

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE INFORMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

LUIZ ANTÔNIO MARQUES GARCIA

**Analisando Flutuações de um Mercado  
Financeiro Artificial Baseado na  
Expectativa de Riqueza dos Agentes**

Dissertação apresentada como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dr. Roberto da Silva  
Orientador

Porto Alegre, agosto de 2008

## CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Garcia, Luiz Antônio Marques

Analisando Flutuações de um Mercado Financeiro Artificial Baseado na Expectativa de Riqueza dos Agentes / Luiz Antônio Marques Garcia. – Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2008.

59 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR-RS, 2008. Orientador: Roberto da Silva.

1. Mercados financeiros artificiais. 2. Mercados de ações artificiais. 3. Modelagem baseada em agentes. 4. Fatos estilizados. I. Silva, Roberto da. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Vice-Reitor: Prof. Pedro Cezar Dutra Fonseca

Pró-Reitora de Pós-Graduação: Prof<sup>a</sup>. Valquíria Linck Bassani

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Flávio Rech Wagner

Coordenadora do PPGC: Prof<sup>a</sup>. Luciana Porcher Nedel

Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

*Para minha querida avó Eva.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais por ensinarem-me a importância da educação, do respeito e da ética. Também agradeço à Rosana por seu amor incondicional. E, finalmente, um agradecimento mais que especial ao meu orientador que me mostrou com lucidez como desenvolver ciência.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS</b> . . . . .	7
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	8
<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	10
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	12
<b>RESUMO</b> . . . . .	13
<b>RESUMO</b> . . . . .	14
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	15
<b>2 MODELAGEM DE MERCADOS FINANCEIROS ARTIFICIAIS</b> . . . . .	19
<b>2.1 Conceitos em mercados financeiros</b> . . . . .	20
2.1.1 Dinâmicas de negociação e de formação do preço do ativo . . . . .	20
2.1.2 Ativos financeiros . . . . .	22
2.1.3 Agentes e suas estratégias de negociação . . . . .	22
<b>2.2 Abordagens para modelar e simular um mercado financeiro artificial</b> . .	23
<b>2.3 Breve histórico em mercados financeiros artificiais</b> . . . . .	24
<b>3 CARACTERIZAÇÃO DAS FLUTUAÇÕES ESTATÍSTICAS EM SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS</b> . . . . .	28
<b>3.1 Definições para séries financeiras</b> . . . . .	28
3.1.1 Momentos centrais . . . . .	29
3.1.2 Curtose e assimetria . . . . .	30
<b>3.2 Fatos estilizados das séries financeiras</b> . . . . .	32
3.2.1 Gaussianidade versus lei de Pareto . . . . .	32
3.2.2 Ausência de autocorrelação dos retornos simples . . . . .	33
3.2.3 Autocorrelação dos retornos quadráticos e a volatilidade clusterizada . . .	34
<b>4 UM NOVO MODELO BASEADO NA EXPECTATIVA DE RIQUEZA</b> . . . . .	37
<b>4.1 Formalismo</b> . . . . .	37
4.1.1 Agentes e suas estratégias . . . . .	37
4.1.2 Dinâmica de formação do preço do ativo . . . . .	39
4.1.3 Algoritmo . . . . .	39
<b>4.2 Incorporando aspectos evolutivos</b> . . . . .	41

<b>5</b>	<b>RESULTADOS E PROPRIEDADES DO MODELO . . . . .</b>	<b>42</b>
5.1	Analisando o comportamento dos preços e a riqueza dos agentes . . . . .	42
5.2	Verificando os fatos estilizados no modelo artificial . . . . .	46
<b>6</b>	<b>PRINCIPAIS CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS . . . . .</b>	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>57</b>

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACE *Agent-based Computational Economics*

POO Programação orientada a objetos

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mu_k$	Momento central de ordem $k$ de uma função densidade de probabilidades
$\langle x \rangle$	Valor esperado da variável aleatória $x$
$var$	Variância
$sigma$	Desvio-padrão
$T$	Janela temporal entre o instante inicial $t_0$ e o final $t_f$
$K$	Curtose de uma distribuição de probabilidades
$S$	Assimetria de uma distribuição de probabilidades
$g_k$	Momento central normalizado absoluto de ordem $k$
$A(\tau)$	Função de autocorrelação para uma janela de observação $\tau$
$\gamma$	Expoente da lei de potência da autocorrelação dos retornos absolutos ou quadráticos
$d$	Série temporal de dividendos
$p$	Série temporal de preços da ação
$r$	Série temporal de retornos da ação
$\alpha$	Taxa de retorno do ativo livre de risco
$\rho$	Taxa de fundamentalistas no mercado
$t$	Tempo em ciclos
$e_r^{(i)}$	Retorno esperado da ação pelo agente $i$
$\phi_i$	Função de aprendizado do agente $i$
$W_i$	Riqueza do agente $i$
$W_{exp}^{(i)}$	Riqueza esperada do agente $i$
$m_i$	Montante em dinheiro aplicado no ativo sem risco do agente $i$
$q_i$	Quantidade de ações do agente $i$
$p_{exp}^{(i)}$	Preço esperado da ação pelo agente $i$
$p_b^{(i)}$	Preço de compra da ação do agente $i$
$p_s^{(i)}$	Preço de venda da ação do agente $i$



$q_b^{(i)}$	Quantidade de compra de ação do agente $i$
$q_s^{(i)}$	Quantidade de venda da ação do agente $i$
$\theta$	Constante para limitar a quantidade de ativos negociados
$p_{ij}$	Preço da ação na transação realizada entre os agentes $i$ e $j$
$q_{ij}$	Quantidade de ação negociadas entre os agentes $i$ e $j$
$\Omega$	Conjunto dos negócios realizados entre os agentes
$N_{agentes}$	Quantidade de agentes em uma simulação
$N_{passos}$	Tamanho temporal da simulação
$N_{min}$	Tempo do início da simulação
$\psi_i$	Limiar de aceitação do agente para não mudar de estratégia
$G$	Coefficiente de Gini

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1:	Livro de compra e vendas de uma ação de empresa. . . . .	21
Figura 3.1:	Função densidade de probabilidade de uma uma distribuição de Pareto e de uma distribuição Normal em escala logarítmica. . . . .	35
Figura 3.2:	Momentos normalizados de uma distribuição Normal. . . . .	36
Figura 5.1:	Séries temporais de preço e retorno. O gráfico à esquerda mostra uma série de preços gerada pelo modelo de mercado artificial com taxa da aplicação livre de risco $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ e quantidade de agentes $N_{agentes} = 100$ distribuídos igualmente entre fundamentalistas e técnicos. O gráfico da direita mostra a respectiva série de retornos desta série de preços. . . . .	43
Figura 5.2:	Séries de preços geradas por 50 simulações. . . . .	44
Figura 5.3:	Tempo de início da estagnação dos preços varia com a taxa de fundamentalistas no mercado. O gráfico acima mostra o caso em que os agentes utilizam o parâmetro $\phi_i(t)$ . Já o gráfico abaixo mostra o tempo de estagnação quando os agentes não utilizam o parâmetro, ou seja, $\phi_i(t) = 0$ . . . . .	45
Figura 5.4:	Quantidade de agentes do modelo e número de passos de simulação não influenciam a distribuição de riqueza dos agentes. . . . .	46
Figura 5.5:	O coeficiente de Gini é afetado pelo parâmetro dos dividendos $\mu$ e pela taxa de retorno do ativo livre de risco $\alpha$ . As bolhas maiores representam regiões com desigualdades maiores nas distribuições de riqueza. . . . .	47
Figura 5.6:	Influência do dividendo e da taxa de retorno do ativo livre de risco no coeficiente de Gini. No primeiro gráfico fixou-se a taxa de retorno do ativo livre de risco $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ e, no gráfico abaixo, os dividendos $\mu = 0.5$ para analisar o efeito das mudanças no coeficiente Gini. . . . .	48
Figura 5.7:	A probabilidade do agente superar a estratégia do <i>buy&amp;hold</i> depende do parâmetro do dividendo $\mu$ . . . . .	49
Figura 5.8:	Probabilidade de riqueza em um mercado com estratégias evolutivas. Em um mercado onde os agentes podem mudar de estratégias, a probabilidade do agente superar a estratégia do <i>buy&amp;hold</i> depende também do limiar da evolução $\psi$ . . . . .	50
Figura 5.9:	Excesso de curtose observado em janelas de observações de tempo $\Delta$ curtas (altas frequências). . . . .	50

Figura 5.10: Momentos das distribuições das séries de retornos do modelo alterando a janela de observação de tempo $\Delta$ em função da ordem $k$ . A curva contínua representa os cálculos de momentos de uma distribuição gaussiana. . . . .	51
Figura 5.11: Autocorrelação dos retornos simples. . . . .	51
Figura 5.12: Autocorrelação dos retornos absolutos e quadráticos. . . . .	52
Figura 5.13: Comparativo de modelos de mercado financeiros artificiais (parte 1) .	53
Figura 5.14: Comparativo de modelos de mercado financeiros artificiais (parte 2) .	54

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1:	Momentos centrais normalizados . . . . .	30
Tabela 5.1:	Probabilidade de estagnação dos preços para diferentes taxas de fundamentalistas na população. . . . .	43

## RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta de modelo de mercado financeiro artificial que reproduz séries de retornos com propriedades estatísticas universais semelhantes às observadas em séries reais. Dentre as propriedades, também chamadas de fatos estilizados na Economia, as séries artificiais de retornos exibiram ausência de autocorrelação para os retornos simples, leis de potência para autocorrelação para os retornos absolutos e quadráticos, excesso de curtose nas distribuições de retorno, gaussianidade agregacional e volatilidade clusterizada. Cabe salientar, que não há na literatura um outro mercado artificial que reproduziu tantos fatos estilizados conjuntamente. O modelo dinâmico e síncrono é baseado em agentes que transacionam ativos com risco como ações de empresa através de ordens de compra e venda enviadas ao mercado a cada período de tempo. O preço de mercado das ações é calculado da média ponderada pelo volume das ordens negociadas entre os agentes. O objetivo dos agentes é maximizar sua riqueza e, para isso, seguem ou a estratégia fundamentalista utilizando os dividendos para calcular os preços das ações ou a estratégia técnica baseada em análise de séries temporais. A principal contribuição da modelagem foi acrescentar às estratégias um fator de aprendizado em que o agente considera sua habilidade individual passada de previsão de riqueza esperada para calcular os retornos futuros. Este trabalho também mediu o coeficiente de Gini para descobrir como algumas variáveis de mercado afetavam a distribuição de riqueza dos agentes e, além disso, estudou quais valores de dividendo tornavam uma estratégia mais eficiente que outra. Por fim, incorporaram-se características evolutivas aos agentes possibilitando-os a trocar de estratégias no decorrer da simulação e, com isso, os resultados mostraram aumento da riqueza dos agentes.

**Palavras-chave:** Mercados financeiros artificiais, mercados de ações artificiais, modelagem baseada em agentes, fatos estilizados.

## Analyzing fluctuations of an artificial financial market based on expected wealth of agents

### RESUMO

This work presents a new artificial stock market model for reproducing price time series of assets in such market model. For a suitable validation of the model, we verified several statistical and universal properties (called stylized facts in the Economics Literature) and similar results are obtained with data extracted from real stock markets.

We investigate several properties including absence of autocorrelation for simple returns and the power behavior law of autocorrelation for absolute and quadratic returns, excess of kurtosis, aggregational gaussianity, and clustered volatility. It is important to mention that no other similar artificial model has investigated so many statistical universalities.

Our synchronous model is based on agents negotiating risk assets through purchase and sale orders. These orders are stored in books for each simulation step. The weighted average volume of all orders negotiated by the agents determines the price of an asset. For the sake of simplicity, our model considers two kinds of strategies:

1. Fundamentalist - where one uses the dividends to calculate the expected return of an asset;
2. Trend predictor - where one obtains the expected returns directly from an analysis of the price time series.

One of the main contributions of our model was to add a term that works as the expected wealth of an agent. This is considered an important psychological factor in the decision making process. In addition, we consider an income inequality index to analyze the wealth distribution of the agents: the Gini-coefficient, which predicts an inequality interval of  $[0$  (society completely fair),  $1$  (society completely unfair)]. We also study the influence of the dividends and risk free assets parameters on this coefficient. Finally, some evolutionary features of the model are analyzed. Our results show an increase in agent's wealth when strategies are updated according to the following criteria: if expected wealth does not reach a given threshold, the agent changes his strategy from Fundamentalist to Trend Predictor or vice-versa. If the expected wealth reaches the specified threshold, the agent keeps his initial strategy. We tested different threshold values in this analysis and the conclusion was confirmed in all cases studied.

**Palavras-chave:** artificial financial markets, artificial stock markets , agent-based models, stylized facts.

# 1 INTRODUÇÃO

Para se tentar criar modelos de mercados financeiros que sejam mais fiéis aos mercados reais, um dos caminhos é entender como se dá a tomada de decisão dos participantes e como ocorrem as variações de preços dos ativos negociados nesse mercado. Ainda hoje, esses dois aspectos são desafios para os pesquisadores.

A compreensão do processo de decisão das pessoas em diversas áreas é importante, pois contribui, por um lado, para a automação computacional do próprio processo e, por outro, para obtenção da melhor escolha em um problema específico. Em economia, saber antecipadamente os desejos das pessoas em um mercado e a sua provável ação possibilitará realizar decisões ótimas que auferirão os retornos maiores. Nesse objetivo uma das primeiras teorias é a da Utilidade Esperada de Von Neumann e Morgenstern (NEUMANN; MORGENSTERN, 1947) que afirma que cada indivíduo toma suas decisões com o objetivo de maximizar suas respectivas riquezas. Essa suposição contribuiu para que mais tarde Markowitz (MARKOWITZ, 1952) e Sharpe (SHARPE, 1964) descrevessem a Teoria do *Portfolio* em que um investidor ao montar um conjunto de ativos financeiros (*portfolio*) escolhe os que maximizam seu retorno esperado médio com um menor risco. A teoria considera que os indivíduos em um mercado são avessos ao risco, isto é, as pessoas sempre escolherão o ativo de menor risco para um determinado retorno. Por outro lado, Kahneman e Tversky (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979) descrevem a Teoria da Perspectiva: um modelo de decisão em que os indivíduos não consideram apenas o retorno esperado médio para tomada de decisão, mas também seus ganhos e perdas. Ou seja, a percepção do ser humano em relação aos seus lucros e prejuízos obtidos afeta diretamente as suas decisões. Com isso vemos que nos mercados financeiros os preços dos produtos são muito instáveis, na medida que são invariavelmente afetados pela junção das expectativas de retornos, das tolerâncias ao risco e das percepções de perdas e ganhos dos participantes.

Entretanto, embora o mercado financeiro seja um cenário de aparente imprevisibilidade, do ponto de vista estatístico, existem propriedades contundentemente universais que possibilitam extrair informações importantes sobre as variações de preços. Uma ação de empresa no mercado financeiro possui uma série temporal de preços de onde podem ser extraídas propriedades específicas deste ativo. A concepção correta do modelo teórico para análise ou mesmo previsão destas séries deve reproduzir características intrínsecas encontradas em séries financeiras reais. Estas características são chamadas de propriedades empíricas universais e de fatos estilizados na Economia. Alguns trabalhos iniciais visaram descobrir as propriedades empíricas universais como nos de Eugene Fama (FAMA, 1965) (FAMA, 1970) que ao analisar as séries de retornos de preços de mercados percebe que há ausência de autocorrelação. Assim, considerando essa medida, Fama conjecturou que não seria possível extrair qualquer informação relevante das

séries financeiras de retorno que pudessem levar um participante a auferir ganhos superiores aos demais. Essa afirmação contribuiu para que Fama desenvolvesse a Hipótese de Eficiência de Mercado. Um pouco antes, em 1963, uma outra propriedade foi constatada por Mandelbrot (MANDELBROT, 1963) que observou excesso de curtose nas distribuições de séries de retornos em altas frequências <sup>1</sup> e, por essa razão, havia indícios que as distribuições não seriam Gaussianas. Neste caminho, outra propriedade existente é a gaussianidade agregacional que afirma que quanto maior a janela de observação da série financeira, mais a distribuição desta série assemelha-se com distribuições gaussianas (PLEROU et al., 1999). Outros autores (MANTEGNA; STANLEY, 1995) (LIU et al., 1997) (CONT; POTTERS; BOUCHAUD, 1997) (PLEROU et al., 1999) observaram autocorrelação dos retornos absolutos e quadrados, portanto apesar de não haver dependência linear dos retornos havia a não-linear. Além disso, essa autocorrelação ocorria com decaimento polinomial, obedecendo a uma lei de potência em função da janela de observação temporal, ou seja, um processo com dependência longa nos valores passados. Assim foi descoberta uma outra propriedade denominada volatilidade clusterizada <sup>2</sup> que diz que variâncias grandes dos retornos são seguidas com mais frequências por outras variâncias grandes e analogamente variâncias pequenas são seguidas com maior probabilidade por variâncias pequenas. Outros fatos foram relatados em trabalhos como (MANTEGNA; STANLEY, 1999) (BOUCHAUD, 2001) (CONT, 2001) (GABAIX et al., 2003).

Em relação à modelagem dos mercados há os modelos econométricos, geralmente compostos por equações lineares e não-lineares, por exemplo, ARIMA (BOX; JENKINS, 1970) e GARCH, que são utilizados para descrever o comportamento das séries temporais financeiras exogenamente. Por outro lado, é possível modelar mercados endogenamente, definindo métodos de decisão dos agentes e sua dinâmica de interação. Nesse caso, o objetivo é simular experimentalmente esses mercados artificiais para explicar fenômenos reais e para isso é necessário validá-los comparando com as propriedades encontradas em mercados reais. Esses modelos são denominados de modelos de mercados financeiros baseados em agentes ou modelos de economia computacional baseados em agentes ou ainda modelos microscópicos de mercados financeiros (TESFATSION, 2006) (SAMANIDOU et al., 2007). Atualmente economistas, físicos, matemáticos e cientistas da computação se interessam na modelagem e simulação desses mercados artificiais financeiros e tem tornado-se uma área de cada vez mais destaque. Inclusive foi sugerido e documentado como um dos grandes desafios em Ciência de Computação em relatório destinado ao presidente norte-americano (PITAC, 2005). Essa dissertação irá modelar e simular um mercado de ações utilizando uma abordagem de agentes (endógeno ou micro) validando-o através de vários fatos estilizados da Economia.

Um dos primeiros modelos de mercado moderno foi proposto por Markowitz em 1989 (KIM; MARKOWITZ, 1989) no qual não havia preocupação em descrever os fatos estilizados e era composto exclusivamente por equações. Já o modelo proposto por Carl Chiarella em 1992 (CHIARELLA, 1992), formado por agentes fundamentalistas e técnicos, dá origem à séries financeiras nas quais há evidências de caos. No modelo de mercado artificial do *Santa Fe Institute*, 1994, (PALMER et al., 1994) os agentes são algoritmos genéticos com características fundamentalistas e técnicas e não foram observadas propriedades empíricas das séries geradas. No modelo de Levy, Levy e Solomon (1994) (LEVY; LEVY; SOLOMON, 1994) (LEVY; LEVY; SOLOMON, 1995) (LEVY;

<sup>1</sup>Janelas temporais de observações curtas.

<sup>2</sup>Tradução para volatility clustering.



LEVY; SOLOMON, 2000) o mercado é composto por agentes heterogêneos representados por uma função utilidade que reflete aversão ao risco e são analisados *booms, crashes* e a riqueza dos agentes. No modelo de Lux e Marchesi (1999) publicado na revista *Nature* (LUX; MARCHESI, 1999) reproduziram-se leis de potência nas distribuições de retorno e volatilidade clusterizada em um mercado artificial com agentes fundamentalistas e técnicos que podiam mudar de estratégia. Já em 2001, o modelo Genoa (RABERTO et al., 2001) introduziu claramente o conceito de ordem de compra e venda em um modelo baseado em agentes e reproduziu volatilidade clusterizada e caudas pesadas nas distribuições de retorno. Mais recentemente outro modelo de Chiarella (CHIARELLA; DIECI; JONES, 2006) tentou mostrar atratores cíclicos em séries temporais financeiras.

Nesta dissertação será apresentada uma proposta de modelo de mercado financeiro artificial que reproduz séries de retornos com mais fatos estilizados do que os encontrados nos modelos atuais, pois exibirá ausência de autocorrelação para os retornos simples, autocorrelação para os retornos absolutos e quadráticos, excesso de curtose nas distribuições de retornos, gaussianidade agregacional e volatilidade clusterizada. Para isso foi fundamental a inserção de um fator de aprendizado nas estratégias dos agentes que leva em conta a capacidade histórica dos agentes em prognosticar suas riquezas esperadas na previsão dos retornos.

A presente dissertação está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 2** - *Modelagem de mercados financeiros artificiais*. Aqui apresentaremos conceitos de mercados financeiros reais que devem ser considerados para modelagem teórica. É descrito o funcionamento dos mecanismos para negociação através dos livros de compra e venda para posterior formação do tempo. Também se descreve os tipos de ativos disponíveis e as estratégias fundamentalista e técnica para previsão de retornos. É feito um resumo das abordagens que podem ser utilizadas para modelar e simular mercados e, finalmente, um breve histórico de outros mercados artificiais existentes.
- **Capítulo 3** - *Caracterização das flutuações estatísticas em séries temporais financeiras*. Neste capítulo é apresentada definições para concepção do modelo e análise estatísticas dos resultados. Mostrar-se-á o conceito de retorno, variância e outros momentos das distribuições dos retornos para caracterizar alguns fatos estilizados. Também se mostra como a curtose e assimetria podem ser utilizadas para mensurar o formato da distribuição. No final é apresentado e explicado um conjunto de fatos estilizados encontrados nas séries financeiras.
- **Capítulo 4** - *Um novo modelo baseado na expectativa de riqueza*. Será formalizado e descrito matematicamente o modelo e apresentada as inovações propostas. Os agentes desejam maximizar sua riqueza e seguem ou a estratégia fundamentalista utilizando os dividendos para calcular os preços das ações ou a estratégia técnica baseada em análise de séries temporais, que utiliza uma previsão de tendência linear simples. O dividendo é determinado por uma equação dinâmica. Nas estratégias foi adicionado um fator de aprendizado que consideramos ser uma das grandes contribuições do trabalho. Para formação do preço e negociação os agentes utilizam ordem de compra e venda. No capítulo também há um algoritmo do modelo e uma proposta de mudança de estratégia entre os agentes.
- **Capítulo 5** - *Resultados e propriedades do modelo*. Aqui será feita a validação do modelo através dos fatos estilizados e outras análises dos agentes. Primeiro inicia

mostrando que a taxa de fundamentalista no mercado afeta o tempo de estagnação dos preços. Depois mensuramos o coeficiente de Gini e relacionamos quais variáveis do mercado afetam diretamente a distribuição de riqueza entre os agentes. Em seguida analisamos qual era a estratégia mais eficiente comparando-a com a estratégia trivial do *buy&hold* e se há aumento de eficiência com uma estratégia evolucionista. Na segunda parte iniciamos a validação do modelo mostrando a existência de propriedades universais como a gaussianidade através da análise dos momentos e da curtose, depois analisamos a ausência de autocorrelação. Posteriormente analisamos a lei de potência das autocorrelações absolutas e quadráticas e a evidência de existência de volatilidade clusterizada.

- **Capítulo 6 - Conclusão.** Sumarizamos e concluimos as principais contribuições desse trabalho e propomos melhorias para possíveis trabalhos futuros.

## 2 MODELAGEM DE MERCADOS FINANCEIROS ARTIFICIAIS

Nas ciências sociais, o mundo é uma entidade dinâmica, que muda no tempo e reage com o seu ambiente, podendo alterar tanto a sua estrutura como o seu comportamento. Isto significa, portanto, que um modelo desse mundo também deveria contemplar características dinâmicas. Por essa razão, muitos sistemas econômicos são especificados através de sistemas dinâmicos - sistemas compostos por equações de diferenças ou diferenciais que descrevem a evolução temporal do sistema econômico. Ou seja, a realidade com suas propriedades e sua dinâmica é descrita usando um sistema de equações no qual o estado futuro desse mundo deriva do estado atual. Entretanto os sistemas dinâmicos são restritos ao nível macro da realidade, pois suas variáveis e taxas apenas representam, respectivamente, o estado do sistema modelado e suas mudanças. No caso de modelos complexos, especialmente se a especificação é não linear, uma argumentação analítica completa pode ser muito difícil ou mesmo impossível de ser realizada. Nesses casos, uma modelagem micro e, posteriormente, uma simulação <sup>1</sup> desse modelo é muitas vezes o único caminho possível (GILBERT; TROITZSCH, 1999).

Os mercados financeiros fazem parte desses sistemas complexos por envolverem participantes humanos que realizam transações a partir de suas convicções e desejos. E, além do mais, como resultados ainda há as séries temporais financeiras que tendem a imprevisibilidade. Dentre alguns benefícios em modelar um mercado financeiro estão: estudar mecanismos de negociação e controle dos mercados que possam evitar efeitos desastrosos, como altas ou quedas abruptas de preços, contribuindo para a estabilidade dos mercados; entender quais são os fatores que regem a cognição e as ações dos participantes dos mercados financeiros e como isso afeta a distribuição de riqueza entre eles; e explorar as propriedades das séries financeiras para compreender suas origens e interpretar suas conseqüências nos mercados. Essa dissertação considera a abordagem micro como um dos caminhos possíveis para compreender estes mecanismos existentes no mercado, analisando que tipo de interação entre os participantes governa a dinâmica dos preços.

Neste capítulo, primeiramente, será feita uma descrição de conceitos existentes em mercados financeiros, em especial no mercado de ações, que sejam úteis para a construção de um modelo artificial micro estocástico. Após será feito um resumo de algumas abordagens existentes na literatura de modelagem e simulação de mercados financeiros artificiais. Por fim, é realizado um histórico de modelos de mercados financeiros artificiais existentes relatando suas características principais e contribuições para a área.

---

<sup>1</sup> Simulação está relacionado com executar computacionalmente o modelo através do tempo e observar o que ocorre.

## 2.1 Conceitos em mercados financeiros

Mercado financeiro é a estrutura que possibilita às pessoas realizarem transações de compra e venda de ativos financeiros. Por exemplo, no mercado do tipo bolsa de valores entre os ativos negociados estão as ações de empresas. Uma transação ocorre quando dois participantes - um que deseja vender ativos e outro que deseja comprá-los - acordam um preço para uma determinada quantidade de ativos e, posteriormente, realizam a troca do dinheiro por ativo. No modelo de um mercado é desejável, portanto, que haja o conceito de indivíduos que transacionem ativos financeiros. Nessa seção serão intercalados informações e conceitos de mercado financeiro real com as características relevantes para modelá-los computacionalmente.

### 2.1.1 Dinâmicas de negociação e de formação do preço do ativo

Um dos aspectos mais importantes na modelagem do mercado é a dinâmica de interação com os indivíduos<sup>2</sup>, pois dela origina-se a formação de preço do ativo. Atualmente, nas bolsas de valores, onde se negociam ações de empresas e outros ativos, a interação entre os agentes não ocorre diretamente. O agente informa o pedido de compra ou venda de um ativo para uma corretora de valores, o intermediário, que envia a ordem para a bolsa de valores. A ordem em princípio contém quatro informações essenciais sobre o ativo a ser negociado: o código do ativo, o tipo da operação (compra ou venda), a quantidade e o preço desejado. As ordens de compra são registradas no livro de compra e analogamente as ordens de venda são registradas em um livro de venda. Por exemplo, na figura 2.1.1 é possível visualizar o livro de compra à esquerda e o livro de venda à direita relativo à ação de código VALE5 listada na bolsa de valores BOVESPA<sup>3</sup>. Pode-se observar que não está ali o nome das pessoas ou instituições que ordenaram, mas sim dos intermediários que no caso são as corretoras. As transações são efetivadas quando forem satisfeitas, ou seja, quando o preço de uma ordem de compra for igual ou superior ao preço de uma ordem de venda. Após isto, as corretoras recebem da bolsa de valores a confirmação dos negócios fechados por seus clientes e atualizam as posições financeiras destes. O preço acordado da última transação de um ativo é informado aos participantes do mercado e então ele é visto como o preço de mercado do ativo. Vale salientar que esse preço é apenas uma informação da última transação, e os participantes podem ou não considerá-lo como base em suas decisões de preços para novas ordens. Hoje, nas bolsas de valores, devido à automação computacional, ao crescente número de participantes e ao uso da Internet, é possível realizar uma transação desse tipo em frações de segundo.

Em mercado financeiro os indivíduos podem enviar ordens e realizar transações a qualquer tempo dentro de um período de negociações. Desse modo, a simulação do mesmo deveria levar em consideração essa assincronicidade. Apesar disso muitos modelos são desenvolvidos como síncronos para que suas concepções e análises sejam simplificadas. Nesses modelos ditos síncronos os agentes realizam em um único instante um conjunto de atividades como, por exemplo, gerar ordens ao mercado. O mercado, por sua vez, pode em um mesmo momento realizar todas as transações solicitadas ou ainda atualizar as propriedades dos agentes para o próximo período.

Após a definição da dinâmica temporal, a comunicação entre os agentes e o mercado

---

<sup>2</sup>Neste trabalho os indivíduos (pessoas) também serão denominadas de agentes para haver uma correspondência direta com a modelagem empregada.

<sup>3</sup>A BOVESPA é o maior centro de negociação com ações da América Latina. Mais informações podem ser encontradas pela Internet no endereço <http://www.bovespa.com.br>.

Lista de Ofertas						
Ofertas VALES						
Compra			Venda			
Cometora	Quant.	Preço	Preço	Quant.	Cometora	
SOUZA BARROS	1,60 K	47,50	47,51	2,70 K	ÁGORA-SENIOR	
SOCOPA	100	47,50	47,51	3 K	MORGAN STANLEY	
ÁGORA-SENIOR	200	47,50	47,54	3,10 K	MORGAN STANLEY	
ITAÚ	100	47,50	47,55	1 K	INTERFLOAT HZ	
SPINELLI	200	47,50	47,60	5 K	AMERICAINVEST	
ÁGORA-SENIOR	1,30 K	47,50	47,60	4 K	INTERFLOAT HZ	
HSBC	1 K	47,45	47,61	3,90 K	CITIBANK	
SAFRA	100	47,45	47,63	1 K	TÍTULO	
BANESPA	4 K	47,45	47,65	1,50 K	BANIF PRIMUS	
SPINELLI	200	47,45	47,66	2,50 K	SOCOPA	
BANIF PRIMUS	200	47,45	47,67	10 K	ÁGORA-SENIOR	
SLW	500	47,43	47,68	1 K	TÍTULO	
INTERFLOAT HZ	100	47,42	47,69	1 K	SOLIDEZ	
BRDESCO	500	47,41	47,69	1,20 K	ÁGORA-SENIOR	
INTERFLOAT HZ	1 K	47,41	47,69	4 K	ÁGORA-SENIOR	
NOVINVEST	5 K	47,40	47,69	400	INTERFLOAT HZ	
NOVINVEST	2 K	47,40	47,69	3 K	INTERFLOAT HZ	
ÁGORA-SENIOR	3 K	47,40	47,70	2,70 K	ALPES	
BANIF PRIMUS	300	47,40	47,70	46 K	ALPES	
BRDESCO	100	47,40	47,70	500	CODEPE	
ÁGORA-SENIOR	1 K	47,40	47,70	2,50 K	ATIVA	
ALPES	10 K	47,40	47,70	2,50 K	ALPES	
ÁGORA-SENIOR	3,30 K	47,40	47,73	500	SLW	
CITIBANK	3,90 K	47,38	47,73	1 K	BANESPA	
LINK	3,90 K	47,38	47,74	500	CRUZEIRO DO SUL	
ÁGORA-SENIOR	100	47,35	47,75	100	BRDESCO	
ÁGORA-SENIOR	1,20 K	47,35	47,78	100	CODEPE	
TÍTULO	100	47,35	47,79	1 K	BRDESCO	

Última atualização 16:06:17

Figura 2.1: Livro de compra e vendas de uma ação de empresa.

regrará sobre como os agentes saberão da existência de outras ordens ou como o mercado informará quais foram as transações concluídas. Em alguns tipos de mercado é interessante haver uma comunicação direta entre os agentes, mas no mercado financeiro atual pela grande quantidade de participantes e necessidade de processamento em larga escala isso não ocorre. As ordens são recebidas e processadas em um sistema central, de modo que não é necessária a comunicação direta entre os agentes, mas apenas dos agentes para com o sistema. Portanto, nesse caso das bolsas de valores, é interessante que o protocolo de comunicação do modelo seja feito de forma indireta entre os agentes. Uma forma simplificada seria os agentes enviarem suas ordens a um controle central que atualizaria essas informações e divulgaria aos agentes depois de processadas.

A programação modular pode ser usada para desenvolver esse tipo de simulação como observados em trabalhos anteriores. Nesta dissertação não se pretende apresentar uma discussão e nem propor qual é a técnica de programação ideal, mas mostrar que é possível com uma analogia de agentes simular um mercado financeiro artificial, validá-lo e extrair conclusões relevantes.

Sobre a formação de preços pode-se dizer que o preço é uma quantia monetária acordada entre um vendedor e um comprador e reflete as percepções do valor do ativo por esses indivíduos. Cada participante forma seu juízo de valor e sua estratégia de decisão baseado em suas convicções considerando seu conhecimento a respeito do ambiente envolvido. Há diversas teorias sobre decisão, informação e busca do conhecimento, no entanto este trabalho também não pretende explorá-las, mas apenas demonstrar algumas abordagens de estratégias que os agentes de um mercado podem usar para definir o preço do ativo. Por essa razão, a seguir descreveremos sobre alguns ativos, suas características e sobre os agentes e suas estratégias de precificação.

### 2.1.2 Ativos financeiros

Em finanças, ativo é qualquer item que contém valor econômico. No mercado financeiro, esses ativos são representados geralmente por contratos eletrônicos no qual o comprador deseja receber juros da entidade emissora do contrato e/ou obter lucro revendendo-os. Há diversos ativos financeiros como dinheiro, ações, títulos, opções, cotas de fundos de investimento ou *commodities* como ouro, gado, petróleo e café.

Quando alguém compra um ativo assume um risco na expectativa de obter retorno, pois na prática não há garantias que a entidade emissora irá cumprir o acordado. O risco e o retorno são resultados da confiança dos participantes que a entidade irá cumprir o contratado. Por exemplo, um título público <sup>4</sup> (contrato de empréstimo a um país) dos Estados Unidos é visto atualmente como de menor risco de não ser cumprido do que um emitido pelo Brasil. Conseqüentemente, o Brasil necessita prometer um juro maior ao seu título público para que investidores se mostrem interessados na compra. Aliás, o título público americano é considerado hipoteticamente como livre de risco para que sirva de parâmetro para o cálculo de risco e retorno dos títulos dos demais países.

Ação, outro exemplo de ativo, corresponde a menor parte do patrimônio líquido de uma empresa. Quando alguém compra ações de uma empresa torna-se acionista da mesma e espera receber dividendo. Dividendo é o montante do lucro da corporação de um determinado período reservado aos acionistas, os quais recebem-no na proporção da quantidade de ações que possuem. Portanto, ao comprar ações o investidor assume o risco da empresa não obter o lucro almejado em seu empreendimento. Além dos dividendos, o acionista pode especular, ou seja, obter retorno financeiro ao vender ações a outros investidores no mercado por quantia superior a despendida originalmente na compra do ativo. Claro que o investidor também pode vender as ações por quantia igual ou inferior para limitar suas perdas caso o ativo comporte-se aquém das suas expectativas.

Como visto anteriormente, o preço de mercado do ativo é o valor monetário acordado entre os participantes. Estes indivíduos definem os preços de compras e vendas utilizando suas habilidades cognitivas para almejar os retornos desejados. Este conjunto de cognições forma as estratégias de negociação que é o que veremos a seguir.

### 2.1.3 Agentes e suas estratégias de negociação

O termo agente tem definições diferentes em diversas áreas, mas no presente trabalho representa o participante do mercado que negocia ativos. Utilizando essa denominação ao invés de investidor ou *trader* unifica-se um único vocábulo e facilita uma relação direta com a modelagem baseada em agentes. O agente para participar de um mercado deve possuir ativos para serem negociados com os demais. O agente no mercado tem, portanto, uma quantidade de riqueza que é a soma do valor dos ativos que o agente detém sejam eles com ou sem risco. Para aumentar esta riqueza, ele define uma estratégia que conduzirá suas operações de compra e venda de ativos com objetivo de obter lucro.

O conjunto de estratégias existentes é em sua maioria dividida em dois grupos: as estratégias fundamentalistas e as estratégias técnicas. O primeiro grupo acredita que o preço deriva do desempenho econômico da entidade que gerou o ativo e do próprio mercado, já o segundo grupo crê que possa prever o preço do ativo a partir de análises de séries temporais financeiras. Ambas não são conflitantes e podem inclusive complementarem-se em uma estratégia mista, no entanto é comum ver analistas que defendam apenas uma

---

<sup>4</sup>Títulos públicos é o nome dado pelo Tesouro Nacional brasileiro para seus contratos de empréstimo. No equivalente americano são denominados *Treasury securities*.

escola de pensamento e rechaçam a outra. Como exemplo simples, o investidor que segue os preceitos fundamentalistas e deseja saber se o preço de uma ação aumentará irá analisar dados econômicos como endividamento, projeções de venda, tendência do mercado, empresas concorrentes, lucros futuros, dividendos e outros fatores para então tomar uma decisão. Já o técnico confia que todas as informações disponíveis no mercado serão refletidas nos preços e, desta forma, bastaria analisar o histórico dos preços e utilizar-se de ferramentas de análises que possibilitem projetar uma tendência de alta ou baixa.

A definição de uma estratégia ideal que conduzirá as operações de compra e venda do ativo para acumular riqueza é o objetivo de todos os agentes do mercado, no entanto é também uma das mais complexas. Uma conclusão inicial é que se houvesse uma estratégia ótima todos os participantes iriam adotá-la, porém, até o momento, não é conhecida ou pelo menos não é divulgada. Na prática, cada participante define sua estratégia a partir de sua visão do mercado, seu desejo de ganho e sua aceitação à perda. Portanto um modelo de agente coerente deve considerar essas três habilidades: a visão de mercado que determinará como o agente atuará, ou seja, se optará por um viés mais fundamentalista ou técnico; o desejo de ganho que é a motivação do agente para negociar com outros participantes; e aceitação para perda que é o risco que o agente está disposto a expor-se para obter o ganho. Há uma relação direta entre ganho e risco e o agente deveria expor-se ao risco proporcionalmente ao ganho (MARKOWITZ, 1952) (SHARPE, 1964), apesar de existirem trabalhos que contrariam esse princípio (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979). Portanto, o agente deseja ter ganho condizente com o risco assumido, caso contrário ele optará por uma outra alternativa de investimento. Um modelo mais realista também deveria considerar cognições humanas mais complexas como aprendizado e, conseqüentemente, evolução da estratégia adotada. Na próxima seção serão vistos alguns modelos importantes de mercados artificiais que foram desenvolvidos e suas contribuições.

## 2.2 Abordagens para modelar e simular um mercado financeiro artificial

Os modelos do tipo microsimulação atuam em nível individual, modelando pessoas com um número de atributos (como sexo, idade, educação, emprego) e um número de probabilidades de transição. Isto produz um modelo micro estocástico, em oposição ao modelo macro determinístico da abordagem dos sistemas dinâmicos. Um exemplo de modelo micro é o **autômato celular** que consiste de uma grade de células arranjadas regularmente, em que cada célula possui um estado, dentre um conjunto de estados possíveis, que se altera a partir de regras que dependem dos estados das células vizinhas. Na física, os autômatos celulares podem ser usados para simular a interação entre unidades, como moléculas ou partículas. Enfim, um modelo de autômato celular o espaço é representado por uma grade uniforme, que avança no tempo por passos, e as leis do mundo são representados por um conjunto uniforme de regras que computam cada estado da célula a partir de seu estado anterior e dos estados dos seus vizinhos próximos (WOLFRAM, 2002) (GILBERT; TROITZSCH, 1999).

Por outro lado os **modelos baseados em agentes** são sistemas compostos de múltiplos elementos computacionais interativos conhecidos como agentes. Agentes são sistemas de computador com pelo menos duas habilidades importantes: eles possuem alguma capacidade de ação autônoma, decidindo o que devem realizar no intuito de satisfazer seus objetivos; eles são capazes de interagir com outros agentes, não somente trocando dados, mas com alguma atividade social análoga aquelas encontradas nos seres humanos.

Por essa razão, modelos baseados em agentes tem sido visto como uma metáfora natural para entender e construir um conjunto de modelos denominados de sociedades artificiais. Sociedades artificiais são modelos baseados em agentes que estudam fenômenos sociais humanos, como negociação, migração, formação de grupos, combates, interação com o ambiente, transmissão de cultura, propagação de doenças e dinâmicas populacionais. Nesses modelos, comportamentos de grupo e estruturas sociais emergem da interação das ações individuais dos agentes que atuam sob regras que consideram a informação do mundo e preferências individuais (EPSTEIN; AXTELL, 1996) (WOOLDRIDGE, 2002).

Nos sistemas econômicos, o estudo computacional de economias modeladas através de agentes interativos é chamado por alguns pesquisadores como *Agent-based computational economics* (ACE) (TESFATSION, 2006). Nesse caso, agente é um conjunto de dados e métodos comportamentais (regras) que representam uma entidade em um mundo construído computacionalmente. Agentes podem ser indivíduos (consumidores e produtores), grupos sociais (famílias, empresas, comunidades e agências governamentais) e instituições (mercados e sistemas reguladores). Portanto, agentes podem ser desde indivíduos passivos ao ambiente até tomadores de decisão com habilidades de aprendizado sofisticadas. Dois dos principais objetivos do pesquisador em ACE são: a compreensão empírica do mercado (quais as razões da existência de características específicas existentes em séries financeiras?) e a compreensão normativa (como os modelos ACE podem ser usados para melhorar alguns modelos de mercados?) (TESFATSION, 2006).

Neste trabalho, estamos interessados em investigar os modelos ACE aplicados ao mercado financeiro, chamados também de mercados financeiros artificiais ou, mais especificamente, de mercados de ações artificiais. Atualmente, os modelos de mercado tradicionais que pressupõem a escolha racional dos participantes e a eficiência de mercado são, em sua forma, extremamente elegantes. No entanto, não há, dentre estes modelos, algum que provou ser capaz de explicar todas características empíricas (fatos estilizados) de mercados financeiros reais (TESFATSION, 2006). Seria desejável, portanto, que houvesse um modelo de mercado financeiro que reproduzisse essas características, para, como dito anteriormente, entendermos de forma empírica e normativa os mercados.

Para iniciar o desenvolvimento de um mercado financeiro artificial o pesquisador deve definir a modelagem do mercado (ambiente), dos investidores (agentes) e dos ativos (recursos disponíveis). O modelo precisa ser similar em sua forma aos mercados reais, no entanto algumas dessas características são omitidas ou mesmo alteradas para manter a simplicidade e possibilitar uma análise empírica ou analítica do modelo. Na próxima seção será feito um breve histórico de alguns modelos de mercado financeiro artificial quanto ao seu formalismo e suas contribuições.

### **2.3 Breve histórico em mercados financeiros artificiais**

No princípio, como nos modelos de Chiarella (CHIARELLA, 1992) e Levy, Levy e Solomon (LEVY; LEVY; SOLOMON, 1994) o objetivo era explicar como ocorriam as mudanças drásticas de preços a partir de uma simulação computacional de teorias econômicas como a lei da oferta e procura na formação dos preços e as funções de utilidade esperada para moldar os agentes. Em 1994, o modelo de Santa Fé (PALMER et al., 1994) inovou ao mostrar que era possível desenvolver agentes mais complexos que possuíam a capacidade de alterarem suas estratégias no tempo. Um outro modelo muito importantes foi o de Lux e Marchesi (LUX; MARCHESI, 1999), pois utilizou a comparação de propriedades estatísticas entre as séries financeiras reais e artificiais como



validação. Após estes trabalhos, considerados inovadores, há na literatura vários outros modelos propostos, alguns citados nesse capítulo e outros não relacionados por não contribuírem substancialmente à área ou por desconhecimento de demais trabalhos relevantes pelo autor dessa dissertação e seu orientador. O mais importante é que ainda não fora relatado um modelo geral que satisfaça todas as condições encontradas no mundo real, pois se houvesse poderia ser usado, com o devido ajustamento dos parâmetros, para previsão de preços. Outro detalhe é que os modelos são desenvolvidos por economistas, físicos, matemáticos e cientistas da computação o que resulta em formalizações diversas, não possibilitando uma padronização no formalismo do modelo que é influenciado pela formação científica do pesquisador. Nessa seção pretende-se relatar brevemente cada trabalho para ter-se uma idéia geral de alguns modelos e sua importância. Caso seja de interesse, revisões atuais e mais detalhadas podem ser encontradas em (TESFATSION, 2006) e (SAMANIDOU et al., 2007).

No modelo de Chiarella (CHIARELLA, 1992) as transações são executadas com preço em equilíbrio Walrasiano <sup>5</sup> e nesse mercado as transações e os ajustes de preços ocorrem simultaneamente. O preço é formado por uma componente fundamentalista e outra técnica. A dinâmica de preço dos ativos é dada por  $P(t+1) = a(W(t) - P(t)) + h(\Psi(t) - g(t))$ , onde  $a$  é constante positiva,  $W$  é a função demanda fundamentalista,  $\Psi$  é preferência de alocação recursos em ações,  $g$  a preferência de alocação de recursos em ativo livre de risco e  $h$  é função com restrição  $h'(x) > 0$  para todo  $x$  e  $h(0) = 0$ . Os técnicos estimam  $\Psi$  como um processo exponencial da média ponderada das variações dos preços históricos. Como resultado, os estudos empíricos da simulação evidenciaram a existência de comportamento diferente de um *random walk*. Uma colaboração importante foi considerar a existência de participantes com estratégias heterogêneas: fundamentalistas e técnicas.

Outro modelo importante é o de Levy, Levy e Solomon (LEVY; LEVY; SOLOMON, 1994) em que no mercado há tipos de ativos: a ação (ativo com risco) e o título (ativo livre de risco). A cada período  $t$ , o montante em títulos é remunerado com uma taxa livre de risco constante  $r$  e cada ação paga um dividendo  $D_t$  com crescimento constante. A riqueza do agente é representada por  $W_t(i)$  e é atualizada por  $W_{t+1}(i) = W_t(i) + N_t(i)D_t + (W_t(i) - N_t(i)P_t)r$ , onde  $N_t(i)$  é o número de ações do agente  $i$  e  $P_t$  é o preço da ação. Cada agente é representado por uma função utilidade côncava que reflete suas expectativas em relação aos preços e considera a riqueza e a aversão ao risco. Em uma situação de incerteza o objetivo de cada agente é maximizar esta função utilidade. Em cada instante  $t$ , o agente  $i$ , a partir de sua função utilidade, estima uma curva de preços teóricos dos ativos para um determinado número de ações que o agente pretende possuir  $N_t(i)$ . A junção dessas curvas dos agentes forma uma curva de preço pela quantidade de ações de todo o mercado, desta forma, arbitrado uma quantidade de ações ao mercado é obtido o preço final para o ativo. Por fim, são analisadas as reações entre um mercado com agentes homogêneos e um com heterogêneos e se ocorrem reações abruptas nos preços.

Um modelo bastante citado é o mercado artificial da Universidade de Santa Fé (PALMER et al., 1994) onde a contribuição mais importante foi utilizar-se de algoritmos genéticos para modelar o comportamento dos agentes. Nesse modelo a cada período  $t$ , cada agente  $i$ , possui uma quantidade  $h_i^\alpha(t)$  para cada ação  $\alpha$  e uma quantidade de dinheiro  $m_i(t)$ . Cada ação paga dividendos  $d^\alpha(t)$  modelado por um processo auto-regressivo sim-

<sup>5</sup>Em um mercado em equilíbrio Walrasiano não há excesso de demanda. Em mercado financeiro, por exemplo, é como se toda ordem de compra fosse sempre transacionada, ou seja, sempre haveria um vendedor disponível.

ples AR(1) e o dinheiro é remunerado por uma taxa fixa  $r$ . Não há interação direta entre os agentes. O agente escolhe o  $h_i^\alpha(t)$  que maximize seu lucro através da análise dos dividendos e por especulação. O preço  $p^\alpha(t)$  depende do total do comportamento de compra e venda de todos os agentes,  $p^\alpha(t+1) = p^\alpha(t) \left[ 1 + \eta(\sum_{i=1}^N b_i^\alpha(t) - \sum_{i=1}^N o_i^\alpha(t)) \right]$ , onde  $b_i^\alpha(t)$  é a ordem de compra do agente  $i$ ,  $o_i^\alpha(t)$  de venda e  $\eta$  é um valor arbitrário fixo para ajuste de preços. Cada agente define os valores  $b_i^\alpha(t)$  e  $o_i^\alpha(t)$  através de um algoritmo genético que considera dezenas de regras que envolvem os dividendos e os preços das ações. A riqueza do agente no final de cada período é dada por  $w_i(t) = (1+r)m_i(t-1) + \sum_{\alpha} h_i^\alpha(t-1)[p^\alpha(t) + d^\alpha(t)]$ . Os pesquisadores observaram que o volume de negociação varia bastante, ocorrendo períodos de calma e outros períodos de grande atividade. Outra constatação é que para as regras usadas pelos agentes obterem sucesso elas necessitam evoluir ao longo do tempo. Os agentes adaptam-se a novas situações, por exemplo, se houver mudança dos valores dos dividendos. Outra constatação é que há agentes que se tornaram muito mais ricos que outros, porém os autores atribuíram isso à “sorte” do agente obter uma combinação boa de regras de negociação.

O modelo de Lux e Marchesi publicado na revista *Nature* (LUX; MARCHESI, 1999) também é relevante no histórico de mercados artificiais. Nele há dois tipos de agentes: (1) os fundamentalistas que esperam que o preço  $p$  siga o chamado valor fundamental do ativo  $p_f$  que é baseado nos lucros futuros (pagamentos de dividendos); (2) os *noise traders* ou técnicos que seguem a tendência de preços e estão divididos em otimistas e pessimistas. Os agentes técnicos podem mudar de pessimistas para otimistas e vice-versa, dependendo de sua característica atual e o comportamento dos preços. Além disso, os técnicos podem tornar-se fundamentalistas e vice-versa caso haja oportunidade de ganho maior no outro grupo. O preço é resultado da ordem e da demanda. Como contribuição está a formalização inspirada na física estatística, em que indivíduos reagem a uma certa força econômica através das mudanças de seus comportamentos com uma determinada probabilidade. Também foi observado que as séries de retornos exibiam alta frequência de eventos extremos e volatilidade clusterizada. Observaram-se leis de potência dos retornos na análise de um *lag* de tempo e distribuição normal quando aumentados estes *lags*. Não foi encontrado autocorrelação dos retornos e quando analisado os retornos absolutos foi observado uma forte persistência de volatilidade.

Um dos modelos que primeiro introduziu o conceito de ordem de compra e venda é o Modelo Genoa (RABERTO et al., 2001). No mercado Genoa há agentes do tipo fundamentalista, técnico e aleatório. Cada agente  $i$  possui uma quantidade de dinheiro  $C_i(t)$  e de ativos  $A_i(t)$  para o período  $t$ . O agente envia uma ordem de compra da ação com a probabilidade  $P_i$  ou uma ordem de venda com probabilidade  $1 - P_i$ . A ordem de venda é composta pela fração dos ativos do agente  $a_i^s = r_i A_i(t)$  e pelo preço desejado de venda  $s_i = p(t)/N_i(\mu, \sigma_i)$ , onde  $r_i$  é um número aleatório uniformemente distribuído entre 0 e 1,  $p(t)$  é o preço do ativo e  $N_i(\mu, \sigma_i)$  número aleatório de distribuição gaussiana com média  $\mu$  e desvio  $\sigma_i$  baseada no histórico de preços dos ativos  $p(t)$ . Analogamente, a ordem de compra é composta pela quantidade de dinheiro a ser empregado,  $c_i = r_i C_i(t)$ , e pelo preço de compra  $b_i = p(t)N_i(\mu, \sigma_i)$ . Assim, a quantidade de ativos negociados na compra é dada por  $a_i^s = \frac{c_i}{b_i}$ . É definida uma função demanda com as ordens de compra e uma função oferta com as ordens de venda e o preço final para o período é definido pela intersecção das curvas. O modelo Genoa reproduziu caudas pesadas nas distribuições de retornos e volatilidade clusterizada. Como característica da dinâmica possui o conceito de agentes enviando ordens de compra e venda e foi desenvolvido usando programação

orientada a objetos.

Em um outro modelo de Chiarella (CHIARELLA; DIECI; JONES, 2006) mais recente há dois grupos de agentes: fundamentalistas e os grafistas (ou técnicos). O mercado possui um ativo com risco que paga dividendo aleatório  $D_t$  e um ativo sem risco que paga uma taxa livre de risco constante  $r$ . Cada grupo de agente  $j$  possui uma mesma função utilidade CRRA (*constant absolute risk aversion*)  $u^j(\Omega)$  que considera para o cálculo a riqueza  $\Omega$  e coeficiente de aversão ao risco  $\lambda^j$ . O objetivo do agente é obter a fração da riqueza  $Z^j$  que será investida no ativo de risco que maximize a função utilidade esperada. Os fundamentalistas no cálculo do  $Z^j$  considera o preço fundamental baseado nas expectativas de recebimento do dividendo e os técnicos consideram o retorno dos preços passados. O preço é calculado por um agente formador de mercado que considera as frações da riqueza que os agentes estão dispostos a investir no ativo livre de risco. O autor observou estados onde o preço do ativo permanece no nível do preço fundamental e outros estados onde o preço cresce rapidamente e diverge do preço fundamental. Há atratores cíclicos que poderiam explicar *boom* e *crashes*. Em média os lucros dos fundamentalistas foi menor que o dos técnicos.

Neste capítulo fez-se uma breve descrição de modelos artificiais financeiro na literatura e suas inovações. O capítulo posterior fará uma revisão de conceitos probabilísticos e estatísticos que são úteis para formalização de um modelo artificial e também para análise dos resultados.

### 3 CARACTERIZAÇÃO DAS FLUTUAÇÕES ESTATÍSTICAS EM SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS

Neste capítulo descreveremos algumas definições úteis para concepção e análise dos resultados proveniente das séries temporais reais oriundas do modelo de mercado artificial proposto nesta dissertação. Em uma primeira parte definimos retorno financeiro e alguns estimadores para importantes propriedades estatísticas relacionadas à simetria e à cauda da distribuição de retornos obtidas quando analisadas sobre janelas temporais distintas. Tais propriedades de mercados financeiros reais são imediatas conseqüências dos postulados de Mandelbrot (MANDELBROT, 1963) sobre o fenômeno de que grandes variâncias dos retornos devem ser seguidas de grandes variâncias o que é freqüentemente conhecido na literatura como volatilidade clusterizada. Tal propriedade, como veremos, constitui-se no principal fator da existência de uma transição entre o comportamento lei de potência, observado na distribuição de retornos quando estes são obtidos para pequenos intervalos temporais, para o comportamento gaussiano, observado para esta mesma distribuição na situação de maiores intervalos temporais serem considerados.

No presente capítulo então descreveremos a metodologia necessária para a caracterização dos chamados fatos estilizados econométricos relacionados às séries temporais financeiras. Trata-se de desenvolver estimadores que apresentam peculiares comportamentos universais para séries financeiras reais e que então podem ser utilizados também para ratificar as propriedades de mercados financeiros artificiais e ou mesmo calibrar tais mercados, como é o proposto e avaliado nesta dissertação. É importante salientar que não há na literatura uma proposta tão abrangente como esta para verificar estes fatos estilizados como uma forma de mostrar a robustez e a validade de previsões tais mercados financeiros artificiais.

#### 3.1 Definições para séries financeiras

Em economia há diversas séries temporais como preço de ativos, inflação, taxa de juros etc. A análise da série temporal (ou série financeira) de alguma destas variáveis econômicas possibilita a extração de informações que auxiliem na tomada de decisão pelo participante do mercado. No mercado financeiro, uma das séries mais importantes é a série de retornos do ativo negociado. O retorno  $r$  do preço de um ativo  $p_t$  entre os instantes  $t - \Delta t$  e  $t$  é calculado por  $r(t) = \log p_t - \log p_{t-\Delta t}$ . Em primeira aproximação:

$$\begin{aligned} \log p_t - \log p_{t-\Delta t} &\sim (\log p_{t-\Delta t})'(p_t - p_{t-\Delta t}) \\ &= \frac{(p_t - p_{t-\Delta t})}{p_{t-\Delta t}}, \end{aligned}$$

e esse retorno, também denominada variação relativa de preços, ou retorno líquido simples, pode então ser simplesmente escrito por:

$$r(t) = \frac{p_t}{p_{t-\Delta t}} - 1.$$

Há um motivo bastante simples para se analisar as propriedades estatísticas dos retornos e não da série de preços diretamente: os efeitos de escala. Diferentemente da série de preços os retornos não são afetados pelos efeitos de escala o que facilita bastante quando procuramos propriedades universais. Assim neste trabalho nosso principal *input* são as séries de retornos produzidas pela nossa simulação baseada em agentes para nossa proposta de mercado financeiro. Nesse sentido, de tais séries é que procuraremos extrair propriedades estatísticas que caracterizem os chamados fatos estilizados.

Uma série financeira de retorno do tipo  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  pode ser considerada como uma variável aleatória discreta e utilizar ferramentas probabilísticas para quantificar suas propriedades universais pode ser de grande ajuda para a modelagem de propriedades no mercado financeiro. A definição correta da distribuição de probabilidades de uma série de retornos, na prática, ajuda um analista de investimentos a definir suas chances de ganhos ou perdas. Na próxima seção realizaremos uma análise dos momentos centrais da distribuição de retorno pode ser utilizado na análise de séries temporais financeiras.

### 3.1.1 Momentos centrais

O momento central  $\mu_k$  de uma função densidade de probabilidades  $f(x)$  com a média  $\mu$  é dado por:

$$\mu_k = \langle (x - \langle x \rangle)^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx$$

onde  $\langle x \rangle$  é o valor esperado de  $x$ . Para todas as distribuições com primeiro momento definido, isto é,  $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  finito, temos que trivialmente o primeiro momento central é nulo, isto é  $\mu_1 = \langle (x - \langle x \rangle) \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$ . Não são todas as funções densidade de probabilidade que possuem momentos definidos. Um exemplo clássico é a distribuição de Cauchy definida por  $f(x) = (a/\pi) \cdot (x^2 + a^2)^{-1}$ . Notoriamente

$$\langle x \rangle = (a/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} dx = 0$$

quando  $a \neq 0$ . Porém,  $\langle x^2 \rangle$  diverge e então trata-se de uma distribuição sem variância definida, uma vez que a variância nada mais é que o segundo momento central:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle x^2 - 2x \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle \\ &= \langle x^2 \rangle - 2 \langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = var(x). \end{aligned}$$

Assim os momentos centrais podem descrever importantes propriedades da distribuição de retornos. A variância aqui já comentada é um conceito importante em finanças, pois é utilizada para obter a volatilidade em uma série de retornos. Em economia, a volatilidade é o termo usado para indicar a dispersão das mudanças dos preços, desta forma ela quantifica quanto os retornos de uma série de retornos variam em relação à média da série. Além disso, a volatilidade também é utilizada como medida de risco em alguns

Tabela 3.1: Momentos centrais normalizados

$k$	Momento central normalizado $\frac{\mu_k}{\sigma^k}$
0	$\frac{\mu_0}{\sigma^0} = 1$
1	$\frac{\mu_1}{\sigma^1} = 0$
2	$\frac{\mu_2}{\sigma^2} = \frac{\mu_2}{(\sqrt{\mu_2})^2} = \frac{\mu_2}{\mu_2} = 1$
3	$\frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$
4	$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\sqrt{\mu_2})^4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

casos, pois quanto maior a dispersão, maior será o risco que o investidor estará exposto ao escolher o investimento relacionado à série financeira usada. A volatilidade de uma série de retornos  $R$  em janela temporal  $T = t_f - t_0$  é obtida pela variância, cujo melhor estimador amostral não viciado é dado neste caso

$$var(T, \Delta t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_{t_0+i \cdot \Delta t} - \langle r \rangle)^2 \approx \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2$$

onde  $\langle r^k \rangle = (1/n) \sum_{i=1}^n r_{t_0+i \cdot \Delta t}^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$  e  $n = \lfloor \frac{T}{\Delta t} \rfloor$  e o tempo é parametrizado por  $t = t_0 + i \cdot \Delta t$ .

O momento central normalizado  $k$  (ou momento padronizado) de uma variável aleatória  $x$  é o  $k$ -ésimo momento central dividido por  $\sigma^k$ :

$$\mu_k^N = \left\langle \left( \frac{x - \langle x \rangle}{\sigma} \right)^k \right\rangle$$

onde  $\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$  é o desvio padrão (raiz da variância). Na tabela 3.1.1 são mostrados para um melhor detalhamento os quatro primeiros momentos centrais normalizados. Para nossa série de retornos temporal, o  $k$ -ésimo momento central normalizado de uma série de retornos temporal é calculado por:

$$\mu_{k,\Delta t}^N = \left\langle \left( \frac{r_t - \langle r \rangle}{\sqrt{var(T, \Delta t)}} \right)^k \right\rangle$$

que neste caso depende da janela temporal considerada para o cálculo dos retornos  $\Delta t$ .

Os momentos centrais normalizados são utilizados, por exemplo, no cálculo da curtose e assimetria de uma função distribuição de probabilidade que são parâmetros que quantificam o formato das caudas e simetria em relação à média respectivamente. Na próxima sessão será descrito mais sobre a curtose e assimetria e sua relevância para séries financeiras.

### 3.1.2 Curtose e assimetria

Curtose, ou como é dito em inglês *kurtosis* proveniente do latim, é o parâmetro que quantifica a quão pesada é a cauda de uma distribuição. O termo “cauda pesada” pode ser entendido a distribuições com grande probabilidade de ocorrerem valores longe da média em uma distribuição.

Quantificando a curtose, o investidor pode definir o ativo que lhe proporcione maior ou menor incidência de valores longe da média e, portanto pode ser usado alternativamente

como medida de risco em alguns casos (MANDELBROT; HUDSON, 2005). A curtose  $K$  de uma série de retornos  $R$  é definida como o quarto momento central normalizado corrigido:

$$K = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\langle (r_t - \langle r \rangle)^4 \rangle}{(\langle r_t^2 \rangle - \langle r \rangle^2)^2} - 3.$$

O algoritmo 3 aqui tem um significado bastante interessante. Para uma variável  $x : N(\mu, \sigma)$ , isto é, uma variável normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^4 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^4 \exp \left[ -\frac{1}{2} z^2 \right] dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^{\infty} \exp [-\alpha z^2] dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 3 \end{aligned}$$

pois  $\alpha$  deve ser feito igual a  $1/2$  após a derivação.

Assim na fórmula acima, o  $-3$  funciona como um parâmetro para medição da não normalidade de distribuições quanto ao peso da cauda, uma vez que para distribuições normais a curtose deve então ser identicamente igual a zero. Alguns autores chegam a denominar  $K$  como a do excesso de curtose. O melhor estimador de uma amostra de retornos,  $r_{t_0}, r_{t_0+\Delta t}, r_{t_0+2\cdot\Delta t}, \dots, r_T$ , é dado por

$$K_T = \frac{n \cdot (n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{\sum_{i=1}^n (r_{t_0+i\cdot\Delta t} - \langle r \rangle)^4}{var(T, \Delta t)^2} - 3 \frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}.$$

A **assimetria** é o parâmetro que mede o quão assimétrica é a curva de uma distribuição em relação à média desta, indicando se está assimétrica positivamente ou negativamente. Entre duas distribuição de retornos de mesma média, um investidor tende a escolher a distribuição com a assimetria mais positiva (MANDELBROT; HUDSON, 2005). A assimetria é calculada pelo terceiro momento central normalizado:

$$S = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\langle (R_t - \langle R \rangle)^3 \rangle}{(\langle R_t^2 \rangle - \langle R \rangle^2)^{3/2}}$$

e para uma variável normal  $x : N(\mu, \sigma)$ ,  $\langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle = 0$ , pois ela é definida como uma distribuição totalmente simétrica e então para normais  $S = 0$ .

O melhor estimador amostral  $S$ , que serve para testar quão assimétrica é uma distribuição dos retornos experimentalmente coletados, é dado por:

$$S_T = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n (R_{t_0+i\cdot\Delta t} - \langle R \rangle)^3}{var(T, \Delta t)^{3/2}}$$

e quanto mais próxima de zero seja  $S_T$  mais simétrica é a distribuição.

Para especificamente testar a normalidade de uma amostra existem vários outros testes, como Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk dentre outros, onde neste caso um adequado testes de hipótese pode ser aplicado. Aqui não é o caso, pois temos uma abundância bastante grande de dados e a intenção deste trabalho é estabelecer resultados universais e não apenas qualificar algumas amostras de séries temporais. Por isso então utilizaremos estas funções acima para diferentes janelas temporais do retorno para tentar estabelecer o formato e simetria da distribuição de retorno e uma possível transição no comportamento da distribuição quando passamos de pequenas janelas temporais do retorno para grandes janelas.

## 3.2 Fatos estilizados das séries financeiras

Fatos estilizados na economia é um conjunto de propriedades estatísticas que são observadas em séries financeiras e independem de quais ativos são analisados ou do período de tempo utilizado para estas estimativas. Os fatos estilizados não são tão fáceis de serem verificados por simples propriedades estatísticas, pois na verdade eles são expressos por leis mais universais (CONT, 2001) e não por abordagens descritivas. Nessa seção iremos apresentar alguns fatos encontrados em séries de retornos financeiros. Mais propriamente analisaremos em que situação a gaussianidade da série de retornos pode ser observada e quando os retornos não são gaussianos o que esperar para a distribuição de retornos. Também enunciaremos propriedades esperadas como a ausência de autocorrelação de retornos simples e o comportamento lei de potência esperado para a autocorrelação dos retornos absolutos e quadráticos como função do *lag* temporal. Associaremos novamente estas propriedades com o que se conhece por volatilidade clusterizada.

### 3.2.1 Gaussianidade versus lei de Pareto

Mandelbrot (MANDELBROT, 1963) observou excesso de curtose nas distribuições de séries de retornos de janelas de observações de tempo curtas (altas frequências), por essa razão as distribuições não seriam Gaussianas para todos os tempos como supunha Fama (FAMA, 1965). Na verdade no limite de *fine scales*,  $\Delta t$  pequeno, o que se espera na prática, e resultados experimentais corroboram com isso (PLEROU et al., 1999), é um tipo particular de lei de potência para a distribuição de retornos, denominada lei de Pareto:

$$\Pr(r) = \begin{cases} \frac{kr_0^k}{r^{k+1}} & r > r_0 \\ 0 & 0 < r \leq r_0 \end{cases}$$

onde  $r$  são valores absolutos do retorno e  $\gamma = k + 1$  é o expoente que caracteriza a lei de potência. O termo  $r_0$  denota um corte para para os retornos que evita a divergência. Podemos observar facilmente que  $\langle r \rangle = kr_0^k \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} dr = \frac{kr_0}{k-1}$  o que só existe quando  $k > 1$ . Da mesma forma  $var(r) = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \frac{r_0^2 k}{(k-1)^2(k-2)}$  que só é finito para  $k > 2$ . As funções do tipo lei de potência são encontradas em diversos campos da ciência como em distribuições de magnitude de terremotos, populações de cidades, citação de artigos científicos, frequência de palavras etc (NEWMAN, 2005).

A característica principal desta distribuição em relação à distribuição gaussiana é ter cauda pesada o que, por exemplo, em um gráfico log-log significa que seu comportamento é linear ao contrário da distribuição gaussiana como pode ser observado na figura 3.1. Porém com o aumento da janela ( $\Delta t$  grande) para as estimativas do retorno,



regime esse conhecido como *coarse-grained*, espera-se que a distribuição de retornos deva assemelhar-se a uma distribuição gaussiana (PLEROU et al., 1999). Esta última propriedade é também chamada de gaussianidade agregacional e, para comprova-la, é necessário medirmos a distribuição da série alterando a janela de observação e verificando a tendência para normalidade.

Para isso pode-se aplicar alguns testes de hipótese para testar a normalidade na série, como Shapiro-Wilk ou mesmo Kolmogorov-Smirnov, porém, neste trabalho, pelo volume de dados e a procura de comportamentos universais utilizamos um teste que consiste em representar graficamente os momentos centrais normalizados dos retornos absolutos que para uma variável aleatória  $x$  é dado por

$$g_k^N = \left\langle \left| \frac{x - \mu}{\sigma} \right|^k \right\rangle.$$

No caso de uma distribuição normal  $N(\mu, \sigma)$ , pode-se observar que:

$$\begin{aligned} g_{k,gauss}^N &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x - \mu}{\sigma} \right|^k \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^k \exp \left[ -\frac{1}{2} z^2 \right] dx \\ &= \frac{2^{k/2} \Gamma(k/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

o que vale para qualquer  $k$  real positivo. Assim calculamos os momentos dos retornos absolutos estimados para um  $\Delta t$ , considerando um período  $T$  da série temporal obtida do

nosso modelo artificial, como  $g_{k,\Delta t}^N = \left\langle \left| \frac{r_t - \langle r \rangle}{\sqrt{\text{var}(T, \Delta t)}} \right|^k \right\rangle$  e analisamos a tendência de  $g_{k,\Delta t}^N$

para valores cada vez maiores de  $\Delta t$ . Com o aumento da janela de observação, os  $g_{k,\Delta t}^N$  devem aproximar-se, como é observado em séries temporais reais (PLEROU et al., 1999), dos momentos  $g_{k,gauss}^N$  de uma distribuição normal, cujo gráfico em função de  $k$  pode ser visto na figura 3.2.

A transição lei de Pareto para distribuição Gaussiana observada na mudança da janela temporal utilizada (*fine scales to coarse grain*), constitui um importante fato estilizado da Economia inicialmente considerado por Mandelbrot e corroborado por outros autores na análise de séries temporais reais. Assim qualquer modelo artificial de mercado deve reproduzir tal propriedade consistentemente. Comportar-se como lei de Pareto para pequenos valores de  $\Delta t$  tem uma consequência imediata, valores grande no retorno (negativo ou positivo) são bastante prováveis, estes “saltos” que ocorrem são denominados na literatura como “vãos de Levy” em *random walks* onde a distribuição do tamanho dos passos são leis de potência. Nosso modelo de mercado artificial corrobora a tendência para um comportamento gaussiano quando  $\Delta t$  é aumentado, mostrando que ele é compatível com as séries reais como será mostrado nos capítulos futuros.

### 3.2.2 Ausência de autocorrelação dos retornos simples

Autocorrelação é um parâmetro numérico que mede o quanto um valor de uma série temporal depende dos seus valores passados. A existência de autocorrelação dos valores de uma série financeira possibilitaria auferir ganhos analisando os dados passados da

série. Para uma série de retornos  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  a autocorrelação  $A(\tau)$ , para uma janela de observação  $\tau$ , é calculada como segue:

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \frac{1}{\sigma^2} \langle (r_{t+\tau} - \langle r \rangle) (r_t - \langle r \rangle) \rangle \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_{t_0+i\Delta t} - \langle r \rangle) (r_{t_0+i\Delta t-\tau} - \langle r \rangle) \end{aligned}$$

onde  $\sigma^2$  é a variância. Alguns trabalhos visaram descobrir a autocorrelação em série de preços e retornos e, dentre esses, um dos pioneiros foi realizado por Fama (FAMA, 1965), (FAMA, 1970) que ao analisar a séries de retornos de preços de mercados percebe que há ausência de autocorrelação. Fama concluiu erroneamente que o mercado se comportaria como um Caminhada Aleatória gaussiana (*Random Walk*) e, conseqüentemente, teria distribuições Gaussianas para o retorno. Desta forma, não seria possível extrair qualquer informação relevante das séries financeiras de retorno que pudessem levar um participante a auferir ganhos superiores aos demais (Hipótese de Eficiência de Mercado). Isso foi mostrado estar errado pois um ponto importante em estatística é que correlação nula não implica em independência de um passo em relação a outro e sim é a independência que implica em correlação nula.

### 3.2.3 Autocorrelação dos retornos quadráticos e a volatilidade clusterizada

Apesar de não haver autocorrelação dos retornos simples, alguns autores (MANTEGNA; STANLEY, 1995) (LIU et al., 1997) (CONT; POTTERS; BOUCHAUD, 1997) (PLEROU et al., 1999) observaram autocorrelação dos retornos absolutos e quadráticos, provando existir algum tipo de dependência não-linear dos retornos, o que também constitui um fato estilizado do mercado financeiro. A autocorrelação dos retornos quadráticos  $A_q(\tau)$  é dada por:

$$\begin{aligned} A_q(\tau) &= \frac{1}{\sigma^4} \langle (r_{t+\tau} - \langle r \rangle)^2 (r_t - \langle r \rangle)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_{t_0+i\Delta t} - \langle r \rangle)^2 (r_{t_0+i\Delta t-\tau} - \langle r \rangle)^2. \end{aligned}$$

Eventualmente a média temporal pode ser melhorada por uma média no *ensemble* se vários períodos  $T$  forem utilizados ou ainda diferentes ativos financeiros, mas isso será melhor explicado na seção resultados.

Diferentemente do que ocorre para a autocorrelação, isto é um decaimento exponencial (o que significa ausência de correlação na prática), para os momentos quadráticos é esperado um comportamento tipo lei de potência,  $A(\tau) = \tau^\gamma$  com expoente  $\gamma$  bem definido entre  $[0.2, 0.4]$  (CONT; POTTERS; BOUCHAUD, 1997) (MANTEGNA; STANLEY, 1999) (CONT, 2005), ou seja, era um processo com dependência longa dos valores passados. E, a partir da análise da autocorrelação quadrática, observaram períodos de tempo em que as séries possuem alta volatilidade e outros com baixa volatilidade. Esta propriedade também é conseqüência da volatilidade clusterizada.

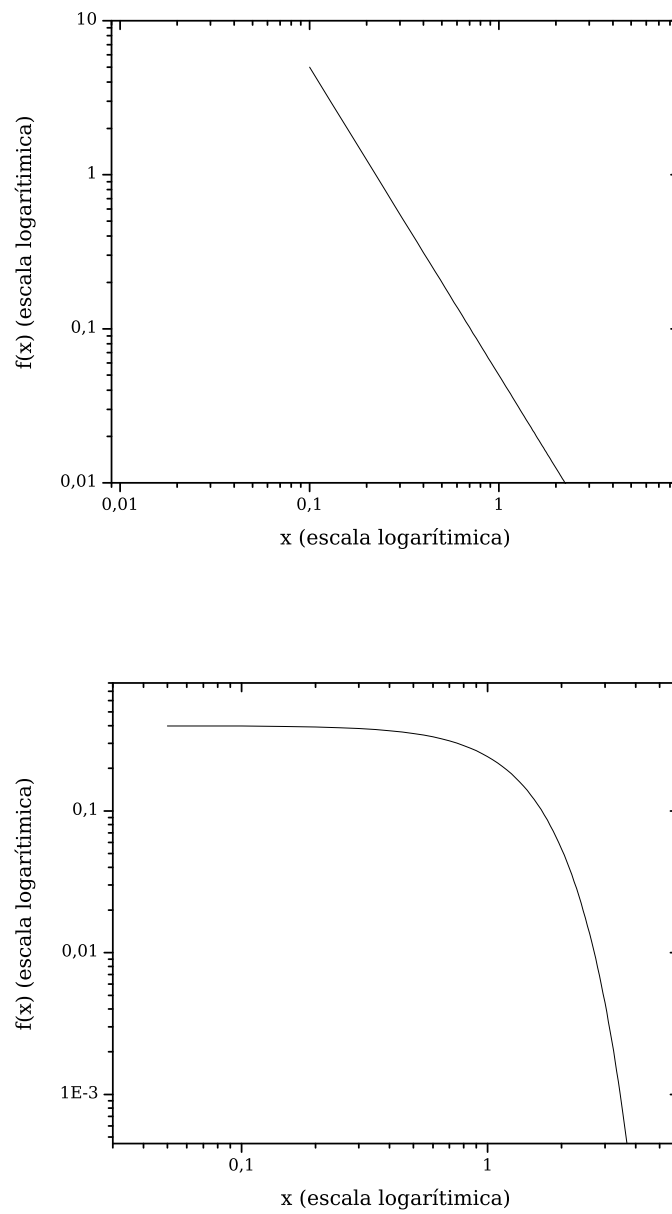


Figura 3.1: Função densidade de probabilidade de uma distribuição de Pareto e de uma distribuição Normal em escala logarítmica.

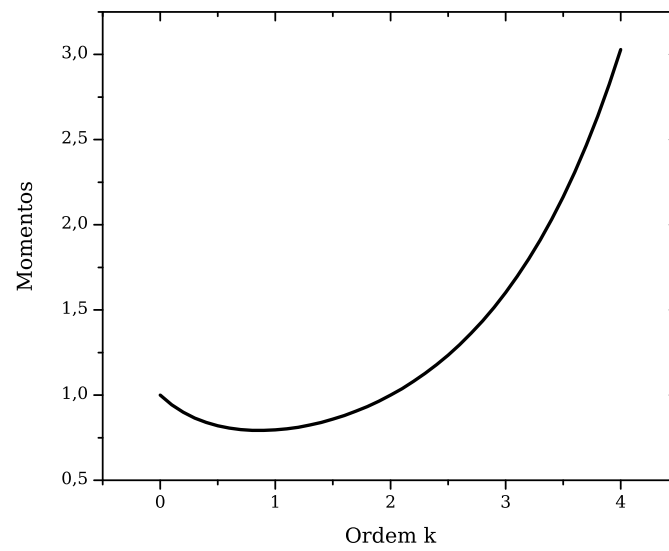


Figura 3.2: Momentos normalizados de uma distribuição Normal.

## 4 UM NOVO MODELO BASEADO NA EXPECTATIVA DE RIQUEZA

O objetivo desse capítulo é formalizar um novo modelo de mercado financeiro artificial que reproduza alguns dos fatos estilizados encontrados em séries financeiras reais. O modelo é composto por agentes com diferentes estratégias que realizam transações de compra e venda de ativos financeiros ao longo do tempo. A principal contribuição do modelo é a introdução de um fator que considera a riqueza esperada que permite uma distinção por parte dos agentes quanto a sua capacidade de acertar ou não seus prognósticos. Assim, primeiramente, formalizamos o mercado, apresentamos o algoritmo principal para o nosso modelo e, por fim, descrevemos como o modelo é considerado no caso evolutivo.

### 4.1 Formalismo

No modelo de mercado proposto há dois tipos de agentes, os fundamentalistas e os técnicos, que negociam ativos em cada interação de tempo discreto. Os fundamentalistas consideram os atributos relativos aos dividendos da empresa para determinarem o preço de um ativo e por outro lado, os técnicos consideram exclusivamente o histórico da série de preços. Nesse mercado há dois tipos de ativos: os com risco e os sem risco. O ativo com risco representa uma ação de uma empresa negociada em bolsa de valores e o ativo sem risco equivale ao dinheiro investido em uma aplicação financeira segura como, por exemplo, é a poupança. A cada período de tempo  $t$ , os agentes recebem um valor em dividendos  $d$  por suas ações e juros, com uma taxa constante  $\alpha$ , pelo dinheiro investido na aplicação sem risco. Dividendo é uma parcela do lucro da empresa paga em dinheiro aos acionistas proporcionalmente a quantidade de ações que cada acionista detém é dada por:

$$d(t) = \mu + \beta_1 d(t-1) + \beta_2 \xi_t \quad (4.1)$$

sendo  $\mu$  um valor constante,  $\beta_1$  um incremento geométrico e  $\beta_2$  a amplitude da variável aleatória normal padrão  $\xi_t : N(0, 1)$ . No mercado, a ação tem um preço  $p(t)$  resultante das diversas negociações entre os agentes no mercado em um instante  $t$ .

#### 4.1.1 Agentes e suas estratégias

No modelo os agentes representam as pessoas em um mercado financeiro que compram e vendem ações a partir de uma estratégia que possa render mais lucro. A cada estratégia do agente está vinculado um retorno esperado que é calculado a partir de suas convicções sobre o mercado para um determinado tempo. Assim, um agente  $i$  calcula o retorno esperado  $e_r^{(i)}(t)$  da ação para cada instante  $t$ . Os fundamentalistas calculam esse

retorno esperado como uma taxa entre os dividendos recebidos  $d(t-1)$  e o preço do ativo  $p(t-1)$  no período anterior:

$$e_r^{(i)}(t) = \frac{d(t-1)}{p(t-1)} + \phi_i(t) \quad (4.2)$$

Já os técnicos consideram que o retorno esperado para instante  $t$  é a taxa da variação de preços entre os instantes  $t-2$  e  $t-1$ :

$$e_r^{(i)}(t) = \frac{p(t-1)}{p(t-2)} - 1 + \phi_i(t) \quad (4.3)$$

A função  $\phi_i(t)$  presente nas equações (4.2) (4.3) considera a relação da riqueza esperada  $W_{exp}^{(i)}(t-1)$  e a riqueza realmente obtida  $W_i(t-1)$  no período anterior. Essa função serve como aprendizado para os agentes, pois estes consideram suas habilidades em acertar prognósticos no cálculo dos retornos esperados. Trata-se de uma das contribuições mais importantes do nosso trabalho em relação aos trabalhos anteriores e mostraremos em detalhes a influência deste fator nos resultados. A função  $\phi_i(t)$  é calculada como segue:

$$\phi_i(t) = \frac{W_i(t-1)}{W_{exp}^{(i)}(t-1)} - 1 \quad (4.4)$$

A riqueza  $W_i$  e a riqueza esperada  $W_{exp}^{(i)}$  do agente  $i$  são dadas respectivamente por :

$$W_i(t) = m_i(t) + q_i(t)[p(t) + d(t)] \quad (4.5)$$

$$W_{exp}^{(i)}(t) = m_i(t-1)[1 + \alpha] + q_i(t-1)[p(t-1)(1 + e_r^{(i)}(t)) + d(t-1)] \quad (4.6)$$

onde  $m_i(t)$  é a quantidade de dinheiro em ativo sem risco do agente  $i$  e  $q_i(t)$  é a quantidade de ações. E, após definido o retorno esperado, o agente estima o seu preço esperado da ação  $p_{exp}^{(i)}$  para o período como:

$$p_{exp}^{(i)}(t) = p(t-1)[1 + e_r^{(i)}(t)] \quad (4.7)$$

O agente decide comprar a ação se  $e_r^{(i)}(t) > \alpha$ , caso contrário ele irá vender ação. Isto significa que o agente compra ações somente quando o retorno esperado destas for superior ao retorno do ativo sem risco, caso contrário ele prefere manter o dinheiro nesta aplicação segura. O preço de compra da ação é dado por  $p_b^{(i)}(t) = p_{exp}^{(i)}(t)$  e a quantidade de compra de um agente  $i$  é calculado por:

$$q_b^{(i)}(t) = \frac{\theta m_i(t)}{p_b^{(i)}} \quad (4.8)$$

e o preço de venda da ação é dado  $p_s^{(i)} = p_{exp}^{(i)}$ , já a quantidade de venda é calculada por

$$q_s^{(i)}(t) = \theta q_i(t) \quad (4.9)$$

onde  $\theta$ , tal que  $0 \leq \theta \leq 1$ , é uma constante usada para limitar a quantidade de ativos negociados a cada instante de tempo pelos agentes. Na seção seguinte, será descrito como os agentes negociam seus ativos após estabelecidos os preços esperados de compra e venda e como é formado o preço do ativo no mercado.

### 4.1.2 Dinâmica de formação do preço do ativo

Definidos o preço de compra e a quantidade de compra das ações, o agente  $i$  divulga sua oferta no livro de compra (*Buy Book*). Já o agente vendedor  $j$  divulga sua oferta, preço e quantidade, no livro de venda (*Sell Book*). Cada agente pode divulgar uma única oferta de compra ou venda a cada instante  $t$  no livro de oferta correspondente. Para cada oferta no livro de vendas procura-se, aleatoriamente, uma oferta no livro de compras e, quando o preço de compra for superior ou igual ao preço de venda, é realizado um negócio. Cada oferta é válida e negociada apenas uma vez a cada instante  $t$ . Quando o negócio ocorre, é feita uma transação  $\langle ij \rangle$ , onde o agente  $i$  compra a ação e o agente  $j$  vende. Esta transação é então listada no livro de transações realizadas (*Close Book*) com preço  $p_{ij}(t)$  e quantidade  $q_{ij}(t)$  calculado como segue:

$$p_{ij}(t) = \frac{p_b^{(i)}(t) + p_s^{(j)}(t)}{2} \quad (4.10)$$

$$q_{ij}(t) = \min(q_b^{(i)}(t), q_s^{(j)}(t)) \quad (4.11)$$

Após isso, o dinheiro dos agentes  $i$  e  $j$ ,  $m_i$  e  $m_j$ , e a respectiva quantidade de ações,  $q_i$  e  $q_j$ , são atualizadas de acordo com o preço e quantidade,  $p_{ij}(t)$  e  $q_{ij}(t)$ , registrados no *Close Book*. O preço da ação  $p(t)$  (equação 4.12) é dado pela média de preços do conjunto de transações realizadas  $\Omega$  listadas no *Close Book* normalizada pela quantidade  $q_{ij}(t)$  dos negócios realizados.

$$p(t) = \frac{\sum_{\langle ij \rangle \in \Omega} p_{ij}(t) q_{ij}(t)}{\sum_{\langle ij \rangle \in \Omega} q_{ij}(t)} \quad (4.12)$$

O retorno dos preços,  $r(t) = \frac{p(t-1)}{p(t-2)} - 1$ , é a taxa de variação dos preços e para o período  $t$  e, com o exposto, já podemos propor um algoritmo para simulação do modelo.

### 4.1.3 Algoritmo

O algoritmo 1 do modelo está basicamente dividido em três partes: fase das inicializações, definição das expectativas dos agentes e formação do preço de mercado. Na fase de inicializações atribuem-se os valores à série de dividendos  $d(t)$ , à taxa de retorno do ativo livre de risco  $\alpha$ , à taxa de fundamentalistas  $\rho$ , à quantidade de agentes  $N_{agentes}$  e ao tamanho temporal da simulação  $N_{passos}$ . Na definição das expectativas dos agentes, estes, a partir de suas estratégias, calculam os retornos esperados das ações  $e_r^{(i)}(t)$  que, posteriormente, resultarão nos preços das ordens de compra e de venda. Por fim, há a formação do preço do ativo  $p(t)$  de cada período  $t$  que advém dos negócios realizados entre as ofertas de compra e venda.

**Algorithm 1** *Algoritmo do Mercado Financeiro Artificial*

**Require:**  $\alpha$  (retorno do ativo livre de risco),  $\mu$  (dividendo médio),  $\rho$  (taxa de fundamentalistas),  $N_{agentes}$ ,  $N_{passos}$ ,  $N_{min} \geq 3$

$$d(t) \leftarrow \mu + \beta_1 d(t-1) + \beta_2 N(0, 1), \forall t$$

Agentes são fundamentalistas com probabilidade  $\rho$  e técnicos com probabilidade  $1 - \rho$

Atualiza  $m_i, q_i, W_i, W_{exp}^{(i)}$  e  $p$  para  $t = 1..2$

**for**  $t = N_{min}$  **to**  $N_{passos}$  **do**

**for**  $i = 1$  **to**  $N_{agentes}$  **do**

$$\phi_i(t) \leftarrow \frac{W_i(t-1)}{W_{exp}^{(i)}(t-1)} - 1$$

$$e_r^{(i)}(t) \leftarrow \frac{d(t-1)}{p(t-1)} + \phi_i(t) \text{ (Fundamentalista)}$$

$$e_r^{(i)}(t) \leftarrow \frac{p(t-1)}{p(t-2)} - 1 + \phi_i(t) \text{ (Técnico)}$$

$$W_{exp}^{(i)}(t) \leftarrow m_i(t-1)(1+\alpha) + q_i(t-1)[p(t-1)(1+e_r^{(i)}(t)) + d(t-1)]$$

**if**  $e_r^{(i)}(t) \geq \alpha$  **then**

    Gera oferta [agente, preço de compra, quantidade] no livro de compra

**else**

    Gera oferta [agente, preço de venda, quantidade] no livro de venda

**end if**

  Atualiza  $m_i(t), q_i(t)$

**end for**

*Transações:* Cada oferta  $i$  no livro de compra tenta negociar com uma oferta  $j$  no livro de venda. A transação ocorre quando o preço de compra é maior que o preço de venda. Neste caso, o preço negociado  $p_{ij}$  é a média entre os preços de compra e venda. A quantidade negociada  $q_{ij}$  é o menor valor entre as quantidades de compra e venda.

$$p(t) \leftarrow \frac{\sum_{\langle ij \rangle \in \Omega} p_{ij}(t) q_{ij}(t)}{\sum_{\langle ij \rangle \in \Omega} q_{ij}(t)}$$

$$W_i(t) \leftarrow m_i(t) + q_i(t)(p(t) + d(t)), \forall i \text{ \{Atualiza riqueza dos agentes\}}$$

**end for**



## 4.2 Incorporando aspectos evolutivos

Uma alternativa que fora introduzida no modelo é a possibilidade da troca de estratégias dos agentes. Essa característica atribui ao agentes a capacidade de mudar para adaptar-se ao mercado. Assim, testamos algumas formas de evolução dos agentes, ou seja, procedimentos para alterar a estratégia do agente quando esta não produz os retornos desejados.

$$\sum_{k=tmin}^t \phi_i(k) < \psi_i(t) \quad (4.13)$$

A evolução proposta (equação 4.13) considera que os agentes acumulam o fator de aprendizado entre a riqueza esperada e a riqueza obtida representados pelo  $\phi_i$  até que um limiar mínimo  $\psi_i$  seja ultrapassado e, quando isto ocorre, o agente altera sua estratégia de fundamentalista para técnico ou vice-versa. Após isto, recomeça o processo acumulando os  $\phi_i(t)$  até atingir novamente o limiar. Este processo é contínuo e realizado por todos agentes.

Nesse capítulo formalizamos o modelo de mercado proposto, a partir do algoritmo 1, para ser implementado como poderá ser visto no próximo capítulo. Foram realizadas diversas simulações para análise dos agentes e do mercado e extração de informações estatísticas das séries geradas.

## 5 RESULTADOS E PROPRIEDADES DO MODELO

O objetivo desse capítulo é examinar os resultados das simulações realizadas a partir da implementação do algoritmo 1 do modelo de mercado artificial proposto. Na próxima seção, verifica-se quais fatores alteram o comportamento das séries de preços, quais variáveis influenciam na distribuição de riqueza dos agentes e quão eficiente são as estratégias adotadas pelos agentes. Já na segunda seção segue uma análise estatística das séries temporais de preço e retornos para extrair fatos estilizados que possam validar nosso modelo artificial.

### 5.1 Analisando o comportamento dos preços e a riqueza dos agentes

Foram realizadas simulações do modelo de mercado artificial com parâmetros específicos que reproduzissem séries de preços com variações similares as encontradas em mercados reais. Para gerar a série de dividendos usou-se os parâmetros  $\mu = 0.5$ ,  $\beta_1 = 0.1$  e  $\beta_2 = 0.001$  na equação 4.1. Além disso, nas simulações atribuiu-se para taxa da aplicação livre de risco  $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ , uma quantidade de agentes dada por  $N_{agentes} = 100$ , preços iniciais  $p(1) = 20$  e  $p(2) = 21$  e taxa de ativos negociados pelo agente no período  $\theta = 0.1$ . Nos resultados apresentados neste capítulo, quando não for especificado diferente, assume-se que são oriundos de simulações executadas com esses parâmetros iniciais. Uma amostra da série de preços e da série de retornos geradas pelo nosso algoritmo para uma semente, podem ser vistas na figura 5.1.

Para analisar coletivamente as séries produzidas realizamos simulações para um maior número de sementes. Na figura 5.2 observa-se o resultado de 50 séries temporais de preços geradas pelas simulações do nosso mercado artificial. Há séries que sofrem variações e em algum instante de tempo, prosseguem como retas até o fim da simulação. Quando isso ocorre, dizemos que houve uma estagnação dos preços gerados pelo mercado financeiro artificial. Este fenômeno acontece, muitas vezes, quando um número expressivo de fundamentalistas compram ações até esgotar o dinheiro disponível. Desta forma atinge-se uma situação em que não há vantagem em vender as ações, pois o retorno relativo aos dividendos supera aquele correspondente ao ativo livre de risco dado o preço em que ação atingiu. Desta forma não realiza-se mais negócios, o que leva a estagnação dos preços.

O efeito é não determinístico e sua ocorrência depende do preço negociado, valor dos dividendos, taxa de ativo livre de risco e quantidade de fundamentalistas do mercado. Para demonstrar esse último fator de dependência, alterou-se a quantidade de fundamentalistas no mercado para medir a influência sobre a probabilidade de estagnação dos preços. Na tabela 5.1 vemos que quanto maior a taxa de fundamentalistas  $\rho$  maior é a probabilidade de estagnação do mercado. Para estimarmos empiricamente essa probabilidade de estagnação nas simulações, calculamos, usando a quantidade de execuções  $N_{run} = 100$ ,

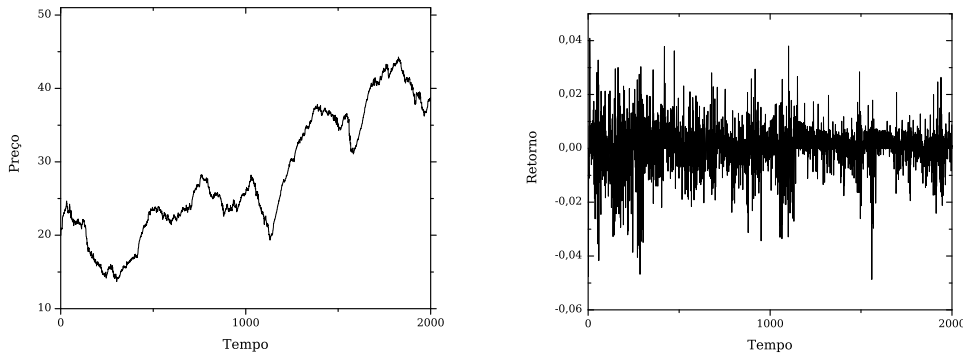


Figura 5.1: Séries temporais de preço e retorno. O gráfico à esquerda mostra uma série de preços gerada pelo modelo de mercado artificial com taxa da aplicação livre de risco  $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$  e quantidade de agentes  $N_{agentes} = 100$  distribuídos igualmente entre fundamentalistas e técnicos. O gráfico da direita mostra a respectiva série de retornos desta série de preços.

Tabela 5.1: Probabilidade de estagnação dos preços para diferentes taxas de fundamentalistas na população.

$\rho$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Pr(estagnação)	0.07	0.07	0.07	0.15	0.19	0.23	0.27	0.21	0.24	0.17

a frequência relativa

$$\text{Pr(estagnação)} = \frac{1}{N_{run}} (\text{número de simulações com } t_{estag} < t_{max}),$$

para um tempo máximo de simulação  $t_{max} = 5000$  onde o instante de tempo em que iniciou-se a estagnação foi denominado de  $t_{estag}$ .

O mercado proposto difere dos mercados reais por ser do tipo fechado, isto é, o número de agentes e de ativos disponíveis no mercado não se alteram, apenas há transferências de recursos entre os participantes. Por essa razão, não havendo injeção de capital externo, há a possibilidade dos preços estagnarem quando os agentes não possuem dinheiro para comprarem ações ou, do contrário, ações para venderem. O tempo de início da estagnação varia de acordo com a probabilidade dos agente no mercado serem fundamentalistas ou técnicos. Na figura 5.3 observamos que a taxa de fundamentalistas no mercado é inversamente proporcional ao tempo inicial de estagnação do mercado. O gráfico também mostra algo interessante, o fator  $\phi_i(t)$  faz com que a média do início da estagnação das séries de preços aumente significativamente.

Para especificarmos o quão desigual era distribuição de riqueza entre os agentes, utilizou-se o conhecido coeficiente de Gini. O coeficiente de Gini  $G$  é uma estatística de dispersão que varia entre 0 (perfeita igualdade) e 1 (perfeita desigualdade) e pode ser aproximado a partir da equação

$$G = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k)$$

sendo  $X$  a série acumulada da população e  $Y$  a série acumulada das riquezas ordenadas

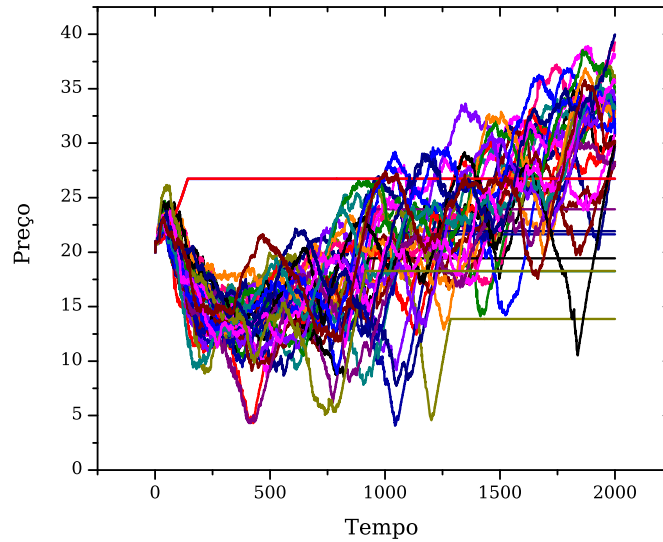


Figura 5.2: Séries de preços geradas por 50 simulações.

crescentemente.

Os primeiros experimentos verificaram que o coeficiente de Gini não sofre grandes variações quando altera-se o tempo da simulação ou a quantidade de agentes como pode ser visto na figura 5.4. Assim fixamos esses dois parâmetros, diminuindo o grau de liberdade do modelo, para analisar com mais exatidão a influência de outras variáveis na distribuição de riqueza. Por outro lado, o parâmetro dos dividendos  $\mu$  e a taxa do ativo livre de risco  $\alpha$  são relevantes para determinar se o mercado será um mercado com maior ou menor desigualdade de riqueza. Na figura 5.5 as áreas com bolhas maiores são regiões com maior desigualdade de riqueza, já as áreas com bolhas menores são menos desiguais em razão da dinâmica do mercado ou por estagnação precoce provocada pelos parâmetros de entrada do modelo. Analisando a figura 5.6, que fixou-se  $\mu$  e  $\alpha$  nos valores usados nas simulações, podemos concluir que a mudança dos dividendos pagos por uma ação de empresa ou a interferência numa taxa livre de risco altera significativamente a distribuição de riqueza entre os agentes do mercado.

Outra análise interessante é quantificar qual a estratégia dos agentes é mais eficiente no mercado. Para isso, comparamos a estratégia dos fundamentalistas e dos técnicos com uma estratégia simples denominada de *buy&hold*, que consiste em comprar um ativo e mantê-lo por um determinado tempo. Mensuramos essa probabilidade da riqueza do agente ser superior a da estratégia *buy&hold* por:

$$\Pr \left( W_t^{(s)} > W_t^{(buy\&hold)} \right) = \frac{1}{N_{run}} (\text{número de vezes que } W_t^{(s)} > W_t^{(buy\&hold)}),$$

isto é, o número de vezes em que a riqueza do agente com estratégia  $s$  ( $W_t^{(s)}$ ) é maior que a riqueza de um agente hipotético que compra ativos em  $t_0 = 0$  e vende no instante  $t$  em total de  $N_{run}$  repetições.

Para analisarmos as estratégias em cenários, alteramos a componente  $\mu$  do cálculo do dividendo. Como pode ser visto na figura 5.7, para valores de dividendos altos, a prob-

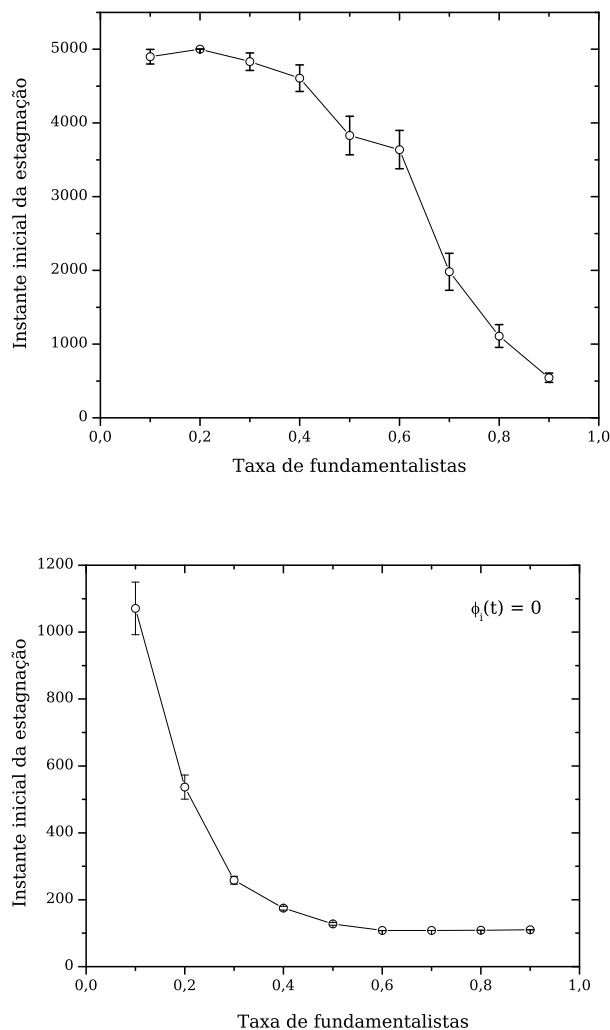


Figura 5.3: Tempo de início da estagnação dos preços varia com a taxa de fundamentalistas no mercado. O gráfico acima mostra o caso em que os agentes utilizam o parâmetro  $\phi_i(t)$ . Já o gráfico abaixo mostra o tempo de estagnação quando os agentes não utilizam o parâmetro, ou seja,  $\phi_i(t) = 0$ .

abilidade de fundamentalistas possuírem uma riqueza superior a estratégia *buy&hold* é maior que a dos agentes técnicos. O inverso também ocorre, para valores pequenos de dividendos ( $d(t) < 5 \cdot 10^{-4}$ ) os técnicos superam os fundamentalistas. Assim, para uma estratégia ser melhor que a outra depende da configuração imposta ao mercado. Outra conclusão que se pode extrair é que as estratégias dos agentes representados sempre superam a estratégia *buy&hold* no longo prazo para dividendos pequenos.

Introduzida a capacidade dos agentes trocarem de estratégia ao longo da simulação (evolução) observou-se se havia diferenças significativas nos ganhos se comparados com o mercado sem mudança de estratégia. Como pode ser visto na figura 5.8 os agentes com evolução de estratégias baseados no limiar  $\psi$  (equação 4.13) tem uma probabilidade maior de permanecerem acima da estratégia *buy&hold* do que os agentes de um mercado sem troca de estratégias. Além disso, quanto menor o valor do limiar  $\psi$  piores são os ganhos acima da estratégia *buy&hold* no início da simulação. As análises realizadas são

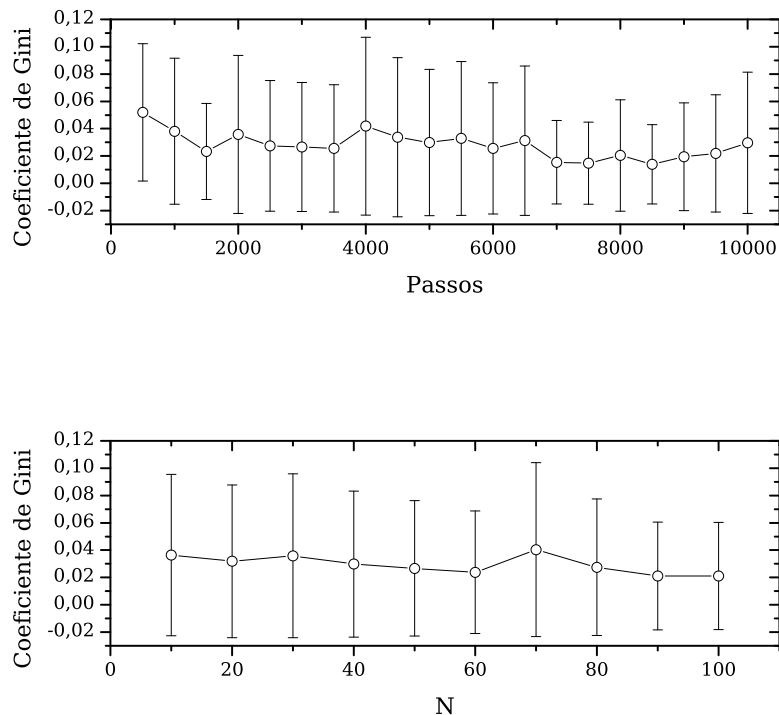


Figura 5.4: Quantidade de agentes do modelo e número de passos de simulação não influenciam a distribuição de riqueza dos agentes.

específicas do modelo e seus agentes, já na próxima seção preocupou-se em observar se há propriedades nas séries geradas artificialmente que são similares as encontradas em mercados reais.

## 5.2 Verificando os fatos estilizados no modelo artificial

As variações das séries temporais de preços de ativos no mercado financeiro possuem propriedades estatísticas que podem sempre ser observadas e são denominadas de fatos estilizados. O desenvolvimento de um modelo de mercado teórico correto procura reproduzir estas características intrínsecas encontradas em séries financeiras reais. Neste capítulo, listamos os fatos estilizados produzidos pelos experimentos realizados no modelo proposto.

Conhecer o formato das distribuições das séries de retornos contribui na análise de investimentos de um ativo financeiro, pois permite ao investidor calcular com exatidão suas probabilidades de ganho ou perda no mercado. No início da história das finanças, acreditava-se que a distribuição destas séries eram sempre gaussianas independentemente da janela de tempo usado na observação. Até que Mandelbrot (MANDELBROT, 1963) observa e relata o excesso de curtose nas distribuições de séries de retornos, ao contrário das distribuições gaussianas, para janelas de observações de tempo curtas, chamadas também de altas frequências. Assim, as distribuições das séries das variações de preços não eram, ao menos em qualquer tamanho de janela de tempo, do formato que se supunha. Na prática, quando a variação dos preços eram em minutos ou horas havia excesso de curtose.

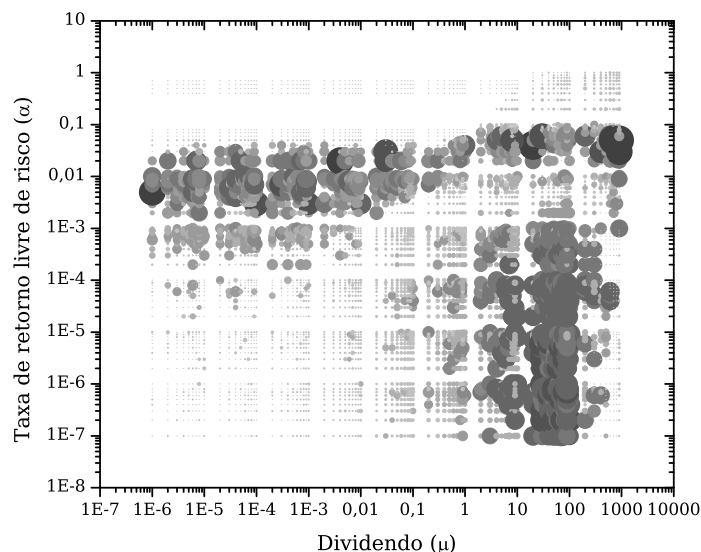


Figura 5.5: O coeficiente de Gini é afetado pelo parâmetro dos dividendos  $\mu$  e pela taxa de retorno do ativo livre de risco  $\alpha$ . As bolhas maiores representam regiões com desigualdades maiores nas distribuições de riqueza.

Em simulações do modelo, como em mercados reais, observou-se excesso de curtose em janelas de observação de tempo  $\Delta$  curtas como pode ser visto na figura 5.9.

O decaimento da curtose para janelas de tempo maiores que se vê na figura 5.9 são indícios que corroboram para outro fato estilizados denominado de gaussianidade agregacional. Este fato afirma que quanto maior a janela de observação de uma série financeira mais o formato da distribuição desta série assemelha-se com o das distribuições gaussianas (PLEROU et al., 1999). Para comprovar essa propriedade, comparou-se graficamente os momentos das distribuições de retornos aumentando a janela temporal de observação ( $\Delta$ ) com os de uma distribuição gaussiana (veja figura 5.10). E, realmente, quanto maior o  $\Delta$  mais os momentos das séries aproximam-se com os momentos da distribuição gaussiana.

Na análise de investimento, um investidor também deseja saber se ele consegue extrair informações relevantes dos históricos de retorno de preços de um ativo financeiro que contribuam na acumulação de lucros. Isto é, ele almeja descobrir se ao examinar os retornos passados conseguirá prever os retornos futuros com segurança. Neste contexto, a autocorrelação é usada com frequência, pois mede estatisticamente o quanto os valores futuros dependem dos valores passados. Fama (FAMA, 1965) (FAMA, 1970), ao investigar as séries de retornos simples de preços de ativos, percebe que há ausência de autocorrelação, ou seja, valores muito baixos de autocorrelação que impossibilitariam a partir desse viés alguma previsibilidade. A série de retornos simples do modelo proposto também reproduziu a ausência de correlação, com magnitude próxima a 0.2, como pode ser visto na figura 5.11.

Apesar de não haver autocorrelação dos retornos simples, alguns autores (MANTEGNA; STANLEY, 1995) (LIU et al., 1997) (CONT; POTTERS; BOUCHAUD, 1997) (PLEROU et al., 1999) notaram um outro fato estilizado, a autocorrelação dos retornos absolutos e quadráticos, que indicam a dependência não-linear dos retornos. Foi obser-

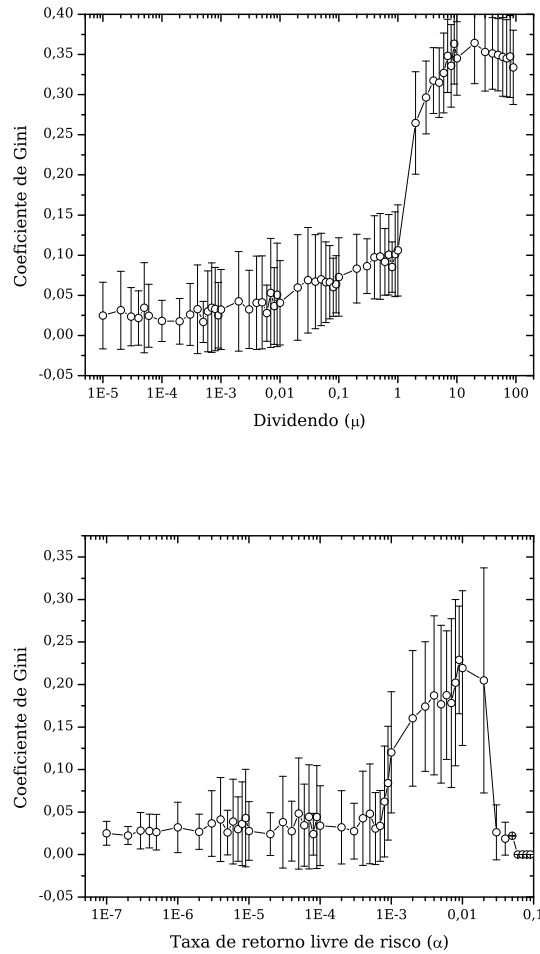


Figura 5.6: Influência do dividendo e da taxa de retorno do ativo livre de risco no coeficiente de Gini. No primeiro gráfico fixou-se a taxa de retorno do ativo livre de risco  $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$  e, no gráfico abaixo, os dividendos  $\mu = 0.5$  para analisar o efeito das mudanças no coeficiente Gini.

vada a existência dessas autocorrelações nas séries no nosso mercado artificial que pode ser visualizada na figura 5.12. Nestes gráficos, observa-se que a autocorrelação ocorre com decaimento em lei de potência com relação ao deslocamento no tempo, ou seja, é um processo com dependência longa dos valores passados. Isto indica que grandes variações de retornos são seguidas, mais frequentemente, por outras grandes variações. Este é um outro fato estilizado, chamado de volatilidade clusterizada, que pode ser quantificado estimando o expoente da lei de potência que ajusta o decaimento. O modelo encontrou um expoente  $\gamma = 0.2019$  para retornos absolutos e  $\gamma = 0.3272$  para retornos quadráticos, dentro do esperado dos limites esperados em mercados reais entre 0.2 e 0.4 (figura 5.12).



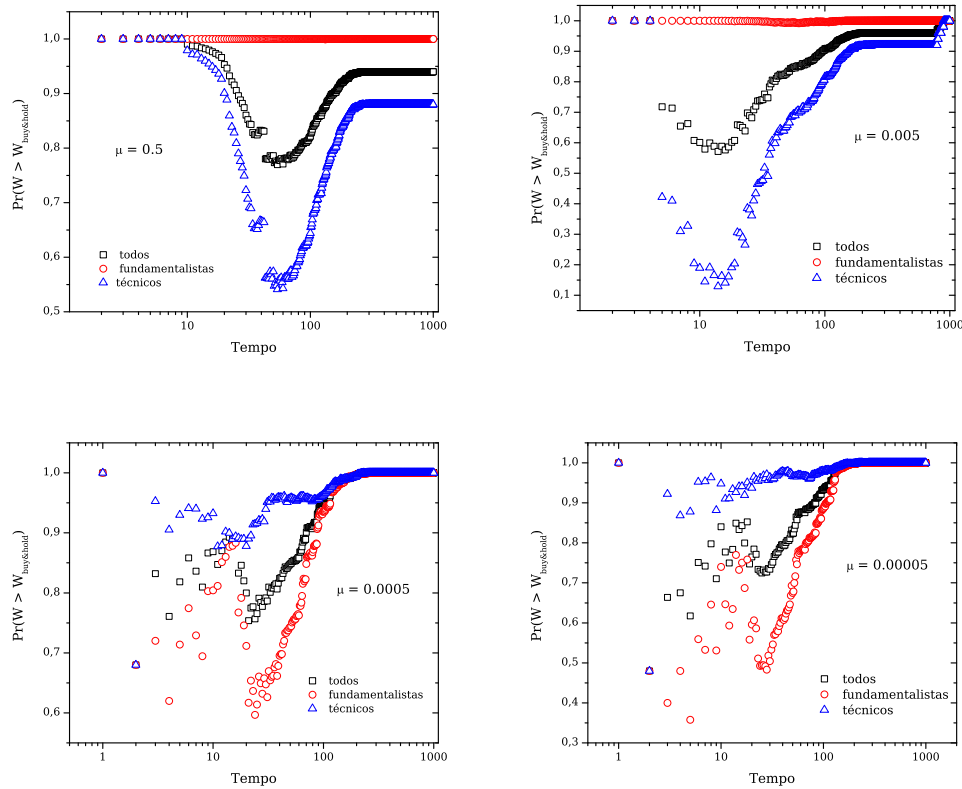


Figura 5.7: A probabilidade do agente superar a estratégia do *buy&hold* depende do parâmetro do dividendo  $\mu$ .

Mostramos neste capítulo então como as séries de preços são influenciadas pela taxa de fundamentalistas e pelo fator  $\phi_i$  de previsão. Também pudemos mostrar a diferença do mercado financeiro artificial estudado fazendo simulações onde esse fator  $\phi_i$  foi feito nulo. Estudamos os efeitos na distribuição de riqueza do nosso mercado artificial da taxa livre de risco e dos dividendos. Mostramos que aspectos evolutivos baseados em uma versão Pavloviana de mudança de estratégia foi melhor do que a manutenção de uma estratégia pura fundamentalista ou pura técnica. Mas o mais importante: nosso mercado financeiro reproduz a maioria dos fatos estilizados da economia. E, por fim, nas figuras 5.13 e 5.14 há um comparativo das características relevantes de modelos importantes da literatura comparados com o nosso proposto.

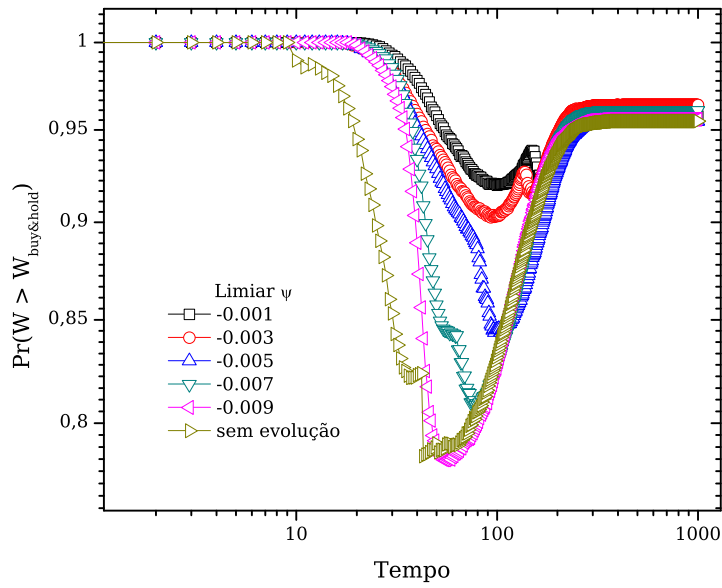


Figura 5.8: Probabilidade de riqueza em um mercado com estratégias evolutivas. Em um mercado onde os agentes podem mudar de estratégias, a probabilidade do agente superar a estratégia do *buy&hold* depende também do limiar da evolução  $\psi$ .

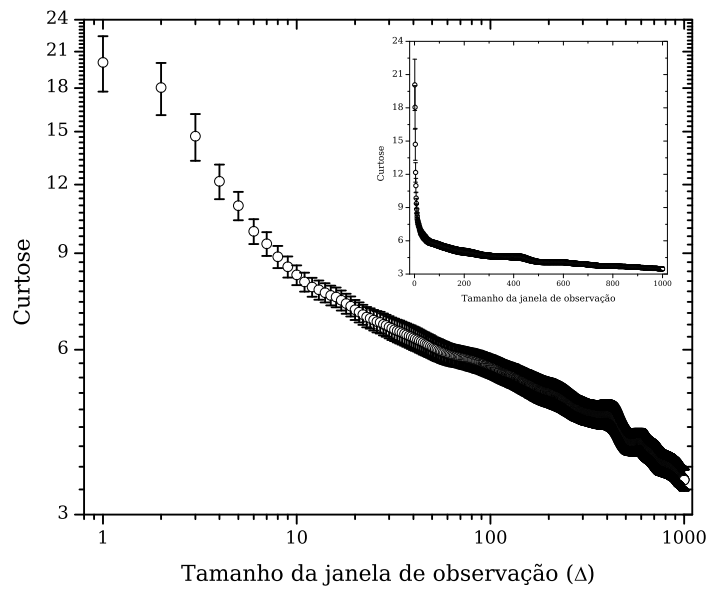


Figura 5.9: Excesso de curtose observado em janelas de observações de tempo  $\Delta$  curtas (altas frequências).

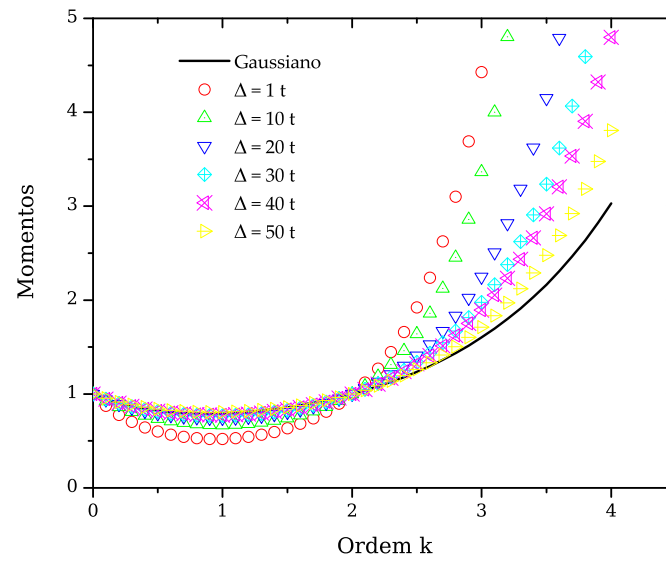


Figura 5.10: Momentos das distribuições das séries de retornos do modelo alterando a janela de observação de tempo  $\Delta$  em função da ordem  $k$ . A curva contínua representa os cálculos de momentos de uma distribuição gaussiana.

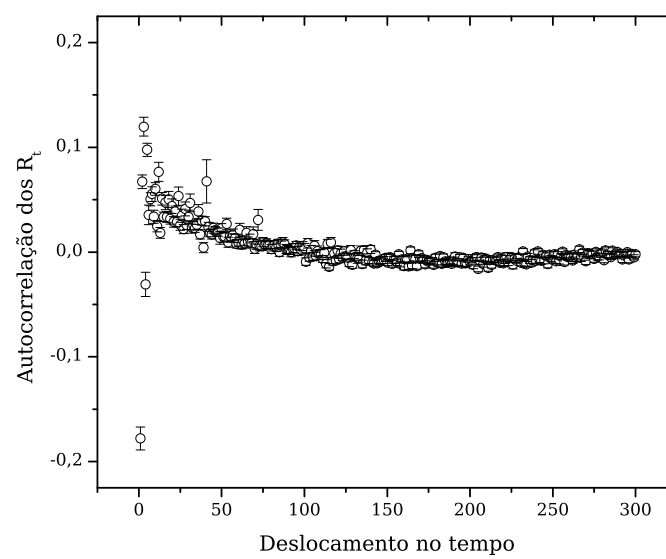


Figura 5.11: Autocorrelação dos retornos simples.

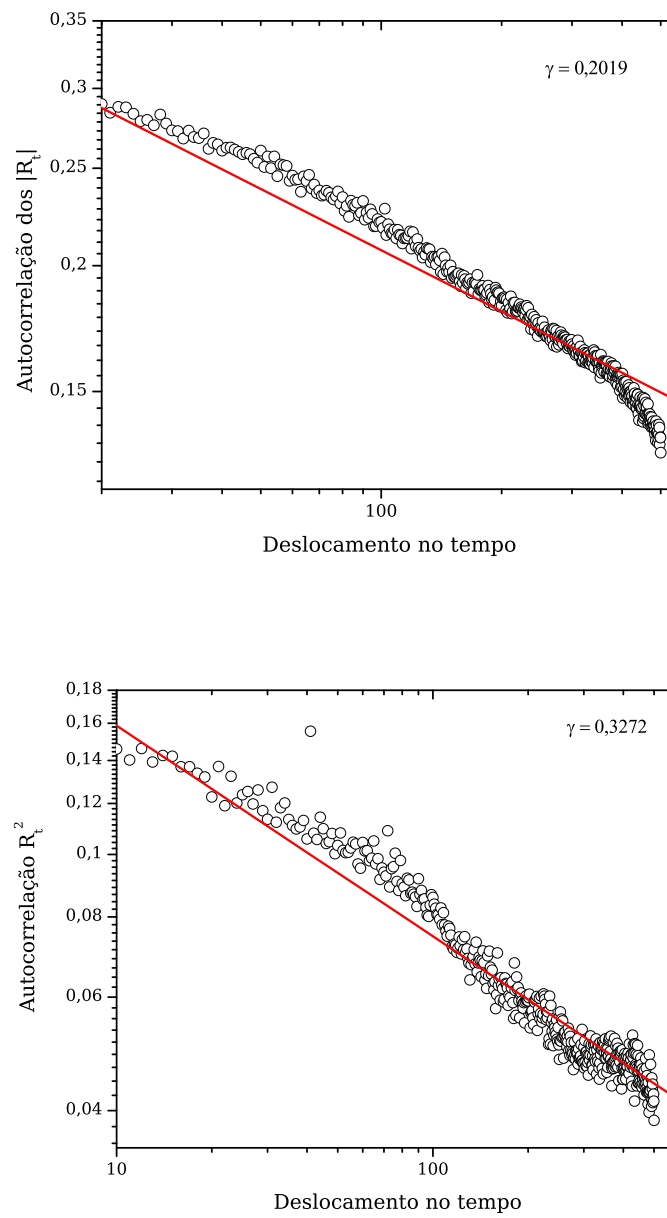


Figura 5.12: Autocorrelação dos retornos absolutos e quadráticos.

Modelo	Ativos	Estratégias dos agentes	Dinâmica da negociação entre os agentes	Dinâmica da formação do preço	Fatos estilizados e outras propriedades	Contribuições
(CHIARELLA, 1992)	Ação e ativo livre de risco.	Não há o conceito de agentes individuais.	Não há.	Equação dinâmica que considera a demanda e a oferta entre as ações e o ativo livre de risco.	Os preços não seguem uma caminhada aleatória.	As funções de demanda representam características dos investidores fundamentalistas e dos técnicos.
(LEVY; LEVY; SOLOMON, 1994)	Ação que paga dividendos e título financeiro livre de risco com taxa de pagamento constante.	Cada agente possui uma função utilidade que considera a riqueza e a aversão ao risco.	A quantidade de ativos de cada agente é arbitrada pelo mercado após considerar a demanda e oferta global.	O preço é resultado da junção das curvas de preços teóricos dos agentes que é parametrizada pelas funções de utilidade.	Os preços tinham reações abruptas.	Agente com função utilidade que considera riqueza e aversão ao risco.
(PALMER et al., 1994)	Ações que pagam dividendos e dinheiro com taxa de pagamento constante.	Cada agente escolhe uma quantidade de ações maximize seu lucro utilizando algoritmo genético com características técnicas e fundamentalistas.	Cada agente define ordem de venda e compra das ações a partir de um algoritmo genético.	O preço é um processo dinâmico que tem como parâmetros o preço do período anterior e as ordens de compra e venda.	Preços com períodos de calma e outros de intensa atividade. Os agentes adaptavam-se às mudanças das séries de dividendos.	Uso de algoritmos genéticos nos agentes e ordens de compra e venda.
(LUX; MARCHESI, 1999)	Ação e dinheiro.	Agentes fundamentalistas que se baseiam no preço fundamental da ação obtida a partir dos dividendos. Os <i>noise traders</i> seguem a tendência do preço e são divididos em pessimistas e otimistas. Os agentes podem trocar de tipo durante a simulação com uma determinada probabilidade.	Não está detalhado no artigo.	O preço é determinado pelo excesso de demanda ou oferta que é resultado da diferença entre o preço de mercado e o preço fundamental. O preço de mercado é influenciado pelo número de otimistas e pessimistas. O preço fundamental tem distribuição Gaussiana.	As distribuições das séries de retornos não eram Normais. Exibiram alta frequência de eventos extremos e volatilidade clusterizada. Flutuações do preço seguem lei de potência.	Mudança de tipo de estratégia dos agentes. Observação de fatos estilizados.

Figura 5.13: Comparativo de modelos de mercado financeiros artificiais (parte 1)

(RABERTO et al., 2001).	Ação e dinheiro.	Existem agentes fundamentalistas, técnicos e randômicos.	O agente envia uma ordem de compra da ação com probabilidade P ou uma ordem com a probabilidade 1-P.	O preço é a intersecção entre a função demanda composta pelas ordens de compra e a função oferta composta pelas ordens de venda.	Geraram distribuições de retornos com caudas pesadas e volatilidade clusterizada.	Ordens com probabilidade de negociação.
(CHIARELLA; DIECI; JONES, 2006)	Um ativo com risco que paga dividendos e um ativo sem risco com taxa de pagamento constante.	Agentes fundamentalistas que calculam o preço a partir dos dividendos e os agentes técnicos que calculam a tendência. Cada agente possui uma função utilidade que considera riqueza e aversão risco.	O agente define a fração de riqueza que será investida no ativo com risco que maximize a função utilidade.	Um agente formador de mercado que definirá o preço do ativo a partir das frações de riqueza que todos os agentes estão dispostos a investir nos ativos.	Encontraram atratores cíclicos que poderiam explicar momentos de alta e baixa excessiva.	Utilizaram teoria do caos em modelos artificiais financeiros para explicar fenômenos nas séries financeiras.
PROPOSTO	Ações com dividendos não constantes e dinheiro com uma taxa de pagamento constante.	Agentes fundamentalistas que calculam o preço a partir dos dividendos e técnicos que analisam a tendência do histórico de preços. Há um fator de aprendizado que considera a habilidade dos agentes em prognosticar os retornos esperados.	O agente define um preço que gerará uma ordem de compra ou de venda comparando os retornos esperados da ação e do dinheiro. As ordens são enviadas para livros de compra ou venda para posterior negociação.	O preço é formado pela média dos preços das ordens negociadas no mercado ponderada pela quantidade negociada.	Obtivemos ausência das gaussianidade agregacional dos retornos, autocorrelações dos retornos simples, autocorrelação dos retornos quadráticos, excesso de curtos para altas frequências e volatilidade clusterizada.	Utilizamos um fator simples de aprendizado que pode ou não conter evolução. Apresentar um conjunto maior de fatos estilizados.

Figura 5.14: Comparativo de modelos de mercado financeiros artificiais (parte 2)

## 6 PRINCIPAIS CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS

Nesta dissertação propusemos um modelo de mercado financeiro artificial baseado em agentes com estratégias distintas que negociam ativos definindo preços futuros e enviando ordens de compra e venda. A partir de simulações do modelo, as transações/interações realizadas a cada período de tempo formam série de preços de onde se extrai a série de retornos. Nas séries de retornos geradas procurou-se observar propriedades empíricas universais similares às encontradas em séries reais para validar o modelo. Também realizamos análises referentes às distribuições de riquezas do agente, evolução e eficiência de estratégias. A seguir listamos as principais contribuições do trabalho:

- **Fator  $\phi$**  - Na modelagem a contribuição mais importante foi inclusão do fator  $\phi$  de aprendizado que considera a habilidades históricas do agente em prognosticar as suas riquezas esperadas na previsão de retornos futuros. Esta variável possibilitou uma drástica diminuição no fenômeno de estagnação dos preços, pois aumentava o número de interações existentes entre os agentes. Além disso, mais fatos estilizados foram observados com a introdução desse fator no modelo.
- **Coefficiente de Gini em mercados financeiros artificiais** - Na literatura não há trabalho que analisa como as variáveis do ambiente alteram a distribuição de riqueza dos agentes de um mercado financeiro artificial através do coeficiente de Gini. Geralmente esse coeficiente é usado para mensurar a distribuição de riqueza de uma sociedade seja ela artificialmente modelada ou de dados sócio-econômicos reais.
- **Validação do modelo com diversos fatos estilizados** - Muitos modelos não realizam a validação do modelo e outros observam apenas poucos fatos estilizados. Em nossos resultados exibimos cinco fatos estilizados: ausência de autocorrelação, leis de potência para autocorrelação dos retornos absolutos e quadráticos, excesso de curtose, gaussianidade agregacional e volatilidade clusterizada.

Apesar dos avanços conquistados o nosso modelo é ainda teórico e possui limitações se comparado com mercados reais como: ignorar a existência de outras estratégias pelos agentes; a utilização de apenas um ativo financeiro com risco sem a possibilidade de o agente compor um *portfolio*; e o mercado ser fechado para inclusão de mais ativos e dinheiro, o que pode contribuir para estagnações permanentes de preços que é um fato não observado em mercados financeiros reais. Como trabalho futuro podem ser implementadas melhorias visando aprimorar e sanar essas limitações. Contudo esse modelo teórico já possibilita conclusões interessantes sobre a influência, por exemplo, dos dividendos e da taxa de juros livre de risco nas distribuições de riqueza dos agentes. Ou

mostrar, mesmo através de um modelo teórico simples e validado, que parte do processo de decisão das pessoas faz com que as séries financeiras detenham esse formato.



## REFERÊNCIAS

- BOUCHAUD, J.-P. Power-laws in economy and finance: some ideas from physics. **Quantitative Finance**, [S.l.], v.1, p.105–112, 2001.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis**: forecasting and control. San Francisco, USA: Holden-Day, 1970.
- CHIARELLA, C. The dynamics of speculative behaviour. **Annals of Operations Research**, Red Bank, NJ, USA, v.37, n.1-4, p.101–123, 1992.
- CHIARELLA, C.; DIECI, R.; JONES, B. Asset price and wealth dynamics in a financial market with heterogeneous agents. **Journal of Economics Dynamics and Control**, [S.l.], v.30, p.1755–1786, 2006.
- CONT, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. **Quantitative Finance**, [S.l.], v.1, p.223–236, 2001.
- CONT, R. Volatility Clustering in Financial Markets: empirical facts and agent-based models. **Long memory in economics**, [S.l.], 2005.
- CONT, R.; POTTERS, M.; BOUCHAUD, J.-P. **Scaling in stock market data**: stable laws and beyond. [S.l.]: Science & Finance, Capital Fund Management, 1997. Science & Finance (CFM) working paper archive. (9705087).
- EPSTEIN, J. M.; AXTELL, R. L. **Growing Artificial Societies**: social science from the bottom up. [S.l.]: The MIT Press, 1996.
- FAMA, E. F. Random Walks in Stock Market Prices. **Financial Analysts Journal**, [S.l.], v.21, p.55–60, 1965.
- FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: a review of theory and empirical work. **Journal of Finance**, [S.l.], v.25, n.2, p.383–417, May 1970. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/a/bla/jfinan/v25y1970i2p383-417.html>>. Acesso em jul.2008.
- GABAIX, X.; GOPIKRISHNAN, P.; PLEROU, V.; STANLEY, H. E. A unified econophysics explanation for the power-law exponents of stock market activity. **Physica A**, [S.l.], v.382, p.81–88, 2003.
- GILBERT, G. N.; TROITZSCH, K. G. **Simulation for the Social Scientist**. Bristol, PA, USA: Taylor & Francis, 1999.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect Theory: an analysis of decision under risk. **Econometrica**, [S.l.], v.47, n.2, p.263–292, 1979.

KIM, G.; MARKOWITZ, H. Investment Rules, Margin, And Market Volatility. **Journal of Portfolio Management**, [S.l.], v.16, n.1, p.45–52, 1989.

LEVY, H.; LEVY, M.; SOLOMON, S. **Microscopic Simulation of Financial Markets: from investor behavior to market phenomena**. [S.l.]: Berkeley, CA: Academic Press, 2000.

LEVY, M.; LEVY, H.; SOLOMON, S. A microscopic model of the stock market : cycles, booms, and crashes. **Economic Letters**, [S.l.], v.94, n.103, 1994.

LEVY, M.; LEVY, H.; SOLOMON, S. Simulation of the Stock Market: the effects of microscopic diversity. **Journal de Physique I**, [S.l.], n.5, p.1087–1107, 1995.

LIU, Y.; CIZEAU, P.; MEYER, M.; PENG, C. K.; STANLEY, E. Correlations in economic time series. **Physica A**, [S.l.], v.245, p.437–440, 1997.

LUX, T.; MARCHESI, M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. **Nature**, [S.l.], v.397, p.498–500, 1999.

MANDELBROT, B. B. The Variation of Certain Speculative Prices. **Journal of Business**, [S.l.], v.36, n.4, p.394–419, 1963.

MANDELBROT, B. B.; HUDSON, R. L. **The (Mis)behaviour of Markets**. [S.l.]: Profile Books, 2005.

MANTEGNA, R. N.; STANLEY, E. H. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. **Nature**, [S.l.], v.376, n.6535, p.46–49, July 1995.

MANTEGNA, R. N.; STANLEY, E. H. **An Introduction to Econophysics: correlations and complexity in finance**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, [S.l.], v.7, n.1, p.77–91, 1952.

NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. [S.l.]: Princeton University Press, 1947.

NEWMAN, M. E. J. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. **Contemporary Physics**, [S.l.], v.46, p.323–351, 2005.

PALMER, R. G.; ARTHUR, W. B.; HOLLAND, J. H.; LEBARON, B.; TAYLER, P. Artificial economic life: a simple model of stock market. **Physica D**, [S.l.], p.264–75, 1994.

PITAC. **Computational Science: ensuring america's competitiveness**. [S.l.: s.n.], 2005.

PLEROU, V.; GOPIKRISHNAN, P.; NUNES; MEYER, M.; STANLEY, E. H. Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies. **Physical Review E**, [S.l.], v.60, n.5, p.5305+, November 1999.

RABERTO, M.; CINCOTTI, S.; FOCARDI, S. M.; MARCHESI, M. Agent-based simulation of a financial market. **Physica A**, [S.l.], v.299, p.319–327, 2001.

SAMANIDOU, E.; ZSCHISCHANG, E.; STAUFFER, D.; LUX, T. Agents-based models of financial markets. **Reports on Progress in Physics**, [S.l.], v.70, p.409–450, 2007.

SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. **Journal of Finance**, [S.l.], v.19, n.3, p.425–442, 1964.

TESFATSION, L. Agent-Based computational economics. In: JUDD, K.; TEFATSION, L. (Ed.). **Handbook of Computational Economics**: agent-based computational economics. [S.l.]: Elsevier/North-Holland, 2006. (Handbooks in Economics Series, v.2).

WOLFRAM, S. **A New Kind of Science**. [S.l.]: Wolfram Media, 2002.

WOOLDRIDGE, M. **Introduction to MultiAgent Systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002.