# Grafos: um estudo sobre isomorfismo entre grafos simples e conexos e grafos linha


- André Luiz Giordani
- Orientador: Vilmar Trevisan

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Pura e Aplicada


## Introdução

- Estudamos o Teorema do Isomorfismo de Whitney que determina uma relação de isomorfismo entre grafos e seus respectivos grafos linha. Mais especificamente, dados dois grafos conexos e simples G e H, eles são isomorfos se, e somente se, $l(G)$ e $l(H)$ são isomorfos, a menos de uma exceção.
- A única exceção do teorema, os grafos nomeados $K_{1,3}$ e $K_3$, se deve ao fato dos grafos não serem isomorfos mas possuírem grafos linha isomorfos.

## Objetivo

- O objetivo do estudo é demonstrar o Teorema do Isomorfismo de Whitney, utilizando uma técnica que visa demonstrar que ao construir um grafo linha, é aplicada uma função bijetora que preserva adjacência e não adjacência de suas arestas.

## Definições

- Um grafo é um objeto formado por dois conjuntos denotados por (V, E) em que V é um conjunto arbitrário não vazio, seus elementos são chamados de vértices, e E é um subconjunto de V, em que seus elementos, chamados de arestas, são pares não ordenados do conjunto V.
- Um grafo simples é um grafo que não possui nenhum laço, ou seja, um vértice cuja aresta liga o vértice nele mesmo, e que não possui mais de uma aresta ligando os mesmos dois vértices.
- Um grafo é dito conexo quando não existe um vértice solto, ou seja, sempre existe uma aresta ligando um vértice ao outro.
- Um isomorfismo é uma relação biunívoca entre os conjuntos de vértices de dois grafos G e H, de forma que quaisquer dois vértices u e v são adjacentes em G, se e somente se, f(u) é adjacente a f(v) em H.
- Um grafo linha l(G) é um grafo que representa a adjacência entre as arestas no grafo G, em que dois vértices são adjacentes em l(G), se e somente se, suas arestas correspondentes compartilham um mesmo vértice em G.
- Um subgrafo de um grafo G é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto de vértices G e o conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas de G.

## Método

- Primeiro deve-se mostrar a exceção do teorema: se um dos grafos for $K_{1,3}$ ou o $K_3$, seus respectivos grafos linha são iguais ao grafo $K_3$


Figura 1: Os grafos $K_3$ e $K_{1,3}$.


Figura 2: O grafo linha de $K_{1,3}$ igual ao de $K_3$.

- Notamos então que se um dos grafos for $K_{1,3}$ e o outro $K_3$, o teorema é inválido.
- Uma condição necessária para $l(G)$ e $l(G')$ serem isomorfos é que possuam a mesma quantidade de arestas. Os únicos grafos conexos não isomorfos com até 4 vértices são os seguintes:

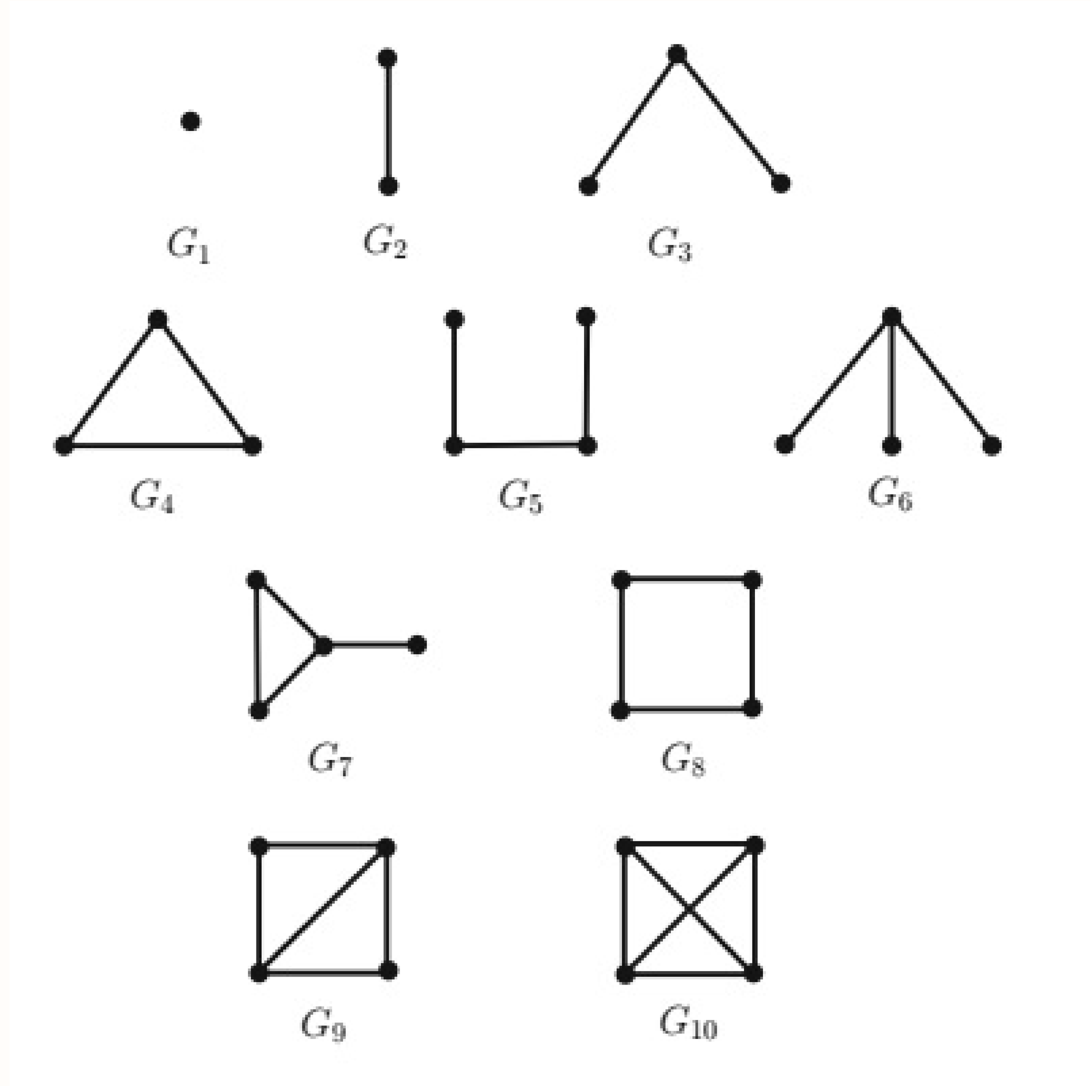


Figura 3: Todos os grafos não isomorfos de até quatro vértices.

- Note que os únicos grafos de até quatro vértices com a mesma quantidade de arestas e vértices, são os grafos G7 e G8 da figura 3, porém $l(G7)$ não é isomorfo à $l(G8)$.
- Supondo que G e $G'$ tem pelo menos 5 vértices e que $l(G)$ e $l(G')$ são isomorfos sobre um isomorfismo $\phi_1$, onde $\phi_1$ é uma bijeção do conjunto de arestas de G no conjunto de arestas de $G'$.
- Mostraremos que $\phi_1$ transforma o subgrafo induzido $K_{1,3}$ de G em outro subgrafo induzido $K_{1,3}$ de $G'$.

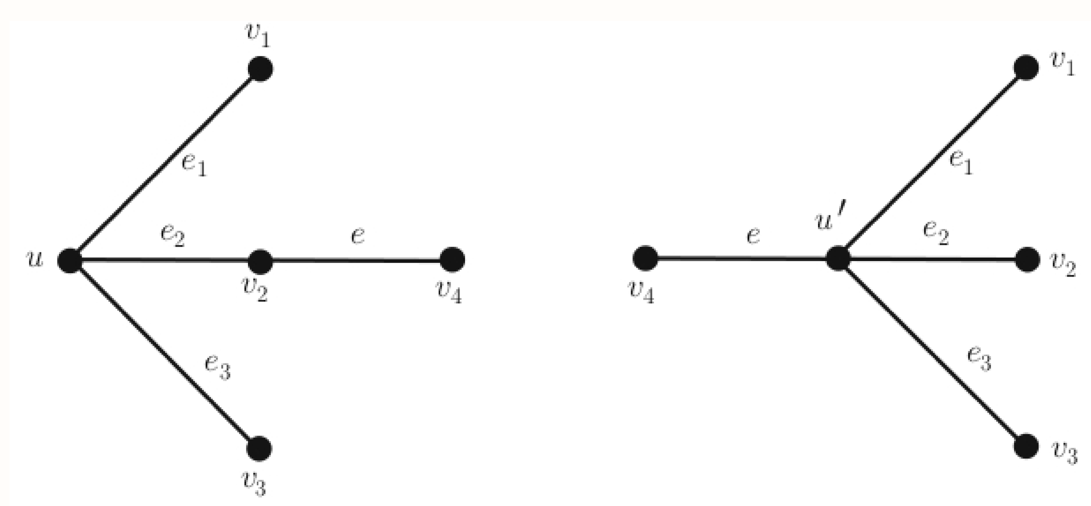


Figura 4: Dois grafos de 5 vértices, G e $G'$.

- Considere as arestas $e_1$, $e_2$ e $e_3$ da figura 4. Elas são exatamente as arestas do subgrafo $K_{1,3}$ do nosso grafo G. Como G é conexo e de até cinco vértices, então existe uma aresta $e$ adjacente a apenas um ou a todas as arestas $e_1$, $e_2$ e $e_3$ como mostrado na figura acima.
- Observe que $\phi_1(e_1)$, $\phi_1(e_2)$, $\phi_1(e_3)$ formam tanto o subgrafo $K_{1,3}$ quanto um triângulo em $G'$.
- Se $\phi_1(e_1)$, $\phi_1(e_2)$ e $\phi_1(e_3)$ formassem um triângulo em $G'$, $\phi_1(e)$ deveria ser adjacente a exatamente dois entre os três $\phi_1(e_1)$, $\phi_1(e_2)$ e $\phi_1(e_3)$.
- Como $\phi_1(e)$ deve ser adjacente à um único ou aos três ao mesmo tempo, a contradição mostra que $\{\phi_1(e_1), \phi_1(e_2), \phi_1(e_3)\}$ não é um triângulo em $G'$ e portanto forma uma estrela no vértice $v'$ de $G'$
- Note que o resultado semelhante vale para $\phi_1^{-1}$, uma vez que é um isomorfismo de $l(G)$ em $l(G')$.
- Seja $\mathcal{S}(u)$ o subgrafo estrela de G formado pelas arestas de G que incidem no vértice $u$ de G. Seguindo um raciocínio parecido com o anterior, conseguimos mostrar que $\phi_1$ mapeia todo $\mathcal{S}(u)$ para o subgrafo estrela $\mathcal{S}(u')$ de $G'$.
- Definimos por fim, $\phi : V(G) \to V(G')$ e definindo $\phi(u) = u'$ se $\phi_1(\mathcal{S}(u)) = \mathcal{S}(u')$.
- Segue que $\mathcal{S}(u) = \mathcal{S}(u')$ apenas quando $u = v$, e para $v'$ em $G'$ $\phi_1^{-1}(\mathcal{S}(v')) = \mathcal{S}(v)$ para algum $v \in V(G)$ e pela definição de $\phi$, $\phi(v) = v'$
- Finalmente observamos então que, se $uv$ são arestas de G, então $\phi_1(uv)$ pertence tanto a $\mathcal{S}(u')$ quanto a $\mathcal{S}(v')$.
- Isso significa que $u'v'$ é uma aresta de $G'$. Mas $u' = \phi(u)$ e $v' = \phi(v)$.
- Consequentemente, $\phi(u)\phi(v)$ é uma aresta de $G'$. E se $u$ não é adjacente a $v$ em G, $\phi(u)\phi(v)$ não devem ser adjacentes em $G'$.
- Caso contrário, $\phi(u)\phi(v)$ pertence à $\mathcal{S}(\phi(u))$ e à $\mathcal{S}(\phi(v))$ e daqui temos que $\phi_1^{-1}(\phi(u)\phi(v)) = uv \in E(G)$, o que é um absurdo.
- Portanto, G e $G'$ devem ser isomorfos em $\phi$.

## Conclusões

- Concluímos então que a função que leva um grafo G em $l(G)$ é uma função bijetora.
- Concluímos também que, tirando a exceção do teorema, basta analisarmos os grafos linha de dois grafos quaisquer para podermos afirmar o isomorfismo entre dois grafos.

### *Referências*


[1] BALAKRISHNAN, R.; RAGANATHAN, K.; A Text Book of Graph Theory. Segunda edição. Nova Iorque: Springer, 2012. 291 p.

[2] DIESTEL, R.; Graph Theory. Edição Eletrônica. Nova Iorque: Springer, 2000. 313 p.

[3] FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y; Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos. Brasil, 2011. 57 p.

[4] BONDY, J.A.; MURTY, U.S.R.; Graph Theory. New York: Springer, 2008. 700 p.

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Glossary_of_graph_theory#induced