Caracterização das isometrias dos espaços euclidianos

Bruno Freitas dos Santos, orientadora: Patrícia K. Klaser

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - **SIC 2016**

1. Introdução

Definição 1. *Isometrias são as bijeções de um espaço métrico X que preservam distâncias, isto é*

$$\forall x, y \in X,\ d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

Quando $X = \mathbb{R}^n$ tem a métrica usual chamamos este de espaço eucilidiano de dimensão n ($\mathbb{E}^n$) e dizemos que f é um movimento rígido. A partir de agora fixamos $X = \mathbb{E}^n$. É imediato que toda rotação e translação em $n = 2$ é uma isometria. Iremos descrever geometricamente todas isometrias do $\mathbb{E}^2$ e $\mathbb{E}^3$ primeiro usando o grupo ortogonal e depois decompondo operadores lineares em operadores de menor dimensão. Também provaremos que qualquer subgrupo finito das isometrias do plano é cíclico ou diedral.

2. Isometrias que fixam a origem

Começamos a descrição das isometrias pelas mais simples: aquelas que fixam a origem do espaço.

Definição 2. *Uma transformação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita ortogonal quando f preserva o produto interno, isto é,*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$$

Teorema 1. *f é uma isometria que fixa a origem se e somente se f é um operador ortogonal.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $f \in Isom(\mathbb{E}^n)$ e $f(O) = O$ temos, expandindo $|x-y|^2 = |f(x) - f(y)|^2$,

$$\forall x, y \in \mathbb{E}^n,\ f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \qquad (1)$$

Provaremos que (1) é suficiente para que uma função qualquer f seja um operador linear (e portanto ortogonal).
Se (e_j) é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ então por (1)

$$f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

portanto $(f(e_j))$ forma uma base ortonormal.
Se (h_i) é uma base ortonormal temos

$$(\forall x \in \mathbb{E}^n)\ \exists (a_i) \mid x = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot h_i) h_i$$

logo por (1)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(x) \cdot f(e_i)) f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) f(e_i)$$

Decompondo x em $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ temos

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(e_i)$$

portanto f é uma transformação linear.
($\Leftarrow$) Basta lembrar que f é um operador e portanto $|f(x) - f(y)|^2 = f(x-y) \cdot f(x-y) = |x-y|^2$. □

3. Caracterização algébrica das isometrias

Lembrando que os operadores ortogonais tem como representação matricial o grupo ortogonal

$$O(n) = \left\{A \in \mathbb{R}_{n \times n} : A^t A = I\right\}$$

podemos expandir o Teorema 1 para todas isometrias.

Teorema 2.

$$Isom(\mathbb{E}^n) = \{(x \mapsto Ax + B) : A \in O(n),\ B \in \mathbb{E}^n\}$$

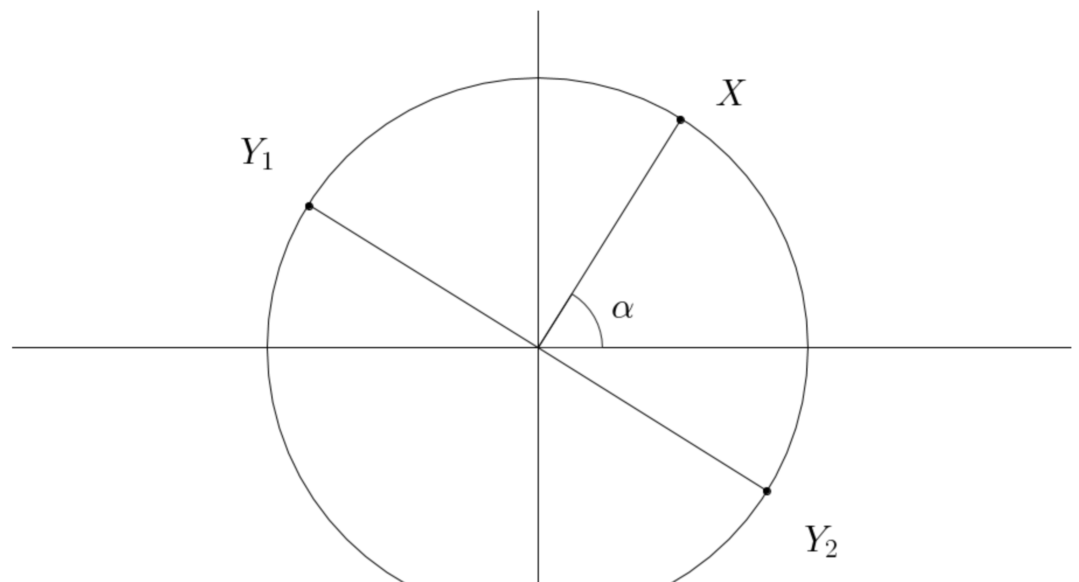
A prova é imediata, basta usar translações e o teorema anterior.

Quando $\det A = +1$ dizemos que a isometria preserva a orientação. Veremos a seguir que para $n \in \{2, 3\}$ essa definição concorda com a usual.

4. Descrição geométrica das isometrias do plano

Os movimentos rígidos do plano são bem conhecidos mas os derivamos atráves do Teorema 1 para demonstrar sua utilização:

É fácil ver que $A \in O(n)$ se e somente se as colunas de A formam um conjunto ortonormal portanto pela figura



segue que $A \in O(2)$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

onde a segunda coluna de A é Y_1 ou Y_2 respectivamente. A primeira representa uma rotação por α e a segunda uma reflexão na reta que passa pela origem e por $(\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2))$. Compondo esses operadores com uma translação temos as seguintes possibilidades para uma isometria do plano:

1. translação
2. rotação ao redor de um ponto qualquer
3. reflexão em uma reta seguida por uma translação paralela à ela

(incluímos a translação pelo vetor nulo)

Somente 3 não preserva orientação.

5. Subgrupos finitos de $Isom(\mathbb{E}^2)$

Para qualquer espaço métrico, $Isom(X)$ é um subgrupo do grupo de permutações de X. Se $G \subset Isom(\mathbb{E}^n)$ é um subgrupo finito então G não pode conter translações.

$$f : G \to \{-1, +1\},\ (x \mapsto Ax + v) \mapsto \det A$$

é um homomorfismo de grupos logo o subgrupo $G^+ = f^{-1}(+1)$ composto pelas isometrias que preservam a orientação é normal e possui índice $m \leq 2$. Note que se $n = 2$ então G^+ é um grupo de rotações (incluindo identidade).

Proposição 1. *Se $G \subset Isom(\mathbb{E}^n)$ é um subgrupo finito então G fixa pelo menos um ponto.*

Demonstração. Para $v \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$c(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in G} C(v)$$

Para toda $(\lambda_i)_{i \leq n} \subset \mathbb{R}$ com $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $(v_i)_{i \leq n} \subset \mathbb{R}^n$ e $D \in Isom(\mathbb{E}^n)$ temos, pelo Teorema 2,

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D(v_i)$$

Utilizando $c(v)$ e $D \in G$ temos

$$D(c(v)) = \sum_{C \in G} \frac{D(C(v))}{|G|} = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in G} D(C(v)) = c(v)$$

já que translações em grupos são bijeções.

Note que escolhas diferentes de v não implicam necessariamente $c(v) \neq c(v')$: o subgrupo finito gerado por uma rotação de $2\pi/3$ em $\mathbb{E}^2$ possui somente um ponto fixo. □

Da Proposição 1 segue que as rotações pertencentes à G são ao redor de um mesmo ponto, digamos c. Seja $m = [G : G^+]$ o índice de G^+, temos dois casos:

- $m = 1$: então $G = G^+$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G = [r]$ onde r é a rotação ao redor de c por um ângulo $2\pi/k$
- $m = 2$: $G^+ = [r]$ como no caso anterior e $G = [r] \cup R_s[r]$ onde R_s é uma reflexão em uma reta s que passa pelo ponto c (pela Proposição 1).

Portanto todo subgrupo finito de $Isom(\mathbb{E}^2)$ é isomorfo à um grupo cíclico ou à um grupo diedral.

6. Isometrias do espaço

Novamente buscamos representar primeiro as isometrias que fixam a origem já que essas são operadores lineares. O aumento de dimensão dificulta bastante a aplicação direta do método anterior (utilizando o grupo ortogonal) para o espaço. Felizmente podemos reduzir o problema à caracterizar as isometrias do plano e da reta pelas seguintes proposições:

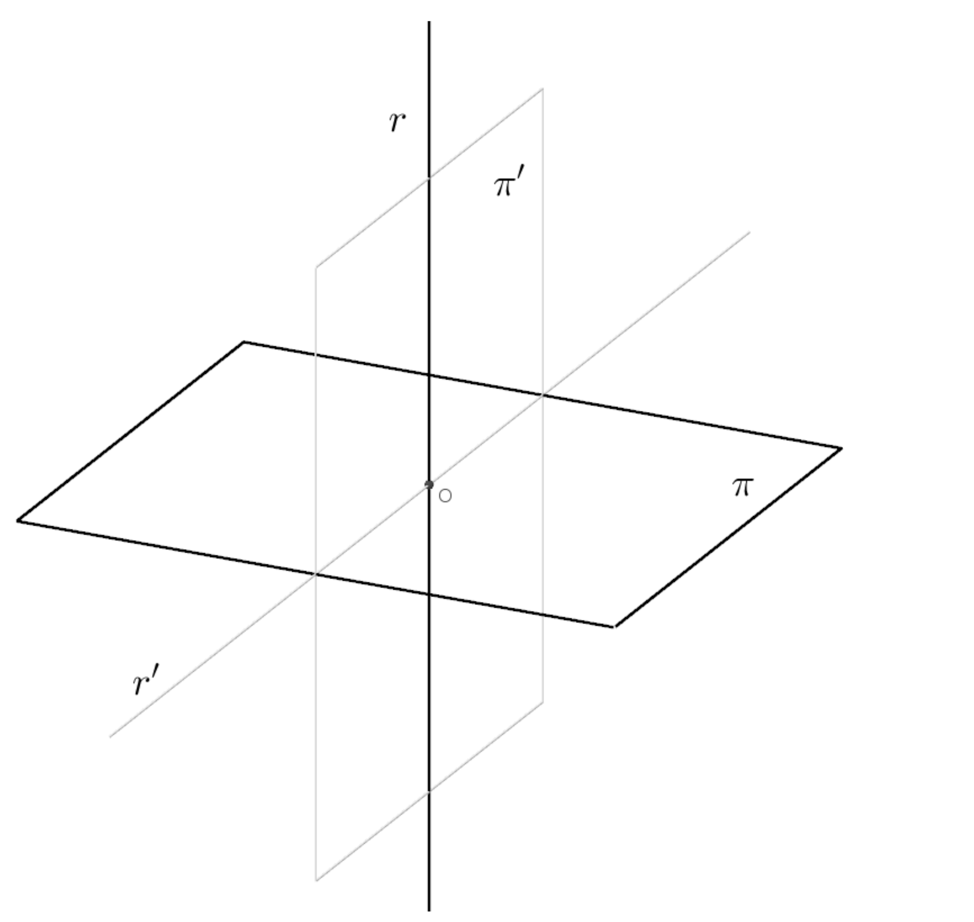
Proposição 2. *Se V é um espaço vetorial real de dimensão ímpar então todo operador linear no espaço V possui um autovetor.*

Proposição 3. *Seja A um operador ortogonal real em um espaço de dimensão finita e F um subespaço invariante sob A. Temos*

- *O complemento ortogonal de F também é invariante sob A*
- *$A|F : F \to F$ é bijetora (e portanto é um operador ortogonal)*

Logo podemos assumir que existe uma reta r tal que $r = F$ e o plano $\pi = F^\perp$ perpendicular à ela são invariantes sob $A \in O(3)$. Restringindo o operador A à esses subespaços temos isometrias do $\mathbb{E}^1$ e $\mathbb{E}^2$ respectivamente. Seja $r' \subset \pi$ uma reta qualquer e π' o plano determinado por r e r'. Como $O(1) = \{(1), (-1)\}$ temos

$A\|r$	$A\|\pi$	A
(1)	id.	identidade
(1)	rotação	rotação ao redor do eixo r
(1)	reflexão em r'	reflexão no plano π'
(-1)	id.	reflexão no plano π
(-1)	rotação	reflexão em π seguida por rotação em r
(-1)	reflexão em r'	rotação em r' por um ângulo π



Compondo A com uma translação temos as seguintes possibilidades

1. translação
2. rotação em um eixo qualquer seguida de translação paralela ao eixo
3. reflexão em um plano qualquer seguida de translação paralela ao plano
4. rotação em um eixo qualquer seguida de reflexão em um plano perpendicular à ele

Como esperávamos somente 1 e 2 preservam orientação: basta escolher uma base apropriada para A de modo que $\det A = (\det A|r)(\det A|\pi)$.