$

o que conduz a (4.10). Consequentemente, temos que, se (4.9) é verdadeira, então (4.8) também é verdadeira. □

4.1.3 Demonstração do Passo 3

Dado um inteiro $a \geq 1$, seja C_a o evento de que $V(H)$ contém os seguintes conjuntos, dois a dois disjuntos, T, T', A e D satisfazendo as propriedades: (i) $0 \leq |T| = t \leq s_0 - a$, $|A| = a$, $3 \leq |D| = d \leq s_0$; (ii) D gera uma componente de $H - T \cup A$; (iii) cada vértice de $T \cup A$ é ligado por uma aresta a algum vértice de D ; (iv) para cada $x \in T$, existe um vértice y que é isolado em $H - T \cup A$ e é adjacente a x . O conjunto T' consiste dos vértices isolados em $H - T \cup A$, onde $|T'| = t$, com a propriedade de que existe um emparelhamento perfeito entre T e T' .

Lema 4.6. $\mathbb{P}(C_a) = o(1)$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja a um inteiro positivo. Podemos escolher os conjuntos T, T', A e D em no máximo $\binom{n'}{t}^2 \binom{n'}{a} \binom{n'}{d}$ maneiras, e escolhemos um emparelhamento entre T e T' de $t!$ maneiras. Esse emparelhamento existe com probabilidade p^t e os vértices de T' são vértices isolados em $H - T \cup A$ com probabilidade $(1-p)^{t(n'-t-a)-\binom{t}{2}} \leq (1-p)^{t(n'-2s_0)}$. A probabilidade de que o conjunto D gera um subgrafo conexo é no

máximo

$$\binom{\binom{d}{2}}{d-1} p^{d-1} \leq \left(\frac{edp}{2}\right)^{d-1}.$$

Além disso, a probabilidade de que todos os vértices de $T \cup A$ são ligados por uma aresta a algum vértice em D é no máximo $(dp)^{t+a}$. Finalmente, não existe aresta entre D e $H - T \cup A - D$ com probabilidade $(1-p)^{d(n'-t-a-d)} \leq (1-p)^{d(n'-2s_0)}$.

Denote por $n''_0 = n' - 2s_0$, então

$$\begin{aligned} e^{-pn''_0} &= e^{-\frac{(1+\epsilon)\log n}{3n}(n-O(n^{(2-\epsilon)/3})-2n^{2/3})} \\ &= e^{-\frac{(1+\epsilon)\log n}{3}} e^{\frac{(1+\epsilon)\log n}{3n}(O(n^{(2-\epsilon)/3})+2n^{2/3})} \\ &= n^{-\frac{(1+\epsilon)}{3}} \delta'(n), \end{aligned}$$

onde $\delta'(n) \rightarrow 1$.

Assim, a probabilidade de que H contém alguma destas 4-uplas (T, T', A, D) é no máximo

$$\begin{aligned} &\binom{n'}{t}^2 \binom{n'}{a} \binom{n'}{d} t! p^t (1-p)^{tn''_0} \left(\frac{epd}{2}\right)^{d-1} (dp)^{t+a} (1-p)^{dn''_0} \\ &\leq \left(\frac{en}{t}\right)^{2t} \left(\frac{en}{a}\right)^a \left(\frac{en}{d}\right)^d t! p^t \left(\frac{epd}{2}\right)^{d-1} (dp)^{t+a} e^{-p(d+t)n''_0} \\ &\leq \frac{e^{2t+a+2d-1} (1+\epsilon)^{2t+a+d-1} n^{2t+a+d} t! d^{d+t+a-1} (\log n)^{2t+a+d-1}}{2^{d-1} 3^{2t+d+a-1} t^{2t} a^a d^d n^{2t+a+d-1} n^{\frac{1+\epsilon}{3}(t+d)}} \delta'(n)^{t+d} \\ &\leq \frac{e^d}{2^{d-1}} \left(\frac{e(1+\epsilon)}{3}\right)^{2t+a+d-1} \frac{d^{t+a-1} n (\log n)^{2t+a+d-1}}{t^t a^a n^{\frac{1+\epsilon}{3}(t+d)}} \delta'(n)^{t+d} \\ &=: c(d, t). \end{aligned}$$

Agora, assumindo que $d \leq t$, temos

$$\begin{aligned} \frac{c(d, t+1)}{c(d, t)} &\leq \left(\frac{1+\epsilon}{3}\right)^2 \frac{de^2}{t+1} (\log n)^2 n^{-(1+\epsilon)/3} \delta'(n) \\ &< \left(\frac{1+\epsilon}{3}\right)^2 e^2 \delta'(n) \frac{(\log n)^2}{n^{(1+\epsilon)/3}} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $t \leq d$, temos

$$\begin{aligned} \frac{c(d+1, t)}{c(d, t)} &\leq \frac{e^2(1+\epsilon)}{6} \left(\frac{d+1}{d}\right)^{t+a} \log n \cdot n^{-(1+\epsilon)/3} \delta'(n) \\ &< \frac{e^2(1+\epsilon)}{6} e^{2a} \delta'(n) \frac{\log n}{n^{(1+\epsilon)/3}} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{d=3}^{s_0} \sum_{t=0}^{s_0-a} c(d, t) = \sum_{d=3}^{s_0} \sum_{t=0}^2 c(d, t) + \sum_{d=3}^{s_0} \sum_{t=3}^{s_0-a} c(d, t),$$

e

$$\sum_{d=3}^{s_0} \sum_{t=3}^{s_0-a} c(d, t) < \sum_{d=3}^{s_0} \sum_{t=3}^{s_0} c(d, t) < \sum_{d=3}^{s_0} \sum_{t=d}^{s_0} c(d, t) + \sum_{t=3}^{s_0} \sum_{d=t}^{s_0} c(d, t).$$

Para $d \leq t$, temos

$$\sum_{t=d}^{s_0} c(d, t) < c(d, d) + \frac{1}{2}c(d, d) + \cdots \leq 2c(d, d),$$

enquanto que, para $t \leq d$, temos

$$\sum_{d=t}^{s_0} c(d, t) < c(t, t) + \frac{1}{2}c(t, t) + \cdots \leq 2c(t, t).$$

Temos também que

$$\sum_{d=3}^{s_0} c(d, t) < c(3, t) + \frac{1}{2}c(3, t) + \cdots \leq 2c(3, t).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{d=3}^{s_0} \sum_{t=0}^{s_0-a} c(d, t) &\leq 4 \sum_{d=3}^{s_0} c(d, d) + 2 \sum_{t=0}^2 c(3, t) \\ &\leq 8 \sum_{d=3}^{s_0} \left(\frac{e}{2}\right)^d \left(\frac{e(1+\epsilon)}{3}\right)^{3d+a-1} \frac{d^{a-1}}{a^a} (\log n)^{3d+a-1} n^{1-2(1+\epsilon)d/3} \\ &\quad + 2 \sum_{t=0}^2 \frac{e^3}{4} \left(\frac{e(1+\epsilon)}{2}\right)^{2t+a+2} \frac{3^{t+a-1}}{t^t a^a} (\log n)^{2t+a+2} \cdot n^{1-(1+\epsilon)(t+3)/3}. \end{aligned}$$

É fácil ver que o segundo somatório na expressão acima é $o(1)$. Para limitar o primeiro somatório, observe que

$$\frac{d^{a-1}}{a^a} (\log n)^{3d+a-1} n^{1-2(1+\epsilon)d/3} = \frac{n \cdot d^{a-1}}{n^{2d/3}} \cdot \frac{(\log n)^{3d+a-1}}{a^a n^{2\epsilon d/3}}.$$

Claramente, $\frac{(\log n)^{3d+a-1}}{a^a n^{2\epsilon d/3}} = o(1)$ e para $d \geq 3$ temos $\frac{n \cdot d^{a-1}}{n^{2d/3}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Como o número de termos no somatório é $s_0 = n^{\frac{2}{3}}$, o primeiro somatório também é $o(1)$, e $\mathbb{P}(C_a) = o(1)$. \square

Finalmente, chegamos na última parte da demonstração do Teorema ???. Lembre, ainda precisamos mostrar que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{s_0} \bigcup_{s=r+1}^{s_0} B(r, s)\right) = o(1)$.

Seja $a_0 \geq 6$ fixo. Dados $t \geq 0, u \geq a_0$ e $w \geq 3(u+1)$, considere o evento $C(t, u, w)$ definido para $r = t + u$ e $s = t + w$: (i) o evento B_r vale para $R = T \cup U$ e $S = T' \cup W$, onde $|T| = |T'| = t, |U| = u$ e $|W| = w$; (ii) o conjunto T' consiste de vértices isolados em $H - T \cup U$; (iii) H contém um emparelhamento entre T e T' ; (iv) cada vértice em T é adjacente a pelo menos um vértice em W ; (v) W consiste de $u + 1$ componentes de $H - T \cup U$ e cada uma dessas componentes é ligada a U por pelo menos a_0 arestas.

Como nenhum vértice em H tem dois vizinhos de grau 1 e pela definição do evento C_a , temos

$$\bigcup_{r=1}^{s_0} \bigcup_{s=r+1}^{s_0} B(r, s) \subset \bigcup_{a=0}^{a_0} C_a \cup \bigcup_{t=0}^{s_0} \bigcup_{u=a_0}^{s_0} \bigcup_{w=3u+3}^{s_0} C(t, u, w).$$

Pelo Lema 4.6, sabemos que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{a=0}^{a_0} C_a\right) = o(1)$, logo o resultado segue se provarmos que

$$\sum_{t=0}^{s_0} \sum_{u=a_0}^{s_0} \sum_{w=3u+3}^{s_0} \mathbb{P}(C(t, u, w)) \leq \sum_{t=0}^{s_0} \sum_{u=a_0}^{s_0} \sum_{w=3a_0+3}^{s_0} \mathbb{P}(C(t, u, w)) = o(1), \quad (4.11)$$

Observe que $H[W]$ tem pelo menos $V(H[W]) - c(H[W]) = w - u - 1$ arestas, onde $c(H[W])$ denota o número de componentes de $H[W]$, e U e W são

ligadas por pelo menos $(u+1)a_0$ arestas. Note que $n' - r - t = n' - (t+u) - t \geq n' - 3s_0 \geq n' - 4s_0$ e $n' - r - w - t \geq n' - 4s_0$, pois $u, t, w \leq s_0$. Uma cota superior para $\mathbb{P}(C(t, u, w))$ é

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{u} \binom{n}{w} \binom{n}{t}^2 t! p^t (1-p)^{t(n'-r-t)} w^t p^t \binom{w}{w-u-1} p^{w-u-1} \binom{uw}{(u+1)a_0} p^{(u+1)a_0} (1-p)^{w(n'-t-w-r)} \\
& \leq \left(\frac{en}{t}\right)^t n^t p^{2t+w-u-1+(u+1)a_0} e^{-p(n'-4s_0)(t+w)} w^t \left(\frac{en}{u}\right)^u \left(\frac{en}{w}\right)^w \left(\frac{ew(w-1)/2}{w-u-1}\right)^{w-u-1} \left(\frac{euw}{(u+1)a_0}\right)^{(u+1)a_0} \\
& \leq e^{t+2w-1+(u+1)a_0} \frac{n^{u+w}}{u^u w^{u+1-t}} \frac{(np)^{2t}}{t^t} e^{-p(n'-4s_0)(t+w)} p^{w-u-1} \left(\frac{pw}{a_0}\right)^{(u+1)a_0} \\
& = c(t, u, w).
\end{aligned}$$

Para a segunda desigualdade, usamos que

$$\left(\frac{(w-1)/2}{w-u-1}\right)^{w-u-1} < \left(\frac{3}{4}\right)^{w-u-1} \leq 1,$$

pois

$$\frac{w-u-1}{w-1} = 1 - \frac{u}{w-1} \geq 1 - \frac{u}{3u+2} > 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

visto que $w \geq 3u+3$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{c(t, u+1, w)}{c(t, u, w)} & \leq e^{a_0 n} p^{-1} \left(\frac{pw}{a_0}\right)^{a_0} \frac{u^u}{w(u+1)^{u+1}} \\
& < \frac{e^{a_0 n}}{a_0^{a_0}} p^{a_0-1} w^{a_0-1} \\
& \leq \frac{e^{a_0 n}}{a_0^{a_0}} \left(\frac{(1+\epsilon) \log n}{3n}\right)^{a_0-1} s_0^{a_0-1} \\
& = \frac{e^{a_0} (1+\epsilon)^{a_0-1} (\log n)^{a_0-1}}{3^{a_0-1} a_0^{a_0}} \frac{1}{n^{\frac{a_0-4}{3}}} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
e^{-p(n'-4s_0)} & = e^{-\frac{(1+\epsilon) \log n}{3n} \cdot (n - O(n^{\frac{2-\epsilon}{3}})) - 4n\frac{2}{3}} \\
& = n^{-\frac{1+\epsilon}{3}} \cdot \delta''(n),
\end{aligned}$$

onde $\delta''(n) \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$.

Assim, para t e w fixos,

$$\begin{aligned}
\sum_{u=a_0}^{s_0} c(t, u, w) &\leq 2c(t, a_0, w) \\
&\leq 2e^{t+2w-1+(a_0+1)a_0} \frac{n^{a_0+w}}{a_0^{a_0} w^{a_0+1-t}} \frac{(np)^{2t}}{t^t} e^{-p(n'-4s_0)(t+w)} p^{w-a_0-1} \left(\frac{pw}{a_0}\right)^{(a_0+1)a_0} \\
&\leq 2 \frac{e^{t+2w-1+a_0^2+a_0}}{a_0^2+2a_0} n^{a_0+w+2t} p^{2t+w-1+a_0^2} e^{-p(n'-4s_0)(t+w)} \frac{w^{a_0^2-1+t}}{t^t} \\
&\leq 2 \frac{e^w}{a_0^2} \left(\frac{1+\epsilon}{3}\right)^t \frac{(\log n)^{2t+w+a_0^2-1}}{n^{-a_0-1+a_0^2+(1+\epsilon)(t+w)/3}} \left(\frac{w}{t}\right)^t w^{a_0^2-1} \delta''(n)^{t+w}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos

$$\frac{e^{t+w-1+a_0^2+a_0}}{a_0^{2a_0}} \left(\frac{1+\epsilon}{3}\right)^{t+w-1+a_0^2} = \frac{e^{a_0}}{a_0^{2a_0}} \left(\frac{(1+\epsilon)e}{3}\right)^{t+w-1+a_0^2} \leq \frac{e^{a_0}}{a_0^{2a_0}} < 1.$$

Quando analisamos (4.12), consideramos os casos $w \leq t$ e $t \leq w$ separadamente. Para $w \leq t$ temos

$$\begin{aligned}
2c(t, a_0, w) &\leq 2 \frac{e^t}{a_0^2} \left(\frac{1+\epsilon}{3}\right)^t \frac{(\log n)^{2t+w+a_0^2-1}}{n^{-a_0-1+a_0^2+(1+\epsilon)(t+w)/3}} \left(\frac{t}{t}\right)^t w^{a_0^2-1} \delta''(n)^{t+w} \\
&\leq 2 \frac{1}{a_0^2} \frac{(\log n)^{2t+w+a_0^2-1}}{n^{\epsilon(t+w)/3}} \frac{w^{a_0^2-1}}{n^{-a_0-1+a_0^2+(t+w)/3}} \delta''(n)^{t+w} \\
&\leq 2 \frac{1}{a_0^2} \frac{(\log n)^{2t+w+a_0^2-1}}{n^{\epsilon(t+w)/3}} \frac{1}{n^{14}} \delta''(n)^{t+w}, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

pois $w \leq s_0$, $t \geq a_0$, $w \geq 3a_0 + 3$ e $a_0 \geq 6$.

Para a última desigualdade, usamos que

$$\frac{w^{a_0^2-1}}{n^{-a_0-1+a_0^2+(t+w)/3}} \leq \frac{n^{\frac{2}{3}(a_0^2-1)}}{n^{-a_0-1+a_0^2+(t+w)/3}} = \frac{1}{n^{-a_0-\frac{1}{3}+(a_0^2+t+w)/3}}.$$

Além disso, $(a_0^2 + t + w)/3 - a_0 - 1 \geq (a_0^2 + a_0 + 3a_0 + 3)/3 - a_0 - 1 > 14$ (pois $a_0 \geq 6$), então

$$\frac{w^{a_0^2-1}}{n^{-a_0-1+a_0^2+(t+w)/3}} \leq n^{-14}.$$

Em particular, pela equação (4.13) temos que $2c(t, a_0, w) = o(n^{-\frac{4}{3}})$.

Analogamente, para $w \geq t$, temos

$$\begin{aligned}
2c(t, a_0, w) &\leq 2 \frac{e^w}{a_0^{a_0^2}} \left(\frac{1+\epsilon}{3t} \right)^t \frac{(\log n)^{2t+w+a_0^2-1}}{n^{-a_0-1+a_0^2+(1+\epsilon)(t+w)/3}} w^{t+a_0^2-1} \delta''(n)^{t+w} \\
&\leq 2 \frac{1}{a_0^{a_0^2}} \left(\frac{1+\epsilon}{3t} \right)^t \frac{e^w (\log n)^{2t+w+a_0^2-1}}{n^{\epsilon(t+w)/3}} \frac{w^{t+a_0^2-1}}{n^{-a_0-1+a_0^2+2t/3}} \delta''(n)^{t+w} \\
&\leq 2 \frac{1}{a_0^{a_0^2}} \left(\frac{1+\epsilon}{3t} \right)^t \frac{e^w (\log n)^{2t+w+a_0^2-1}}{n^{\epsilon(t+w)/3}} \frac{1}{n^{17/3}} \delta''(n)^{t+w}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

O último passo vem do fato de que

$$\frac{w^{t+a_0^2-1}}{n^{-a_0-1+a_0^2+2t/3}} \leq \frac{n^{\frac{2}{3}(t+a_0^2-1)}}{n^{-a_0-1+a_0^2+2t/3}} = \frac{1}{n^{-a_0+\frac{1}{3}(a_0^2-1)}} \leq n^{-17/3},$$

pois $-a_0+\frac{1}{3}(a_0^2-1) \geq \frac{17}{3}$. Como no caso anterior, provamos que $2c(t, a_0, w) = o(n^{-\frac{4}{3}})$.

Portanto,

$$\sum_{t=0}^{s_0} \sum_{u=a_0}^{s_0} \sum_{w=3a_0+3}^{s_0} c(t, u, w) \leq \sum_{t=0}^{s_0} \sum_{w=3a_0+3}^{s_0} 2c(t, a_0, w) = \sum_{t=0}^{s_0} \sum_{w=3a_0+3}^{s_0} o(n^{-\frac{4}{3}}) = o(1),$$

como queríamos.

4.2 Extensão do Lema 1.2

Provamos um resultado análogo ao Lema 1.2 para $q_i = x_i(1+\epsilon)\frac{\log n}{n}$.

Lema 4.7. *Seja $q_i = x_i(1+\epsilon)\log n/n$. Dado $G \in \mathcal{G}_{n,q_i}$ sejam os seguintes conjuntos*

$$V_0 = \{v \in V(G) : d(v) = 0\} \text{ e}$$

$$V_c = \{v \in V(G) : d(v) = 1 \text{ e } v \text{ pertence a uma cereja ou uma pinça}\}.$$

Considere o grafo $H = G - V_0 - V_c$, então a.q.c. existe um emparelhamento que incide em todos os vértices de H com exceção de no máximo um vértice.

Temos que o número esperado de vértices isolados em \mathcal{G}_{n,q_i} é

$$n \cdot (1 - q_i)^{n-1} \approx n \cdot n^{-x_i(1+\epsilon)} = n^{1-x_i(1+\epsilon)},$$

o número esperado de cerejas é

$$\binom{n}{2} (n-2) q_i^2 (1-q_i)^{2n-5} \approx (x_i)^2 \frac{(1+\epsilon)^2}{2} n^{1-2x_i(1+\epsilon)} (\log n)^2.$$

Neste caso o número esperado de pinças não tende a zero,

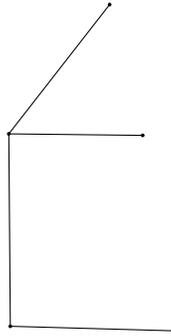
$$\binom{n}{3} (n-3) q_i^3 (1-q_i)^{3n-9} \approx (x_i(1+\epsilon) \log n)^3 \frac{n^{1-3x_i(1+\epsilon)}}{6}.$$

Neste caso precisamos analisar outra configuração chamada de *garra*: dizemos que um conjunto $\rho = \{\{x, y, z, w\}, v\}$ induz uma garra se x, y, z, w são adjacentes a u e são vértices de grau 1 em G .

O número esperado de garras tende a zero, de fato

$$\binom{n}{4} (n-4) q_i^4 (1-q_i)^{4n-14} \leq (x_i(1+\epsilon) \log n)^4 \cdot n^{1-4x_i(1+\epsilon)} = o(1).$$

E neste caso G contém outra configuração com três vértices de grau 1, chamada de *pente*: dizemos que um conjunto $\rho = \{\{x, y, z\}, \{u, v\}\}$ induz um pente se x, y são ambos adjacentes a u e são vértices de grau 1, e, $\{u, v\}$ é uma aresta, e, z é adjacente a v , e v tem grau 1 em G .



Observe que um pente contém uma cereja $\{\{x, y\}, u\}$, e se apagamos os vértices de grau 1 dessa cereja geramos outra cereja. O número esperado de pentes é

$$\binom{n}{2} \binom{n-2}{2} (n-4) q_i^4 (1-q_i)^{4n-14} = o(1).$$

Então, para obter H , removemos os vértices isolados, os vértices de grau 1 em cerejas e pinças, e removemos as cerejas isoladas. Pois, Erdős e Rényi [26] garantiram que as componentes de $G \in \mathcal{G}_{n,q_i}$ são: vértices isolados, arestas isoladas, cerejas isoladas e uma componente gigante. Portanto, removemos $n^{1-x_i(1+\epsilon)} + O(n^{1-2x_i(1+\epsilon)}(\log n)^2)$ vértices. Além disso, não criamos novas configurações ruins, pois:

Lema 4.8. *Para um inteiro positivo $k > 0$, com probabilidade $1 - o(1)$ não existem pinças em $\mathcal{G}_{n,p}$ para as quais o vértice central tem grau no máximo k .*

Demonstração. Suponha que $d(z) = k$ onde k uma constante positiva, então o número esperado de vértices satisfazendo a hipótese é

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} (n-3) q_i^3 (1-q_i)^{3n-9} \binom{n}{k} q_i^k (1-q_i)^{(n-k)} &\leq n^{k+4} \cdot \left(\frac{x_i(1+\epsilon)(\log n)}{n} \right)^{k+3} \cdot n^{-4x_i(1+\epsilon)} \\ &\leq (x_i(1+\epsilon)(\log n))^{k+3} \cdot n^{1-4x_i(1+\epsilon)}, \end{aligned}$$

que tende a zero quando n tende ao infinito. \square

Lema 4.9. *A remoção dos vértices de grau 1 em pertencem a cerejas não geram pinças, com probabilidade $1 - o(1)$.*

Demonstração. O número esperado de vértices satisfazendo a hipótese é

$$\binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \binom{n-4}{2} q_i^5 (1-q_i)^{4n-14} \leq (x_i(1+\epsilon) \log n)^4 n^{1-4x_i(1+\epsilon)},$$

que tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. \square

Consequentemente, analogamente ao Lema 1.2, provamos que H tem um emparelhamento perfeito com probabilidade alta.

5 UM PROBLEMA DE ENUMERAÇÃO DE GRAFOS

Em 1978 Bender e Canfield [11] apresentaram uma fórmula assintótica para o número de grafos rotulados com uma sequência de graus limitada. Dois anos depois, Bollobás [16] propôs uma prova probabilística para tal fórmula que, como vimos no capítulo anterior, é dada por

$$|\mathcal{G}_{n,\mathbf{d}}| \approx \frac{(2m)!e^{-\lambda-\lambda^2}}{m!2^m \prod_{i=1}^n d_i!} \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$, d_1, \dots, d_n constantes, $2m = \sum_{i=1}^n d_i$ e $\lambda = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2}$.

Observe que o número obtido por (5.1) é a quantidade de subgrafos com a sequência de graus \mathbf{d} que K_n contém. Além disso, McKay e Wormald em [54, 53] obtiveram fórmulas como essa para grafos d -regulares quando $d = o(\sqrt{n})$ e $d \approx cn$. Uma generalização natural seria fornecer fórmulas para o número de subgrafos d -regulares de grafos que não sejam completos. A prova dada em [16], por exemplo, apresenta um modelo para gerar subgrafos d -regulares em K_n , o modelo das configurações apresentado no capítulo 2. Gao [41] apresentou um algoritmo que gera uniformemente subgrafos d -regulares de um grafo H dado e, conseqüentemente, obteve um limitante inferior para o número de subgrafos d -regulares de H . Frequentemente, enumeração e geração de grafos são estudadas juntas.

Outra generalização seria fornecer resultados sobre o número de subgrafos com uma dada sequência de graus de um grafo H qualquer. Pensando de outro modo, ao retirar uma determinada quantidade de arestas do grafo completo, deseja-se descobrir se o grafo H obtido pela remoção das arestas, perde muitas cópias de subgrafos (com uma sequência de graus dada). Neste capítulo estudamos tal generalização e com o intuito de fornecer um resultado que respondesse essa questão, generalizamos o resultado principal de Gao [41] e apresentamos uma cota inferior

para tal número. A prova desse resultado exige diferentes ferramentas, apresentadas na primeira seção deste capítulo. Além disso, o teorema obtido é usado como um lema técnico na demonstração de um resultado de colorações exposto no próximo capítulo.

5.1 Ferramentas básicas

Suponha que um inimigo, que tem o poder de remover uma determinada quantidade de arestas, ataca um grafo completo produzindo um grafo H . A grosso modo, provaremos um teorema que apresenta uma cota inferior para o número de subgrafos (com uma sequência de graus dada) do grafo H . As sequências de graus a que nos referimos devem ser limitadas e ‘minimamente densas’, mais especificamente, γ -densas. Dizemos que uma sequência de graus (d_1, \dots, d_n) é γ -densa se $\sum_{i=1}^n d_i \geq \gamma n$, $\gamma > 0$.

Teorema 5.1. *Dados inteiros positivos d e k , constantes $D > 0$ e $\gamma > 0$, existem constantes positivas n_0 , M e α satisfazendo a seguinte propriedade para todo $n \geq n_0$. Para todo grafo H com $|V(H)| = n$ e $|E(H)| \geq \binom{n}{2} - Dn \ln n$, existe $W \subseteq V(H)$ com $|W| \geq n - M \ln n$ tal que, para quaisquer sequências de graus γ -densas $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'} \in \{0, \dots, d\}^{|W|}$, onde $k' \leq k$, temos*

$$N_{H[W]}(\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'}) \geq n^{-\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{k'} N_{K_{|W|}}(\mathbf{d}^i).$$

O teorema acima garante que, se um inimigo remover $Dn \ln n$ arestas de K_n produzindo um grafo H , sempre conseguimos escolher um subgrafo induzido ‘grande’ $H[W]$ onde conseguimos uma cota inferior para o número de subgrafos com sequências de graus γ -densas em $H[W]$.

No que segue, as arestas que sobram (arestas de H) são representadas pela cor azul, enquanto que as arestas removidas (arestas de \overline{H}) são representadas

pela cor vermelha. Portanto, tratar de subgrafos que não são afetados pela remoção de arestas é o mesmo que considerar K_n com uma bicoloração e tratar de subgrafos cujas arestas são todas azuis. A maneira que encontramos de contar estes subgrafos foi através do estudo da probabilidade de um subgrafo conter alguma aresta vermelha.

Seja H_n um grafo com n vértices e denote por $e(H_n)$ o número de arestas de H_n . Considere $K_n = H_n \cup \overline{H_n}$, onde colorimos H_n com a cor azul e seu complementar $\overline{H_n}$ com a cor vermelha, de forma que K_n é um grafo completo com uma bicoloração de arestas. Para toda aresta vermelha $e = \{u, v\}$, defina o grau vermelho de e :

$$d_r(e) = d_r(u) + d_r(v) - 2,$$

onde $d_r(u)$ denota o número de arestas vermelhas incidentes em u . Denote por $\Delta_r(\overline{H_n}) = \max_{e \in E(\overline{K_n})} d_r(e)$.

Fixada uma sequência gráfica $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$, onde $\max d_i \leq d$ para alguma constante absoluta $d \in \mathbb{N}$, denote por F_n um grafo com a sequência de graus \mathbf{d} escolhido uniformemente dentre todos os subgrafos de K_n com esta sequência de graus \mathbf{d} . Denotamos por $X_n = X_n(F_n)$ a variável aleatória que atribui ao grafo F_n seu número de arestas vermelhas. O teorema abaixo fornece uma cota inferior para a probabilidade de um grafo com a sequência de graus \mathbf{d} não conter arestas vermelhas, desde que o grau máximo vermelho seja ‘no máximo’ linear em n e o número de arestas vermelhas seja suficientemente pequeno em relação a n^2 .

Teorema 5.2. *Para $\gamma > 0$ e um inteiro positivo d , existe um inteiro positivo n_0 tal que as seguintes propriedades valem para $n \geq n_0$. Fixada uma sequência γ -densa $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ tal que $\max d_i \leq d$, seja H_n um grafo de n vértices e denote*

$t_n = \binom{n}{2} - e(H_n)$. Assuma que:

$$a = \frac{\Delta_r(\overline{H_n})}{n} < \frac{\gamma}{d} \quad (5.2)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{e^2 t_n}{b \gamma n^2} \right)^{bn} \cdot (d!)^n \cdot \exp(d + d^2) < \frac{1}{2} \quad (5.3)$$

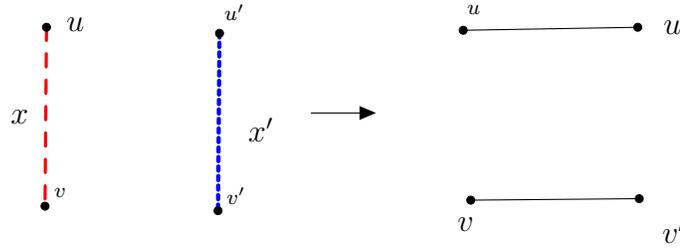
onde $b = \frac{\gamma - da}{8}$. Então a variável aleatória X_n definida anteriormente satisfaz

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \geq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-d^2 t_n}{bn}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-8d^2 t_n}{(\gamma - da)n}\right).$$

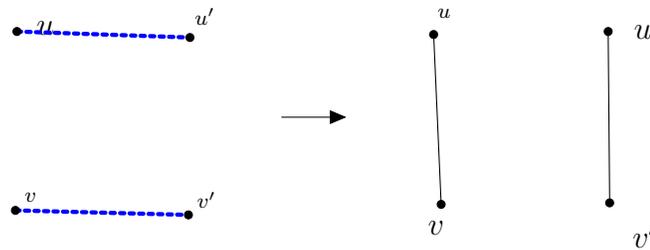
Este teorema é uma generalização de um teorema de Gao [41]. Ela demonstra um resultado análogo para subgrafos d -regulares. Em particular, ela assume que o subgrafo d -regular sempre tem pelo menos $n/2$ arestas, ou seja, o subgrafo é pelo menos 1-regular. No nosso caso, não precisamos assumir que o grau mínimo do subgrafo seja 1, mas foi necessário adicionar a hipótese de que as sequências sejam γ -densas, o que inclui sequências de graus mais esparsas do que as tratadas por Gao.

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o Teorema 5.1, para demonstrar esse teorema precisamos basicamente do Teorema 5.2. A prova do Teorema 5.2 requer ainda mais uma ferramenta, chamada de *switching*. As operações switching são muito utilizadas para determinar diversas propriedades de grafos. Por exemplo, Wormald e McKay utilizaram switchings em [55] para mostrar como gerar grafos, uniformemente, com uma sequência de graus dada. As seguintes operações switching serão particularmente úteis.

- (i) *r-switching*: Dado um grafo F_n contendo pelo menos uma aresta vermelha, escolha uma aresta vermelha $x \in F_n$, nomeie seus extremos como u e v , e escolha uma aresta azul $x' \in F_n$ que não seja incidente a x , nomeie seus extremos como u' and v' . Substitua estas duas arestas por $\{u, u'\}$ e $\{v, v'\}$. O r -switching é aplicável se e somente se $\{u, u'\}$ e $\{v, v'\}$ são arestas azuis e não estão em F_n .

Figura 5.1: r -switching

- (ii) r -switching inverso: Dado um grafo F_n contendo pelo menos duas arestas azuis, escolha uma aresta azul em F_n e nomeie seus extremos como u e u' , então escolha outra aresta azul em F_n que não seja incidente a $\{u, u'\}$ e nomeie seus extremos como v e v' . Substitua estas duas arestas por $\{u, v\}$ e $\{u', v'\}$. O r -switching inverso é aplicável se e somente se $\{u, v\}$ e $\{u', v'\}$ não estão em F_n e $\{u, v\}$ é vermelha e $\{u', v'\}$ é azul.

Figura 5.2: r -switching inverso

Observe que as operações switching, definidas acima, não mudam o grau de nenhum vértice do grafo F_n , apenas seu grau em alguma cor.

Seja $\mathcal{R}(s)$ o conjunto de todos os subgrafos F_n de K_n com sequência de graus \mathbf{d} e s arestas vermelhas. Note que, para todo $s \geq 1$, uma operação r -switching converte um grafo $F_n \in \mathcal{R}(s)$ em um grafo $F'_n \in \mathcal{R}(s-1)$. Por outro lado, um r -switching inverso converte $F'_n \in \mathcal{R}(s-1)$ em $F_n \in \mathcal{R}(s)$.

Denotemos por $N(F_n)$ o número de r -switchings aplicáveis a F_n e $N'(F'_n)$ o número de r -switchings inversos aplicáveis a F'_n . Seja $t_n = \binom{n}{2} - e(H_n)$. O próximo resultado apresenta cotas limitantes para o número de switching aplicáveis.

Proposição 5.3. *Para todo s tal que $2m/d - 2s/d - 2d - \Delta_r(H_n) > 0$, e dado $F_n \in \mathcal{R}(s)$ e $F'_n \in \mathcal{R}(s-1)$, temos*

$$2s(2m - 2s - 2d^2 - d\Delta_r(H_n)) \leq N(F_n) \leq 4sm,$$

$$0 \leq N'(F'_n) \leq 2d^2t_n.$$

Demonstração. Dado $F_n \in \mathcal{R}(s)$, o número de maneiras de escolher a aresta vermelha x e nomear seus extremos é $2s$. O número de maneiras de escolher a aresta azul x' e nomear seus extremos é no máximo $2m$. Então $N(F_n) \leq 4sm$. Para o limitante inferior, uma vez que x foi escolhido e seus extremos foram nomeados, o número de maneiras de escolher x' e nomear seus extremos tal que x' é azul e não é incidente em x , onde $\{u, u'\}$ e $\{v, v'\}$ são ambas arestas azuis que não pertencem a F_n , é pelo menos $2m - 2s - 2d^2 - d\Delta_r(\overline{H_n})$. De fato, tendo escolhido a aresta vermelha $\{u, v\}$, a aresta $\{u', v'\}$ deve ser escolhida dentre as $m - s$ arestas azuis de F_n , o que resulta em $2(m - s)$ maneiras de fixar u' e v' . Porém, u' e v' não podem ser escolhidos dentre (no máximo) $\Delta_r(\overline{H_n})$ extremos das arestas vermelhas saindo de u ou v , nem dos extremos de no máximo $2d$ arestas em F_n saindo de u ou v (note que estas restrições aplicam-se somente para as arestas porque elas foram nomeadas de um modo particular). Então, existem pelo menos $2m - 2s - d(\Delta_r(\overline{H_n}) + 2d)$ escolhas possíveis para assegurar a conexão correta entre $\{u, v\}$ e $\{u', v'\}$.

Finalmente, dado $F'_n \in \mathcal{R}(s-1)$, o número de maneiras de escolher a aresta vermelha x e rotular seus extremos é no máximo $2t_n$. Além disso, existem no máximo d maneiras de escolher u' e d maneiras de escolher v' , logo $N'(F'_n) \leq 2d^2t_n$. \square

A afirmação a seguir garante que, desde que t_n não seja muito grande, que a probabilidade de F_n conter muitas arestas vermelhas é pequena. Para demonstrar esse resultado, contamos de quantas maneiras podemos escolher F_n com muitas arestas vermelhas e comparamos com o número de possibilidades para escolher F_n sem restrições.

Proposição 5.4. *Se*

$$\sqrt{2} \left(\frac{e^2 t_n}{b \gamma n^2} \right)^{bn} \cdot (d!)^n \cdot \exp(d + d^2) < \frac{1}{2},$$

então

$$\mathbb{P}(X_n \geq bn) < \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Queremos mostrar que a probabilidade de F_n ter bn arestas vermelhas é menor do que $1/2$. Por isso precisamos saber de quantas maneiras podemos escolher F_n com bn arestas vermelhas. Existem no máximo t_n arestas vermelhas em K_n , logo existem no máximo $\binom{t_n}{bn}$ maneiras de escolher bn arestas vermelhas para incluir em F_n . Precisamos escolher as $m - bn$ arestas remanescentes para formar F_n . Para encontrar um limitante superior para o número de maneiras em que isso pode ser feito, consideramos o Modelo das Configurações descrito no capítulo anterior.

Como já escolhemos bn arestas vermelhas para incluir em F_n , podemos assumir que, quando produzimos F_n usando configurações, já emparelhamos $2bn$ pontos, dessa forma precisamos encontrar um emparelhamento dos $2m - 2bn$ pontos remanescentes. Como o número de maneiras de fazer isso é a quantidade de emparelhamentos perfeitos em K_{2m-2bn} , concluímos que isto pode ser feito de no máximo

$$\frac{(2m - 2bn)!}{2^{m-bn} (m - bn)!} = (1 + o(1)) \sqrt{2} \left(\frac{2m - 2bn}{e} \right)^{m-bn} \quad (5.4)$$

maneiras. Obtemos (5.4) da mesma maneira que calculamos $f(t)$ em (2.6), em que utilizamos a fórmula de Stirling.

Conseqüentemente, o número de subgrafos de K_n com a sequência de graus \mathbf{d} que contêm pelo menos bn arestas vermelhas é, para n grande, no máximo

$$2 \binom{t_n}{bn} \left(\frac{2m - 2bn}{e} \right)^{m-bn}.$$

Vimos em (2.10) que o número desses subgrafos com nenhuma restrição no número de arestas vermelhas é

$$N_{K_n}(\mathbf{d}) = \frac{\sqrt{2}}{\prod_{i=1}^n d_i!} \left(\frac{2m}{e} \right)^m \exp(-\lambda - \lambda^2).$$

Como $d_i \leq d$, $i = 1, \dots, n$ então $\lambda = (1/(2m)) \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} < d$, implicando que

$$N_{K_n}(\mathbf{d}) > \frac{\sqrt{2}}{(d!)^n} \left(\frac{2m}{e} \right)^m \exp(-d - d^2).$$

Portanto, usando $\binom{n}{k} \leq (en/k)^k$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n \geq bn) &\leq \frac{2 \binom{t_n}{bn} \left(\frac{2m-2bn}{e} \right)^{m-bn}}{N_{K_n}(\mathbf{d})} \\ &\leq \frac{2 \left(\frac{et_n}{bn} \right)^{bn} \cdot \left(\frac{2m-2bn}{e} \right)^{m-bn}}{\frac{\sqrt{2}}{(d!)^n} \left(\frac{2m}{e} \right)^m \exp(-d - d^2)} \\ &\leq \frac{\sqrt{2} \left(\frac{et_n}{bn} \right)^{bn} \cdot (d!)^n \cdot \exp(d + d^2)}{\left(\frac{2m}{e} \right)^{bn}} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{e^2 t_n}{2bm n} \right)^{bn} \cdot (d!)^n \cdot \exp(d + d^2) \\ &< \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Note que, no último passo, utilizamos a hipótese da proposição. \square

5.2 Demonstração do Teorema 5.1

Iniciamos esta seção demonstrando o Teorema 5.2, que é uma generalização de um teorema de Gao [41], mas para mostrar o Teorema 5.1 será necessário provarmos um corolário deste teorema.

O resultado a seguir é o ingrediente principal na prova do Teorema 5.1. Ele dá um limitante inferior para a probabilidade de escolher um subgrafo com nenhuma aresta vermelha para qualquer bicoloração com grau vermelho pequeno.

Teorema 5.2. *Para $\gamma > 0$ e um inteiro positivo d , existe um inteiro positivo n_0 tal que as seguintes propriedades valem para $n \geq n_0$. Fixada uma sequência γ -densa $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ tal que $\max d_i \leq d$, seja H_n um grafo de n vértices e denote $t_n = \binom{n}{2} - e(H_n)$. Assuma que:*

$$a = \frac{\Delta_r(\overline{H_n})}{n} < \frac{\gamma}{d} \quad (5.2)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{e^2 t_n}{b \gamma n^2} \right)^{bn} \cdot (d!)^n \cdot \exp(d + d^2) < \frac{1}{2} \quad (5.3)$$

onde $b = \frac{\gamma - da}{8}$. Então a variável aleatória X_n definida anteriormente satisfaz

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \geq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-d^2 t_n}{bn}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-8d^2 t_n}{(\gamma - da)n}\right).$$

Demonstração. Por hipótese, $2m = \sum_i d_i \geq \gamma n$ e $\frac{\Delta_r(\overline{H_n})}{n} = a < \frac{\gamma}{d}$, para todo $n \geq n_0$, para algum n_0 . Seja $b = \frac{\gamma - da}{8}$. Então,

$$a = \frac{\Delta_r(\overline{H_n})}{n} < a + \frac{\gamma - da}{2d} = \frac{\gamma - 4b}{d}, \text{ e } bn \geq 2d^2.$$

Pela Proposição 5.3,

$$\begin{aligned} 2s(2m - 2s - 2d^2 - d\Delta_r(H_n)) &\leq N(F_n) \leq 4sm, \\ 0 &\leq N'(F'_n) \leq 2d^2 t_n. \end{aligned}$$

No nosso caso, o fato de que $2m \geq \gamma n$ implica, com $s \leq bn$ e $b = \frac{\gamma - da}{8}$, que

$$2m - 2s - 2d^2 - d\Delta_r(\overline{H_n}) \geq \gamma n - 2bn - bn - dn \left(\frac{\gamma - 4b}{d} \right) = bn.$$

Dado $s \leq bn$, considere o grafo bipartido auxiliar com bipartição $\mathcal{R}(s) \cup \mathcal{R}(s-1)$ onde um elemento em $\mathcal{R}(s)$ é adjacente a um elemento em $\mathcal{R}(s-1)$ se

eles podem ser obtidos um do outro por operações de switching. Pela contagem do número de arestas neste grafo auxiliar, usando a Proposição 5.3, obtemos

$$2sbn|\mathcal{R}(s)| \leq 2d^2t_n|\mathcal{R}(s-1)|,$$

assim

$$\frac{|\mathcal{R}(s)|}{|\mathcal{R}(s-1)|} \leq \frac{d^2t_n}{bsn},$$

e conseqüentemente

$$\frac{|\mathcal{R}(s)|}{|\mathcal{R}(0)|} \leq \left(\frac{d^2t_n}{bn}\right)^s \cdot \frac{1}{s!}.$$

Pela Proposição 5.4 temos que $\mathbb{P}(X_n \geq bn) < \frac{1}{2}$, esta proposição combinada com $\sum_{s=0}^m \mathbb{P}(X_n = s) = 1$, leva a $\sum_{s=0}^{bn} \mathbb{P}(X_n = s) \geq \frac{1}{2}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbb{P}(X_n = 0)} &\leq 2 \cdot \sum_{s=0}^{bn} \frac{\mathbb{P}(X_n = s)}{\mathbb{P}(X_n = 0)} \\ &\leq 2 \cdot \sum_{s=0}^{bn} \frac{|\mathcal{R}(s)|}{|\mathcal{R}(0)|} \\ &\leq 2 \cdot \sum_{s=0}^{bn} \left(\frac{d^2t_n}{bn}\right)^s \cdot \frac{1}{s!} \\ &\leq 2 \cdot \exp\left(\frac{d^2t_n}{bn}\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Conseqüentemente,

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \geq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{d^2t_n}{bn}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-8d^2t_n}{(\gamma - da)n}\right)$$

para n grande. □

Agora vamos provar um corolário que será utilizado diretamente na prova do Teorema 5.1. Primeiramente, definimos uma nova variável aleatória: dado um inteiro k , $Y_n = Y_n(\mathbf{F}_n)$ denota o número de arestas vermelhas contidas em uma k -upla $\mathbf{F}_n = (F_n^1, \dots, F_n^k)$ de subgrafos de H_n aresta-disjuntos tais que F_n^i tem a sequência de graus \mathbf{d}_i limitada por d , $i = 1, \dots, k$. Assumimos que estes grafos são escolhidos sequencialmente e uniformemente a partir do grafo remanescente.

Corolário 5.5. Para $\gamma > 0$ e inteiros positivos d e k , existe um inteiro positivo n_0 tal que as seguintes propriedades valem para $n \geq n_0$. Fixe sequências γ -densas $\mathbf{d}^1 = (d_1^1, \dots, d_n^1), \dots, \mathbf{d}^k = (d_1^k, \dots, d_n^k)$ tais que $\max d_i^j \leq d$. Seja H_n um grafo de n vértices e denote $t_n = \binom{n}{2} - e(H_n)$. Assuma que:

$$a = \frac{\Delta_r(\overline{H_n}) + 2dk}{n} < \frac{\gamma}{d} \quad (5.6)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{e^2(t_n + kdn/2)}{b\gamma n^2} \right)^{bn} \cdot (d!)^n \cdot \exp(d + d^2) < \frac{1}{2} \quad (5.7)$$

onde $a = \frac{\Delta_r(\overline{H_n})}{n}$ e $b = \frac{\gamma - da}{8}$. Então a variável aleatória Y_n definida acima satisfaz

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) \geq \min \left\{ \exp \left(\frac{-24kd^2 t_n}{(\gamma - da)n} \right), \exp \left(\frac{-24k^2 d^3}{\gamma - da} \right) \right\}.$$

Demonstração. Por hipótese, dados γ, d e k , existe n_0 tal que (5.6) e (5.7) são satisfeitas para todo $n \geq n_0$. Vamos iterar o Teorema 5.2. Seja $H_n^1 = H_n$ um grafo satisfazendo a hipótese, e escolha F_n^1 uniformemente dentre todos os subgrafos de $K_n = H_n^1 \cup \overline{H_n^1}$ com sequência de graus \mathbf{d}_1 . Note que $a_1 = a < \frac{\Delta_r(\overline{H_n}) + 2dk}{n}$ e $t_n^{(1)} = t_n < t_n + kdn/2$, então (5.2) e (5.3) são satisfeitas para todo $n \geq n_0$. Então, pelo Teorema 5.2,

$$\mathbb{P}(X_n^1 = 0) \geq \frac{1}{2} \exp \left(\frac{-8d^2 t_n^{(1)}}{(\gamma - da_1)n} \right),$$

onde $X_n^1 = X_n(F_n^1)$.

Assuma que tal grafo F_n^1 foi escolhido de modo que $X_n^1 = 0$. Considere o grafo $H_n^2 = H_n^1 \setminus E(F_n^1)$ e seja $t_n^{(2)} = \binom{n}{2} - e(H_n^2)$. Em outras palavras, consideramos uma nova coloração de K_n na qual as arestas em F_n^1 são recoloridas de vermelho. Note que $t_n^{(2)} \leq t_n + dn/2 \leq t_n + kdn/2$ e $\Delta_r(\overline{H_n^2}) \leq \Delta_r(\overline{H_n^1}) + 2d \leq \Delta_r(\overline{H_n}) + 2dk$. Portanto, para $n \geq n_0$ temos que $a_2 = \Delta_r(\overline{H_n^2})/n$ e $t_n^{(2)}$ satisfazem (5.2) e (5.3), respectivamente. Como uma consequência, se escolhermos F_n^2 uniformemente dentre todos os subgrafos de $K_n = H_n^2 \cup \overline{H_n^2}$ com sequência de graus \mathbf{d}_2 , então aplicando Teorema 5.2 para a nova coloração induzida por H_n^2 , que mostramos satisfazer as

hipóteses, obtemos

$$\mathbb{P}(X_n^2 = 0 | X_n^1 = 0) \geq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-8d^2 t_n^{(2)}}{(\gamma - da_2)n}\right),$$

onde $X_n^2 = X_n(F_n^2)$. Observe que a probabilidade obtida é uma probabilidade condicional, porque escolhemos F_n^2 depois de F_n^1 já ter sido escolhido.

Iterativamente, para $3 \leq i \leq k$, condicionamos sobre ter escolhido F_n^1, \dots, F_n^{i-1} com as sequências de graus correspondentes, nenhum deles contendo arestas vermelhas do grafo original K_n . Denotamos $H_n^i = H_n^{i-1} \setminus E(F_n^{i-1})$, $t_n^{(i)} = \binom{n}{2} - e(H_n^i)$ e $a_i = \Delta_r(\overline{H_n^i})/n$. Observe que $t_n^{(i)} \leq t_n + kdn/2$ e $a_i \leq \frac{\Delta_r(\overline{H_n}) + 2dk}{n}$ então (5.3) e (5.2) são satisfeitas para todo $n \geq n_0$. Escolhemos F_n^i uniformemente dentre todos os subgrafos de $K_n = H_n^i \cup \overline{H_n^i}$ com sequências de graus \mathbf{d}_i . Se $X_n^i = X_n(F_n^i)$, obtemos

$$\mathbb{P}(X_n^i = 0 | X_n^1 = \dots = X_n^{i-1} = 0) \geq \exp\frac{1}{2} \left(\frac{-8d^2 t_n^{(i)}}{(\gamma - da_i)n} \right).$$

Como uma consequência,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = 0) &= \mathbb{P}(X_n^1 = \dots = X_n^k = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_n^1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_n^2 = 0 | X_n^1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_n^k = 0 | X_n^1 = \dots = X_n^{k-1} = 0) \\ &\geq \frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{-8d^2 t_n^{(1)}}{(\gamma - da_1)n}\right) \cdots \exp\left(\frac{-8d^2 t_n^{(k)}}{(\gamma - da_k)n}\right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Lembrando que $t_n^{(i)} \leq t_n + kdn/2$ e $a_i \leq a + 2dk/n$, então

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) \geq \frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{-8d^2(t_n + kdn/2)k}{(\gamma - d(a + 2dk/n))n}\right). \quad (5.9)$$

Para concluir a prova, tratamos separadamente os casos $t_n \geq kdn$ e $t_n < kdn$. No primeiro caso, temos $t_n + kdn/2 \leq 3t_n/2$, então (5.9) é limitada inferiormente por $\frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{-12kd^2 t_n}{(\gamma - d(a + 2dk/n))n}\right) \geq \exp\left(\frac{-24kd^2 t_n}{(\gamma - da)n}\right)$, para n suficientemente grande. No segundo caso, temos $t_n + kdn/2 \leq 3kn/2$, assim, por argumentos similares, temos que (5.9) é limitada inferiormente por $\frac{1}{2^k} \exp\left(\frac{-12k^2 d^3}{\gamma - d(a + 2dk/n)}\right) \geq \exp\left(\frac{-24k^2 d^3}{\gamma - da}\right)$.

Consequentemente,

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) \geq \min \left\{ \exp \left(\frac{-24kd^2t_n}{(\gamma - da)n} \right), \exp \left(\frac{-24k^2d^3}{\gamma - da} \right) \right\}.$$

□

No que segue, dado um grafo H de n vértices e uma sequência gráfica $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$, lembre que $N_H(\mathbf{d})$ é o número de subgrafos com a sequência de graus \mathbf{d} em H . Mais geralmente, dado $\vec{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^k)$, denotamos por $N_H(\vec{\mathbf{d}})$ o número de maneiras de selecionar uma k -upla (H_1, \dots, H_k) de subgrafos aresta-disjuntos de H tal que cada subgrafo H_i tem sequência de graus \mathbf{d}^i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Teorema 5.1. *Dados inteiros positivos d e k , constantes $D > 0$ e $\gamma > 0$, existem constantes positivas n_0 , M e α satisfazendo a seguinte propriedade para todo $n \geq n_0$. Para todo grafo H com $|V(H)| = n$ e $|E(H)| \geq \binom{n}{2} - Dn \ln n$, existe $W \subseteq V(H)$ com $|W| \geq n - M \ln n$ tal que, para quaisquer sequências de graus γ -densas $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'} \in \{0, \dots, d\}^{|W|}$, onde $k' \leq k$, temos*

$$N_{H[W]}(\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'}) \geq n^{-\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{k'} N_{K_{|W|}}(\mathbf{d}^i).$$

Demonstração. Dados d , k , D e γ como no enunciado, seja H um grafo de n vértices com $|E(H)| \geq \binom{n}{2} - Dn \ln n$. Como antes, devemos tomar n suficientemente grande.

Considere o conjunto

$$A = \left\{ v \in V(G) : d(v) \leq \frac{3d - \gamma}{3d} n \right\},$$

então

$$\begin{aligned}
& |A| \cdot \frac{3d - \gamma}{3d} n + (n - |A|) \cdot (n - 1) \geq n(n - 1) - 2Dn \ln n \\
\implies & |A| \cdot \left(\frac{(-\gamma)n}{3d} + 1 \right) \geq -2Dn \ln n \\
\implies & |A| \cdot \left(\frac{\gamma n}{3d} - 1 \right) \leq 2Dn \ln n \\
\implies & |A| \leq \frac{6Dd \cdot n \ln n}{\gamma n - 3d} \leq M \ln n
\end{aligned}$$

para $M = \frac{7dD}{\gamma}$ e n suficientemente grande.

Seja $W = V(H) \setminus A$ e fixe sequências limitadas de graus $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'} \in \{0, \dots, d\}^{|W|}$ onde $k' \leq k$. Desejamos aplicar o Corolário 5.5 para o grafo $H_{|W|} = H[W]$ com $|W|$ vértices, onde as arestas em $H_{|W|}$ são precisamente as arestas azuis de $K_{|W|}$. Para isto, sejam $a = \Delta_r(\overline{H_{|W|}})/|W|$ e $t_{|W|} = \binom{|W|}{2} - e(H_{|W|})$. Precisamos mostrar que $a + 2dk/|W| < \gamma/d$ e que $t_{|W|} + kd|W|/2$ satisfaz (5.7). Observe que, para qualquer vértice v em W , o número de arestas vermelhas incidentes em v em $K_{|W|}$ é precisamente o número de arestas incidentes em v no complementar de $H[W]$ (com relação a $K_{|W|}$), que é no máximo o número de arestas incidentes em v no complementar de H (com relação a K_n). Pela nossa escolha de W , este número é no máximo $\frac{\gamma n}{3d}$. Então $d_r(v) \leq \frac{\gamma n}{3d}$ para todo vértice $v \in W$, em particular, temos $\Delta_r(\overline{H_{|W|}}) \leq \frac{2\gamma n}{3d} - 2$. Então para n grande,

$$\frac{\Delta_r(\overline{H_{|W|}}) + 2dk}{|W|} \leq \frac{2\gamma n}{3d} \frac{1}{n - M \ln n} + \frac{2dk}{n - M \ln n} \leq \frac{\gamma 4}{d 5} + \frac{\gamma}{10d} < \frac{\gamma}{d},$$

e (5.6) é válida. Além disso, $e(H_{|W|}) \geq \binom{n}{2} - Dn \ln n - Mn \ln n = \binom{n}{2} - (D+M)n \ln n$, para n grande. Temos

$$t_{|W|} = \binom{|W|}{2} - e(H_{|W|}) \leq (D+M)n \ln n,$$

então

$$\frac{t_{|W|} + kd|W|/2}{|W|^2} = \frac{(D+M)n \ln n}{(n - M \ln n)^2} + \frac{dk}{2(n - M \ln n)} < \frac{(D+M) \ln n}{n - 2M \ln n} + \frac{dk}{2(n - M \ln n)}.$$

Como este último termo pode ser tomado arbitrariamente próximo de zero escolhendo n suficientemente grande, temos

$$\left(\frac{t_{|W|} + kd|W|/2}{2b\gamma|W|^2} \right)^b \ll \frac{1}{d!}$$

para n grande (e conseqüentemente para $|W|$ grande), de forma que a desigualdade (5.7) é satisfeita. Como uma consequência, o Corolário 5.5 aplicado para $H_{|W|}$ e seqüências de graus $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'}$, com $k' \leq k$, resulta em

$$\mathbb{P}(Y_{|W|} = 0) \geq \min \left\{ \exp \left(\frac{-24kd^2t_{|W|}}{(\gamma - da)|W|} \right), \exp \left(\frac{-24k^2d^3}{\gamma - da} \right) \right\}.$$

Se o mínimo é atingido pelo segundo termo, o resultado é imediato, pois a probabilidade é uma constante. Se o mínimo é atingido pelo primeiro termo, como $|W| \geq n - M \ln n$ e $t_{|W|} \leq (D + M)n \ln n$, depois de alguns cálculos simples, obtemos

$$\mathbb{P}(Y_{|W|} = 0) \geq n^{-\beta},$$

para n grande, onde $\beta = \frac{48(D+M)d^2k}{(\gamma-da)}$.

Portanto,

$$N_{H_{|W|}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{k'}) \geq n^{-\beta} N_{K_{|W|}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{k'}).$$

Lembre que o termo $N_{K_{|W|}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{k'})$ é igual a $\Gamma(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{k'}) \cdot \prod_{i=1}^{k'} N_{K_{|W|}}(\mathbf{d}_i)$, onde Γ uma constante positiva, então podemos escrever

$$N_{H_{|W|}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{k'}) \geq n^{-\alpha} \prod_{i=1}^{k'} N_{K_{|W|}}(\mathbf{d}_i),$$

onde $\alpha = \frac{49(D+M)d^2k}{(\gamma-da)}$. □

Observe que o Teorema 5.1 foi demonstrado para seqüências γ -densas com $\gamma > 0$. A pergunta agora é se as seqüências de graus podem ser ainda mais esparsas. Obtemos exemplos de grafos em que é possível verificar que a resposta para tal pergunta é não, pelo menos se pensarmos em seqüências muito esparsas.

Exemplo 5.6. Seja $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ uma sequência de graus tal que $\sum_{i=1}^n d_i = C$, onde $C \geq 2$ é uma constante (assuma que existem $c \geq 1$ entradas não-nulas em \mathbf{d}). Um oponente pode particionar o conjunto de vértices de K_n em n/c classes V_i cada uma de tamanho c e remover todas as arestas de cada classe V_i . Assim terá gerado um grafo H que possui $\binom{n}{2} - \binom{c}{2}n/c > \binom{n}{2} - n \ln n$ arestas. Observe que não importa o modo com que escolhermos W , segundo o Teorema 5.1 sempre teremos $V_i \subset W$ para algum i , pois $\ln n \ll n/c$. Portanto, a conclusão do teorema falhará se fixarmos uma sequência de graus em que todas as entradas não nulas são atribuídas aos vértices em V_i , visto que não existem subgrafos com esta sequência em $H[V_i]$.

Usando a mesma ideia podemos mostrar que o Teorema 5.1 falha quando $\sum_{i=1}^n d_i = f(n)$, onde $f(n) \leq \ln(n)$.

Além disso, observe que a tese do Teorema 5.1 falharia se exigíssemos $W = V$ (ou que $|W| \geq n - o(\ln n)$), pois um oponente seria capaz de isolar $\Omega(\ln n)$ vértices quando removesse $Dn \ln n$ arestas de K_n para produzir H , dessa forma $N_H(\mathbf{d}) = 0$ para qualquer sequência positiva $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$.

6 PROIBINDO ESTRELAS ARCO-ÍRIS

O presente capítulo trata de uma aplicação do Teorema 5.1, mais especificamente, utilizamos tal resultado para determinar o grafo de n vértices que possui o maior número de colorações livres de padrões que generalizam uma estrela arco-íris.

Consideramos colorações de arestas de grafos satisfazendo uma determinada propriedade. Dado um número r de cores e um grafo F , um r -padrão P de F é uma partição do seu conjunto de arestas em r classes. Uma coloração de arestas (não necessariamente própria) de um grafo hospedeiro G é dita ser (F, P) -livre se G não contém uma cópia de F cuja partição do conjunto das arestas induzida pela coloração é isomorfa a P . Se no máximo r cores são usadas, chamamos de uma r -coloração (F, P) -livre de G . Por exemplo, se o padrão de F consiste em uma única classe, nenhuma cópia monocromática de F seria encontrada em uma coloração (F, P) -livre de G . Ou se F é uma estrela e seu padrão de coloração é arco-íris, uma coloração (F, P) -livre de G seria uma coloração de G livre de estrelas arco-íris. O nosso objetivo é encontrar o grafo hospedeiro G de n vértices que (dentre todos os grafos de n vértices) atinge o maior número de r -colorações (F, P) -livres.

Questões desse tipo foram consideradas primeiramente por Erdős e Rothschild [28], que perguntaram se considerar colorações de arestas evitando uma cópia monocromática de F levaria a configurações extremas que são substancialmente diferentes do Problema de Turán. De fato, grafos de n vértices F -livres são candidatos naturais para admitir um número grande de colorações, já que, como qualquer r -coloração de suas arestas obviamente não produz uma cópia monocromática de F (ou uma cópia de F com algum padrão dado), então o grafo (de Turán) F -extremal admite $r^{\text{ex}(n, F)}$ tais colorações, onde, como de costume, $\text{ex}(n, F)$ é o número máximo de arestas em um grafo F -livre de n vértices. Erdős e Roths-

child [28] conjecturaram que, para todo $\ell \geq 3$ e $n > n_0(\ell)$, qualquer grafo de n vértices com o maior número de 2-colorações K_ℓ -livres é isomorfo ao grafo de Turán $(\ell - 1)$ -partido, o que foi provado para $\ell = 3$ por Yuster [65] e para $\ell \geq 4$ por Alon, Balogh, Keevash, e Sudakov [3], que também mostraram que a mesma conclusão vale no caso $r = 3$. Porém, para $r \geq 4$ cores, o grafo de Turán para K_ℓ já não é o ótimo, e a situação torna-se mais complicada; de fato, configurações extremas não são conhecidas a menos que $r = 4$ e $F \in \{K_3, K_4\}$ em que os grafos extremos são $T_4(n)$ e $T_9(n)$, veja Pikhurko e Yilma [57].

Balogh [10] foi o primeiro a considerar colorações evitando padrões fixos que não são monocromáticos. Mais precisamente, ele mostrou que o grafo de Turán $(\ell - 1)$ -partido ainda é o ótimo para $r = 2$ cores quando proibimos qualquer 2-padrão de K_ℓ . Por outro lado, ele observou que isto não ocorre em geral para $r = 3$ cores e quaisquer 3-padrões de K_ℓ . De fato, considere $F = K_3$ e seja P uma partição de K_3 em três classes, cada uma contendo uma aresta, de modo que estamos procurando por 3-colorações com nenhum triângulo *arco-íris*. Se colorimos o grafo completo K_n com quaisquer duas cores disponíveis, não existe cópia de K_3 arco-íris, o que resulta em $3 \cdot 2^{\binom{n}{2}} - 3$ colorações (K_3, P) -livres de K_n distintas, que é mais do que $3^{\text{ex}(n, K_3)} \leq 3^{n^2/4}$. Isto sugere que o estudo de colorações que evitam padrões em geral, e em particular padrões arco-íris, merece mais atenção. Relacionado a isto, devemos mencionar que é conjecturado que, para n grande, o grafo completo é de fato o grafo ótimo para triângulos arco-íris no caso $r = 3$ (um resultado aproximado pode ser encontrado em [12]). Por outro lado, o grafo de Turán bipartido completo balanceado foi provado ser ótimo para todo $r \geq 10$ [46]. Existe também uma extensa descrição de grafos extremos quando considera-se emparelhamentos com vários padrões proibidos [45], o qual inclui todos os casos de arco-íris.

As estrelas desempenham um papel importante neste desenvolvimento. Estrelas monocromáticas $F = S_t$ com $t \geq 3$ arestas foram os primeiros casos para os quais mostrou-se [44] que os grafos F -extremais (neste caso, grafos $(t - 1)$ -regulares para n par) não atingem o maior número de colorações com nenhuma cópia monocromática de F para todos os valores de $r \geq 2$. Em particular, isto implica que a transição entre os casos $r \in \{2, 3\}$ e $r \geq 4$ descrita acima não segue para todos os grafos F . Por outro lado, grafos extremais de n vértices para estrelas monocromáticas proibidas S_t ainda não são conhecidos para qualquer $r \geq 2$ e $t \geq 3$.

O trabalho surgiu do estudo de colorações livres de S_t -arco-íris realizado por Hoppen, Lefmann e Odermann, isto é, tomar $F = S_t$ e considerar o padrão onde cada aresta está em uma classe diferente (em particular, $r \geq t$). Para $t = 2$ e qualquer número de cores dado $r \geq 2$, é fácil ver que um emparelhamento de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$ fornece o maior número de r -colorações desprovidas de S_2 -arco-íris, já que esta restrição implica que qualquer coloração deve ter componentes monocromáticas (para n ímpar, um vértice isolado adicional e uma componente conexa com três vértices geram configurações extremais). A mesma configuração extremal foi observada para S_2 monocromático quando $r = 2$, mas não para valores maiores de r . Note que o conjunto de r -colorações evitando um S_2 monocromático é precisamente o conjunto das r -colorações de arestas próprias de um grafo, e consequentemente este problema consiste em encontrar grafos de n vértices com o maior número de colorações próprias.

Porém, em contraste com o caso monocromático, Hoppen, Lefmann e Odermann foram capazes de encontrar a configuração ótima no caso arco-íris para n grande e quaisquer $r, t \geq 3$ fixos, que, em todos os casos, acontece de ser o grafo completo K_n . Com esse problema resolvido, conjecturaram que, para uma certa generalização, o grafo extremal ainda seria o grafo completo. Essa generalização é descrita a seguir.

Uma estrela $S_{t\ell}$ com $t\ell$ arestas coloridas com t cores distintas tal que cada cor é atribuída a exatamente ℓ arestas é chamada um $S_{t,\ell}$ -arco-íris. Dados inteiros $r, t \geq 2$ e $\ell \geq 1$, e um grafo G , uma r -coloração de G livre de $S_{t,\ell}$ -arco-íris é uma coloração das arestas de G com cores em $[r] = \{1, \dots, r\}$ para a qual não existe $S_{t,\ell}$ -arco-íris. Claramente, se $\ell = 1$, proibimos as estrelas S_t , e chamamos tais colorações de livres de S_t -arco-íris. O Teorema 5.1 apresentado no Capítulo 5 é o resultado auxiliar que permite que o resultado para $\ell = 1$ possa ser estendido para $\ell > 1$. Tal resultado garante que, em qualquer grafo com ‘muitas’ arestas, existe um subgrafo ‘quase gerador’ com um número ‘grande’ de subgrafos com qualquer sequência de graus limitada satisfazendo uma restrição de densidade.

Para qualquer grafo G , seja $\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)$ o conjunto de todas as r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris. Escrevemos

$$c_{r,t,\ell}(n) = \max \{ |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)| : |V(G)| = n \},$$

e dizemos que um grafo G de n vértices é $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal se $|\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)| = c_{r,t,\ell}(n)$. Neste capítulo provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.3. *Para quaisquer $r, t \geq 3$ e $\ell \geq 1$, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $c_{r,t,\ell}(n) = |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(K_n)|$. Além disso, o grafo completo K_n é o único grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal com n vértices.*

Observe que o caso $t = 1$ e $\ell \geq 3$ trata de colorações evitando estrelas monocromáticas S_ℓ , que foi considerado em [44] e para o qual as configurações extremais não são conhecidas, mesmo quando $r = 2$. Além disso, nossa prova do Teorema 1.3 não pode ser estendida para o caso $t = 2$, mas conjecturamos que o grafo completo seja o grafo extremal neste caso.

6.1 Um caso particular

Como mencionado anteriormente, o Teorema 1.3 no caso particular $\ell = 1$ é devido a Hoppen, Lefmann e Odermann. Observe que para $t = 2$ e $\ell = 1$, as r -colorações de um grafo G evitando um S_2 -arco-íris são tais que arestas adjacentes possuem a mesma cor. Neste caso, as arestas de uma mesma componente devem ser coloridas com a mesma cor, e arestas em componentes distintas podem ter cores diferentes. Então, se o grafo G tem j componentes com pelo menos uma aresta em cada, temos $|\mathcal{C}_{r,2,1}(G)| = r^j$. Para maximizar este número, j deve ser o maior possível. Consequentemente, o número máximo de tais colorações é $|\mathcal{C}_{r,2,1}(M)|$, onde M é um emparelhamento máximo em G . Assim, o grafo $\mathcal{C}_{r,2,1}$ -extremal com n vértices é um emparelhamento de tamanho $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Neste caso temos $c_{r,2,1}(n) = r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Quando $r < t$ nenhuma r -coloração produz uma $S_{t,\ell}$ -arco-íris, e neste caso $c_{r,t,\ell}(n) = r^{\binom{n}{2}}$, ou seja K_n é o único grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal. Estende-se essa conclusão para alguns valores de r e t .

Lema 6.1. *Sejam $2t - 3 \geq r \geq t \geq 3$, $\ell \geq 1$ e n inteiros positivos. Então $c_{r,t,\ell}(n) = \mathcal{C}_{r,t,\ell}(K_n)$ e o grafo completo K_n é o único com essa propriedade dentre todos os grafos com n vértices.*

Demonstração. Seja G um grafo com n vértices e com alguma aresta $e = \{v, w\}$ faltando. Seja Δ uma r -coloração de G livre de $S_{t,\ell}$ -arco-íris. Vamos mostrar que Δ pode ser estendida para uma coloração de $G' = G + e$. Sejam S_v e S_w os conjuntos das cores que aparecem em pelo menos ℓ arestas incidentes a v e w , respectivamente, logo $|S_v|, |S_w| \leq t-1$. Se $S_v \cap S_w \neq \emptyset$, então podemos estender Δ a G' colorindo e com qualquer cor de $S_v \cap S_w$. Agora se $S_v \cap S_w = \emptyset$, em particular $|S_v| + |S_w| \leq r \leq 2t - 3$. Se $t-1 = |S_v| > |S_w|$, podemos colorir e com qualquer cor em S_v . Se $|S_v|, |S_w| < t-1$, então podemos colorir e com qualquer cor. Portanto, Δ pode ser estendida a uma coloração de G' .

Para concluir a prova, mostraremos que pelo menos uma das colorações de G pode ser estendida a uma de G' de mais de uma maneira. Como $t \geq 3$, qualquer coloração monocromática de G pode ser estendida a um coloração de $G + e$ colorindo e com qualquer cor, logo $|\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)| < |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G + e)|$. \square

Antes de seguirmos com o caso geral do Teorema 1.3, vamos demonstrar o caso mais simples $\ell = 1$ para facilitar o entendimento do problema. Considere uma r -coloração do grafo G livre de S_t -arco-íris. Por definição, para todo vértice de G , o número de cores aparecendo em arestas incidentes a v é no máximo $t - 1$. Para conjuntos $S_1, \dots, S_n \subseteq [r]$, denote por $\mathcal{C}_{r,t,(S_1,\dots,S_n)}(G)$ o conjunto de todas as colorações de G tais que nenhuma aresta incidente ao vértice v_i é colorida com cores do conjunto $[r] \setminus S_i$, para todo $i = 1 \dots, n$. Então o conjunto $\mathcal{C}_{r,t}(G)$ de todas as r -colorações de G livres de S_t -arco-íris satisfaz

$$\mathcal{C}_{r,t}(G) = \bigcup_{\substack{(S_1,\dots,S_n) \\ |S_i|=t-1, i=1,\dots,n}} \mathcal{C}_{r,t,(S_1,\dots,S_n)}(G). \quad (6.1)$$

Observe que a união não é disjunta, pois menos do que $t - 1$ cores poderiam aparecer nas arestas incidentes a algum vértice.

Esta decomposição pode ser generalizada para qualquer $\ell \geq 1$. A diferença para uma r -coloração de G livre de $S_{t,\ell}$ -arco-íris é que os conjuntos S_i contêm as cores que aparecem pelo menos ℓ vezes em arestas incidentes em v_i , as quais chamamos de *cores abundantes* em relação a v_i , enquanto que as cores restantes são ditas *cores raras* para v_i . Analogamente ao caso anterior, $\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S_1,\dots,S_n)}(G)$ denota o conjunto de todas as r -colorações de G onde menos que ℓ arestas incidentes a v_i são coloridas com cada cor do conjunto $[r] \setminus S_i$, para todo $i = 1 \dots, n$. Como em (6.1), o conjunto $\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)$ de todas as r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris satisfaz

$$\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G) = \bigcup_{\substack{(S_1,\dots,S_n) \\ |S_i|=t-1, i=1,\dots,n}} \mathcal{C}_{r,t,\ell,(S_1,\dots,S_n)}(G). \quad (6.2)$$

A demonstração do caso mais simples do Teorema 1.3 é feita em quatro passos. Primeiro mostramos que qualquer grafo extremal deve conter muitas arestas, pois, caso contrário, não se supera o número de colorações alcançadas pelo grafo completo. Depois provamos que a maior parte das colorações em (6.1) originam-se dos casos em que quase todos os conjuntos S_i são idênticos. Usando esses fatos, podemos provar que o grafo extremal tem grau mínimo grande, o que nos permite provar que todo grafo extremal coincide com o grafo completo.

O lema a seguir é o primeiro passo da demonstração descrita acima, que é provado facilmente para o caso geral $\ell \geq 1$.

Lema 6.2. *Para $r \geq t \geq 3$ e $\ell \geq 1$, existem constantes n_0 e $D > 0$ tais que, se $G = (V, E)$ é um grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal com $n \geq n_0$ vértices, então*

$$|E(G)| \geq \binom{n}{2} - Dn \log_{t-1} n.$$

Demonstração. Fixe $r \geq t \geq 3$, $\ell \geq 1$ e seja $G = (V, E)$ um grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal de n vértices com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Observe que G possui pelo menos

$$(t-1) \binom{n}{2} \tag{6.3}$$

r -colorações livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris, pois o grafo completo K_n tem pelo menos esta quantidade de colorações: escolha um $(t-1)$ -subconjunto S de $[r]$, e, para cada aresta de K_n , atribua uma das cores de S .

Considere a decomposição (6.2), e tome S_1, \dots, S_n os conjuntos de cores abundantes. As colorações em $\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S_1,\dots,S_n)}(G)$ podem ser produzidas da seguinte maneira: para cada vértice v_i escolhemos no máximo $(r-t+1)(\ell-1)$ arestas incidentes para atribuir cores que não estão em S_i e as colorimos com estas cores, pois existem $r-t+1$ cores raras e cada cor rara aparece no máximo em $\ell-1$ arestas incidentes a v_i . Para as arestas $\{v_i, v_j\} \in E$ remanescentes, são atribuídas as cores

em $S_i \cap S_j$. Para n suficientemente grande, isto implica que

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(S_1, \dots, S_n)(G)| &\leq \left(\sum_{j=0}^{(r-t+1)(\ell-1)} \binom{n-1}{j} \cdot r^j \right)^n \cdot \prod_{\{v_i, v_j\} \in E} |S_i \cap S_j| \\ &\leq n^{(r-t+1)(\ell-1)n} \cdot r^{(r-t+1)(\ell-1)n} \cdot (t-1)^{|E|}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como (S_1, \dots, S_n) pode ser escolhido de $\binom{r}{t-1}^n$ maneiras,

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)| &\leq \sum_{\substack{(S_1, \dots, S_n) \\ |S_i|=t-1, i=1, \dots, n}} |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(S_1, \dots, S_n)(G)| \\ &\leq \binom{r}{t-1}^n \cdot n^{2(r-t+1)(\ell-1)n} \cdot (t-1)^{|E|} \\ &\leq (t-1)^{Dn \log_{t-1} n} \cdot (t-1)^{|E|}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde $D = \log_{t-1} \binom{r}{t-1} + 2(r-t+1)(\ell-1)$ é uma constante. Combinando (6.3) e (6.5), temos

$$(t-1)^{Dn \log_{t-1} n} \cdot (t-1)^{|E|} \geq (t-1)^{\binom{n}{2}} \implies |E| \geq \binom{n}{2} - Dn \log_{t-1} n,$$

como queríamos. \square

Para prosseguir com o segundo passo da demonstração, vamos estudar as colorações cujos conjuntos de cores abundantes são os mesmos para quase todos os vértices. Para uma constante $A > 0$, seja \mathcal{S}_A o conjunto de todas as coleções (S_1, \dots, S_n) de $(t-1)$ -subconjuntos de $[r]$ onde nenhum conjunto S_i aparece mais do que $n - A \log_{t-1} n$ vezes, $i \in \{1, \dots, n\}$. Provaremos que podemos encontrar A para o qual o número de colorações em \mathcal{S}_A é desprezível. Como no resultado anterior, esta propriedade é provada para qualquer $\ell \geq 1$.

Lema 6.3. *Sejam $r \geq t \geq 3$ e $\ell \geq 1$ inteiros. Para todo $D > 0$ existe uma constante positiva A com a seguinte propriedade. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, qualquer grafo de n vértices $G = (V, E)$ com pelo*

menos $\binom{n}{2} - Dn \log_{t-1} n$ arestas satisfaz

$$\left| \bigcup_{(S_1, \dots, S_n) \in \mathcal{S}_A} \mathcal{C}_{r,t,\ell,(S_1, \dots, S_n)}(G) \right| \leq \varepsilon(t-1)^{|E(G)|}.$$

Demonstração. Tome

$$A > \max \left\{ \frac{3(r-t+1)(\ell-1)}{1 - \log_{t-1}(t-2)}, 2D \right\},$$

e seja B um inteiro satisfazendo $n/\binom{r}{t-1} \leq B \leq n - A \log_{t-1} n$, onde n será escolhido suficientemente grande no decorrer da demonstração. Dado um grafo de n vértices $G = (V, E)$ com $|E| \geq \binom{n}{2} - Dn \log_{t-1} n$, fornecemos um limitante superior para o número de r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris no conjunto $\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S_1, \dots, S_n)}(G)$ tal que $\max_S |\{v \in V : S_v = S \text{ e } |S| = t-1\}| = B$.

Para gerar estas colorações, escolhemos um conjunto $U \subset V$ tal que $|U| = B$ e um $(t-1)$ -subconjunto S de $[r]$ que é atribuído a todos os vértices em U . Então atribuímos outros $(t-1)$ -subconjuntos aos $n - B$ vértices remanescentes de G . Denote por $E(U, V \setminus U)$ o conjunto das arestas com um vértice em U e outro em $V \setminus U$. Analogamente à demonstração do Lema 6.2 (veja (6.4)), para cada vértice v_i escolhemos no máximo $(r-t+1)(\ell-1)$ arestas de no máximo $\sum_{i=0}^{(r-t+1)(\ell-1)} \binom{n-1}{i} \leq n^{(r-t+1)(\ell-1)}$ maneiras para n suficientemente grande. Estas arestas são associadas a cores que não estão em S_i de no máximo $r^{(r-t+1)(\ell-1)}$ maneiras. As arestas restantes $\{v_i, v_j\} \in E$ são atribuídas a cores em $S_i \cap S_j$. Qualquer uma destas arestas em $E(U, V \setminus U)$ pode ser atribuída a no máximo $t-2$ cores, já que o conjunto de seus extremos são distintos. Conseqüentemente, o número de r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris é limitado superiormente por

$$\begin{aligned} & \binom{n}{B} \cdot \binom{r}{t-1}^{n-B+1} \cdot (nr)^{(r-t+1)(\ell-1)n} \cdot (t-2)^{|E(U, V \setminus U)|} \cdot (t-1)^{|E(G)| - |E(U, V \setminus U)|} \\ = & \binom{n}{B} \cdot \binom{r}{t-1}^{n-B+1} \cdot (nr)^{(r-t+1)(\ell-1)n} \cdot (t-1)^{|E(G)|} \cdot \left(\frac{t-2}{t-1}\right)^{|E(U, V \setminus U)|}. \quad (6.6) \end{aligned}$$

Note que, para n grande,

$$\begin{aligned}
|E(U, V \setminus U)| &\geq \binom{n}{2} - Dn \log_{t-1} n - \binom{B}{2} - \binom{n-B}{2} \\
&= -Dn \log_{t-1} n + Bn - B^2 \\
&\geq -Dn \log_{t-1} n + \min \left\{ An \log_{t-1} n - A^2 \log_{t-1}^2 n, \frac{n^2}{\binom{r}{t-1}} - \frac{n^2}{\binom{r}{t-1}^2} \right\} \\
&= (A - D)n \log_{t-1} n - A^2 \log_{t-1}^2 n.
\end{aligned}$$

Assim, como $A > 2D$ e n é suficientemente grande (em particular n depende de A , r , ℓ e t), obtemos $|E(U, V \setminus U)| \geq (An \log_{t-1} n)/2$.

Se somamos (6.6) para todos os possíveis valores de B , obtemos no máximo

$$\begin{aligned}
&2^n \cdot \binom{r}{t-1}^n \cdot (nr)^{(r-t+1)(\ell-1)n} \cdot (t-1)^{|E(G)|} \cdot \left(\frac{t-2}{t-1}\right)^{\frac{An \log_{t-1} n}{2}} \\
&\leq 2^{n+n \log_2 \binom{r}{t-1}} \cdot (t-1)^{|E(G)|+n(r-t+1)(\ell-1) \log_{t-1}(rn)} \cdot \left(\frac{t-2}{t-1}\right)^{\frac{An \log_{t-1} n}{2}} \\
&\leq \varepsilon (t-1)^{|E(G)|}
\end{aligned}$$

r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris, onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário, contanto que escolhemos n suficientemente grande, já que temos $A > \frac{3(r-t+1)(\ell-1)}{1-\log_{t-1}(t-2)}$. \square

O próximo passo para demonstrar o Teorema 1.3 para $\ell = 1$ é garantir que qualquer grafo extremal possui grau mínimo grande. Ao contrário dos passos anteriores, agora vamos lidar exclusivamente com o caso $\ell = 1$. É neste passo que a generalização torna-se mais complicada, para demonstrar esta propriedade para $\ell > 1$ aplicamos o Teorema 5.1.

Lema 6.4. *Para inteiros $r \geq t \geq 3$ existe um n_0 tal que o grau mínimo de G satisfaz $\delta(G) \geq 3n/4 - 1$ para todo G , grafo $\mathcal{C}_{r,t,1}$ -extremal com $n \geq n_0$ vértices.*

Demonstração. Suponha que G , um grafo $\mathcal{C}_{r,t,1}$ -extremal de n vértices, tem um vértice v com grau $d(v) < 3n/4 - 1$. Sejam $w_1, \dots, w_{\lceil n/4 \rceil}$ os vértices em G que não são adjacentes a v . Denote por G' o grafo G unido com as arestas $\{v, w_1\}, \dots, \{v, w_{\lceil n/4 \rceil}\}$.

A ideia básica desta demonstração é mostrar que G' admite mais r -colorações livres de S_t -arco-íris que G , e fazemos isso mostrando que, se comparamos o número de colorações criadas e o número de colorações perdidas com a adição das novas arestas, existem mais colorações do primeiro tipo. Precisamente, dada uma coleção (S_1, \dots, S_n) de $(t-1)$ -subconjuntos de $[r]$, é claro que podemos estender todas as colorações em $\mathcal{C}_{(S_1, \dots, S_n)}(G)$ para colorações em $\mathcal{C}_{(S_1, \dots, S_n)}(G')$ sempre que $S_v \cap S_{w_i} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, \lceil n/4 \rceil\}$, pois podemos atribuir qualquer cor na interseção correspondente de $\{v, w_i\}$ sem produzir uma estrela arco-íris S_t . Além disso, esta extensão pode ser feita de diversas maneiras, dependendo do tamanho das interseções que levam a ‘novas colorações’ de G' , ao contrário das colorações que estão em correspondência 1-1 com as colorações de G . Por outro lado, colorações de G para as quais $S_v \cap S_{w_i} = \emptyset$ para algum i não podem ser estendidas desta maneira, e dizemos que estas colorações são perdidas quando as novas arestas são adicionadas.

Para encontrar um limitante inferior para o número de colorações criadas, considere somente aquelas colorações de G onde todo vértice possui o mesmo $(t-1)$ -subconjunto de cores $S \in [r]$. Cada uma destas colorações pode ser estendida a pelo menos $(t-1)^{n/4} \cdot (t-1)^{|E(G)|}$ colorações de G' livres de S_t -arco-íris atribuindo uma cor arbitrária de S a cada nova aresta. Isto cria pelo menos $((t-1)^{n/4} - 1) \cdot (t-1)^{|E(G)|}$ novas colorações.

Por outro lado, as colorações de G livres de S_t -arco-íris que não podem ser estendidas para colorações de G' são aquelas onde os conjuntos de cores disponíveis para v e para w_i não se interceptam, para algum $i \in \{1, \dots, \lceil n/4 \rceil\}$. Pelo Lema 6.3 com $\varepsilon = 1$, o número de colorações de G onde todo $(t-1)$ -conjunto de cores é atribuído a no máximo $n - A \log_{t-1} n$ vértices de G é no máximo $(t-1)^{|E(G)|}$.

Consequentemente, concentramo-nos nas colorações onde algum $(t-1)$ -conjunto S aparece pelo menos $n - A \log_{t-1} n$ vezes. O número de tais colorações é no máximo

$$n \binom{r - (t-1)}{t-1} \binom{n}{n - A \log_{t-1} n} \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n} (t-1)^{|E(G)|}, \quad (6.7)$$

visto que existem $\binom{r}{t-1}$ maneiras de escolher S_v , um não-vizinho w_i pode ser escolhido de no máximo n maneiras e é atribuído um conjunto S_{w_i} de cores com $S_{w_i} \cap S_v = \emptyset$, o que pode ser feito de $\binom{r-(t-1)}{t-1}$ maneiras. O conjunto S pode ser escolhido de $\binom{r}{t-1}$ maneiras, os vértices que são atribuídos ao conjunto S podem ser escolhidos de no máximo $\binom{n}{n - A \log_{t-1} n} = \binom{n}{A \log_{t-1} n}$ maneiras e todo vértice remanescente é associado a algum $(t-1)$ -subconjunto arbitrário de cores. (Note que este limitante superior abrange todas as colorações onde o conjunto S é atribuído a m vértices, onde $n - A \log_{t-1} n \leq m \leq n$). Claramente, temos $\binom{n}{A \log_{t-1} n} \leq n^{A \log_{t-1} n}$, e, para n grande

$$n \binom{r - (t-1)}{t-1} \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n} < n^{A \log_{t-1} n}.$$

Concluimos de (6.7) que, para n suficientemente grande, o número de r -colorações de G livres de S_t -arco-íris que não podem ser estendidas a colorações de G' é no máximo

$$n^{2A \log_{t-1} n} \cdot (t-1)^{|E(G)|} + (t-1)^{|E(G)|} \ll ((t-1)^{n/4} - 1) \cdot (t-1)^{|E(G)|}.$$

Em outras palavras, com adição das arestas $\{v, w_1\}, \dots, \{v, w_{\lceil n/4 \rceil}\}$ a G , aumentamos o número total de colorações livres de S_t -arco-íris, o que contradiz a escolha de G . \square

Observamos que a demonstração anterior pode ser facilmente adaptada para o caso onde a condição sobre o grau mínimo é substituída por $\delta(G) \geq \alpha n$ para qualquer $0 < \alpha < 1$.

De posse desses três lemas, podemos prosseguir com o último passo da prova do Teorema 1.3 para $\ell = 1$, que mostra, que em um grafo extremal G nenhuma aresta pode estar faltando.

Teorema 6.5. *Para $r \geq t \geq 3$, existe n_0 tal que $c_{r,t,1}(n) = |\mathcal{C}_{r,t,1}(K_n)|$ para todo $n \geq n_0$. Além disso, K_n é o único grafo $\mathcal{C}_{r,t,1}$ -extremal de n vértices.*

Demonstração. Suponha que exista $G = (V, E)$ um grafo $\mathcal{C}_{r,t,1}$ -extremal de n vértices, tal que pelo menos dois vértices não são adjacentes, digamos x e y . Analogamente à demonstração do lema anterior, provamos que $G' = G + \{x, y\}$ possui mais r -colorações livres de S_t -arco-íris do que G , se n é suficientemente grande. Pelo Lema 6.2 sabemos que n pode ser escolhido tal que $|E(G)| \geq \binom{n}{2} - Dn \log_{t-1} n$, onde D é uma constante, e o Lema 6.4 garante que $\delta(G) \geq 3n/4 - 1$.

Toda coloração de G tal que somente $(t - 1)$ cores são usadas pode ser estendida atribuindo qualquer uma dessas $t - 1$ cores a $\{x, y\}$, o que aumenta o número total de colorações em

$$(t - 2) \cdot (t - 1)^{|E(G)|}. \quad (6.8)$$

Mostramos que o número de r -colorações de G livres de S_t -arco-íris que não podem ser estendidas a colorações de G' é menor que (6.8).

Pelo Lema 6.3 com $A = A(r, t, \ell, D)$ e $\varepsilon = 1/2$, podemos escolher n_0 tal que o número de colorações associadas com colorações em \mathcal{S}_A é no máximo $\frac{1}{2}(t - 1)^{|E(G)|}$. Portanto, precisamos considerar apenas colorações do conjunto

$$\mathcal{A} = \bigcup_{(S_1, \dots, S_n) \in \overline{\mathcal{S}_A}} \mathcal{C}_{(S_1, \dots, S_n)}(G). \quad (6.9)$$

As colorações de G que não podem ser estendidas a colorações de G' são aquelas onde os conjuntos de cores S_x e S_y , atribuídos a x e y respectivamente, são disjuntos. Tome (S_1, \dots, S_n) tal que S é atribuído a pelo menos $n - A \log_{t-1} n$ vértices de G .

A condição sobre os graus implica que a vizinhança comum $N(\{x, y\})$ de x e y tem tamanho pelo menos $n/2$. Para qualquer vértice w em $N(\{x, y\})$ temos $S_w \cap (S_x \cup S_y) \leq t-1$. Mais precisamente, temos $|S_w \cap S_x| = a_w$ e $|S_w \cap S_y| \leq t-1-a_w$, então há no máximo $a_w(t-1-a_w) \leq ((t-1)/2)^2$ maneiras de atribuir cores as arestas $\{x, w\}$ e $\{y, w\}$. Consequentemente todas as arestas entre $\{x, y\}$ e sua vizinhança comum $N(\{x, y\})$ podem ser coloridas de no máximo $((t-1)/2)^{2|N(\{x, y\})|}$ maneiras.

Isto leva ao seguinte limitante superior para a quantidade de elementos em (6.9) que não podem ser estendidos a colorações de G' . O conjunto S pode ser escolhido de $\binom{r}{t-1}$ maneiras e, para n grande, existem $\binom{n}{A \log_{t-1} n} < 2^{n/4}$ maneiras de escolher $n - A \log_{t-1} n$ vértices que são atribuídos a S . Para n suficientemente grande, os vértices remanescentes podem ser atribuídos a conjuntos de cores de no máximo $\binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n} < 2^{n/4}$ maneiras, então

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &\leq \binom{n}{A \log_{t-1} n} \cdot \binom{r}{t-1} \cdot \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n} \cdot \frac{(t-1)^{|E(G)|}}{4^{|N(\{x, y\})|}} \\ &\leq \binom{n}{A \log_{t-1} n} \cdot \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n + 1} \cdot \frac{(t-1)^{|E(G)|}}{2^n} \\ &\leq 2^{n/2} \cdot \binom{r}{t-1} \cdot \frac{(t-1)^{|E(G)|}}{2^n} \\ &\leq \frac{1}{2^{n/2}} \cdot \binom{r}{t-1} \cdot (t-1)^{|E(G)|}. \end{aligned}$$

Em geral, o número de todas as colorações de G que não podem ser estendidas pela adição da aresta $\{x, y\}$ ao grafo G não é maior que

$$\frac{1}{2} (t-1)^{|E(G)|} + \frac{1}{2^{n/2}} \cdot \binom{r}{t-1} \cdot (t-1)^{|E(G)|},$$

o que é menor que (6.8) para n suficientemente grande. \square

Nesta seção mostramos que K_n é o único grafo $C_{r,t,1}$ -extremal de n vértices, a ideia agora é generalizar este fato para encontrar o grafo $C_{r,t,\ell}$ -extremal de n vértices.

6.2 Caso geral

Nesta seção, vamos demonstrar o Teorema 1.3 para $\ell \geq 2$. Lembre que uma estrela colorida $S_{t\ell}$ com $t\ell$ arestas tal que t cores distintas são atribuídas a exatamente ℓ arestas é chamada de um $S_{t,\ell}$ -arco-íris. Como observamos antes, a estratégia para obter este resultado é exatamente a mesma usada no caso $\ell = 1$, mas a presença de cores raras tornarão os argumentos mais técnicos. Porém o primeiro e o segundo passos da prova, que mostram que o grafo extremal tem muitas arestas e que a maioria das colorações tem a propriedade de que quase todos os vértices têm o mesmo conjunto de cores abundantes, já foi demonstrado para o caso geral $\ell \geq 1$ (Lemas 6.2 e 6.3).

Para realizar os demais passos, usamos a estratégia empregada no Lema 6.4, e mostramos que o número de colorações criadas excede o número de colorações perdidas quando arestas são adicionadas. Para isso, calculamos um limitante inferior para o número de colorações criadas e um limitante superior para o número de colorações perdidas, e mostramos que o limitante inferior é maior que o limitante superior. Neste caso, o cálculo desses limitantes será um pouco mais complicado devido à existência das cores raras. Lembrando que, as cores abundantes em relação a v_i são as cores que aparecem pelo menos ℓ vezes em arestas incidentes em v_i , e as cores restantes são ditas cores raras para v_i .

Observe que, se consideramos apenas as colorações cuja coleção satisfaz $S_1 = \dots = S_n$, então o conjunto de cores abundantes e de cores raras são os mesmos para todos os vértices. Para qualquer r -coloração livre de $S_{t,\ell}$ -arco-íris em $\mathcal{C}_{(S_1, \dots, S_n)}(G)$, o grafo induzido por cada cor rara tem grau máximo menor que ℓ , dessa forma precisamos contar o número de subgrafos de G desse tipo. Podemos aplicar a fórmula de Bender e Canfield (equação (5.1)) diretamente para encontrar um limitante superior para o número de colorações perdidas, pois podemos assumir

que sempre que uma aresta é necessária para o subgrafo ela está no grafo, ou seja podemos assumir que o grafo possui todas as arestas. Porém, isto não pode ser feito para o limitante inferior para o número das colorações criadas, neste caso precisamos de uma aproximação do resultado de Bender e Canfield. Lembre que, dado um grafo H de n vértices e uma sequência de inteiros $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$, denotamos por $N_H(\mathbf{d})$ o número de subgrafos com a sequência de graus \mathbf{d} em H . Mais geralmente, dada a matriz $\vec{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^k)$, denotamos por $N_H(\vec{\mathbf{d}})$ o número de maneiras de selecionar uma k -upla (H_1, \dots, H_k) de subgrafos de H aresta-disjuntos tal que cada subgrafo H_i tem sequência de graus \mathbf{d}^i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Claramente temos,

$$N_H(\vec{\mathbf{d}}) \leq N_H(\mathbf{d}^1) \cdots N_H(\mathbf{d}^k).$$

Dizemos que uma sequência $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ é γ -densa se $\sum_{i=1}^n d_i \geq \gamma n$.

Enunciamos novamente o Teorema 5.1. Intuitivamente, este resultado garante que, em um grafo com ‘muitas’ arestas, existe um subgrafo ‘quase gerador’ com um número ‘grande’ de subgrafos de qualquer sequência de graus que é suficientemente densa. Equivalentemente, podemos imaginar que um oponente tem o poder de remover uma determinada quantidade de arestas do grafo completo. O teorema diz que, depois de tal deleção, encontramos um subgrafo ‘grande’ de K_n de quem o oponente não conseguiu destruir muitos subgrafos. Este é o resultado que utilizamos para demonstrar o Teorema 1.3 para $\ell \geq 2$.

Teorema 5.1. *Dados inteiros positivos d e k , e constantes $D > 0$ e $\gamma > 0$, existem constantes positivas n_0 , M e α satisfazendo a seguinte propriedade para todo $n \geq n_0$. Para todo grafo H com $|V(H)| = n$ e $|E(H)| \geq \binom{n}{2} - Dn \ln n$, existe $W \subseteq V(H)$ com $|W| \geq n - M \ln n$ tal que, para quaisquer sequências de graus γ -densas $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'} \in \{0, \dots, d\}^{|W|}$, onde $k' \leq k$, temos*

$$N_{H[W]}(\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'}) \geq n^{-\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{k'} N_{K_{|W|}}(\mathbf{d}^i).$$

Como vimos, isso falharia trivialmente se exigíssemos $W = V$, pois um inimigo seria capaz de isolar vértices removendo $Dn \log_{t-1} n$ arestas de K_n para produzir G , assim $N_G(\mathbf{d}) = 0$ para qualquer sequência positiva $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$.

Lema 6.6. *Para $r \geq t \geq 3$ e $\ell \geq 1$, existe n_0 tal que qualquer G grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal com $n \geq n_0$ vértices satisfaz $\delta(G) \geq 3n/4 - 1$.*

Demonstração. Suponha que um grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal $G = (V, E)$ com n vértices tem um vértice v com grau $d(v) < 3n/4 - 1$. Suponhamos que n é suficientemente grande de forma que todos os passos da demonstração sejam satisfeitos. Sejam $w_1, \dots, w_{\lceil n/4 \rceil}$ os $\lceil n/4 \rceil$ vértices de G que não são adjacentes a v , e seja G' o grafo obtido pela adição de todas as arestas $\{v, w_i\}$ a G , $i = 1, \dots, \lceil n/4 \rceil$. Seja $D > 0$ tal que G tem pelo menos $\binom{n}{2} - Dn \log_{t-1} n$ arestas (Lema 6.2) e fixe $A > 0$ com a propriedade do Lema 6.3.

Mostramos que o número N' de novas colorações de G' obtidas estendendo as colorações de G é maior que o número N de colorações de G que não podem ser estendidas a colorações de G' . Pelo Lema 6.3 com $\varepsilon = 1/3$, o número de colorações em $\bigcup_{(S_1, \dots, S_n) \in \mathcal{S}_A} \mathcal{C}_{(S_1, \dots, S_n)}(G)$ é no máximo $(t-1)^{|E(G)|}/3$ para n suficientemente grande.

Seja N'_A o número de novas colorações de G' associadas com sequências (S_1, \dots, S_n) em $\overline{\mathcal{S}}_A$, e seja N_A o número de colorações associadas com estas sequências que não podem ser estendidas. No decorrer da demonstração, encontra-se um limitante inferior para N'_A e um limitante superior para N_A para mostrarmos que $N'_A \geq 2N_A$. Como $N'_A \geq (t-2) \cdot (t-1)^{|E(G)|}$ (veja (6.16)), logo

$$\begin{aligned} N' - N &\geq N'_A - \left(N_A + \frac{(t-1)^{|E(G)|}}{3} \right) \geq \frac{N'_A}{2} - \frac{(t-1)^{|E(G)|}}{3} \\ &\geq \left(\frac{(t-2)}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot (t-1)^{|E(G)|} > 0, \end{aligned}$$

como desejamos.

Primeiramente, sejam n_0 , M e α dados pelo Teorema 5.1 aplicado para D , $d = \ell - 1$, $k = r - t + 1$ e $\gamma = 8/9$ (ajustando as constantes para que os logaritmos na hipótese do lema tenham base $t - 1$), e fixe um conjunto $W \subset V$ com $|W| \geq n - M \log_{t-1} n$ tal que $G[W]$ satisfaça a conclusão do teorema.

Limitante Superior: Vamos calcular o limitante superior do número N_A das r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris que são associadas com coleções $(S_1, \dots, S_n) \in \overline{\mathcal{S}}_A$ e que não podem ser estendidas a colorações de G' . Se $S_v \cap S_{w_i} \neq \emptyset$ para todo i , as colorações de $\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S_1,\dots,S_n)}(G)$ podem ser facilmente estendidas para colorações de $\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S_1,\dots,S_n)}(G')$ usando cores abundantes para cada nova aresta, logo podemos assumir que o conjunto de cores disponíveis em v e em w_i não se interceptam para algum $i \in \{1, \dots, \lceil n/4 \rceil\}$. Porém, observe que $S_v \cap S_{w_i} = \emptyset$ não implica que não existe cor disponível para a aresta $\{v, w_i\}$, pois essa possivelmente poderia ser colorida com uma cor rara. Por simplicidade, e como queremos um limitante superior, iremos ignorar este fato e assumir que, se $S_v \cap S_{w_i} = \emptyset$ nunca é possível colorir a aresta $\{v, w_i\}$.

Para construir r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris que são associadas com coleções $(S_1, \dots, S_n) \in \overline{\mathcal{S}}_A$ e que não podem ser estendidas a colorações de G' , procedemos como segue. Primeiro fixamos uma coleção $(S_1, \dots, S_n) \in \overline{\mathcal{S}}_A$ com as propriedades: (i) escolha um $(t - 1)$ -subconjunto $S_v \subset [r]$; (ii) escolha um vértice w que não é adjacente a v ; (iii) escolha um $(t - 1)$ -subconjunto $S_w \subset [r]$, que seja disjunto de S_v , para ser atribuído a w ; (iv) escolha um $(t - 1)$ -subconjunto $S \subset [r]$ para ser atribuído a pelo menos $n - A \log_{t-1} n$ vértices de G ; (v) escolha $n - A \log_{t-1} n$ vértices para atribuir a esse conjunto S ; (vi) atribua quaisquer $(t - 1)$ -subconjuntos de $[r]$ aos $A \log_{t-1} n - 2$ vértices remanescentes. Observe que os passos (i), (ii) e (vi) nos permitem escolher S de tal maneira que mais de $n - A \log_{t-1} n$ vértices são atribuídos a S . O número de escolhas para os conjuntos S_v, S_w, S é no máximo $\binom{r}{t-1}^3$, enquanto n é um limitante superior para o número de escolhas de w .

Os passos (v) e (vi) podem ser realizados de $\binom{n}{n - A \log_{t-1} n} \cdot \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n - 2}$ maneiras, logo, para n grande, um limitante superior para o número de maneiras de fixar a coleção (S_1, \dots, S_n) com as propriedades pedidas é

$$\binom{r}{t-1}^3 \cdot n \cdot \binom{n}{n - A \log_{t-1} n} \cdot \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n - 2},$$

que é no máximo

$$\binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n + 1} \cdot n^{A \log_{t-1} n}. \quad (6.10)$$

Assuma que a coleção (S_1, \dots, S_n) está fixada. Considere $Y = \{u \in V : S_u = S\}$ e $H = G[W \cap Y]$. Agora construímos as colorações em $\mathcal{C}_{(S_1, \dots, S_n)}(G)$. Para isso, procedemos como segue:

- (i) colorir arestas incidentes a vértices $u \in V \setminus Y$ com cores raras em relação a u ;
- (ii) colorir arestas incidentes a vértices $u \in (V \setminus W) \cap Y$ com cores raras em relação a u ;
- (iii) colorir arestas incidentes a $V \setminus Y$ com cores abundantes (em relação a algum extremo em $V \setminus Y$);
- (iv) colorir arestas em H com cores raras (em relação a S);
- (v) colorir arestas com ambos extremos em Y com cores abundantes (em relação a S).

Observe que uma aresta $e = \{u, v\}$ tal que u é atribuído a S , mas v não é, pode ser colorida em (i) se e é atribuída a uma cor rara em relação a v ou em (iii), se e é atribuída a uma cor abundante em relação a v . Por simplicidade, vamos assumir que arestas coloridas em (i) podem ser recoloridas em (iii). Note também que arestas $e = \{u, v\}$ tais que u está em $W \cap Y$ e $v \in (V \setminus W) \cap Y$ são coloridas em (ii) ou (v).

Para o passo (i), existem no máximo $(n^{(\ell-1)(r-t+1)})^{A \log_{t-1} n}$ maneiras de escolher $(\ell-1)$ arestas incidentes em cada vértice w para cada uma das $(r-t+1)$ cores raras. Observe que não precisamos considerar a possibilidade de que poucas arestas são atribuídas a tais cores porque, com nossas estimativas, as arestas coloridas neste ponto serão recoloridas em passos posteriores. O passo (ii) pode ser realizado de no máximo $n^{(\ell-1)(r-t+1)M \log_{t-1} n}$ maneiras, enquanto o passo (iii) pode ser realizado de no máximo $(t-1)^\eta$ maneiras, onde η é o número de arestas incidentes a vértices $V \setminus Y$. Para atribuir cores raras (em relação a S) a arestas de H , usamos o seguinte procedimento.

Procedimento 6.7. *Suponha que temos um grafo de entrada $H = (V, E)$ de q vértices e um conjunto $T \in \binom{[r]}{t-1}$. Assuma que $H_{q,0}$ é um conjunto de vértices isolados rotulados por V . Para $i \in \{1, \dots, r-t+1\}$, escolha um grafo $H_{q,i}$ em $E \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E(H_{q,j})$ com sequências de graus $\mathbf{d}^i = (d_1^i, \dots, d_q^i)$, onde $d_j^i \leq \ell-1$ e atribua a i -ésima cor em $[r] \setminus T$ as arestas de $H_{q,i}$.*

Como estamos procurando por um limitante superior, podemos assumir que $W \cap Y = W$, possivelmente sendo capaz de recolorir algumas arestas já coloridas em passos anteriores. Por simplicidade, denote $|W| = p$. Para $i \in \{1, \dots, r-t+1\}$, tome $r-t+1$ as sequências de graus $\mathbf{d}^i = (d_1^i, \dots, d_p^i)$, onde a i -ésima sequência é associada a i -ésima cor rara: encontramos $r-t+1$ subgrafos aresta-disjuntos H_1, \dots, H_{r-t+1} de H tais que H_i tem sequência de graus \mathbf{d}^i com $i \in \{1, \dots, r-t+1\}$. Note que $N_H(\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{r-t+1})$ é o número de maneiras de se fazer isso. Denotamos $\vec{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{r-t+1})$, onde para cada $\mathbf{d}^i = (d_1^i, \dots, d_p^i)$ todas as componentes são limitadas superiormente por $\ell-1$. Além disso, denotemos $u(\vec{\mathbf{d}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-t+1} \sum_{j=1}^p d_j^i$.

O número de maneiras de realizar os passos (iv) e (v) é limitado superiormente por

$$\sum_{\vec{\mathbf{d}}} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \cdot (t-1)^{|E(G)| - u(\vec{\mathbf{d}}) - \eta},$$

onde a soma é sobre todas as matrizes $\vec{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{r-t+1})$.

Consequentemente, o número de colorações construídas é no máximo

$$n^{(\ell-1)(r-t+1)(A+M) \log_{t-1} n} \cdot (t-1)^\eta \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})-\eta}. \quad (6.11)$$

Assim, escolhendo n suficientemente grande, podemos escolher uma constante arbitrariamente pequena $\delta > 0$ tal que o produto das equações (6.10) e (6.11) é no máximo

$$(1 + \delta)^n \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})}. \quad (6.12)$$

Lembre que uma sequência \mathbf{d} é γ -densa se as componentes de \mathbf{d} somam γp ou mais, caso contrário ela é γ -esparsa (será conveniente o uso de $\gamma = 8/9$ nestes cálculos). Podemos escrever (6.12) da seguinte forma

$$(1 + \delta)^n \cdot \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_-} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_+} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})}, \quad (6.13)$$

onde $\mathbf{s}: [r-t+1] \rightarrow \{0, 1\}$ é uma função que, para cada i , indica se a sequência de graus \mathbf{d}^i é γ -densa (quando $\mathbf{s}(i) = 1$) ou esparsa (quando $\mathbf{s}(i) = 0$), enquanto que $\vec{\mathbf{d}}_+$ e $\vec{\mathbf{d}}_-$ são as matrizes de sequências densas e esparsas respectivamente, que formam uma matriz $\vec{\mathbf{d}}$ com a distribuição determinada por \mathbf{s} . Dividimos a equação (6.13) da seguinte forma: se todas as cores raras geram ‘grafos densos’, ou se isso não ocorre. Por simplicidade, escrevemos $\sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j}$ para dizer que somamos sobre todas as matrizes de sequências de comprimento j cujas sequências de graus são todas densas. Obtemos

$$(1 + \delta)^n \left(\sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} N_H(\vec{\mathbf{d}}_+) (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} + \sum_{\mathbf{s} \neq \vec{\mathbf{1}}} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_-} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_+} N_H(\vec{\mathbf{d}}) (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} \right) \quad (6.14)$$

Observe que a segunda soma pode ser estimada por

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{s} \neq \vec{1}} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_-} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_+} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} \\
& \leq 2^{r-t+1} \ell^{p(r-t+1)} 2^{(r-t+1)/2} \sum_{j=0}^{r-t} \left(\frac{p}{e}\right)^{\gamma p(r-t+1-j)/2} \cdot \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} N_H(\vec{\mathbf{d}}_+) \\
& \leq \ell^{p(r-t+1)} \sum_{j=0}^{r-t} p^{\gamma p(r-t+1-j)/2} \cdot \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i). \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Para ver porque a primeira desigualdade é verdade, note que \mathbf{s} varia em um conjunto de no máximo 2^{r-t+1} elementos, o número de matrizes $\vec{\mathbf{d}}_- = (\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{r-t+1-j})$ é limitado superiormente por $\ell^{p(r-t+1-j)}$ e

$$N_H(\vec{\mathbf{d}}_-) \leq \prod_{i=1}^{r-t+1-j} N_{K_p}(\mathbf{d}^i) \leq \left(\sqrt{2} \left(\frac{p}{e}\right)^{\gamma p/2}\right)^{r-t+1-j} \leq \frac{2^{(r-t+1)/2}}{e^{\gamma p(r-t+1-j)/2}} \cdot p^{\gamma p(r-t+1-j)/2},$$

onde $N_{K_p}(\mathbf{d}^i)$ é limitado usando (5.1) e o fato de que $\sum_j d_j^i \leq \gamma p < p$.

Limitante Inferior: Vamos calcular um limitante inferior para o número N'_A de r -colorações livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris que criamos pela adição das arestas $\{v, w_1\}, \dots, \{v, w_{\lceil n/4 \rceil}\}$ ao grafo G . A ideia aqui é que, se considerarmos as colorações em $\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S,\dots,S)}(G)$ para algum $(t-1)$ -subconjunto S de $[r]$, estas colorações podem ser estendidas a colorações de G' atribuindo qualquer uma das $(t-1)$ cores a cada uma das arestas $\{v, w_i\}$, $i = 1, \dots, \lceil n/4 \rceil$. Conseqüentemente o número de colorações deste tipo para G' é pelo menos $(t-1)^{n/4} \cdot |\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S,\dots,S)}(G)|$. Retirando as colorações já existentes de G , o ganho de colorações é

$$((t-1)^{n/4} - 1) \cdot |\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S,\dots,S)}(G)|.$$

Precisamos encontrar um limitante inferior para $|\mathcal{C}_{r,t,\ell,(S,\dots,S)}(G)|$. Para atribuir cores raras as arestas de G , aplicamos o Procedimento 6.7 para $H = G[W]$ e $T = S$. Como estamos procurando um limitante inferior não podemos supor que $G[W] = K_p$, mas o Teorema 5.1 garante que, para toda k -upla $(\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^k)$

tal que $k \leq r - t + 1$ e $\sum_{j=1}^p d_j^i \geq \gamma p$, para todo i , temos $N_{G[W]}(\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^k) \geq n^{-\alpha} \cdot \prod_{i=1}^k N_{K_p}(\mathbf{d}^i)$. Com isto, um limitante inferior para o número de colorações ganhas pela adição das arestas $\{v, w_1\}, \dots, \{v, w_{\lceil n/4 \rceil}\}$ em G é

$$((t-1)^{n/4} - 1) \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} \cdot N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}}), \quad (6.16)$$

onde somamos sobre matrizes $\vec{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{r-t+1})$, tal que cada $\mathbf{d}^i = (d_1^i, \dots, d_p^i)$ tem as componente limitadas por $\ell - 1$ e $u(\vec{\mathbf{d}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-t+1} \sum_{j=1}^p d_j^i$.

Para concluir nosso argumento, comparamos o limitante superior (6.14) e o limitante inferior (6.16).

Temos

$$\frac{(6.14)}{(6.16)} \leq \frac{(1+\delta)^n \cdot \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} N_{K_p}(\vec{\mathbf{d}}_+) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)}}{((t-1)^{n/4} - 1) \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} \cdot N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}})} \quad (6.17)$$

$$+ \frac{(1+\delta)^n \ell^{p(r-t+1)} \sum_j p^{\gamma p(r-t+1-j)/2} \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i)}{((t-1)^{n/4} - 1) \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} \cdot N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}})}. \quad (6.18)$$

Pela nossa escolha de W , o termo (6.17) se torna

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\delta)^n \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} N_{K_p}(\vec{\mathbf{d}}_+) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)}}{((t-1)^{n/4} - 1) \cdot \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}}_+)} \\ & \leq \frac{(1+\delta)^n \cdot \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} \prod_{i=1}^{r-t+1} N_{K_p}(\mathbf{d}^i) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)}}{((t-1)^{n/4} - 1) \cdot n^{-\alpha} \cdot \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} \prod_{i=1}^{r-t+1} N_{K_p}(\mathbf{d}^i)} \\ & = \frac{n^\alpha \cdot (1+\delta)^n}{((t-1)^{n/4} - 1)} \leq \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

para n suficientemente grande.

Para o segundo termo (6.18), escrevemos

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\delta)^n \cdot \ell^{p(r-t+1)} \sum_j p^{\gamma p(r-t+1-j)/2} \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i)}{((t-1)^{n/4} - 1) \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}})} \\ & = \frac{(1+\delta)^n \cdot \ell^{p(r-t+1)}}{(t-1)^{n/4} - 1} \sum_{j=0}^{r-t} \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j} \frac{p^{\gamma p(r-t+1-j)/2} \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i)}{\sum_{\vec{\mathbf{d}}} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}})} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{(1 + \delta)^n \ell^{p(r-t+1)}}{(t-1)^{n/4} - 1} \sum_{j=0}^{r-t} \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j} \frac{p^{\gamma p(r-t+1-j)/2} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)}}{(t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)-(r-t+1-j)p(\ell-1)/2} N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}}_+, \vec{\mathbf{d}}^*)} \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i) \quad (6.20)$$

onde $\vec{\mathbf{d}}^*$ é uma matriz de $r-t+1-j$ seqüências de graus iguais a $\mathbf{d}^* = (\ell-1, \dots, \ell-1)$ (um dos termos $\ell-1$ pode ser substituído por $\ell-2$ nestas seqüências de acordo com as restrições da paridade). Note que, para obtermos (6.20), substituímos o denominador dentro das somas por um único termo, que depende de cada termo particular que está sendo adicionado. Nossa escolha de W implica que, quando $|\vec{\mathbf{d}}_+| = j$,

$$\begin{aligned} & N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}}_+, \vec{\mathbf{d}}^*) \\ & \geq n^{-\alpha} \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i) \prod_{i=1}^{r-t+1-j} N_{K_p}(\mathbf{d}^*), \\ & \geq n^{-\alpha} \left(\frac{\sqrt{2}}{(\ell-1)!^p} \left(\frac{p(\ell-1)}{e} \right)^{p(\ell-1)/2} \exp \left(\frac{1 - (\ell-1)^2}{4} \right) \right)^{r-t+1-j} \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i) \\ & \geq \frac{n^{-\alpha} \cdot p^{p(\ell-1)(r-t+1-j)/2}}{(e(\ell-1)!)^{(\ell-1)p(r-t+1)}} \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Para encontrar um limitante superior para (6.20), combinamos (6.21) com o fato de que o número de termos nas somas é no máximo $(r-t+1)\ell^{p(r-t+1)}$ e $\gamma = 8/9$ e que, para $\ell \geq 2$, o termo $p^{(r-t+1-j) \cdot p(17/9-\ell)/2}$ é maximizada por $j = r-t$, que leva ao seguinte limitante superior para (6.20):

$$\begin{aligned} & \frac{n^\alpha (1 + \delta)^n \cdot \ell^{2p(r-t+1)} \cdot (r-t+1) \cdot (e \cdot (t-1) \cdot (\ell-1)!)^{(r-t+1)(\ell-1)p}}{((t-1)^{n/4} - 1) p^{(\ell-(17/9))p/2}} \\ & = (t-1)^{O(n)} \cdot p^{(17/9-\ell)p/2} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

para n grande, pois $p \geq n - M \log_{t-1} n$. Portanto, obtemos

$$\frac{(6.14)}{(6.16)} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad (6.22)$$

para $t \geq 3$ e n suficientemente grande, o que implica que $N'_A \geq 2N_A$, como queríamos. \square

O próximo passo é mostrar que no grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal não pode estar faltando nenhuma aresta, dessa forma teremos provado que o grafo completo é o grafo procurado.

Teorema 6.8. *Para $r \geq t \geq 3$ e $\ell \geq 2$, existe n_0 tal que $c_{r,t,\ell}(n) = |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(K_n)|$ para $n \geq n_0$. Além disso, K_n é o único grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal de n vértices.*

Demonstração. Dados $r \geq t \geq 3$ e $\ell \geq 2$. Suponha que existe G um grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal de n vértices com pelo menos dois vértices não adjacentes, digamos x e y . Vamos provar que $G' = G + \{x, y\}$ possui mais colorações que G se n é suficientemente grande. A estratégia utilizada aqui é a mesma empregada no Lema 6.6.

Pelo Lema 6.2 sabemos que n_0 pode ser escolhido tal que $|E(G)| \geq \binom{n}{2} - Dn \log_{t-1} n$, onde $D = D(r, t)$ é uma constante. Tome $A > 0$ com a propriedade do Lema 6.3. Sejam n_0 , M e α dado pelo Teorema 5.1 aplicado para D , $d = \ell - 1$, $k = r - t + 1$ e $\gamma = 8/9$ (ajustando as constantes tal que os logaritmos tenham base $t - 1$), e tome um conjunto $W \subset V$ com $|W| \geq n - M \log_{t-1} n = p$ tal que $G[W]$ satisfaz a conclusão do teorema.

Mostramos que o número N' de novas colorações de G' obtidas estendendo as colorações de G é maior que o número N de colorações de G que não podem ser estendidas a colorações de G' . Pelo Lema 6.3 com $\varepsilon = 1/3$, o número de colorações em $\bigcup_{(S_1, \dots, S_n) \in \mathcal{S}_A} \mathcal{C}_{(S_1, \dots, S_n)}(G)$ é no máximo $(t - 1)^{|E(G)|}/3$ para n suficientemente grande.

Seja N'_A o número de novas colorações de G' associadas às sequências (S_1, \dots, S_n) em $\overline{\mathcal{S}_A}$, e seja N_A o número de colorações associadas a tais sequências que não podem ser estendidas. No restante da prova, vamos encontrar um limitante inferior para N'_A e um limitante superior para N_A para mostrar que $N'_A \geq 2N_A$. Uma vez que novamente temos $N'_A \geq (t - 2) \cdot (t - 1)^{|E(G)|}$ (veja (6.23)), obtemos o

resultado desejado:

$$N' - N \geq N'_A - \left(N_A + \frac{(t-1)^{|E(G)|}}{3} \right) \geq \left(\frac{(t-2)}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot (t-1)^{|E(G)|} > 0.$$

Com os mesmos argumentos usados para (6.16), podemos mostrar que toda coloração de G para a qual todo vértice é atribuído ao mesmo conjunto de $(t-1)$ cores pode ser estendida a colorações de G' , o que aumenta o número total de r -colorações livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris em pelo menos

$$(t-2) \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}}) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})}, \quad (6.23)$$

onde somamos novamente sobre as matrizes $\vec{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{r-t+1})$, onde cada $\mathbf{d}^i = (d_1^i, \dots, d_p^i)$ tem as componentes limitadas por $\ell-1$. Além disso, lembre que $u(\vec{\mathbf{d}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-t+1} \sum_{j=1}^p d_j^i$.

Vamos mostrar que o número de colorações de G que não podem ser estendidas a colorações de G' é menor que (6.23). Calculamos um limitante superior para o número N_A de r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris que são associadas a coleções $(S_1, \dots, S_n) \in \overline{\mathcal{S}_A}$ e não podem ser estendidas a colorações de G' . Essas colorações tem a propriedade de que os conjuntos de cores S_x e S_y atribuídas a x e y , respectivamente são disjuntos. Tome (S_1, \dots, S_n) para o qual isto segue, e onde S é atribuído a pelo menos $n - A \log_{t-1} n$ vértices de G . O $(t-1)$ -subconjunto $S \subset [r]$ pode ser escolhido de $\binom{r}{t-1}$ maneiras e existem $\binom{n}{n - A \log_{t-1} n}$ maneiras de escolher $n - A \log_{t-1} n$ vértices para serem atribuídos a S . O vértices restantes podem ser atribuídos a algum $(t-1)$ -subconjunto de no máximo $\binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n}$ maneiras. Consequentemente,

$$\binom{r}{t-1} \cdot \binom{n}{n - A \log_{t-1} n} \cdot \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n} \leq \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n + 1} \cdot n^{A \log_{t-1} n} \quad (6.24)$$

é um limitante superior do número de maneiras de fixar uma coleção (S_1, \dots, S_n) com as propriedades desejadas.

Obtemos um limitante superior para o número de colorações em $\mathcal{C}_{(S_1, \dots, S_n)}(G)$ que não podem ser estendidas a colorações de G' . Como x, y tem grau pelo menos $3n/4$ pelo Lema 6.6, sua vizinhança comum $N(\{x, y\})$ tem tamanho pelo menos $n/2$. Para qualquer vértice w em $N(\{x, y\})$ temos $S_w \cap (S_x \cup S_y) \leq t - 1$. Mais precisamente, temos $|S_w \cap S_x| = a_w$ e $|S_w \cap S_y| \leq t - 1 - a_w$, então existem no máximo $a_w(t - 1 - a_w) \leq ((t - 1)/2)^2$ maneiras de atribuir cores abundantes as arestas $\{x, w\}$ e $\{y, w\}$. Consequentemente todas as arestas entre $\{x, y\}$ e sua vizinhança comum $N(\{x, y\})$ podem ser coloridas de no máximo $((t - 1)/2)^{2|N(\{x, y\})|}$ maneiras com cores abundantes (em relação a ambos extremos).

Considere $Y = \{u \in V : S_u = S\}$ e $H = G[W \cap Y]$, como na prova do Lema 6.6, vamos proceder da seguinte forma: (i) colorir arestas incidentes a vértices $u \in V \setminus Y$ com cores raras em relação a u ; (ii) colorir arestas incidentes a vértices de $(V \setminus W) \cap Y$ com cores raras; (iii) colorir arestas incidentes a $V \setminus Y$ com cores abundantes (em relação a algum extremo em $V \setminus Y$); (iv) colorir arestas em H com cores raras (em relação a S); (v) colorir arestas com ambos extremos em Y com cores abundantes (em relação a S).

Obtemos o seguinte limitante superior para o número de colorações de G que não podem ser estendidas a G' :

$$\begin{aligned} & \binom{r}{t-1}^{A \log_{t-1} n + 1} \cdot n^{A \log_{t-1} n} \cdot n^{(\ell-1)(r-t+1)(A+M) \log_{t-1} n} \\ & \cdot \sum_{\vec{d}} N_H(\vec{d}) \cdot (t-1)^{|E(G)| - u(\vec{d}) - 2|N(x,y)|} \cdot \left(\frac{t-1}{2}\right)^{2|N(x,y)|}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Assim, escolhendo n suficientemente grande, a equação (6.25) é no máximo

$$2^{n/2} \cdot \sum_{\vec{d}} N_H(\vec{d}) \cdot (t-1)^{|E(G)| - u(\vec{d}) - 2|N(x,y)|} \cdot \left(\frac{t-1}{2}\right)^{2|N(x,y)|}, \quad (6.26)$$

que pode ser reescrita como

$$2^{n/2} \cdot \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_-} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_+} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \cdot \frac{(t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})}}{2^{2|N(x,y)|}}, \quad (6.27)$$

onde, como em (6.13), $\mathbf{s}: [r-t+1] \rightarrow \{0,1\}$ é uma função que, para cada i , indica se a sequência de graus \mathbf{d}^i é γ -densa ou não, enquanto que $\vec{\mathbf{d}}_+$ e $\vec{\mathbf{d}}_-$ são matrizes de sequências de graus γ -densas and esparsas respectivamente, que geram uma matriz $\vec{\mathbf{d}}$ com a distribuição determinada por \mathbf{s} . Dividimos a equação (6.27) da seguinte forma: se todas as cores raras geram um grafo 'denso' ou se se não, o que leva a

$$\begin{aligned} & 2^{n/2} \left(\sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} N_H(\vec{\mathbf{d}}_+) \frac{(t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)}}{2^{2|N(x,y)|}} + \sum_{\mathbf{s} \neq \vec{\mathbf{1}}} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_-} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_+} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \frac{(t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})}}{2^{2|N(x,y)|}} \right) \\ & \leq \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} N_H(\vec{\mathbf{d}}_+) \frac{(t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)}}{2^{n/2}} + \sum_{\mathbf{s} \neq \vec{\mathbf{1}}} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_-} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_+} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \frac{(t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})}}{2^{n/2}}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Usando a estimativa (6.15) temos

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{s} \neq \vec{\mathbf{1}}} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_-} \sum_{\vec{\mathbf{d}}_+} N_H(\vec{\mathbf{d}}) \cdot \frac{(t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})}}{2^{n/2}} \\ & \leq \ell^{p(r-t+1)} \cdot \sum_{j=1}^{r-t} p^{\gamma p(r-t+1-j)/2} \cdot \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j} \frac{(t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)}}{2^{n/2}} \cdot \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Para concluir nosso argumento, comparamos o limitante superior (6.28) e o limitante inferior (6.23). Obtemos

$$\frac{(6.28)}{(6.23)} \leq \frac{\sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=r-t+1} N_H(\vec{\mathbf{d}}_+) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)}}{2^{n/2}(t-2) \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} \cdot N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}})} \quad (6.30)$$

$$+ \frac{\ell^{p(r-t+1)} \cdot \sum_j p^{\gamma p(r-t+1-j)/2} \cdot \sum_{|\vec{\mathbf{d}}_+|=j} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}}_+)} \cdot \prod_{i=1}^j N_{K_p}(\mathbf{d}_+^i)}{2^{n/2}(t-2) \cdot \sum_{\vec{\mathbf{d}}} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{\mathbf{d}})} \cdot N_{G[W]}(\vec{\mathbf{d}})}. \quad (6.31)$$

Usando estimativas de (6.19), o termo(6.30) pode ser limitado por

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{|\vec{d}_+|=r-t+1} N_H(\vec{d}_+) \cdot (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{d}_+)}}{2^{n/2}(t-2) \cdot \sum_{|\vec{d}_+|=r-t+1} (t-1)^{|E(G)|-u(\vec{d}_+)} \cdot N_{G[W]}(\vec{d}_+)} \\ & \leq \frac{n^\alpha}{2^{n/2}(t-2)} \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Para o segundo termo (6.31), repetimos os argumentos usados na prova do Lema 6.6. Portanto, obtemos

$$\frac{(6.28)}{(6.23)} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad (6.32)$$

para $t \geq 3$ e n suficientemente grande, como queríamos. \square

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Esta tese produziu dois trabalhos até o momento. Os capítulos 5 e 6 formam um trabalho, intitulado “Edge-coloring avoiding fixed rainbow stars” que foi submetido a um periódico e cujo resumo expandido foi publicado nos anais da conferência VIII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium [47]. Também, apresentei este trabalho na conferência 39th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. Este trabalho foi realizado em parceria com Hanno Lefmann e Knut Odernann. Os capítulos 3 e 4 resultaram em outro trabalho, que teve seu resumo expandido intitulado “The threshold for the appearance of a properly coloured spanning tree in an edge coloured random graph”, publicado nos anais da conferência Bordeaux Graph Workshop [42] e cuja versão completa está em estágio final de preparação. Este trabalho está sendo realizado em parceria com Pu Gao e, em parte, foi realizado durante o doutorado sanduíche na Monash University.

Neste capítulo, tratamos de problemas em aberto relacionados com o primeiro problema apresentado nesta tese, Capítulos 3 e 4, na primeira seção e na segunda seção, problemas relacionados com os Capítulos 5 e 6. Na última seção apresento brevemente, um pouco do que foi estudado durante meu estágio doutoral na Monash University com a supervisão de Nicholas Wormald.

7.1 Função limiar para a existência de uma árvore propriamente colorida

No presente trabalho, mostramos que a função limiar para a existência de uma árvore geradora propriamente colorida em $\mathcal{G}_{n,p}^k$, onde $k \geq 3$, é a função limiar de conexidade.

Teorema 1.1. *Sejam $k \geq 3$ e $\epsilon > 0$. Se $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ satisfaz $p \geq (1 + \epsilon) \log n/n$, então um grafo aleatório aresta-colorido $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$ contém uma árvore geradora propriamente colorida a.q.c.*

Observe que determinamos o limiar severo para a propriedade da existência de uma árvore geradora propriamente colorida. Um problema imediato é investigar se é possível encontrar uma função $p(n)$ menor que $(1 + \epsilon) \log n/n$ que satisfaça a propriedade de que $\mathcal{G}_{n,p}^3$ contém uma árvore geradora propriamente colorida, isto é, se é possível determinar o erro de forma mais precisa.

Problema: Provamos que $\log n/n$ é o limiar severo para a propriedade \mathcal{P} da existência de uma árvore geradora propriamente colorida. Ou seja, dado $G \in \mathcal{G}_{n,p}^k$, para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G \in \mathcal{P}) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \leq (1 - \epsilon) \log n/n \\ 1, & \text{se } p \geq (1 + \epsilon) \log n/n. \end{cases}$$

A pergunta agora é: existe função $\omega(n) \ll \log n$ com $\omega(n) \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G \in \mathcal{P}) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \leq (\log n - \omega(n))/n \quad ? \\ 1, & \text{se } p \geq (\log n + \omega(n))/n. \end{cases}$$

Ao final do meu estágio na Monash University, Pu Gao, Rajko Nenadov e eu discutimos sobre uma nova estratégia para abordar o problema de maneira que obtivéssemos um limiar severo mais preciso. Chegamos a indícios de que $p(n) =$

$\frac{\log n + \omega(n)}{n}$ com $\omega(n) \rightarrow \infty$ é um limiar severo mais preciso para a existência de uma árvore geradora propriamente colorida em $G \in \mathcal{G}_{n,p}^3$. A nova estratégia para chegar nesse resultado está baseada nos seguintes passos, cujas demonstrações ainda estão sendo revisadas.

Geramos $\mathcal{G}_{n,p}^3$ em três passos, usando a técnica de revelar as arestas em rodadas.

1. Revelamos arestas com probabilidade $p_1 = \epsilon_1 \frac{\log n}{n}$, com $0 < \epsilon_1 < 1$ e colorimo-as uniformemente.

Afirmção: Existe a.q.c. um caminho P propriamente colorido de comprimento $n - \frac{n \log \log^{\frac{3}{2}} n}{\log n}$ em $G \in \mathcal{G}_{n,p_1}^3$.

Utilizamos um algoritmo de busca em profundidade para garantir a existência desse caminho.

2. Revelamos arestas entre $[n] \setminus V(P)$ e $V(P)$ com probabilidade $p_2 = \epsilon_2 \frac{\log n}{n}$, com $0 < \epsilon_2 < 1$ e colorimo-as uniformemente. Denote por C_1 os vértices de P que não são incidentes a arestas vermelhas, C_2 os vértices de P que não são incidentes a arestas azuis, e, por C_3 os vértices de P que não são incidentes a arestas verdes. Dado $v \in [n] \setminus V(P)$ denotamos por $d_1(v, C_1)$ o número de arestas vermelhas entre v e o conjunto C_1 . Similarmente, temos os números $d_2(v, C_2)$ e $d_3(v, C_3)$. Seja

$$W = \{v \in [n] \setminus V(P) : d_1(v, C_1) < \beta \log n \text{ OU } d_2(v, C_2) < \beta \log n \text{ OU } d_3(v, C_3) < \beta \log n\}$$

Afirmção: O conjunto W é tal que $|W| \leq n^{1-\delta}$ para algum $\delta < 0$, com probabilidade $1 - o(1)$.

Ou seja, grande parte dos vértices em $[n] \setminus V(P)$ não pertencem a W . Esses vértices em $[n] \setminus V(P)$ que não estão em W podem ser emparelhados facilmente com vértices do caminho P pois, para todas as cores,

temos que o número de arestas entre cada um desses vértices e C_1 e C_2 e C_3 é pelo menos $\beta \log n$. Mais ainda, encontramos um 2-fator entre esses vértices e $V(P)$.

3. Revelamos arestas com probabilidade $p_3 = \frac{\epsilon_3 \log n + \omega(n)}{n}$, com $0 < \epsilon_3 < 1$ e colorimo-as uniformemente.

Afirmção: Existe a.q.c. um emparelhamento M_1 entre W e os demais vértices.

Então, escolhemos um emparelhamento entre $V(P)$ e $([n] \setminus V(P)) \setminus W$ tal que a árvore encontrada é propriamente colorida.

Afirmção: Existe a.q.c. um emparelhamento M_2 entre $V(P)$ e $([n] \setminus V(P)) \setminus W$ que, juntamente com o caminho P e o emparelhamento M_1 , gera uma árvore propriamente colorida.

As constantes ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 são escolhidas de maneira que

$$\mathcal{G}_{n,p_1}^3 \cup \mathcal{G}_{n,p_2}^3 \cup \mathcal{G}_{n,p_3}^3 = \mathcal{G}_{n,p}.$$

Além do problema de determinar o limiar severo mais preciso para uma árvore geradora propriamente colorida, esse resultado nos inspira a pensar em outras estruturas geradoras coloridas. Em [29], Espig, Frieze e Krivelevich provaram que a função limiar para a propriedade de que um grafo de $\mathcal{G}_{n,p}^2$ contenha um ciclo hamiltoniano propriamente colorido é $2 \log n/n$. Podemos investigar esse problema em $\mathcal{G}_{n,p}^k$ com $k \geq 3$.

Problema: Determinar função limiar para a existência de um ciclo hamiltoniano propriamente colorido em $\mathcal{G}_{n,p}^k$ com $k \geq 3$. Investigar se o limiar $t = t(n)$ para a existência de um ciclo hamiltoniano em $\mathcal{G}_{n,p}$ é o mesmo para a existência de um ciclo hamiltoniano propriamente colorido em $\mathcal{G}_{n,p}^3$.

Para demonstrar o Teorema 1.1, provamos um resultado sobre o número $\nu(G)$ para $G \in \mathcal{G}_{n,p/3}$, onde $p = (1 + \epsilon) \log n/n$.

Lema 1.2. *Se $q = (1 + \epsilon) \log n/3n$ então a.q.c. dado $G \in \mathcal{G}_{n,q}$*

$$\left| \nu(G) - \frac{1}{2} \left(n - n^{\frac{2-\epsilon}{3}} \right) \right| = O(n^{\frac{1}{3}}).$$

Frieze [36] provou a existência de um emparelhamento de cardinalidade $\frac{1}{2}(1 - (1 + \epsilon(c))e^{-c})n$ em que $\epsilon(c) \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow \infty$. O resultado de Frieze [36] garante que para $c = \frac{1+\epsilon}{3} \log n$ temos $\nu(G) \geq \frac{1}{2}(1 - (1 + \epsilon(c))n^{-\frac{1+\epsilon}{3}})n$ para $G \in \mathcal{G}_{n,c/n}$.

Problema: Pelo resultado de Frieze [36], $|\nu(G) - \frac{1}{2}(n - ne^{-c})| = o(ne^{-c})$. Quando $c = \frac{1+\epsilon}{3} \log n$ mostramos uma cota mais precisa para o erro, provamos que o erro na verdade é de $O(n^{\frac{1}{3}})$. Será que é possível obter cotas mais precisas para o erro quando $c \leq \frac{1}{5} \log n$?

7.2 Proibindo estrelas arco-íris

No Capítulo 5 provamos um resultado sobre enumeração de grafos, que foi uma ferramenta necessária para a demonstração do segundo problema de que tratamos nessa tese.

Teorema 5.1. *Dados inteiros positivos d e k , constantes $D > 0$ e $\gamma > 0$, existem constantes positivas n_0 , M e α satisfazendo a seguinte propriedade para todo $n \geq n_0$. Para todo grafo H com $|V(H)| = n$ e $|E(H)| \geq \binom{n}{2} - Dn \ln n$, existe $W \subseteq V(H)$ com $|W| \geq n - M \ln n$ tal que, para quaisquer sequências de graus γ -densas $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'} \in \{0, \dots, d\}^{|W|}$, onde $k' \leq k$, temos*

$$N_{H[W]}(\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{k'}) \geq n^{-\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{k'} N_{K_{|W|}}(\mathbf{d}^i).$$

Um problema imediato é investigar se é possível refinar o Teorema 5.1, cuja demonstração necessitou da hipótese de que as sequências de graus fossem

‘minimamente densas’. Acreditamos que por meio de uma técnica mais aprimorada seja possível enfraquecer a hipótese, obtendo o mesmo resultado para sequências de graus mais gerais.

Problema: Encontrar outra técnica de demonstração para obter o resultado 5.1 para sequências de graus $\gamma(n)$ -densas, onde $\gamma(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Lembrando que o Exemplo 5.6 mostra que a hipótese não pode ser enfraquecida arbitrariamente, ou seja, γ não pode ser uma função qualquer que tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.

O segundo problema de que tratamos nessa tese envolveu colorações que evitam um determinado padrão. Lembre que, para qualquer grafo G , denotamos por $\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)$ o conjunto de todas as r -colorações de G livres de $S_{t,\ell}$ -arco-íris. Escrevemos,

$$c_{r,t,\ell}(n) = \max \{ |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)| : |V(G)| = n \},$$

e dizemos que um grafo G de n vértices é $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal se $|\mathcal{C}_{r,t,\ell}(G)| = c_{r,t,\ell}(n)$.

Teorema 1.3. *Para todo $r, t \geq 3$ e $\ell \geq 1$, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $c_{r,t,\ell}(n) = |\mathcal{C}_{r,t,\ell}(K_n)|$. Além disso, o grafo completo K_n é o único grafo $\mathcal{C}_{r,t,\ell}$ -extremal com n vértices.*

Acreditamos que nossas demonstrações podem ser estendidas para situações um pouco mais gerais. Para descrever um caso, suponha que, em adição a $r, t \geq 2$ e $\ell \geq 1$, temos um parâmetro $k \geq 2$, e procuramos por colorações de arestas livres de um conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$ com a seguinte propriedade. Para cada vértice v_i , existe um conjunto C_i de cores tal que $|C_i| = t$ e cada cor aparece pelo menos ℓ vezes em arestas incidentes a v_i , com a propriedade adicional de que $C_i \cap C_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Note que o caso $k = 1$ é o problema apresentado nesta tese.

Problema: O grafo completo K_n também é o único grafo extremal neste caso?

7.3 Jogos de polícia e ladrão em grafos

O jogo *polícia e ladrão* em grafos foi introduzido independentemente por Nowakowski e Winkler [56] e por Quilliot [58]. O jogo é jogado em um grafo G conexo, simples, não-direcionado e finito. Existem dois jogadores, os jogadores são um conjunto de $k \geq 1$ *policiais* e um *ladrão*, e o objetivo dos policiais é capturar o ladrão. Os policiais começam o jogo ocupando um conjunto qualquer de k vértices e então o ladrão escolhe um vértice. Os jogadores conhecem as posições dos outros jogadores. Após isso, eles se movem alternadamente, primeiramente policiais e depois o ladrão. Os jogadores usam as arestas para se mover de um vértice a outro. Mais de um policial pode ocupar o mesmo vértice e os jogadores podem escolher permanecer em suas posições atuais. Os policiais vencem se algum policial ocupar o mesmo vértice que o ladrão em um número finito de passos, caso contrário, o ladrão vence. O número mínimo de policiais para o qual existe uma estratégia vencedora, não importando como o ladrão joga, é chamado de *número policial de G* e é denotado por $c(G)$. O número policial foi introduzido por Aigner e Fromme [1] que provaram que se G é planar, então $c(G) \leq 3$. Os autores de [1] também observaram que se G tem cintura pelo menos 5 (isto é, não contém ciclos de comprimento menor ou igual a 4) então o número policial é pelo menos o grau mínimo do grafo G . Outros resultados podem ser encontrados em [21, 43].

Exemplo 7.1. Observe que,

- $c(K_n) = 1$, pois escolhida uma posição para um policial não importa onde o ladrão aparece o policial ocupará o mesmo vértice que o ladrão após seu próximo movimento.
- $c(P_n) = 1$, pois o policial pode ‘encurrular’ o ladrão.
- $c(C_n) = 2$, pois neste caso os policiais precisam ‘cercar’ o ladrão. Se tivéssemos apenas um policial o ladrão poderia fugir para sempre.

A conjectura mais importante nesta área é a Conjectura de Meyniel, que afirma que $c(n) = O(\sqrt{n})$, onde $c(n)$ é o maior $c(G)$ dentre todos os grafos G conexos de n vértices. O primeiro limitante superior não-trivial foi obtido por Frankl [33], que mostrou que $c(G) \leq O\left(\frac{n \log \log n}{\log n}\right)$. Mais tarde, Chiniforooshan [22] mostrou que $c(n) \leq O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. Atualmente, sabe-se que o número policial para qualquer grafo conexo de n vértices é no máximo $n2^{-(1+o(1))\sqrt{\log_2 n}}$, resultado obtido independentemente por Lu e Peng [52]; Scott e Sudakov [60], e Frieze, Krivelevich e Loh [37].

Existem variantes para este jogo de polícia e ladrão em grafos, podemos fixar diferentes tamanhos para cada arestas por meio de pesos nas arestas. Seja $G^* = (V, E, \omega)$ um grafo ponderado, definido por um grafo $G = (V, E)$ e uma coleção de pesos $\omega = \{\omega_e\}_{e \in E}$ associada a cada aresta $e \in E$. Definimos $c(G^*)$ analogamente ao número $c(G)$.

Problema: Seja K_n^* um grafo completo ponderado tal que o peso de cada aresta é uma variável aleatória de distribuição exponencial com parâmetro 1. Existe relação entre $c(K_n^*) = c^*(n)$ e $c(n)$? É possível obter um limitante superior não-trivial para $c^*(n)$?

Durante meu estágio na Monash University, tratamos desse problema. Meu supervisor Nicholas Wormald, Andrea Collecchio (professor integrante do grupo de pesquisa), Yozef Tjandra (orientando de Wormald) e eu discutimos sobre essa questão quando colocamos policiais aleatoriamente com probabilidade $p = O\left(\frac{\log^2}{\sqrt{n}}\right)$. Encontramos uma estratégia vencedora para os policiais, dividindo-os em times e atribuindo a cada time uma missão específica. Acreditamos que $O(\log \sqrt{n})$ times são suficientes para capturar o ladrão. Cada time de policiais é formado da seguinte maneira. Para cada vértice $v \in V(G)$, determinamos se há um policial do time nesse vértice com probabilidade $O\left(\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}\right)$. Pela desigualdade de Chernoff (Lema 2.4), o

número de policiais em cada time é $O(\sqrt{n} \log^2 n)$, com probabilidade alta. Portanto, usamos $O(\sqrt{n} \log^3 n)$ policiais no total.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Aigner and M. Fromme. A game of cops and robbers. *Discrete Applied Mathematics*, 8:1–11, 1984.
- [2] M. Albert, A. Frieze, and B. Reed. Multicoloured Hamilton cycles. *Electronic Journal of Combinatorics*, 2, 1995.
- [3] N. Alon, J. Balogh, P. Keevash, and B. Sudakov. The number of edge colorings with no monochromatic cliques. *J. London Math. Soc.*, 70(2):273–288, 2004.
- [4] N. Alon and J. H. Spencer. *The Probabilistic Method*. Wiley-Interscience, 2008.
- [5] D. Angluin and L. G. Valiant. Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings. *Journal of Computer and System Sciences*, 18:155–193, 1979.
- [6] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(5):711–712, 1976.
- [7] J. Aronson, A. Frieze, and B. G. Pittel. Maximum matchings in sparse random graphs: Karp-Sipser re-visited. *Random Structures and Algorithms*, 12(2):111–177, 1998.
- [8] D. Bal, P. Bennett, A. Frieze, and P. Prałat. Power of k choices and rainbow spanning trees in random graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 22(1):22pp, 2016.
- [9] D. Bal and A. Frieze. Rainbow matchings and Hamilton cycles in random graphs. *Random Structures and Algorithms*, 48(3):503–523, 2016.
- [10] J. Balogh. A remark on the number of edge colorings of graphs. *European Journal of Combinatorics*, 27:565–573, 2006.

- [11] E. A. Bender and E. R. Canfield. The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 24(3):296–307, 1978.
- [12] F.S. Benevides, C. Hoppen, and R.M. Sampaio. Edge-colorings of graphs avoiding a prescribed coloring pattern. *Sum(m)it:240 disponível em <https://arxiv.org/abs/1605.08013>*, 2014.
- [13] C. Berge. Sur le couplage maximum d'un graphe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 247:258–259, 1958.
- [14] B. Bollobás and A. M. Frieze. On matchings and Hamiltonian cycles in random graphs. *Discrete Math.*, 28:23–46, 1985.
- [15] B. Bollobás and A. Thomason. Random graphs of small order. *Random Graphs'83, edited by M. Karoński and A. Ruciński*, pages 47–97, 1985.
- [16] B. Bollobás. A probabilistic proof of an asymptotic formula of the number of labelled regular graphs. *European Journal of Combinatorics*, 1:311–316, 1980.
- [17] B. Bollobás. The evolution of random graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 236(1):257–274, 1984.
- [18] B. Bollobás. *Random graphs*. Academic Press, 1985.
- [19] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, 1998.
- [20] B. Bollobás and A. G. Thomason. Threshold functions. *Combinatorica*, 7:35–38, 1987.
- [21] A. Bonato and R. Nowakowski. *The game of cops and robbers on graphs*. American Mathematical Society, 2011.
- [22] E. Chiniforooshan. A better bound for the cop number of general graphs. *Journal of Graph Theory*, 58:45–48, 2004.

- [23] C. D. Cooper and A. M. Frieze. Multi-coloured Hamilton cycles in randomly coloured random graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 11(2):129–134, 2002.
- [24] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, 1997.
- [25] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs I. *Math Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [26] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5:17–61, 1960.
- [27] P. Erdős and A. Rényi. On the existence of a factor of degree one of a connected random graph. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 17:359–368, 1966.
- [28] P. Erdős. Some new applications of probability methods to combinatorial analysis and graph theory. *Proc. of the Fifth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla.)*, pages 39–51, 1974.
- [29] L. Espig, A. Frieze, and M. Krivelevich. Elegantly colored paths and cycles in edge colored random graphs. *disponível em <http://arxiv.org/abs/1403.1453>*.
- [30] A. Ferber and M. Krivelevich. Rainbow Hamilton cycles in random graphs and hypergraphs. *Recent Trends in Combinatorics, IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 159:167–189, 2016.
- [31] A. Ferber, G. Kronenberg, F. Mousset, and C. Shikhelman. Packing a randomly edge-colored random graph with rainbow k -outs. *preprint, arXiv:1410.1803*.
- [32] A. Ferber, R. Nenadov, and U. Peter. Universality of random graphs and rainbow embedding. *Random Structures and Algorithms*, 48(3):546–564, 2016.

- [33] P. Frankl. Cops and robbers in graphs with large girth and carley graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 17:301–305, 1987.
- [34] E. Friedgut. Sharp thresholds of graph properties, and the k -sat problem. *Journal of the American Mathematical Society*, 12(4):1017–1054, 1999.
- [35] E. Friedgut and G. Kalai. Every monotone graph property has a sharp threshold. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(10):2993–3002, 1996.
- [36] A. Frieze. On large matchings and cycles in sparse random graphs. *Discrete Mathematics*, 59:243–256, 1986.
- [37] A. Frieze, M. Krivelevich, and P. Loh. Variations on cops and robbers. *Journal of Graph Theory*, 69:383–402, 2012.
- [38] A. Frieze and T. Łuczak. Hamiltonian cycles in a class of random graphs: one step further. *Random Graphs'87*, edited by M. Karonski, J. Jaworski and A. Ruciński, pages 53–59, 1990.
- [39] A. M. Frieze and P. Loh. Rainbow Hamilton cycles in random graphs. *Random Structures and Algorithms*, 44(3):328–354, 2014.
- [40] A. M. Frieze and B. D. McKay. Multicoloured trees in random graphs. *Random Structures and Algorithms*, 5:45–56, 1994.
- [41] P. Gao. Uniform generation of d -factors in dense host graphs. *Graphs and Combinatorics*, 30:581–589, 2014.
- [42] P. Gao, C. Hoppen, and J. Sanches. The threshold for the appearance of a properly coloured spanning tree in an edge coloured random graph. *disponible en <http://bgw.labri.fr/2016/bgw2016-booklet.pdf>*.

- [43] G. Hahn. Cops, robbers and graphs. *Tatra Mountain Mathematical Publications*, 36:163–176, 2007.
- [44] C. Hoppen, Y. Kohayakawa, and H. Lefmann. Edge-colorings of graphs avoiding fixed monochromatic subgraphs with linear Turán number. *European Journal of Combinatorics*, 35:354–373, 2014.
- [45] C. Hoppen and H. Lefmann. Edge-colorings avoiding a fixed matching with a prescribed color pattern. *European Journal of Combinatorics*, 47:75–94, 2015.
- [46] C. Hoppen, H. Lefmann, and K. Odermann. A rainbow Erdős-Rothschild problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 43:473–480, 2015.
- [47] C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, and J. Sanches. Edge-colorings avoiding fixed rainbow stars. *Electronic Notes in Discrete Mathematics - LAGOS'15*, 50:275–280, 2015.
- [48] B. R. James. *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*. IMPA, 2013.
- [49] S. Janson, T. Łuczak, and A. Ruciński. *Random graphs*. John Wiley and Sons, 2000.
- [50] S. Janson and N. C. Wormald. Rainbow Hamilton cycles in random regular graphs. *Random Structures and Algorithms*, 30:35–49, 2007.
- [51] R. M. Karp and M. Sipser. Maximum matchings in sparse random graphs. *Proceedings of the 22nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computing*, pages 364–375, 1981.
- [52] L. Lu and X. Peng. On Meyniel’s conjecture of the cop number. *Journal of Graph Theory*, 71:192–205, 2012.
- [53] B. D. McKay and N. C. Wormald. Asymptotic enumeration by degree sequence of graphs of high degree. *European Journal of Combinatorics*, 11:565–580, 1990.

- [54] B. D. McKay and N. C. Wormald. Asymptotic enumeration by degree sequence of graphs with degrees $o(\sqrt{n})$. *Combinatorica*, 11:369–382, 1991.
- [55] B.D. McKay and N.C. Wormald. Uniform generation of random regular graphs of moderate degree. *Journal of Algorithms*, 11:52–67, 1990.
- [56] R. Nowakowski and P. Winkler. Vertex-to-vertex pursuit in a graph. *Discrete Math.*, 43:235–239, 1983.
- [57] O. Pikhurko and Z.B. Yilma. The maximum number of K_3 -free and K_4 -free edge 4-colorings. *J. London Math. Soc.*, 85:593–615, 2012.
- [58] A. Quilliot. *Jeux et pointes fixes su las graphes*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1978.
- [59] S. P. Radziszowski. Small Ramsey numbers (dynamic survey). *Electronic Journal of Combinatorics*, 1994.
- [60] A. Scott and B. Sudakov. A bound for the cops and robbers problem. *SIAM J. of Discrete Math*, 25:1438–1442, 2011.
- [61] P. Turán. On an extremal problem in graph theory. *Matematiko Fizicki Lapok*, 48:436–452, 1941.
- [62] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22:107–111, 1947.
- [63] N. C. Wormald. *Some problems in enumeration of labelled graphs*. PhD thesis, University of Newcastle, 1978.
- [64] N.C. Wormald. Models of random regular graphs. In *Surveys in Combinatorics, 1999*, pages 239–298, Cambridge, 1999. London Mathematical Society Lecture Note Series 267 (J. D. Lamb and D. A. Preece, eds) Cambridge University Press.

- [65] R. Yuster. The number of edge colorings with no monochromatic triangle. *J. Graph Theory*, 21:441–452, 1996.