

Propriedades de espectros de grafos conexos

Guilherme Simon Torres
Orientador: Vilmar Trevisan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

A teoria espectral dos grafos é a área da teoria dos grafos interessada em determinar propriedades estruturais de um grafo por meio do estudo das propriedades de suas representações matriciais, como a matriz de adjacência. Dessa forma, ao explorar resultados da teoria de grafos e da álgebra linear, é possível expor características inerentes ao grafo e associá-las às características da representação matricial.

Espectro do Grafo

Ter o conhecimento do espectro de um grafo permite saber, por exemplo, o número de arestas do grafo, o número de caminhos fechados de comprimento k arbitrário, e o número de vértices, entre outras características do grafo.

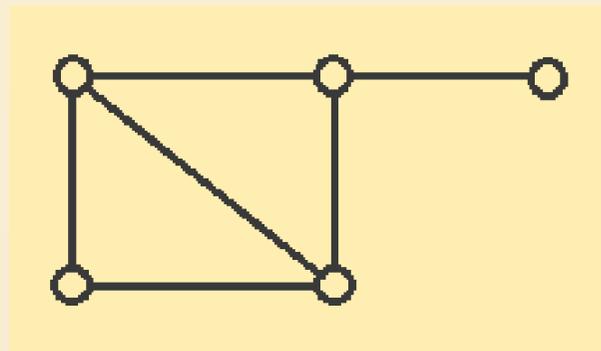
Objetivo

Demonstrar as seguintes propriedades para um grafo conexo G com matriz de adjacência A :

- i) Todo autovalor λ de G satisfaz $|\lambda| \leq \Delta(G)$, sendo $\Delta(G)$ o grau máximo de G ;
- ii) $\Delta(G)$ é autovalor de G se, e somente se, G é regular. Se $\Delta(G)$ é autovalor, então sua multiplicidade é 1;
- iii) se $-\Delta(G)$ é autovalor de G , então G é regular e bipartido;
- iv) o autovalor maximal λ_{\max} de G satisfaz $\delta(G) \leq \lambda_{\max} \leq \Delta(G)$, sendo $\delta(G)$ o grau mínimo de G ;
- v) se H é subgrafo induzido de G , então $\lambda_{\min}(G) \leq \lambda_{\min}(H) \leq \lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(G)$.

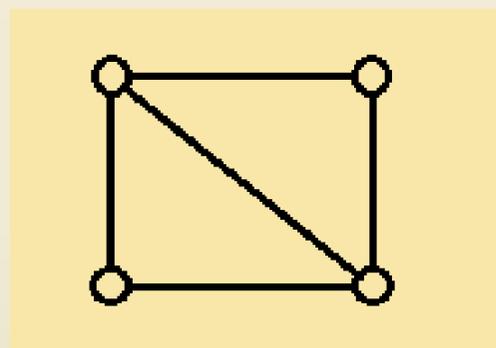
Consequências

Podemos estimar o maior autovalor de um grafo sabendo os valores de seus graus mínimo e máximo. Por exemplo, observe o grafo G a seguir, para qual vale $\delta(G)=1$ e $\Delta(G)=3$. autovalores são 2,6412; 0,7237; -0,5892; -1; -1,7757.



Os autovalores desse grafo são 2,6412; 0,7237; -0,5892; -1; -1,7757. Com as propriedades demonstradas, poderíamos estimar que seu maior autovalor λ_1 está entre 1 e 3.

Também consequência do teorema é que subgrafos induzidos sempre terão autovalores limitados pelos autovalores de seu grafo de origem. Entretanto, isso não significa que qualquer de seus autovalores será compartilhado com os autovalores do grafo de origem. Por exemplo, no subgrafo induzido do grafo acima a seguir, cujos autovalores são 2,5616; 0; -1; -1,5616, nenhum autovalor é compartilhado com os autovalores do grafo de origem.



Bibliografia

1. BOLLOBÁS, Bella. *Modern Graph Theory*. s.l. : Springer, 1998.
2. ABREU, N., et al. *Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução*. 2014.
3. FEOFILOFF, P., KOHAYAKAWA, Y. e WAKABAYASHI, Y. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. 2011.