

VINÍCIUS RODRIGUES MORAIS JÚNIOR

ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE BARRAS DE PAREDES FINAS
DE SEÇÕES ABERTAS

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos pré-requisitos necessários para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

1993

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Orientador

Prof. Jorge Daniel Riera
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. José Carlos Ferraz Hennemann (Orientador)
Ph.D. pela Southern Methodist University
- Prof. Ademar Gilberto Groehs
D.Sc. pela COPPE / UFRJ
- Prof. Ronaldo Carvalho Batista
Ph.D pela University of London

R E S U M O

Vigas de paredes finas submetidas à torção experimentam uma deformação fora do plano da seção transversal chamada de empenamento. Se alguma restrição do empenamento ocorre, desenvolve-se na barra um esforço denominado de bimomento. A presença do bimomento causa tensões longitudinais e de cisalhamento. As tensões longitudinais atuam no mesmo eixo das tensões de flexão e podem ter a mesma ordem de magnitude.

Os problemas da incorporação dos efeitos do empenamento da seção transversal, "off-set" do centro de corte, transmissão e restrição parcial do empenamento em elementos de barra de paredes finas com parâmetro nodal extra associado ao empenamento são examinados nesta dissertação.

Uma investigação da influência do nó no comportamento torsional de estruturas de barras de paredes finas é descrita. Resultados obtidos através da moldagem de interseções em elementos de casca poliédrica são apresentados e comparados com resultados teóricos utilizando diferentes métodos de incorporação dos efeitos do nó.

A B S T R A C T

Thin-walled beams submitted to torsional loads experiment a deformation called warping. If any restraint to warping occurs, an effort called bi-moment develops in the bar. The presence of bi-moment causes longitudinal and shear stresses. The longitudinal stresses act at the same axis of flexural stresses and can have the same magnitude.

The problems of incorporating the effects of cross-sectional warping, offset shear center, transmission and partial warping restraint in thin-walled elements with extra nodal parameter associated to warping are examined in this dissertation.

An investigation into the influence of the joint on the torsional behavior of thin-walled structures is described. Results of intersection modelling with polyhedral shell elements are presented and compared to theoretical results using different methods of incorporating the joint effects.

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Orientador

Prof. Ademar Gilberto Groehs
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. José Carlos Ferraz Hennemann (Orientador)
Ph.D. pela Southern Methodist University
- Prof. Ademar Gilberto Groehs
D.Sc. pela COPPE / UFRJ
- Prof. Ronaldo Carvalho Batista
Ph.D pela University of London

"Eu sou a ressurreição e a vida. Quem crê em mim, ainda que morra, viverá; e quem vive e crê em mim nunca morrerá. Você crê nisto?"

(Jo 11, 25-26)

A G R A D E C I M E N T O S

Ao prof. José Carlos Ferraz Hennemann, pela dedicada orientação ao longo deste trabalho, pelo apoio sempre incondicional e pelo estímulo em todas as horas.

Aos professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo conhecimento transmitido e pela colaboração ao longo deste trabalho.

Ao CNPq e à FAPERGS, pelo apoio financeiro.

Ao acadêmico Daniel Tejera Iglesias, pela amizade e auxílio inestimável.

Aos inesquecíveis colegas e amigos pela convivência, pelo apoio, e pelos momentos vividos no CPGEC.

S U M Á R I O

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de símbolos

Resumo

"Abstract"

1 - INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
1.1 Introdução	1
1.2 Revisão Bibliográfica	3
1.3 Objetivos	6
1.4 Organização do texto	7
2 - TEORIA CLÁSSICA DE VIGAS DE PAREDES FINAS	9
2.1 Introdução	9
2.2 Tensões e deformações devido à flexão	11
2.2.1 Tensões e deformações longitudinais	11
2.2.2 Tensões de cisalhamento	13
2.2.2.1 Centro de cisalhamento	14
2.3 Tensões devido à torção	16
2.3.1 Torção uniforme	16
2.3.1.1 Deformações de empenamento	17
2.3.2 Torção não uniforme	19
2.4 Equações diferenciais de flexão e torção	24
2.5 Analogia Flexão - Torção não uniforme	28

3 - MÉTODO DA RIGIDEZ APLICADO A ESTRUTURAS DE BARRAS	
DE PAREDES FINAS	31
3.1 Introdução	31
3.2 Matriz de rigidez para uma barra de paredes finas .	32
3.3 Obtenção da matriz de rigidez referente à torção não uniforme via solução da equação diferencial da torção	35
3.4 Obtenção da matriz de rigidez referente à torção não uniforme via aproximação polinomial	38
3.5 Transformações de eixos de referência	41
3.5.1 Decomposição dos modos segundo um sistema de eixos de referência misto	41
3.5.2 Transformação para direções generalizadas	42
3.6 Aplicação dos elementos de viga de paredes finas . .	47
4 - TRANSMISSÃO E RESTRIÇÃO PARCIAL DO EMPENAMENTO . . .	48
4.1 Introdução	48
4.2 Influência da conexão no empenamento	51
4.3 Tratamentos matemáticos	53
4.3.1 Coeficiente de transmissão	54
4.3.2 Indicador de empenamento	56
4.3.2.1 Condições de contorno de empenamento para uma viga	57
4.3.2.2 Rigidez elástica da mola de empenamento	60
4.3.2.3 Resumo do método do indicador de empenamento . .	63
4.3.3 Rigidez percentual de empenamento	66
4.3.3.1 Matriz de rigidez de uma barra de paredes finas considerando restrições elásticas nas extremidades	70

5 - APLICAÇÕES E EXEMPLOS	74
5.1 Introdução	74
5.2 Coeficiente de transmissão	74
5.3 Indicador de empenamento	95
5.4 Rigidez percentual	98
5.4.1 Conexão de duas barras a 90° , flanges coplanares .	98
5.4.2 Exemplo101
6 - CONCLUSÕES102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS107

LISTA DE FIGURAS

FIGURA

1.1	Viga de paredes finas sujeita a: (a) torção pura (b) empenamento restringido	3
2.1	Dimensões de uma seção aberta de paredes finas . .	11
2.2	Seção transversal sujeita a flexão e força axial .	12
2.3	Tensões de cisalhamento em uma barra de paredes finas	13
2.4	Área setorial dupla ou empenamento unitário com relação ao baricentro	15
2.5	Coordenadas e distâncias tangenciais em uma seção de paredes finas	18
2.6	Tensão tangencial τ_{ω}	20
2.7	Condições de contorno para torção	27
2.8	Bimomento como resultante interna	29
3.1	Graus de liberdade e esforços nodais em elemento de barra de grelha de paredes finas	33
3.2	Decomposição dos esforços	42
3.3	Relações geométricas entre ϕ' de direções ortogonais	44
4.1	Condições de continuidade em um nó de barras de seção "C" submetidas à torção	50
4.2	Exemplos de conexões de barras	52
4.3	Incompatibilidade das distribuições dos desloca- mentos de empenamento em conexão de 2 elementos .	55
4.4	Barra submetida a torção	60
5.1	Conexão em "L": (a) seção "I" ; (b) seção "C" . .	76

5.2	Conexão em "T": (a) seção "I" ; (b) seção "C" . . .	77
5.3	Conexão em "X": (a) seção "I" ; (b) seção "C" . . .	78
5.4 a 5.32	Gráficos relacionando comprimento, conexão, seção e coeficientes de transmissão	79
5.33	Coeficiente de transmissão - exemplo	94
5.34	Indicador de empenamento - exemplo	97
5.35	Elemento de conexão "L" de barras de seção "I"; rotações unitárias nos flanges	98
5.36	Rigidez percentual de empenamento - exemplo . . .	101

LISTA DE TABELAS

TABELA

2.1	Analogia flexão - torção não uniforme	30
5.1	Coefficiente de transmissão - resultados	95
5.2	Indicador de empenamento - exemplo de aplicação - dimensões das barras	96
5.3	Indicador de empenamento - exemplo de aplicação - resultados	97
5.4	Rigidez da conexão em "L" de barras de seção "I" .	100
5.5	Rigidez percentual de empenamento - resultados comparativos do exemplo	101

LISTA DE SÍMBOLOS

A	área da seção da viga
A_0	área setorial
a_1, a_2	indicadores de empenamento
B	bimomento
b	altura de uma seção retangular
b_f	largura do flange
C	coeficiente de transmissão ou transformação
$C(0,0)$	baricentro
C_ω	momento de inércia de empenamento ou constante de empenamento
d	altura efetiva da barra
E	módulo de elasticidade longitudinal
{F}	vetor de forças nodais
G	módulo de elasticidade transversal
I_x, I_y	momentos principais de inércia
[K]	matriz de rigidez
K_{M1}, K_{M2}	molas elásticas de empenamento - rigidez percentual de empenamento
$[K_E]$	matriz de rigidez de uma barra de grelha de paredes finas
$[K_{OS}]$	matriz de rigidez da barra definida no sistema de eixos misto (centróide e centro de corte)
$[K_{tw}]$	submatriz de rigidez de uma barra de grelha de paredes finas considerando apenas torção e empenamento

J	constante de torção
L	comprimento da viga
M	momento fletor
M_x, M_y	momentos segundo os eixos principais de inércia
N	força longitudinal
$O(x_1, y_1)$	origem da coordenada "s" medida ao longo da linha média da seção transversal
p_1, p_2	rigidezes percentuais de empenamento
Q	força transversal
q_x, q_y	cargas transversais distribuídas
$Q(x, y)$	ponto genérico na linha média da seção transversal
s	coordenada medida ao longo da linha média da seção
S_ω	momento estático de empenamento
$S(x_0, y_0)$	centro de corte/ centro de cisalhamento / centro de torção
s_1, s_2	molas elásticas de empenamento - indicador de empenamento
T	momento torsor
[T]	matriz de rotação convencional
[T*]	matriz de rotação incluindo termo de transformação do empenamento
$[T_{bs}]$	matriz de transformação do sistema de eixo misto para o unificado
t, t(s)	espessura constante e espessura variável ao longo da seção transversal, respectivamente
t_f	espessura da flange

t_w	espessura da alma
T_{SV}	momento torçor de Saint-Venant
T_ω	momento torçor de empenamento
$\{U\}$	vetor de deslocamentos nodais
u, v	deslocamentos segundo as direções x e y , respectivamente
w	empenamento
w_0	empenamento no centróide - corresponde a um movimento de corpo rígido da seção
X, Y, Z	eixos coordenados cartesianos, sistema de eixos globais
x, y, z	eixos coordenados cartesianos, sistema de eixos locais
ε	deformação específica longitudinal devido à flexão
ε_ω	deformação específica longitudinal devido ao empenamento
κ	deslocamento da mola de empenamento
ϕ	ângulo de torção
ϕ'	taxa de torção - primeira derivada do ângulo de torção com relação ao eixo longitudinal
ρ	distância do centróide a uma reta tangente à linha média da seção transversal que passa pelo ponto $Q(x, y)$
ρ_0	distância do centro de cisalhamento a uma reta tangente à linha média da seção transversal que passa pelo ponto $Q(x, y)$
σ	tensão longitudinal
σ_ω	tensão longitudinal de empenamento

τ	tensão de cisalhamento
τ_ω	tensão de cisalhamento de empenamento
φ	deslocamento de empenamento da conexão
ω	empenamento unitário com relação ao baricentro / área setorial dupla
ω_n	empenamento unitário normalizado
ω_0	empenamento unitário com relação ao centro de torção $S(x_0, y_0)$
[]	matriz
{ }	vetor
[] ^t ou { } ^t	indica transposição de matriz ou vetor

SUB-ÍNDICES

c	graus de liberdade contínuos
n	graus de liberdade descontínuos
x,y,z	eixos coordenados locais
X,Y,Z	eixos coordenados globais
1, 2	extremidades da barra

1 INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 INTRODUÇÃO

A utilização de barras de seção de paredes finas está aumentando rapidamente em todos os tipos de estruturas. Pode-se atribuir esse aumento à melhoria do comportamento e confiabilidade dos materiais e ao desenvolvimento contínuo das estruturas modernas, requerendo maiores vãos com reduzido peso próprio.

Uma barra de paredes finas é caracterizada pela magnitude relativa de suas dimensões : a espessura de suas paredes é pequena se comparada às dimensões da seção transversal e ao comprimento da barra. Dentre as estruturas que podemos considerar compostas deste tipo de barras destacam-se as já tradicionais fabricadas com perfis metálicos. Mais recentemente a abrangência de estruturas que contém este tipo de barras têm sido aumentada pelo uso de perfis de chapa de aço dobrada a frio, perfis leves de alumínio, materiais compostos e elementos de concreto protendido.

Em muitas das aplicações descritas acima, as barras de seção de paredes finas são submetidas a ações similares às aplicadas a barras de seção sólida. Para cargas de flexão e axiais é usualmente satisfatório considerar que as seções planas permanecem planas após o carregamento. Entretanto, sob cargas torsionais as vigas de

paredes finas diferem significativamente das de seção sólida e a consideração anterior já não é mais válida.

Seções transversais de paredes finas quando submetidas a carregamento de torção sofrem uma deformação chamada de empenamento - deslocamento fora do plano da seção. Nas estruturas de barras os apoios e conexões induzirão restrições ao empenamento que provocarão o surgimento de tensões normais e tangenciais.

A importância da torção não uniforme cresceu significativamente nos últimos tempos. Antigamente não era usual verificar a influência da torção nos elementos de paredes finas carregados. Provou-se ao longo dos anos, entretanto, que as tensões e deformações causadas pela torção e empenamento podem ser predominantes (WALDRON, 1986) e determinar o limite de cálculo das estruturas (BEERMANN, 1980), (BOOTHBY, 1984).

O empenamento devido à torção pura de Saint-Venant é idêntico para toda seção transversal ao longo da barra (fig. 1.1a). Proporcional à derivada do ângulo de torção segundo seu eixo longitudinal, o empenamento é causado pelo desenvolvimento de um fluxo de cisalhamento circulatório de valor constante ao longo do perímetro da seção. O fato de que as seções não sejam mais planas não impede que a barra seja analisada por teorias simples. Entretanto se o empenamento é restringido (fig. 1.1b), ou se a distribuição do empenamento varia (por aplicação de uma torção não uniforme), o surgimento de tensões adicionais requer métodos mais sofisticados para a

análise.

A restrição oferecida pelas conexões e apoios à deformação de empenamento é chamada usualmente de restrição ao empenamento, que pode ser total ou parcial. As tensões decorrentes do empenamento restringido em uma conexão se distribuirão às barras ligadas a esta através do que se convencionou chamar de transmissão do empenamento.

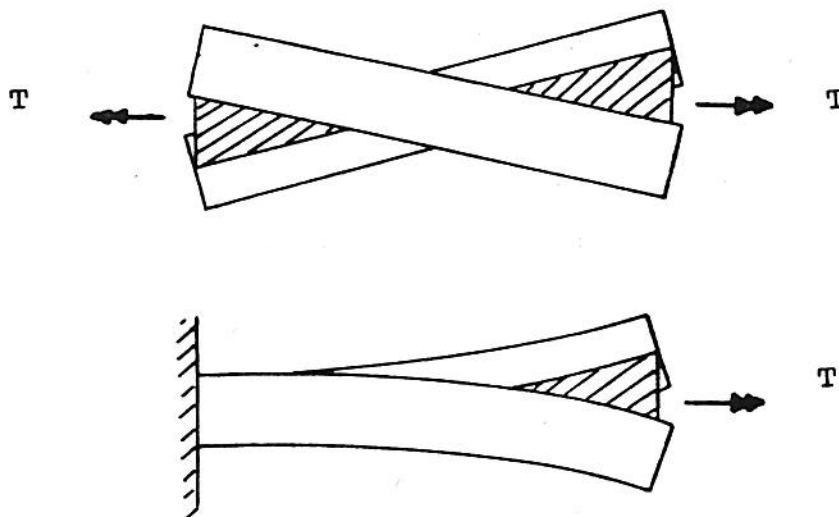


Figura 1.1 - Viga de paredes finas sujeita a : (a) torção de Saint-Venant; (b) empenamento restringido

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise dos efeitos da restrição e transmissão do empenamento no comportamento de estruturas de barras de

paredes finas tem recebido atenção especial por parte de pesquisadores nos últimos anos.

Teorias clássicas de flexão e torção combinada para barras de paredes finas sujeitas a restrições de torção foram estabelecidas por vários autores (KOLLBRUNNER ; BASLER, 1969), (VLASOV, 1961). O uso destas teorias, somente problemas estruturais de barras de paredes finas com condições de restrição e carregamentos simples podem ser resolvidos analiticamente. Para problemas práticos sob condições de contorno e carregamentos diversos, não existem soluções fechadas disponíveis. As equações governantes devem ser solucionadas, portanto, por algum método numérico apropriado.

Inicialmente os estudos limitavam-se à resposta de barras isoladas nos quais se admitia restrição total ou nula ao empenamento nas extremidades. Estas situações tem sua aplicação restrita a poucos casos práticos porque:

a) a consideração das extremidades da barra empenarem livremente ou serem completamente restringidas não é realística para muitos casos. Diversos trabalhos tem indicado que as ligações em estruturas de barras são na maioria das vezes flexíveis (CONCI, 1988) e induzem restrições ao empenamento dentro destes dois limites (MEGSON & ALADE, 1976);

b) para associação de barras faz-se necessário considerar a interação entre barras e a interação barras-conexão de modo a caracterizar a transmissão dos esforços.

No que concerne a estruturas em que se considera

a transmissão e restrição ao empenamento , é registrado pouco avanço, muito embora a importância destes dois fatores já tenha sido salientada com bastante ênfase. MORREL(1979) e VACHARAJITTIPHAN ; TRAHAIR(1972) mostraram experimentalmente que a transmissão e a restrição do empenamento depende fundamentalmente do detalhe da conexão. Existem estudos simplificados de vigas contínuas (KOLLBRUNNER ; BASLER, 1969), (KHAN; TOTTENHAM, 1977), (BOOTHBY, 1984), (MEDWADOWSKY,1985) onde se considera diafragmas nos apoios, limitando a aplicação. Há trabalhos que generalizam os problemas de transmissão e restrição parcial do empenamento (BAIGENT; HANCOCK, 1982), tratando-os, porém, de forma insuficiente, levando muitos pesquisadores a considerá-los temas ainda não satisfatoriamente abordados (CHAN; KITIPORNCHAI, 1987).

Há, basicamente, dois procedimentos que vem sendo utilizados no estudo deste tipo de estruturas : o uso de elementos de barra convencionais acrescidos de um parâmetro nodal extra associado ao empenamento (YANG; MCGUIRE, 1986), (WALDRON, 1987), (CONCI; GATTASS, 1990), (BLANDFORD, 1990), (CHEN; BLANDFORD, 1991) e o emprego de elementos de casca (MEEK; HO, 1983), (KANOK-NUKULCHAI; SIVAKUMAR, 1988).

Quando se assume que uma estrutura de barras pode ser discretizada em elementos unidimensionais se ignora qualquer efeito de distribuição local de tensões nas proximidades de um nó, de modo que somente as condições globais de compatibilidade em cada nó são satisfeitas.

Com elementos de casca consegue-se modelar a influência dos detalhes dos nós, porém o custo

computacional envolvido é bastante alto, ainda que esforços significativos em reduzi-lo devam ser registrados (BOÉSSIO, 1992).

Ao utilizarem elementos de vigas de paredes finas diversos autores simplesmente ignoram o problema da transmissão e restrição ao empenamento, ou não oferecem justificativas convincentes para hipóteses adotadas (CONCI, 1988) (WALDRON, 1987).

SHARMAN (1985) estudou configurações de barras em elementos de casca poliédrica de 8 nós de modo a definir um "coeficiente de transmissão". ETTONEY ; KIRBY (1981) introduziram o conceito de restrição parcial. YANG & MCGUIRE (1984) lidaram com a restrição parcial definindo um "indicador de empenamento". GUNNLAUGSSON (1981) estudou a compatibilidade em vigas contínuas de diferentes seções em cada vão.

1.3 OBJETIVOS

No presente trabalho propõe-se analisar estruturas de barras de paredes finas de seção aberta levando em consideração os efeitos de restrição parcial ao empenamento e transmissão em diferentes tipos de nós.

Visando a plena realização do trabalho foram definidos os seguintes objetivos e limitações:

- o trabalho tratará de estruturas planas do tipo grelha compostas de seção I e C;
- o estudo da transmissão e restrição parcial do empenamento será efetuado através de considerações

analíticas utilizando-se modelagem de diversas configurações de nós em elementos de casca poliédrica através do programa GAELI desenvolvido pelo CPGEC-UFRGS;

- serão elaboradas rotinas computacionais que permitam analisar estruturas de barras de paredes finas considerando a influência do empenamento restringido.

O objetivo geral é verificar a influência do tipo de ligação no comportamento da estrutura, analisar o efeito da variação das dimensões dos elementos e esclarecer a forma de transmissão do bimomento e do empenamento na união de peças estruturais.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O texto está organizado em seis capítulos tratando dos assuntos de interesse ao trabalho.

O primeiro capítulo é constituído pela presente introdução.

O segundo capítulo apresenta uma breve exposição da teoria clássica de paredes finas, apresentando os conceitos necessários para o desenvolvimento do estudo - empenamento, bimomento, coordenadas setoriais, momento torçor de Saint-Venant e de empenamento, torção uniforme e não uniforme e equação diferencial da torção.

No terceiro capítulo se desenvolve a matriz de rigidez para uma viga de paredes finas e são abordados os problemas relacionados com a inclusão do grau de liberdade de empenamento e "off-set" do centro de cisalhamento.

No quarto capítulo estuda-se a influência das

conexões em estruturas de barras, desenvolvendo-se métodos para a inclusão destes efeitos na solução.

O quinto capítulo apresenta exemplos de estruturas analisadas segundo os critérios e métodos apresentados no capítulo anterior, ilustrando e validando o trabalho, permitindo, ainda, conclusões relativas aos objetivos propostos.

Finalmente, o sexto capítulo encerra o estudo com conclusões e sugestões para trabalhos que tenham este como base.

2 TEORIA CLÁSSICA DE VIGAS DE PAREDES FINAS

2.1 INTRODUÇÃO

Será visto, a seguir, uma breve exposição da teoria de vigas de paredes finas, tema já amplamente tratado por inúmeros autores (VLASOV, 1961), (GALAMBOS, 1968), (GJELSVIK, 1981), (MURRAY, 1986).

Duas teorias comuns de flexão, as teorias de vigas de Bernoulli-Euler e Timoshenko, são baseadas na hipótese de que seções planas permaneçam planas. Esta hipótese exclui a consideração de deformações fora do plano da seção transversal devido ao empenamento. A torção é considerada completamente definida pela teoria de Saint-Venant. A teoria de Saint-Venant estabelece que deformações de empenamento podem ocorrer livremente e uniformemente ao longo da viga. O acoplamento entre flexão e torção ocorre quando uma carga transversal ou reação não passa através do centro de corte.

VLASOV (1961) desenvolveu uma teoria para vigas de paredes finas de seção aberta sujeitas a flexão e torção. É uma teoria geral para o comportamento de barras cujas seções transversais podem empenar diferentemente ao longo do comprimento da barra:

"Uma barra de seções de paredes finas, que possui a forma de uma casca cilíndrica ou de uma seção prismática na sua condição natural (não carregada), é considerada nesta teoria como um sistema espacial contínuo composto de

placas capazes de suportar, em cada ponto da superfície média, não somente tensões axiais (normais e de corte), mas também momentos. A deformação da barra não é analisada com base na hipótese usual das seções planas. O autor (VLASOV), entretanto, usa a mais geral e natural hipótese de um contorno da seção inflexível e ausência de tensões de corte na superfície média, que constitui-se na base de uma nova lei de distribuição das tensões longitudinais na seção transversal. Essa lei, que o autor (VLASOV) chama de LEI DAS ÁREAS SETORIAIS, a qual inclui a lei das seções planas como caso particular, permite o cálculo das tensões na grande maioria dos casos de equilíbrio de flexo-torção de uma barra" (VLASOV, 1961).

Na presente teoria considera-se:

- (i) o material elástico, homogêneo e isotrópico;
- (ii) elementos retos e prismáticos;
- (iii) seções transversais de paredes finas e abertas;
- (iv) pequenas deformações;
- (v) desprezadas as deformações devido a tensões tangenciais;
- (vi) que a forma da seção permanece inalterada.

As hipóteses (i) e (iv) permitem:

- a) utilizar-se o princípio da superposição;
- b) negligenciar termos de alta ordem;
- c) formular o equilíbrio na configuração indeformada.

Uma seção transversal é considerada de paredes finas quando a espessura de sua seção transversal é pelo menos uma ordem de magnitude inferior às outras dimensões;

e é dita aberta quando sua linha média não é fechada como mostra a figura 2.1 .

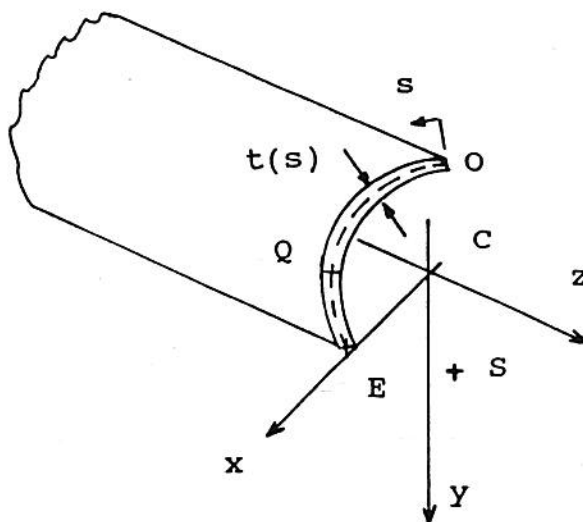


figura 2.1 Dimensões de uma seção aberta de paredes finas

sendo Z o eixo baricêntrico longitudinal ; X, Y eixos principais de inércia ; S o centro de corte e C o baricentro da seção transversal.

2.2 TENSÕES E DEFORMAÇÕES DEVIDO À FLEXÃO

2.2.1 TENSÕES E DEFORMAÇÕES LONGITUDINAIS

Consideremos a barra indicada na figura 2.2 .

Pela teoria clássica da Resistência dos Materiais

a tensão longitudinal em qualquer ponto da seção transversal pode ser calculada como:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} \quad (2.1)$$

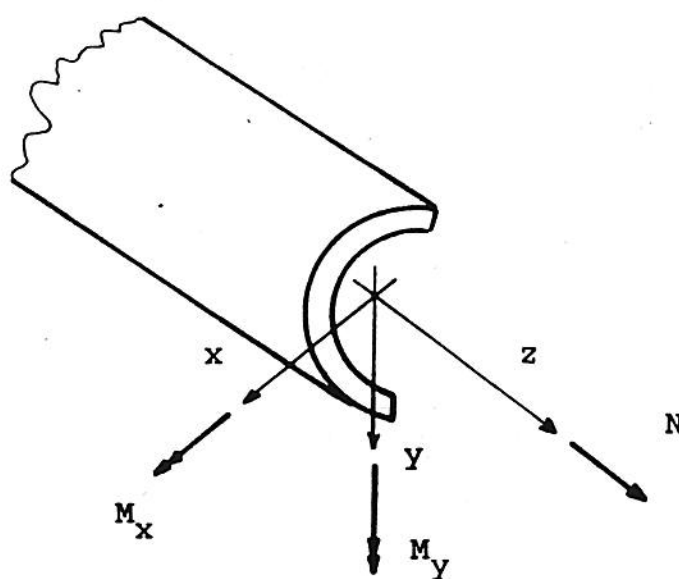


figura 2.2 Seção transversal sujeita à flexão e força axial

As deformações específicas longitudinais, por sua vez, podem ser calculadas como:

$$\epsilon = \frac{N}{A E} + \frac{M_x y}{E I_x} - \frac{M_y x}{E I_y} \quad (2.2)$$

2.2.2 TENSÕES DE CISALHAMENTO

A variação do momento fletor ao longo da barra produz forças de corte. Seja, portanto, a barra indicada na figura 2.3a e um elemento desta na figura 2.3b.

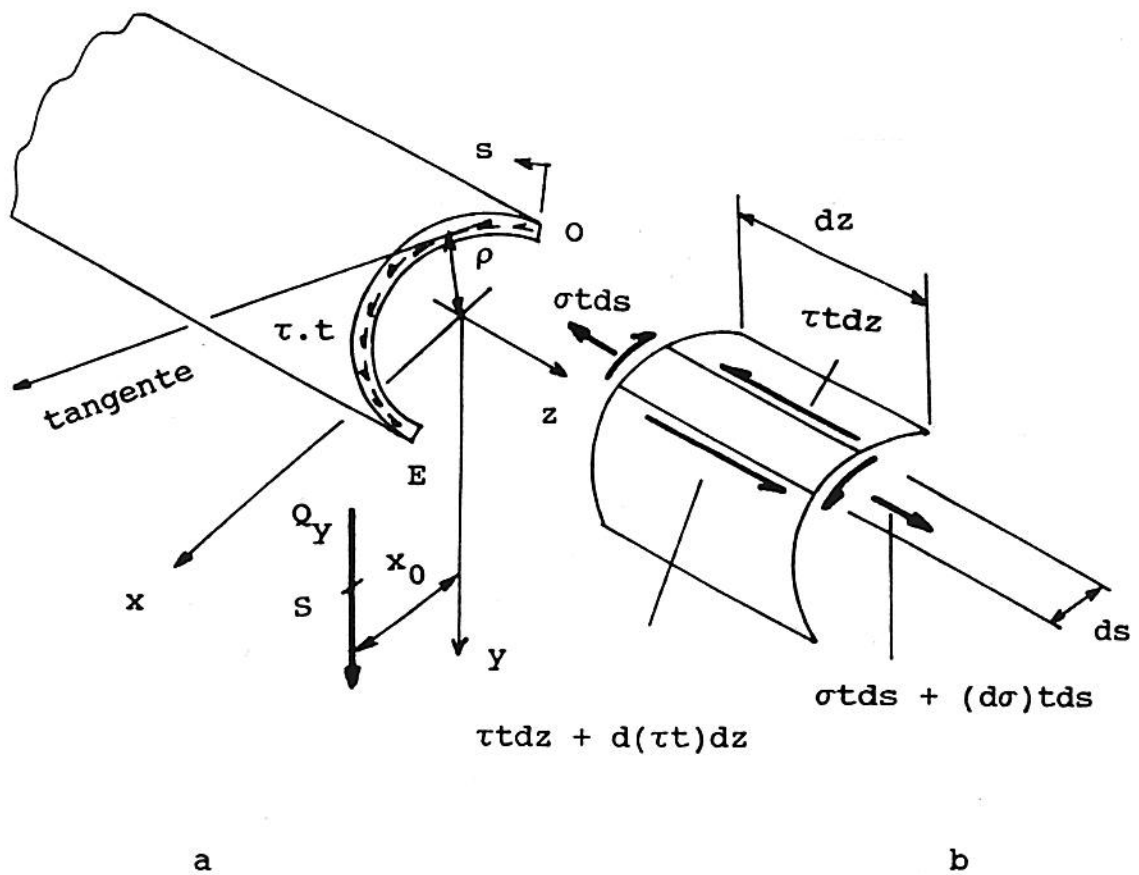


figura 2.3 Tensões de cisalhamento em um elemento de seção de paredes finas

Assumimos que a barra seja reta e prismática (a espessura t constante em z) e que a seção transversal mantenha a forma. Para uma seção de barras de paredes finas pode-se assumir que a tensão de corte τ seja uniforme.

Definimos, então, $\tau \cdot t$ como fluxo de cisalhamento atuando ao longo da linha média, tangente a esta, por unidade de comprimento. Considerando o equilíbrio do elemento da fig. 2.2b pode-se provar que:

$$\tau \cdot t = - \frac{Q_y}{I_x} \int_0^s y \cdot t \, ds \quad (2.3)$$

Para uma seção aberta, em $s = 0$ e $s = E$ o fluxo de cisalhamento se anula.

2.2.2.1 CENTRO DE CISALHAMENTO

Chamamos de centro de cisalhamento o ponto da seção transversal onde deve passar a força cortante de modo que não ocorra torção.

Na figura 2.3a o momento torçor resultante em torno de C deve ser igual a zero, ou seja:

$$\int_0^E (\tau \cdot t) \rho \, ds - x_0 \cdot Q_y = 0 \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) em (2.4) e rearranjando termos:

$$x_0 = - \frac{1}{I_x} \int_0^E \rho \left(\int_0^s y \cdot t \, ds \right) ds \quad (2.5)$$

Definimos, agora, uma coordenada ω - empenamento unitário com relação ao baricentro ou área setorial dupla - como indica a figura 2.4 .

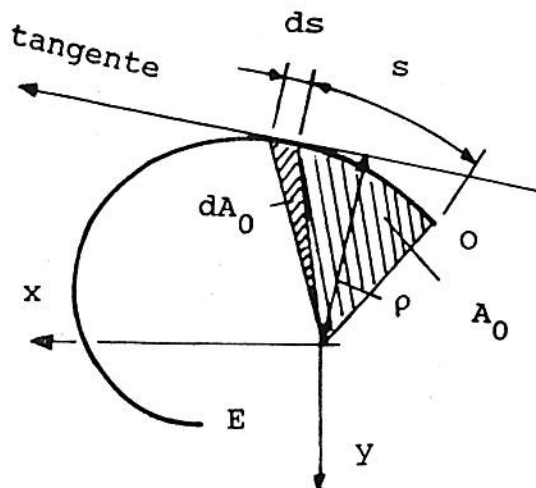


figura 2.4 - Área setorial dupla ou empenamento unitário com relação ao baricentro

Da figura 2.4:

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_0^s \rho \, ds \quad \therefore \quad \omega = 2 A_0$$

$$\omega = \int_0^s \rho \, ds \quad (2.6)$$

substituindo (2.6) em (2.5) , integrando por partes, e procedendo da mesma maneira para y_0 , pode-se provar que as coordenadas do centro de cisalhamento serão :

$$x_0 = \frac{I_{\omega y}}{I_x} \quad e \quad y_0 = - \frac{I_{\omega x}}{I_y} \quad (2.7)$$

sendo

$$I_{\omega y} = \int_0^E \omega y t ds \quad e \quad I_{\omega x} = \int_0^E \omega x t ds \quad (2.8)$$

produtos de inércia de empenamento com relação aos eixos y e x , respectivamente.

2.3 TENSÕES DEVIDO À TORÇÃO

Quando barras de paredes finas são sujeitas a torção, seções previamente planas deixam de ser planas. O deslocamento fora do plano da seção transversal é chamado de empenamento.

Existem, basicamente, dois tipos de torção :

- TORÇÃO UNIFORME, PURA, OU DE SAINT-VENANT : a seção transversal é livre para empenar;

- TORÇÃO NÃO-UNIFORME OU DE EMPENAMENTO : a seção transversal tem empenamento restringido.

Em geral os dois tipos de torção estão presentes: os efeitos de cada tipo podem ser separados desde que não violemos as hipóteses adotadas no início deste capítulo. Barras de seções abertas de paredes finas são pouco eficientes a torção.

2.3.1 TORÇÃO UNIFORME

Na resolução da torção uniforme tira-se proveito das relações existentes entre o problema da torção e o

problema de uma membrana de forma e dimensões iguais aos de uma seção transversal retangular fina, na chamada ANALOGIA DA MEMBRANA. Através desta analogia demonstra-se que :

$$T_{sv} = G J \phi' \quad (2.9)$$

A constante de torção J para uma barra de seção retangular (largura b x espessura t) tem o valor de :

$$J = \frac{1}{3} b t^3 \quad (2.10)$$

Para seções que podem ser subdivididas em "n" seções retangulares "i" a constante de torção pode ser expressa como :

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 \quad (2.11)$$

2.3.1.1 DEFORMAÇÕES DE EMPENAMENTO

Nesta seção o objetivo é determinar a deformação w na direção do eixo longitudinal da barra (z) devido à torção uniforme. Consideremos a figura 2.5 sendo ρ e ρ_0 quantidades positivas se estiverem à esquerda de Q.

Definimos centro de torção $S(x_0, y_0)$ o ponto da seção transversal em torno do qual esta gira.

Considerando como únicas tensões atuantes as

tensões cortantes devidas a torção de Saint-Venant pode-se provar que o empenamento diferencial dw é dado por:

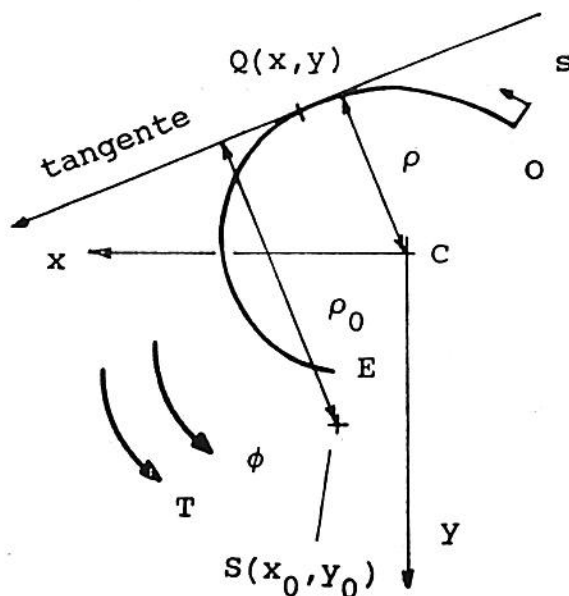


figura 2.5 Coordenadas e distâncias tangenciais em uma seção de paredes finas

$$dw = - \rho_0 \frac{d\phi}{dz} ds \quad (2.12)$$

integrando (2.12) :

$$w = w_0 - \frac{d\phi}{dz} \int_0^s \rho ds \quad (2.13)$$

e definindo como empenamento unitário com

relação ao centro de torção S :

$$\omega_0 = \int_0^s \rho_0 ds \quad (2.14)$$

chega-se finalmente a :

$$w = w_0 - \phi' \omega_0 \quad (2.15)$$

sendo w_0 o empenamento em 0, correspondendo a um movimento de corpo rígido da seção.

Como estamos em regime de torção uniforme a derivada do ângulo de torção será constante. Não havendo restrições ao empenamento as tensões e deformações axiais serão nulas.

Pode-se provar ainda que (GALAMBOS, 1968):

$$\omega_0 = \omega + y_0 x - y_0 x_1 - x_0 y_1 + x_0 y \quad (2.16)$$

sendo $O(x_1, y_1)$.

2.3.2 TORÇÃO NÃO UNIFORME

Se os deslocamentos longitudinais w forem de alguma maneira restringidos (ligações de extremidade) ou se um momento torçor for aplicado de maneira não uniforme, surgirão na barra tensões longitudinais e tangenciais (σ_w e τ_w respectivamente).

A tensão normal pode ser calculada como:

$$\sigma_{\omega} = E \varepsilon_{\omega} \quad (2.17)$$

onde

$$\varepsilon_{\omega} = \frac{dw}{dz} \quad (2.18)$$

é a deformação longitudinal específica de empenamento. Substituindo (2.15) e (2.18) em (2.17) chega-se finalmente à expressão para a tensão longitudinal:

$$\sigma_{\omega} = E w_0' - E \omega_0 \phi'' \quad (2.19)$$

Como $w = w(s, z)$, σ_{ω} não varia ao longo da espessura.

A tensão tangencial τ_{ω} é obtida por equilíbrio a partir da figura 2.6.

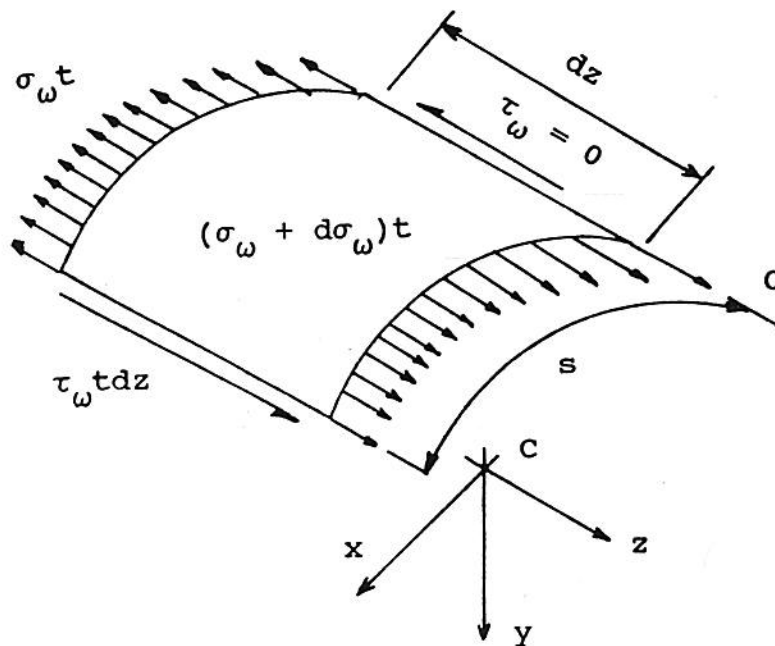


figura 2.6 - Tensão tangencial τ_{ω}

Da figura 2.6 pode-se escrever que:

$$\tau_{\omega} \cdot t = - \int_0^s t \frac{d\sigma_{\omega}}{dz} ds \quad (2.20)$$

De acordo com a hipótese inicial, o estado de tensões é causado apenas pelo momento torçor, ou seja, as resultantes N , M_x e M_y devido a σ_{ω} devem ser iguais a zero. Portanto:

$$N = 0 = \int_0^E \sigma_{\omega} \cdot t \, ds = E \int_0^E (w_0' - \omega_0 \phi'') t \, ds \quad (2.21)$$

$$M_x = 0 = \int_0^E \sigma_{\omega} \cdot t \cdot y \, ds = E \int_0^E (w_0' - \omega_0 \phi'') y t \, ds \quad (2.22)$$

$$M_y = 0 = \int_0^E \sigma_{\omega} \cdot t \cdot x \, ds = E \int_0^E (w_0' - \omega_0 \phi'') x t \, ds \quad (2.23)$$

Substituindo (2.16) em (2.22-23), sendo o sistema XY baricêntrico e lembrando que w_0' é constante pode-se provar que:

$$\phi'' (-x_0 I_x + I_{\omega y}) = 0 \quad (2.24a)$$

$$\phi'' (y_0 I_y + I_{\omega x}) = 0 \quad (2.24b)$$

Como $\phi'' \neq 0$ (torção não uniforme), as coordenadas do centro de torção serão:

$$x_0 = \frac{I_{\omega y}}{I_x} \quad \text{e} \quad y_0 = - \frac{I_{\omega x}}{I_y} \quad (2.25)$$

que, portanto, serão iguais às do centro de cisalhamento para flexão sem torção.

De (2.21):

$$w_0' = \frac{\phi''}{A} \int_0^E \omega_0 \cdot t \, ds \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.19) e definindo empenamento unitário normalizado como:

$$\omega_n = \frac{1}{A} \int_0^E \omega_0 \, t \, ds - \omega_0 \quad (2.27)$$

a tensão longitudinal devido ao empenamento restringido será:

$$\sigma_\omega = E \omega_n \phi'' \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.20) pode-se calcular o fluxo cortante como:

$$\tau_\omega \cdot t = - E S_\omega \phi''' \quad (2.29)$$

sendo:

$$S_{\omega} = \int_0^s \omega_n \cdot t \, ds \quad (2.30)$$

o momento estático de empenamento.

Define-se agora uma nova grandeza chamada bimomento:

$$B = \int_0^E \sigma_{\omega} \cdot \omega_n \, t \, ds \quad (2.31)$$

Substituindo (2.28) em (2.31), chega-se a:

$$B = E \phi'' \int_0^E \omega_n^2 \cdot t \, ds = E \phi'' C_{\omega} \quad (2.32)$$

no qual:

$$C_{\omega} = \int_0^E \omega_n^2 \cdot t \, ds \quad (2.33)$$

é o momento de inércia de empenamento.

Portanto, de (2.28):

$$\sigma_{\omega} = \frac{B \omega_n}{C_{\omega}} \quad (2.34)$$

O bimomento é um esforço solicitante que conduz a

forças auto-equilibradas. O bimomento é positivo quando produzido por forças de tração atuando em pontos onde a área setorial é positiva.

2.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE FLEXÃO E TORÇÃO

Supondo, primeiramente, cargas distribuídas q_x e q_y atuando em planos que contenham o centro de cisalhamento, e considerando pequenas deformações, a partir da teoria clássica de flexão de vigas prova-se que:

$$E I_x v^{iv} = q_y \quad \text{e} \quad E I_y u^{iv} = q_x \quad (2.35)$$

e ainda:

$$M_x = - E I_x v'' \quad M_y = E I_y u'' \quad (2.36)$$

A contribuição do fluxo cortante para o momento torçor total é:

$$T_\omega = \int_0^E \tau_\omega \cdot t \cdot \rho_0 \, ds \quad (2.37)$$

substituindo (2.29) em (2.37) e integrando por partes, prova-se que:

$$T_\omega = - E C_\omega \phi''' \quad (2.38)$$

Ainda, de (2.32):

$$T_{\omega} = - \frac{dB}{dz} \quad (2.39)$$

O momento torçor total será a soma do momento torçor de empenamento com o momento torçor de Saint-Venant:

$$T = T_{SV} + T_{\omega} \quad (2.40)$$

ou seja:

$$T = GJ \phi' - EC_{\omega} \phi'''' \quad (2.41a)$$

ou rearranjando termos :

$$\phi'''' - \lambda^2 \phi' = - \frac{T}{EC_{\omega}} \quad (2.41b)$$

em que :

$$\lambda^2 = \frac{GJ}{EC_{\omega}} \quad (2.42)$$

cuja solução é :

$$\phi = C_1 + C_2 \cosh \lambda z + C_3 \sinh \lambda z + \frac{Tz}{\lambda^2 EC_{\omega}} \quad (2.43)$$

sendo C_1 , C_2 , C_3 constantes a determinar.

As constantes de integração são encontradas aplicando-se condições de contorno. Estas podem ser:

- a) $\phi = 0$ - a seção não pode girar em torno de seu eixo longitudinal;
- b) $\phi' = 0$ - da equação (2.15) a seção está impedida de empenar;
- c) $\phi'' = 0$ - da equação (2.28) não há restrição ao empenamento;
- d) $\phi''' = 0$ - da equação (2.29) o fluxo cortante do empenamento é nulo - corresponderia a uma situação de bordo livre.

Na figura 2.7 estão exemplificadas algumas destas condições de contorno.

Quando L/λ toma um valor grande o torque de Saint-Venant assume um papel dominante e a barra é dita estar em torção uniforme. Neste caso o empenamento não é importante e as ações de empenamento em nós podem ser ignoradas. Por outro lado, se L/λ é pequeno, então o momento torçor de empenamento é dominante, e a barra está sob torção de empenamento. Entre esses dois extremos, quando ambos torques de empenamento e de Saint-Venant são significantes, diz-se que a barra está em torção mista. A maioria dos problemas com perfis de seção "I" e "C" pertence a este último grupo de problemas.

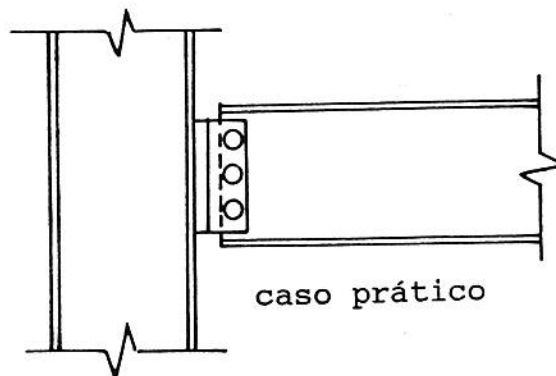
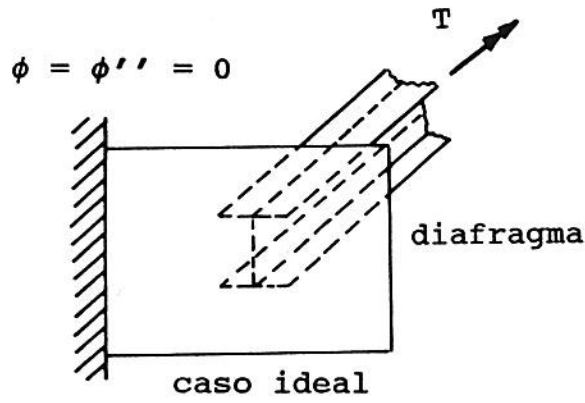
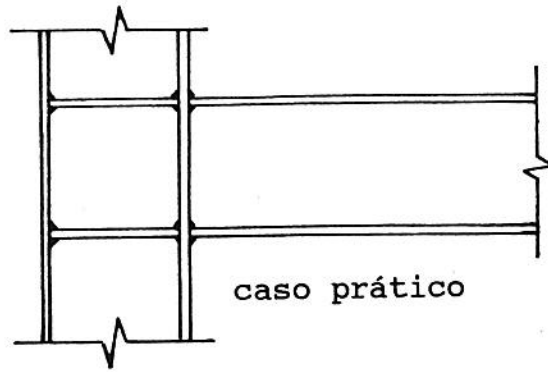
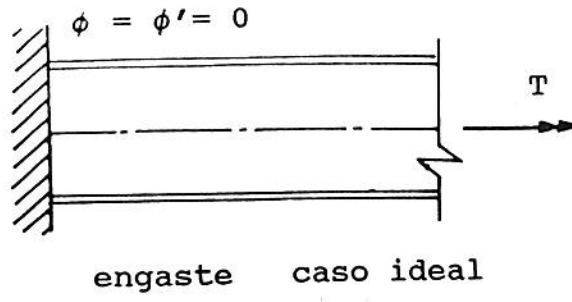


figura 2.7 Condições de contorno para torção

2.5 ANALOGIA FLEXÃO - TORÇÃO NÃO UNIFORME

No item 2.3 uma quantidade denominada bimomento foi definida de maneira rigorosa. Pode ser útil, entretanto, visualizá-lo como um tipo de resultante interna, assim como força axial ou momento fletor.

A figura 2.8 mostra as tensões normais em uma viga "I" e uma viga "C" resultante da ação de força axial, momento fletor e empenamento restringido.

As tensões de flexão não resultam em força axial, mas em um par de forças iguais e opostas separadas de uma certa distância. De maneira similar, as tensões normais de empenamento também não resultam em força axial ou momento fletor, mas podem ser visualizadas como um par de momentos iguais e opostos separados por uma distância. Este fato se reflete na unidade do bimomento, força multiplicada por distância ao quadrado.

Para uma seção "I", o efeito do bimomento toma a forma de flexões laterais iguais e opostas das flanges. Isto permite calcular-se as tensões normais de empenamento por analogia como tensões de flexão lateral das flanges. O conceito mais geral de bimomento se simplifica com o uso da analogia flexão-torção não uniforme para o cálculo de tensões de empenamento em outras seções comumente utilizadas como C e Z.

A tabela 2.1 ilustra a determinação do bimomento, momento torçor de empenamento e tensões normais e cisalhantes de empenamento em uma barra como uma função do ângulo de rotação. A tabela também mostra a determinação

análoga do momento fletor e tensões normais e cisalhantes de flexão como uma função da flecha elástica. Vlasov (1961) desenvolveu esta analogia e mostrou que nos dois casos as equações apresentam a mesma estrutura.

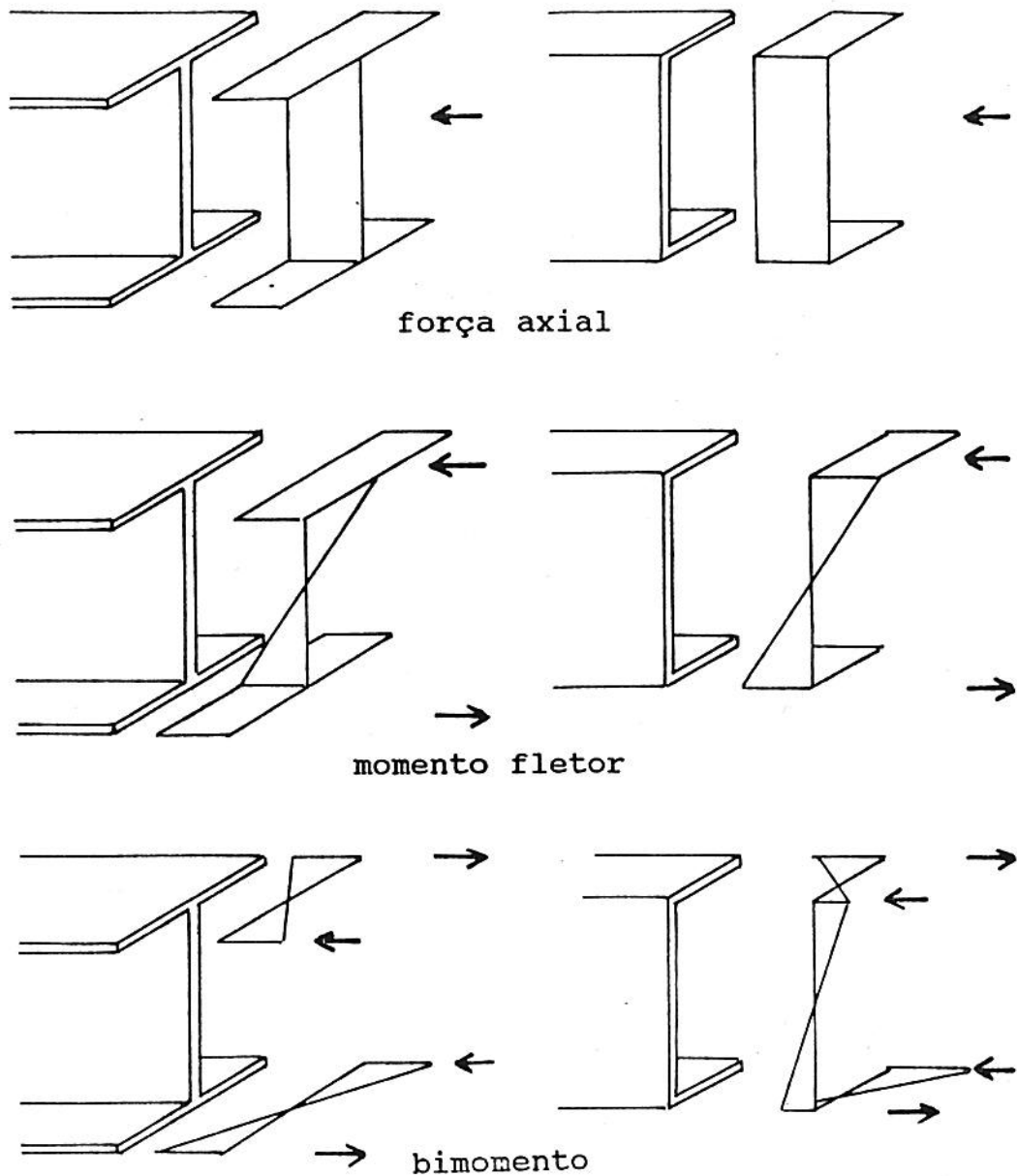


figura 2.8 Bimomento como uma resultante interna

Tabela 2.1 - Analogia flexão - torção não uniforme

ANALOGIA FLEXÃO - TORÇÃO NÃO UNIFORME		
Definição	Flexão	Torção não uniforme
Momento de inércia	$I_x = \int_A y^2 dA$	$C_\omega = \int_A \omega^2 dA$
Momento estático	$S_y = \int_A y dA$	$S_\omega = \int_A \omega dA$
Momento	$M_y = E I_y u''$	$B = E C_\omega \phi''$
Cortante	$Q_y = E I_y u'''$	$T_\omega = E C_\omega \phi'''$
Tensão normal	$\sigma = \frac{M_y x}{I_y}$	$\sigma_\omega = \frac{B \omega}{C_\omega}$
Tensão cisalhante	$\tau = \frac{Q_y S_y}{t I_y}$	$\tau_\omega = \frac{T_\omega S_\omega}{t C_\omega}$

3 MÉTODO DA RIGIDEZ APLICADO A ESTRUTURAS DE BARRAS DE PAREDES FINAS

3.1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal do método da rigidez é a determinação de uma relação entre as forças e os deslocamentos nas extremidades de cada barra que forma a estrutura. Ou seja:

$$\{ F \} = [K_E] \{ U \} \quad (3.1)$$

onde $\{ F \}$ e $\{ U \}$ são vetores contendo, respectivamente, os termos das forças e deslocamentos em ambas as extremidades da barra e $[K_E]$ a matriz de rigidez da barra, simétrica com relação à diagonal e positivo definida.

Antes que condições de compatibilidade possam ser introduzidas é necessário descrever todas as forças e deslocamentos dos extremos das barras em termos do mesmo sistema global de coordenadas. Uma transformação geométrica simples possibilita que os deslocamentos de cada barra possam ser substituídos por deslocamentos nodais comuns. As forças nodais de cada barra, expressas agora no mesmo sistema de coordenadas global, são então combinadas de modo a satisfazer as condições de equilíbrio em cada nó.

O resultado é um conjunto de equações da mesma

forma geral da equação (3.1), no qual o vetor de cargas contém todas as forças externas aplicadas aos nós, o vetor de deslocamentos contém as correspondentes componentes dos deslocamentos nodais, e a matriz de rigidez global é montada a partir da contribuição das matrizes de rigidez das barras.

As restrições da estrutura são impostas modificando ou removendo os termos associados com as posições das restrições. Este procedimento tem o efeito de tornar a matriz de rigidez não singular, permitindo sua inversão e fornecendo uma solução única para todos os deslocamentos nodais comuns. Uma retrossubstituição destes deslocamentos na equação 3.1 estabelece todas as forças nodais desconhecidas nas barras.

3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UMA BARRA DE PAREDES FINAS

Para uma barra de seção de paredes finas o estado de tensões e deformações pode ser representado por uma superposição de dois estados independentes: flexão combinada com carregamento axial em um plano principal e flexão com torção em outro plano principal. Como a flexão combinada com forças axiais faz parte da análise estrutural clássica, somente a flexão combinada com torção será tratada na seqüência.

Usualmente considera-se que estruturas do tipo grelha possuam três graus de liberdade por nó, tendo portanto a barra completa seis ações nodais. Para representar a ação do empenamento é adicionado um grau de

liberdade para cada nó do elemento de barra, como mostra a figura 3.1. Este grau de liberdade extra é a distorção de empenamento ϕ' - primeira derivada da rotação torsional com relação ao eixo longitudinal.

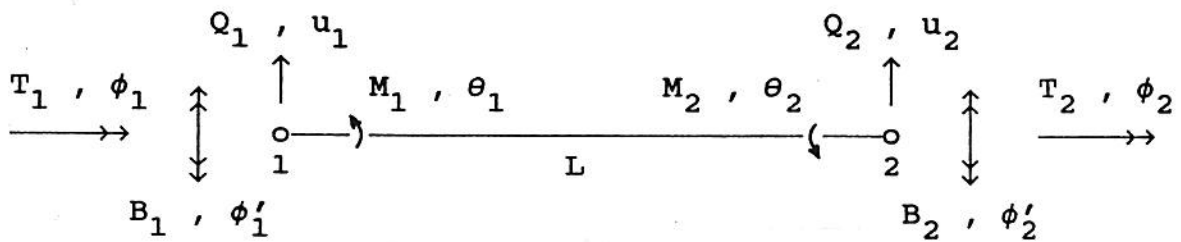


figura 3.1 - Graus de liberdade e esforços nodais em um elemento de barra de grelha de paredes finas

Bimomentos B e deslocamentos de empenamento são simbolizados por setas duplas de momentos como mostrado na figura 3.1.

Os vetores de deslocamentos e forças nodais podem ser escritos respectivamente como :

$$\{ U \}^t = \{ u_1, \theta_1, \phi_1, \phi'_1, u_2, \theta_2, \phi_2, \phi'_2 \} \quad (3.3a)$$

$$\{ F \}^t = \{ Q_1, M_1, T_1, B_1, Q_2, M_2, T_2, B_2 \} \quad (3.3b)$$

Os efeitos torsionais e de empenamento interagem entre si mas podem ser separados das considerações de flexão e cortante. A matriz de rigidez a ser determinada $[K_E]$ (8x8), pode portanto, ser obtida derivando a matriz $[K_{TW}]$ (4x4) que relaciona torção e empenamento para o

elemento mostrado na figura 3.1 e combinada com o restante da matriz $[K_E]$ como segue:

$$\begin{aligned}
 & [K_E] = \\
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\
 & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 \\
 & & K_{TW}(3,3) & K_{TW}(3,4) & 0 & 0 & K_{TW}(3,7) & K_{TW}(3,8) \\
 & & & K_{TW}(4,4) & 0 & 0 & K_{TW}(4,7) & K_{TW}(4,8) \\
 (SIMÉTRICO) & & & & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\
 & & & & & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & K_{TW}(7,7) & K_{TW}(7,8) \\
 & & & & & & & K_{TW}(8,8)
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(3.4)

3.3 OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ REFERENTE À TORÇÃO E EMPENAMENTO VIA SOLUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA TORÇÃO

A solução da equação diferencial da torção (2.41b) é dada através de (2.43).

Bimomento, momento torçor de empenamento e momento torçor de Saint-Venant são relacionados à rotação de torção através das equações (2.32), (2.38) e (2.9) respectivamente.

Os elementos da matriz $[K_{TW}]$ podem ser obtidos da seguinte maneira:

- (1) estabelecendo condições de contorno;
- (2) solucionando para as constantes de integração;
- (3) derivando expressões para o torque total e o bimomento segundo (2.9), (2.32) e (2.38).

Portanto, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ B_1 \\ T_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{TW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi'_1 \\ \phi_2 \\ \phi'_2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

em que:

$$\left[K_{TW} \right] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} (1 + 2\alpha) & \alpha L & -(1 + 2\alpha) & \alpha L \\ & L^2(\alpha - \beta) & -\alpha L & \beta L^2 \\ & & (1 + 2\alpha) & -\alpha L \\ & & & L^2(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

(simétrico)

(3.6)

onde:

$$\alpha = \frac{\cosh \lambda L - 1}{\mu} \quad ; \quad \beta = \frac{\sinh \lambda L - \lambda L}{\mu \lambda L} \quad ;$$

$$\mu = \lambda L \sinh \lambda L - 2 (\cosh \lambda L - 1)$$

Um conjunto de condições de contorno é usado para obter cada coluna da matriz $[K_{TW}]$. Por exemplo, a quarta coluna contém as ações para um empenamento unitário na extremidade direita do elemento da figura 3.1, ou seja, para as condições de contorno:

$$\phi_1 = \phi'_1 = \phi_2 = 0 \quad \text{e} \quad \phi'_2 = 1 \quad (3.7)$$

as constantes de integração da eq. 2.43 podem ser calculadas como:

$$C_1 = \frac{\lambda L - \operatorname{senh}\lambda L}{\lambda [2(\operatorname{cosh}\lambda L - 1) - \lambda L \operatorname{senh}\lambda L]} \quad (3.8a)$$

$$C_2 = \frac{\operatorname{senh}\lambda L - \lambda L}{\lambda [2(\operatorname{cosh}\lambda L - 1) - \lambda L \operatorname{senh}\lambda L]} \quad (3.8b)$$

$$C_3 = - \frac{(\operatorname{cosh}\lambda L - 1)}{\lambda [2(\operatorname{cosh}\lambda L - 1) - \lambda L \operatorname{senh}\lambda L]} \quad (3.8c)$$

$$T = \frac{GJ (\operatorname{cosh}\lambda L - 1)}{2(\operatorname{cosh}\lambda L - 1) - \lambda L \operatorname{senh}\lambda L} \quad (3.8d)$$

ou ainda, se usarmos os parâmetros α e β definidos em (3.6) :

$$C_1 = \beta L \quad (3.9a)$$

$$C_2 = -\beta L \quad (3.9b)$$

$$C_3 = \frac{\alpha}{\lambda} \quad (3.9c)$$

$$T = -\alpha G J \quad (3.9d)$$

Os esforços nodais podem ser calculados através das equações 2.9, 2.32 e 2.38:

$$T_1 = G J \alpha \quad (3.10a)$$

$$B_1 = G J \beta L \quad (3.10b)$$

$$T_2 = -G J \alpha \quad (3.10c)$$

$$B_2 = G J L (\alpha - \beta) \quad (3.10d)$$

com os quais se monta a quarta coluna da matriz de rigidez referente à torção e ao empenamento (equação 3.6).

3.4 OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ REFERENTE À TORÇÃO E EMPENAMENTO VIA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL

Uma alternativa em relação a utilização da equação diferencial da torção é a aproximação de ϕ por um polinômio que seja função de z , ou seja, a distância medida ao longo do eixo longitudinal:

$$\phi = P_1 z^3 + P_2 z^2 + P_3 z + P_4 \quad (3.11)$$

Assumindo condições de contorno, a equação (3.11) é solucionada para os coeficientes P_n os quais serão utilizados para obter expressões para as rotações e suas derivadas. Finalmente o bimomento e torção total são calculados para cada extremidade do elemento utilizando as equações (2.9), (2.32) e (2.38). Para as condições de contorno :

$$\phi_1 = \phi'_1 = \phi'_2 = 0 \quad e \quad \phi_2 = 1 \quad (3.7)$$

temos:

$$P_1 = -\frac{2}{L^3} \quad ; \quad P_2 = \frac{3}{L^2} \quad ; \quad P_3 = P_4 = 0$$

Os elementos da terceira coluna da matriz $[K_{TW}]$ serão :

$$K_{TW}(1,3) = - \frac{G J}{L} - \frac{12 E C_{\omega}}{L^3}$$

$$K_{TW}(2,3) = - \frac{6 E C_{\omega}}{L^2}$$

$$K_{TW}(3,3) = K_{TW}(1,3)$$

$$K_{TW}(4,3) = - K_{TW}(2,3)$$

Procedendo de maneira similar para as outras colunas de $[K_{TW}]$, pode-se provar (REILLY, 1972) que esta toma a forma abaixo para a interpolação indicada em (3.11):

$$\left[K_{TW} \right] = \frac{EC_{\omega}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{GJL^2}{EC_{\omega}} & 6L & -12 - \frac{GJL^2}{EC_{\omega}} & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 + \frac{GJL^2}{EC_{\omega}} & -6L \\ \text{sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Se GJ tende a zero e o empenamento se torna dominante, a matriz $[K_{TW}]$ se torna similar à matriz de rigidez para um elemento de viga onde somente deslocamentos de corte e flexão são considerados. Isto era esperado, devido ao fato que quando λ tende a zero, a equação diferencial da torção (2.41b) se torna similar à equação

diferencial da flexão .

Se C_ω tende a zero o único termo restante diferente de zero na matriz $[K_{TW}]$ é GJ/L , o que seria esperado para uma viga de seção sólida.

Ao se utilizar formulação variacional para elementos finitos, com a mesma interpolação cúbica para o ângulo de torção, demonstra-se que a matriz de rigidez para a torção não uniforme toma a forma (BARSOUM; GALLAGHER, 1970):

$$\begin{bmatrix}
 \frac{12EC_\omega}{L^3} + \frac{6GJ}{5L} & \frac{6EC_\omega}{L^2} + \frac{GJ}{10} & -\frac{12EC_\omega}{L^3} - \frac{6GJ}{5L} & \frac{6EC_\omega}{L^2} + \frac{GJ}{10} \\
 & \frac{4EC_\omega}{L} + \frac{2GJL}{15} & -\frac{6EC_\omega}{L^2} - \frac{GJ}{10} & \frac{2EC_\omega}{L} - \frac{GJL}{30} \\
 & & \frac{12EC_\omega}{L^3} + \frac{6GJ}{5L} & -\frac{6EC_\omega}{L^2} - \frac{GJ}{10} \\
 & & & \frac{4EC_\omega}{L} + \frac{2GJL}{15}
 \end{bmatrix} =$$

(3.14)

Reilly (1972) ressalta que o uso da interpolação polinomial permite uma compreensão física do comportamento do empenamento e simplifica o entendimento dos sinais dos elementos de $[K_{TW}]$.

3.5 TRANSFORMAÇÕES DE EIXOS DE REFERÊNCIA

3.5.1 DECOMPOSIÇÃO DOS ESFORÇOS SEGUNDO UM SISTEMA DE EIXOS DE REFERÊNCIA MISTO

Para desacoplarmos os modos de flexão e de torção da barra é necessário decompor os esforços (figura 3.2) referenciando-se o momento fletor M ao centróide e o cortante Q , o torçor T e o bimomento B , ao centro de cisalhamento através da transformação:

$$\begin{bmatrix} Q_s \\ M_o \\ T_s \\ B_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(x_s - x_b) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (y_s - y_b) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_b \\ M_b \\ T_b \\ B_b \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

sendo (x_s, y_s) coordenadas do centro de cisalhamento e (x_b, y_b) coordenadas de um eixo qualquer paralelo aos eixos principais do elemento ao qual localizaremos a barra.

Reescrevendo a equação (3.15) simplificadamente:

$$\{F_{os}\} = [T_{bs}] \{F_b\} \quad (3.16)$$

A matriz $[T_{bs}]$ transformará a matriz de rigidez do elemento de um sistema de eixos misto "os" (centróide e

centro de cisalhamento) para um sistema unificado "b" da seguinte maneira:

$$[K_b] = [T_{bs}][K_{os}][T_{bs}]^t \quad (3.17)$$

sendo $[K]$ matriz de rigidez . O sub-índice "b" ou "os" indica o sistema de eixos em que se referencia $[K]$.

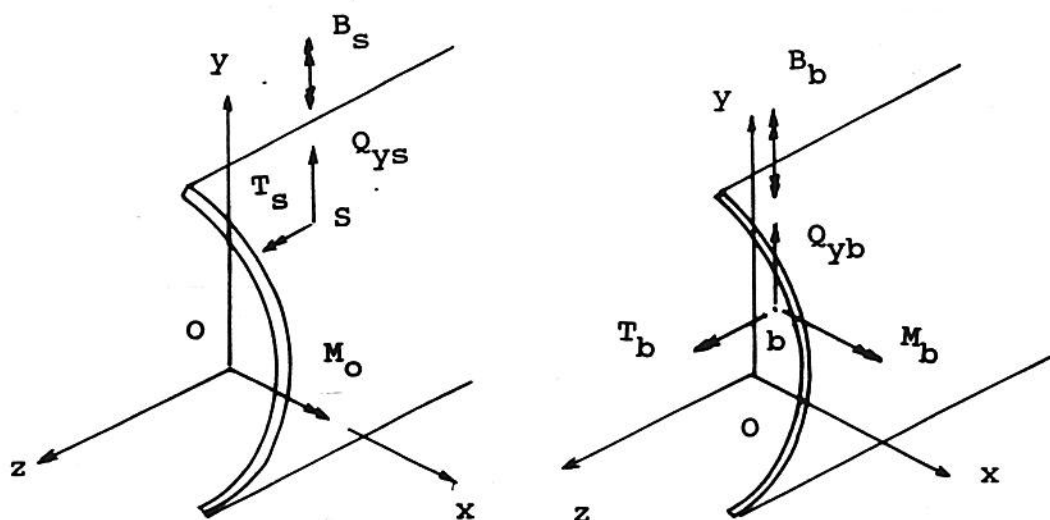


figura 3.2 Decomposição dos esforços

3.5.2 TRANSFORMAÇÃO PARA DIREÇÕES GENERALIZADAS

A transformação dos deslocamentos do sistema de eixos locais para o sistema de eixos global é "standard" no método da rigidez e pode ser expressa para os graus de liberdade convencionais como:

$$\{U_{\text{global}}\} = [T] \{U_{\text{local}}\} \quad (3.18)$$

sendo a matriz [T] a matriz de rotação que contém os cossenos diretores entre os dois sistemas de eixos.

A adição do deslocamento de empenamento ϕ' - medida ao longo do eixo longitudinal da barra - implicaria na definição de componentes ϕ' segundo os eixos globais.

ETTONEY ; KIRBY (1981) recomendam expressar os deslocamentos nodais usuais em termos de coordenadas globais, enquanto que os de empenamento em coordenadas locais, pois estes não seguiriam as regras usuais de transformação.

Já SHARMAN (1985) prova que não é necessário fazer nenhuma transformação com o deslocamento de empenamento ϕ' . A partir da hipótese de que não haja distorção da seção transversal no seu próprio plano, verifica-se que existem relações geométricas simples entre a derivada do ângulo de torção segundo o eixo longitudinal da barra e a derivada dos ângulos de rotação em direções perpendiculares. Seja a barra de seção I da figura 3.3.

O empenamento da seção no ponto P vale, segundo a equação (2.15):

$$w_P = \omega_P \phi'_z$$

sendo para seções "I" (fig. 3.3):

$$\omega_P = \frac{b d}{4} \quad (3.19)$$

logo :

$$\phi'_z = \frac{4}{b d} w_p \quad (3.20)$$

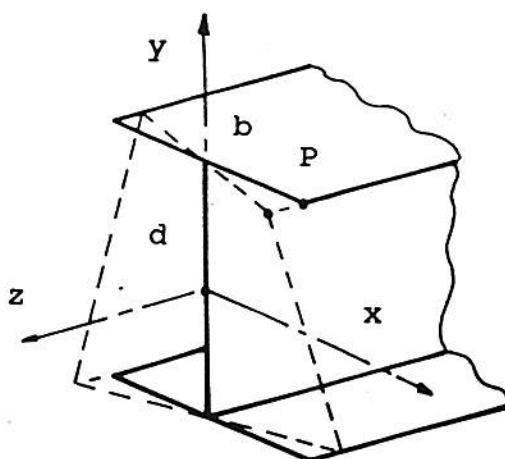


figura 3.3 - Relações geométricas entre ϕ' de direções ortogonais

Já para o ângulo de rotação segundo o eixo y podemos escrever:

$$\phi_y = -\frac{w_p}{b/2} \quad \text{para } y = \frac{d}{2} \quad (3.21a)$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad (3.21b)$$

ou seja :

$$\phi_y = -\frac{4 w_p}{b d} y$$

portanto :

$$\phi'_y = - \frac{4 w_p}{b d} \quad (3.22)$$

Para o ângulo de rotação segundo o eixo x, de maneira análoga, chega-se a:

$$\phi'_x = \frac{4 w_p}{bd} \quad (3.23)$$

Concluimos, portanto , a partir de (3.20), (3.22) e (3.23) :

$$\phi'_x = \phi'_z \quad (3.24a)$$

$$\phi'_y = - \phi'_z \quad (3.24b)$$

ou seja, somente um deslocamento ϕ' precisa ser especificado, visto que os outros são linearmente dependentes. Sharman demonstra ainda que para seções do tipo C essas relações são válidas.

Para efetuar compatibilidade de deslocamentos ϕ' em direções arbitrárias é introduzida na linha e coluna referente a ϕ' da matriz de rotação uma constante de transformação C, cujo valor leva em consideração a disposição geométrica e a orientação da seção.

Portanto, pode-se escrever a transformação dos deslocamentos como:

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta \\ \phi \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [T]_{3 \times 3} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \theta_x \\ \phi_z \\ \phi'_z \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Logo a transformação dos deslocamentos, forças e da matriz de rigidez será da seguinte maneira:

$$\{U_{\text{local}}\} = [T^*] \{U_{\text{global}}\} \quad (3.26)$$

$$\{F_{\text{local}}\} = [T^*] \{F_{\text{global}}\} \quad (3.27)$$

$$[K_E^{\text{global}}] = [T^*]^{-1} [K_E^{\text{local}}] [T^*] \quad (3.28)$$

A presença de um termo somente na diagonal para transformação da taxa de torção pode ser explicada por um raciocínio simplesmente intuitivo. Se as colunas relacionadas a ϕ' tivessem elementos diferentes de zero fora da diagonal, o empenamento ϕ' produziria um deslocamento de corpo rígido no mesmo nó e o bimomento B resultaria em uma força ou momento interno no mesmo nó, ambas características falsas. Portanto, somente o termo da diagonal das colunas deve ser diferente de zero. Se as linhas relacionando ϕ' possuírem termos não nulos fora da diagonal, deslocamentos de corpo rígido não poderiam

ocorrer sem produzir empenamento no nó, e forças e momentos internos causariam um bimomento, ambos os casos novamente impossíveis. Portanto, somente o termo da diagonal deve ser diferente de zero.

3.6 APLICAÇÃO DOS ELEMENTOS DE VIGA DE PAREDES FINAS

Enquanto grande parte dos autores assumem variação cúbica dos parâmetros de deslocamentos ao longo da barra, Krajcinovic (1969) argumenta que funções de influência exatamente estáticas devem ser usadas, salientando que os polinômios cúbicos conduzem a grandes erros quando a rigidez de torção de Saint-Venant (GJ) não pode ser negligenciada.

A presente dissertação utiliza os elementos derivados da solução da equação diferencial da torção pois apenas um elemento por barra é suficiente para se obter valores exatos dos parâmetros nodais (DVORKIN et al., 1987). Mais ainda, a forma simples de sua implementação não justifica a perda de precisão ao utilizar-se interpolações aproximadas.

4 TRANSMISSÃO E RESTRIÇÃO PARCIAL DO EMPENAMENTO

4.1 INTRODUÇÃO

Os procedimentos convencionais para a análise de estruturas de barras dependem da hipótese básica que as conexões de extremidade sejam rotuladas ou completamente rígidas. Estas hipóteses são largamente adotadas na prática, apesar do conhecimento de que poucas conexões as satisfazem, e ainda que economias significantes de material podem ser obtidas se o comportamento real da conexão é representado.

Para os casos de estruturas de barras em que não se considera o efeito do empenamento, e especificamente para estruturas metálicas, já existem estudos e métodos razoavelmente eficientes para se incorporar os efeitos da restrição e transmissão parcial da conexão na análise, principalmente para conexão parcial de momentos fletores (LUI ; CHEN , 1986), (BLANDFORD, 1987), (AL-BERMANI ; KITIPORNCHAI, 1992).

Já para o caso da inclusão do efeito do empenamento, que pode induzir tensões significativas na barra, existe pouco estudo sobre a influência da conexão sobre o empenamento.

A prevenção do empenamento é um meio efetivo de melhorar as características de flambagem lateral e de torção de barras. Projetistas raramente tiram proveito

das restrições naturais ao empenamento existentes nos nós das estruturas (OJALVO, 1975), (MURTA-SMITH; MAGYAR, 1991).

Especificamente para a torção costuma-se adotar uma das duas hipóteses a seguir :

(a) a conexão oferece restrição total, nula ou parcial ao empenamento e nenhum empenamento é transmitido para as barras adjacentes;

(b) a conexão é completamente rígida e todo o empenamento é transmitido para as barras adjacentes.

A hipótese (a) é ativada através da consideração de descontinuidade absoluta com relação ao empenamento. A consideração de empenamento totalmente livre não se verifica em muitos casos. Tomemos, por exemplo, a conexão mostrada na figura 4.1a, onde se assume que nenhuma restrição é oferecida ao empenamento. As barras estarão, portanto, submetidas somente à torção de Saint-Venant. Para manter a continuidade da conexão, é necessário o surgimento de um bimomento para "fechar" o nó (figura 4.1b). Esse bimomento é indicado na figura 4.1c em forma simplificada. As quatro forças de igual magnitude e direções opostas formam pares em cada flange. O valor do momento em cada flange multiplicado pela altura do perfil fornece o valor do bimomento.

A hipótese (b) é cumprida se a continuidade do empenamento é considerada, ou seja, os nós comuns de um conjunto de barras experimentam o mesmo empenamento (REILLY, 1972), (DVORKIN et al., 1989). Testes experimentais para uma variada gama de conexões indicam que esta hipótese não é cumprida na maior parte das vezes

devido à existência da conexão parcial (MEGSON; ALADE, 1976) e do não compreendimento da forma da transmissão do empenamento através do nó (MORRELL, 1979).

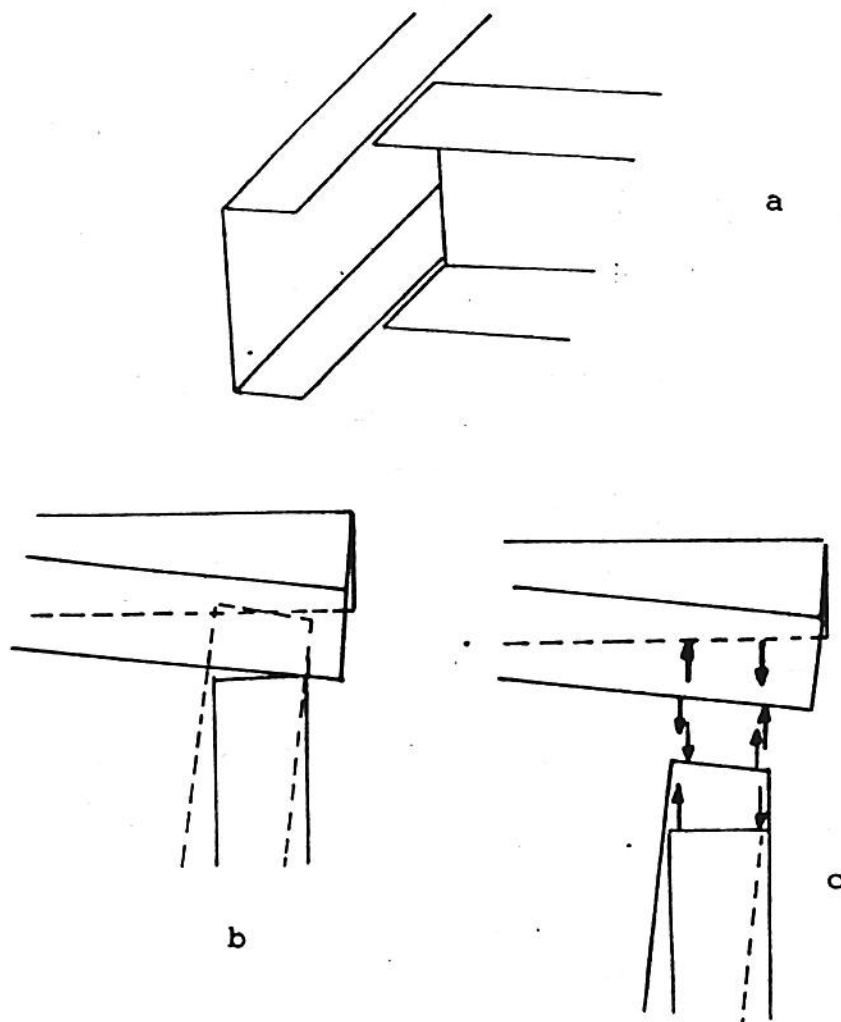


figura 4.1 - Condições de continuidade em um nó de barras de seção "C" submetidas à torção

A análise estática em geral inclui o cálculo de deformações e forças internas tais como momentos fletores, torques e bimomentos. A partir destes, tensões e podem ser calculadas para diferentes seções transversais. Medições experimentais têm verificado as forças resultantes internas, enquanto a precisão da distribuição de tensões se

deteriora à medida em que se aproxima do nó (BEERMAN, 1980).

4.2 INFLUÊNCIA DA CONEXÃO NO EMPENAMENTO

Detalhes de nós em estruturas de vigas de paredes finas podem ser divididos em duas categorias :

a) nós onde todos os elementos de placa que compõem uma barra são rigidamente conectados aos da(s) outra(s) (figuras 4.2a e 4.2c);

b) nos onde há uma conexão parcial (figuras 4.2b, 4.2d e 4.2e) .

VACHARAJITTIPHAN ; TRAHAIR (1974) realizaram estudos sobre o tipo de nó da figura 4.2b, porém limitaram-se à influência da configuração de enrijecedores de nós no empenamento da barra e não consideraram o problema da transmissão do empenamento.

A análise dos autores estão baseadas na hipótese que o nó fornece uma restrição elástica ao empenamento separada para cada barra conectada, ou seja, a restrição oferecida pelo nó em uma barra não é afetada pelas outras barras conectadas. Entretanto, testes experimentais indicam que para casos das figuras 4.2a-c as barras interagem umas com as outras na conexão (RENTON, 1974 apud SHARMAN, 1985).

RENTON (1972) considerou vigas de seção I conectadas de modo que seus flanges pertençam a um mesmo plano (fig. 4.2a). RENTON (1972) ressalta que as rotações relativas dos flanges devem ser comuns, de modo que a distorção de empenamento é a mesma para todas as barras

conectadas no nó.

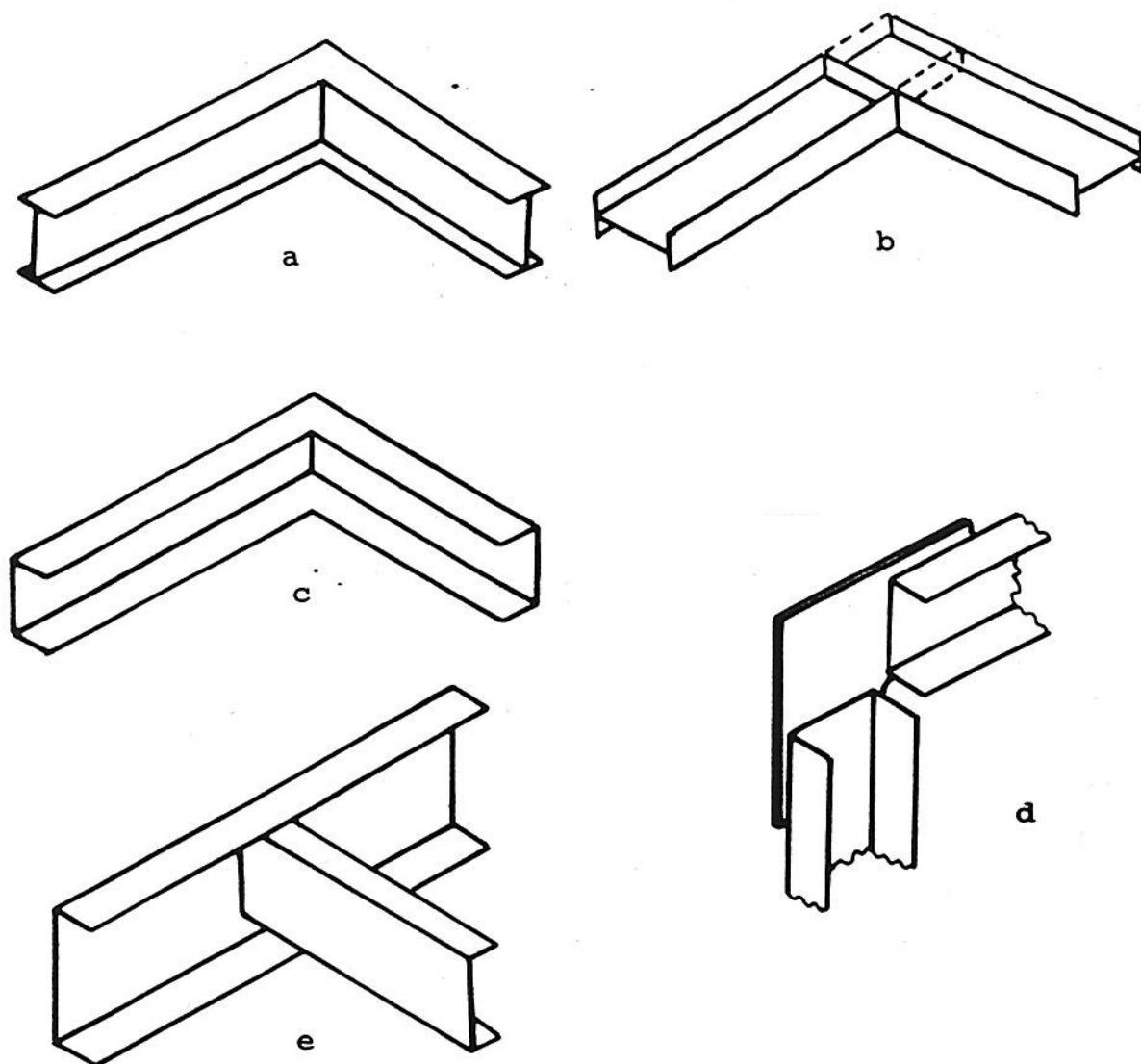


figura 4.2 - Exemplos de conexões de barras

MORRELL (1979), em um trabalho experimental sobre os nós indicados nas figuras 4.2b e 4.2c, conclui indicando que:

a) efeitos de empenamentos são transmitidos em toda e qualquer estrutura axialmente descontínua, independentemente do ângulo do nó;

b) a construção do nó influencia a magnitude e o

sinal do bimomento transmitido.

BEERMAN (1980) ressalta que a concordância entre resultados experimentais e analíticos só é obtida através da consideração da restrição parcial ao empenamento.

SHARMAN (1985) definiu um coeficiente C que indica a transmissão da taxa de torção entre barras do tipo das figuras 4.2a , 4.2b , 4.2c entre outros.

BAIGENT; HANCOCK (1982), apesar de mencionarem a existência do problema de transmissão em vários tipos de nós, limitaram-se a analisar o tipo indicado na figura 4.2d em que a placa de nó não transmite bimomento e todo o torque é transmitido apenas por torção pura.

MEGSON; ALADIS (1976) e MEGSON; ERGATOUDIS (1979) estudaram a influência da restrição ao empenamento em barras secundárias de grelhas (figura 4.2e) e observaram que a rigidez de torção para os exemplos estudados situava-se dentro dos extremos de restrição total e nula do empenamento.

4.3 TRATAMENTOS MATEMÁTICOS

Um procedimento geral torna-se de difícil obtenção devido à grande variedade de tipos de seções e conexões possíveis neste tipo de estruturas, que conforme já foi salientado, exercem enorme influência.

Aproximações, entretanto, podem ser estabelecidas. A flexibilidade do nó pode ser representada por uma mola rotacional simples, embora o valor de sua rigidez não seja facilmente acessado. A rigidez pode ser

representada por uma matriz compilada tanto por análise em elementos finitos do nó quanto por medidas experimentais (BEERMAN,1980).

A consideração de que o nó seja infinitamente rígido elimina a existência da restrição parcial e reduz o problema à transmissão cinemática do deslocamento de empenamento, formando o conceito de "coeficiente de transmissão" proposto por SHARMAN (1985).

O fato de que os bimomentos sejam esforços auto-equilibrados justifica o tratamento de conexões como descontinuidades, como propõem YANG ; MCGUIRE (1984) quando definem "indicador de empenamento". As duas aproximações encontram-se desenvolvidos no decorrer do capítulo.

Nesta dissertação se acrescenta, ainda, uma adaptação do tratamento para conexões parciais de momentos fletores, desenvolvido por ROMSTAD; SUBRAMANIAN (1970). Tirando proveito da generalidade do método original, desenvolveu-se uma formulação para conexão parcial de empenamento.

4.3.1 COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO

SHARMAN (1985) sugeriu utilizar a moldagem de nós em elementos de casca poliédrica para definir um coeficiente C que indica a transmissão de empenamento em conexões de duas barras.

Para tanto aplica-se na estrutura um momento torçor e calcula-se a derivada do ângulo de torção na

seção transversal imediatamente anterior ao nó (ϕ'_1) - barra carregada - e na imediatamente posterior (ϕ'_2) - barra não carregada. O coeficiente C, portanto será calculado como:

$$C = \frac{\phi'_2}{\phi'_1} \quad (4.1)$$

BAZANT ; NIMEIRI (1973) especificam que o mesmo coeficiente de transmissão deveria se aplicar na direção oposta, ou seja , $\phi'_1 = C \phi'_2$, o que só seria possível com um coeficiente C igual a unidade. O argumento, entretanto, não é consistente com o problema, visto que as distribuições dos deslocamentos $w = \phi' \omega$ em conexões de elementos retos são claramente incompatíveis, como exemplifica a figura 4.3:

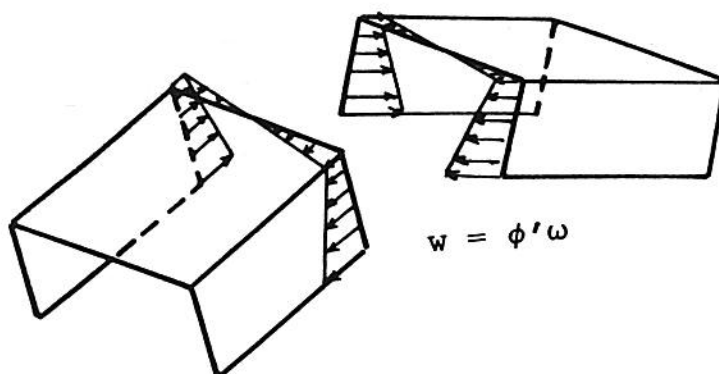


Figura 4.3 - Incompatibilidade das distribuições dos deslocamentos de empenamento em conexão de dois elementos

SHARMAN (1985) admite para a conexão de vigas I da figura 4.1a a condição de completa continuidade do empenamento ($C = 1$). Já para conexões de vigas C (figura 4.1b) reconhece que para continuidade completa do empenamento no nó devem ocorrer efeitos adicionais de flexão, e portanto existe uma restrição elástica do empenamento. Apesar disso é admitido que o empenamento remanescente da restrição se transmita completamente ($C = 1$).

SHARMAN (1985) reconhece, entretanto, que não há notícias de resultados experimentais para as configurações descritas por ele. Um problema adicional é de que a magnitude da taxa de torção pode estar restringida elasticamente no nó, alterando os valores da transmissão (BEERMAN, 1980), (MEGSON; ALADE, 1976), (MEGSON et al., 1979).

Para outras configurações, especialmente aquelas em que as flanges não são coplanares (figuras 4.1b, 4.1d e 4.1e), claramente há uma descontinuidade no empenamento, visto que as rotações dos flanges, além de ocorrerem em planos diferentes, podem ter valores distintos para as barras envolvidas.

4.3.2 INDICADOR DE EMPENAMENTO

Um tratamento de descontinuidades em estruturas de barras de paredes finas foi desenvolvido por ETTOUNEY ; KIRBY (1981) e YANG ; MCGUIRE (1984). Deve-se salientar que esta formulação não admite transmissão do empenamento.

ETTOUNEY; KIRBY (1980) definiram um fator de restrição de empenamento ("warping restraint factor") - razão entre o bimomento da conexão parcialmente restringida e o bimomento obtido para uma conexão completamente fixa - para prescrever o grau de restrição ao empenamento nos extremos da barra.

YANG; MCGUIRE (1984) introduziram o conceito de indicador de empenamento ("warping indicator") - razão entre a derivada do ângulo de torção para a conexão parcialmente restringida e a obtida para uma conexão completamente livre - de modo a definir a restrição ao empenamento nos extremos da barra.

Ambos fatores - fator de restrição ao empenamento " a_R " e indicador de empenamento " a " - variam entre zero e um, porém os valores numéricos estão em extremos opostos do espectro : " a_R " = 0 e " a " = 1 para empenamento livre e, " a_R " = 1 e " a " = 0 para empenamento restringido.

A solução apresentada por YANG; MCGUIRE (1984) será adotada neste trabalho visto que o indicador de empenamento pode ser determinado experimentalmente de maneira mais simples pois é função de medidas de deslocamentos e não de esforços.

A descontinuidade existente pode ser eliminada através do processo usual de condensação estática.

4.3.2.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO DE EMPENAMENTO PARA UMA VIGA

Podemos classificar os extremos de uma barra como contínuos ou não contínuos ao empenamento. O nó

considerado como contínuo é aquele em que todas as barras que estejam ligadas a este apresentam o mesmo empenamento. Um nó não contínuo é aquele em que existe alguma descontinuidade ao empenamento, causada por alguma restrição.

Chamamos de restrição o intervalo entre o empenamento completamente livre e o completamente restringido, surgindo daí a noção de restrição parcial.

Se ambos extremos forem restringidos (descontínuos) com relação ao empenamento podemos escrever a equação (3.1) como:

$$\begin{bmatrix} [K_{cc}] & [K_{cn}] \\ [K_{nc}] & [K_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U_c\} \\ \{U_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_c\} \\ \{F_n\} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde o sub-índice "c" se refere aos graus de liberdade contínuos e o sub-índice "n" aos graus de liberdade não contínuos.

Representaremos a restrição parcial ao empenamento através de molas elásticas "s". Escrevemos então, para as extremidades "1" e "2" da barra :

$$B_1 = -s_1 \phi'_1 \quad ; \quad B_2 = -s_2 \phi'_2 \quad (4.3)$$

B_1 e B_2 são as reações das molas elásticas de empenamento nos extremos da barra.

Substituindo a equação (4.3) na equação (4.2) :

$$\begin{bmatrix} [K_{cc}] & [K_{cn}] \\ [K_{nc}] & [K_{nn}^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U_c\} \\ \{U_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_c\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde :

$$[K_{nn}^*] = [K_{nn}] + \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Aplicando um processo de condensação estática na equação (4.4) , da linha inferior de (4.4) :

$$\{U_n\} = - [K_{nn}^*]^{-1} [K_{nc}] \{U_c\} \quad (4.6)$$

Substituindo na linha superior de (4.4), chegamos à forma condensada:

$$[K_{cc}^*] \{U_c\} = \{F_c\} \quad (4.7)$$

em que :

$$[K_{cc}^*] = [K_{cc}] - [K_{cn}] [K_{nn}^*]^{-1} [K_{nc}] \quad (4.8)$$

Para o caso de somente uma extremidade descontínua, a mesma formulação anterior pode ser aplicada exceto que não é utilizada mola de empenamento no extremo contínuo.

Já no caso de ambos extremos serem contínuos ao empenamento, não há a necessidade de condensação estática.

4.3.2.2 RIGIDEZ ELÁSTICA DA MOLA DE EMPENAMENTO

A solução da equação diferencial da torção (2.41b) para a viga representada na figura 4.4:

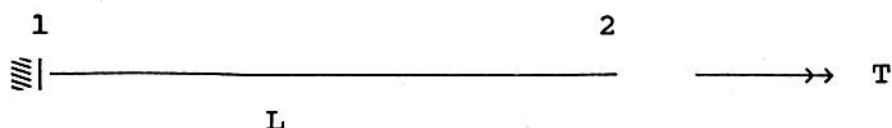


Figura 4.4 - Barra submetida a torção

sujeita ainda a restrições elásticas ao empenamento:

$$B_1 = -s_1 \phi_1' \quad ; \quad B_2 = -s_2 \phi_2'$$

ou de (2.32) :

$$\phi_1'' = \frac{s_1}{E C_\omega} \phi_1' \quad ; \quad \phi_2'' = -\frac{s_2}{E C_\omega} \phi_2' \quad (4.9)$$

resulta em (vide equação 2.43):

$$\phi = C_1 + C_2 \cosh \lambda z + C_3 \sinh \lambda z + \frac{T z}{G J}$$

onde as constantes de integração assumem os valores :

$$C_1 = - \frac{T}{G J} \cdot \frac{s_1 \sinh \lambda L - (s_1 s_2 / GJ) \lambda (1 - \cosh \lambda L)}{\lambda (s_1 + s_2) \cosh \lambda L + (GJ + s_1 s_2 / EC_\omega) \sinh \lambda L} \quad (4.10a)$$

$$C_3 = \frac{T}{G J} \cdot \frac{s_2 + s_1 \cosh \lambda L + (s_1 s_2 / GJ) \lambda \sinh \lambda L}{\lambda (s_1 + s_2) \cosh \lambda L + (GJ + s_1 s_2 / EC_\omega) \sinh \lambda L} \quad (4.10b)$$

$$C_2 = - C_1 \quad (4.10c)$$

Uma simplificação possível é a introdução de um índice chamado de indicador de empenamento ("warping indicator"). Define-se como indicador de empenamento a razão entre as deformações de empenamento em um extremo da barra quando este está parcialmente restringido ao empenamento e as deformações de empenamento no mesmo extremo quando este está livre para empenar. Ou seja, para os extremos 1 e 2 :

$$a_1 = \frac{\phi'_1}{(\phi'_1)_{s_1=0}} \quad (4.11a)$$

$$a_2 = \frac{\phi'_2}{(\phi'_2)_{s_2=0}} \quad (4.11b)$$

Para empenamento livre no extremo 1, segue que (a partir de 4.10 fazendo $s_1 = 0$ e 2.43) :

$$(\phi'_1)_{s_1=0} = \frac{T}{G J} \frac{\lambda s_2 (\cosh \lambda L - 1) + GJ \sinh \lambda L}{\lambda s_2 \cosh \lambda L + GJ \sinh \lambda L} \quad (4.12)$$

A partir de (4.11a) :

$$a_1 = \frac{\lambda s_2 + GJ \tanh \lambda L}{\lambda (s_1 + s_2) + (GJ + s_1 s_2 / EC_\omega) \tanh \lambda L} \quad (4.13)$$

rearranjando a equação (4.13) :

$$s_1 a_1 + s_2 (a_1 - 1) + s_1 s_2 \frac{a_1}{E C_\omega} \tanh \lambda L = \frac{G J}{\lambda} (1 - a_1) \tanh \lambda L \quad (4.14)$$

e definindo :

$$\check{s}_1 = s_1 \left(\frac{1}{GJEC_\omega} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \check{s}_2 = s_2 \left(\frac{1}{GJEC_\omega} \right)^{1/2} \quad (4.15)$$

a equação (4.14) pode ser reduzida à forma adimensional a seguir :

$$\check{s}_1 a_1 + \check{s}_2 (a_1 - 1) + \check{s}_1 \check{s}_2 a_1 \tanh \lambda L = (1 - a_1) \tanh \lambda L \quad (4.16)$$

Da mesma maneira podemos proceder para o indicador de empenamento do extremo 2 e chega-se (YANG ; MCGUIRE, 1984) a uma segunda equação adimensionalizada :

$$\check{s}_2 a_2 + \check{s}_1 (a_2 - 1) + \check{s}_1 \check{s}_2 a_2 \tanh \lambda L = (1 - a_2) \tanh \lambda L \quad (4.17)$$

As equações (4.16) e (4.17) formam um sistema de

equações que pode ser solucionado para \check{s}_1 e \check{s}_2 , fornecidos a_1 e a_2 .

Demonstra-se (YANG ; McGUIRE,1984) que a solução deste sistema pode ser obtida através de :

$$r_1 \check{s}_2^2 + r_2 \check{s}_2 + r_3 = 0 \quad (4.18a)$$

$$\check{s}_1 = (c_4 - c_2 \check{s}_2) / (c_1 + c_3 \check{s}_2) \quad (4.18b)$$

onde :

$$r_1 = a_2 \tanh \lambda L$$

$$r_2 = a_1 + a_2 - 1 + (a_2 - a_1) \tanh^2 \lambda L$$

$$r_3 = (a_2 - 1) \tanh \lambda L$$

$$c_1 = a_1$$

$$c_2 = a_1 - 1$$

$$c_3 = a_1 \tanh \lambda L$$

$$c_4 = (GJ / \lambda) (1 - a_1) \tanh \lambda L$$

Pode-se provar que uma solução para \check{s}_2 na equação (4.18a) é sempre positiva e a outra é sempre negativa. Como uma mola de rigidez negativa não possui significado físico, somente a raiz positiva será considerada. O sinal de a_1 em (4.18b) acompanha o sinal de a_2 .

4.3.2.3 RESUMO DO MÉTODO DO INDICADOR DE EMPENAMENTO

Para ambos extremos da barra descontínuos com

relação ao empenamento, pode-se demonstrar que o método tem a seguinte seqüência de cálculo (o conjunto de operações matriciais já está explicitado) :

1) DADOS :

$$a_1, a_2, E, G, J, C_\omega, \lambda, L$$

2) MOLAS DE EMPENAMENTO :

a) RESOLVER :

$$r_1(\check{s}_2)^2 + r_2\check{s}_2 + r_3 = 0 ; \check{s}_2 > 0$$

sendo $r_1 = a_2 \tanh \lambda L$;

$$r_2 = a_1 + a_2 - 1 + (a_2 - a_1) \tanh^2 \lambda L ;$$

$$r_3 = (a_2 - 1) \tanh \lambda L$$

b) CALCULAR:

$$\check{s}_1 = \frac{(1 - a_1) \tanh \lambda L - (a_1 - 1) \check{s}_2}{a_1 + \check{s}_2 a_1 \tanh \lambda L}$$

$$s_1 = \check{s}_1 (GJEC_\omega)^{1/2} ; \quad s_2 = \check{s}_2 (GJEC_\omega)^{1/2}$$

3) MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

$$\begin{bmatrix} k_{cc_{11}}^* & k_{cc_{12}}^* \\ k_{cc_{21}}^* & k_{cc_{22}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

a) CALCULAR

$$k_{cc_{11}}^* = \frac{GJ}{L} [(1 + 2\alpha) - m]$$

$$k_{cc_{22}}^* = k_{cc_{11}}^*$$

$$k_{cc_{12}}^* = k_{cc_{21}}^* = - k_{cc_{11}}^*$$

$$m = \alpha^2 \cdot \frac{2\alpha - 4\beta + s_1^* + s_2^*}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + (\alpha - \beta)(s_1^* + s_2^*) + s_1^*s_2^*}$$

no qual :

$$s_1^* = \frac{s_1}{GJL} \quad ; \quad s_2^* = \frac{s_2}{GJL}$$

4) APÓS A RESOLUÇÃO DA ESTRUTURA, PARA A BARRA:

a) DERIVADAS DO ÂNGULO DE TORÇÃO

$$\phi_1' = f [-\phi_1 + \phi_2] \quad ; \quad \phi_2' = g [-\phi_1 + \phi_2]$$

sendo:

$$f = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha \cdot s_2^*) / r$$

$$g = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha \cdot s_1^*) / r$$

no qual :

$$r = L [\alpha^2 - 2\alpha\beta + (\alpha - \beta)(s_1^* + s_2^*) + s_1^*s_2^*]$$

b) BIMOMENTOS

$$B_1 = -s_1 \phi'_1 \quad ; \quad B_2 = -s_2 \phi'_2$$

4.3.3 RIGIDEZ PERCENTUAL DE EMPENAMENTO

Neste método são definidas molas elásticas de empenamento nas extremidades da barra, condensando-as à matriz de rigidez do elemento.

Deseja-se que os bimomentos B_1 e B_2 sejam conectados a molas rotacionais elásticas, K_{M1} e K_{M2} , respectivamente, que representariam a rigidez ao empenamento do nó, de modo que possamos escrever:

$$B_1 = K_{M1} \kappa_1 \quad (4.19a)$$

$$B_2 = K_{M2} \kappa_2 \quad (4.19b)$$

sendo κ_1 e κ_2 deslocamentos de empenamento das molas.

A rigidez ao empenamento na extremidade de uma barra é definida como o esforço necessário para produzir um empenamento unitário nesta extremidade enquanto todos os outros deslocamentos são restrinidos.

A equação de rigidez ao empenamento da barra para a extremidade 1 pode ser escrita como (vide matriz de rigidez da barra):

$$B_1 = GJL(\alpha - \beta) (\varphi_1 - \kappa_1) \quad (4.20)$$

no qual :

φ_1 = deslocamento de empenamento do nó ,

$\varphi'_1 = (\varphi_1 - \kappa_1)$ = deslocamento de empenamento da
extremidade da barra

Podemos escrever ainda :

$$B_1 = K_{M1} \kappa_1 = S_1 GJL\kappa_1 \quad (4.21)$$

no qual $K_{M1} = S_1 GJL$.

Simplificam-se então as equações (4.20) e (4.21)
da seguinte maneira :

$$GJL (\alpha - \beta)(\varphi_1 - \kappa_1) = S_1 GJL \kappa_1$$

$$GJL(\alpha - \beta)\varphi_1 - GJL(\alpha - \beta) \kappa_1 = S_1 GJL \kappa_1$$

$$GJL \kappa_1 [S_1 + (\alpha - \beta)] = GJL(\alpha - \beta) \varphi_1$$

portanto:

$$\frac{\kappa'_1}{\varphi_1} = \frac{(\alpha - \beta)}{S_1 + (\alpha - \beta)} \quad (4.22)$$

Definimos agora rigidez percentual como a razão entre o bimomento requerido para produzir um empenamento unitário no nó com uma restrição parcial e o bimomento necessário para produzir um empenamento unitário com uma

conexão rígida , e a partir das equações (4.16) e (4.18):

$$p_1 = \frac{B_1}{\bar{B}_1} = \frac{GJL(\alpha - \beta) \left(1 - \frac{(\alpha - \beta)}{S_1 + (\alpha - \beta)} \right)}{GJL(\alpha - \beta) (1 - 0)}$$

resultando :

$$p_1 = \frac{S_1}{S_1 + (\alpha - \beta)} \quad (4.23)$$

Substituindo S_1 pelo seu valor da equação (4.21):

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{GJL(\alpha - \beta)}{K_{M1}}}$$

ou ainda :

$$p_1 = \frac{K_{M1}}{K_{M1} + GJL(\alpha - \beta)} \quad (4.24)$$

Observemos que um resultado semelhante pode ser obtido se considerarmos a associação das rigidezes da barra e da conexão para o referido grau de liberdade como uma associação de molas em série.

Por definição, duas molas em série de rigidezes K_A e K_B possuem rigidez equivalente K_{equiv} dada pela expressão:

$$\frac{1}{K_{\text{equiv}}} = \frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B} \quad (4.25)$$

resultando :

$$K_{\text{equiv}} = \frac{K_A K_B}{K_A + K_B} \quad (4.26)$$

Associando K_A à rigidez da barra para o grau de liberdade em estudo e K_B à rigidez da conexão para o empenamento pode-se escrever :

$$K_{\text{equiv}} = \frac{GJL(\alpha - \beta) K_{M1}}{GJL(\alpha - \beta) + K_{M1}} \quad (4.27)$$

A perda de rigidez, portanto, para o grau de liberdade, pode ser expressa como a razão entre a rigidez da barra com uma conexão parcial (K_{equiv}) e a rigidez com uma conexão rígida ($GJL(\alpha - \beta)$), ou seja, é a mesma rigidez percentual definida anteriormente:

$$p_1 = \frac{GJL(\alpha - \beta) K_{M1}}{GJL(\alpha - \beta) + K_{M1}} \cdot \frac{1}{GJL(\alpha - \beta)}$$

$$p_1 = \frac{K_{M1}}{GJL(\alpha - \beta) + K_{M1}}$$

À medida que a rigidez da conexão K_{M1} cresce, a rigidez equivalente para o grau de liberdade tende a ter o mesmo valor da rigidez da barras, sem considerar a restrição parcial. Isto mostra que para uma situação de conexão rígida (K_{M1} tendendo a um valor muito grande), pode-se desprezar o efeito do nó na rigidez - e é o que usualmente se adota no cálculo de estruturas de barras, mesmo algumas vezes incorrendo em erro.

4.3.3.1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UMA BARRA DE PAREDES FINAS CONSIDERANDO RESTRIÇÕES ELÁSTICAS AO EMPENAMENTO NAS EXTREMIDADES

O efeito das conexões elásticas pode ser inserido na relação (3.1) definindo-se um vetor $\{U_{local}^{mola}\}$. Este vetor é a diferença entre os deslocamentos nodais em coordenadas locais e os deslocamentos de extremidade de barra em coordenadas locais. Ou seja :

$$\{U_{local}^{barra}\} = [T]\{U_{global}\} - \{U_{local}^{mola}\} \quad (4.28)$$

As forças de extremidade podem ser expressas em termos dos deslocamentos da mola de extremidade . Podemos escrever, especificamente para a mola de empenamento:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = GJL \begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

sendo :

$$S = \frac{p(\alpha - \beta)}{1 - p}$$

logo :

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \text{GJL} \begin{bmatrix} \frac{p_1(\alpha-\beta)}{1-p_1} & \\ & \frac{p_2(\alpha-\beta)}{1-p_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

ou :

$$\{F_{\text{local}}\} = [S_{\text{mola}}] \{U_{\text{local}}^{\text{mola}}\} \quad (4.31)$$

Podemos expressar facilmente o vetor dos deslocamentos da mola de extremidade utilizando a equação anterior, visto que a matriz $[S_{\text{mola}}]$ é diagonal.

Portanto :

$$\{U_{\text{local}}^{\text{mola}}\} = [D_{\text{mola}}] \{F_{\text{local}}\} \quad (4.32)$$

Ou seja :

$$[D_{\text{mola}}] = \frac{1}{(\alpha-\beta)\text{GJL}} \begin{bmatrix} \frac{1-p_1}{p_1} & \\ & \frac{1-p_2}{p_2} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Substituindo a eq. (4.32) na eq.(4.28) obtemos:

$$\{U_{local}\} = [T]\{U_{global}\} - [D_{mola}]\{F_{local}\} \quad (4.34)$$

Substituindo a equação (4.34) na eq. (3.1) e isolando $\{F\}$:

$$\{F_{local}\} = ([I] + [K_{local}][D_{mola}])^{-1}[K_{local}][T]\{U_{global}\} \quad (4.35)$$

no qual $[I]$ é a matriz identidade.

A transformação das forças de extremidade de barra do sistema local $\{F_{local}\}$ para o global $\{F_{global}\}$ pode ser expressa como :

$$\{F_{global}\} = [T]^t\{F_{local}\} \quad (4.36)$$

Substituindo a equação (4.35) na equação (4.36) :

$$\{F_{global}\} = [T]^t[R][K_{local}][T]\{U_{global}\} \quad (4.37a)$$

em que :

$$[R] = ([I] + [K_{local}][D_{mola}])^{-1} \quad (4.37b)$$

A matriz de rigidez global modificada podem ser obtida da seguinte maneira :

$$[K_{global}] = \sum [T]^t[R][K_{local}][T] \quad (4.38)$$

O problema é simplificado se restringirmos o efeito de conexão parcial somente aos graus de liberdade dos bimomentos como indicado na equação 4.30.

A matriz [R] é dada, então, por :

$$[R] = \frac{(\alpha - \beta)}{X} \begin{bmatrix} (\alpha - \beta)p_1 & -\beta p_1(1 - p_2) \\ -\beta p_2(1 - p_1) & (\alpha - \beta)p_2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

sendo : $X = (\alpha - \beta)^2 - \beta^2(1 - p_1)(1 - p_2)$

e a matriz de rigidez local modificada :

$$[K^*] = \frac{(\alpha - \beta)GJL}{X} \begin{bmatrix} p_1[(\alpha - \beta)^2 - \beta^2(1 - p_2)] & (\alpha - \beta)\beta p_1 p_2 \\ (\alpha - \beta)\beta p_2 p_1 & p_2[(\alpha - \beta)^2 - \beta^2(1 - p_1)] \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

5 APLICAÇÕES E EXEMPLOS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são exemplificadas aplicações dos tratamentos de transmissão e restrição parcial do empenamento.

Todos os métodos desenvolvidos no capítulo anterior pressupõem o cálculo de diferentes constantes que variam de acordo com a configuração geométrica da interseção. Sem ter como objetivo esgotar todas as possibilidades de interseções, procura-se verificar tão somente a aplicabilidade de cada um dos métodos através de exemplos simples.

5.2 COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO

O coeficiente de transmissão para uma conexão pode ser quantificado medindo-se os valores da derivada do ângulo de torção em cada barra conectada ao nó.

A determinação do coeficiente de transmissão neste trabalho foi feita da seguinte forma:

- a) aplica-se na estrutura um momento torçor;
- b) calcula-se a derivada do ângulo de torção na seção transversal imediatamente anterior ao nó (ϕ'_1) - barra carregada - e na imediatamente posterior (ϕ'_2) - barra não carregada;

c) determina-se C através da relação expressa em (4.1).

No cálculo de ϕ' utiliza-se a equação (2.15) na forma inversa : sabendo-se o deslocamento longitudinal de empenamento obtém-se o valor da derivada do ângulo de torção.

Para se estudar o comportamento dos nós foram modeladas várias configurações em elementos de casca poliédrica de 8 nós utilizando-se o programa GAELI (GROEHS ; SANTOS, 1990), desenvolvido pelo CPGEC-UFRGS. BOÉSSIO (1992) provou ser eficiente a utilização de elementos de casca poliédrica na análise de estruturas de barras de paredes finas.

Para o caso de mais de duas barras conectadas ao nó, calculam-se ainda, os diferentes coeficientes de transmissão para cada barra não-carregada.

A pesquisa do coeficiente de transmissão foi restringida aos casos indicados nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3, sendo chamados os nós de conexões em "L", "T" e "X", respectivamente.

Tanto SHARMAN (1985) quanto BEERMAN (1980) trabalharam exclusivamente com o detalhe do nó e não consideraram fatores como comprimento das barras, espessura do perfil, etc.

Nestes modelos foram utilizados diversos tipos de perfis I (W12x26, W14x42,6, W24x76, W18x71, W21x93, W36x170) e C (MC10x33.6, MC18x45.8, MC8x20, C15x40, C4x7.25) padrão AISC e diferentes comprimentos das barras envolvidas ($L = 3h, 5h, 10h, 20h, e 30h$), sendo h a altura do perfil.

Variando os fatores descritos acima - características torsionais e comprimentos - pode-se traçar gráficos relacionando-os com o(s) coeficiente(s) de transmissão obtido(s).

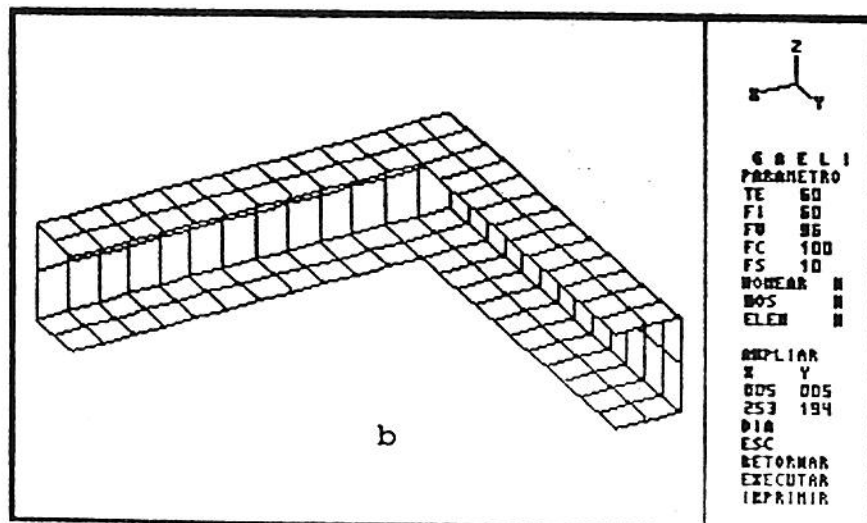
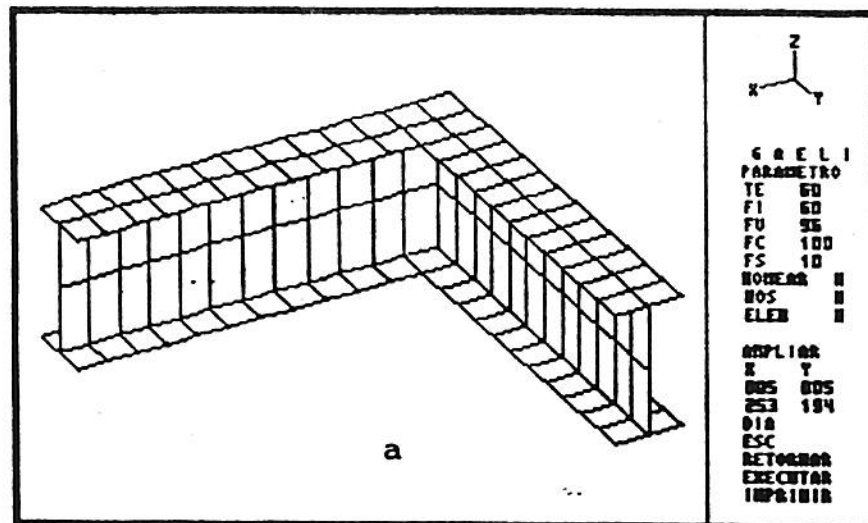


figura 5.1 - Conexão em "L" (a) seção "I" ; (b) seção "C"

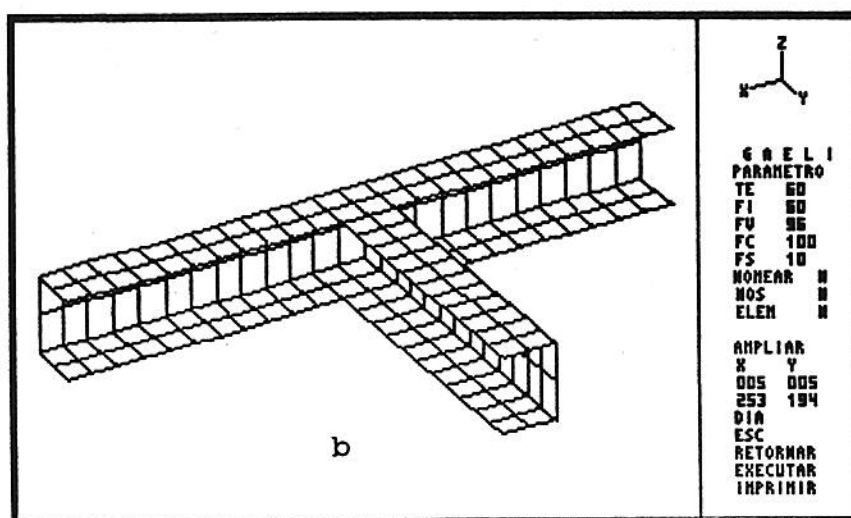
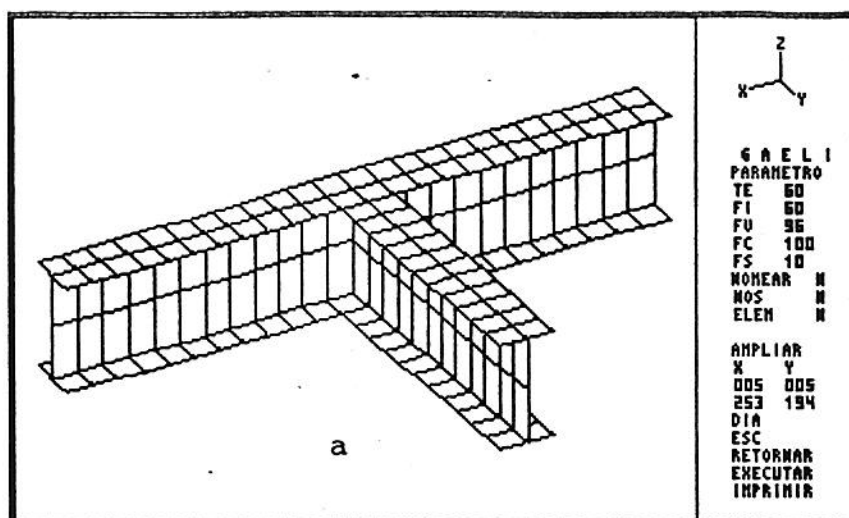


figura 5.2 - Conexão em "T" (a) seção "I" ; (b) seção "C"

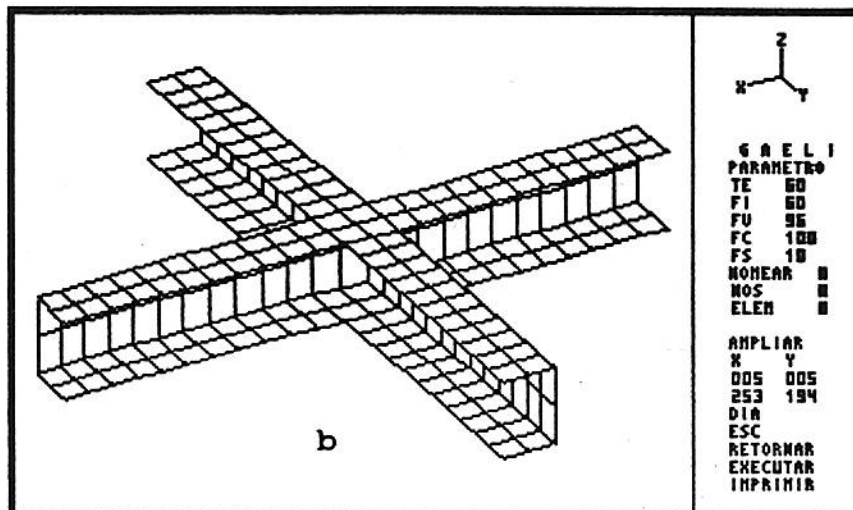
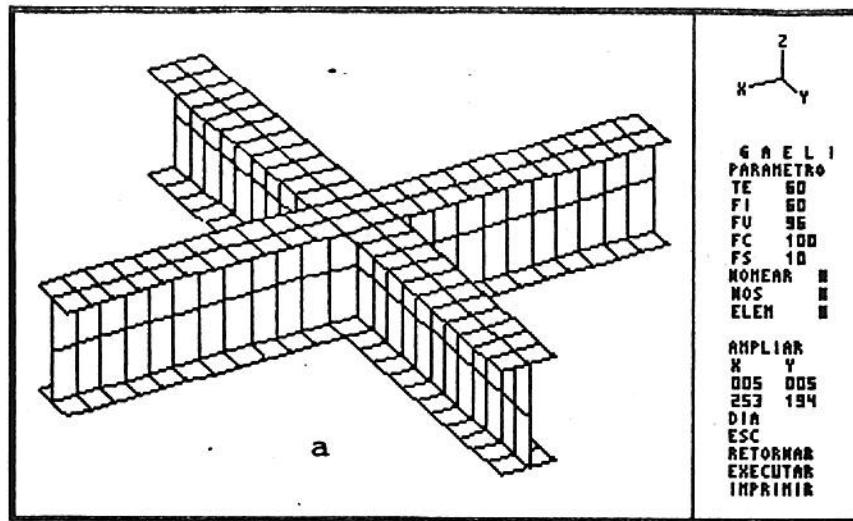


figura 5.3 - Conexão e = "X" (a) seção "I" ; (b) seção "C"

A seguir são mostrados alguns destes gráficos para situações diversas ($E = 200.000 \text{ MPa}$; $G = 77.200 \text{ MPa}$)

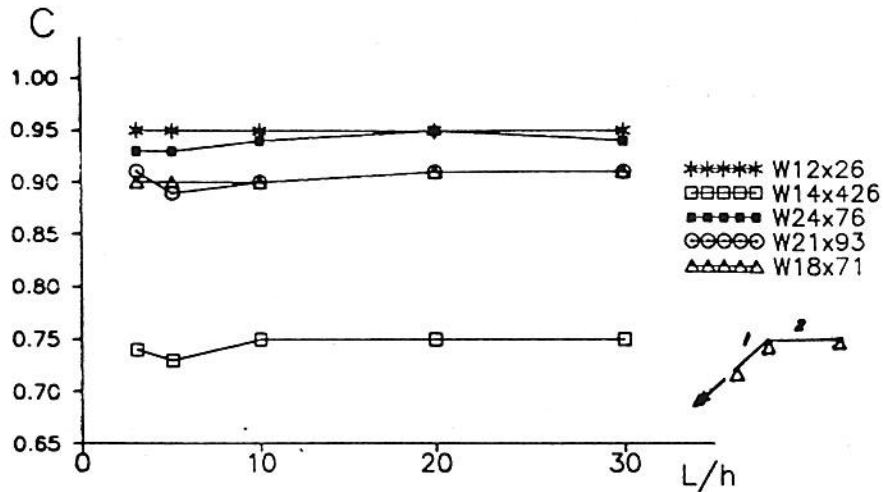


figura 5.4 - Conexão "L" , seção "I" = variável , $L_1 = \text{var.}$
 $L_2 = 10h$

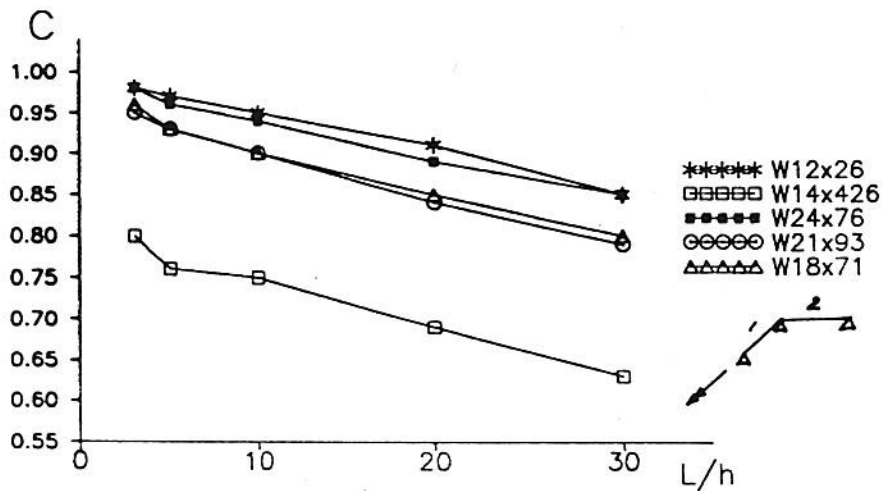


figura 5.5 - Conexão "L" , seção "I" = variável , $L_1 = 10h$
 $L_2 = \text{variável}$

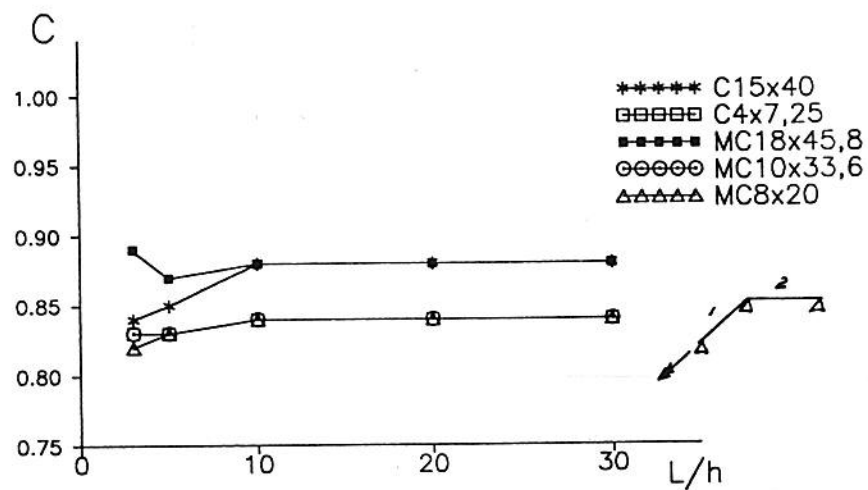


figura 5.6 - Conexão "L" , seção "C" = variável ,
 L_1 = variável , $L_2 = 10h$

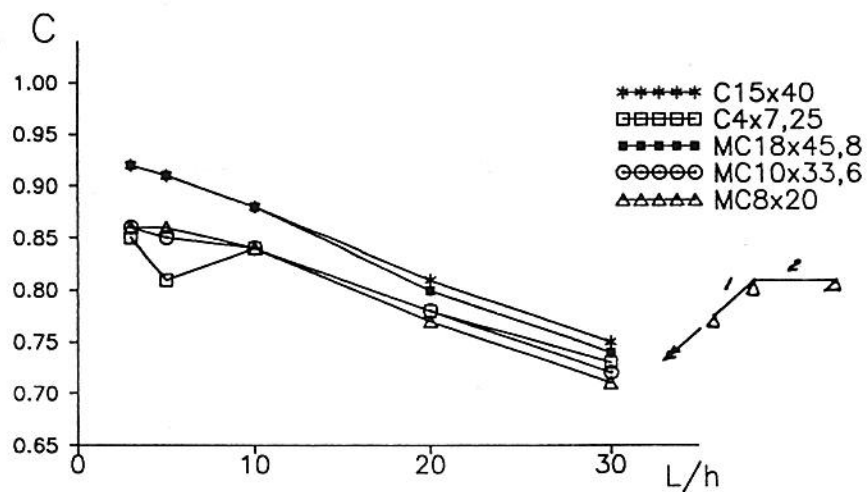


figura 5.7 - Conexão "L", seção "C" = variável, $L_1 = 10h$,
 L_2 = variável

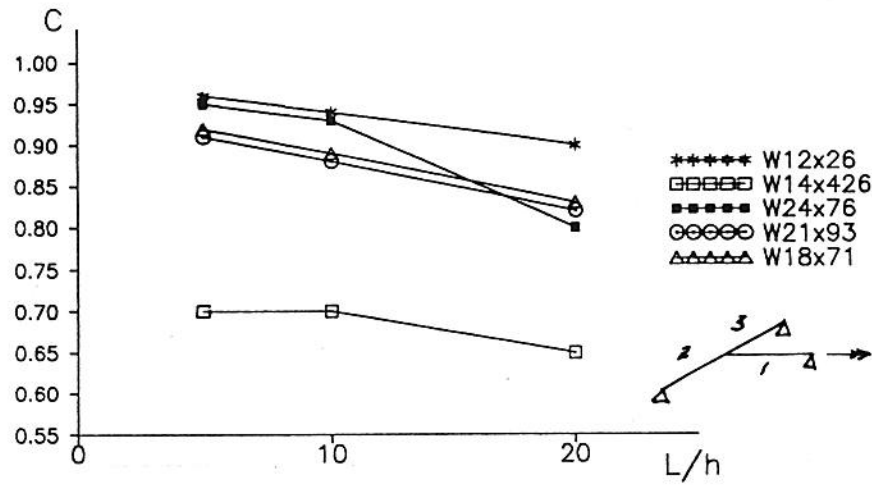


figura 5.8 - Conexão "T" , seção "I" = variável , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = L_3 = \text{var.}$, $C(1-2) = C(1-3)$

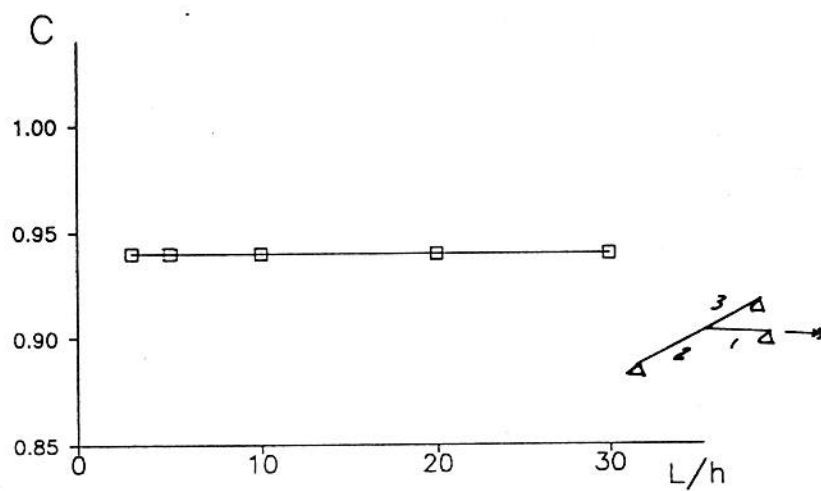


figura 5.9 - Conexão "T" , seção "I" = W12x26 ,
 $L_1 = \text{variável}$, $L_2 = L_3 = 10h$, $C(1-2) = C(1-3)$

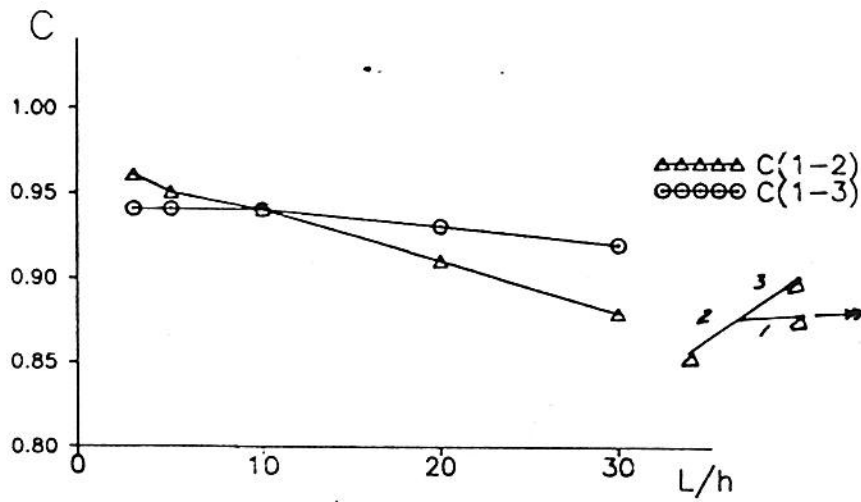


figura 5.10 - Conexão "T" , seção "I" = W12x26, $L_1 = 10h$,
 $L_2 = \text{variável}$, $L_3 = 10h$

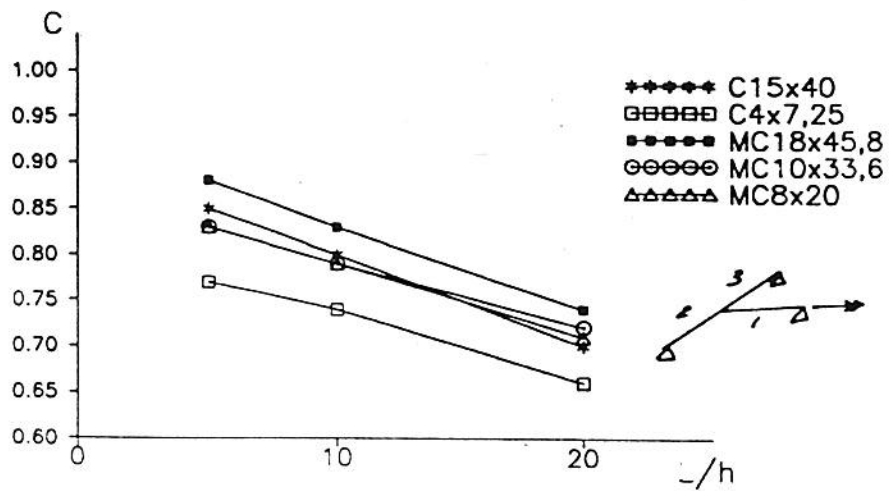


figura 5.11 - Conexão "T" , seção "C" = variável , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = L_3 = \text{variável}$, C(1-2)

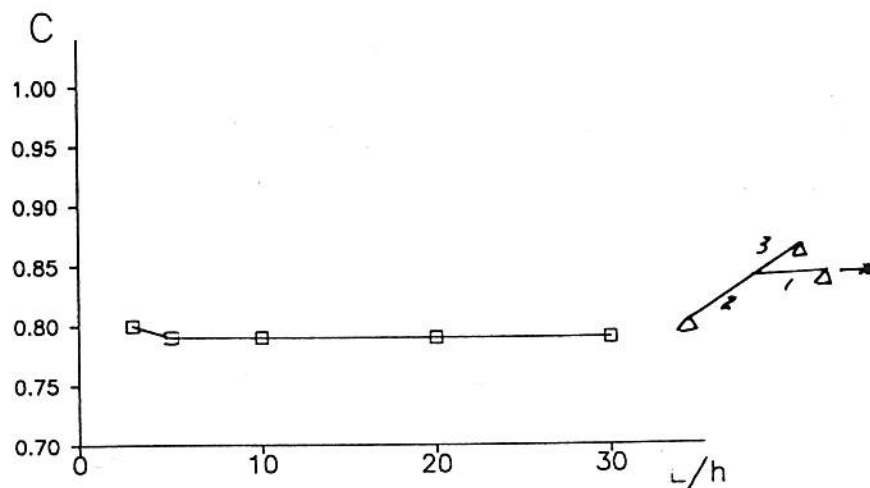


figura 5.12 - Conexão "T" , seção "C" = MC8x20 , $L_1 = \text{var.}$
 $L_2 = L_3 = 10\text{h}$, $C(1-2)=C(1-3)$

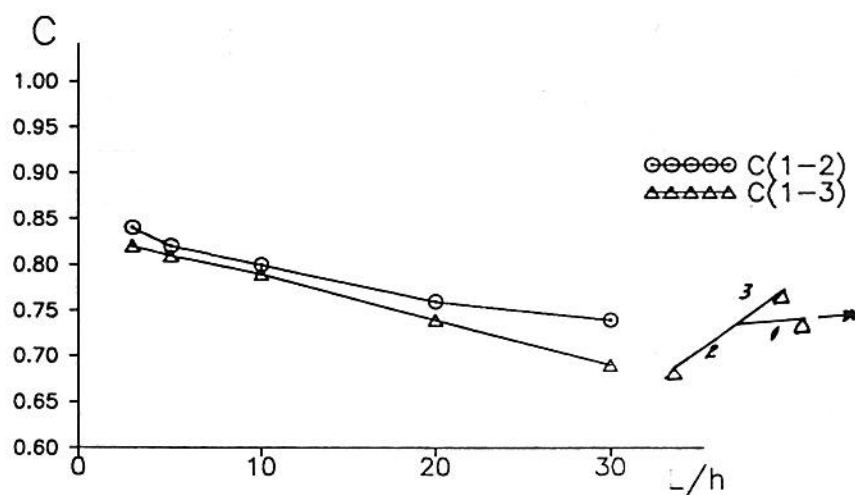


figura 5.13 - Conexão "T" , seção "C" = MC8x20 , $L_1 = 10\text{h}$,
 $L_2 = \text{variável}$, $L_3 = \text{fixo}$

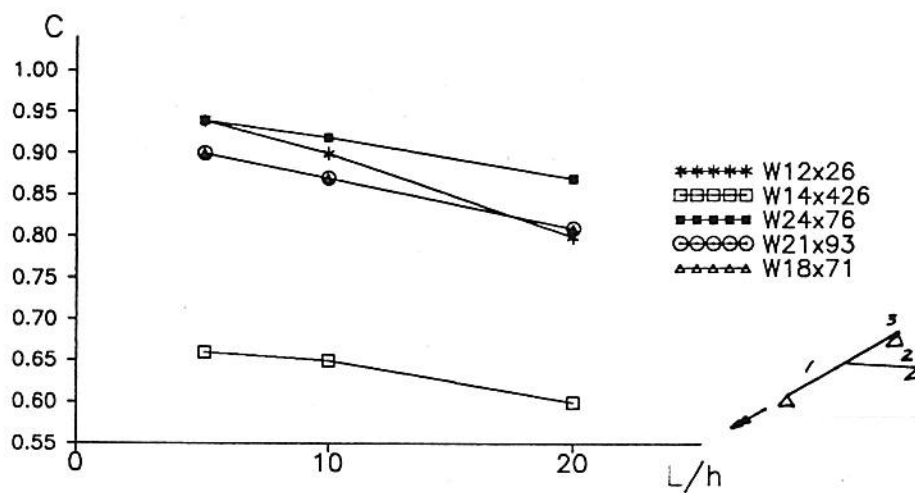


figura 5.14 - Conexão "T" , seção "I"=variável, $L_1 = 10h$,
 $L_2 = L_3 = \text{var.}$, C(1-2)

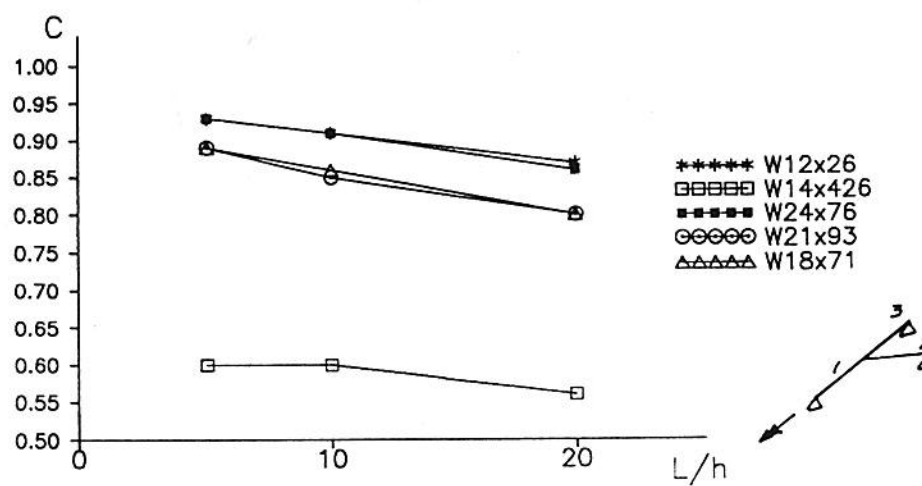


figura 5.15 - Conexão "T" , seção "I" = variável , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = L_3 = \text{var.}$ C(1-3)

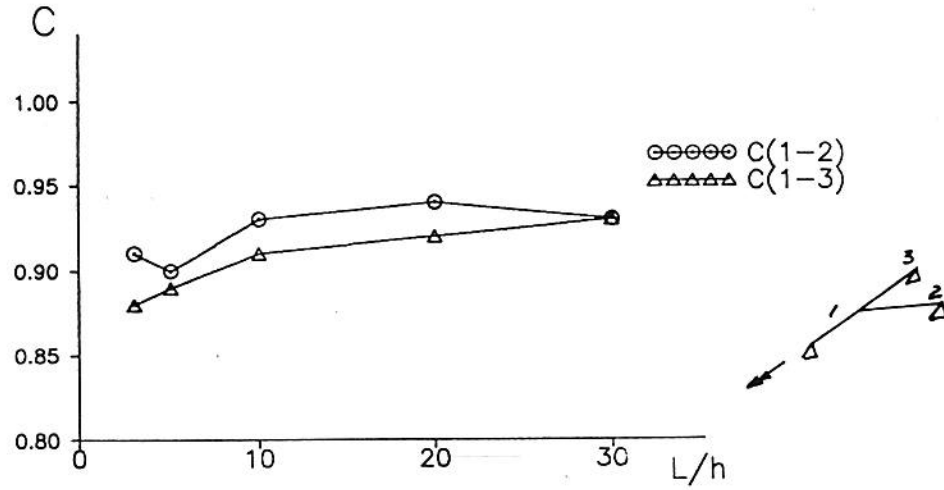


figura 5.16 - Conexão "T" , seção "I" = W12x26 , $L_1 = \text{var.}$
 $L_2 = L_3 = 10h$

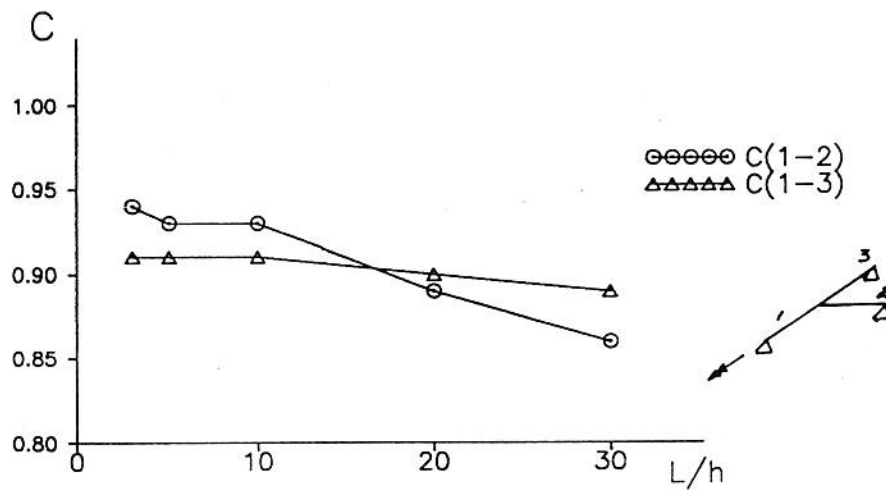


figura 5.17 - Conexão "T" , seção "I" = W12x26 , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = \text{variável}$, $L_3 = 10h$

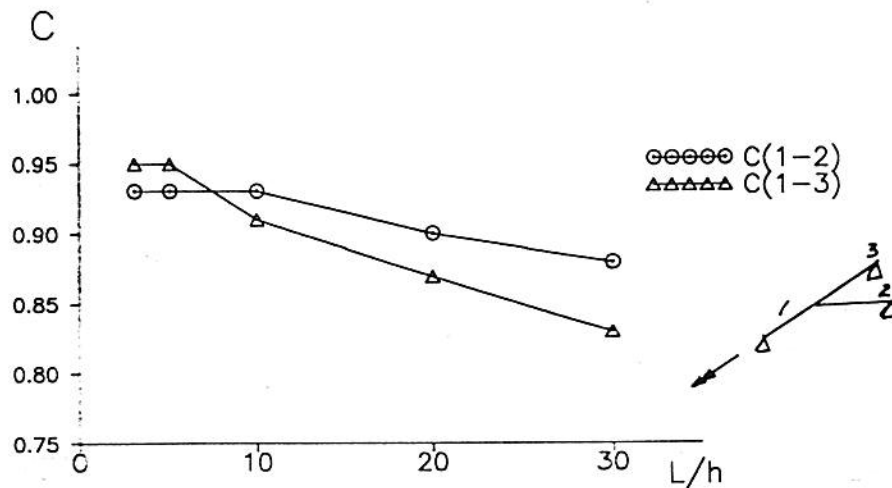


figura 5.18 - Conexão "T" , seção "I" = W12x26 , $L_1=L_2=10h$,
 $L_3 = \text{variável}$

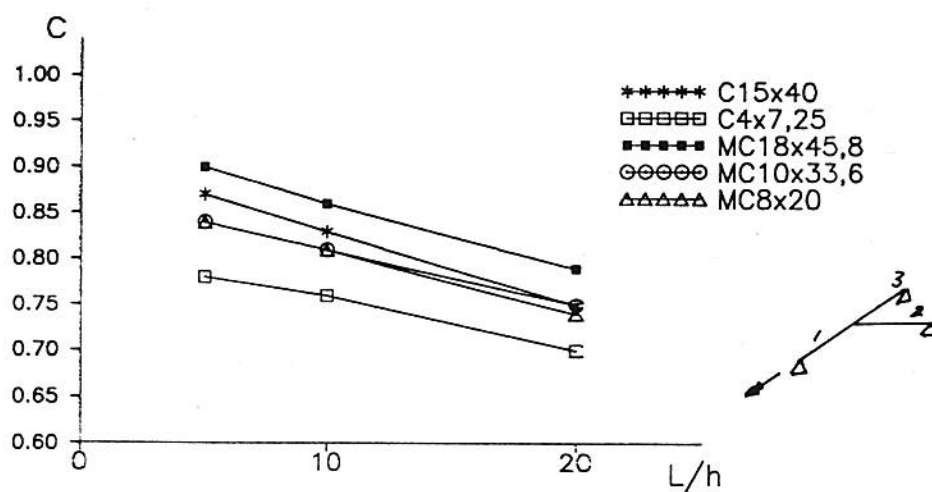


figura 5.19 - Conexão "T" , seção "C" = variável , $L_1=10h$,
 $L_2 = L_3 = \text{variável}$, $C(1-2)$

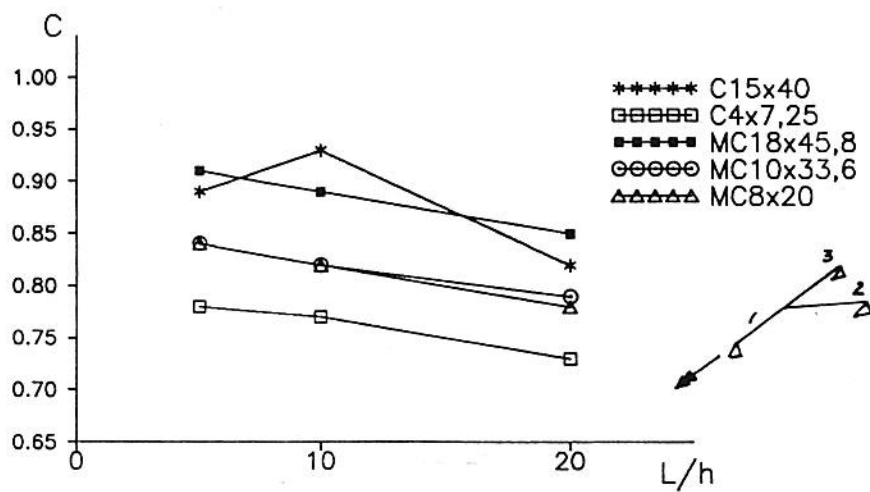


figura 5.20 - Conexão "T" , seção "C" = variável , $L_1=10h$,
 $L_2 = L_3 = \text{variável}$, C(1-3)

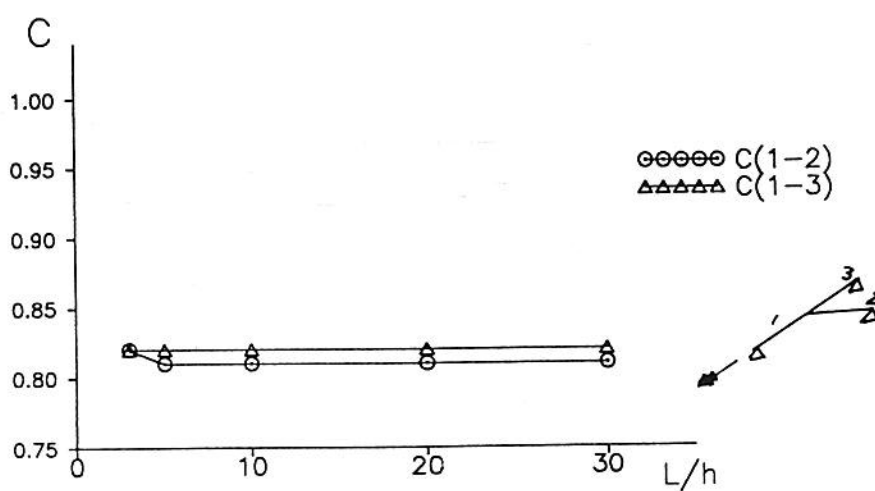


figura 5.21 - Conexão "T" , seção "C" = MC8x20 , $L_1 = \text{var.}$
 $L_2 = L_3 = 10h$

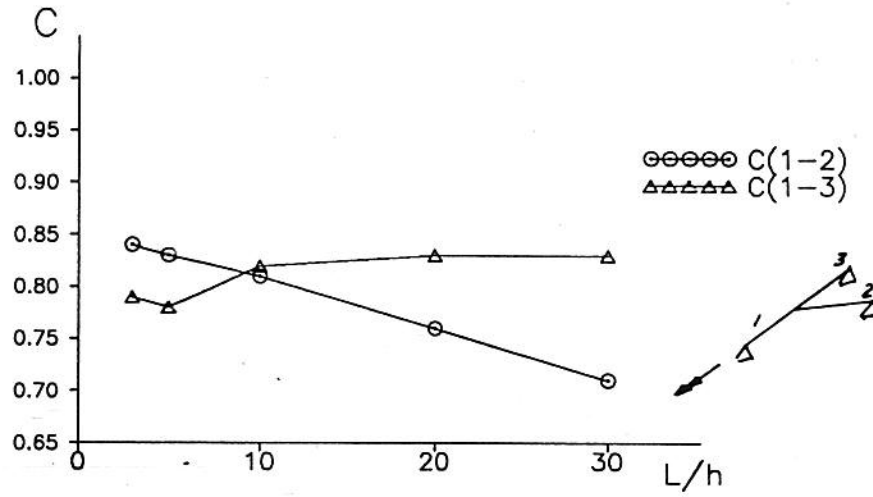


figura 5.22 - Conexão "T" , seção "C" = MC8x20 , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = \text{variável}$, $L_3 = 10h$

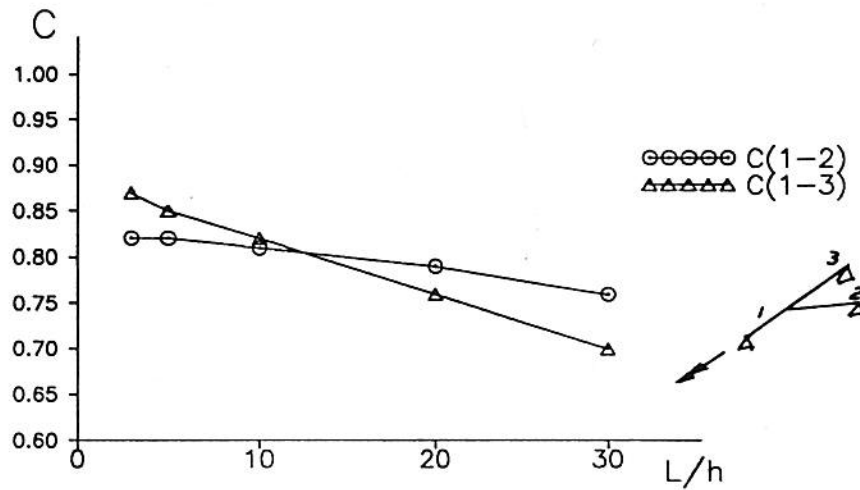


figura 5.23 - Conexão "T" , seção "C" = MC8x20 , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = 10h$, $L_3 = \text{variável}$

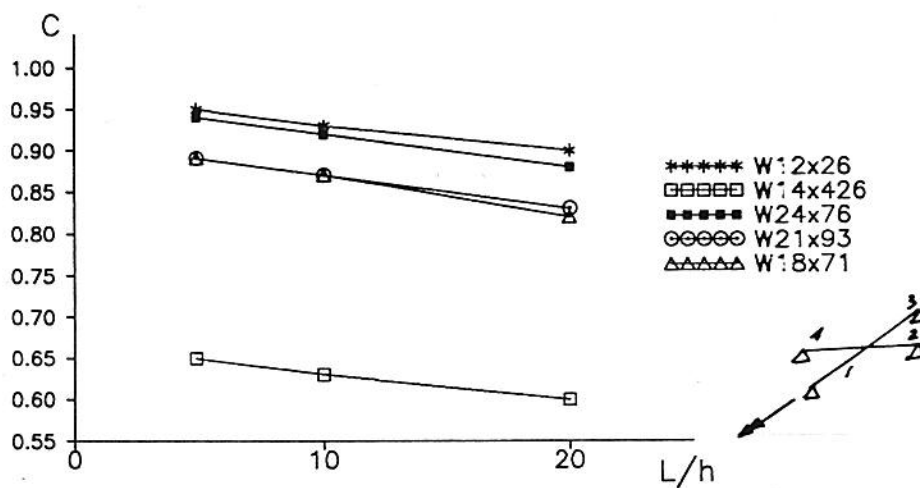


figura 5.24 - Conexão "X" , seção "I" = variável , $L_1=10h$,
 $L_2 = L_3 = L_4$ =variável , C(1-2)

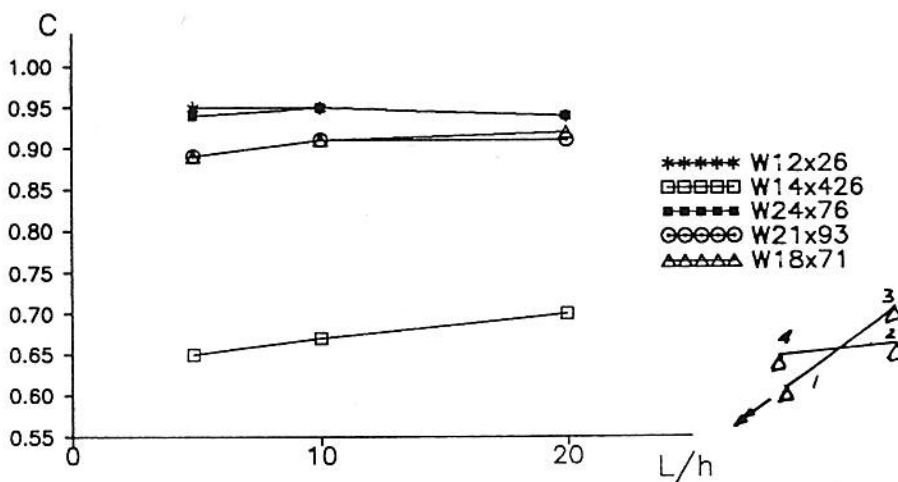


figura 5.25 - Conexão "X" , seção "I" = variável , $L_1=10h$,
 $L_2 = L_3 = L_4$ =variável , C(1-3)

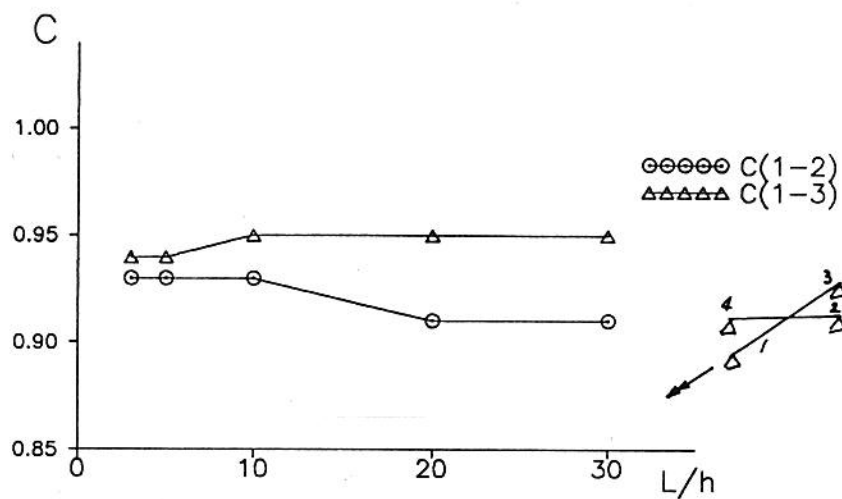


figura 5.26 - Conexão "X" , seção "I" = W12x26 , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = \text{variável}$, $L_3 = L_4 = 10h$

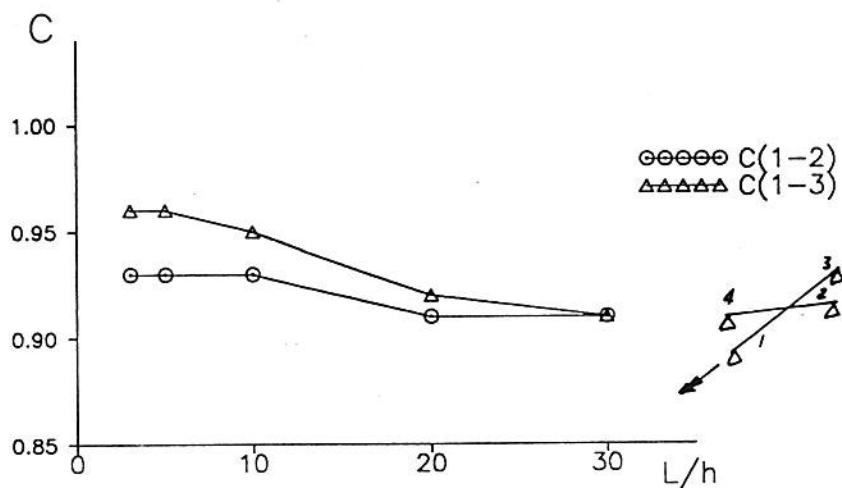


figura 5.27 - Conexão "X" , seção "I" = W12x26 , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = 10h$, $L_3 = \text{variável}$, $L_4 = 10h$

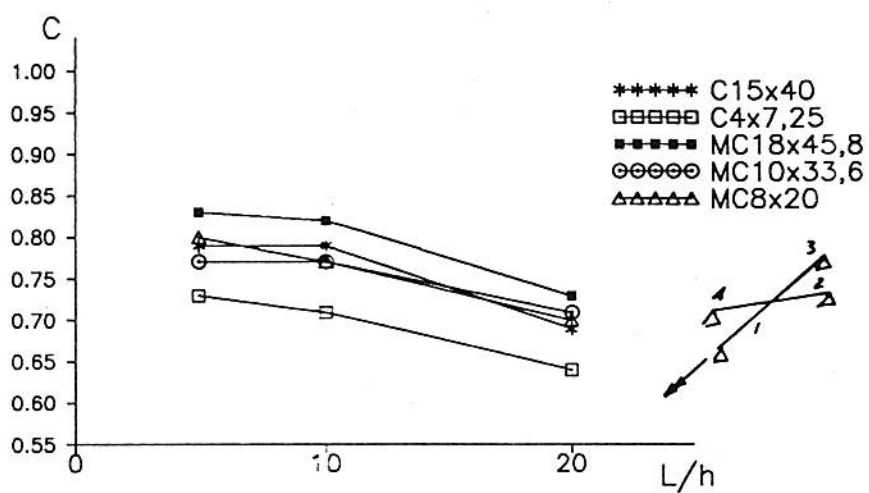


figura 5.28 - Conexão "X" , seção "C" = variável , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = L_3 = L_4 = \text{variável}$, C(1-2)

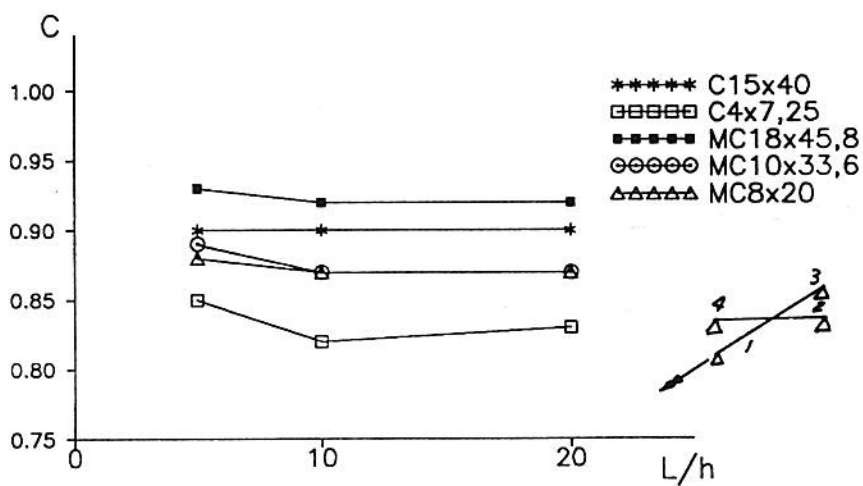


figura 5.29 - Conexão "X" , seção "C" = variável , $L_1 = 10h$,
 $L_2 = L_3 = L_4 = \text{variável}$, C(1-3)

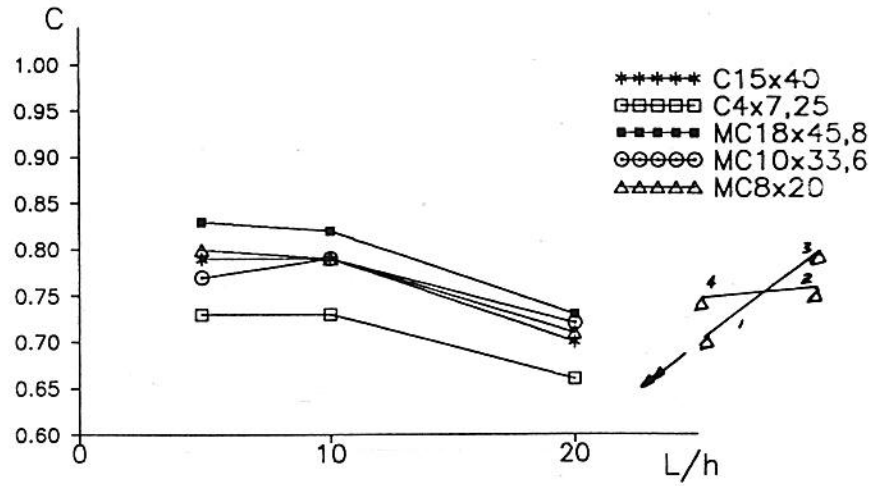


figura 5.30 - Conexão "X" , seção "C" = variável , $L_1=10h$,
 $L_2 = L_3 = L_4$ =variável , C(1-4)

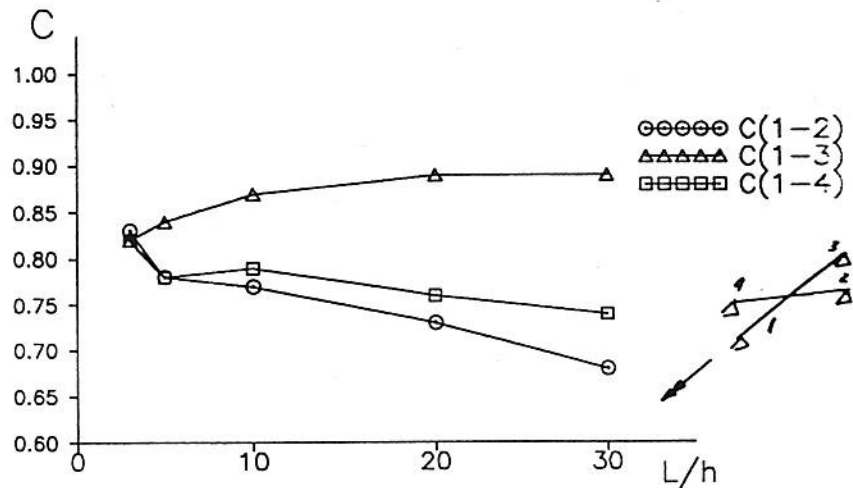


figura 5.31 - Conexão "X" , seção "C" = MC10x33.6 , $L_1=10h$,
 $L_2 =$ variável , $L_3 = L_4 = 10h$

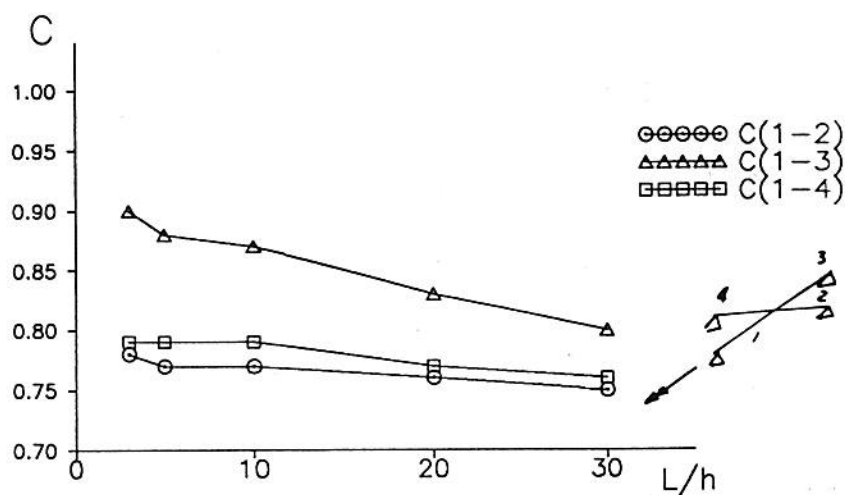


figura 5.32 - Conexão "X" , seção "C" = MC10x33.6 ,
 $L_1 = 10h$, $L_2 = 10h$, $L_3 = \text{variável}$, $L_4 = 10h$

Observa-se, a partir dos gráficos, que os comprimentos das barras não carregadas, seção transversal e tipo de conexão tem grande influência nos valores dos coeficientes de transmissão.

Os gráficos apresentados permitem, portanto, obter os valores dos coeficientes de transmissão para as diversas barras envolvidas, sabendo-se o tipo de conexão, seção e os comprimentos.

O exemplo a seguir ilustra uma aplicação do coeficiente de transmissão na resolução de uma estrutura simples e compara os resultados com os obtidos por

modelagem em elementos de casca poliédrica.

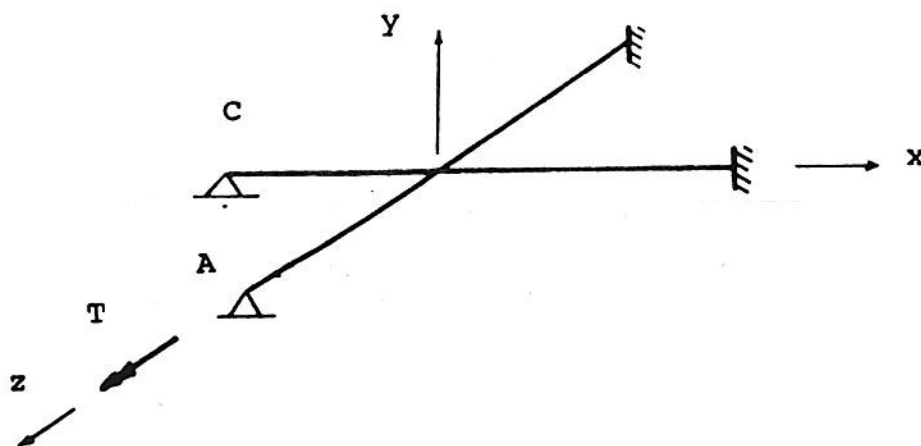


figura 5.33 - Coeficiente de transmissão - exemplo

O exemplo mostra uma grelha de 3 barras de seção "I" W12x26 (ver conexão na figura 5.3a), com os seguintes dados : $E = 200.000 \text{ MPa}$; $G = 77.200 \text{ MPa}$; comprimentos das 4 barras = $3,05 \text{ m}$; $T = 0,54 \text{ kN.m}$.

A estrutura foi modelada com 1 elemento de viga para cada barra. Os valores dos coeficientes de transmissão foram obtidos dos gráficos e valem : $C(1-2) = 0,9$ e $C(1-3) = 0,95$. Os resultados podem ser apreciados na tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Coeficiente de transmissão - resultados

situação		ϕ (rad.)	ϕ (rad.)
C(1-2)	C(1-3)	apoio A	apoio C
1	1	0,079	0,0081
0,9	0,95	0,082	0,0116
casca poliédrica		0,099	0,0117

5.3 INDICADOR DE EMPENAMENTO

MEGSON et al. (1979) estudaram associações de barras do tipo indicado na figura 4.2e em que existe claramente uma descontinuidade entre a barra maior (chamada barra principal) e a menor (chamada subsidiária). No tratamento da descontinuidade MEGSON et al. (1979) definiram um fator de restrição ao empenamento (k) que relaciona em proporção direta o empenamento para restrição parcial e o empenamento para restrição nula da seguinte forma:

$$w_{\text{parcial}} = k w_{\text{livre}} \quad (5.1)$$

A partir das equações (2.15) e (4.7) chega-se à conclusão de que o fator de restrição de empenamento " k " é o mesmo indicador de empenamento " a " definido por YANG; MCGUIRE (1984). MEGSON et al. (1979) deconsideram, entretanto, a influência da extremidade oposta à restrição

parcial.

A variação do fator de restrição do empenamento (ou indicador de empenamento) com as dimensões relativas das barras subsidiária e principal foi estudada por MEGSON et al. (1979) via modelagem em elementos de casca e testes experimentais. Os valores encontrados para o indicador de empenamento foram organizados na forma de gráficos e podem ser facilmente acessados (MEGSON; ALADE, 1976).

Seja o exemplo mostrado na figura 5.34, onde as dimensões das barras principal e subsidiária são $L_p = 1200\text{mm}$ e $L_s = 600\text{mm}$ respectivamente.

Tabela 5.2 - Indicador de empenamento - exemplo de aplicação - dimensões das barras

barra	alma (mm)	flange (mm)	comprimento (m)
principal	203,2 x 6,0	76,2 x 6,0	1,2
subsidiária	101,6 x 6,0	50,8 x 6,0	0,6

O momento torçor aplicado na barra subsidiária é $0,113\text{N.m}$. As condições de contorno estão especificadas na figura 5.34.

O valor do indicador de empenamento para a barra subsidiária será para $h_p/h_s = 2$ e $t_p/t_s = 1$; $a = 0,53$ - ver MEGSON ; ALADE (1976).

Resultados analíticos utilizando o indicador de empenamento e resultados obtidos por modelos experimentais podem ser comparados na tabela 5.3, sendo $E = 200.000\text{ MPa}$

e $G = 77.200 \text{ MPa}$.

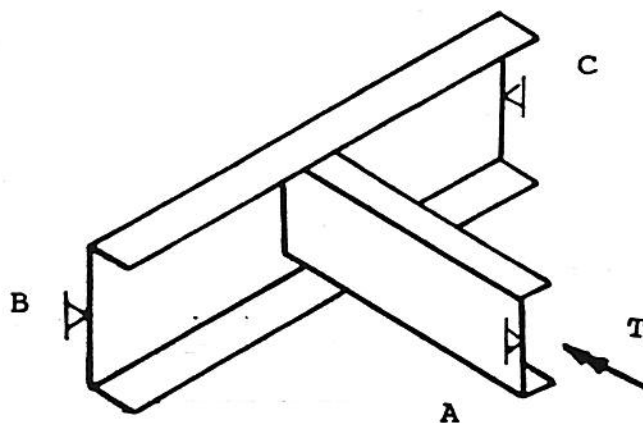


figura 5.34 - Indicador de empenamento - exemplo de aplicação

Tabela 5.3 - Indicador de empenamento - exemplo de aplicação - resultados

ÂNGULO DE TORÇÃO NA EXTREMIDADE "A" (rad x 10 ⁵)			experimental (MEGSON et al, 1976)
analítico empenamento			
livre	restringido totalmente	restrição parcial	
6,02	2,90	4,56	4,8

5.4 RIGIDEZ PERCENTUAL

5.4.1 CONEXÕES DE DUAS BARRAS A 90° , FLANGES COPLANARES

Seja o elemento de conexão de duas barras de seção "I" mostrado na figura 5.35, onde se indica, como únicos graus de liberdade considerados, rotações nos flanges nos seus respectivos planos. Estes graus de liberdade - θ_f^{1a} , θ_f^{1b} , θ_f^{2a} , θ_f^{2b} - são deslocamentos de empenamento nas extremidades da conexão - onde esta se une à cada uma das duas barras.

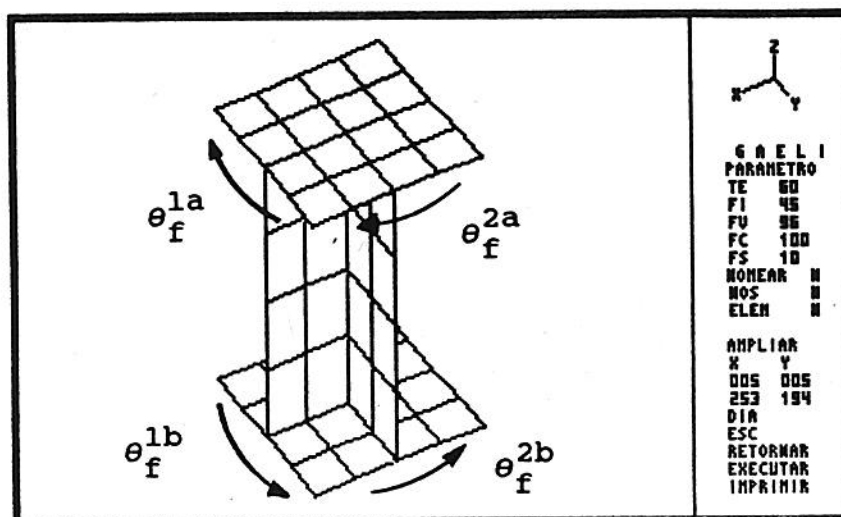


figura 5.35 - elemento de conexão "L" de barras de seção "I"; rotações unitárias nas flanges

Foram modeladas em elementos de casca poliédrica de 8 nós, 4 conexões de perfis I (W14x426, W36x170, W24x76, W21x93, padrão AISC) no programa GAELI (GROEHS; SANTOS, 1990).

Aplicou-se, então, o seguinte conjunto de condições de contorno:

$$\theta_f^{1a} = \theta_f^{1b} = 1 \quad ; \quad \theta_f^{2a} = \theta_f^{2b} = 0$$

O momento em cada flange originado pela rotação unitária é então calculado a partir do diagrama de tensões e seu valor é a rigidez da conexão neste grau de liberdade - ou seja, a restrição elástica oferecida pela conexão ao deslocamento.

Tem-se, portanto, por objetivo encontrar uma relação do tipo:

$$M_f = K_f \theta_f \quad (5.2)$$

sendo M_f momento no flange, K_f rigidez do flange à flexão e θ_f ângulo de rotação do flange.

Pode-se chegar ao valor da restrição ao empenamento na conexão, fazendo-se :

$$B = M_f d \quad (5.3)$$

e por relações trigonométricas :

$$\theta_f = \frac{d}{2} \phi' \quad (5.4)$$

Portanto :

$$B = \frac{d^2}{2} K_f \phi' \quad (5.5)$$

Para as diferentes seções ensaiadas foram

encontrados os seguintes valores para K_f indicados na segunda coluna da tabela 5.6:

Tabela 5.6 - Rigidez da conexão em "L" de barras de seção "I" (kN.m)

Perfil	K_f (calculado)	K_f (proposto)	diferença %
W14x426	1.377.205	1.386.047	+0,6
W36x170	261.227	260.837	-0,14
W24x76	90.105	90.048	-0,06
W21x93	108.026	108.032	+0,005

Analisando-se os resultados, é proposta a seguinte fórmula para o cálculo de K_f :

$$K_f = E \frac{b_f^2 t_f}{2} \quad (5.6)$$

sendo b_f e t_f largura e espessura do flange, respectivamente.

A boa exatidão da expressão (5.6) pode ser avaliada pela tabela (5.6). O valor da rigidez do nó para o empenamento é portanto (vide 5.5 e 4.19) :

$$K_M = E \frac{d^2 b_f^2 t_f}{4} \quad (5.7)$$

5.4.2 EXEMPLO

O exemplo mostra uma grelha de 2 barras de seção "I" W12x26 (ver conexão na figura 5.1a), com os seguintes dados : $E = 200.000 \text{ MPa}$; $G = 77.200 \text{ MPa}$; $L_1 = L_2 = 3,05 \text{ m}$; $T = 0,5 \text{ kN.m}$. A estrutura foi modelada com 1 elemento de viga para cada barra. O valor da rigidez percentual para a conexão utilizada é $p = 0,94$ ($K_f = 26.228 \text{ kN.m}$). Os resultados podem ser apreciados na tabela 5.7.

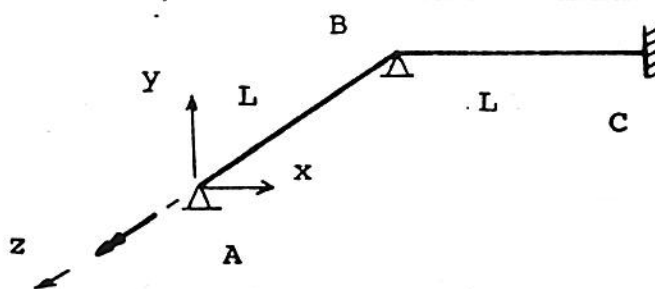


figura 5.36 - Rigidez percentual de empenamento - exemplo

Tabela 5.7 - Rigidez percentual de empenamento - resultados comparativos do exemplo

situação	B engaste N.m^2	ϕ apoio A rad.
$p = 1$	263,4	0,0879
$p = 0,94$	296,8	0,0964
casca poliédrica	293,7	0,1194

6 CONCLUSÕES

Nesta dissertação foi desenvolvido um estudo sobre estruturas de barras de paredes finas de seção aberta.

O método da rigidez mostrou excelente adaptação ao problema quando foi utilizado um elemento de barra com um grau de liberdade extra associado ao empenamento.

A utilização da solução exata da equação diferencial da torção para derivar a matriz de rigidez do elemento é recomendada pois um único elemento por barra é necessário para obtermos as incógnitas nodais de maneira exata. A interpolação pode ser implementada de maneira simples e portanto não se justifica o emprego de interpolações aproximadas. O problema de "off-set" do centro de corte foi abordado de modo a se poder analisar vigas de seções cujos centróides e centros de corte não coincidam, e foi solucionado pela introdução de uma matriz de transformação específica para a adoção de um eixo longitudinal único para a barra - nesta dissertação foi utilizado o eixo que passa pelo centróide da seção. Para seções "I" esta transformação não é necessária, visto que o centróide e o centro de corte são coincidentes.

O problema da transformação da derivada do ângulo de torção para direções ortogonais arbitrárias foi abordado e justificou-se a adoção de um único eixo para referenciar-se as taxas de torção. Provou-se existirem relações de dependência linear entre as taxas de rotação

para direções ortogonais para perfis "I" e "C".

Relata-se, ainda nesta dissertação, uma investigação dos problemas da transmissão e restrição parcial do empenamento.

Quanto à transmissão do empenamento, mostrou-se que a transmissão não é completa, mesmo para as estruturas tratadas nesta dissertação - do tipo grelha, com flanges coplanares - em que a bibliografia indicava um coeficiente de transmissão igual a 1. A compatibilidade das rotações dos flanges nas intersecções não foi verificada, visto que o coeficiente de transmissão para todos os casos estudados foi sempre menor que a unidade.

O enrijecimento da conexão, e conseqüentemente o aumento do coeficiente de transmissão para valores próximos de 1 (um) foi observado quando as barras não carregadas tiveram seu comprimento diminuído. A redução no valor do coeficiente de transmissão, para qualquer configuração ensaiada, foi verificada para o aumento no comprimento das barras envolvidas.

As observações acima indicam que relação comprimento das barras x coeficiente de transmissão se altera em função da rigidez do conjunto. Ou seja, para situações em que os comprimentos das barras são menores o conjunto adquire maior rigidez e o coeficiente de transmissão toma valores próximos de 1 (um).

Observou-se, ainda, modificação substancial dos valores dos coeficientes de transmissão para diferentes seções transversais.

Verifica-se que as características de torção da

barra (λ) tem grande influência na transmissão do empenamento - um aumento em λ torna menor o valor do coeficiente de transmissão - muito embora se saiba que para seções de λ elevado - YANG; MCGUIRE (1984) sugerem $\lambda L \geq 2,0$ - o empenamento tem pouca importância. Apesar do problema se simplificar com a eliminação do empenamento para os perfis acima de um certo limite de λ , existe ainda uma coleção bastante extensa de perfis em que o empenamento exerce influência significativa e o coeficiente de transmissão em conexões difere da unidade.

A referência utilizada para o cálculo do coeficiente de transmissão é a derivada do ângulo de torção na barra carregada. Para situações de carregamento mais geral a aproximação claramente deixa de ser automática e o analista deve ter cuidado na aplicação deste conceito. Longe de ser considerado um fracasso, o fato da solução apresentada não poder ser generalizada serve como alerta para a falta de um tratamento teórico mais sofisticado para o problema da transmissão do empenamento.

Para as estruturas e os carregamentos apresentados a utilização do coeficiente de transmissão provou ser eficaz na resolução do problema da transmissão. A extrema simplicidade de como os efeitos da transmissão são incluídos utilizando-se o coeficiente pode servir de base para trabalhos que tenham como objetivo desenvolver um método mais geral de análise da transmissão do empenamento.

A coleção extensa de gráficos apresentados relacionando seções transversais, conexões, comprimentos e coeficientes de transmissão podem ser utilizados na

resolução de problemas simples, como mostrou o respectivo exemplo. Apesar de não permitirem de maneira definitiva a quantificação da transmissão, os gráficos qualificam um comportamento padrão para os nós, que certamente será bastante útil para pesquisas futuras.

Para o tratamento da restrição parcial do empenamento foram utilizadas duas aproximações diferentes : o "indicador de empenamento" (YANG; MCGUIRE, 1984) e a "rigidez percentual de empenamento" - derivado de ROMSTAD (1970). Ambos os métodos provaram ser eficientes: o do indicador de empenamento na modelagem de descontinuidades e o da rigidez percentual de empenamento na definição da rigidez do nó, diferindo um do outro pelo fato do primeiro não considerar transmissão do empenamento.

O uso de molas de empenamento na modelagem das condições de contorno de empenamento é conceitualmente simples e possui significado físico. Ao mesmo tempo, a introdução de indicadores de empenamento e rigidezes percentuais de empenamento facilita a determinação das constantes de mola de empenamento. Apesar de estarmos restritos a apenas estruturas bidimensionais do tipo grelha, nesta dissertação, os conceitos apresentados podem ser aplicados diretamente a estruturas tridimensionais.

Soluções para restrições parciais ao empenamento mostraram maior concordância com a situação física real, aproximada por elementos de casca poliédrica. Como conclusão podemos afirmar que a mola elástica de empenamento (definida tanto por indicador de empenamento ou rigidez percentual de empenamento) é um elemento útil para

descrever o comportamento de torção de estruturas com restrição ao empenamento.

A determinação, tanto do indicador de empenamento, como da rigidez percentual de empenamento, provou ser bastante simples via modelagem em elementos de casca poliédrica. A determinação experimental destes coeficientes, portanto, parece ser uma sugestão a ser considerada para trabalhos futuros.

Seguem-se algumas sugestões para o aproveitamento desta dissertação, como continuidade do estudo, ou como base para o início de novos trabalhos.

Tornou-se bastante clara a carência de um tratamento teórico mais eficiente para o problema da transmissão do empenamento em interseções de barras. A incorporação de efeitos localizados dos nós não está bem resolvida ainda e estudos teóricos mais aprofundados neste tema são recomendados.

Apesar dos bons resultados obtidos através do estudo em estruturas moldadas em elementos de casca, é evidente a necessidade de verificação experimental. Sugere-se um programa de testes de laboratório para a determinação das constantes utilizadas nos métodos apresentados nesta dissertação, junto com a aferição das medidas obtidas nos testes computacionais.

Sugere-se, adicionalmente, expansões deste trabalho nas áreas de não linearidade física e geométrica, e na área de análise dinâmica. A influência exercida pela transmissão e restrição parcial ao empenamento não está devidamente esclarecida para estes problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAIGENT, A.H.; HANCOCK, G.J. Structural analysis of assemblages of thin-walled members. *Engineering and Structures*, v.4, p.207-216, jul. 1982.
- BARSOUM, R.S.; GALLAGHER, R.H. Finite element analysis of torsional-flexural stability problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.2, p.335-352, 1970.
- BAZANT, Z.P.; NIMEIRE, M.E. Large deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames. *Journal of Engineering Mechanics*, v.19, EM6, p.1259-1281, dec. 1973.
- BEERMANN, H.J. Warping torsion in commercial vehicle frames, taking in consideration flexible joints. *International Journal of Vehicle Design*, v.1, n.5, p.397-414, 1980.
- BLANDFORD, G.E. Static analysis of flexible connected thin-walled plane frames. *Computers and Structures*, v.28, n.1, p.105-113, 1988.
- BLANDFORD, G.E. Thin-walled space frame analysis with geometric and flexible connection nonlinearities, *Computers and Structures*, v.35, n.5, p.609-617, 1990.
- BOÉSSIO, M. L. Análise de vigas de seção aberta pelo método da subestruturação em múltiplos níveis. Porto Alegre, 1992. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- BOOTHBY, T.E. The application of flexural methods to torsional analysis of thin-walled open sections. *Engineering Journal*, AISC, p. 189-198, fourth quarter, 1984.
- CHAN, S.L. ; KITIPORNCHAI, S. Geometric nonlinear analysis of asymmetric thin-walled beam-columns. *Engineering Structures*, v.9, p.243-254, oct. 1987.
- CHEN, H. ; BLANDFORD, G.E. Thin walled space frames I: large-deformation analysis theory. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.117, n.8, p.2499-2520, aug. 1991.
- CONCI, A. Análise de estruturas reticuladas de aço com consideração de empenamento e não-linearidades geométrica e física. Rio de Janeiro, 1988. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

- CONCI, A. ; GATTASS, M. Natural approach for thin-walled beam-columns with elastic-plasticity. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.29, p.1653-1679, 1990.
- DVORKIN, E.N. ; CELENTANO, A.B. ; GIOIA, G. A Vlasov beam element. *Computers and Structures*, v.33, n.1, p.187-196, 1989.
- GALAMBOS, T.V. *Structural members and frames*. New Jersey, Prentice-Hall, 1968.
- GELLIN, S. ; LEE, G.C. Finite elements available for the analysis of non-curved thin-walled structures. In: BULL, J.W. *Finite element analysis of thin-walled structures*. London, Elsevier, 1988.
- GJELSVIK, A. *The teory of thin-walled bars*. New York, John Wiley , 1981.
- GROEHS, A.G. ; SANTOS, M.I.G. GAELI - Gerador e analisador de estruturas lineares - Parte 1/2 - Versao 03-90. Porto Alegre, 1990. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- GUNNLAUGHSON, G.A. ; PEDERSEN, P.T. A finite element formulation for beams with thin-walled cross-section. *Computers and Structures*, v.15, p.691-699, 1982.
- KANOK-NUKULCHAI, W. ; SIVAKUMAR, M. Degenerate elements for combined flexural and torsional analysis of thin-walled structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.114, p.657-674, 1988.
- KHAN, A.H. ; TOTTENHAM, H. The method of bimoment distribution for the analysis of continuous thin-walled structures. *Proceedings of The Institution of Civil Engineers (2)*, v.63, p.843-863, 1978.
- KRAJGINOVIC, D. A Consistent discrete elements technique for thin-walled assemblages. *International Journal of Solids and Structures*, v.5, p.639-662, 1969.
- MEDWADOWSKI, S.J. Warping Moment Distribution. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.3, p.453-455, 1985.
- MEGSON, T.H.G. ; ALADE, G.A. Structural analysis of ladder frames under torsion. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Automobile Division*, V.190, p.409-418, 1976.
- MEGSON, T.H.G. ; ERGATOUDIS, J. ; NUTTALL, J. Partially restrained warping of open and closed section thin-walled beams. *INTERNATIONAL CONFERENCE OF THIN-WALLED STRUCTURES*, Glasgow, 1979. *Proceedings*. University of Strathclyde, Scotland, 1979.

- MONFORTON, G.R. Matrix analysis of semi-rigidly connected frames. *Journal of Structural Division, ASCE*, v.89, ST6, dec. 1983.
- MORRELL, P.J.B. The influence of joint detail on the torsional behaviour of thin-walled structures having an axial discontinuity. *INTERNATIONAL CONFERENCE OF THIN-WALLED STRUCTURES*, Glasgow, 1979. *Proceedings*. University of Strathclyde, Scotland, 1979.
- MURRAY, N.W. *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*. Oxford Press, Oxford, 1986.
- MURTHA-SMITH, E. ; MAGYAR, P. Cold Formed Steel Channel Struts. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v.117, n.4, p.1276-1293, apr. 1991.
- REILLY, R. J. Stiffness analysis of grids including warping. *Journal of Structural Division, ASCE*, v.98, ST7, p.1511-1523, jul. 1972.
- RENTON, J.D. Warping and Distortion at I-Section Joints. *Journal of Structural Division, ASCE*, v. 99, ST1, p.341-343, jan. 1975.
- ROMSTAD, K.M. ; SUBRAMANIAN, C.V. Analysis of frames with partial connection rigidity. *Journal of Structural Division, ASCE*, v.96, ST11, p.2283-2300, 1970.
- SHARMAN, P. W. Analysis of structures with thin-walled open sections. *International Journal of Mechanical Sciences*, v.27, n.10, p.665-677, 1985.
- VACHARAJITTIPHAN, P. ; TRAHAIR, N.S. Warping and distortion at I-section joints. *Journal of Structural Division, ASCE*, v.100, ST3, p.547-564, mar. 1974.
- VLASOV , V.Z. *Thin-walled elastic beams*. 2.ed. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1961.
- WALDRON, P. Stiffness analysis of thin-walled girders. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v.112, n.6, p.1366-1384, jun. 1986.
- YANG, Y. ; MCGUIRE, W. A procedure for analysing space frames with partial warping restraint. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.20, p.1377-1398, 1984.
- YANG, Y. ; MCGUIRE, W. Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v.112, n.4, p.853-877, 1986.
- YU, C.H. ; SHANMUGAM, N.E. Stability of frames with semi-rigid joints. *Computers and Structures*, v.23, n.5, p.639-648.