

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Análise das soluções do sistema de EDO's para o
fenômeno da Circulação Termohalina

Dissertação de Mestrado

Débora da Silva Soares

Porto Alegre, 11 de abril de 2008

Dissertação submetida por Débora da Silva Soares * , como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera (Orientador - PPG-MAT/UFRGS)

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPG-MAT/UFRGS)

Prof. Dr. Rafael Rigão Souza (PPG-MAT/UFRGS)

Prof. Dr. Leonardo Fernandes Guidi (PPG-Map/UFRGS)

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus queridos pais, que sempre me apoiaram durante todo este caminho de aprendizado e desenvolvimento, e ao meu amado esposo, que sempre esteve ao meu lado me auxiliando com palavras de incentivo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e aos mestres de luz por toda proteção que recebi durante estes anos de trabalho e por iluminarem meu caminho, guiando meus passos no desenvolvimento do conhecimento e também do amor.

Agradeço aos meus pais Eloadir e Zilá, e à minha irmã Paula, pelo apoio incondicional que recebi desde o início desta vida, pelas palavras de incentivo nos momentos de dúvida, pelo carinho, pela compreensão nos momentos de dificuldade e por compartilharem minhas alegrias nos momentos felizes!

Agradeço ao meu esposo querido Nicholas por todos os dias de companheirismo, de incentivo e de dedicação. Obrigada pelas dicas de informática, principalmente aquelas relacionadas ao latex e aos softwares gráficos, e por resolver os bugs que me deixaram algumas vezes preocupada. Obrigada pela compreensão, pelo apoio e pelo carinho que me fortaleceram durante todo este período de trabalho.

Agradeço aos mestres desta universidade que me ensinaram muito sobre matemática, sobre o ensino de matemática e também sobre a vida. Em particular, quero agradecer à professora Cydara Cavedon Ripoll pela oportunidade de estudo que me foi concedida ainda na licenciatura e que me introduziu com mais profundidade à beleza existente nos conteúdos da matemática. Agradeço em especial ao professor Alexandre Tavares Baraviera, meu orientador e guia neste mundo das Equações Diferenciais, pela sensibilidade e pelo companheirismo em aceitar esta minha proposta de estudar problemas relacionados ao meio ambiente! Obrigada por toda a dedicação e incentivo! E, por último, quero agradecer à professora Maria Alice Gravina, pelo auxílio na criação de uma proposta para o doutorado em continuidade a este trabalho!

Agradeço aos professores da banca pela leitura e revisão cuidadosas do texto e também pelas correções da dissertação. Em especial, agradeço ao professor Leonardo Guidi pela dica sobre o Teorema Critério Negativo de Bendixson que

permitiu que comprovássemos os resultados pretendidos em toda a sua completude.

Agradeço à Rosane, secretária do programa de Pós-Graduação, pelo ótimo trabalho e pela orientação com relação aos assuntos burocráticos.

Agradeço aos colegas e amigos Adriana, Vitalino, João, Thaísa, Patrícia, Fagner, Samuel, Diego, Raquel, Lucinéia, Daiane e Luciane por fazerem destes anos de mestrado mais especiais e alegres; obrigada pelo auxílio nos estudos, pelos cafés em conjunto, pelas risadas no almoço e nos intervalos, pelos churrascos do grupo e pela companhia! Agradeço também aos mais novos amigos Diego Lieban, Juliane, Carolina, Miriam, Nicolau e Juliana que também contribuíram neste último ano para dias mais felizes. Obrigada pelo carinho e pela amizade de todos!

Agradeço à minha professora de yoga Vera Lúcia por todos os ensinamentos que transmitiu durante estes seis anos de convivência e que foram muito importantes na manutenção da tranqüilidade, da paz interior e do foco no meu objetivo. Obrigada às amigas e professores da dança, que sempre me proporcionaram momentos de alegria, descontração e crescimento interior. Obrigada aos colegas de trabalho do grupo de Reiki que, com certeza, também fizeram parte desta caminhada me apoiando e fortalecendo em todos os momentos.

A todos vocês, muito obrigada!

Resumo

As Equações Diferenciais Ordinárias aparecem modelando diversos fenômenos relacionados a outras áreas científicas, como a Biologia, a Química e a Física. Nosso objetivo neste trabalho é utilizar a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias como base para analisar o comportamento das soluções de um modelo matemático que descreve o fenômeno da Circulação Termohalina no Oceano Atlântico Norte.

Abstract

Ordinary Differential Equations model several phenomena which are related with other scientific areas, like Biology, Chemistry and Physics. Our purpose in this work is to use the theory of Ordinary Differential Equations as a basis to analyze the behaviour of the solutions of a mathematical model that describes the phenomenon of Thermohaline Circulation in the North Atlantic Ocean.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Equação Diferencial Ordinária	3
1.2 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio	9
1.3 Teorema de Poincaré - Bendixson	15
1.3.1 Propriedades do ω - limite	16
1.3.2 Teorema de Poincaré - Bendixson	18
2 O modelo de Stommel	30
2.1 Oscilação de Sal no Atlântico Norte	31
2.2 Análise do Campo Vetorial da Equação	45
2.3 Linearização	50
2.4 Existência de Órbitas Periódicas	55
3 Anexo: A circulação Termohalina	59
Referências Bibliográficas	63

Introdução

A Circulação Termohalina é um fenômeno importante no controle do clima do nosso planeta. Ele foi modelado através de um modelo de duas caixas proposto por Henry Stommel e que é descrito por um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias.

O objetivo do presente trabalho é analisar esse sistema, de modo a descrever e demonstrar o comportamento de suas soluções. Para isto, contamos com as simulações feitas no software *Modellus*[†] e com a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias que suporta nossos argumentos e técnicas de análise.

A fim de manter uma razoável organização dos resultados apresentados neste trabalho, dividimos o texto em dois grandes capítulos. O primeiro capítulo apresenta os resultados mais importantes da teoria de EDO's utilizados neste trabalho. Destacamos o Teorema de Poincaré Bendixson, o Teorema de Liapunov-Perron o Critério Negativo de Bendixson. Grande parte destes resultados foram adaptados do livro "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias" de Jorge Sotomayor, e das notas de aula da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias ministradas pelo professor Alexandre Tavares Baraviera no segundo semestre de 2007, tendo tido esses materiais uma grande contribuição para a realização deste trabalho. No segundo

[†]O *Modellus* é um software matemático que permite a análise e criação de modelos matemáticos que envolvam funções, derivadas, taxas de variação, equações diferenciais e equações a diferenças finitas. Suas ferramentas incluem a construção de gráficos, tabelas e animações/simulações.

capítulo apresentamos a descrição do modelo de duas caixas que modela o fenômeno da Circulação Termohalina no Oceano Atlântico Norte seguida da análise e estudo do compartimento de suas soluções. A descrição do modelo foi retirada do livro "Mathematics and the environment" de Andrew C. Fowler, professor na Universidade de Limerick e membro do Mathematical Geoscience Group (MGG) em OCIAM (Oxford Centre of Industrial and Applied Mathematics).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições e teoremas sobre a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias que foram necessários durante a realização deste trabalho. Sobre os teoremas serão apresentadas, em geral, apenas as idéias principais de suas demonstrações.

1.1 Equação Diferencial Ordinária

Definição 1.1.1. *Dada uma função contínua $f(t, x) : \mathbb{R} \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, denomina-se equação diferencial ordinária (EDO) a relação $\dot{x} = f(t, x(t))$, onde $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua derivável em todo o intervalo I e que depende de t .*

Uma equação diferencial $\dot{x} = f(t, x(t))$ busca as curvas φ (se existirem) tais que seu vetor velocidade $\varphi'(t)$ em t coincide com o valor do campo f em $(t, \varphi(t))$, ou seja, as curvas tais que $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

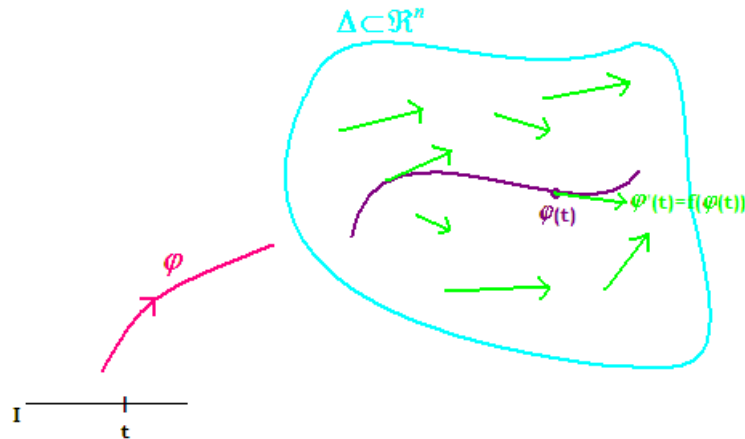


Figura 1.1: Dado o campo $f(t, x(t))$, a solução da edo $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ é a curva tal que a reta tangente em cada ponto (t, x) coincide com o campo, $\forall t$.

Definição 1.1.2. *Uma equação diferencial ordinária autônoma é uma equação do tipo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, onde $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Ou seja, uma equação diferencial ordinária autônoma é uma equação cujo campo vetorial independe do tempo t .

Como visto anteriormente na introdução deste trabalho, nosso objetivo é analisar o comportamento das soluções de uma EDO. Para tal, vamos utilizar os seguintes resultados, que nos indicam se uma solução está definida para todo o tempo real ou não.

Definição 1.1.3. *Uma curva integral (solução da equação) $\varphi : I \rightarrow \Delta$, $I \subset \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto, da equação $\dot{x}(t) = f(x(t))$ chama-se maximal se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|_I$, então $I = J$ e conseqüentemente $\varphi = \psi$. Neste caso I chama-se intervalo máximo.*

Lema 1.1.4. *Dado o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial e $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, então $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ (*) é solução de (1.1).

Demonstração:

De fato,

$$\varphi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s)) ds = x_0 + 0 = x_0$$

e

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = f(t, \varphi(t)), \text{ pelo Teorema Fundamental do Cálculo.}$$

Chamamos (*) de *aplicação de Picard* e notamos $A\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$.

Proposição 1.1.5. *Seja $f : \mathbb{R} \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, onde $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Seja $x : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução maximal de $\dot{x} = f(t, x(t))$ por x_0 definida no intervalo máximo $I(x_0) = (\alpha, \beta)$, onde $x(0) = x_0$ é a condição inicial da equação.*

01. *Se $\beta < +\infty$, então para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existe $t \in (0, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$ ($x(t) \in \mathbb{R}^n - K$).*

02. *Analogamente, se $-\infty < \alpha$, então para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existe $t \in (\alpha, 0)$ tal que $x(t) \notin K$.*

Demonstração:

Vamos assumir, por contraposição, que $x(t) \in K$, K compacto, $\forall t \in (0, \beta)$.

Como f é contínua, então f restrita a K admite valor máximo: $\exists M > 0$ tal que $|f(t, x(t))| \leq M, \forall (t, x) \in K$. Pelo Lema 1.1.4, temos que:

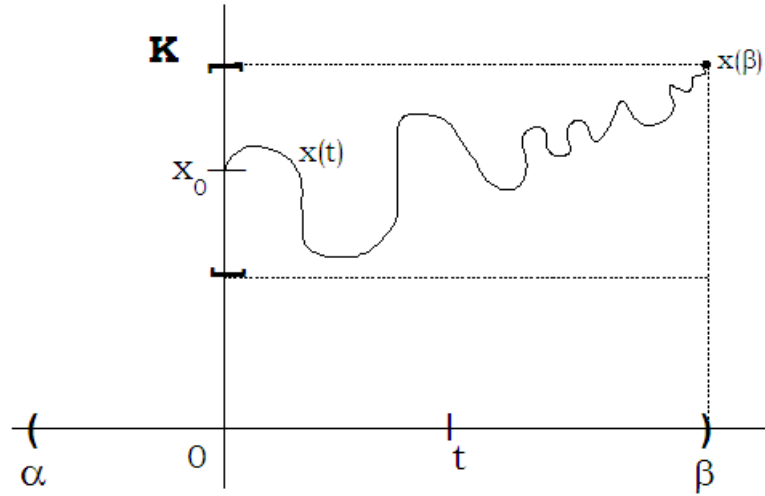


Figura 1.2: $x(t) \in K, \forall t \in (0, \beta)$

$$\begin{aligned}
 |x(t_1) - x(t_2)| &= \left| \left(x_0 + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right) - \left(x_0 + \int_{t_2}^t f(s, x(s)) ds \right) \right| \Rightarrow \\
 |x(t_1) - x(t_2)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s)) ds \right| \Rightarrow \\
 |x(t_1) - x(t_2)| &\leq M \cdot |t_2 - t_1|
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

para quaisquer $t_1, t_2 \in (0, \beta)$.

Logo, $x(t)$ é uniformemente contínua em $(0, \beta)$. Daí, por um teorema clássico de Análise, temos que $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite uma extensão uniformemente contínua $\bar{x} : (\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{x}(\beta) = \lim_{r \uparrow \beta} x(r)$ no extremo β .

Este limite existe pois, tomando a seqüência $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ tal que $t_n \rightarrow \beta$, temos que $\{t_n\}$ é de Cauchy, ou seja, $|t_{n+p} - t_n| < \varepsilon$, se $n \geq N(\varepsilon)$.

Mas então a seqüência $x(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K \subset \mathbb{R}^n$ também é de Cauchy pois, pela desigualdade acima, vale que: $|x(t_{n+p}) - x(t_n)| \leq M \cdot |t_{n+p} - t_n| < M \cdot \varepsilon$. Logo, como \mathbb{R}^n é um espaço métrico completo, temos que $x(t_n)$ é convergente.

Finalmente, como $x(t_n) \subset K$ compacto, temos que $x(t_n) \rightarrow x(\beta)$.

Vamos agora mostrar que existe derivada lateral em $\bar{x}(\beta)$ e que ela coincide com o campo:

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t) &= [\lim_{r \uparrow \beta} x(r)] - \bar{x}(t) \Rightarrow \\
\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t) &= \lim_{r \uparrow \beta} [x(r) - x(t)] \stackrel{\text{lema 1.1.4}}{\Rightarrow} \\
\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t) &= \lim_{r \uparrow \beta} \left[\int_t^r f(s, x(s)) ds \right] \stackrel{\text{integral imprpria}}{\Rightarrow} \\
\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t) &= \int_t^\beta f(s, x(s)) ds = \int_t^\beta f(s, \bar{x}(s)) ds.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t)}{\beta - t} - f(\beta, \bar{x}(\beta)) &= \frac{1}{\beta - t} (\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t)) - \frac{f(\beta, \bar{x}(\beta))}{\beta - t} \int_t^\beta ds \Rightarrow \\
\frac{\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t)}{\beta - t} - f(\beta, \bar{x}(\beta)) &= \frac{1}{\beta - t} \int_t^\beta [f(s, \bar{x}(s)) - f(\beta, \bar{x}(\beta))] ds, \forall t < \beta.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Donde temos que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\bar{x}(\beta) - \bar{x}(t)}{\beta - t} - f(\beta, \bar{x}(\beta)) \right| &\leq \frac{1}{\beta - t} \int_t^\beta |f(s, \bar{x}(s)) - f(\beta, \bar{x}(\beta))| ds \\
&\leq \max_{t \leq s \leq \beta} |f(s, \bar{x}(s)) - f(\beta, \bar{x}(\beta))| \rightarrow 0, \text{ com } t \rightarrow \beta.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Logo, a derivada lateral de $\bar{x}(\beta)$ é $\bar{x}'(\beta) = f(\beta, \bar{x}(\beta))$, que coincide com o campo.

Portanto, \bar{x} é solução de $\dot{x} = f(t, x)$ para $t = \beta$ com condição inicial $\bar{x}(\beta) = x(\beta) = \lim_{r \uparrow \beta} x(r)$.

O Teorema de Existência e Unicidade (ver [2], pp. 13-14) garante que existe ε tal que em $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ temos $\dot{y} = f(t, y)$, $y(\beta) = \bar{x}(\beta)$, ou seja, a solução $x(t)$ pode ser prolongada até $\beta + \varepsilon$. Segue que $x : (\alpha, \beta + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(0) = x_0$ é solução da EDO inicial. Portanto, (α, β) não é o intervalo maximal de x , o que contradiz a hipótese.

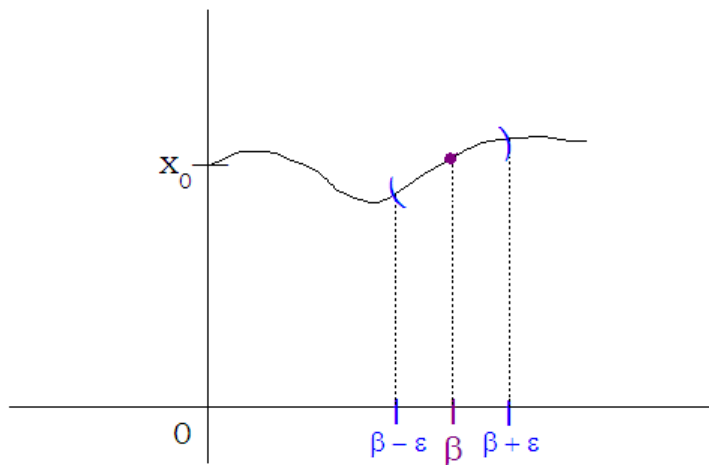


Figura 1.3: A solução $x(t)$ pode ser prolongada até $\beta + \varepsilon$.

Portanto, dado K compacto, $\exists t \in (0, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$. Analogamente, temos que $\exists t \in (\alpha, 0)$ tal que $x(t) \notin K$.

Corolário 1.1.6. *Se uma solução de*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

está toda contida em um compacto K , então essa solução está definida $\forall t \geq 0$.

Demonstração:

De fato, se $x(t)$ está definida para $[0, \alpha)$, $\alpha < \infty$, então, pela Proposição 1.1.5, temos que $x(t)$ sai do compacto K para algum tempo t . Porém, isto contradiz a hipótese. Logo, $\alpha = \infty$.

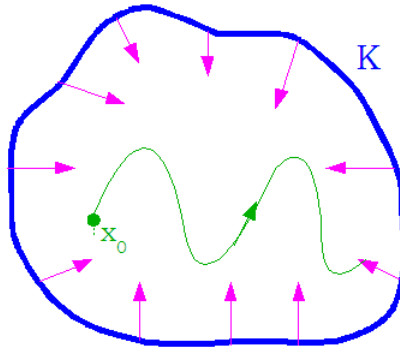


Figura 1.4: A solução $x(t)$ está completamente contida em K .

1.2 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Considere o campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ou $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto).

Definição 1.2.1. Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto singular ou ponto de equilíbrio de f se $f(p) = 0$; e ponto regular de f se $f(p) \neq 0$.

Se x é um ponto singular então $\varphi(t) = x$, $-\infty < t < \infty$, é solução de $\dot{x} = f(x)$. Reciprocamente, se $\varphi(t) = x$, $-\infty < t < \infty$, é solução de $\dot{x} = f(x)$, então x é ponto singular de f , pois: $0 = \varphi'(t) = f(\varphi(t)) = f(x)$.

Definição 1.2.2. Seja p uma singularidade de $\dot{x} = f(x)$. Dizemos que p é um ponto estável se para toda vizinhança U de p existe uma vizinhança V de p tal que se $x(0) \in V$, então $x(t) \in U$, $\forall t \geq 0$. Se, além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$ (diminuído V se necessário) dizemos que p é assintoticamente estável.

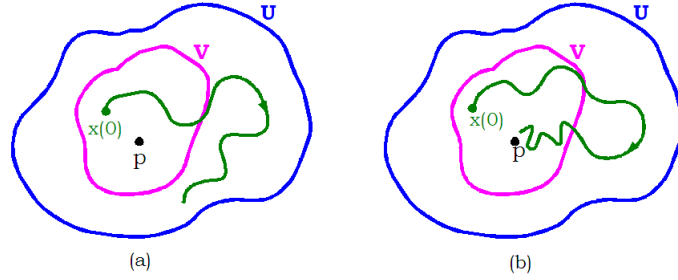


Figura 1.5: (a) p é ponto estável; (b) p é assintoticamente estável.

Para o que segue, denotamos por $viz(p)$ uma vizinhança do ponto p ; e por \dot{V} a derivada da função V com relação a t aplicada ao ponto $x(t)$, onde $x : I \rightarrow \Delta$ ($\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto) é uma solução qualquer de $\dot{x} = f(x)$ ($\dot{V} = \frac{d}{dt}V(x(t))$).

Definição 1.2.3. *Considere o sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$, $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja p um ponto singular de $\dot{x} = f(x)$. Uma função de Liapunov para p é uma função $V : viz(p) \rightarrow \mathbb{R}_+$ diferenciável tal que:*

01. $V(p) = 0$ e $V(q) > 0$ se $q \neq p$, $\forall q \in viz(p)$.

02. V é não-crescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow V(x_1) \geq V(x_2)$) ao longo das trajetórias do campo, ou seja, $\dot{V} \leq 0$ na $viz(p)$; ou ainda, $V \circ x : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função decrescente para qualquer solução $x : I \rightarrow \Delta$ tal que $x(t) \in viz(p)$ para cada $t \in I \subset \mathbb{R}$.

A função de Liapunov V diz-se *estrita* quando $\dot{V} < 0$ na $viz(p) - \{p\}$.

Teorema 1.2.4. (Critério de Liapunov) *Seja p um ponto singular de $\dot{x} = f(x)$, $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se existe uma função de Liapunov para p , então p é estável. Se a função for estrita, p é assintoticamente estável.*

Demonstração:

Para cada $x \in \Delta$, vamos indicar por $\varphi_x(t)$ a solução de $\dot{x} = f(x)$ que passa por esse ponto x , com $\varphi_x(0) = x$.

Seja $V : U = viz(p) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Liapunov para p .

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, considere o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-p| \leq \delta\} \subset U$. Então, o número $m = \min\{V(x); |x-p| = \delta\}$ é maior do que zero, pois $V(x) > 0, \forall x \neq p$, por definição.

Como V é diferenciável, ela é contínua; em particular V é contínua no ponto p . Portanto, dado $\varepsilon = m$ existe $\delta^* > 0$, tal que $|x-p| < \delta^* \Rightarrow |V(x) - V(p)| = |V(x)| < m$. Além disso, $\delta^* \leq \delta$, pois se tivéssemos $\delta^* > \delta$, então existiria um x^* tal que $|x^* - p| < \delta^*$, mas $|V(x^*)| \geq m$ (basta tomar x^* tal que $|x^* - p| = \delta$ e aplicar a definição de m).

Portanto, existe um conjunto aberto $U_1 = B(p, \delta^*) \subset B$, tal que $p \in U_1$ e $V(x) < m, \forall x \in U_1$.

Agora, como $\dot{V} \leq 0$, então para todo $x \in U_1$ temos que: $V(\varphi_x(t)) \leq V(\varphi_x(0)) = V(x) < m, \forall t \geq 0$. Logo, $\varphi_x(t) \subset B \forall t \geq 0$ e, portanto, p é estável.

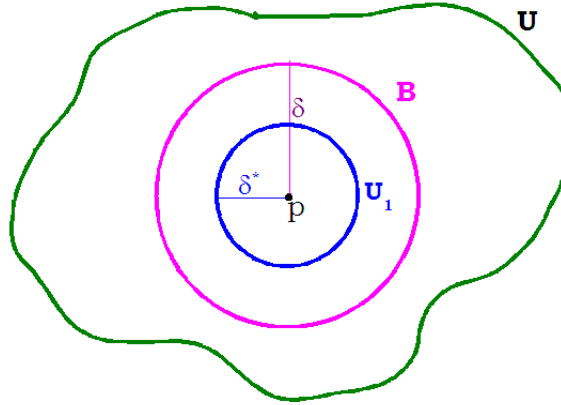


Figura 1.6: (a) p é ponto estável; (b) p é assintoticamente estável.

Vamos supor agora que V é função de Liapounov estrita. Então $\dot{V} < 0$ em $U - \{p\}$.

Considere $x \in U_1$ e (t_n) uma seqüência crescente de números reais positivos tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in B$. Como V é contínua, temos que $V(\varphi_x(t_n)) \rightarrow V(y)$ e, além disso, vale que $V(\varphi_x(t)) > V(y), \forall t \geq 0$, pois V é decrescente.

Vamos supor que $y \neq p$. Então, como V é decrescente, temos que: $V(\varphi_y(1)) <$

$V(\varphi_y(0)) = V(y)$ e, para todo z suficientemente próximo de y , $V(\varphi_z(1)) < V(y)$. Daí, $V(\varphi_x(t_n + 1)) < V(\varphi_x(t_n))$ e, como $V(\varphi_x(t_n)) \rightarrow V(y)$, então existe um N suficientemente grande tal que $V(\varphi_x(t_N + 1)) < V(y)$. Mas isto é absurdo. Logo, $y = p$.

Como B é compacto, temos que p é assintoticamente estável.

A seguir, iremos enunciar e demonstrar um teorema que é a versão local para sistemas não-lineares da versão global deste mesmo resultado para sistemas lineares, que pode ser encontrado em ([3], p. 186). Para a demonstração deste teorema é necessário um lema sobre produtos internos adaptados, o qual será apenas enunciado. A demonstração do teorema em questão foi retirada da mesma referência, páginas 189 e 190.

Teorema 1.2.5. (*Versão global para sistemas lineares*) *Seja $A \in M(n)$ um campo linear qualquer. São equivalentes:*

- (i) *A origem é um poço para a matriz A .*
- (ii) *A é um atrator.*
- (iii) *O fluxo de A é contrativo.*
- (iv) *A origem é uma singularidade assintoticamente estável de A .*

Lema 1.2.6. *Seja $A \in M(k)$ uma matriz tal que a parte real de cada autovalor de A é maior do que α ou menor do que β . Então existe uma base B de \mathbb{R}^k tal que*

$$\alpha \leq \langle Ax, x \rangle_B \leq \beta$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^k$ tal que $|x|_B = 1$.

Teorema 1.2.7. (*Teorema de Liapunov - Perron*) *Seja $x_0 \in \Delta$ uma singularidade do campo de vetores $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se x_0 é um poço de f (isto é, a matriz $Df(x_0)$ tem todos os autovalores com parte real negativa) então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f .*

Demonstração:

Iniciamos esta demonstração lembrando ao leitor a definição de *conjugação*: dados dois campos de vetores $f_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ com fluxos, respectivamente, ϕ_t^1 e ϕ_t^2 , dizemos que os campos f_1 e f_2 , ou então que os fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2 , são *conjugados* se existe um difeomorfismo $g : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t^2 \circ g = g \circ \phi_t^1$. O difeomorfismo g é uma *conjugação*.

Como os conceitos de singularidade e de estabilidade são invariantes por conjugação, vamos considerar que $x_0 = 0 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$. No nosso caso, a conjugação é uma translação. Denotemos $A = Df(0)$.

A idéia central da prova é que as soluções da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, numa pequena vizinhança da singularidade de f , são muito parecidas com as soluções da equação diferencial $\dot{x} = Ax$: como, por hipótese, a origem 0 é um poço para A , a versão linear do teorema garante o comportamento assintótico das trajetórias também de f .

Seja, pois, $0 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ uma singularidade de $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pela definição de derivada, $f(x) = f(0) + Ax + r(x) = Ax + r(x)$, onde $|r(x)|/|x| \rightarrow 0$ com $|x| \rightarrow 0$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - Ax|}{|x|} = 0 \quad (1.7)$$

Como todas as normas em \mathbb{R}^n são equivalentes, (1.7) vale para qualquer outra norma em \mathbb{R}^n . Em particular, fixado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com norma associada $\| \cdot \|$, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (para este produto interno e para esta norma) afirma que $\langle f(x) - Ax, x \rangle \leq \|f(x) - Ax\| \|x\|$, de modo que

$$\frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \leq \frac{\|f(x) - Ax\|}{\|x\|} \quad (1.8)$$

e, portanto, decorre de (1.7) que

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \quad (1.9)$$

Agora, utilizamos a hipótese sobre a singularidade $x_0 = 0$ de f : por ser um poço, podemos escolher $\beta > 0$ tal que a parte real de cada autovalor λ de $A = Df(0) \in M(n)$ é menor do que $-\beta$. Pelo Lema 1.2.5 referenciado acima, podemos escolher um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ adaptado tal que $\langle Ax, x \rangle \leq -2\beta$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| = 1$, ou seja, $\langle Ax, x \rangle \leq -2\beta\|x\|^2$ vale para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Introduzindo esta igualdade em (1.9) estabelecemos

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \leq -2\beta < -\beta \quad (1.10)$$

e, portanto, podemos encontrar $\gamma > 0$ tal que

$$\langle f(x), x \rangle \leq -\beta\|x\|^2 \quad (1.11)$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| < \gamma$.

Fixemos, agora, $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < \|x\| < \gamma$ e consideremos a trajetória $\phi_t(x)$ de f por x . Por continuidade, $0 < \|\phi_t(x)\| < \gamma$ para $t > 0$ pequeno e, portanto, por (1.11),

$$\frac{d}{dt} \|\phi_t(x)\| = \frac{\langle f(\phi_t(x)), \phi_t(x) \rangle}{\|\phi_t(x)\|} < -\beta\|\phi_t(x)\| < 0 \quad (1.12)$$

para $t > 0$ pequeno (a primeira desigualdade pode ser verificada em (DOERING; LOPES, 2005), p.357). Isto significa que $\|\phi_t(x)\|$ é decrescente em t e, portanto, (1.12) vale, na verdade, para todo $t > 0$, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \ln \|\phi_t(x)\| = \frac{\frac{d}{dt} \|\phi_t(x)\|}{\|\phi_t(x)\|} < -\beta \quad (1.13)$$

vale para $t > 0$. Integrando ambos os lados da desigualdade de 0 a t , decorre

$$\begin{aligned}
 \ln \|\phi_t(x)\| - \ln \|\phi_0(x)\| &\leq -\beta t \Rightarrow \\
 \ln \|\phi_t(x)\| - \ln \|x\| &\leq -\beta t \Rightarrow \\
 \ln \left(\frac{\|\phi_t(x)\|}{\|x\|} \right) &\leq -\beta t \Rightarrow \\
 \frac{\|\phi_t(x)\|}{\|x\|} &\leq e^{-\beta t}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

e, portanto,

$$\|\phi_t(x)\| \leq \|x\|e^{-\beta t} \leq \|x\| \tag{1.15}$$

vale para qualquer $t \geq 0$ e qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| < \gamma$.

Denotemos por $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ a bola centrada na origem e de raio r na norma $\|\cdot\|$ e fixemos $0 < \varepsilon \leq \gamma$ qualquer. Decorre de (1.15) que $\phi_t(x) \in B_\varepsilon$, para quaisquer $x \in B_\varepsilon$ e $t \geq 0$ e também que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = 0$, para qualquer $x \in B_\varepsilon$. Isto mostra que a singularidade $x_0 = 0 \in E$ de f é assintoticamente estável, como queríamos demonstrar.

1.3 Teorema de Poincaré - Bendixson

Definição 1.3.1. *O fluxo associado a uma equação diferencial autônoma é uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_t(x_0)$ é a solução de $\dot{x} = f(x)$ que, para $t = 0$, passa por x_0 .*

Na verdade, o fluxo é uma família de curvas que são as soluções da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ para condições iniciais diversas. O fluxo satisfaz as seguintes propriedades:

01. $\phi_0(x_0) = x_0$

02. $\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_{t+s}(x_0)$.

Definição 1.3.2. Dizemos que a curva definida pela imagem $\{x(t) | t \in I(x_0) \subset \mathbb{R}\} \subseteq \Delta$ ($\Delta \subset \mathbb{R}^n$, aberto) da trajetória de $\dot{x} = f(x)$ por x_0 é a órbita de f por x_0 .

Definição 1.3.3. Sejam $\dot{x} = f(x)$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Considere a órbita de p . Definimos:

i) O conjunto ω -limite por $\omega(p) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_i \rightarrow \infty \text{ tal que } \phi_{t_i}(p) \rightarrow q\}$.

ii) O conjunto α -limite por $\alpha(p) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_i \rightarrow -\infty \text{ tal que } \phi_{t_i}(p) \rightarrow q\}$.

1.3.1 Propriedades do ω - limite

Proposição 1.3.4. Seja $p \in \mathbb{R}^n$; então $\omega(p)$ é invariante pelo fluxo, ou seja, $\phi_t(\omega(p)) = \omega(p)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

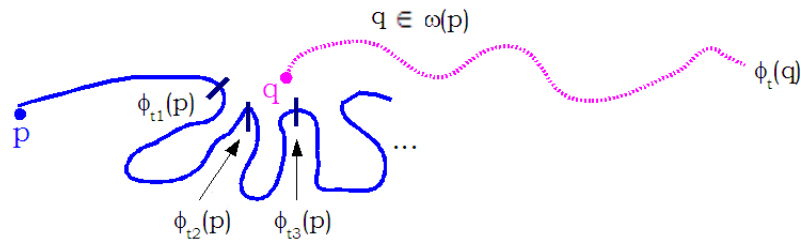


Figura 1.7: $q \in \omega(p)$.

Seja $q \in \omega(p)$. Queremos mostrar que $\phi_t(q) \in \omega(p)$.

Para isso, vamos fixar t e notar que $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|\phi_{t'}(p) - q| < \delta \Rightarrow |\phi_t(\phi_{t'}(p)) - \phi_t(q)| < \varepsilon$. Ou seja, se um ponto da trajetória de p está próximo de $q \in \omega(p)$, então quando aplicamos ϕ_t nestes pontos, suas imagens também estão próximas.

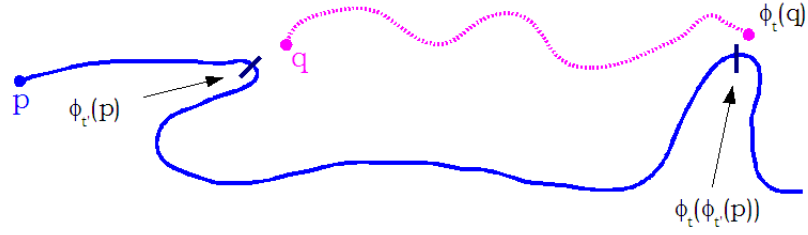


Figura 1.8: As imagens de $\phi_{t'}(p)$ estão próximas das imagens de q .

Logo, $\phi_{t+t_i}(p) \rightarrow \phi_t(q)$ (pela continuidade de ϕ_t) e, portanto, $\phi_t(q) \in \omega(p) \forall q \in \omega(p) \Rightarrow \phi_t(\omega(p)) \subset \omega(p)$, t fixo. Como t é arbitrário, temos que $\phi_t(\omega(p)) \subset \omega(p) \forall t \in \mathbb{R}$.

Agora, $\phi_t(\omega(p)) \subset \omega(p)$, t fixo $\Rightarrow \phi_{-t}[\phi_t(\omega(p))] \subset \phi_{-t}(\omega(p)) \Rightarrow \omega(p) \subset \phi_{-t}(\omega(p))$. Como t é arbitrário, então $\omega(p) \subset \phi_{-t}(\omega(p)) \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \omega(p) \subset \phi_t(\omega(p))$.

Logo, $\phi_t(\omega(p)) = \omega(p) \forall t \in \mathbb{R}$.

Com argumentos semelhantes, pode-se demonstrar a seguinte

Proposição 1.3.5. *Seja $p \in \mathbb{R}^n$; então $\omega(\phi_t(p)) = \omega(p)$.*

A demonstração do teorema seguinte não será desenvolvida aqui, mas pode ser encontrada em [2], capítulo VII, Teorema 5.

Teorema 1.3.6. *Sejam $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k ($k \geq 1$), definido num aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ e $\gamma^+(p) = \{\varphi_t(p), t \geq 0\}$, a semi-órbita positiva do campo f pelo ponto p . Se $\gamma^+(p)$ está contida num subconjunto compacto $K \subset \Delta$, então:*

- a) $\omega(p) \neq \emptyset$
- b) $\omega(p)$ é compacto
- c) $\omega(p)$ é invariante por f
- d) $\omega(p)$ é conexo.

1.3.2 Teorema de Poincaré - Bendixson

Vamos iniciar esta seção apresentando algumas idéias importantes para a demonstração do Teorema de Poincaré - Bendixson. Estas idéias podem ser encontradas com enunciado e demonstrações rigorosas em [2], cap. VII, seção 2.

Dado $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, construímos Σ uma variedade com dimensão $n - 1$ transversal ao campo, isto é, tal que $f(p) \notin T_p\Sigma$. Em particular, $f|_{\Sigma} \neq 0$. Chamamos Σ de *Secção de Poincaré*.

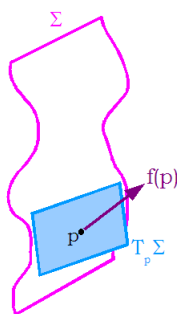


Figura 1.9: Secção de Poincaré

Consideramos a trajetória que inicia num ponto $q \in \Sigma$. Se $\phi_t(q)$ retorna a Σ num ponto p , pelo Teorema de Existência e Unicidade, temos que p é uma função de q . Assim, obtemos $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $F(q) = p$. A aplicação F é dita *aplicação de Poincaré*.

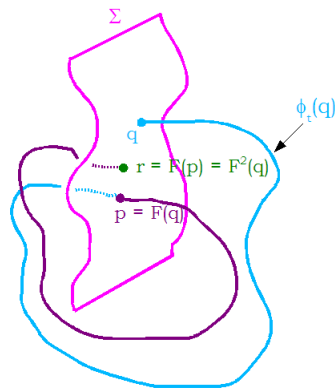


Figura 1.10: O ponto p é função de q .

Se $F(z) = z$, então existe uma órbita periódica do campo que passa por z .

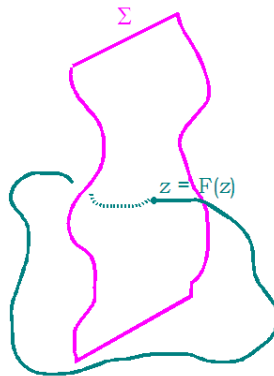


Figura 1.11: Se z é ponto fixo de F , então sua órbita é periódica.

No caso do Teorema de Poincaré - Bendixson, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Logo, Σ é uma curva ($\dim \Sigma = 1$). Como Σ é transversal a f , o campo aponta apenas para um dos lados de Σ . Temos duas possibilidades:

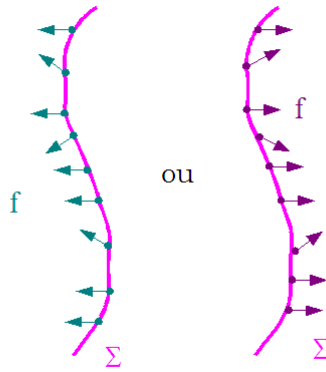


Figura 1.12: O campo f aponta sempre para o mesmo lado da secção Σ .

De fato, se o campo mudasse de lado, como f é contínuo, em algum momento ele pertenceria ao espaço tangente a Σ , o que é absurdo, já que Σ é transversal a f .

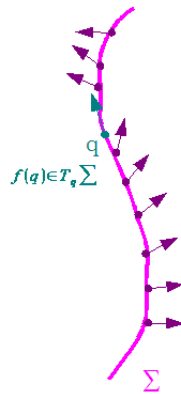


Figura 1.13: q é tal que $f(q) \in T_q \Sigma$.

Se a trajetória retorna a Σ , então:

a) ela não pode cruzar Σ no sentido oposto ao do campo, pois isto viola a transversalidade de Σ ;

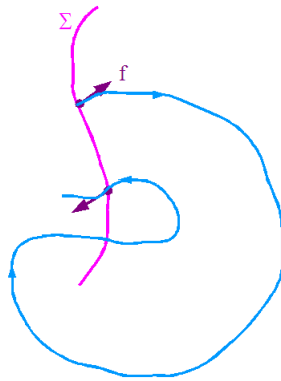


Figura 1.14: A trajetória cruza Σ no sentido contrário ao do campo; absurdo!

b) ela não pode se auto-interseccionar, pois isto viola a unicidade de solução;

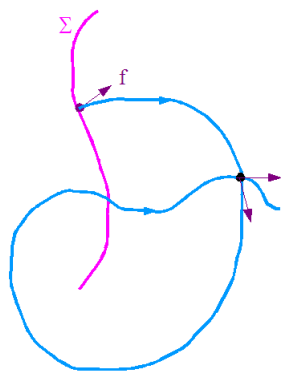


Figura 1.15: A trajetória tem auto-intersecção; absurdo!

Logo, temos apenas duas opções: ou a trajetória tende a um ponto, ou ela tende a uma trajetória periódica:

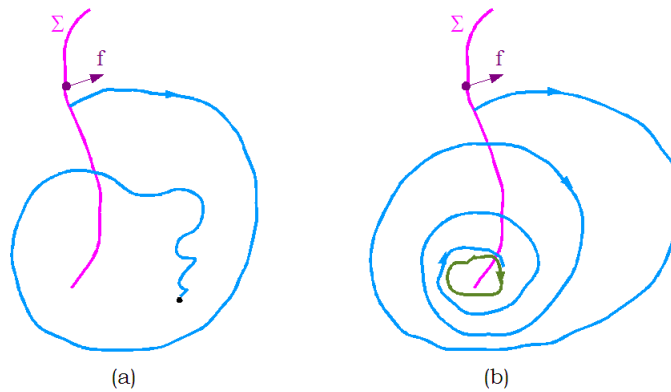


Figura 1.16: (a) a órbita tende a um ponto; (b) a órbita tende a uma órbita periódica

Teorema 1.3.7. (Teorema de Poincaré - Bendixson) Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo C^k ($k \geq 1$), onde $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ é aberto. Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma solução de $\dot{x} = f(x)$, definida $\forall t \geq 0$, tal que $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\} \subset K$ compacto $\subset \Delta$. Suponha que o campo f possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes alternativas:

a) $\omega(p)$ só tem pontos regulares $\Rightarrow \omega(p) = \text{órbita periódica}$

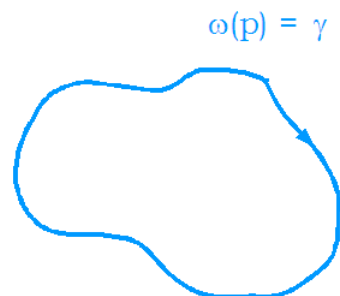
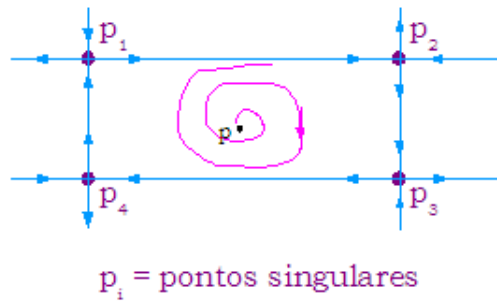


Figura 1.17: $\omega(p)$ é uma órbita periódica

b) $\omega(p)$ tem pontos regulares e singulares $\Rightarrow \omega(p) = \text{conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando } t \rightarrow \pm\infty$.



ou



Figura 1.18: $\omega(p)$ é um conjunto de órbitas que tendem para os pontos singulares do conjunto

c) $\omega(p)$ não contém pontos regulares $\Rightarrow \omega(p)$ é um ponto singular.

Demonstração:

c)

Vamos supor que $\omega(p) \subset \{p_1, \dots, p_n\}$, $\omega(p) \neq \emptyset$, onde p_i são pontos singulares.

Como $\omega(p) \neq \emptyset$, ω é conexo e os únicos subconjuntos conexos de $\{p_1, \dots, p_n\}$ são os subconjuntos unitários $\{p_i\}$, então $\omega(p) = \{p_i\}$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.

b)

Vamos supor que $\omega(p) \subset \{p_1, \dots, p_n\} \cup \{\text{pontos regulares}\}$, onde os p_i são pontos singulares e $\omega(p)$ contém ao menos um elemento de cada conjunto.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2 \in \omega(p)$. Como $\omega(p)$ é conexo, $\exists z \in \omega(p), z \neq p_1, p_2$. Como o número de singularidades é finito, já podemos supor que z é ponto regular (o que é verdade após um número finito de passos).

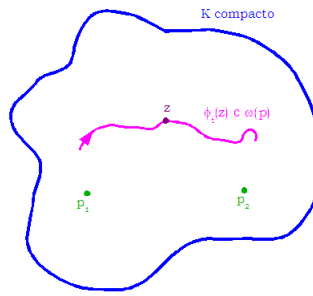


Figura 1.19: $\phi_t(p) \subseteq \omega(p)$

$\omega(p)$ é invariante pelo fluxo $\forall t \in \mathbb{R} : \phi_t(\omega(p)) \subset \omega(p) \Rightarrow \phi_t(z) \subset \omega(p)$. Agora, $\gamma_p^+ \subset K$ compacto \Rightarrow os pontos de acumulação de γ_p^+ estão em $K \Rightarrow \omega(p) \subset K$. Logo, $\phi_t(z) \subset K, \forall t \in \mathbb{R}$.

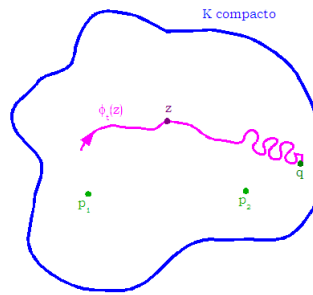


Figura 1.20: $\phi_t(p)$ converge para $q \neq p_2$

Se tivéssemos $\phi_t(z) \rightarrow p_2$ quando $t \rightarrow \infty$ (exemplo: $\phi_t(z) \rightarrow q \neq p_2$), então $\omega(p)$ não seria conexo. Analogamente para $t \rightarrow -\infty$. Logo, $\phi_t(z)$ se acumula em p_1 e p_2 .

a)

Vamos supor que $\omega(p) \subset \{\text{pontos regulares}\}$ e $\omega(p) \neq \emptyset$.

Se $q \in \omega(p)$, então $\gamma_q = \{\phi_t(q), t \in \mathbb{R}\} \subset \omega(p)$, já que $\omega(p)$ é invariante pelo fluxo.

Seja $q \in \omega(p)$ e Σ uma curva transversal ao campo (secção de Poincaré) contendo q .

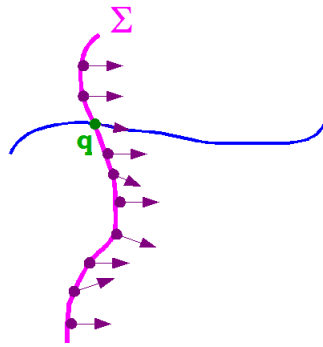


Figura 1.21: Σ é uma seção transversal ao campo e que passa pelo ponto $q \in \omega(p)$.

Como $q \in \omega(p)$, ele é ponto de acumulação de sua trajetória, ou seja, $\phi_t(q)$ volta para Σ infinitas vezes. Temos duas possibilidades para este retorno:

1ª possibilidade: a trajetória retorna para Σ em um ponto "acima" de q . Neste caso, para que a trajetória retorne a Σ mais uma vez, ou ela cruzará a seção de Poincaré no sentido contrário ao do campo, ou ela se auto-interseccionará. Porém ambas as opções são proibidas como foi visto acima. Logo, esta opção está descartada.

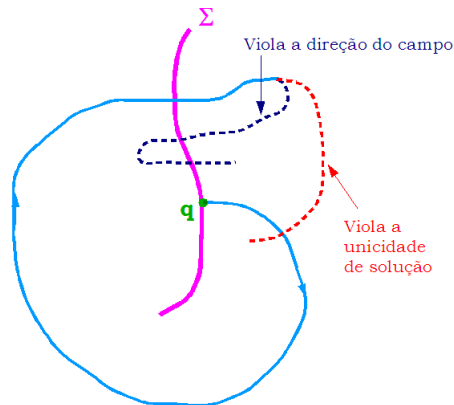


Figura 1.22: Retorno da trajetória a Σ em um ponto "acima" de q .

2ª possibilidade: a trajetória retorna a Σ em um ponto "abaixo" de q . Novamente, neste caso, para a trajetória retornar mais uma vez à secção de Poincaré ou ela cruza Σ no sentido contrário ao do campo ou ela se auto-intersecciona, o que descarta esta segunda opção de trajetória.

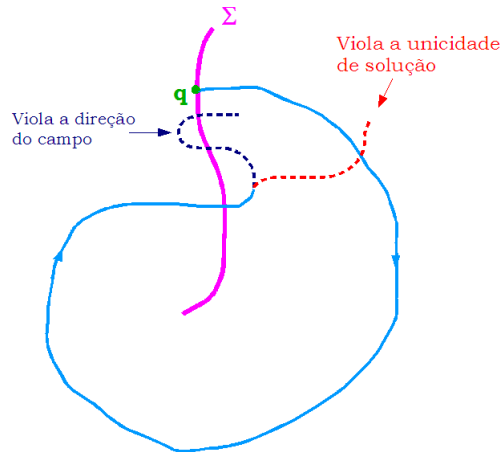


Figura 1.23: Retorno da trajetória a Σ em um ponto "abaixo" de q .

Logo, a trajetória de q deve retornar a Σ exatamente em q , donde concluímos que $\omega(p)$ é uma órbita periódica.

Corolário 1.3.8. *Nas condições do teorema, se γ é uma órbita periódica, então $\exists p$ no interior da região delimitada por γ tal que $f(p) = 0$, ou seja, p é um ponto singular.*

Demonstração:

Seja γ uma órbita periódica e p um ponto no interior da região delimitada por γ . Neste caso, temos que $\omega(p) \subset R$, onde $R = \gamma \cup$ (região delimitada por γ).

Se $\omega(p)$ tem pontos regulares e singulares, ou se $\omega(p)$ só tem pontos singulares, então já existe ponto singular no interior da região delimitada por γ .

Vamos, então, supor que $\omega(p)$ é uma órbita periódica.

$$\exists p \text{ tal que } f(p) = 0 \Leftrightarrow \exists p \text{ tal que } \phi_t(p) = p, \forall t \in \mathbb{R}.$$

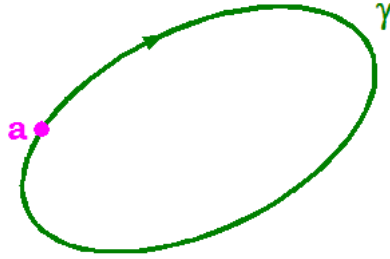


Figura 1.24: $\omega(p)$ é uma órbita periódica

O Teorema de Brouwer nos diz que: $F : D \rightarrow D$ contínua, D disco $\Rightarrow \exists q$ tal que $f(q) = q$.

Na região delimitada por γ , vale o teorema de Brouwer. Logo:

$\exists T \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_T(a) = a, \forall a \in \gamma$. Daí:

$$\phi_{2T}(a) = \phi_T(\phi_T(a)) = \phi_T(a) = a$$

$$\phi_{3T}(a) = \phi_T(\phi_{2T}(a)) = \phi_T(a) = a$$

\vdots

$\Rightarrow a$ é ponto fixo para $\phi_{MT}, M \in \mathbb{N}, \forall a \in \gamma$.

Queremos encontrar um ponto fixo $\forall t \in \mathbb{R}$.

01. $\phi_T : D_\gamma \rightarrow D_\gamma$ é contínua $\stackrel{\text{TeoBrouwer}}{\Rightarrow} \exists$ ponto fixo para ϕ_T . De fato, todo ponto de $\gamma \in \text{Fix}\phi_T$, onde denotamos por $\text{Fix}\{\phi_T\}$ o conjunto dos pontos fixos de ϕ_T .

02. $\phi_{T/2} : D_\gamma \rightarrow D_\gamma$ é contínua $\stackrel{\text{TeoBrouwer}}{\Rightarrow} \exists p_{T/2}$ tal que $\phi_{T/2}(p_{T/2}) = p_{T/2}$. Daí:
 $\phi_T(p_{T/2}) = \phi_{T/2}(\phi_{T/2}(p_{T/2})) = \phi_{T/2}(p_{T/2}) = p_{T/2} \Rightarrow p_{T/2} \in \text{Fix}\{\phi_T\}$ e $p_{T/2}$ é diferente de todos os pontos que já estão em $\text{Fix}\{\phi_T\}$.

03. $\phi_{T/2^2} : D_\gamma \rightarrow D_\gamma$ é contínua $\stackrel{\text{TeoBrouwer}}{\Rightarrow} \exists p_{T/4}$ tal que $\phi_{T/4}(p_{T/4}) = p_{T/4}$. Daí:
 $\phi_T(p_{T/4}) = (\phi_{T/4} \circ \phi_{T/4} \circ \phi_{T/4} \circ \phi_{T/4})(p_{T/4}) \doteq p_{T/4} \Rightarrow p_{T/4} \in \text{Fix}\{\phi_T\}$ e $p_{T/4}$ é diferente de todos os outros pontos do conjunto.

Continuando este processo, construímos uma seqüência de pontos fixos $\{p_{T/2^n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_\gamma$. Como D_γ é compacto, então existe uma subseqüência convergente: $p_{T/2^n} \rightarrow p$ (p é ponto fixo para todos os tempos).

Afirmção: $\phi_t(p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$.

De fato, se $t \geq 0, t \in [0, T]$, então:

$$t = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \right) \cdot T \quad (1.16)$$

$a_n \in \{0, 1\}$.

Daí: $\phi_t(p) = \phi_{(\sum \frac{a_n}{2^n}) \cdot T}(p) = (\dots \circ \phi_{\frac{a_n T}{2^n}} \circ \dots)(p) = p$, pois p é invariante por cada uma das transformações.

Logo, $\phi_t(p) = p, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(p) = 0$, ou seja, p é ponto singular de f .

Como uma consequência do Teorema de Poincaré-Bendixson, temos o seguinte teorema, que será muito importante para as conclusões finais da análise que faremos sobre o sistema de EDO's que descreve o fenômeno da Circulação Termohalina no capítulo seguinte.

Teorema 1.3.9. (Critério negativo de Bendixson) *Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano \mathbb{R}^2 . Suponha que $\text{div}(f, g) = f_x + g_y$ é sempre positivo ou sempre negativo em Ω . Então, o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.17)$$

não tem solução periódica contida em Ω .

Demonstração:

A demonstração deste teorema utiliza o Teorema de Green:

$$\int \int_R (f_x + f_y) dx dy = \int_C f dy - g dx, \quad (1.18)$$

onde R designa a região limitada por uma curva fechada simples C .

Vamos supor que existe uma solução periódica $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ de período T . Designando por C a curva correspondente a φ temos, pela definição de integral de linha, que:

$$\int_C f dy - g dx = \int_0^T (f \dot{y} - g \dot{x}) dt = 0. \quad (1.19)$$

Mas, a hipótese de $div(f, g)$ ter um sinal definido em Ω implica em uma contradição entre (1.19) e

$$\int \int_R (f_x + g_y) dx dy \neq 0. \quad (1.20)$$

Logo, a solução φ não pode ser periódica.

Capítulo 2

O modelo de Stommel

Neste capítulo, iremos analisar o modelo matemático de Henry Stommel aplicado na análise do fenômeno da oscilação de sal no Atlântico Norte. Nosso objetivo é verificar o comportamento das soluções do sistema de equações diferenciais que descrevem este modelo. De fato, iremos trabalhar com uma simplificação desse sistema.

2.1 Oscilação de Sal no Atlântico Norte

Para as descrições dadas para os eventos Heinrich e os eventos Dansgaard-Oeschger* funcionarem, o oceano precisa ser capaz de circular de diferentes formas. O caso foi encontrado em alguns dos modelos de estudo, e a circulação "flip-flop" resultante é algumas vezes conhecida como "gangorra". Na sua forma original, a idéia é devido a Henry Stommel, e pode ser descrita como um simples modelo de caixa.

Neste modelo, parametrizamos a circulação termohalina no Atlântico Norte considerando-a biparticionada em dois compartimentos, um equatorial e outro polar. Consideramos:

- T = temperatura da água
- S = salinidade (densidade de sal na água[†])
- ρ = densidade da água
- V = volume de água

de cada caixa por um subíndice "e" ou "p", e escrevemos as leis de conservação de massa, energia, soluto e estado para cada caixa. Transportes para dentro e para

*O evento Heinrich foi primeiramente descrito pelo geólogo marítimo Hartmut Heinrich. Estes eventos ocorreram durante o último período glacial. Durante estes eventos vários blocos de gelo se desprendem das geleiras e cruzam o Atlântico Norte. O derretimento dos "icebergs" causaram a adição de quantidades enormes de água doce ao Atlântico Norte. Estas adições de água gelada e doce provavelmente alteraram os padrões da circulação termohalina dirigida pela densidade no oceano, e freqüentemente coincidiram com indicações de flutuações climáticas. Os eventos Dansgaard-Oeschger, no Hemisfério Norte, tomam a forma de rápidos episódios de calor, tipicamente durante algumas décadas, cada um seguido de longos períodos de resfriamento gradual. O eventos Heinrich ocorrem apenas em períodos frios que precedem imediatamente os aquecimentos D-O.

[†]A salinidade pode ser uma medida da razão entre a massa de $NaCl$ e a massa de água uniformemente distribuídas em um volume de água no oceano.

fora de cada caixa são considerados um fluxo de água fria F_p para a célula polar, um fluxo de evaporação F_e da célula equatorial, e um fluxo de convecção q devido à diferença de flutuação da célula polar para a equatorial. (O fluxo reverso é então $q + F_p$ a fim de permitir a conservação dos tamanhos de ambas as células.) ([1], p.42-43)

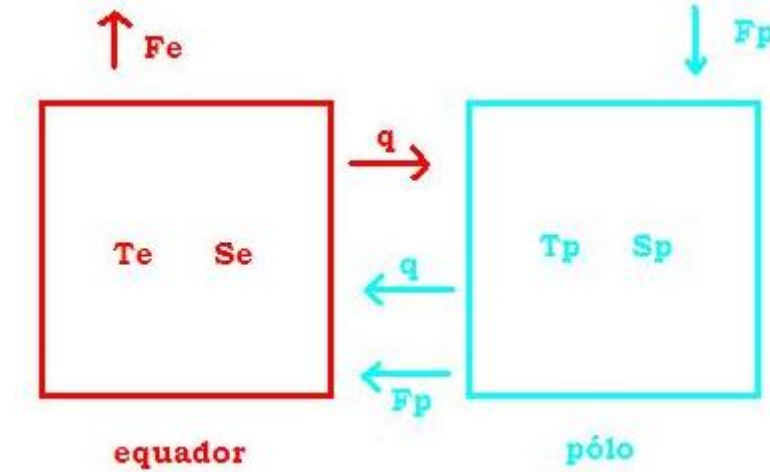


Figura 2.1: Visualização do Modelo

Equações apropriadas para descrever o fluxo convectivo são[‡]:

$$\frac{d}{dt}(\rho_e c V_e T_e) = A_e H_e + \rho_p c T_p (F_p + |q|) - \rho_e c T_e |q| \quad (2.1)$$

Equação da taxa de variação de temperatura da água na célula equatorial ao longo do tempo. Esta equação representa um balanço de energia (térmica) no compartimento equatorial.

1. $\rho_e c V_e T_e =$ (densidade da água equatorial).(capacidade térmica da água).(volume de água equatorial).(temperatura da água equatorial)

Esta expressão corresponde à energia interna do compartimento equatorial.

[‡]A interpretação das equações foi feita pela orientanda e pelo seu orientador com o intuito de entender o que cada uma descrevia em termos do fenômeno físico.

2. $A_e H_e =$ (área da superfície oceânica equatorial).(fluxo de calor das águas da superfície para as águas profundas)

Como o calor captado na superfície e distribuído para toda a célula equatorial. A captação de calor é diretamente proporcional à área de superfície. Ou seja, esta expressão representa a transferência de energia da superfície para as águas profundas.

3. $+\rho_p c T_p (F_p + |q|) =$ (densidade da água polar).(constante).(temperatura da água polar).(fluxo reverso = fluxo de água fria + fluxo de convecção)

Diminuição da temperatura da água na célula equatorial devido à migração de água fria da célula polar para a equatorial. Esta expressão representa a transferência de energia do compartimento polar para o equatorial.

4. $-\rho_e c T_e |q| =$ (densidade da água equatorial).(constante).(temperatura da água equatorial).(fluxo de convecção)

Diminuição da temperatura da água na célula equatorial devido à migração de água da célula equatorial para a polar. Esta expressão representa a transferência de energia da célula equatorial para a polar.

$$\frac{d}{dt}(\rho_p c V_p T_p) = A_p H_p - \rho_p c T_p (F_p + |q|) + \rho_e c T_e |q| \quad (2.2)$$

Equação da taxa de variação da temperatura da água na célula polar ao longo do tempo. Esta equação representa um balanço de energia (térmica) na célula polar.

1. $\rho_p c V_p T_p =$ (densidade da água polar).(capacidade térmica da água).(volume de água polar).(temperatura da água polar)

Esta expressão corresponde à energia interna do compartimento polar.

2. $A_p H_p =$ (área da superfície oceânica polar).(fluxo de calor das águas da superfície para as águas profundas)

Como o calor captado na superfície é distribuído para toda a água da célula polar. A captação de calor é diretamente proporcional à área da superfície. Esta expressão representa a transferência de energia da superfície para as águas profundas da célula polar.

3. $-\rho_p c T_p (F_p + |q|)$ = (densidade da água polar).(constante).(temperatura da água polar).(fluxo reverso)

Aumento da temperatura da água na célula polar devido à migração de água da célula polar para a equatorial. Esta expressão representa a transferência de energia da célula polar para a equatorial.

4. $+\rho_e c T_e |q|$ = (densidade da água equatorial).(constante).(temperatura da água equatorial).(fluxo de convecção)

Aumento da temperatura da água na célula polar devido à migração de água da célula equatorial para a polar. Esta expressão representa a transferência de energia da célula equatorial para a polar.

$$\frac{d}{dt}(\rho_e V_e S_e) = -\rho_e |q| S_e + \rho_p S_p (F_p + |q|) \quad (2.3)$$

Equação da taxa de variação da salinidade da água equatorial ao longo do tempo:

1. $-\rho_e |q| S_e$ = (densidade da água equatorial).(fluxo de convecção).(salinidade da água equatorial)

Diminuição da quantidade de sal na água da célula equatorial devido à migração de água da célula equatorial para a polar.

2. $+\rho_p S_p (F_p + |q|)$ = (densidade da água polar).(salinidade da água polar).(fluxo reverso)

Aumento da quantidade de sal na água da célula equatorial devido à migração de água da célula polar para a equatorial.

$$\frac{d}{dt}(\rho_p V_p S_p) = \rho_e |q| S_e - \rho_p S_p (F_p + |q|) \quad (2.4)$$

Equação da taxa de variação da salinidade da água polar ao longo do tempo:

1. $\rho_e |q| S_e =$ (densidade da água equatorial).(fluxo de convecção).(salinidade da água equatorial)

Aumento da quantidade de sal na água da célula polar devido à migração de água da célula equatorial para a polar.

2. $-\rho_p S_p (F_p + |q|) =$ (densidade da água polar).(salinidade da água polar).(fluxo reverso)

Diminuição da quantidade de sal na água da célula polar devido à migração de água da célula polar para a equatorial.

Obs: Dependendo dos valores de S_e e S_p temos que a equação (2.3) assume valor negativo ou positivo e a equação (2.4) assume valor positivo ou negativo, respectivamente. Ou seja, enquanto a quantidade de sal diminui na célula equatorial, aumenta na polar, e vice-versa. Caso os valores sejam iguais, as equações assumem valor zero, ou seja, não existe flutuação da salinidade.

Outras equações que descrevem o modelo são:

$$\frac{d}{dt}[\rho_e V_e (1 - S_e)] = \rho_p^0 F_p - \rho_e F_e \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt}[\rho_p V_p (1 - S_p)] = 0 \quad (2.6)$$

Estas equações correspondem ao balanço de massa de água (isenta de sal) nos compartimentos. Como queremos que os compartimentos tenham volumes constantes, é necessário supormos que $F_p = F_e$.

Em todas as equações acima temos que:

$$\begin{aligned}\rho_e &= \rho_0[1 - \alpha(T_e - T_0) + \beta(S_e - S_0)] \\ \rho_p &= \rho_0[1 - \alpha(T_p - T_0) + \beta(S_p - S_0)] \\ q &= k(\rho_e - \rho_p)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Os termos nestas equações se explicam por si mesmos. α e β são coeficientes das expansões termal e salina, ρ_p^0 é a densidade da água fria, A_e e A_p são as áreas das superfícies oceânicas equatorial e polar, e por simplicidade tomamos $A_e = A_p = A$. Os termos de calor H representam o fluxo de calor das águas da superfície para as águas profundas do oceano. A temperatura das águas da superfície é determinada através de um balanço radioativo, que determina as temperaturas das águas equatoriais e polares da superfície, digamos T_e^0 e T_p^0 . Nós então supomos que a transferência de calor para as águas profundas do oceano pode ser parametrizada por um coeficiente de transferência de calor adequado h_t , e então colocamos: ([1], p.43)

$$H_e = h_t(T_e^0 - T_e), \quad H_p = h_t(T_p^0 - T_p)$$

Se adicionamos as duas equações de energia, temos que:

$$\frac{d}{dt}(\rho_e c V_e T_e + \rho_p c V_p T_p) = h_t A (T_e^0 + T_p^0 - T_e - T_p)\tag{2.8}$$

Usamos os fatos de que $\rho_{e,p} \approx \rho_0$ e supomos que V_e e V_p são ambos aproximadamente constantes, são também aproximadamente iguais, $V_{e,p} \approx V_0$. Segue então da equação (2.8) que, depois de um transiente inicial,

$$T_e + T_p \approx T_e^0 + T_p^0\tag{2.9}$$

e supomos que este é o caso geralmente. Nós definimo T_0 por:

$$\rho_e V_e T_e + \rho_p V_p T_p = 2\rho_0 V_0 T_0 \quad (2.10)$$

onde

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_e^0 + T_p^0), \quad (2.11)$$

e então definimos o excesso de temperatura T por:

$$T_e = T_0 + T, \quad T_p = T_0 - T. \quad (2.12)$$

Se agora supormos que $\rho_e \approx \rho_0$, $V_e \approx V_0$ na equação (2.1), então temos a equação de aproximação para T :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\rho_e c V_e T_e) &= A_e H_e + \rho_p c T_p (F_p + |q|) - \rho_e c T_e |q| \Rightarrow \\
\frac{d}{dt}(\rho_0 c V_0 (T_0 + T)) &= h_t (T_e^0 - T_e) A + \rho_0 c (T_0 - T) (F_p + |q|) - \rho_0 c (T_0 + T) |q| \Rightarrow \\
\rho_0 c V_0 \dot{T} &= h_t [T_e^0 - (T_0 + T)] A + \rho_0 c F_p (T_0 - T) + \rho_0 c |q| (T_0 - T) - \rho_0 c (T_0 + T) |q| \Rightarrow \\
\rho_0 c V_0 \dot{T} &= h_t [T_e^0 - (T_0 + T)] A + \rho_0 c F_p (T_0 - T) + \rho_0 c |q| [T_0 - T - (T_0 + T)] \Rightarrow \\
\rho_0 c V_0 \dot{T} &= h_t T_e^0 A - h_t (T_0 + T) A + \rho_0 c F_p (T_0 - T) - 2\rho_0 c |q| T \Rightarrow \\
\rho_0 c V_0 \dot{T} &= h_t T_e^0 A - h_t A T_0 - h_t A T + \rho_0 c F_p (T_0 - T) - 2\rho_0 c |q| T \Rightarrow \\
\rho_0 c V_0 \dot{T} &= h_t T_e^0 A - h_t A T_0 + \rho_0 c F_p (T_0 - T) - (h_t A + 2\rho_0 c |q|) T \Rightarrow \\
\rho_0 c V_0 \dot{T} &= h_t T_e^0 A - \frac{1}{2} h_t A (T_e^0 + T_p^0) + \rho_0 c F_p \left[\frac{1}{2} (T_e^0 + T_p^0) - T \right] - (h_t A + 2\rho_0 c |q|) T \Rightarrow \\
\rho_0 c V_0 \dot{T} &= h_t T_e^0 A - \frac{1}{2} h_t A T_e^0 - \frac{1}{2} h_t A T_p^0 + \frac{1}{2} \rho_0 c F_p (T_e^0 + T_p^0) - \rho_0 c F_p T - (h_t A + 2\rho_0 c |q|) T \Rightarrow \\
\rho_0 c V_0 \dot{T} &= \frac{1}{2} [h_t A (T_e^0 - T_p^0) + \rho_0 c F_p (T_e^0 + T_p^0)] - (h_t A + 2\rho_0 c |q|) T - \rho_0 c F_p T
\end{aligned} \tag{2.13}$$

De modo análogo (definimos), temos que:

$$\rho_e V_e S_e + \rho_p V_p S_p = 2\rho_0 V_0 S_0, \tag{2.14}$$

onde S_0 é constante, e nós definimos

$$S_e = S_0 + S, \quad S_p = S_0 - S. \tag{2.15}$$

Com o mesmo tipo de suposição, que $\rho_e \approx \rho_0$ e $V_e \approx V_0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\rho_e V_e S_e) &= -\rho_e |q| S_e + \rho_p S_p (F_p + |q|) \Rightarrow \\
\frac{d}{dt}[\rho_0 V_0 (S_0 + S)] &= -\rho_0 |q| (S_0 + S) + \rho_0 (S_0 - S) (F_p + |q|) \Rightarrow \\
\rho_0 V_0 \dot{S} &= -\rho_0 |q| S_0 - \rho_0 |q| S + \rho_0 (S_0 - S) F_p + \rho_0 (S_0 - S) |q| \Rightarrow
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$V_0 \dot{S} = -|q| S_0 - |q| S + F_p S_0 - F_p S + S_0 |q| - S |q| \Rightarrow$$

$$V_0 \dot{S} = F_p S_0 - (F_p + 2|q|) S$$

As equações deduzidas em (2.13) e (2.16) são essencialmente o modelo da caixa de Stommel. Note que com as definições das variáveis, temos que

$$\begin{aligned}
q &= k(\rho_e - \rho_p) \Rightarrow \\
q &= k \{ \rho_0 [1 - \alpha(T_e - T_0) + \beta(S_e - S_0)] - \rho_0 [1 - \alpha(T_p - T_0) + \beta(S_p - S_0)] \} \Rightarrow \\
q &= k \{ \rho_0 - \rho_0 \alpha T_e + \rho_0 \alpha T_0 + \rho_0 \beta S_e - \rho_0 \beta S_0 - \rho_0 + \rho_0 \alpha T_p - \rho_0 \alpha T_0 - \rho_0 \beta S_p + \rho_0 \beta S_0 \} \Rightarrow \\
q &= k \{ -\rho_0 \alpha T_e + \rho_0 \beta S_e + \rho_0 \alpha T_p - \rho_0 \beta S_p \} \Rightarrow \\
q &= k \{ \rho_0 \alpha (-T_e + T_p) + \rho_0 \beta (S_e - S_p) \} \Rightarrow \\
q &= k \{ -2T \rho_0 \alpha + 2S \rho_0 \beta \} \Rightarrow \\
q &= 2k \rho_0 (-\alpha T + \beta S)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Para parametrizar o coeficiente de transferência de calor h_t , usamos as idéias de Reynolds calculando a média para o fluxo turbulento. Isto sugere escolher

Parâmetro	Valor
ρ_0	$10^3 kgm^{-3}$
c	$4.2 \times 10^3 Jkg^{-1}K^{-1}$
V_0	$1.6 \times 10^{17} m^3$
A	$0.4 \times 10^{14} m^2$
ε_t	0.01
T_e^0	300K
T_p^0	270K
T_0	285K
F_p	$10^5 m^3 s^{-1}$
q_0	$1.6 \times 10^7 m^3 s^{-1}$
α	$1.8 \times 10^{-4} K^{-1}$
β	0.8
S_0	0.035

Tabela 2.1: Valores típicos dos parâmetros (fonte: [1], p.45)

$$h_t = \frac{\varepsilon_t \rho_0 c q_0}{A}, \quad (2.18)$$

onde o número ε_t é tipicamente escolhido entre 0.001 - 0.01, e q_0 é uma escala para q .

Abstraímos a dimensão no modelo de caixas escrevendo:

$$T = \Delta T \theta, \quad S = \Delta S s, \quad t \approx t_0, \quad q \approx q_0, \quad (2.19)$$

onde escolhemos

$$\Delta T = \frac{1}{4} \left[\varepsilon_t (T_e^0 - T_p^0) + \frac{F_p}{q_0} (T_e^0 + T_p^0) \right], \quad \Delta S = \frac{F_p S_0}{2q_0}, \quad t_0 = \frac{V_0}{2q_0} \quad (2.20)$$

Usando os valores na Tabela 2.1, encontramos $\Delta T \approx 1K$, $\Delta S \approx 1.1 \times 10^{-4}$, $t_0 \approx 150y$. Usamos um valor de q como observado, ao invés de k , que iríamos escolher de qualquer modo para que q tivesse o tamanho certo, aproximadamente $16 Sv$ (Sverdrups: $1 Sv = 10^6 m^3 s^{-1}$). ([1], p.45)

A variação da temperatura da superfície observada é da ordem de 30 K, e a variação de salinidade observada é da ordem de 30×10^{-4} . Entretanto, estes valores representam o efeito da concentração da evaporação e do calor da superfície; nas profundezas (como é mais relevante) as variações são muito menores, da ordem de 2 K para a temperatura e 4×10^{-4} para a salinidade à 1000 m de profundidade. A escala do tempo é comparável às escalas de tempo sobre as quais os eventos Dansgaard-Oeschger ocorrem. Estes aspectos sugerem que este modelo simples descreve o movimento da Circulação Terohalina do Atlântico Norte com alguma precisão.([1], p.45)

Podemos escrever o modelo na forma adimensional como

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 - (\mu + |q|)\theta, \\ \dot{s} &= 1 - (\varepsilon + |q|)s, \\ q &= \kappa(-\theta + Rs), \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde os parâmetros são dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{F_p}{2q_0}, & \mu &= \frac{2\Delta T}{T_e^0 - T_p^0}, \\ R &= \frac{\alpha\Delta T}{\beta\Delta S}, & \kappa &= \frac{2k\rho_0\alpha\Delta T}{q_0}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Valores típicos destes parâmetros são, da Tabela 2.1,

$$\varepsilon \approx 0.003, \quad \mu \approx 0.07, \quad R \approx 2, \quad (2.23)$$

e podemos assumir sem perda de generalidade que $\kappa = 1$, que fixa o valor de q_0 (dado κ). Ambos ε e μ são pequenos, e tiraremos vantagem disto abaixo.

O modelo de caixas de Stommel não é um oscilador do jeito que está, mas ele evidencia a possibilidade de multiplicar os estados convectivos do Atlântico Norte, e este aspecto foi considerado robusto em outros modelos. O que parece distinguir modelos mais realísticos do modelo de caixas de Stommel é que eles permitem que a formação das águas fundas do Atlântico Norte ocorram em diferentes latitudes. Assim ao invés de simplesmente balançar de um fluxo norte para um sul, ajustes podem ocorrer entre fluxos nortes fortes com formação de águas profundas no mar da Noruega, e fluxos fracos com formação de águas fundas mais ao sul. Parece que esses balanços são instrumentos em causar as rápidas mudanças durante as eras glaciais. ([1], p.46)

Utilizando o Software Modellus, podemos visualizar a evolução das soluções do sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 - (\mu + |\theta - Rs|)\theta, \\ \dot{s} = 1 - |\theta - Rs|s, \end{cases} \quad (2.24)$$

ao longo do tempo, onde tomamos $\mu = 0.07$, $R = 2$, $\kappa = 1$ e negligenciamos ε correspondendo ao caso relevante do ponto de vista da Física.

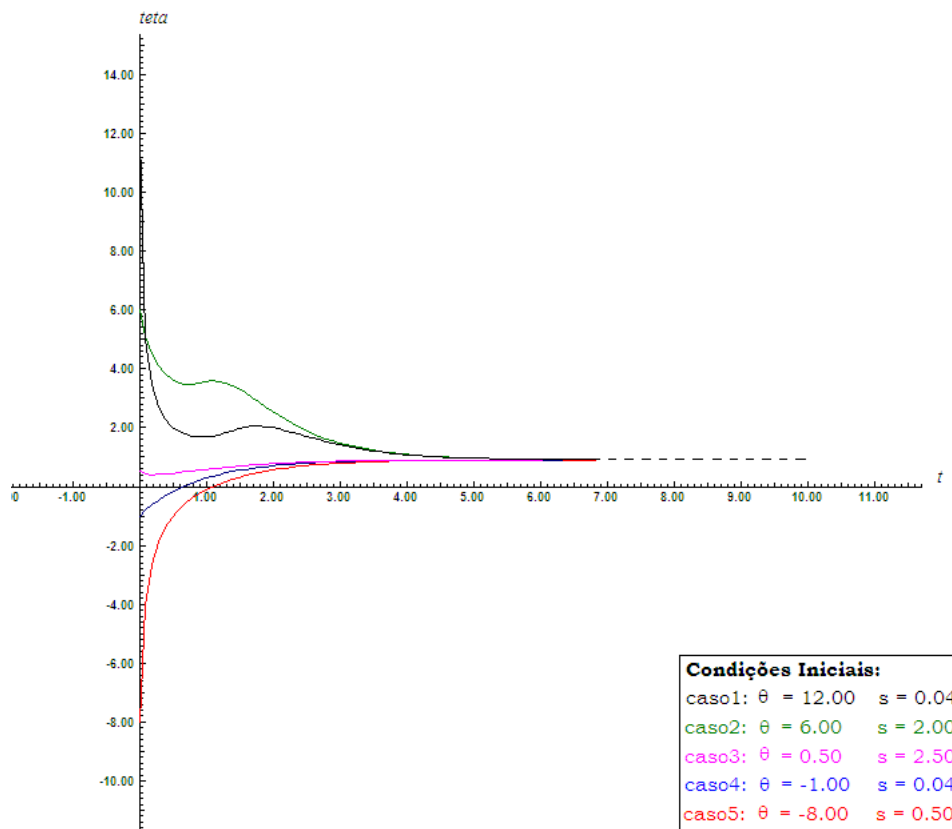


Figura 2.2: Temperatura ao longo do tempo

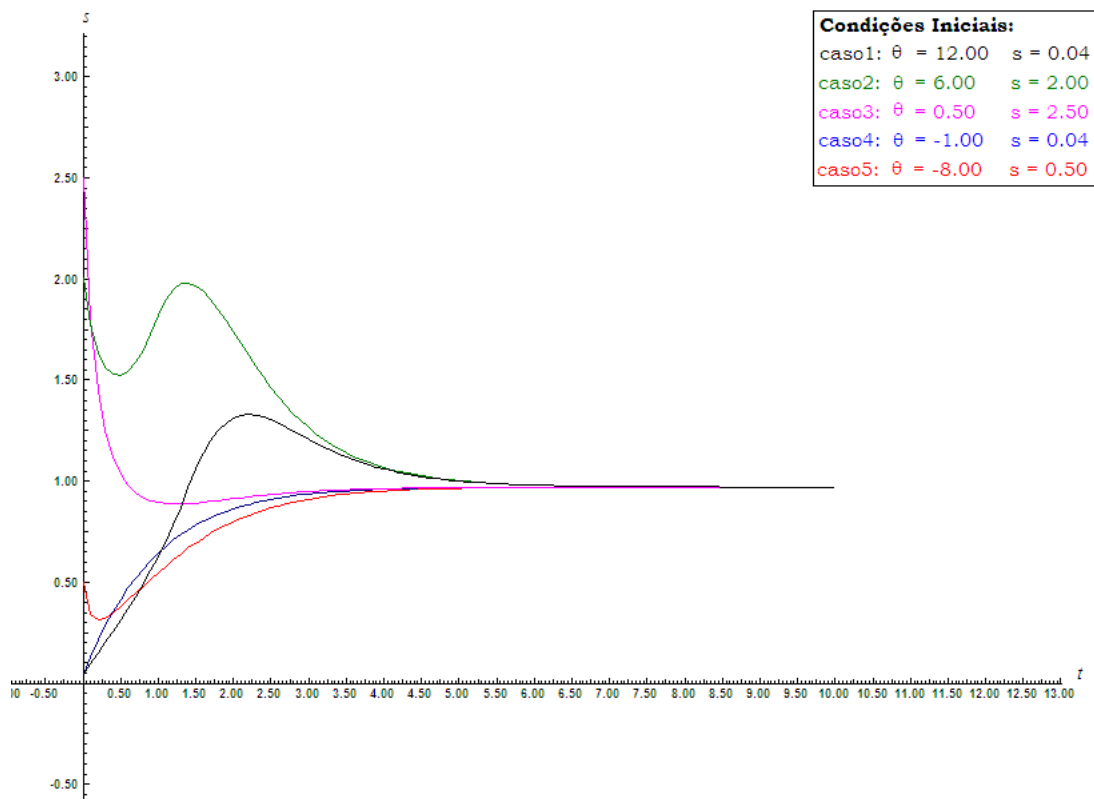


Figura 2.3: Salinidade ao longo do tempo

Também podemos visualizar, com o auxílio do Modellus, como a salinidade evolui em função da temperatura:

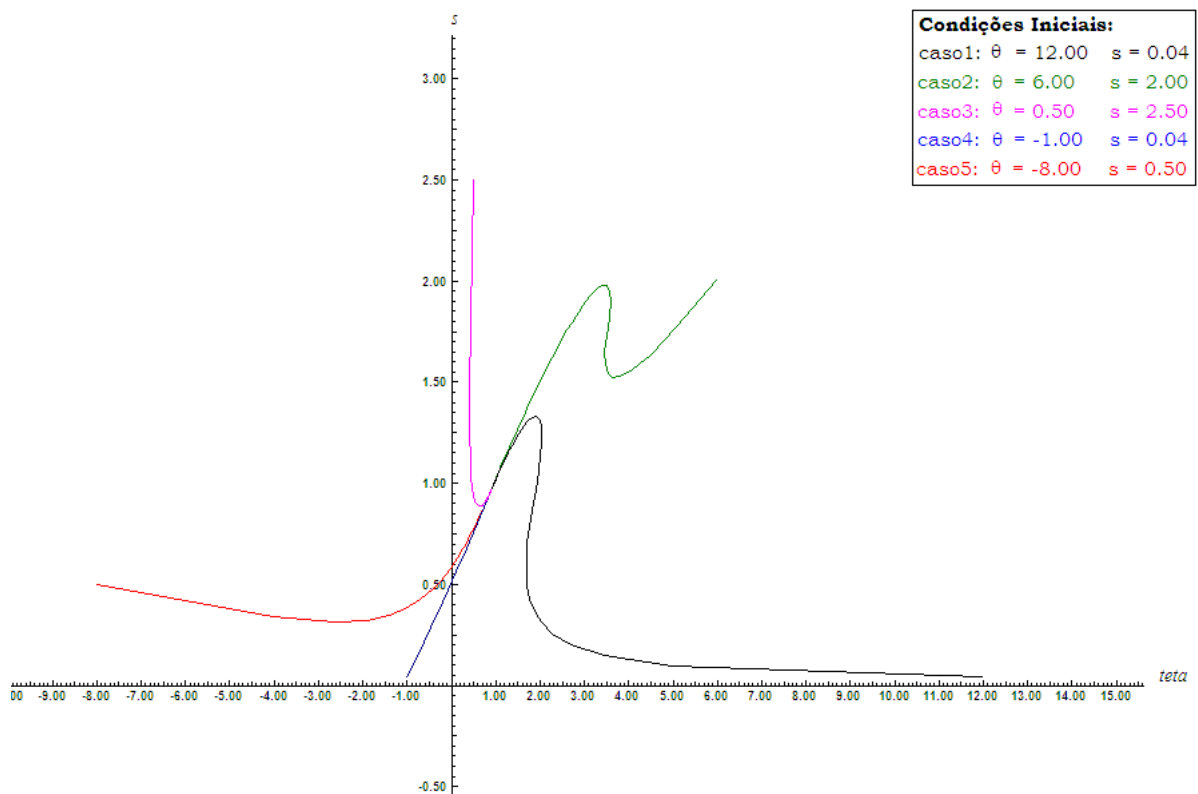


Figura 2.4: Salinidade versus Temperatura

2.2 Análise do Campo Vetorial da Equação

Como dito anteriormente, nosso objetivo é descrever o comportamento das soluções do sistema descrito pela equação (2.24). Como um primeiro passo nesta direção, vamos analisar o seu campo vetorial com mais cuidado. Estamos interessados no caso relevante para a Física, ou seja, considerando $R = 2$ e $\mu = 0.07$.

Considere um retângulo da forma $[0, a] \times [0, b]$. Vamos mostrar que o campo vetorial da equação em questão aponta para dentro do retângulo, quando restrito ao bordo. Vamos supor que $a = 50$ e $b = 50$ e consideramos $\theta, s \geq 0$.

1º caso: $s = 0$

Neste caso, obtemos a seguinte expressão para o campo vetorial:

$$X(\theta, s) = X(\theta, 0) = (1 - (0.07 + |\theta|)\theta, 1) \quad (2.25)$$

Testando valores:

$$\begin{aligned} X(0, 0) &= (1, 1) \\ X(\theta_0, 0) &= (0, 1), \text{ quando } \theta_0 = \frac{-0.07 + \sqrt{4.0049}}{2} \\ X(1, 0) &= (1 - (0.07 + 1) \cdot 1, 1) = (1 - 1.07, 1) = (-0.07, 1) \\ X(50, 0) &= (1 - (0.07 + 50) \cdot 50, 1) = (1 - 2503.5, 1) = (-2502.5, 1) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ou seja, para $0 \leq \theta \leq 50$, os vetores do campo têm a coordenada vertical igual a 1 e a coordenada horizontal variando de modo que todos eles apontam para dentro do retângulo $[0, a] \times [0, b]$. Na figura abaixo, o vetor verde corresponde ao vetor dado quando $\theta = \theta_0$.

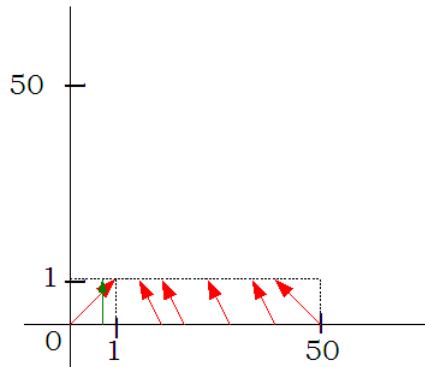


Figura 2.5: Campo Vetorial ao longo da reta $s = 0$

2º caso: $\theta = 0$

Neste caso, temos a seguinte expressão para o campo:

$$X(\theta, s) = X(0, s) = (1, 1 - |Rs| \cdot s) = (1, 1 - 2s^2) \quad (2.27)$$

Testando valores:

$$\begin{aligned} X(0, 0) &= (1, 1) \\ X(0, s_0) &= (1, 0), \text{ quando } s_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ X(0, 1) &= (1, 1 - 2 \cdot 1) = (1, -1) \\ X(0, 50) &= (1, 1 - 2 \cdot 50^2) = (1, 1 - 5000) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ou seja, para $0 \leq s \leq 50$, os vetores do campo têm coordenada horizontal igual a 1 e a coordenada vertical varia de modo que todos os vetores apontam para dentro do retângulo. O vetor verde claro corresponde ao vetor dado quando $s = s_0$.

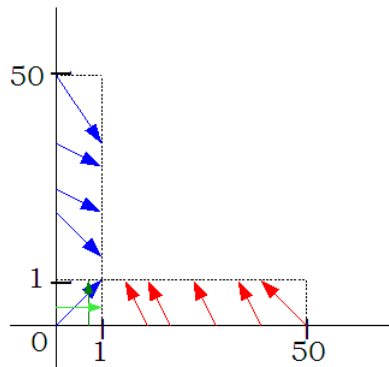


Figura 2.6: Campo Vetorial ao longo da reta $\theta = 0$

3º caso: $s = 50$

Neste caso, o campo é expresso por:

$$X(\theta, s) = X(\theta, 50) = (1 - (0.07 + |\theta - 100|) \theta, 1 - |\theta - 100| 50) \quad (2.29)$$

Testando valores:

$$\begin{aligned} X(0, 50) &= (1, 1 - 5000) \\ X(1, 50) &= (1 - 99.07, 1 - 4950) = (-98.07, -4949) \\ X(50, 50) &= (1 - (0.07 + 50) 50, 1 - 50 \times 50) = (-2502.5, -2499) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ou seja, para $0 \leq \theta \leq 50$, os vetores do campo têm coordenada vertical sempre negativa e coordenada horizontal variando de positiva para negativa, de modo que eles sempre apontam para dentro do retângulo. Observe que o vetor do campo no ponto $(0, 50)$ coincide em ambos os casos 2 e 3.

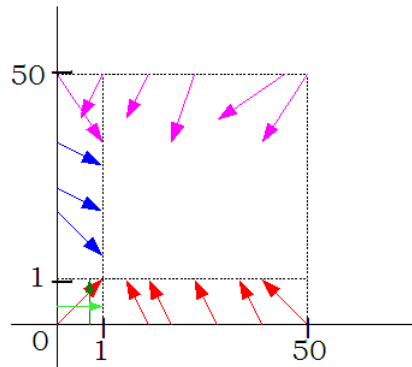


Figura 2.7: Campo Vetorial ao longo da reta $s = 50$

4º caso: $\theta = 50$

Neste caso, a expressão do campo é dada por:

$$X(\theta, s) = X(50, s) = (1 - (0.07 + |50 - 2s|) 50, 1 - |50 - 2s| s) \quad (2.31)$$

Testando valores:

$$\begin{aligned} X(50, 0) &= (1 - (0.07 + 50)50, 1) = (-2502.5, 1) \\ X(50, 1) &= (1 - (0.07 + 48)50, 1 - 48) = (-2402.5, -47) \\ X(50, 50) &= (1 - (0.07 + 50)50, 1 - 50 \times 50) = (-2502.5, -2499) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ou seja, para $0 \leq s \leq 50$, os vetores do campo têm coordenada horizontal sempre negativa e coordenada vertical variando de positiva para negativa, de modo que todos os vetores apontam para dentro do retângulo. Observe que o vetor no ponto $(50, 50)$ coincide em ambos os casos 3 e 4, e o vetor no ponto $(50, 0)$ coincide em ambos os casos 1 e 4.

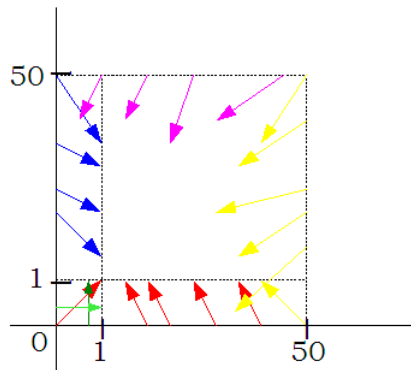


Figura 2.8: Campo Vetorial ao longo da reta $\theta = 50$

Logo, temos um conjunto compacto dado pelo retângulo $[0, a] \times [0, b]$, com $a = 50$ e $b = 50$, tal que o campo aponta para dentro desta região ao longo de cada uma das retas que define os lados do retângulo. Portanto, se a condição inicial pertence à região retangular, sua trajetória permanecerá dentro desta região (o mesmo acontecendo caso a condição inicial não pertença à região, mas sua trajetória entre nela). Assim, pelo Corolário 1.1.6, temos que as soluções do sistema estão definidas para todo tempo $t \geq 0$.

2.3 Linearização

Neste parágrafo, nosso objetivo é calcular a derivada do campo próximo a uma singularidade, para obtermos uma indicação de como se comportam as soluções do sistema próximo a ela.

Primeiramente, vamos observar que o campo não é diferenciável quando $|\theta - 2s| = 0$, isto é, quando $s = \frac{\theta}{2}$. Além disso, ao longo desta reta o campo não apresenta singularidades, visto que ele é da forma

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 - 0.07\theta \\ \dot{s} = 1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Assim, temos que, ao longo desta reta a coordenada vertical do campo é sempre igual a 1, e portanto não muda de sinal. Já a coordenada horizontal muda de sinal, sendo positiva se $0 \leq \theta < \frac{100}{7}$, e negativa se $\frac{100}{7} < \theta \leq 50$.

Queremos saber se o campo aponta para dentro da região Ω de vértices $(0, 0)$, $(0, 50)$, $(50, 50)$, $(50, 25)$, formado pela intersecção da reta $s = \frac{\theta}{2}$ com o retângulo $[0, 50] \times [0, 50]$, de modo a obtermos uma nova região invariante pelo campo com superfície menor do que a anterior.

Na figura abaixo, as linhas vermelhas delimitam o retângulo $[0, 50] \times [0, 50]$ já descrito anteriormente, onde o campo aponta sempre para dentro, e as linhas verdes

delimitam a região Ω mencionada acima.

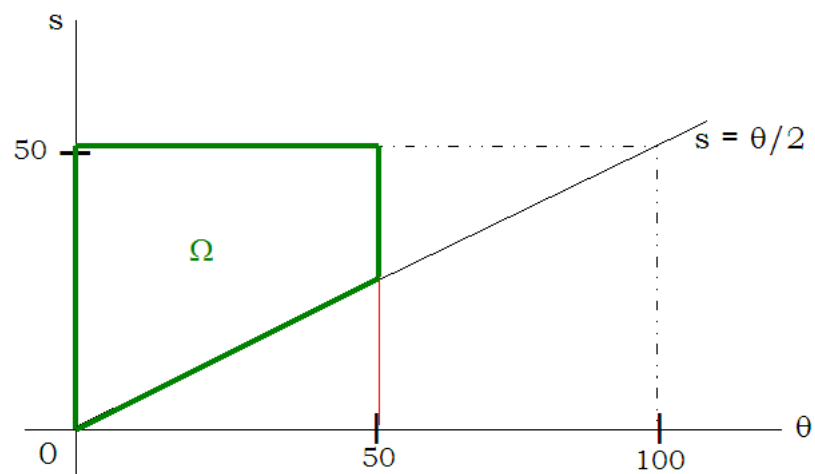


Figura 2.9: Região Ω

Para $\theta \in (\frac{100}{7}, 50]$, é claro que o campo aponta para dentro da região Ω , pois $\dot{s} = 1$ e $\dot{\theta} < 0$. Para $\theta \in [0, \frac{100}{7}]$, precisamos identificar qual a inclinação do vetor resultante da soma das componentes horizontal e vertical do campo.

Para cada θ :

$$\begin{aligned} |\theta_v| &= 1 \\ |\theta_h| &= 1 - 0.07\theta \end{aligned} \tag{2.34}$$

Questão: $\tan \alpha = \frac{1}{1-0.07\theta} > \frac{1}{2}$?

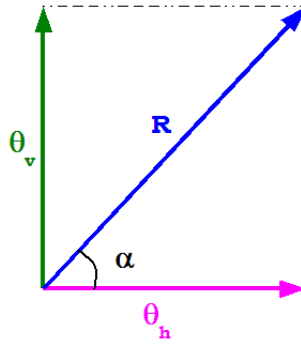


Figura 2.10: Quanto é a inclinação do vetor resultante da soma das componentes horizontal e vertical do campo?

$$\frac{1}{1 - 0.07\theta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = 1 - 0.07\theta \Leftrightarrow 0.07\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \frac{-1}{0.07} = \frac{-100}{7} \quad (2.35)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} 0.07\theta + 1 > 0 &\Leftrightarrow -0.07\theta - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - 0.07\theta - 1 - 1 < 0 \Leftrightarrow \\ 1 - 0.07\theta - 2 < 0 &\Leftrightarrow 1 - 0.07\theta < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - 0.07\theta} > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Logo,

$$\frac{1}{1 - 0.07\theta} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0.07\theta + 1 > 0 \Leftrightarrow \theta > \frac{-100}{7}. \quad (2.37)$$

Assim, para $\theta > \frac{-100}{7}$, a inclinação da resultante da soma das componentes horizontal e vertical do campo é maior do que $\frac{1}{2}$. Portanto, para $\theta \in [0, 50]$, o campo aponta para dentro da região Ω .

Deste modo, obtemos uma região invariante pelo campo e onde o campo é diferenciável. Então, tomando $s > \frac{\theta}{2}$, com $0 \leq \theta \leq 50$ e $(0 \leq s \leq 50)$, temos que:

$$s > \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2s > \theta \Rightarrow \theta - 2s < 0 \Rightarrow |\theta - 2s| = -\theta + 2s \quad (2.38)$$

e, portanto, o campo fica:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 - (0.07 - \theta + 2s)\theta \\ \dot{s} = 1 - (-\theta + 2s)s \end{cases} \quad (2.39)$$

Vamos, agora, calcular as singularidades do campo:

$$\begin{aligned} 1 - (0.07 - \theta + 2s)\theta &= 0 & (I) \\ 1 - (-\theta + 2s)s &= 0 & (II) \end{aligned} \quad (2.40)$$

A equação (II) implica que:

$$(-\theta + 2s)s = 1 \stackrel{s \geq 0}{\Rightarrow} -\theta + 2s = \frac{1}{s} \Rightarrow \theta = 2s - \frac{1}{s} \quad (2.41)$$

Substituindo na equação (I), obtemos:

$$\begin{aligned} 1 - \left(0.07 - 2s + \frac{1}{s} + 2s\right) \times \left(2s - \frac{1}{s}\right) &= 0 \stackrel{s \geq 0}{\Leftrightarrow} \\ 1 - 0.14s + \frac{0.07}{s} - 2 + \frac{1}{s^2} &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$s^2 - 0.14s^3 + 0.07s - 2s^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$0.14s^3 + s^2 - 0.07s - 1 = 0$$

Utilizando o software Maple, podemos encontrar as soluções desta equação. São elas: $s_1 \simeq -7.070699478$, $s_2 \simeq -1.041815801$, $s_0 \simeq 0.9696581353$. A terceira solução é a única que se encontra dentro da região triangular com a qual estamos trabalhando. Assim, tomando $s = s_0$, temos que

$$\theta_0 = 2s_0 - \frac{1}{s_0} \simeq 0.9080249695 \quad (2.43)$$

De posse da singularidade existente na região triangular, vamos linearizar o campo. Neste caso:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 - (0.07 - \theta + 2s)\theta \\ \dot{s} = 1 - (-\theta + 2s)s \end{cases} \Rightarrow \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 - 0.07\theta + \theta^2 - 2\theta s = F_\theta \\ \dot{s} = 1 + \theta s - 2s^2 = F_s \end{cases}$$

A diferencial do campo é dada pela seguinte matriz:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial F_\theta}{\partial s} \\ \frac{\partial F_s}{\partial \theta} & \frac{\partial F_s}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.07 + 2\theta - 2s & -2\theta \\ s & \theta - 4s \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Nosso objetivo é encontrar os auto-valores desta matriz aplicada na singularidade (θ_0, s_0) pois, através de sua análise, poderemos ter uma indicação do comportamento das soluções.

$$\det(DF(\theta_0, s_0) - \lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -0.07 + 2\theta_0 - 2s_0 - \lambda & -2\theta_0 \\ s_0 & \theta_0 - 4s_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(-0.07 + 2\theta_0 - 2s_0 - \lambda)(\theta_0 - 4s_0 - \lambda) + 2\theta_0 s_0 = 0 \Rightarrow$$

$$-0.07\theta_0 + 0.28s_0 + 0.07\lambda + 2\theta_0^2 - 8\theta_0 s_0 - 2\theta_0 \lambda - 2\theta_0 s_0 + 8s_0^2 + 2s_0 \lambda - \theta_0 \lambda + 4s_0 \lambda + \lambda^2 +$$

$$+ 2\theta_0 s_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + (0.07 - 2\theta_0 + 2s_0 - \theta_0 + 4s_0)\lambda - 0.07\theta_0 + 0.28s_0 + 2\theta_0^2 - 8\theta_0 s_0 + 8s_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + (0.07 - 3\theta_0 + 6s_0)\lambda - 0.07\theta_0 + 0.28s_0 + 2\theta_0^2 - 8\theta_0 s_0 + 8s_0^2 = 0 \quad (2.46)$$

Calculando as soluções da equação quadrada, obtemos

$$\lambda = \frac{-0.07 + 3\theta_0 - 6s_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (0.07 - 3\theta_0 + 6s_0)^2 - 4(-0.07\theta_0 + 0.28s_0 + 2\theta_0^2 - 8\theta_0s_0 + 8s_0^2) \Rightarrow \\ \Delta &= 0.0049 - 0.14\theta_0 - 0.28s_0 + \theta_0^2 - 4\theta_0s_0 + 4s_0^2 \Rightarrow \\ \Delta &\approx 0.669833974 \end{aligned} \quad (2.47)$$

e, portanto, temos que:

$$\lambda_1 \approx -1.172720024 < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \approx -1.991153879 < 0.$$

Portanto, a linearização do campo nos indica que a singularidade $p = (\theta_0, s_0)$ é um "poço", pois todos os autovalores da matriz $DF(\theta_0, s_0)$ têm parte real estritamente negativa. O Teorema 1.2.7 (Teorema de Liapunov - Perron) afirma que $p = (\theta_0, s_0)$ é uma singularidade assintoticamente estável para o campo. Portanto, pela Definição 1.2.2, existe uma vizinhança U de p tal que qualquer trajetória com condição inicial pertencente a esta vizinhança converge para p .

2.4 Existência de Órbitas Periódicas

A intuição e a análise dos gráficos fornecidos pelo Modellus nos sugerem que não existem órbitas periódicas como solução do sistema.

Como p é um ponto assintoticamente estável, temos que todas as trajetórias com condição inicial na vizinhança U convergem para o ponto p . Assim, mostramos que não existe órbita periódica nesta vizinhança de p .

Vamos supor que a fronteira U intersecciona a fronteira da região Ω , como na figura abaixo:

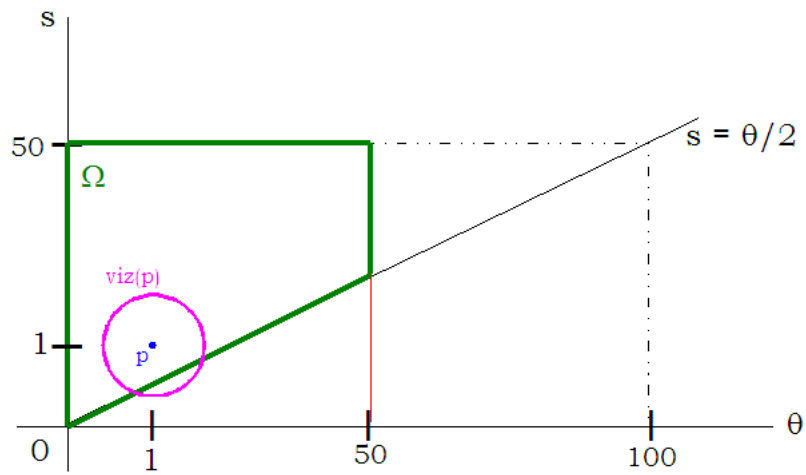


Figura 2.11: Vizinhança do ponto p

Neste caso, não é possível existir uma órbita periódica envolvendo a vizinhança U do ponto p . De fato, se existisse uma órbita desta forma, ela iria sair da região triangular; mas isto é impossível, pois o campo sempre aponta para o interior da região Ω .

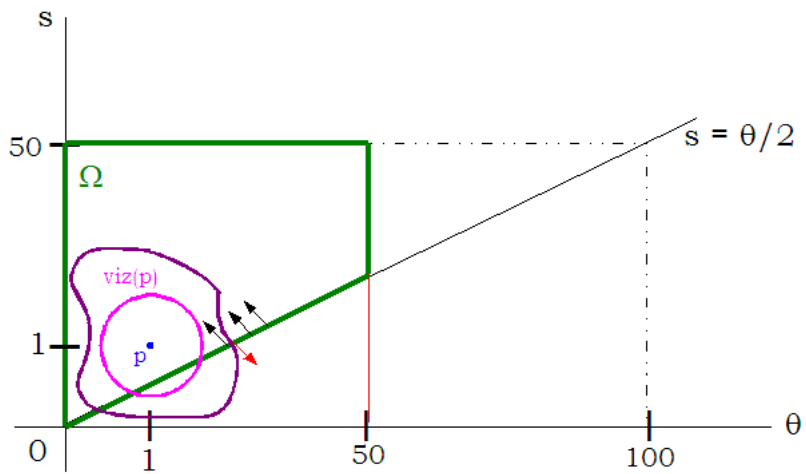


Figura 2.12: Órbita periódica envolvendo a $viz(p)$.

Caso a vizinhança U do ponto não interseccione a fronteira da região Ω , não podemos excluir a possibilidade de existência de uma órbita periódica envolvendo esta vizinhança.

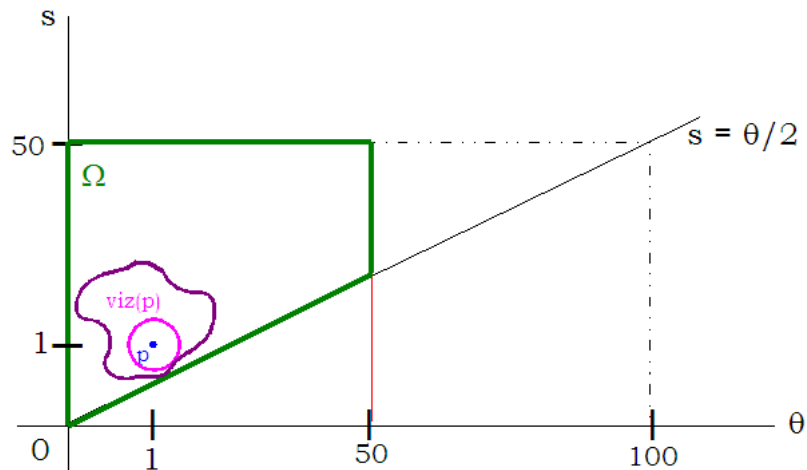


Figura 2.13: Vizinhança U não intersecciona a fronteira da região triangular: pode existir órbita periódica.

Agora, vamos supor por absurdo que existe órbita periódica na região Ω menos a vizinhança U de p , não envolvendo o ponto p . Então, pelo Teorema de Poincaré - Bendixson existiria uma singularidade em seu interior. Mas isto é absurdo, pois já sabemos que a única singularidade existente dentro da região Ω é $p = (\theta_0, s_0)$. Logo, não existe órbita periódica na região Ω menos a vizinhança U , independentemente de sua intersecção com a fronteira da região Ω .

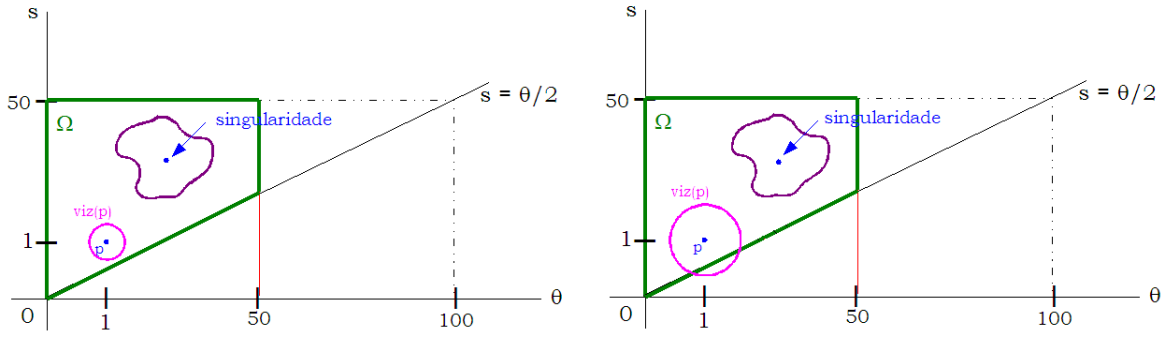


Figura 2.14: Órbita periódica na região triangular menos a vizinhança U .

Portanto, concluímos que pode ou não existir órbita periódica como solução do sistema, dependendo se a vizinhança U intersecciona ou não a fronteira da região Ω .

Porém, aplicando o Critério negativo de Bendixson, podemos chegar a uma conclusão definitiva a respeito da existência de soluções periódicas.

Calculando o divergente do campo,

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 - (0.07 - \theta + 2s)\theta = F_\theta \\ \dot{s} = 1 - (-\theta + 2s)s = F_s \end{cases} \quad (2.48)$$

temos que:

$$\operatorname{div}(F_\theta, F_s) = \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_s}{\partial s} = -0.07 + 2\theta - 2s + \theta - 4s < -0.07 + 4s - 2s + 2s - 4s = -0.07 < 0 \quad (2.49)$$

onde a primeira desigualdade decorre de que na região Ω temos $\theta < 2s$.

Assim, o divergente do campo é sempre negativo, donde concluímos, pelo Critério negativo de Bendixson (Teorema 1.3.9), que o sistema não possui solução periódica. Portanto, a singularidade (θ_0, s_0) é uma singularidade assintoticamente estável na região Ω .

Capítulo 3

Anexo: A circulação Termohalina

Ao contrário do que os antigos oceanógrafos pensavam, as profundezas dos oceanos não são estáticas. Pelo contrário, assim como as águas superficiais, também as águas profundas se movimentam. Porém, diferentemente do que ocorre na superfície, a força desencadeadora deste movimento não é o vento, mas a diferença de densidade entre as águas dos oceanos.

Dois fatores determinam a densidade das águas oceânicas: a temperatura e a salinidade. Quanto mais fria, mais densa, pois a água quente expande. E quanto mais salgada, mais densa, pois as moléculas de sal preenchem os espaços existentes entre as moléculas de água. Daí deriva o nome dado à corrente de água que se forma em decorrência deste movimento: **Circulação Termohalina ou Circulação Termosalina**.

A Circulação Termohalina é desencadeada principalmente pela formação de águas profundas em regiões específicas do Atlântico Norte e do Oceano Antártico. Nestas regiões polares, as águas da superfície oceânica são intensivamente resfriadas pelo vento. O movimento do vento sobre a água também produz evaporação que, por sua vez, também causa a diminuição da temperatura. Além disso, a evaporação remove apenas moléculas de água pura, levando a um aumento na salinidade da

água restante, e portanto um aumento na densidade desta água.

A formação de gelo oceânico também contribui para o aumento da salinidade da água. Como a água pura congela primeiramente, uma salmoura é formada como resultado deste congelamento. O aumento da salinidade diminui a temperatura de congelamento da água, o que provoca a formação de uma salmoura gelada em inclusões no gelo parecidas com um favo de mel. Esta salmoura derrete progressivamente o gelo que está próximo e, finalmente, a água goteja para fora da matriz de gelo, afundando.

Assim, temos que a origem da Circulação Termohalina é um fluxo vertical de água superficial que mergulha a uma profundidade intermediária ou próxima ao fundo, dependendo de sua densidade. A continuação deste processo é um fluxo horizontal que ocorre através da substituição das águas profundas pelas que recém afundaram. Estas águas frias e densas se movimentam em direção ao equador. A velocidade com que se movimentam é pequena, cerca de 1cm/s . Decorre daí que o tempo necessário para fazer a troca de toda a água do oceano é estimado em 1000 anos.

As massas de água transportam energia (na forma de calor) e matéria (sólidos, substâncias dissolvidas e gases). A Circulação Termohalina é um dos responsáveis pelo suprimento de calor nas regiões polares, regulando o montante de gelo destas regiões. Portanto, qualquer modificação nesta circulação oceânica pode acarretar impactos significativos no orçamento radiativo do planeta. Além disso, a Circulação Termohalina também tem papel importante na determinação da quantidade de dióxido de carbono existente na atmosfera, devido ao seu controle sobre as águas profundas do oceano.

De fato, a maior parte do dióxido de carbono produzido no planeta não fica armazenado na atmosfera, mas nos oceanos e na terra firme (nas plantas ou nos solos). Quando armazenado nos sedimentos, ele apresenta-se sob a forma de carbonato de cálcio (CaCO_3); no oceano profundo apresenta-se sob a forma de carbonato

dissolvido (CO_3^{2-}) e íons de hidrogenocarbonatos (HCO_3^-).

O ciclo do carbono obedece a processos físicos e a processos biológicos. Os processos físicos estão relacionados com a maior capacidade do dióxido de carbono se dissolver em água fria e na água do mar, já que esta última possui naturalmente íons de carbonato. A reação entre os íons de dióxido de carbono e os íons de carbonato gera íons de hidrogenocarbonatos:



Como resultado desta reação, o nível de dióxido de carbono na água do mar diminui, o que permite a entrada de dióxido de carbono atmosférico no oceano (Princípio de Le Chatelier).

Uma vez nas águas profundas do oceano, o dióxido de carbono permanecerá aí armazenado por mais ou menos mil anos, até estas águas retornarem a superfície. Como águas superficiais elas são mais quentes e o CO_2 retorna rapidamente à atmosfera.

Os processos biológicos estão relacionados ao ciclo de vida dos fitoplânctons, algas microscópicas que vivem na camada mais superficial dos oceanos. Como todo vegetal, o fitoplâncton utiliza o dióxido de carbono existente na atmosfera na realização da fotossíntese. Quando o fitoplâncton morre, ele afunda, liberando dióxido de carbono nas águas profundas do oceano durante a sua decomposição. Este CO_2 ficará aí armazenado. Por outro lado, se o fitoplâncton é infectado ou consumido por bactérias, também há liberação de dióxido de carbono, porém nas águas superficiais do oceano. Neste processo, parte do gás permanece na água e é aproveitado pelos demais fitoplânctons na fotossíntese, enquanto outra parte retorna para a atmosfera.

Muitos outros gases possuem a Circulação Termohalina como um fator importante do seu ciclo. Temos, portanto, uma participação muito importante dos

oceanos no controle do clima do nosso planeta.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrew C. Fowler, *Mathematics and the environment*, 2006, 42-47.
- [2] Jorge Manuel Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1979.
- [3] Claus Ivo Doering; Artur O. Lopes, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Matemática Univeritária, IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 2005.
- [4] Morris W. Hirsch; Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, New York : Academic Press, 1974.
- [5] Djairo G. Figueiredo, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Univeritária, IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1997.
- [6] *Circulação Oceânica*, http://www.atmosphere.mpg.de/enid/1__Oceanos_e_clima/_Circula__o_oce_nica_2ob.html, Environmental Science Published for Everybody Round the Earth, 01/07/2008.
- [7] *Como os oceanos absorvem o dióxido de carbono*, http://www.atmosphere.mpg.de/enid/631cfd7a4547cda4520bbcf7a45b4b5a,0/1__Oceanos_e_clima/_Como_os_oceanos_absorvem_o_di_xido_de_carbono_2oc.html, Environmental Science Published for Everybody Round the Earth, 25/08/2008.
- [8] *Thermohaline Circulation* http://en.wikipedia.org/wiki/Thermohaline_circulation ; Wikipedia, the free encyclopedia; 31/07/2008.

- [9] *Dansgaard-Oeschger event* http://en.wikipedia.org/wiki/Dansgaard-Oeschger_cycle ; Wikipedia, the free encyclopedia; 31/07/2008.
- [10] *Heinrich event* http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_event ; Wikipedia, the free encyclopedia; 31/07/2008.
- [11] *Shutdown of thermohaline circulation* http://en.wikipedia.org/wiki/Shutdown_of_thermohaline_circulation ; Wikipedia, the free encyclopedia; 01/07/2008.