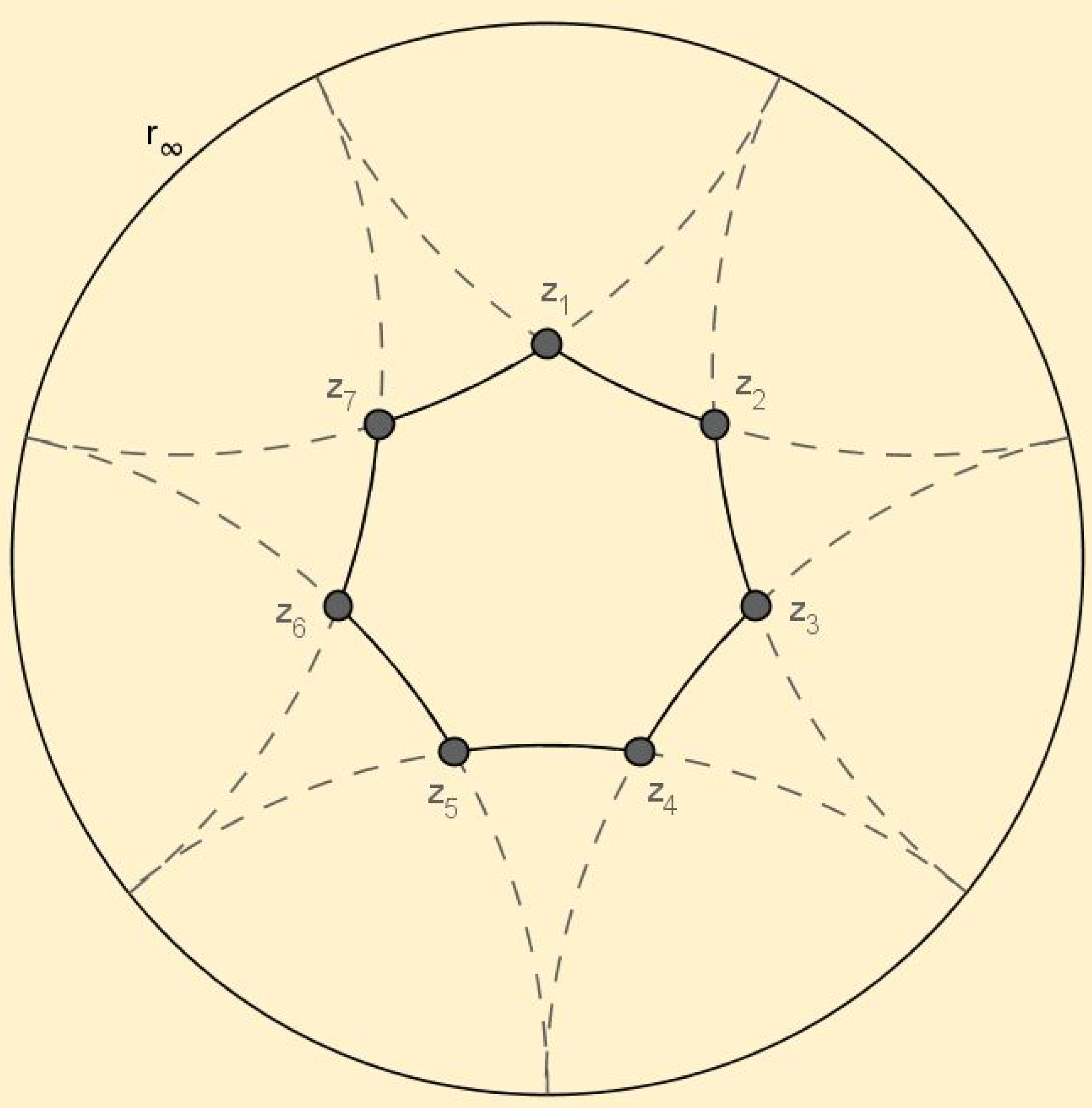
SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
XXVIII SIC
Salão UFRGS 2016
CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO
paz no plural
UFRGS PROPESQ

O Problema Isoperimétrico Para N-Ágonos Hiperbólicos

William Matheus Michel Braucks, Prof.ª Dr.ª Patrícia Kruse Klaser
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS
braucks.w@gmail.com

O problema isoperimétrico, é, de fato, bastante antigo, tendo surgido provavelmente na Grécia Antiga, ou antes, e é, também, um problema de otimização; dadas todas as curvas do plano de comprimento L, busca-se encontrar aquela que enclausura maior área. Este problema tem sido extensivamente estudado, e, portanto, tem encontrado diversas generalizações ou variações [2].

Denominamos problema isoperimétrico *discreto*, ou “para *n*-ágonos”, a variante que restringe as curvas em questão apenas a polígonos de n lados, para n um número natural qualquer [4]. É um fato conhecido que, no plano euclidiano, as soluções deste problema, ou seja, os polígonos de área máxima para um perímetro fixo, devem ser regulares.



Sabemos, também, por outro lado, que a área, no plano hiperbólico, se comporta de modo ligeiramente distinto com relação ao euclidiano; por exemplo, a quantia de lados de um polígono é o bastante para determinar uma *cota superior* para a área (hiperbólica) do mesmo [3]. Além disso, algumas das demonstrações de que as soluções do problema isoperimétrico para *n*-ágonos devem ser regulares, em especial, as majoritariamente geométricas, utilizam como hipótese implícita o postulado das paralelas, que é negado na geometria hiperbólica [2]. Isto sugere a discussão quanto ao que denominamos problema isoperimétrico para *n*-ágonos *hiperbólicos*: neste novo plano, os polígonos que maximizam área para um dado perímetro ainda são os regulares?

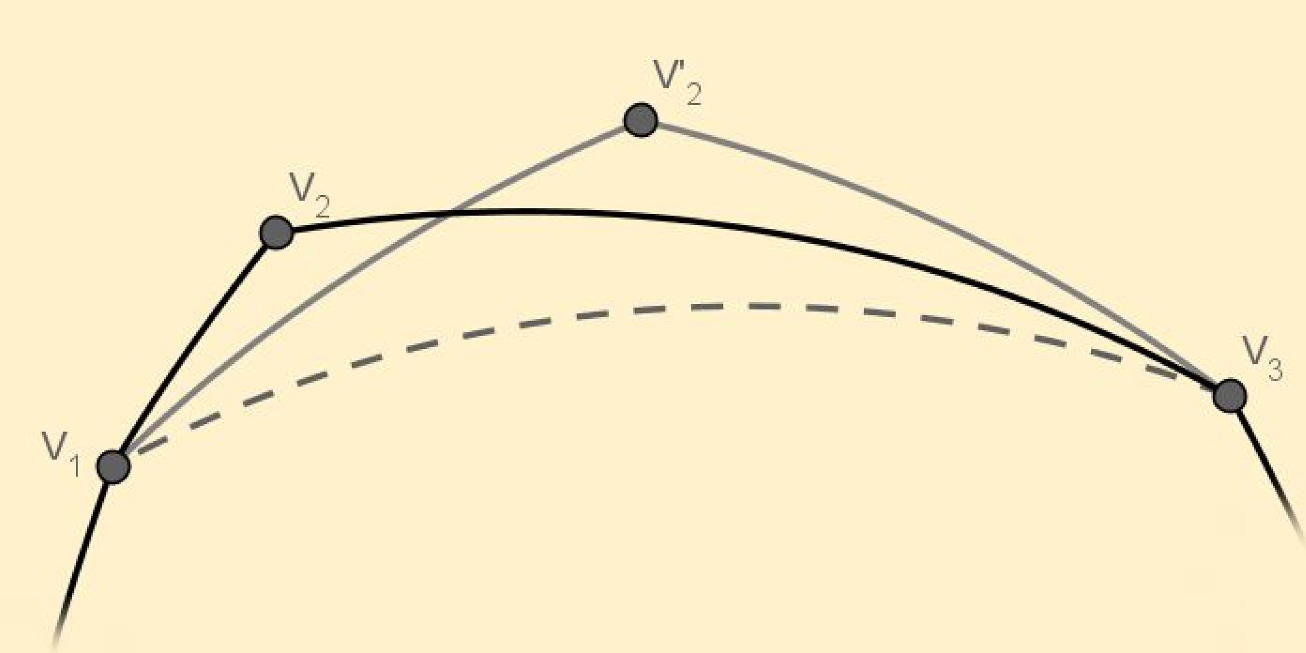
Há uma questão ainda mais fundamental para ser feita: Existem, neste caso, soluções? Esta é a primeira indagação que pretendemos responder, usando ainda, uma argumentação semelhante à do caso euclidiano.

Pensando o plano de acordo com o modelo do disco hiperbólico de Poicaré, um polígono de n lados pode ser identificado como uma n-upla de números complexos, $(z_1,z_2,z_3,\ldots,z_n)$, como na imagem. Além disso, as isometrias de H^2 nos permitem assumir que o primeiro elemento desta é o 0 (diferente da imagem). O conjunto de todos os pontos de $\mathbb{C}^n$ que satisfazem ambas restrições, e que estão associados a polígonos de perímetro L é um compacto, e como existe uma função área contínua sobre este conjunto, existem pontos que maximizam seu valor. Estes, devem ser as soluções do problema [1].

Tais soluções devem ser, é claro, convexas, uma vez que qualquer polígono não convexo admite um que o é, de mesmo perímetro e área maior.

Mais do que isso, afirmamos que as soluções devem ser equiláteras, novamente, em função de argumento razoavelmente similar a um dos ultilizados no caso euclidiano em [2].

De fato, para triângulos com o perímetro e um dos lados fixos, a área é maximizada quando os outros dois lados são congruentes. Portanto, se um polígono qualquer de n lados não é regular, este possui algum par de lados consecutivos que não são congruentes, digamos V_1V_2 e V_2V_3. Ora, como o polígono é convexo, podemos substituir o triângulo $V_1V_2V_3$ por um novo triângulo $V_1V_2'V_3$, isósceles e de mesmo perímetro, que deverá ter área maior do que a do anterior. Subentende-se, daí, todo um novo polígono de mesmo perímetro e área maior que o anterior.



Estudar estas afirmações feitas no texto, verificando-as, e demonstrando que valem, é um exercício bastante interessante e produtivo, que nos ajuda a entender parte das razões pelas quais as soluções do problema isoperimétrico para n-ágonos hiperbólicos devem ser polígonos regulares, ao passo que desenvolvemos algumas noções de trigonometria hiperbólica.

Referências

[1]BAILEY, B.A. *Area of Polygons in Hyperbolic Geometry*, (2004).
[2]KLASER, P.K.; TELICHEVESKY, M. *O Problema Isoperimétrico*, (2016).
[3]ROCHA, L.F.C. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*, (1987).
[4]CSIKÓS, B.; LÁNGI, Z.; NASZÓDI, M. *A generalization of the Discrete Isoperimetric Inequality for Piecewise Smooth Curves of Constant Geodesic Curvature*, Periodica Mathematica Hungarica Vol. 53 (2006), 121-131.