

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GUILHERME KEIEL

**PROJETO EM TEMPO DISCRETO DE
CONTROLADORES RESSONANTES
APLICADOS A FONTES
ININTERRUPTAS DE ENERGIA**

Porto Alegre
2017

GUILHERME KEIEL

**PROJETO EM TEMPO DISCRETO DE
CONTROLADORES RESSONANTES
APLICADOS A FONTES
ININTERRUPTAS DE ENERGIA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira

Porto Alegre
2017

GUILHERME KEIEL

**PROJETO EM TEMPO DISCRETO DE
CONTROLADORES RESSONANTES
APLICADOS A FONTES
ININTERRUPTAS DE ENERGIA**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul -
Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aurélio Tergolina Salton, PUCRS

Doutor pela The University of Newcastle – Newcastle, Austrália

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Fausto Bastos Líbano, UFRGS

Doutor pela Universidade Politécnica de Madri – Madri, Espanha

Coordenador do PPGEE: _____

Prof. Dr. Valner João Brusamarello

Porto Alegre, março de 2017.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, em especial pela dedicação e apoio em todos os momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Jeferson Vieira Flores, pelo conhecimento, disponibilidade e cooperação que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas Charles Lorenzini e Luciano Moreira, alunos de doutorado do PPGEE-UFRGS, pela amizade e auxílio durante o curso.

Agradeço também aos meus pais, pelo apoio nesta jornada.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo da discretização de controladores ressonantes aplicados a fontes ininterruptas de energia (*UPSs*, do termo em inglês, *Uninterruptible Power Supplies*). Primeiramente, diferentes métodos de discretização serão considerados na obtenção de um modelo em tempo discreto da *UPS*. Além disso, estes métodos serão comparados do ponto de vista frequencial para a definição da formulação do controlador ressonante a ser utilizado. Então, uma metodologia de projeto robusto do controlador ressonante em tempo discreto é proposta a partir de uma representação em espaço de estados do sistema em malha fechada e os parâmetros do controlador são obtidos através da solução de um problema de otimização convexa sujeito a restrições na forma de Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities - LMIs*). A estratégia proposta foi validada por meio de resultados de simulação e experimentais obtidos com um inversor comercial de 3,5 kVA considerando os critérios estabelecidos na norma *IEC 62040-3*. Nestas condições, demonstrara-se um desempenho melhor do que os obtidos com a discretização do controlador projetado em tempo contínuo, sobretudo quando consideradas frequências de amostragem menores.

Palavras-chave: Fontes ininterruptas de energia, seguimento de referência senoidal, rejeição de perturbações, controlador ressonante de tempo discreto, controle robusto.

ABSTRACT

This work presents a study about discrete-time resonant controllers applied to uninterruptible power supplies (UPSs). First, different discretization methods are considered to obtain an equivalent UPS discrete-time model. Moreover, these methods are compared in the frequency domain in order to define the resonant controller structure to be employed. Then, a robust design methodology to the discrete-time resonant controller is proposed using a state-space representation of the closed-loop system and the controller parameters are obtained by solving a convex optimization problem subject to constraints in the form of Linear Matrix Inequalities (LMIs). The proposed strategy was validated by means of simulation and experimental results obtained with a 3.5 kVA commercial inverter taking into account the IEC 62040-3 norm requirements. In this conditions, a better performance was achieved than those obtained through discretization of a continuous-time controller, especially when considering smaller sampling frequencies.

Keywords: Uninterruptible power supplies, sinusoidal reference tracking, disturbance rejection, discrete-time resonant controller, robust control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Topologia da <i>UPS online</i> de dupla conversão.	21
Figura 2:	Diagrama esquemático de um inversor com carga.	21
Figura 3:	Cargas não-lineares de referência.	25
Figura 4:	Exemplo de sistema em malha fechada.	26
Figura 5:	Diagrama de Bode da função de transferência (14) com $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s.	27
Figura 6:	Diagrama de Bode de magnitude do controlador múltiplo ressonante (16) com $\omega_{r_1} = 2\pi 60$ rad/s, $\omega_{r_2} = 6\pi 60$ rad/s, $\omega_{r_3} = 10\pi 60$ rad/s e $\omega_{r_4} = 14\pi 60$ rad/s.	28
Figura 7:	Sistema em malha fechada utilizando o controlador múltiplo ressonante.	30
Figura 8:	Sistema com controlador digital.	34
Figura 9:	Discretização através de equivalência por segurador de ordem zero.	36
Figura 10:	Comparação do diagrama de Bode de magnitude dos controladores discretizados $C_r(z)$ com $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s.	41
Figura 11:	Comparação do diagrama de Bode de magnitude dos controladores discretizados $C_r(z)$ com $\omega_r = 10\pi 60$ rad/s.	41
Figura 12:	Exemplo de sistema em tempo discreto em malha fechada.	47
Figura 13:	Diagrama de Bode de magnitude do controlador quasi-ressonante $C_q(z)$ com $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s para diferentes valores de ξ	48
Figura 14:	Sistema em malha fechada utilizando o controlador múltiplo ressonante de tempo discreto.	50
Figura 15:	Sistema em malha fechada utilizando o controlador múltiplo ressonante de tempo discreto, com realimentação de estados adicionais.	55
Figura 16:	Diagrama de Bode da planta para as condições de operação com carga máxima e mínima.	59
Figura 17:	Resposta ao degrau da planta discretizada e erro relativo, para $T = 100 \mu s$	59
Figura 18:	Resposta ao degrau da planta discretizada e erro relativo, para $T = 200 \mu s$	59
Figura 19:	Resposta ao degrau da planta discretizada e erro relativo, para $T = 400 \mu s$	60
Figura 20:	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada implementado no Simulink.	60
Figura 21:	Tensão de saída para carga não-linear de referência com um modo ressonante e $f_s=5400$ Hz.	63
Figura 22:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=21600$ Hz.	64

Figura 23:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=10800$ Hz.	64
Figura 24:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=5400$ Hz.	64
Figura 25:	Tensão de saída para carga não-linear de referência com dois modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.	66
Figura 26:	Magnitude de $T_d(z)$ para controladores com um e dois modos ressonantes.	66
Figura 27:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz. . . .	67
Figura 28:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz. . . .	67
Figura 29:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.	67
Figura 30:	Tensão de saída para carga não-linear de referência com três modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.	69
Figura 31:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz. . . .	70
Figura 32:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz. . . .	70
Figura 33:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.	70
Figura 34:	Tensão de saída para carga não-linear de referência com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.	72
Figura 35:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=21600$ Hz.	73
Figura 36:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=10800$ Hz.	73
Figura 37:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.	73
Figura 38:	Tensão de saída para carga não-linear de referência com quatro modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.	75
Figura 39:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz. . .	76
Figura 40:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz. . .	76
Figura 41:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz. . .	76
Figura 42:	Tensão de saída para carga não-linear de referência com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.	78
Figura 43:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=21600$ Hz.	78

Figura 44:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=10800$ Hz.	79
Figura 45:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.	79
Figura 46:	Comparativo da <i>THD</i> com o aumento do número de modos ressonantes.	79
Figura 47:	Placa de aquisição e transmissão de dados <i>dSPACE</i> [®] DS1104.	80
Figura 48:	Inversor de tensão de 3,5 kVA.	81
Figura 49:	Diagrama de blocos com as entradas e as saídas do inversor.	81
Figura 50:	Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de um modo ressonante e $f_s = 10800$ Hz.	83
Figura 51:	<i>THD</i> da tensão de saída e tensão <i>RMS</i> obtidos com controlador de um modo ressonante e $f_s = 10800$ Hz.	83
Figura 52:	Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de um modo ressonante e $f_s = 5400$ Hz.	84
Figura 53:	<i>THD</i> da tensão de saída e tensão <i>RMS</i> obtidos com controlador de um modo ressonante e $f_s = 5400$ Hz.	84
Figura 54:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s = 10800$ Hz.	85
Figura 55:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s = 5400$ Hz.	85
Figura 56:	Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de dois modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.	87
Figura 57:	<i>THD</i> da tensão de saída e tensão <i>RMS</i> obtidos com controlador de dois modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.	87
Figura 58:	Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de dois modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.	88
Figura 59:	<i>THD</i> da tensão de saída e tensão <i>RMS</i> obtidos com controlador de dois modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.	88
Figura 60:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.	89
Figura 61:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.	89
Figura 62:	Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de três modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.	91
Figura 63:	<i>THD</i> da tensão de saída e tensão <i>RMS</i> obtidos com controlador de três modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.	91
Figura 64:	Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de três modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.	92
Figura 65:	<i>THD</i> da tensão de saída e tensão <i>RMS</i> obtidos com controlador de três modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.	92
Figura 66:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.	93
Figura 67:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.	93
Figura 68:	Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de quatro modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.	95

Figura 69:	<i>THD</i> da tensão de saída e tensão <i>RMS</i> obtidos com controlador de quatro modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.	95
Figura 70:	Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de quatro modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.	96
Figura 71:	<i>THD</i> da tensão de saída e tensão <i>RMS</i> obtidos com controlador de quatro modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.	96
Figura 72:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz. .	97
Figura 73:	Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz. .	97
Figura 74:	Comparativo da <i>THD</i> com o aumento do número de modos ressonantes.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Níveis percentuais de tensão admissíveis por componente harmônica.	23
Tabela 2:	Propriedades dos métodos de discretização.	40
Tabela 3:	Funções de transferência discretas obtidas pela discretização de $C_r(s)$ com diferentes métodos.	40
Tabela 4:	Parâmetros da <i>UPS</i>	57
Tabela 5:	Parâmetros das cargas de referência para o ambiente de simulação. . .	58
Tabela 6:	Resultados de simulação com o controlador ressonante de um modo. .	62
Tabela 7:	Resultados de simulação com o controlador ressonante de dois modos.	65
Tabela 8:	Resultados de simulação com o controlador ressonante de três modos.	68
Tabela 9:	Resultados de simulação com o controlador ressonante de três modos (ganho finito).	71
Tabela 10:	Resultados de simulação com o controlador ressonante de quatro modos.	74
Tabela 11:	Resultados de simulação com o controlador ressonante de quatro modos (ganho finito).	77
Tabela 12:	Resultados experimentais com o controlador ressonante de um modo.	82
Tabela 13:	Resultados experimentais com o controlador ressonante de dois modos.	86
Tabela 14:	Resultados experimentais com o controlador ressonante de três modos.	90
Tabela 15:	Resultados experimentais com o controlador ressonante de três modos (ganho finito).	90
Tabela 16:	Resultados experimentais com o controlador ressonante de quatro modos.	94
Tabela 17:	Resultados experimentais com o controlador ressonante de quatro modos (ganho finito).	94

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ADC	<i>Analog-to-Digital Converter</i>
BIBO	<i>Bounded Input-Bounded Output</i>
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
IEC	<i>International Electrotechnical Commission</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
IGBT	<i>Insulated Gate Bipolar Transistor</i>
IHD	<i>Individual Harmonic Distortion</i>
LASCAR	Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
LIT	Linear Invariante no Tempo
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LPV	<i>Linear Parameter Varying</i>
PDD	Projeto Discreto Direto
PE	Projeto por Emulação
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PMI	Princípio do Modelo Interno
PPGEE	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
PR	Proporcional-Ressonante
PWM	<i>Pulse-Width Modulation</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
THD	<i>Total Harmonic Distortion</i>
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UPS	<i>Uninterruptible Power Supply</i>
VR	<i>Voltage Regulation</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

V_{vaz}	Tensão eficaz de saída na condição a vazio
V_l	Tensão eficaz de saída na condição com carga linear
V_{nl}	Tensão eficaz de saída na condição com carga não-linear
VR_l	Regulação de tensão com carga linear
VR_{nl}	Regulação de tensão com carga não-linear
V_{dev}	Desvio percentual transitório da tensão de saída
IHD_n	Distorção harmônica individual da n -ésima componente harmônica
THD	Distorção harmônica total
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^+	Conjunto dos números reais não-negativos
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano de ordem n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\text{Re}(a)$	Parte real do número complexo a
$\text{Im}(a)$	Parte imaginária do número complexo a
\mathcal{L}^{-1}	Transformada inversa de Laplace
\mathcal{Z}	Transformada Z
\otimes	Produto de Kronecker

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	CONTROLE DE SISTEMAS <i>UPS</i>	20
2.1	Fontes ininterruptas de energia - <i>UPSs</i>	20
2.1.1	Topologia	20
2.1.2	Modelo matemático da <i>UPS</i>	21
2.2	Normas aplicáveis às <i>UPSs</i>	22
2.2.1	<i>IEC</i> 62040-3	23
2.2.2	Dimensionamento das cargas de referência	24
2.2.3	Procedimentos de testes	25
2.3	Seguimento e rejeição de sinais periódicos em <i>UPSs</i>	25
2.3.1	Princípio do Modelo Interno - (PMI)	25
2.3.2	Controlador ressonante	26
2.3.3	Controlador múltiplo ressonante	27
2.3.4	Representação em espaço de estados	28
2.3.5	Conexão planta-controlador	29
2.3.6	Projeto dos ganhos	30
2.4	Comentários finais	33
3	CONTROLE DIGITAL	34
3.1	Projeto por emulação (PE) e Projeto discreto direto (PDD)	34
3.2	Métodos de discretização	35
3.2.1	Discretização exata ou por <i>Zero-order Hold</i>	36
3.2.2	<i>Forward Euler</i>	37
3.2.3	Tustin	38
3.2.4	Adams-Bashforth	38
3.3	Análise dos métodos de discretização	39
3.3.1	Análise geral	39
3.3.2	Influência na distribuição dos polos do controlador ressonante	40
3.4	Controle digital de <i>UPS</i>	42
3.5	Estabilidade de sistemas dinâmicos discretos	43
3.5.1	Estabilidade no sentido de Lyapunov para sistemas discretos	43
3.6	Sistemas dinâmicos incertos	44
3.7	Comentários finais	45

4	PROJETO EM TEMPO DISCRETO	46
4.1	Controlador ressonante em tempo discreto	46
4.2	Controlador quasi-ressonante em tempo discreto	48
4.3	PDD considerando o modelo da <i>UPS</i> discretizado por <i>ZOH</i>	49
4.3.1	Sistema em malha fechada	49
4.3.2	Projeto dos ganhos	51
4.4	PDD considerando o modelo da <i>UPS</i> discretizado por aproximações	54
4.4.1	Sistema em malha fechada	54
4.4.2	Projeto dos ganhos	55
4.5	Comentários finais	56
5	RESULTADOS	57
5.1	Exemplo numérico da <i>UPS</i>	57
5.1.1	Comparação do modelo da planta	58
5.2	Ambiente de simulação	60
5.3	Resultados de simulação	61
5.3.1	Controlador com um modo ressonante	61
5.3.2	Controlador com dois modos ressonantes	64
5.3.3	Controlador com três modos ressonantes	68
5.3.4	Controlador com três modos ressonantes (ganho finito)	70
5.3.5	Controlador com quatro modos ressonantes	73
5.3.6	Controlador com quatro modos ressonantes (ganho finito)	76
5.4	Resultados experimentais	80
5.4.1	Controlador com um modo ressonante	82
5.4.2	Controlador com dois modos ressonantes	86
5.4.3	Controlador com três modos ressonantes	89
5.4.4	Controlador com quatro modos ressonantes	93
5.5	Discussão dos resultados	97
5.6	Comentários finais	99
6	CONCLUSÕES	100
	REFERÊNCIAS	102
	APÊNDICE A INFORMAÇÕES ADICIONAIS SOBRE O MÉTODO ADAMS-BASHFORTH	106
A.1	Determinação dos coeficientes	106
	APÊNDICE B DISCRETIZAÇÃO DO CONTROLADOR RESSONANTE	108
B.1	<i>Forward Euler</i>	108
B.2	<i>Adams-Bashforth</i>	108
B.3	<i>Tustin</i>	108
B.4	<i>Tustin com prewarping</i>	109
B.5	<i>Zero-Order Hold</i>	110

APÊNDICE C	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR RES- SONANTE DE TEMPO DISCRETO	111
C.1	Controlador com um modo ressonante	111
C.1.1	Resultados de simulação	112
C.2	Controlador com dois modos ressonantes	114
C.2.1	Resultados de simulação	116
C.3	Controlador com três modos ressonantes	118
C.3.1	Resultados de simulação	119
C.4	Controlador com três modos ressonantes (ganho finito)	121
C.4.1	Resultados de simulação	123
C.5	Controlador com quatro modos ressonantes	125
C.5.1	Resultados de simulação	127
C.6	Controlador com quatro modos ressonantes (ganho finito)	128
APÊNDICE D	DISCRETIZAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS DO CON- TROLADOR RESSONANTE	133
D.1	<i>Zero-Order Hold</i>	133
APÊNDICE E	DISCRETIZAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS DO CON- TROLADOR QUASI-RESSONANTE	134
E.1	<i>Zero-Order Hold</i>	134

1 INTRODUÇÃO

As fontes ininterruptas de energia, conhecidas também pela sigla *UPS* (do termo em inglês *Interruptible Power Supply*), são equipamentos projetados para fornecer energia com continuidade e qualidade para cargas críticas. Estes sistemas têm como principal objetivo manter o fornecimento de energia quando a fonte primária falhar, além de que, dependendo de sua topologia, também são capazes de corrigir distúrbios provenientes da rede elétrica. Esses equipamentos, uma vez compostos por sistemas eletromecânicos, a partir de avanços na eletrônica de potência, passaram a empregar conversores eletrônicos, o que resultou em melhor desempenho e maior rendimento (SINGH et al., 2003).

A norma nacional (ABNT, 2005) e demais normas internacionais como (IEC, 2011) e (ANSI/IEEE, 1986) foram estabelecidas com o intuito de regulamentar os requisitos mínimos de desempenho para a tensão regulada pelas *UPSs*, tanto para condições de regime permanente quanto em transitório. Estas normas exigem, sob o ponto de vista de sistemas de controle, uma tensão de saída de características senoidais com amplitude e frequência fixas, de forma a apresentar um rápido tempo de recuperação em resposta à inserção/retirada de cargas e uma baixa taxa de distorção harmônica (em inglês, *Total Harmonic Distortion - THD*) quando submetida a distúrbios.

No que se refere ao controle de inversores de tensão em sistemas *UPS*, o controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) já foi, historicamente, o mais utilizado (WILLMANN et al., 2007). Isso se deve a simplicidade do controlador e ao vasto número de técnicas existentes para a sua sintonia. No entanto, esse não é o controlador mais indicado quando deseja-se seguir um sinal de referência senoidal, visto que, devido à dinâmica inserida na malha de controle, garante apenas o seguimento para sinais de referência do tipo salto. Para superar essa limitação, as principais metodologias empregadas atualmente no controle de inversores são os controladores baseados no Princípio do Modelo Interno (PMI) (FRANCIS; WONHAM, 1975) compostos pelos controladores repetitivos e pelos ressonantes.

O controlador ressonante (FUKUDA; YODA, 2001) satisfaz o PMI por apresentar ganho infinito na frequência de interesse e portanto, quando utilizado no controle de conversores CC-CA, permite o seguimento da referência com erro nulo. O controlador Proporcional-Ressonante (PR) possibilita uma rápida resposta em transientes de carga, embora não seja capaz de rejeitar as componentes harmônicas geradas pela carga não-linear conectada à saída do inversor. Para lidar com esse problema muitos trabalhos consideram a aplicação de controladores múltiplos ressonantes nos quais são empregados n modos ressonantes sintonizados, além da frequência fundamental, nas frequências harmônicas de maior contribuição do sinal de perturbação.

Para a implementação prática de controladores ressonantes, assim como em muitas malhas de controle nos dias atuais, são utilizados controladores digitais (ÅSTRÖM; WIT-

TENMARK, 1997), os quais lidam com ambos sinais em tempo contínuo e tempo discreto. Nesse caso, a teoria de controle digital oferece duas abordagens principais para o projeto do controlador: o chamado projeto por emulação (PE) e o projeto discreto direto (PDD). Embora o projeto por emulação possa se beneficiar de uma grande variedade de métodos bem estabelecidos na literatura, o desempenho do sistema em malha fechada é extremamente dependente da discretização utilizada. Em grande parte dos trabalhos referentes ao controle de *UPS* o controlador ressonante digital é obtido pelo projeto por emulação (PEREIRA; CARVALHO; FLORES, 2013), o que pode ser um problema na garantia de estabilidade do sistema em malha fechada quando utilizados alguns tipos de aproximações. Em (YEPES et al., 2010) é realizada uma extensiva análise dos efeitos da discretização no desempenho do controlador ressonante, onde é possível afirmar que o pico de ressonância é sensível ao período de amostragem ou ordem da harmônica considerada. Em razão disso, para a obtenção de um desempenho adequado do inversor, usualmente são empregadas frequências de chaveamento elevadas, o que pode resultar em maiores perdas por aquecimento nas chaves e componentes magnéticos (SINGH et al., 2003), e até mesmo ocasionar o aumento da distorção harmônica devido às limitações físicas desses semicondutores (HOLTZ, 1992). O projeto direto em tempo discreto busca não apenas obter um controlador ressonante com uma resposta em frequência adequada, como também manter as garantias de estabilidade e desempenho robusto do sistema em malha fechada especificadas em projeto, uma vez que não é necessário converter o controlador resultante.

De forma análoga a metodologia consolidada para o projeto robusto do controlador ressonante em tempo contínuo, este trabalho propõe um método sistemático para o projeto em tempo discreto de controladores múltiplos ressonantes para *UPSs*, levando em consideração a incerteza inerente a esse sistema. Combinando a representação em espaço de estados do controlador múltiplo ressonante em tempo discreto e da planta discretizada em um sistema aumentado, a síntese do controlador é descrita como um problema de realimentação estática de estados associado a um termo de alimentação direta da referência. Os parâmetros do controlador são então obtidos por meio da solução de um problema de otimização convexa sujeito a restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities - LMIs*) garantindo a estabilidade interna e critérios de desempenho transitório. Essa estratégia de controle é validada, através de resultados de simulação e experimentais, em um exemplo numérico da *UPS* de 3,5 kVA. Em consequência disso, o trabalho divide-se em três objetivos específicos:

- Comparação do efeito da discretização do controlador ressonante no desempenho do sistema da *UPS* em malha fechada.
- A síntese robusta do controlador múltiplo ressonante em tempo discreto baseado na solução de um problema de otimização convexa.
- Comparação do desempenho da *UPS* entre as duas abordagens de projeto, por emulação e discreto, considerando frequências de amostragem distintas.

Essa dissertação está dividida da seguinte forma: no Capítulo 2 são abordados os tópicos relativos às *UPSs* e lembrado o projeto, já consolidado, de seus controladores. Primeiramente, é apresentado o modelo matemático do estágio de saída da *UPS* através de uma representação em espaço de estados e depois são revisados os ensaios para avaliação do desempenho do sistema propostos pela principal norma em vigor. Por fim, é abordado

o problema de seguimento de referência e rejeição de perturbações, dando destaque ao PMI e ao projeto do controlador múltiplo ressonante de tempo contínuo.

O Capítulo 3 aborda o processo de implementação de controladores digitais e apresenta os principais métodos utilizados para a discretização de sistemas lineares invariantes no tempo (LIT). São revistas as metodologias de projeto de controladores ressonantes digitais para as *UPSs* e, por fim, apresentadas as bases matemáticas necessárias para o projeto desses controladores diretamente em tempo discreto.

No Capítulo 4 é estudada a metodologia de projeto em tempo discreto do controlador ressonante a partir da discretização do modelo do inversor por três métodos distintos. São apresentadas condições *LMIs* para a síntese dos ganhos do controlador múltiplo ressonante, de forma a garantir a estabilidade robusta e mínima resposta transiente do sistema em malha fechada.

Em sequência, no Capítulo 5 são apresentados os resultados de simulação e experimentais obtidos para um exemplo numérico da *UPS* envolvendo o controlador ressonante de 1 até 4 modos, obtido por meio do projeto direto em tempo discreto. Estes resultados são comparados com os obtidos, de forma análoga, pelo projeto por emulação.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta conclusões à respeito dos resultados e aborda perspectivas de trabalhos futuros. É seguido de cinco apêndices contendo informações adicionais sobre um dos métodos de discretização utilizados, as discretizações da função de transferência e espaço de estados do controlador ressonante, e os resultados de simulação adicionais referentes aos exemplos numéricos do Capítulo 5.

2 CONTROLE DE SISTEMAS UPS

Neste capítulo são abordados os seguintes conceitos relativos às *UPSs*: o modelo matemático do estágio de saída destes sistemas através de uma representação em espaço de estados, onde é usado o modelo médio do inversor; a norma mais relevante que regula o seu funcionamento; e a descrição dos procedimentos de ensaio necessários para a avaliação do desempenho do sistema segundo essa norma.

2.1 Fontes ininterruptas de energia - *UPSs*

As *UPSs* surgiram da necessidade do fornecimento de energia elétrica com qualidade e continuidade para cargas críticas, as quais não podem ter seus serviços suspensos caso ocorra uma interrupção no suprimento de energia. Exemplos tradicionais de cargas críticas são os equipamentos que, de alguma forma, realizam algum tipo de processamento de dados, como computadores, servidores e dispositivos para processamento de imagem (IEC, 2011). O uso de *UPSs* possibilita a extensão do tempo de operação desses dispositivos até que estes sejam apropriadamente desligados ou que a fonte principal de energia seja restabelecida.

Devido ao avanço dos semicondutores e da eletrônica de potência, grande parte dos equipamentos elétricos conectados às *UPSs* possuem em seu estágio de entrada uma fonte chaveada, cujo circuito pode ser simplificado por um retificador monofásico associado a um filtro capacitivo. Devido a esse perfil, estes equipamentos produzem sinais de corrente com elevado conteúdo harmônico, distorcendo assim o sinal de tensão de saída da *UPS* (SAINZ; MESAS; FERRER, 2008), sendo denominadas de cargas não-lineares. Em uma análise espectral da corrente de saída desse circuito é possível verificar conteúdo harmônico significativo em componentes múltiplas ímpares da frequência fundamental.

Com a intenção de regulamentar e avaliar a operação das *UPSs* para diversas condições de carga, foram elaboradas normas nacionais e internacionais que definem os requisitos mínimos de desempenho e funcionamento desses equipamentos. A tensão fornecida pelas *UPSs* deve cumprir com as especificações estabelecidas pelas principais normas vigentes, tais como (ABNT, 2005), (ANSI/IEEE, 1986) e (IEC, 2011).

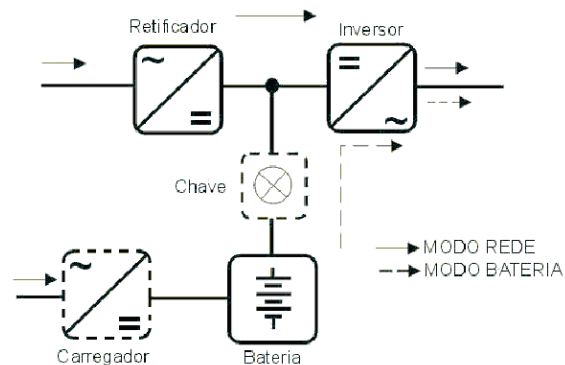
2.1.1 Topologia

A norma NBR 15014 (ABNT, 2003) define cinco topologias distintas para as *UPSs* estáticas: *Stand-by*; Interativo convencional; Interativo ferroressonante; Interativo de simples conversão; e *Online* de dupla conversão. Todas essas topologias são essencialmente compostas por três blocos: um conversor CA-CC (retificador), responsável pela conversão da tensão alternada de entrada em tensão contínua; um meio de armazenamento de ener-

gia, usualmente através de um banco de baterias; e um conversor CC-CA (inversor) no estágio de saída, o qual converte a tensão contínua em alternada, fornecendo-a às cargas.

A topologia *Online* de dupla conversão, da Fig. 1, apresenta a maior confiabilidade e robustez, sendo desenvolvida para alimentar a carga com total controle em amplitude e frequência em 100% do tempo (ABNT, 2003), isolando-a da rede. Por esse motivo esta foi a topologia utilizada no desenvolvimento do controlador proposto neste trabalho.

Figura 1: Topologia da *UPS online* de dupla conversão.

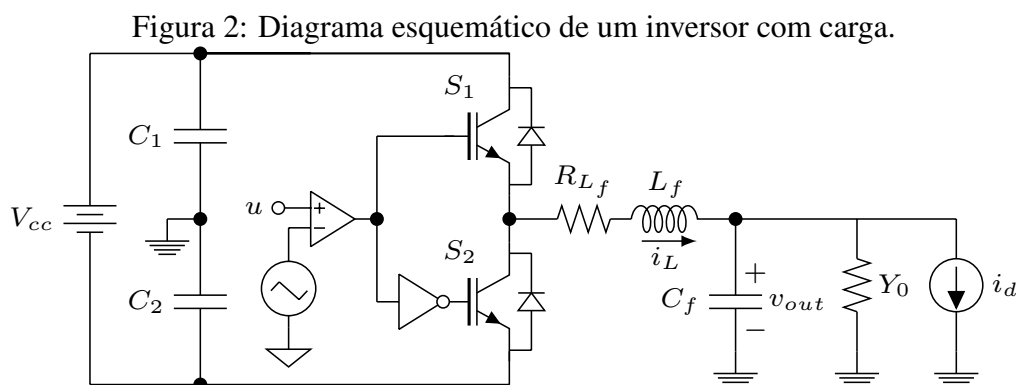


Fonte: (ABNT, 2003)

O inversor do estágio de saída da *UPS online* de dupla conversão é responsável não só pela conversão de energia como também por manter a regulação de tensão dentro dos limites mínimos aceitáveis, mesmo quando alimentando cargas não-lineares. Desta forma, este elemento será o foco dos desenvolvimentos a seguir.

2.1.2 Modelo matemático da *UPS*

Na *UPS* escolhida, a conversão de tensão contínua em senoidal é realizada através de um inversor monofásico com topologia em meia ponte em conjunto com um filtro passa-baixas LC de segunda ordem, como apresentado na Fig. 2 (SUN; GROTTSTOLLEN, 1992). O estágio de entrada (retificador e banco de baterias) é simplificado por uma fonte de tensão contínua V_{cc} associada a dois capacitores, C_1 e C_2 . O acionamento dos IGBTs (do termo em inglês *Insulated Gate Bipolar Transistor*) S_1 e S_2 é realizado através da modulação por largura de pulso (do inglês, *Pulse-Width Modulation - PWM*) do sinal de controle $u(t)$.



Fonte: (LORENZINI, 2015)

Segundo (CHEN et al., 2007), se considerado o modelo médio do inversor, o efeito do chaveamento *PWM* nos *IGBTs* pode ser representado por um ganho K_{PWM} multiplicado ao sinal de controle $u(t)$. A expressão do ganho K_{PWM} pode ser calculada por:

$$K_{PWM} = \frac{V_{cc}}{2\hat{V}_{tri}} \quad (1)$$

onde \hat{V}_{tri} é a amplitude de pico da portadora triangular utilizada na geração do sinal *PWM*.

No diagrama esquemático da Fig. 2, as cargas conectadas na saída da *UPS* são representadas pela conexão em paralelo de uma admitância $Y_0(t)$ e uma fonte de corrente $i_d(t)$, a qual modela os distúrbios periódicos gerados pelas cargas não-lineares (PEREIRA; CARVALHO; FLORES, 2013). A admitância $Y_0(t)$ descreve o comportamento das cargas lineares e é representada por um elemento variante no tempo dado por

$$Y_0(t) \in \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} := \{Y_0(t) \in \mathbb{R} : Y_{min} \leq Y_0(t) \leq Y_{max}\}, \quad (2)$$

sendo Y_{min} e Y_{max} os seus valores mínimo e máximo, definidos *a priori* e dados pelas condições de operação a vazio e com a carga máxima nominal da *UPS*, respectivamente.

As equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema são obtidas aplicando as Leis de Kirchhoff no filtro LC de saída, resultando na representação em espaço de estados apresentada a seguir (PEREIRA et al., 2014):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(Y_0(t))x(t) + Bu(t) + Ei_d(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ e(t) = r(t) - y(t) \end{cases} \quad (3)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estados do sistema, composto pela corrente no indutor $i_L(t)$ e pela tensão no capacitor do filtro $v_{out}(t)$, respectivamente; $y(t) \in \mathbb{R}$ é a tensão de saída do inversor; $r(t) \in \mathbb{R}$ é a referência de tensão e $e(t) \in \mathbb{R}$ é o erro de seguimento. As suas matrizes são dadas por:

$$A(Y_0(t)) = \begin{bmatrix} -\frac{R_{Lf}}{L_f} & -\frac{1}{L_f} \\ \frac{1}{C_f} & -\frac{Y_0(t)}{C_f} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{K_{PWM}}{L_f} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C_f} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]. \quad (4)$$

Verifica-se que a matriz $A(Y_0(t))$ é incerta e variante no tempo, pois varia em função da admitância da carga conectada à saída da *UPS*. Esta característica deve ser levada em consideração no projeto dos controladores para esse sistema.

2.2 Normas aplicáveis às *UPSs*

Com a intenção de avaliar e regulamentar a operação das *UPSs*, entidades elaboraram normas nacionais e internacionais que definem os requisitos mínimos de desempenho e funcionamento desses equipamentos. Entre essas normas destacam-se a NBR 15204 (ABNT, 2005), *ANSI/IEEE Std 944* (ANSI/IEEE, 1986) e a *IEC 62040-3* (IEC, 2011). Essa última é também a mais completa quanto aos procedimentos de ensaios e, portanto, a que será empregada neste trabalho.

2.2.1 IEC 62040-3

A norma IEC 62040-3, estabelecida pela *International Electrotechnical Commission (IEC)* em 2011, tem como objetivo padronizar os métodos para especificação de desempenho e requisitos mínimos a serem cumpridos por *UPSs* monofásicas e trifásicas com tensão de saída inferior a 1000 V e com sistema de armazenamento de energia (IEC, 2011).

Para as condições de operação com carga linear de referência deve-se medir a tensão *RMS* de saída em regime permanente, e de suas componentes harmônicas, e com isso avaliar a regulação de tensão (do termo em inglês *Voltage Regulation - VR*) através da equação:

$$VR_l = 100 \frac{V_{vaz} - V_l}{V_{vaz}} \% \quad (5)$$

sendo V_{vaz} e V_l as tensões *RMS* de saída para as respectivas condições a vazio e com carga linear de referência. A norma admite uma regulação de tensão dentro da faixa de $\pm 10\%$ do valor nominal e uma variação de até 2% na frequência de operação.

Para uma carga não-linear de referência deve-se, da mesma forma, obter a tensão *RMS* de saída em regime permanente e de suas componentes harmônicas, e avaliar a regulação de tensão em relação a condição de operação a vazio:

$$VR_{nl} = 100 \frac{V_{vaz} - V_{nl}}{V_{vaz}} \% \quad (6)$$

Segundo esta norma, para ser considerada senoidal, a forma de onda da tensão de saída deve possuir uma *THD* menor do que 8% e distorção harmônica individual (*IHD*, do termo em inglês *Individual Harmonic Distortion*) dentro dos limites especificados na Tabela 1.

Tabela 1: Níveis percentuais de tensão admissíveis por componente harmônica.

Harmônicas ímpares não múltiplas de 3		Harmônicas ímpares múltiplas de 3		Harmônicas pares	
Ordem da harmônica	Tensão da componente	Ordem da harmônica	Tensão da componente	Ordem da harmônica	Tensão da componente
n	%	n	%	n	%
5	6	3	5	2	2
7	5	9	1,5	4	1
11	3,5	15	0,3	6	0,5
13	3	21	0,2	8	0,5
$17 \leq n \leq 49$	$2,27 \times (17/n) - 0,27$	$21 \leq n \leq 45$	0,2	$10 \leq n \leq 50$	$0,25 \times (10/n) + 0,25$

Fonte: (IEC, 2011)

A variação instantânea de tensão é utilizada nos ensaios de desempenho dinâmico, nos quais é comparada por meio do desvio percentual da tensão de saída $V_{dev}(t)$ com até três perfis de tolerância impostos pela norma. Essa variação instantânea de tensão é um evento que começa no instante da condição transitória e que dura até o retorno para a condição de regime permanente. O desvio percentual transitório de tensão é obtido por:

$$V_{dev}(t) = 100 \frac{V_o(t) - V_{vaz}(t)}{V_{vazp}} \% \quad (7)$$

onde $V_o(t)$ e $V_{vaz}(t)$ são as tensões instantâneas da saída do inversor para a condição de carga em análise e para a condição a vazio, respectivamente. V_{vazp} é o valor de pico da tensão de saída na condição a vazio.

2.2.2 Dimensionamento das cargas de referência

A norma *IEC 62040-3* também define as cargas lineares e não-lineares de referência que devem ser utilizadas nos ensaios. A carga linear de referência é uma carga puramente resistiva dimensionada para dissipar a potência ativa nominal da *UPS*. Já a carga não-linear deve consumir a potência aparente do equipamento, dimensionada conforme o Anexo E da referida norma.

2.2.2.1 Carga linear de referência

Nos ensaios para avaliação do desempenho dinâmico são adicionados ou retirados, de forma independente, degraus de carga referentes a 20% e 80% da potência ativa de saída da *UPS*. Essas cargas, representadas respectivamente por R_{l1} e R_{l2} , são calculadas como:

$$R_{l1} = \frac{V_o^2}{0,2 S \cos \phi} [\Omega], \quad R_{l2} = \frac{V_o^2}{0,8 S \cos \phi} [\Omega] \quad (8)$$

sendo V_o a tensão *RMS* de saída, S a potência aparente nominal de saída e $\cos \phi$ o fator de potência.

2.2.2.2 Carga não-linear de referência

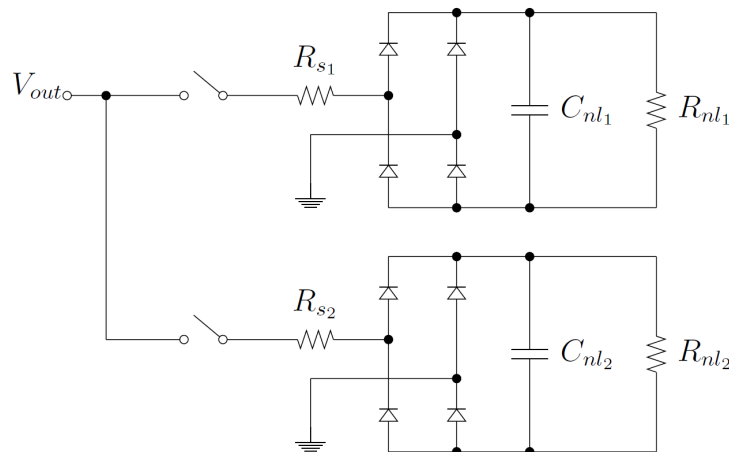
A carga não-linear de referência, definida no Anexo E da norma *IEC 62040-3*, é composta por um retificador não controlado de onda completa associado a um filtro capacitivo, mostrada na Fig. 3. Esta carga é composta por uma resistência de linha R_s , dimensionada para dissipar 4% da potência aparente nominal, um resistor R_{nl} calculado para dissipar os 66% restantes, resultando um fator de potência de 0,7, e um capacitor C_{nl} , projetado para um *ripple* de 5% na tensão retificada U_c tal que

$$U_c = \sqrt{2} \cdot 0,92 \cdot 0,96 \cdot 0,975 \cdot V_o = 1,22 V_o \quad (9)$$

Para *UPSs* com potência aparente inferior a 4kVA, os ensaios de desempenho dinâmico são realizados aplicando-se degraus aditivos ou subtrativos de carga não-linear com 25% ou 75% da potência aparente de saída da *UPS*, calculados de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} R_{s1} &= \frac{0,04V_o^2}{0,25 S} [\Omega], & R_{s2} &= \frac{0,04V_o^2}{0,75 S} [\Omega], \\ R_{nl1} &= \frac{U_c^2}{0,66 \cdot 0,25 S} [\Omega], & R_{nl2} &= \frac{U_c^2}{0,66 \cdot 0,75 S} [\Omega], \\ C_{nl1} &= \frac{7,5}{f R_{nl1}} [\Omega], & C_{nl2} &= \frac{7,5}{f R_{nl2}} [\Omega] \end{aligned} \quad (10)$$

Figura 3: Cargas não-lineares de referência.



Fonte: (LORENZINI, 2015)

2.2.3 Procedimentos de testes

A norma IEC 62040-3 divide os testes para avaliação do desempenho de uma *UPS* em dois ensaios distintos: desempenho estático e desempenho dinâmico. Na avaliação do desempenho estático são realizadas medições em regime permanente das tensões V_{vaz} , V_l e V_{nl} definidas anteriormente, assim como da contribuição harmônica da tensão de saída, através de VR , THD e IHD para as condições de carga a vazio e com 100% das cargas linear e não-linear de referência.

O ensaio de desempenho dinâmico avalia o desempenho transitório da *UPS* para a aplicação de degraus aditivos e subtrativos de carga linear e não-linear de referência, comparando a diferença $V_{dev}(t)$ com um dos perfis de tolerância para desvio de tensão da referida norma. Para o ensaio com carga linear, como observado em (LORENZINI, 2015), primeiro conecta-se uma carga referente a 20% da potência ativa de saída da *UPS* e em seguida, após atingido o regime permanente, aplica-se um degrau com 80% da carga restante. Em sequência são aplicados degraus de carga subtrativos, partindo da carga referente a 100% da potência ativa, retirando-se 80% dessa carga e, após alcançado o valor de regime, retirando-se os 20% restantes. Esse procedimento é o mesmo para carga não-linear, porém agora os respectivos degraus correspondem a 25% e 75% da potência aparente da *UPS*. Nos dois casos, a aplicação ou retirada deve ocorrer no instante do valor de pico da senoide.

2.3 Seguimento e rejeição de sinais periódicos em *UPS*s

Nesta seção será abordado o problema de seguimento e rejeição de sinais periódicos inerentes aos sistemas *UPS*. Sob a óptica de sistemas de controle, deseja-se que a tensão de saída do inversor siga um sinal de referência puramente senoidal de forma a eliminar o erro de seguimento em regime permanente. Uma solução para esse problema é a utilização do Princípio do Modelo Interno (PMI), que será explicado na sequência.

2.3.1 Princípio do Modelo Interno - (PMI)

O princípio do modelo interno, introduzido em (FRANCIS; WONHAM, 1975), possibilita que um sistema realimentado siga a um determinado sinal de referência com erro nulo em regime permanente e/ou rejeite certas perturbações. Sendo mais específico, isto

é garantido se duas condições forem satisfeitas (FUKUDA; YODA, 2001): o sistema for assintoticamente estável em malha fechada e apresentar no seu controlador os mesmos modos marginalmente estáveis que descrevem o sinal de interesse (referência ou perturbação).

Tomando como exemplo o sistema em malha fechada apresentado na Fig. 4, tem-se que $C(s)$ é a função de transferência do controlador, $G(s)$ a função de transferência da planta, $G_d(s)$ da perturbação e $R(s)$, $D(s)$ e $Y(s)$ representam os sinais de referência, perturbação e saída do sistema, respectivamente. As funções de transferência do sistema em malha fechada, que relacionam a referência com a saída e a entrada de perturbação com a saída são, respectivamente:

$$T_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad \text{e} \quad T_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_d(s)}{1 + C(s)G(s)}. \quad (11)$$

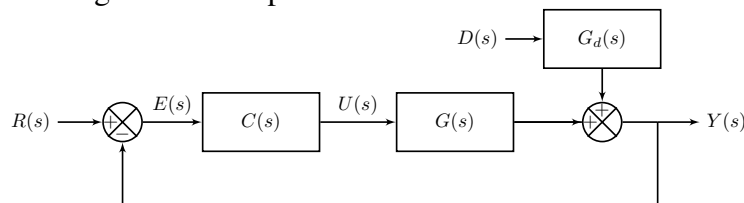
A partir de uma análise no domínio da frequência, similar a aplicada em (FLORES, 2012) e (LORENZINI, 2015), verifica-se que somente ocorrerá o seguimento com erro nulo de uma referência puramente senoidal com frequência ω_r se:

$$|T_r(j\omega_r)| = \left| \frac{C(j\omega_r)G(j\omega_r)}{1 + C(j\omega_r)G(j\omega_r)} \right| = 1, \quad \angle T_d(j\omega_r) = 0, \quad (12)$$

e, adicionalmente, somente ocorrerá a completa rejeição de uma perturbação com frequência ω_r se:

$$|T_d(j\omega_r)| = \left| \frac{G_d(j\omega_r)}{1 + C(j\omega_r)G(j\omega_r)} \right| = 0, \quad \angle T_d(j\omega_r) = 0. \quad (13)$$

Figura 4: Exemplo de sistema em malha fechada.



Nota-se que as equações (12) e (13) são mutuamente satisfeitas quando $|C(j\omega_r)| \rightarrow \infty$. Assim, garante-se o seguimento com erro nulo de um sinal senoidal e a rejeição de perturbação em uma dada frequência se a função de transferência do controlador apresentar ganho infinito na frequência do sinal de interesse.

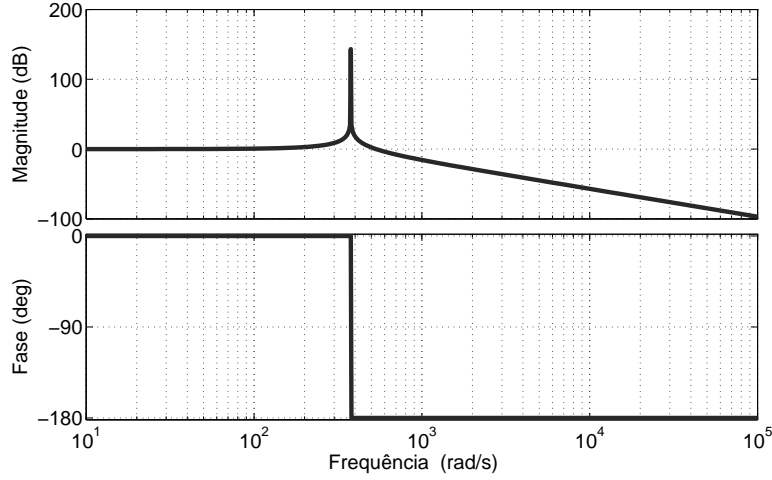
2.3.2 Controlador ressonante

De forma a satisfazer o PMI para sinais puramente senoidais conforme descrito na seção anterior, necessita-se inserir na malha de controle do sistema a seguinte função de transferência:

$$C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{\omega_r^2}{s^2 + \omega_r^2}. \quad (14)$$

Avaliando a resposta em frequência desse sistema com $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s, apresentada na Fig. 5, verifica-se a existência de um pico com magnitude infinita na exata frequência ω_r , chamada de frequência de ressonância.

Figura 5: Diagrama de Bode da função de transferência (14) com $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s.



Inserindo um controlador ressonante no laço interno de um sistema em malha fechada é possível replicar a dinâmica do sinal de referência senoidal para o interior da malha, de forma a garantir o seguimento desse sinal com erro nulo em regime permanente. Já para um sinal de perturbação nesta frequência, o sistema em malha fechada da Fig. 4 apresenta magnitude nula na saída, garantindo a completa rejeição desse sinal em regime permanente.

Como apresenta dois polos sobre o eixo imaginário (em $s = \pm j\omega_r$) em (PEREIRA et al., 2014) é proposta a inserção de dois zeros para evitar problemas na garantia de estabilidade do sistema em malha fechada. Com isso, a função de transferência do controlador ressonante de tempo contínuo resulta em:

$$C_r(s) = \frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^2 + \omega_r^2}, \quad (15)$$

sendo α_0 , α_1 e α_2 parâmetros a serem determinados.

2.3.3 Controlador múltiplo ressonante

A mesma formulação utilizada em (14) pode ser estendida para seguir/rejeitar sinais periódicos mais complexos, com n componentes harmônicas nas frequências $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_n}$. Nesse caso, para múltiplas estruturas ressonantes têm-se a função de transferência:

$$C_n(s) = \frac{\omega_{r_1}^2}{s^2 + \omega_{r_1}^2} + \frac{\omega_{r_2}^2}{s^2 + \omega_{r_2}^2} + \dots + \frac{\omega_{r_n}^2}{s^2 + \omega_{r_n}^2}. \quad (16)$$

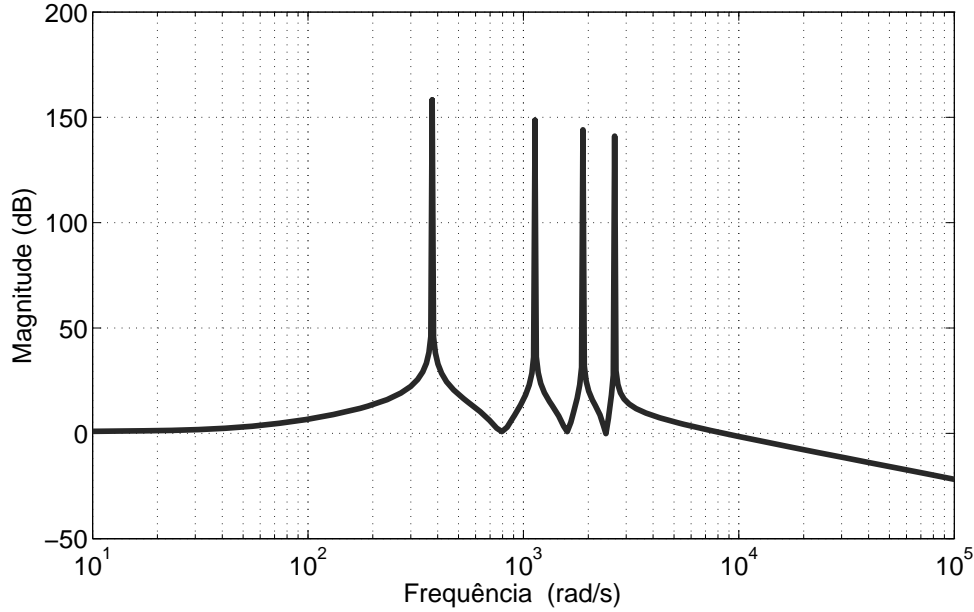
A Fig. 6 apresenta a magnitude da resposta em frequência de um controlador com 4 modos ($n = 4$) nas frequências $\omega_{r_1} = 2\pi 60$ rad/s, $\omega_{r_2} = 6\pi 60$ rad/s, $\omega_{r_3} = 10\pi 60$ rad/s e $\omega_{r_4} = 14\pi 60$ rad/s.

Conhecida a estrutura do sistema múltiplo ressonante, o controlador com adição de dois zeros em cada estrutura é obtido diretamente pela extensão do controlador (15) para n modos ressonantes:

$$C_{r_n}(s) = \frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^2 + \omega_{r_1}^2} + \dots + \frac{\alpha_{3n-1} s^2 + \alpha_{3n-2} s + \alpha_{3n-3}}{s^2 + \omega_{r_n}^2} \quad (17)$$

com $\alpha_0, \dots, \alpha_{3n-1}$ a serem determinados.

Figura 6: Diagrama de Bode de magnitude do controlador múltiplo ressonante (16) com $\omega_{r_1} = 2\pi 60$ rad/s, $\omega_{r_2} = 6\pi 60$ rad/s, $\omega_{r_3} = 10\pi 60$ rad/s e $\omega_{r_4} = 14\pi 60$ rad/s.



2.3.4 Representação em espaço de estados

O controlador (17) também pode ser representado a partir de uma realização em espaço de estados, como será desenvolvido na sequência. Note que pode-se reescrever a função de transferência do controlador ressonante em (15) como:

$$C_r(s) = \bar{k}_e + \frac{k_{c_2}s + k_{c_1}\omega_r}{s^2 + \omega_r^2} \quad (18)$$

onde os valores dos parâmetros α_0 , α_1 e α_2 em (15) são dados por

$$\alpha_0 = k_{c_1}\omega_r + k_e\omega_r^2, \quad \alpha_1 = k_{c_2}, \quad \alpha_2 = \bar{k}_e.$$

Portanto, o controlador múltiplo ressonante (17) pode ser reescrito na função de transferência

$$C_{r_n}(s) = k_e + \sum_{i=1}^n \frac{k_{c_{2i}}s + k_{c_{2i-1}}\omega_{r_i}}{s^2 + \omega_{r_i}^2}, \quad (19)$$

com os ganhos $k_{c_{2i-1}}$ e $k_{c_{2i}}$ a serem determinados para cada modo ressonante e k_e o ganho estático dado ao sinal de entrada.

Sabendo disso, uma realização no espaço de estados para a função de transferência (18), semelhante à apresentada em (PEREIRA; CARVALHO; FLORES, 2013), é dada pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_r(t) = A_r \bar{x}_r(t) + B_r e(t) \\ y_r(t) = C_r \bar{x}_r(t) + D_r e(t) \end{cases} \quad (20)$$

onde $\bar{x}_r(t) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estados do controlador ressonante, $e(t)$ o sinal de entrada e $y_r(t)$ o sinal de saída do controlador. As matrizes A_r , B_r , C_r e D_r são definidas por

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r \\ -\omega_r & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_r = [k_{c_1} \quad k_{c_2}], \quad D_r = \bar{k}_e. \quad (21)$$

A representação (20)-(21) pode ser estendida para o caso múltiplo ressonante apresentado em (17) pela seguinte realização:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= \begin{bmatrix} A_{r_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{r_n} \end{bmatrix} x_r(t) + \begin{bmatrix} B_{r_1} \\ \vdots \\ B_{r_n} \end{bmatrix} e(t) \\ y_r(t) &= [C_{r_1} \quad \dots \quad C_{r_n}] x_r(t) + k_e e(t) \end{aligned} \quad (22)$$

onde $x_r(t) = [\bar{x}_{r_1}(t)^T \quad \dots \quad \bar{x}_{r_n}(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ é o vetor de estados do controlador múltiplo ressonante; $e(t)$ o sinal na entrada do controlador; $A_{r_i}, B_{r_i}, C_{r_i}, D_{r_i}$ são as matrizes dinâmica e de peso nos sinais de entrada (21) avaliadas para cada modo ressonante, ou seja, na respectiva frequência $\omega_r = \omega_{r_i}$ para $i = 1, \dots, n$.

2.3.5 Conexão planta-controlador

Conhecidas as representações em espaço de estados da planta (3) e do controlador múltiplo ressonante (22), considera-se a interconexão entre ambos através do vetor de estados aumentado $x_a(t) = [x^T(t) \quad x_r^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n+2}$, resultando no seguinte modelo em espaço de estados do sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_a(Y_0(t)) + B_a u(t) + E_a q(t) \\ y(t) = C_a x_a(t), \end{cases} \quad (23)$$

onde $q(t) = [r(t) \quad i_d(t)]^T$, $y(t)$ é a saída da UPS e as matrizes são dadas por:

$$\begin{aligned} A_a(Y_0(t)) &= \begin{bmatrix} A(Y_0(t)) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -B_{r_1} C & A_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ -B_{r_2} C & 0 & A_{r_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -B_{r_n} C & 0 & \dots & 0 & A_{r_n} \end{bmatrix}, \quad B_a = [B^T \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T, \\ C_a &= [C \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad E_a = \begin{bmatrix} 0 & B_{r_1}^T & B_{r_2}^T & \dots & B_{r_n}^T \\ E^T & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (24)$$

Definindo o sinal de controle aplicado ao inversor como

$$\begin{aligned} u(t) &= k_{p_1} x_1(t) + k_{p_2} x_2(t) + y_r(t) \\ &= k_{p_1} x_1(t) + k_{p_2} x_2(t) + k_{c_1} \bar{x}_{r_{1,1}}(t) + k_{c_2} \bar{x}_{r_{1,2}}(t) + \\ &\quad \dots + k_{c_{2n-1}} \bar{x}_{r_{n,1}}(t) + k_{c_{2n}} \bar{x}_{r_{n,2}}(t) + k_e e(t) \\ &= K x_a(t) + k_e r(t) \end{aligned}$$

segue que este assume a forma de uma realimentação do estado aumentado associada a um termo de alimentação direta (*feedforward*) do sinal de referência. O sistema em malha fechada assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = (A_a(Y_0(t)) + B_a K) x_a(t) + \bar{E}_a q(t) \\ y(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (25)$$

onde

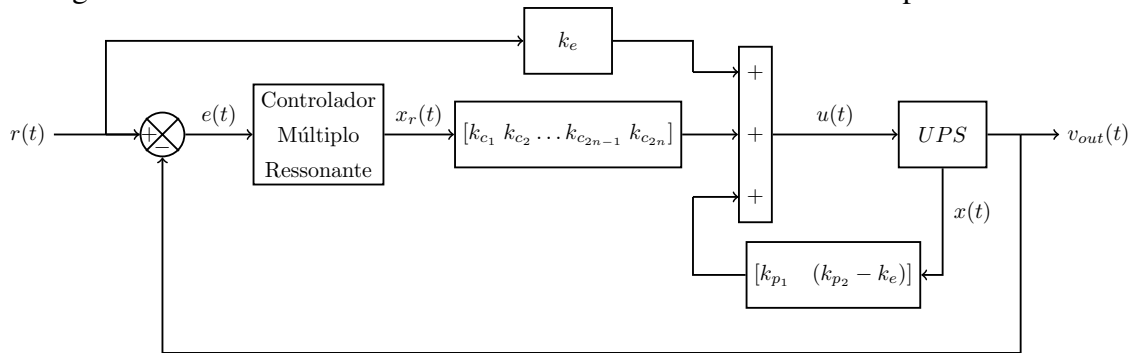
$$\bar{E}_a = \begin{bmatrix} B^T k_e & B_{r_1}^T & B_{r_2}^T & \dots & B_{r_n}^T \\ E^T & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Com isso, o problema de sintonia do controlador múltiplo ressonante (19) pode ser visto como um problema clássico de realimentação de estados, sendo

$$K = [k_{p_1} \quad k_{p_2} - k_e \quad k_{c_1} \quad k_{c_2} \quad \dots \quad k_{c_{2n-1}} \quad k_{c_{2n}}]$$

o vetor ganho de realimentação a ser determinado. A Fig. 7 apresenta o diagrama de blocos do sistema em malha fechada utilizando a estrutura do controlador múltiplo ressonante definido em (22).

Figura 7: Sistema em malha fechada utilizando o controlador múltiplo ressonante.



2.3.6 Projeto dos ganhos

No caso de sistemas lineares, a sua estabilidade interna implica em estabilidade *BIBO*¹ (CHEN, 1999). Portanto, com o intuito de estabilização do sistema, o vetor de sinais exógenos $q(t)$ pode ser desconsiderado e (25) torna-se:

$$\dot{x}_a(t) = (A_a(Y_0(t)) + B_a K)x_a(t) \quad (27)$$

Para o projeto dos ganhos de realimentação pode ser utilizada a metodologia de posicionamento de polos apresentada em (CHILALI; GAHINET, 1996), a qual apresenta conjuntos de restrições na forma de *LMI*s para assegurar que os autovalores da matriz do sistema em malha fechada estejam contidos em uma região formada pela intersecção de três regiões do plano complexo, definidas por

$$\begin{aligned} R_{CR} &= \{p_i \in \mathbb{C} : \text{Re}(p_i) \leq -\sigma, \sigma \in \mathbb{R}^+\}, \\ R_{DR} &= \{p_i \in \mathbb{C} : |p_i| \leq r, r \in \mathbb{R}\}, \\ R_{NF} &= \{p_i \in \mathbb{C} : \tan^{-1} \left(\left| \frac{\text{Im}(p_i)}{\text{Re}(p_i)} \right| \right) \leq \theta, \theta \in \mathbb{R}^+\}, \end{aligned} \quad (28)$$

onde p_i com $i = 1, 2, \dots, 2n + 2$ são os polos do sistema em malha fechada, σ está relacionado com o tempo de acomodação do sistema, θ define o fator de amortecimento, dado pela expressão $\xi = \cos(\theta)$, e r restringe a máxima frequência natural do sistema.

Da mesma forma que em (PEREIRA; CARVALHO; FLORES, 2013), além do posicionamento de polos, é utilizada como medida do desempenho transitório uma função custo

$$J(z_p(t)) := \|z_p(t)\|_2^2, \quad (29)$$

¹Por definição, um sistema é dito *BIBO* estável se, para todo sinal com amplitude limitada aplicado a sua entrada, produz uma saída também limitada (CHEN, 1999).

sendo $z_p(t)$ uma saída de desempenho, definida por $z_p(t) = C_p x_a(t) + D_p u(t)$, onde C_p e D_p são matrizes definidas *a priori* com o intuito de penalizar a energia dos estados do sistema e/ou do sinal de controle.

Como resumo do que é apresentado em (PEREIRA; CARVALHO; FLORES, 2013), para o projeto robusto considerando o posicionamento de polos e minimização de uma função custo, pode-se enunciar o Teorema 1, cuja prova pode ser encontrada na mesma referência.

Teorema 1 *Assuma os escalares reais positivos σ , r e θ conhecidos a priori. Caso exista uma matriz simétrica positiva definida $Q \in \mathbb{R}^{(2n+2) \times (2n+2)}$, uma matriz $W \in \mathbb{R}^{1 \times (2n+2)}$ e um escalar positivo λ satisfazendo as desigualdades*

$$\begin{bmatrix} He(A_a(Y_{min})Q + B_aW) & * \\ C_p Q + D_p W & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} He(A_a(Y_{max})Q + B_aW) & * \\ C_p Q + D_p W & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} L_1 \otimes Q + M_1 \otimes (A_a(Y_{min})Q + B_aW) + M_1^T \otimes (A_a(Y_{min})Q + B_aW)^T &< 0, \\ L_1 \otimes Q + M_1 \otimes (A_a(Y_{max})Q + B_aW) + M_1^T \otimes (A_a(Y_{max})Q + B_aW)^T &< 0, \\ L_2 \otimes Q + M_2 \otimes (A_a(Y_{min})Q + B_aW) + M_2^T \otimes (A_a(Y_{min})Q + B_aW)^T &< 0, \\ L_2 \otimes Q + M_2 \otimes (A_a(Y_{max})Q + B_aW) + M_2^T \otimes (A_a(Y_{max})Q + B_aW)^T &< 0, \\ L_3 \otimes Q + M_3 \otimes (A_a(Y_{min})Q + B_aW) + M_3^T \otimes (A_a(Y_{min})Q + B_aW)^T &< 0, \\ L_3 \otimes Q + M_3 \otimes (A_a(Y_{max})Q + B_aW) + M_3^T \otimes (A_a(Y_{max})Q + B_aW)^T &< 0, \end{aligned} \quad (32)$$

sendo que \otimes denota o produto Kronecker e

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\sigma, & M_1 &= 1, \\ L_2 &= \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix}, & M_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ L_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & M_3 &= \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

então o sistema (27) é assintoticamente estável para todo $Y_{min} \leq Y_0(t) \leq Y_{max}$, os polos em malha fechada estão confinados na região (28) e a função custo (29) satisfaz $\|z_p(t)\|_2^2 \leq \lambda V(0)$ com $V(0) = x_a(0)^T Q^{-1} x_a(0)$. O vetor de ganhos é recuperado pela relação $K = WQ^{-1}$.

Tendo como objetivo minimizar a função custo (29) e, com isso, obter os ganhos de realimentação para a sintonia do controlador ressonante, têm-se o seguinte problema de otimização convexa:

$$\min_{Q,W} \lambda \quad \text{sujeito à } Q = Q^T > 0, (30) - (32). \quad (33)$$

É preciso observar que, pela solução do problema de otimização (33) não é possível determinar separadamente os ganhos k_{p2} e k_e . Portanto, assume-se que $k_{p2} = 0$ tal que k_e pode ser determinado diretamente a partir do segundo elemento de $K = WQ^{-1}$, sendo assim $k_e = -k_2$.

O controlador com um modo ressonante, sintonizado na frequência ω_r , é uma estrutura consolidada e largamente utilizada em aplicações envolvendo o controle de conversores CC-CA. Esses conversores são utilizados em retificadores ativos, filtros ativos, sistemas para geração distribuída e *UPSs*, como pode-se verificar em (FUKUDA; YODA, 2001), (FUKUDA; IMAMURA, 2005), (LISERRE; TEODORESCU; BLAAB-JERG, 2006), (YEPES et al., 2011), (ALEMI; BAE; LEE, 2016), (CÁRDENAS et al., 2016) e (MACCARI et al., 2017). Mais especificamente quanto à aplicação do controlador proporcional-ressonante no controle de *UPS*, citam-se os artigos (ESCOBAR et al., 2007) e (PEREIRA; CARVALHO; FLORES, 2013), nos quais verifica-se o seguimento com erro nulo da tensão de referência nas condições de operação a vazio e com carga linear, embora prova-se que não há rejeição das perturbações com componentes harmônicas diferentes da frequência fundamental geradas pela conexão de cargas não-lineares.

Como alternativa para a rejeição de sinais periódicos gerados pelas cargas não-lineares, em outros artigos é empregado o controlador múltiplo ressonante (DE; RAMANARAYANAN, 2010), (NIAN; ZENG, 2011), (HASANZADEH et al., 2012), (RIBAS et al., 2014), (PEREIRA et al., 2014), (BARDEN; PEREIRA, 2015) e (CARBALLO et al., 2016). No inversor monofásico de 1 kVA em (HASANZADEH et al., 2012) utilizou-se o controlador ressonante com 5 modos sintonizados na frequência fundamental, 3^a, 5^a, 7^a e 9^a harmônicas, obtendo uma *THD* de 1,0% na tensão de saída (220 V) ao custo de um barramento CC com 760 V. Por outro lado, com apenas um modo ressonante, obteve-se *THD* = 3,5%. Em (RIBAS et al., 2014) a *THD* é reduzida a 0,98% considerando um controlador com 8 modos ressonantes sintonizados na 1^a, 3^a, 5^a, 7^a, 9^a, 11^a, 13^a e 15^a harmônicas, para uma carga de 0,6 kVA em consenso com a IEC 62040-3. Essa metodologia é aplicada também em (PEREIRA et al., 2014) para um inversor de tensão monofásico de 5 kVA (110 V), levando em consideração a natureza incerta do sistema da *UPS*. Utiliza-se uma estrutura com 5 modos ressonantes sintonizados na frequência fundamental, 3^a, 5^a, 7^a e 9^a harmônicas, reduzindo a *THD* da tensão de saída de 13,2%, obtida antes com um modo, para 2,7%.

No controle de inversores de tensão trifásicos têm-se (DE; RAMANARAYANAN, 2010), (NIAN; ZENG, 2011) e (BARDEN; PEREIRA, 2015): o primeiro obtêm uma *THD* de 6,94% para uma das fases do inversor de 1 kVA (220 V), por meio do controlador com 3 modos ressonantes, sintonizados na frequência fundamental, 5^a e 7^a harmônicas. Depois, este valor é reduzido a 2,88% com a associação em série de um compensador de avanço/atraso. No trabalho (NIAN; ZENG, 2011), para um inversor de 5 kVA, obtêm-se *THD* = 1,98% ao custo de modos sintonizados nas mesmas harmônicas, com carga não-linear dissipando apenas 10% da potência aparente. Em (BARDEN; PEREIRA, 2015), para um inversor trifásico de 5 kVA (110 V) na referência estacionária *abc*, obteve-se *THD* = 2,13% (fase *a*) considerando modos ressonantes sintonizados nas 5 primeiras harmônicas ímpares da frequência fundamental (60 Hz), ao passo que, com apenas um modo, obtinha-se 10,75%. Pode-se concluir que a *THD* é notoriamente reduzida ao custo de um controlador de ordem maior. Como inconveniente, enquanto no projeto com um modo ressonante é necessário o cálculo de quatro ganhos de realimentação, o projeto de múltiplos ressonantes necessita a sintonia de mais dois parâmetros para cada modo adicional, o que leva ao aumento da complexidade de implementação dessa estrutura.

2.4 Comentários finais

Neste capítulo foram apresentados os conceitos básicos referentes às *UPSs*, a topologia utilizada nesse projeto e a obtenção do modelo matemático em espaço de estados que representa a dinâmica do estágio de saída desse sistema. Adicionalmente, foram revisados os critérios de desempenho desses equipamentos e os respectivos ensaios a serem realizados segundo a norma mais significativa em vigência.

Na sequência foi apresentado o princípio do modelo interno e introduzido os controladores ressonante e múltiplo ressonante de tempo contínuo, derivados dessa abordagem. A partir de uma representação por espaço de estados desses controladores, foi revisada a metodologia de projeto de ganhos via realimentação de estados presente na literatura, que leva em consideração a incerteza da carga conectada à *UPS*. Embora que, com um modo, se mantenha a tensão de saída igual à referência nas condições a vazio e com carga linear, para carga não-linear são necessários acrescentar mais modos para reduzir-se a *THD*, ao custo de um controlador de ordem maior.

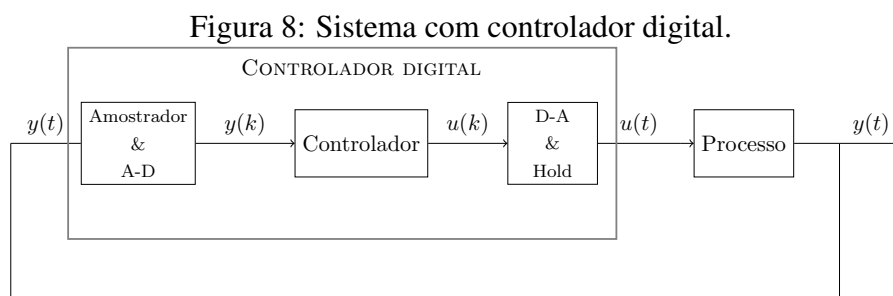
Em todos os trabalhos mencionados ao final da Seção 2.3.6, os controladores ressonantes são implementados através de uma plataforma digital, com a obtenção de uma função de transferência equivalente discreta. Os aspectos da implementação digital destes controladores, bem como os fundamentos de controle digital serão discutidos no próximo capítulo.

3 CONTROLE DIGITAL

Neste capítulo são apresentados os conceitos de sistemas em tempo discreto fundamentais para o entendimento da sequência deste trabalho. Entre os conceitos abordados, destacam-se: os métodos de discretização de sistemas em tempo contínuo e estabilidade de sistemas dinâmicos discretos, utilizando técnicas baseadas na Teoria de Lyapunov. Em uma segunda parte é abordado o problema de seguimento de referência e rejeição à perturbações através do PMI para sistemas discretos, introduzindo o método de controle para *UPS* baseado nesse princípio.

3.1 Projeto por emulação (PE) e Projeto discreto direto (PDD)

No cenário atual, muitos processos em tempo contínuo são controlados a partir de sistemas implementados em plataformas digitais, isto é, através de sistemas computacionais, sejam eles computadores ou microcontroladores dedicados. O problema em se ter ambos sinais, contínuo e discreto, na malha de controle pode ser resolvido observando os dados do sistema somente nos instantes de amostragem. Vendo o sistema sob o ponto de vista do computador, este recebe medições do processo e transmite novos sinais de controle apenas em instantes de tempo pré-especificados. O esquema da Fig. 8 ilustra um sistema com esta natureza, com processo contínuo e controlador digital, através do uso de conversores A-D e D-A.



No que se refere ao projeto de controladores digitais, estes podem ser desenvolvidos por duas abordagens distintas: pelo chamado projeto por emulação (PE) ou pelo projeto discreto direto (PDD) (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997). No PE, o controlador é projetado em tempo contínuo a partir do modelo original da planta, também em tempo contínuo, e depois este é convertido em um controlador em tempo discreto para que o mesmo possa ser implementado em uma plataforma de controle digital (OPPENHEIM; SCHAFER; BUCK, 1999). Enquanto no PDD a planta é primeiro convertida em um mo-

delo discreto equivalente para que, depois, o controlador seja projetado diretamente por metodologias de controle em tempo discreto.

Com o PE têm-se a vantagem do uso das metodologias de projeto de controladores em tempo contínuo bem estabelecidas na literatura. Pode-se desenvolver um controlador que atenda a um certo requisito de desempenho ou robustez do sistema diretamente em tempo contínuo, e posteriormente, obter uma aproximação discreta deste controlador de forma que esta preserve as mesmas características do projeto original. A resposta em frequência do controlador discretizado se manterá muito próxima do original desde que seja utilizado um intervalo de amostragem suficientemente menor do que a constante de tempo predominante do sistema (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997). Este intervalo é referido em (FRANKLIN; WORKMAN; POWELL, 1997), por exemplo, como no mínimo 30 vezes a largura de banda do sistema. Entretanto, não há garantia de que a estabilidade ou as propriedades de robustez do sistema em malha fechada sejam invariantes em relação a essa transformação (FRANKLIN; WORKMAN; POWELL, 1997).

Essas garantias de estabilidade e robustez, especialmente importantes quando a amostragem é baixa, só podem ser dadas pelo PDD com o projeto do controlador diretamente em tempo discreto, evitando erros com a conversão de um controlador em tempo contínuo por meio de aproximações. Derivar um modelo amostrado do processo torna possível utilizar todo potencial de projeto de sistemas em tempo discreto.

Observação 1 *No PDD também pode-se obter um modelo da planta em tempo discreto diretamente por métodos de identificação de sistemas (TOTH, 2010), entretanto, isto não é trivial em se tratando de sistemas com incertezas.*

3.2 Métodos de discretização

Seja no PE, antes de implementar um controlador digital, ou no PDD, é necessário realizar a discretização do controlador ou da planta, respectivamente. No processo de discretização, o problema fundamental é como descrever o sistema de tempo contínuo somente por meio da relação entre as sequências de amostras $u(k)$ e $y(k)$, desprezando o comportamento entre amostras.

Assumindo a representação generalizada de um sistema linear invariante no tempo (LIT) em espaço de estados dada pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (34)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ e $y(t) \in \mathbb{R}$, segue que este sistema de equações diferenciais possui a seguinte solução (CHEN, 1999):

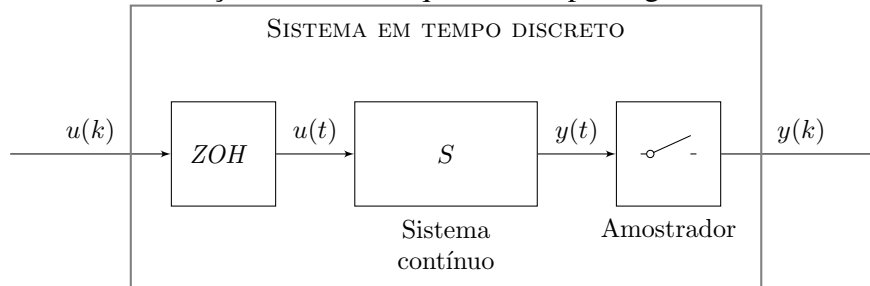
$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (35)$$

Na seção seguinte são apresentados os principais métodos para a aproximação desse sistema por modelos em tempo discreto, com o intuito de obter as matrizes A_d, B_d, C_d, D_d que caracterizam a equação de estados na forma

$$\begin{cases} x(k+1) = A_dx(k) + B_du(k) \\ y(k) = C_dx(k) + D_du(k) \end{cases} \quad (36)$$

Uma metodologia para a obtenção de um sistema discreto equivalente, comum na literatura, consiste em assumir que o sistema contínuo seja precedido por um segurador (do termo em inglês *hold*) e seguido por um amostrador (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997). A configuração apresentada na Fig. 9 é chamada de equivalência por segurador de ordem zero¹ (do termo em inglês *zero-order hold*, *ZOH*) e será o ponto de partida para a derivação dos métodos de discretização abordados nesse trabalho.

Figura 9: Discretização através de equivalência por segurador de ordem zero.



Suposição 1 Dado o sistema contínuo na configuração da Fig. 9 assume-se que o segurador e o amostrador estejam perfeitamente sincronizados e que possuam tempo de processamento igual a zero (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997).

A Suposição 1 é necessária para que a equação do sistema em tempo discreto resultante seja dada pela relação das variáveis u e y nos exatos mesmos instantes de amostragem.

3.2.1 Discretização exata ou por Zero-order Hold

Seja o sistema contínuo (34) montado sob a configuração *ZOH* da Fig. 9. Baseado nisso, assume-se que o sinal de entrada é mantido constante dentro de cada intervalo de amostragem tal que $u(t) = u(kT) \forall t \in [kT, (k+1)T)$. A partir de (35), pode-se obter o estado no instante $t = (k+1)T$ pela equação:

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{AT} \left[e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (37)$$

a qual se torna, definindo $x(k) := x(kT)$ e $u(k) := u(kT)$ e substituindo na fórmula (CHEN, 1999):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= e^{AT}x(k) + \left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}d\tau \right) Bu(k) \\ &= e^{AT}x(k) + \left(\int_0^T e^{As}ds \right) Bu(k) \end{aligned} \quad (38)$$

¹Mantêm o sinal de entrada $u(t)$ constante entre cada intervalo de amostragem tal que $u(t) = u(kT) \forall t \in [kT, (k+1)T)$.

resultando na equação de estados (36) com as seguintes matrizes:

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \left(\int_0^T e^{As} ds \right) B, \quad C_d = C, \quad D_d = D. \quad (39)$$

onde $y(k) = y(kT)$ devido à Suposição 1.

Ainda sob a mesma configuração da Fig. 9, a equação de estado em (34) pode ser vista como uma equação diferencial ordinária (EDO) com condição inicial $x(kT)$ e com a solução no instante $t = (k + 1)T$ dada por (TOTH; HEUBERGER; HOF, 2010):

$$x((k + 1)T) = x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} f(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (40)$$

sendo $f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t)$. Da mesma maneira, substituindo $x(k) := x(kT)$ e $u(k) := u(kT)$, (40) resulta no sistema discreto com as mesmas matrizes de (39).

Esse método possibilita obter o valor exato do estado em cada instante de amostragem, ou seja, não há erro de discretização. O mapeamento dos polos da função de transferência discreta no plano z é dado pela regra $z = e^{sT}$, o que preserva as características de estabilidade *BIBO* desse sistema. Por outro lado, esta abordagem não é indicada para a implementação de controladores *gain scheduling* em sistemas LPV (do termo em inglês *Linear Parameter Varying*) com variação na matriz A uma vez que a afinidade de A_d com a função de escalonamento é perdida. Este ponto é extensamente abordado em (TOTH; HEUBERGER; HOF, 2010).

3.2.2 Forward Euler

O método mais usual para se aproximar a solução (40) é o método *Forward Euler*, ou Método Retangular. Trata-se da maneira mais simples de se aproximar uma derivada temporal e do método explícito mais elementar para integração numérica de uma equação diferencial ordinária, no qual:

$$\dot{x}(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x(t + T) - x(t)}{T}. \quad (41)$$

Considerando $f(x(t), u(t))$ definida na seção anterior e, para simplificar a notação, define-se a igualdade $f|_t = f(x(t), u(t))$. Se calculado $x(t)$ somente nos instantes $t = kT$, devido ao intervalo de amostragem constante, pode-se aproximar a solução do estado em (40) como:

$$\begin{aligned} x((k + 1)T) &\simeq x(kT) + Tf|_{kT} \\ &\simeq x(kT) + TAx(kT) + TBu(kT) \end{aligned} \quad (42)$$

onde a nova amostra $x((k + 1)T)$ irá depender apenas das amostras passadas $x(kT)$ e $u(kT)$. Baseado na equação de estado (42), a representação do sistema (34) em espaço de estados discreto é dada pela equação (36) com as seguintes matrizes:

$$A_d = I + TA, \quad B_d = TB, \quad C_d = C, \quad D_d = D. \quad (43)$$

O método *Forward Euler* apresenta erro de discretização, dado em termos do seu erro de truncamento local² como $\frac{T}{2}\ddot{x}(\tau)$ (TOTH, 2010). Como desvantagem, o método nem

²Em análise numérica, é definido como o erro de aproximação entre uma iteração do método de integração numérica e a solução exata anterior (ATKINSON, 1989).

sempre provêm sistemas de tempo discreto *BIBO* estáveis, como pode se observar utilizando a transformação $z = 1 + sT$, de tal forma que os polos da função de transferência de um sistema contínuo estável podem ser mapeados em uma região externa ao círculo de raio unitário (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997).

3.2.3 Tustin

O método de Tustin, também conhecido como Método Trapezoidal, é uma alternativa ao Método Retangular e utiliza uma aproximação diferente da integral em (40), a qual resulta na solução:

$$x((k+1)T) \simeq x(kT) + \frac{T}{2} (f|_{kT} + f|_{(k+1)T}) \quad (44)$$

Na conversão por esse método, o estado não é preservado, portanto utiliza-se uma mudança de variável (TOTH; HEUBERGER; HOF, 2010) onde

$$\bar{x}_d(k) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(I - \frac{T}{2} A \right) x(kT) - \frac{\sqrt{T}}{2} B u(kT). \quad (45)$$

Baseado na equação de estado (44), a representação em espaço de estados discreto resultante é dada pelas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A_d &= \left(I + \frac{T}{2} A \right) \left(I - \frac{T}{2} A \right)^{-1}, & B_d &= \sqrt{T} \left(I - \frac{T}{2} A \right)^{-1} B, \\ C_d &= \sqrt{T} C \left(I - \frac{T}{2} A \right)^{-1}, & D_d &= \frac{T}{2} C \left(I - \frac{T}{2} A \right)^{-1} B + D. \end{aligned} \quad (46)$$

O método de Tustin é uma técnica amplamente usada na discretização de sistemas LIT, a qual apresenta como vantagem o fato do mapeamento dos polos do semiplano esquerdo do plano s no interior do círculo de raio unitário, através da expressão $z = \frac{1+sT/2}{1-sT/2}$, garantindo sua estabilidade *BIBO* independente do intervalo de amostragem utilizado. Essa técnica, como observa (ATKINSON, 1989), coincide com o método Adams-Moulton de um passo, também utilizado para a aproximação de EDOs.

O uso dessa aproximação leva a um problema de distorção na escala de frequência, resultando por exemplo, em filtros digitais com frequência de corte diferente da projetada, em um efeito no qual é chamado de *frequency warping*. Para contornar esse problema é empregado o método de Tustin com *prewarping*, o qual garante que a função de transferência em tempo discreto possua exatamente as mesmas características de magnitude e fase que a função de transferência contínua para uma dada frequência.

Para o exemplo do controlador ressonante (14), onde a frequência de interesse é ω_r , segue que o efeito do *frequency warping* é compensado se o controlador for projetado considerando $\bar{\omega}_r = \frac{2}{T} \tan\left(\omega_r \frac{T}{2}\right)$. Outra maneira de realizar esta compensação é redefinindo as matrizes em (46) assumindo $T = \frac{2}{\omega_r} \tan\left(\omega_r \frac{\bar{T}}{2}\right)$ onde \bar{T} é o período de amostragem original.

3.2.4 Adams-Bashforth

A solução da equação diferencial (40) pode ser aproximada numericamente por métodos de passos múltiplos, como os métodos Adams-Moulton ou Adams-Bashforth. Ao contrário das fórmulas de passo simples, como o método de Euler ou Runge-Kutta, que utilizam apenas o valor passado no cálculo do estado atual, estes métodos empregam diversos passos, múltiplos do período de amostragem (ATKINSON, 1989).

A versão de três passos do método Adams-Bashforth usa a seguinte aproximação da solução (40):

$$x((k+1)T) \simeq x(kT) + \frac{T}{12} \left(5f|_{(k-2)T} - 16f|_{(k-1)T} + 23f|_{kT} \right) \quad (47)$$

resultando em um espaço de estados aumentado, com a nova variável de estado

$$\bar{x}_d(k) = [x(kT)^T \quad f|_{(k-1)T}^T \quad f|_{(k-2)T}^T]^T, \quad (48)$$

sendo $x(kT)$ a solução do estado no instante $t = kT$ e $f|_{(k-1)T}$ e $f|_{(k-2)T}$ dois vetores de estado adicionais com os resultados de $f|_t$ nos instantes $t = (k-1)T$ e $t = (k-2)T$, respectivamente. Para constar, primeiro calcula-se $f|_{kT} = Ax(kT) + Bu(kT)$ e, por meio dele, obtêm-se os valores passados correspondentes a esses estados complementares.

Baseado na equação de estado (47), a representação em espaço de estados discreto resultante é dada pelas seguintes matrizes (TOTH, 2010):

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} I + \frac{23T}{12}A & \frac{-16T}{12}I & \frac{5T}{12}I \\ A & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, & B_d &= \begin{bmatrix} \frac{23T}{12}B \\ B \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_d &= [C \quad 0 \quad 0], & D_d &= D. \end{aligned} \quad (49)$$

Esta aproximação apresenta erro de discretização da ordem de $\frac{3}{8}T^3x^{(4)}(\tau)$, sendo menor que o método de Euler (TOTH; HEUBERGER; HOF, 2010). Possui como desvantagem a inserção de $2n$ estados adicionais para a descrição do sistema. O procedimento para a obtenção dos coeficientes em (49) é apresentado em detalhe no Apêndice A.

3.3 Análise dos métodos de discretização

3.3.1 Análise geral

Em (TOTH; HEUBERGER; HOF, 2010) é realizada uma profunda análise dos métodos de discretização apresentados na Seção 3.2, sob o ponto de vista de controle de sistemas *LPV*, buscando alternativas para a representação em espaço de estados discreto de um sistema ao custo de uma baixa complexidade computacional. Entre as suas principais contribuições, pode-se destacar a análise quantitativa dos erros de discretização e da preservação da estabilidade para cada método. A Tabela 2 apresenta um comparativo entre os métodos abordados.

Devido ao mapeamento para o plano z , dependendo do período de amostragem empregado, um sistema discretizado pelo método *Forward Euler* nem sempre preserva a estabilidade do sistema contínuo original. Já o método Tustin preserva essa característica, embora as raízes não correspondam àquelas obtidas pelo mapeamento direto para o domínio z .

Nas discretizações pelos métodos *ZOH* e de Tustin são verificadas dependência exponencial e racional no parâmetro incerto, respectivamente, o que restringe sua aplicação diretamente em problemas de otimização convexa, onde necessita-se da dependência afim. Os métodos *Forward Euler* e Adams-Bashforth são os únicos que mantêm essa propriedade. Deve-se observar também que a discretização pelo método de Adams-Bashforth resulta no aumento da ordem do sistema contínuo, o qual exige um projeto com um maior número de parâmetros.

Tabela 2: Propriedades dos métodos de discretização.

	ZOH	Euler	Tustin	Adams-Bashforth
Pres. estabilidade	Sim	depende de T	Sim	depende de T
Complexidade	exponencial	linear	racional	linear
Dependência afim	Não	Sim	Não	Sim
Ordem do sistema	preservada	preservada	preservada	aumentada

Fonte: adaptada de (TOTH; HEUBERGER; HOF, 2010)

3.3.2 Influência na distribuição dos polos do controlador ressonante

No projeto de controladores ressonantes discretos, deseja-se que seus polos estejam posicionados sobre a circunferência de raio unitário, o que corresponde a um fator de amortecimento igual a zero e, portanto, ganho infinito em uma frequência de interesse. No trabalho de (YEPES et al., 2010) é realizada uma extensa análise da sensibilidade do pico de ressonância dos controladores ressonantes discretizados em relação à mudança no período de amostragem e da harmônica considerada. A Tabela 3 apresenta as funções de transferência em z obtidas com a discretização do controlador ressonante $C_r(s)$ pelos métodos descritos na Seção 3.2.

Tabela 3: Funções de transferência discretas obtidas pela discretização de $C_r(s)$ com diferentes métodos.

Método	Controlador $C_r(s)$ discretizado
<i>Forward Euler</i>	$C_r^f(z) = \frac{Tk_{c2}z + (k_{c1}\omega_r T - Tk_{c2})}{z^2 - 2z + (\omega_r^2 T^2 + 1)}$
Adams-Bashforth	$C_r^a(z) = \frac{12k_{c2}T(z^3 - z^2)(5 - 16z + 23z^2) + k_{c1}\omega_r T^2(5 - 16z + 23z^2)^2}{144z^6 - 288z^5 + (529\omega_r^2 T^2 + 144)z^4 + \omega_r^2 T^2(-736z^3 + 486z^2 - 160z + 25)}$
Tustin	$C_r^t(z) = \frac{(2Tk_{c2} + k_{c1}\omega_r T^2)z^2 + 2k_{c1}\omega_r T^2 z + (k_{c1}\omega_r T^2 - 2Tk_{c2})}{(\omega_r^2 T^2 + 4)z^2 + (2\omega_r^2 T^2 - 8)z + (\omega_r^2 T^2 + 4)}$
Tustin <i>prewarp</i>	$C_r^{tp}(z) = \frac{1}{2\omega_r} \frac{k_{c2}(z^2 - 1) \sin(\omega_r T) + k_{c1}(z + 1)^2 (1 - \cos(\omega_r T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1}$
<i>Zero-order hold</i>	$C_r^{zoh}(z) = \frac{1}{\omega_r} \frac{(k_{c1} - k_{c1} \cos(\omega_r T) + k_{c2} \sin(\omega_r T))z + (k_{c1} - k_{c1} \cos(\omega_r T) - k_{c2} \sin(\omega_r T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1}$

Em (YEPES et al., 2010) foram estabelecidas algumas conclusões em relação aos métodos de discretização aqui apresentados quando utilizados para a obtenção de controladores ressonantes discretos equivalentes: a aproximação *Forward Euler*, devido ao mapeamento dos polos ressonantes para fora da circunferência de raio unitário ($z_{1,2} = 1 \pm j\omega_r T$), implica em um fator de amortecimento diferente de zero. É preciso lembrar que um controlador ressonante com polos amortecidos não garante o perfeito seguimento/rejeição do sinal periódico. Já a discretização com os métodos de Tustin e *ZOH* resultam em polos não-amortecidos, embora eles estejam localizados em posições diferentes da circunferência unitária. Isso revela que existe uma diferença entre a frequência de ressonância de interesse do projeto e a real frequência de ressonância do controlador discretizado.

Nas Figuras 10 e 11 são apresentadas as respostas em frequência dos controladores mais revelantes obtidos com as discretizações da Tabela 3, para $T = 400 \mu s$. Em particular, é mostrado o desvio entre a real frequência de ressonância do controlador, $\bar{\omega}_r$, e a desejada, ω_r . O controlador obtido pelo método *Forward Euler* foi omitido, uma vez que não apresenta as características em magnitude desejadas.

Figura 10: Comparação do diagrama de Bode de magnitude dos controladores discretizados $C_r(z)$ com $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s.

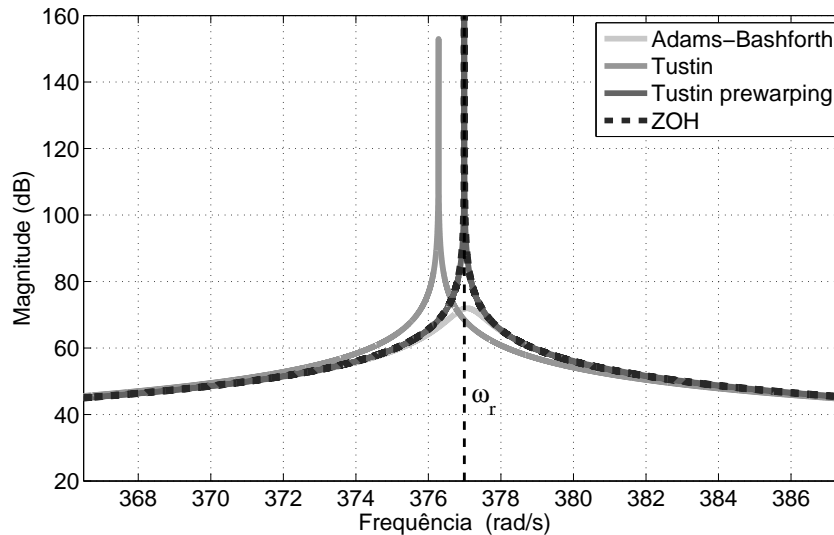
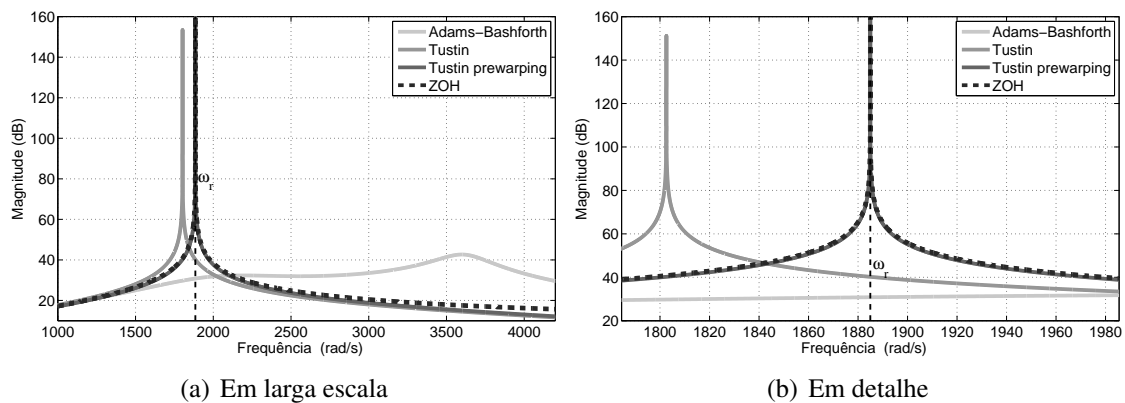


Figura 11: Comparação do diagrama de Bode de magnitude dos controladores discretizados $C_r(z)$ com $\omega_r = 10\pi 60$ rad/s.



Pode-se verificar que o deslocamento da frequência em que ocorre o pico de ressonância cresce com o aumento de ω_r , ou também com o crescimento de T , com exceção dos métodos de Tustin com *prewarping* e *ZOH*. A discretização por ambas técnicas resultam no conjunto de polos $z_{1,2} = \cos(\omega_r T) \pm j \sin(\omega_r T)$, portanto o pico de ressonância sempre se manterá na frequência de projeto ω_r . Assim, a utilização do *prewarping* é fundamental para a manutenção da característica de ressonância no controlador ressonante discretizado.

Entre os métodos abordados, a discretização Tustin com *prewarping* se mostra a mais adequada para a conversão direta da função de transferência do controlador projetado em

tempo contínuo pois, como observado em (YEPES et al., 2010), a distribuição dos zeros na discretização por equivalência *ZOH* introduz na resposta em frequência do controlador um atraso de fase próximo da frequência de ressonância, ocasionando uma diminuição indesejada da sua margem de fase. No PDD isso não é problema, uma vez que os zeros são obtidos diretamente na solução do problema de otimização.

3.4 Controle digital de *UPS*

A maior parte dos trabalhos mencionados no Capítulo 2, os quais empregam o controlador ressonante ou múltiplo ressonante para o controle de inversores, obtêm o controlador digital via PE, enquanto uma minoria restante realiza o PDD. Quanto aos artigos que utilizam o projeto por emulação, nem todos descrevem o método empregado para a conversão do controlador: (FUKUDA; IMAMURA, 2005) realiza o projeto inteiramente em tempo contínuo e utiliza a aproximação retangular (*Forward Euler*) para implementação da equação de diferenças do controlador; em (YEPES et al., 2011) é utilizada a aproximação de Tustin com *prewarping* na função de transferência do controlador resultante. Nos artigos (PEREIRA; CARVALHO; FLORES, 2013), (PEREIRA et al., 2014) e (BARDEN; PEREIRA, 2015) os múltiplos modos do controlador ressonante são discretizados individualmente através da aproximação de Tustin antes de serem implementados na plataforma digital.

No que se refere ao projeto direto em tempo discreto, (WU; LEHN, 2006) utiliza a discretização *ZOH* para obter a representação do modelo em espaço de estados equivalente do inversor trifásico, antes de projetar um controlador *deadbeat*. O trabalho (NIAN; ZENG, 2011) também emprega a discretização pelo método *ZOH* no modelo do inversor trifásico montado nas coordenadas $\alpha\beta$ para depois projetar o controlador PR. Nos trabalhos mais recentes de (RIBAS et al., 2014) e (CARBALLO et al., 2016), têm-se que o primeiro discretiza o modelo do inversor e a estrutura do controlador múltiplo ressonante pelo método *ZOH* antes de sintonizar os ganhos de realimentação, solucionando um problema de otimização convexa. Já o segundo discretiza as funções de transferência da planta e da relação entrada de distúrbio para saída pelos métodos *ZOH* e *first-order hold* (*FOH*), respectivamente, antes do projeto dos controladores ressonantes por análise da resposta em frequência e lugar geométrico das raízes (LGR).

Os controladores projetados em tempo discreto também resultam em desempenhos satisfatórios. Como já observado no Capítulo 2, no inversor trifásico em (NIAN; ZENG, 2011) obteve-se $THD = 1,98\%$ com o emprego de 3 modos ressonantes, sintonizados na frequência fundamental, 5^a e 7^a harmônicas, utilizando uma frequência de amostragem igual a 10 kHz. Já em *UPS* monofásica (RIBAS et al., 2014) obtêm uma THD de 0,98% ao custo de oito modos ressonantes sintonizados nas frequências harmônicas ímpares. Este controlador possui desvio percentual transitório de tensão dentro dos limites definidos pela norma IEC 62040-3, com um tempo de recuperação de, aproximadamente, 80 ms para degrau de carga não-linear. (CARBALLO et al., 2016) obtêm uma THD de 1,76 % utilizando um controlador com oito modos ressonantes, com desempenho transitório para degrau de carga linear satisfazendo o perfil de tolerância da norma. Em nenhum desses trabalhos há uma comparação entre os controladores ressonantes resultantes e possíveis controladores obtidos com um PE equivalente, muito menos com relação ao desempenho do sistema em malha fechada.

Nesse trabalho será apresentada uma metodologia sistemática para o projeto robusto em tempo discreto de controladores múltiplos ressonantes para *UPS*. De forma análoga

ao projeto contínuo descrito no Capítulo 2, os parâmetros que definem o controlador serão obtidos por meio de condições *LMIs* para o posicionamento robusto de polos e para minimizar um critério de desempenho dado por uma função custo penalizando a energia dos estados e/ou do sinal de controle. A seguir são apresentados os principais conceitos relativos a sistemas em tempo discreto que serão empregados na síntese do controlador ressonante.

3.5 Estabilidade de sistemas dinâmicos discretos

No projeto de controladores deve-se garantir, sobretudo, a estabilidade do sistema em malha fechada. Assim, nesta seção são apresentadas metodologias para a garantia da estabilidade de sistemas dinâmicos em tempo discreto, dando enfoque para as abordagens baseadas na Teoria de Lyapunov e nas técnicas baseadas em *LMIs*.

3.5.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov para sistemas discretos

Segundo a teoria de Lyapunov, a estabilidade de um sistema dinâmico está associada à estabilidade dos seus pontos de equilíbrio. Considerando o seguinte sistema autônomo em tempo discreto:

$$x(k+1) = g(x(k)) \quad (50)$$

este possui um ponto de equilíbrio definido como $x(k) = x_e$ se $f(x_e) = x_e \forall k \geq k_1$, o que significa que $x(k)$ irá permanecer igual a x_e para qualquer amostra $k \geq k_1$. De acordo com a estabilidade no sentido de Lyapunov, as trajetórias iniciadas próximas a esse ponto de equilíbrio estável serão mantidas em uma região arbitrária ainda próxima desse equilíbrio.

No método direto de Lyapunov, a estabilidade de um ponto de equilíbrio é avaliada a partir de uma função escalar, denotada por $V(x(k))$, chamada de função candidata de Lyapunov. A partir dela é enunciado seguinte teorema com as condições suficientes para estabilidade desse sistema:

Teorema 2 (*ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997*) *Seja $x(k) = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema (50) e $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto contendo $x(k) = 0$. Seja $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em x tal que:*

$$V(0) = 0 \quad e \quad V(x(k)) > 0 \quad em \quad \mathcal{D} - \{0\} \quad (51)$$

- $x(k) = 0$ é estável se:

$$\Delta V(x(k)) \triangleq V(g(x(k))) - V(x(k)) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}. \quad (52)$$

- $x(k) = 0$ é assintoticamente estável se:

$$\Delta V(x(k)) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{D} - \{0\}. \quad (53)$$

Considere o caso específico de um sistema linear descrito no espaço estados como:

$$x(k+1) = A_d x(k); \quad (54)$$

onde $x(k)$ é o vetor de estados e A_d uma matriz real conhecida e com dimensões adequadas. A garantia de estabilidade pelo método direto de Lyapunov em sistemas discretos é analisada conforme o seguinte teorema:

Teorema 3 (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997) *A origem do sistema (54) é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz P simétrica positiva definida tal que:*

$$A_d^T P A_d - P < 0 \quad (55)$$

Prova: Para uma função candidata de Lyapunov do tipo quadrática

$$V(x(k)) = x(k)^T P x(k) \quad (56)$$

com P sendo uma matriz simétrica positiva definida de dimensões apropriadas. A variação de $V(x(k))$ ao longo das trajetórias do sistema é dada por:

$$\Delta V(x(k)) = x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k), \quad (57)$$

substituindo $x(k+1)$ por (54) resulta em

$$\Delta V(x(k)) = x(k)^T (A_d^T P A_d - P) x(k). \quad (58)$$

Assim, assegurando que $P > 0$ e $(A_d^T P A_d - P) < 0$ garante-se que $\Delta V(x(k)) < 0$ e têm-se uma condição necessária e suficiente para a estabilidade desse sistema.

3.6 Sistemas dinâmicos incertos

A maioria dos modelos matemáticos de um sistema são apenas representações aproximadas do seu comportamento. Um modelo matemático mais apropriado considera as incertezas do sistema, as quais podem ser resultantes de dinâmicas não modeladas, variações paramétricas ou linearizações. Caso o modelo do sistema leve em conta estas incertezas ou variações faz-se necessário o emprego de técnicas de controle robusto para a garantia de estabilidade e/ou desempenho.

Considerando o sistema incerto em tempo discreto

$$x(k+1) = A_d(\delta)x(k) \quad (59)$$

onde δ é o vetor de parâmetros incertos e $A_d(\delta)$ uma matriz dinâmica com elementos que variam em função dessa incerteza.

Uma das alternativas para a inserção da incerteza na formulação do problema consiste em descrever os possíveis valores que a matriz $A_d(\delta)$ pode assumir como uma combinação convexa dos valores máximos e mínimos assumidos por esta incerteza (GHAOUI; NICULESCU, 2000):

$$\delta \in \mathcal{B}_\delta = \{\beta_{i_{min}} \leq \delta_i \leq \beta_{i_{max}}, \quad i = 1, \dots, h\} \quad (60)$$

sendo \mathcal{B}_δ um polítopo³ possuindo 2^h vértices, onde h é o número de parâmetros incertos. Assim, qualquer matriz com incertezas politópicas $A_d(\delta)$ pode ser descrita por um conjunto convexo e fechado da forma:

$$\mathcal{A} := \left\{ A_d(\delta) : A_d(\delta) = \sum_{i=1}^{2^h} \nu_i A_{di}, \quad \sum_{i=1}^{2^h} \nu_i = 1, \quad \nu_i \geq 0 \right\}. \quad (61)$$

³Um polítopo é um conjunto convexo fechado, o qual pode ser representado pela soma convexa dos seus vértices.

A abordagem politópica têm como característica a convexidade do conjunto resultante, de modo que, se um conjunto de restrições de desigualdades for satisfeito nos vértices do politopo, então garante-se que as mesmas restrições estarão satisfeitas no seu interior (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

O modelo da *UPS* (3) possui apenas um elemento incerto, Y_0 , resultando em um politopo composto por dois vértices $A(Y_{max})$ e $A(Y_{min})$. A discretização desse sistema, dependendo do método utilizado, resulta na propagação da incerteza para as demais matrizes, tal que:

$$(A_d, B_d, E_d)(\delta) = \sum_{i=1}^2 \nu_i (A_{di}, B_{di}, E_{di}), \quad \sum_{i=1}^2 \nu_i = 1, \quad \nu_i \geq 0. \quad (62)$$

Pode-se estender a garantia de estabilidade do Teorema 3 para o caso do sistema incerto (59). Pela propriedade da convexidade, uma vez que aquela desigualdade seja satisfeita nos vértices do politopo, garante-se que a mesma estará satisfeita também em todos os possíveis valores do seu interior:

Teorema 4 (GHAOUI; NICULESCU, 2000) *O ponto de equilíbrio do sistema (59) é quadraticamente estável na região β_δ se existir uma matriz simétrica positiva definida P tal que:*

$$A_{di}^T P A_{di} - P < 0, \quad i = 1, \dots, h. \quad (63)$$

3.7 Comentários finais

Neste capítulo, inicialmente foram apresentadas as duas abordagens adotadas no projeto de controladores digitais: o PE e o PDD. Seguindo ambas as metodologias, foram apresentados os principais métodos utilizados para a discretização de sistemas LIT. Todos os métodos são derivados a partir da representação com equivalência por segurador do sistema original, sendo que o valor do estado no instante seguinte é dado pela solução de uma EDO tendo como condição inicial o instante de amostragem anterior. O método Adams-Bashforth, em particular, utiliza um polinômio de três amostras passadas para a solução da equação.

Por fim, foram apresentados os principais conceitos que serão aplicados no decorrer do trabalho: a estabilidade de sistemas dinâmicos discretos, baseada na Teoria de Lyapunov, o PMI para sistemas discretos e a modelagem de sistemas incertos. Com isso, no próximo capítulo será definida a estrutura do controlador ressonante em espaço de estados e proposta a metodologia de projeto do controlador através do PDD, utilizando algumas das discretizações já mencionadas para descrever a planta.

4 PROJETO EM TEMPO DISCRETO

Neste capítulo são apresentados os principais desenvolvimentos deste trabalho em relação ao projeto robusto em tempo discreto do controlador ressonante. Inicialmente é obtida uma realização do controlador múltiplo ressonante discreto no espaço de estados, e em seguida é formulada a estrutura do sistema em malha fechada, considerando um modelo discretizado da planta. Por último, são obtidas condições *LMI*s para a síntese dos ganhos de realimentação do sistema, de forma a garantir estabilidade robusta e desempenho transitório desejado.

4.1 Controlador ressonante em tempo discreto

O princípio do modelo interno (FRANCIS; WONHAM, 1975) pode ser estendido também para sistemas em tempo discreto. Da mesma forma que para processos em tempo contínuo, pode-se garantir o seguimento com erro nulo do sinal de referência se a dinâmica em tempo discreto desse sinal for inserida no interior da malha de controle.

Tomando como exemplo o sistema da Fig. 12, onde $C(z)$, $G(z)$, $G_d(z)$ são as funções de transferência do controlador, da planta e da perturbação, respectivamente e $R(z)$, $D(z)$, $Y(z)$ correspondem aos sinais de referência, perturbação e saída do sistema. Têm-se as seguintes funções de transferência discretas do sistema em malha fechada para a relação da referência com a saída e da entrada de perturbação com a saída:

$$T_r(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}, \quad T_d(z) = \frac{Y(z)}{D(z)} = \frac{G_d(z)}{1 + C(z)G(z)}. \quad (64)$$

Para o sistema em tempo discreto com período de amostragem T , verifica-se que somente ocorrerá o seguimento com erro nulo de uma referência senoidal com frequência ω_r se, quando avaliado sua resposta em frequência para $z = e^{j\omega T}$, obter-se:

$$|T_r(e^{j\omega_r T})| = \left| \frac{C(e^{j\omega_r T})G(e^{j\omega_r T})}{1 + C(e^{j\omega_r T})G(e^{j\omega_r T})} \right| = 1, \quad \angle T_d(e^{j\omega_r T}) = 0, \quad (65)$$

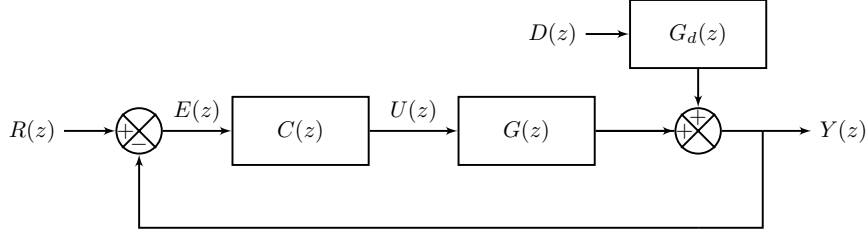
e, além disso, somente ocorrerá a completa rejeição de perturbações com frequência ω_r se:

$$|T_r(e^{j\omega_r T})| = \left| \frac{G_d(e^{j\omega_r T})}{1 + C(e^{j\omega_r T})G(e^{j\omega_r T})} \right| = 0, \quad \angle T_d(e^{j\omega_r T}) = 0. \quad (66)$$

Assim como no caso de sistemas em tempo contínuo, as equações (65) e (66) são mutuamente satisfeitas quando $|C(e^{j\omega_r T})| \rightarrow \infty$. Portanto, em um sistema amostrado com um intervalo T , garante-se o seguimento com erro nulo de um sinal senoidal e a rejeição de

perturbação na frequência ω_r se a função de transferência do controlador em tempo discreto apresentar polos complexos conjugados em $z = e^{\pm j\omega_r T} = \cos(\omega_r T) \pm j \sin(\omega_r T)$, responsáveis pelo ganho infinito na frequência ω_r .

Figura 12: Exemplo de sistema em tempo discreto em malha fechada.



Logo, de acordo com este raciocínio e os resultados apresentados na Seção 3.2, o denominador da função de transferência do controlador ressonante de tempo discreto deve ser da forma $z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1$. Os zeros do controlador podem ser utilizados como graus de liberdade adicionais para garantia da estabilidade do sistema em malha fechada. Assim, de forma análoga ao controlador ressonante de tempo contínuo, são inseridos também dois zeros na função de transferência do controlador, resultando em:

$$C_r(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}{z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1} \quad (67)$$

com os parâmetros α_0 , α_1 e α_2 a serem determinados. Pode-se reescrever a função de transferência do controlador ressonante discreto (67) como:

$$C_r(z) = \bar{k}_e + \frac{\bar{k}_{c2} z + \bar{k}_{c1}}{z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1}. \quad (68)$$

Uma possível realização para (68) pode ser obtida através da discretização por equivalência *ZOH* da equação do controlador ressonante de tempo contínuo apresentado em (21), resultando no sistema:

$$\begin{cases} \bar{x}_r(k+1) = A_{rd} \bar{x}_r(k) + B_{rd} e(k) \\ y_r(k) = C_{rd} \bar{x}_r(k) + D_{rd} e(k) \end{cases} \quad (69)$$

onde $\bar{x}_r(k) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estados do controlador ressonante de tempo discreto, $e(k)$ o sinal de entrada amostrado e $y_r(k)$ o sinal de saída do controlador. As respectivas matrizes, obtidas em detalhe no Apêndice D.1, são dadas por:

$$\begin{aligned} A_{rd} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega_r T) & \sin(\omega_r T) \\ -\sin(\omega_r T) & \cos(\omega_r T) \end{bmatrix}, & B_{rd} &= \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\omega_r T)}{\omega_r} \\ \frac{1}{\omega_r} \sin(\omega_r T) \end{bmatrix}, \\ C_{rd} &= [k_{c1} \quad k_{c2}], & D_{rd} &= \bar{k}_e, \end{aligned} \quad (70)$$

com os parâmetros do numerador de (68) obtidos pela relação:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{c1} &= (k_{c1} - k_{c1} \cos(\omega_r T) - k_{c2} \sin(\omega_r T)) / \omega_r, \\ \bar{k}_{c2} &= (k_{c1} - k_{c1} \cos(\omega_r T) + k_{c2} \sin(\omega_r T)) / \omega_r. \end{aligned} \quad (71)$$

Observação 2 A realização escolhida para a função de transferência (68) não se encontra na forma canônica controlável, por isso os seus parâmetros \bar{k}_{c2} e \bar{k}_{c1} não são exatamente os termos da matriz C_{rd} , mas sim dados pela relação (71).

De forma análoga ao projeto em tempo contínuo, essa mesma formulação pode ser estendida para múltiplas estruturas ressonantes, onde:

$$C_{r_n}(z) = k_e + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{k}_{c_{2i}}z + \bar{k}_{c_{2i-1}}}{z^2 - 2z \cos(\omega_{r_i}T) + 1}. \quad (72)$$

resultando na seguinte representação em espaço de estados generalizada:

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= \begin{bmatrix} A_{rd_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{rd_n} \end{bmatrix} x_r(k) + \begin{bmatrix} B_{rd_1} \\ \vdots \\ B_{rd_n} \end{bmatrix} e(k) \\ y_r(k) &= [C_{r_1} \quad \dots \quad C_{r_n}] x_r(k) + k_e e(k) \end{aligned} \quad (73)$$

onde $x_r(k) = [\bar{x}_{r_1}(k)^T \dots \bar{x}_{r_n}(k)^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ é o vetor de estados do controlador múltiplo ressonante; $e(k)$ o sinal amostrado na entrada do controlador; A_{rd_i}, B_{rd_i} são as matrizes dinâmica e de peso nos sinais de entrada para cada modo ressonante, onde ω_r é avaliado nas frequências ω_{r_i} para $i = 1, \dots, n$.

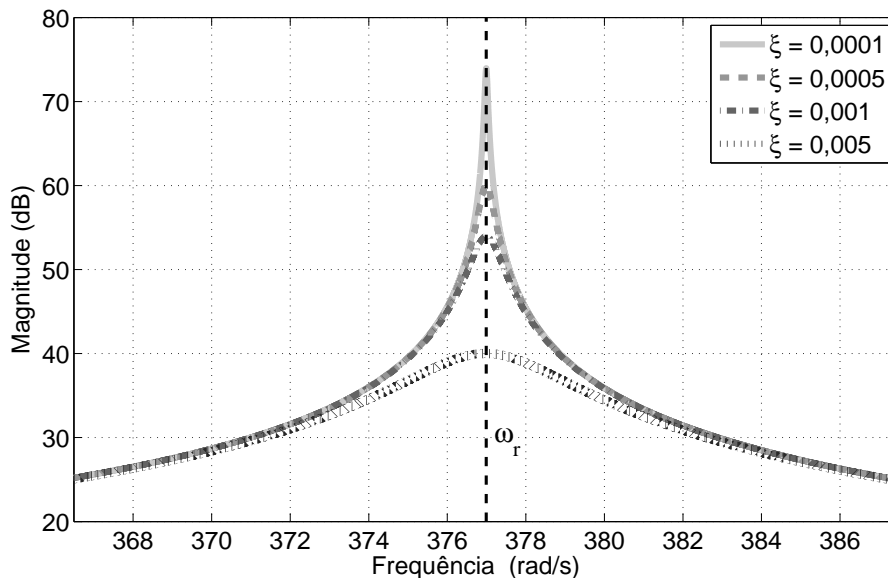
4.2 Controlador quasi-ressonante em tempo discreto

Como forma de contornar problemas na implementação do controlador ressonante para elevadas frequências de amostragem, utiliza-se o controlador quasi-ressonante. Neste caso a função de transferência (68) pode ser estendida para a formulação

$$C_q(z) = \bar{k}_e + \frac{\bar{k}_{c_2}z + \bar{k}_{c_1}}{z^2 - 2z \cos(\omega_d T) e^{-\xi \omega_r T} + e^{-2\xi \omega_r T}}. \quad (74)$$

sendo ξ o fator de amortecimento e $\omega_d = \omega_r \sqrt{1 - \xi^2}$. Avaliando a resposta em frequência deste controlador, na Fig. 13, verifica-se a existência de ganho finito em sua frequência de ressonância devido à disposição dos polos no interior da circunferência unitária, como resultado da escolha de $0 < \xi < 1$.

Figura 13: Diagrama de Bode de magnitude do controlador quasi-ressonante $C_q(z)$ com $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s para diferentes valores de ξ .



Uma possível realização para o controlador (74) pode ser obtida diretamente pela discretização por equivalência *ZOH* da equação do controlador ressonante de tempo contínuo (21) com a devida inserção de $-2\xi\omega_r$ no último termo da matriz dinâmica, resultando no sistema de equações em tempo discreto (69) com as seguintes matrizes:

$$A_{rd} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \omega_r\beta_1 \\ -\omega_r\beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad B_{rd} = \begin{bmatrix} \frac{1-\beta_0}{\omega_r} \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad C_{rd} = [k_{c1} \quad k_{c2}], \quad D_{rd} = \bar{k}_e. \quad (75)$$

sendo

$$\beta_0 = e^{-\xi\omega_r T} \left(\frac{\xi\omega_r}{\omega_d} \sin(\omega_d T) + \cos(\omega_d T) \right), \quad \beta_1 = \frac{e^{-\xi\omega_r T}}{\omega_d} \sin(\omega_d T),$$

$$\beta_2 = e^{-\xi\omega_r T} \left(-\frac{\xi\omega_r}{\omega_d} \sin(\omega_d T) + \cos(\omega_d T) \right).$$

Estas matrizes são obtidas em detalhe no Apêndice E.1. E os parâmetros do numerador são dados pela seguinte relação:

$$\bar{k}_{c1} = (k_{c1} e^{-2\xi\omega_r T} - k_{c1}\beta_2 - k_{c2}\beta_1\omega_r)/\omega_r, \quad (76)$$

$$\bar{k}_{c2} = (k_{c1} - k_{c1}\beta_0 + k_{c2}\beta_1\omega_r)/\omega_r.$$

O aumento de ξ está relacionado com a redução da magnitude do ganho do controlador na frequência de ressonância, tal que este não satisfaz o PMI para o seguimento com erro nulo de um sinal senoidal. Assim, para múltiplas estruturas ressonantes, sintonizadas nas harmônicas deste sinal, isso implica em uma rejeição parcial das perturbações nessas frequências. A representação em espaço de estados generalizada para n modos continua a mesma de (73), sejam eles ressonantes ou quasi-ressonantes.

Na sequência serão apresentadas as representações do sistema em malha fechada para cada uma das três diferentes abordagens utilizadas no PDD do controlador. Estas possuem peculiaridades e necessitam de projetos independentes.

4.3 PDD considerando o modelo da *UPS* discretizado por *ZOH*

4.3.1 Sistema em malha fechada

Na primeira abordagem para o projeto em tempo discreto do controlador múltiplo ressonante considera-se o modelo da planta obtido pela equivalência com *ZOH* (39). Devido a esse método de discretização, a incerteza paramétrica do modelo é propagada não só para a matriz A_d como também para B_d e E_d , tal que $A_d(Y_0(k))$, $B_d(Y_0(k))$ e $E_d(Y_0(k))$ são obtidas por:

$$A_d(Y_0(k)) = e^{A(Y_0)T}, \quad B_d(Y_0(k)) = A(Y_0)^{-1}(e^{A(Y_0)T} - I)B, \quad (77)$$

$$E_d(Y_0(k)) = A(Y_0)^{-1}(e^{A(Y_0)T} - I)E, \quad C_d = C.$$

Após definida a estrutura do controlador ressonante discreto (73) e obtida a discretização da planta pelo método *ZOH*, considera-se a interconexão entre planta e controlador expressa através do vetor de estados aumentado $x_a(k) = [x^T(k) \quad x_r^T(k)]^T \in \mathbb{R}^{2n+2}$ resultando na equação de estado:

$$\begin{cases} x_a(k+1) = A_{ad}(Y_0(k))x_a(k) + B_{ad}(Y_0(k))u(k) + E_{ad}(Y_0(k))q(k) \\ y(k) = C_{ad}x_a(k), \end{cases} \quad (78)$$

onde $q(k) = [r(k) \ i_d(k)]^T$, $y(k)$ é a saída do sistema *UPS*, e as matrizes são dadas por:

$$A_{ad}(Y_0(k)) = \begin{bmatrix} A_d(Y_0(k)) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -B_{rd1}C_d & A_{rd1} & 0 & \dots & 0 \\ -B_{rd2}C_d & 0 & A_{rd2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -B_{rdn}C_d & 0 & \dots & 0 & A_{rdn} \end{bmatrix}, \quad (79)$$

$$B_{ad}(Y_0(k)) = [B_d(Y_0(k))^T \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \quad C_{ad} = [C_d \ 0 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$E_{ad}(Y_0(k)) = \begin{bmatrix} 0 & B_{rd1}^T & B_{rd2}^T & \dots & B_{rdn}^T \\ E_d(Y_0(k))^T & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

O sinal de controle aplicado à *UPS* é definido como

$$u(k) = k_{p1}x_1(k) + k_{p2}x_2(k) + k_{c1}\bar{x}_{r1,1}(k) + k_{c2}\bar{x}_{r1,2}(k) + \dots + k_{c2n-1}\bar{x}_{rn,1}(k) + k_{c2n}\bar{x}_{rn,2}(k) + k_e e(k) \\ = K_d x_a(k) + k_e r(k) \quad (80)$$

tal que o sistema em malha fechada assuma a seguinte forma:

$$\begin{cases} x_a(k+1) = (A_{ad}(Y_0(k)) + B_{ad}(Y_0(k))K_d)x_a(k) + \bar{E}_{ad}(Y_0(k))q(k) \\ y(k) = C_{ad}x_a(k) \end{cases} \quad (81)$$

onde

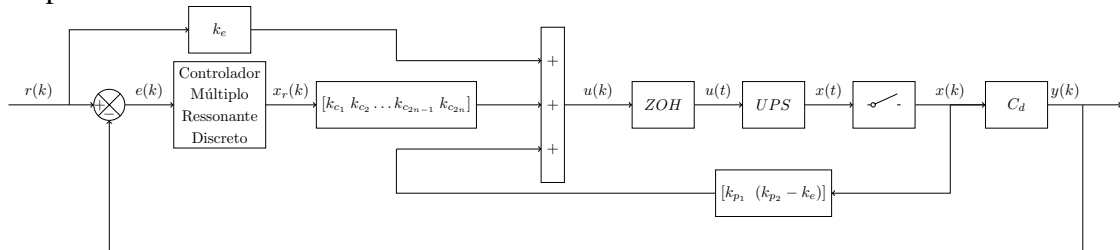
$$\bar{E}_{ad}(Y_0(k)) = \begin{bmatrix} B_d(Y_0(k))^T k_e & B_{rd1}^T & B_{rd2}^T & \dots & B_{rdn}^T \\ E_d(Y_0(k))^T & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Portanto, a sintonia do controlador múltiplo ressonante (72) pode ser vista como um problema clássico de realimentação de estados somado a um termo de alimentação direta da referência (do inglês *feedforward*), sendo

$$K_d = [k_{p1} \ k_{p2} - k_e \ k_{c1} \ k_{c2} \ \dots \ k_{c2n-1} \ k_{c2n}]$$

o vetor ganho de realimentação a ser determinado. A Fig. 14 apresenta o diagrama de blocos do sistema em malha fechada utilizando a estrutura do controlador ressonante definida em (73).

Figura 14: Sistema em malha fechada utilizando o controlador múltiplo ressonante de tempo discreto.



4.3.2 Projeto dos ganhos

Do mesmo modo que para o caso contínuo, a estabilidade interna de um sistema em tempo discreto implica na sua estabilidade *BIBO* (CHEN, 1999). Portanto, com o intuito de estabilização do sistema $q(k)$ pode ser desconsiderado e (78) torna-se:

$$x_a(k+1) = (A_{ad}(Y_0(k)) + B_{ad}(Y_0(k))K_d)x_a(k) \quad (83)$$

Para o projeto dos ganhos de realimentação pode ser utilizada a metodologia de posicionamento de polos apresentada em (KROKAVEC; FILASOVA, 2013), onde é descrito um conjunto de restrições na forma *LMI* para assegurar que os autovalores da matriz do sistema em malha fechada estejam contidos em uma região do plano complexo, definida por

$$R_{CR} = \{p_i \in \mathbb{C} : |p_i| \leq \rho, \rho \in \mathbb{R}\}, \quad (84)$$

onde p_i com $i = 1, \dots, 2n+2$ são os polos do sistema em malha fechada, e $\rho < 1$ um escalar diretamente relacionado com o tempo de acomodação do sistema.

Além do posicionamento de polos, neste trabalho, é proposta a utilização como medida do desempenho transitório de uma função custo do tipo

$$J(z_p(k)) := \|z_p(k)\|_2^2, \quad (85)$$

sendo $z_p(k)$ uma saída de desempenho, definida por $z_p(k) = C_p x_a(k) + D_p u(k)$, onde C_p e D_p são matrizes definidas com o intuito de penalizar a energia dos estados do sistema e/ou do sinal de controle no problema de otimização.

Como resumo do que é proposto nesse trabalho, para o projeto conjunto robusto de posicionamento de polos e minimização de uma função custo, pode-se enunciar o Teorema 5.

Teorema 5 *Para um dado $\rho < 1$, caso exista uma matriz simétrica positiva definida $Q \in \mathbb{R}^{(2n+2) \times (2n+2)}$, uma matriz $W \in \mathbb{R}^{1 \times (2n+2)}$ e um escalar positivo γ satisfazendo as desigualdades*

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * \\ A_{ad}(Y_{min})Q + B_{ad}(Y_{min})W & -Q & * \\ C_p Q + D_p W & 0 & -\gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (86)$$

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * \\ A_{ad}(Y_{max})Q + B_{ad}(Y_{max})W & -Q & * \\ C_p Q + D_p W & 0 & -\gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (87)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho Q & * \\ A_{ad}(Y_{min})Q + B_{ad}(Y_{min})W & -\rho Q \end{bmatrix} < 0, \quad (88)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho Q & * \\ A_{ad}(Y_{max})Q + B_{ad}(Y_{max})W & -\rho Q \end{bmatrix} < 0, \quad (89)$$

então o sistema (83) é assintoticamente estável para todo $Y_{min} \leq Y_0(k) \leq Y_{max}$, todos seus polos estão confinados na região (84) e a função custo (85) satisfaz $\|z_p(k)\|_2^2 \leq \gamma x_a(0)^T Q^{-1} x_a(0)$. O vetor de ganhos é recuperado pela relação $K_d = WQ^{-1}$.

4.3.2.1 Prova

A prova do Teorema 5 será dividida em duas partes, relacionadas ao conjunto de desigualdades (86)-(87) e (88)-(89), respectivamente. A fim de solucionar o problema de estabilidade robusta com um limitante superior γ para $\|z_p(k)\|_2^2$ para uma dada condição inicial no intervalo $[0 \infty]$ do sistema (83), assume-se a seguinte função custo:

$$J(z_p(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} z_p^T(k) z_p(k) \quad (90)$$

sendo $z_p(k)$ uma saída de desempenho composta pela energia dos estados do sistema e/ou do sinal de controle. Lembrando que $\Delta V(x_a(k)) = V(x_a(k+1)) - V(x_a(k))$, se a relação

$$\Delta V(x_a(k)) + \frac{1}{\gamma} z_p^T(k) z_p(k) < 0 \quad (91)$$

for satisfeita para todo $Y_0(k)$, então

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{\infty} \Delta V(x_a(\tau)) + \frac{1}{\gamma} \sum_{\tau=0}^{\infty} z_p^T(\tau) z_p(\tau) < 0 \\ V(x_a(\infty)) - V(x_a(0)) + \frac{1}{\gamma} \sum_{\tau=0}^{\infty} z_p^T(\tau) z_p(\tau) < 0 \end{aligned}$$

logo $V(x_a(\infty)) = 0$ devido à estabilidade do sistema, então

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} z_p(\tau)^T z_p(\tau) < \gamma V(x_a(0)) \quad (92)$$

e, portanto, minimizar γ é equivalente a minimizar a função custo $J(z_p(k))$.

Considerando uma função de Lyapunov quadrática $V(x_a(k)) = x_a^T(k) P x_a(k)$, têm-se que

$$\Delta V(x_a(k)) = x_a^T(k+1) P x_a(k+1) - x_a^T(k) P x_a(k) \quad (93)$$

e, a partir da equação de malha fechada (83), a condição (91) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_a \\ u \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} (A_{ad}(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d)^T P (A_{ad}(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d) - P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. \begin{bmatrix} C_p^T \\ D_p \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma} [C_p \ D_p] \right) \begin{bmatrix} x_a \\ u \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (94)$$

Aplicando o complemento de Schur em (94), depois pré-multiplicando os lados esquerdo e direito resultantes por

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e definindo $P^{-1} = Q$, $W = K_d Q$ obtêm-se a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * \\ A_{ad}(Y_0)Q + B_{ad}(Y_0)W & -Q & * \\ C_p Q + D_p W & 0 & -\gamma \end{bmatrix} < 0 \quad (95)$$

Pelas propriedades de convexidade citadas em (BOYD; VANDENBERGHE, 2004), a condição (91) é sustentada para todo $Y_o(k) \in [Y_{min}, Y_{max}]$, independente da taxa de variação da carga, se a *LMI* (95) for juntamente satisfeita nos vértices do politopo os quais $Y_0 = Y_{min}$ e $Y_0 = Y_{max}$.

A restrição *LMI* para posicionamento de polos de sistemas em tempo discreto, citadas em (KROKAVEC; FILASOVA, 2013), podem ser derivadas assumindo a existência de um novo sistema, descrito pela equação:

$$x_a(k+1) = \rho^{-1}(A_{ad}(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d)x_a(k) \quad (96)$$

que substituindo na equação (93) resulta em

$$x_a \left[\rho^{-1}(A_{ad}(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d)P\rho^{-1}(A_a(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d) - P \right] x_a < 0 \quad (97)$$

$$(A_{ad}(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d)^T P (A_{ad}(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d) - \rho^2 P < 0.$$

É fácil de verificar que, para uma P positiva definida (97) leva a autovalores \bar{z} tal que a relação $\bar{z}_i^* \bar{z}_i < \rho^2$ com $i = 1, \dots, 2n + 2$ seja satisfeita, portanto estes estarão contidos em uma região circular $\mathcal{D}(0, \rho)$ do plano complexo (CHILALI; GAHINET, 1996). Para um $\rho > 0$, (97) implica

$$\rho^{-1}(A_{ad}(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d)^T P (A_{ad}(Y_0) + B_{ad}(Y_0)K_d) - \rho P < 0 \quad (98)$$

Aplicando o complemento de Schur em (98), depois pré-multiplicando os lados esquerdo e direito resultantes por

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e usando a mesma notação $P^{-1} = Q$, $W = K_d Q$ obtêm-se a seguinte *LMI*:

$$\begin{bmatrix} -\rho Q & * \\ A_{ad}(Y_0)Q + B_{ad}(Y_0)W & -\rho Q \end{bmatrix} < 0. \quad (99)$$

Novamente segue que, se as condições (95) e (99) forem conjuntamente satisfeitas para os vértices do politopo tais que $Y_o = Y_{min}$ e $Y_o = Y_{max}$, então implica em (86), (87), (88) e (89) do Teorema 5.

Tendo como objetivo minimizar a função custo (85) e, com isso, obter os ganhos de realimentação para a sintonia do controlador ressonante discreto, propõe-se o seguinte problema de otimização convexa:

$$\min_{Q,W} \gamma \quad \text{sujeito à } Q = Q^T > 0, \text{ (86) - (89)} \quad (100)$$

Deve-se lembrar que, do mesmo modo que o projeto em tempo contínuo, não é possível determinar separadamente os ganhos k_{p_2} e k_e . Portanto, assume-se que $k_{p_2} = 0$ de forma que o ganho k_e é dado apenas por $k_e = -k_{d_2}$.

Observação 3 *Uma solução factível do problema de otimização (100) garante a estabilidade robusta do sistema em malha fechada enquanto assegura o posicionamento de polos em termos da \mathcal{D} -estabilidade e por um custo garantido da energia do sistema. O parâmetro ρ e as matrizes de peso C_p e D_p são os únicos parâmetros a serem especificados no momento do projeto.*

4.4 PDD considerando o modelo da UPS discretizado por aproximações

Nessa segunda abordagem é realizado o PDD do controlador múltiplo ressonante utilizando os modelos da planta obtidos através das aproximações *Forward Euler* ou de *Adams-Bashforth*. Como verificado na Seção 3.2, estes métodos resultam em estados com dimensão diferentes, onde $x_d(k) = x(k) \in \mathbb{R}^2$ se for utilizada a discretização *Forward Euler* ou $x_d(k) = \bar{x}_d(k) \in \mathbb{R}^6$ se empregado o método de *Adams-Bashforth*. Com esses métodos de discretização, ao contrário do anterior, a incerteza paramétrica do modelo não é propagada para a matriz B_{ad} .

4.4.1 Sistema em malha fechada

Após definida a estrutura do controlador ressonante discreto (73) e obtida a discretização da planta pela aproximação *Forward Euler* (43) ou de *Adams-Bashforth* (49), considera-se a interconexão entre planta e controlador expressada através do vetor de estados aumentado $x_a(k) = [x_d^T(k) \ x_r^T(k)]^T \in \mathbb{R}^{2n+h}$. O vetor $x_d(k) \in \mathbb{R}^h$ representa tanto o vetor de estados $x(k)$ (onde $h = 2$) ou $\bar{x}_d(k)$ (onde $h = 6$) sendo h o número de estados da planta, dependendo do método de discretização empregado. Resultando nas seguintes equações:

$$\begin{cases} x_a(k+1) = A_{ad}(Y_0(k))x_a(k) + B_{ad}u(k) + E_{ad}q(k) \\ y(k) = C_{ad}x_a(k), \end{cases} \quad (101)$$

onde $q(k) = [r(k) \ i_d(k)]^T$, $y(k)$ a saída da UPS, e as matrizes são dadas por:

$$A_{ad}(Y_0(k)) = \begin{bmatrix} A_{ad}(Y_0(k)) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -B_{rd_1}C_d & A_{rd_1} & 0 & \dots & 0 \\ -B_{rd_2}C_d & 0 & A_{rd_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -B_{rd_n}C_d & 0 & \dots & 0 & A_{rd_n} \end{bmatrix},$$

$$B_{ad} = [B_d^T \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T,$$

$$C_{ad} = [C_d \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \quad E_{ad} = \begin{bmatrix} 0 & B_{rd_1}^T & B_{rd_2}^T & \dots & B_{rd_n}^T \\ E_d^T & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (102)$$

O sinal de controle aplicado à UPS é definido de forma similar a (80), no entanto levando em consideração os h estados da planta:

$$\begin{aligned} u(k) &= k_{p_1}x_1(k) + k_{p_2}x_2(k) + \dots + k_{p_n}x_h(k) + k_{c_1}\bar{x}_{r_{1,1}}(k) + k_{c_2}\bar{x}_{r_{1,2}}(k) + \\ &\quad \dots + k_{c_{2n-1}}\bar{x}_{r_{n,1}}(k) + k_{c_{2n}}\bar{x}_{r_{n,2}}(k) + k_e e(k) \\ &= K_d x_a(k) + k_e r(k) \end{aligned} \quad (103)$$

tal que o sistema em malha fechada assuma a seguinte forma:

$$\begin{cases} x_a(k+1) = (A_{ad}(Y_0(k)) + B_{ad}K_d)x_a(k) + \bar{E}_{ad}q(k) \\ y(k) = C_{ad}x_a(k) \end{cases} \quad (104)$$

onde

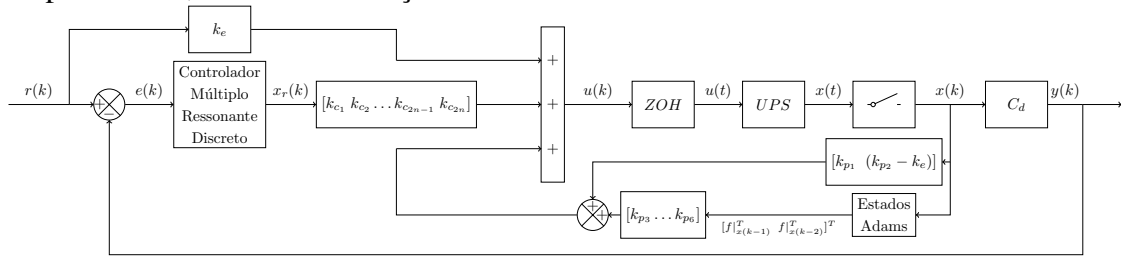
$$\bar{E}_{ad} = \begin{bmatrix} B_d^T k_e & B_{rd_1}^T & B_{rd_2}^T & \dots & B_{rd_n}^T \\ E_d^T & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (105)$$

Portanto, a sintonia do controlador múltiplo ressonante (72) pode ser vista como um problema clássico de realimentação de estados somado a um termo de alimentação direta, sendo

$$K_d = [k_{p_1} \quad k_{p_2} - k_e \quad \dots \quad k_{p_h} \quad k_{c_1} \quad k_{c_2} \quad \dots \quad k_{c_{2n-1}} \quad k_{c_{2n}}]$$

o vetor ganho de realimentação a ser determinado. A Fig. 15 apresenta o diagrama de blocos do sistema em malha fechada utilizando a estrutura do controlador ressonante definida em (73).

Figura 15: Sistema em malha fechada utilizando o controlador múltiplo ressonante de tempo discreto, com realimentação de estados adicionais.



Observação 4 Como mencionado no Capítulo 3, para implementar o sistema em malha fechada com a aproximação Adams-Bashforth é necessário o cálculo dos estados adicionais $f|_{k-1}$ e $f|_{k-2}$. Isto se deve ao fato de que a realimentação adotada utiliza esses estados adicionais na composição do sinal de controle. Na Fig. 15, o bloco chamado Estados Adams recupera o valor de $f|_k$ e, por meio de atrasos unitários, obtêm os seus valores nos instantes de amostragem passados $t = (k-1)T$ e $t = (k-2)T$.

4.4.2 Projeto dos ganhos

Do mesmo modo que para o caso contínuo, a estabilidade interna de um sistema em tempo discreto implica na sua estabilidade *BIBO* (CHEN, 1999). Portanto, com o intuito de estabilização do sistema $q(k)$ pode ser desconsiderado e (104) torna-se:

$$x_a(k+1) = (A_{ad}(Y_0(k)) + B_{ad}K_d)x_a(k) \quad (106)$$

Para o projeto dos ganhos de realimentação é utilizada a mesma metodologia de posicionamento de polos apresentada no projeto por equivalência *ZOH*, com um conjunto de restrições na forma de *LMIs* para assegurar que os autovalores da matriz do sistema em malha fechada estejam contidos em uma região do plano complexo, definida por

$$R_{CR} = \{p_i \in \mathbb{C} : |p_i| \leq \rho, \rho \in \mathbb{R}\}, \quad (107)$$

onde p_i com $i = 1, \dots, 2n+h$ são os polos do sistema em malha fechada, e $\rho < 1$ um escalar diretamente relacionado com o tempo de acomodação do sistema.

Além do posicionamento de polos, também é utilizada como medida do desempenho transitório uma função custo (85), sendo agora $z_p(k)$ uma saída de desempenho definida por $z_p(k) = C_p x_a(k) + D_p u(k)$, onde C_p e D_p são matrizes definidas com o intuito de penalizar a energia dos estados do sistema e/ou do sinal de controle no problema de otimização.

Como resumo do que é proposto nesse trabalho, para o projeto conjunto do robusto posicionamento de polos e minimização de uma função custo, pode-se enunciar o Teorema 6. A sua respectiva prova segue os mesmos passos do projeto anterior considerando uma matriz B_{ad} única, não dependente do elemento incerto Y_o .

Teorema 6 Para um dado $\rho < 1$, caso exista uma matriz simétrica positiva definida $Q \in \mathbb{R}^{(2n+h) \times (2n+h)}$, uma matriz $W \in \mathbb{R}^{1 \times (2n+h)}$ e um escalar positivo γ satisfazendo as desigualdades

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * \\ A_{ad}(Y_{min})Q + B_{ad}W & -Q & * \\ C_p Q + D_p W & 0 & -\gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (108)$$

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * \\ A_{ad}(Y_{max})Q + B_{ad}W & -Q & * \\ C_p Q + D_p W & 0 & -\gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (109)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho Q & * \\ A_{ad}(Y_{min})Q + B_{ad}W & -\rho Q \end{bmatrix} < 0, \quad (110)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho Q & * \\ A_{ad}(Y_{max})Q + B_{ad}W & -\rho Q \end{bmatrix} < 0, \quad (111)$$

então o sistema (83) é assintoticamente estável para todo $Y_{min} \leq Y_0(k) \leq Y_{max}$, todos seus polos estão confinados na região (84) e a função custo (85) satisfaz $\|z_p(k)\|_2^2 \leq \gamma x_a(0)^T Q^{-1} x_a(0)$. O vetor de ganhos é recuperado pela relação $K_d = WQ^{-1}$.

Os ganhos de realimentação para a sintonia do controlador ressonante discreto são obtidos pela minimização da mesma função custo definida em (100) sujeito às restrições do Teorema 6.

4.5 Comentários finais

Neste capítulo, inicialmente foi definida a formulação do controlador ressonante em tempo discreto, de forma que este atenda ao PMI para sinais de referência e/ou perturbação obtidos com um intervalo de amostragem fixo. Como consequência disso, obtêm-se uma realização em espaço de estados desse controlador e esta é estendida para uma estrutura com múltiplos ressonantes.

A partir da formulação em espaço de estados do controlador múltiplo ressonante de tempo discreto, propôs-se a síntese robusta dos seus ganhos de realimentação através da solução de um problema de otimização com restrições no formato de *LMIs*, de forma análoga ao projeto contínuo, levando em conta a incerteza paramétrica do modelo. Esse projeto já considera a estrutura do controlador de múltiplos modos ressonantes e é obtido pela solução de dois problemas de otimização diferentes, dependendo da discretização utilizada para a planta.

No capítulo seguinte são mostrados os resultados de simulação obtidos para um exemplo numérico da *UPS* utilizando o controlador de um e múltiplos modos ressonantes, sob três períodos de amostragem diferentes. A síntese do controlador ressonante robusto em tempo discreto e a comparação dos resultados de simulação para este sistema *UPS* já foram submetidos em (KEIEL et al., 2017). Adicionalmente, são realizados ensaios experimentais em uma *UPS* real com os mesmos parâmetros, para a validação dos resultados.

5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados dos ensaios realizados para a validação da metodologia de sintonia do controlador múltiplo ressonante robusto de tempo discreto, apresentada no Capítulo 4. Os resultados são obtidos por meio de simulações e pela execução experimental dos ensaios especificados pela *IEC 62040-3*. O ambiente de simulação implementado nesta dissertação foi apresentado em (CARVALHO, 2013), e consiste do processo de co-simulação entre os *softwares* Matlab/Simulink[®] (R2012a) e PSIM[®] (9.0.3.464).

Na sequência são apresentados o exemplo numérico da *UPS* adotada no trabalho, com potência nominal de 3,5 kVA, o ambiente de simulação utilizado, os resultados de simulação e, por fim, os resultados experimentais.

5.1 Exemplo numérico da *UPS*

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos para um exemplo numérico do inversor de tensão da Fig. 2, apresentado no início desse trabalho. A Tabela 4 lista os valores dos parâmetros definidos para esse exemplo. Estes valores correspondem aos valores nominais dos parâmetros da bancada de testes usada para a validação experimental do método proposto.

Tabela 4: Parâmetros da *UPS*.

Símbolo	Parâmetro	Valor
L_f	Indutância do filtro de saída	1,0 mH
R_{lf}	Resistência do indutor do filtro de saída	15,0 mH
C_f	Capacitância do filtro de saída	300 μ F
Y_{min}	Admitância de carga mínima	0,0001 S
Y_{max}	Admitância de carga máxima	0,1519 S
S	Potência aparente de saída	3,5 kVA
$\cos \phi$	Fator de potência de saída	0,7
V_{ref}	Valor eficaz da tensão de referência	127 V
f	Frequência da tensão de referência	60 Hz
\hat{V}_{tri}	Amplitude da portadora triangular do <i>PWM</i>	260 V
C_1, C_2	Capacitâncias do barramento cc	6600 μ F
V_{cc}	Tensão do barramento cc	520 V

A Tabela 5 apresenta os valores das cargas lineares e não-lineares de referência dimen-

sionadas para este exemplo numérico da *UPS*, definidos de acordo com a *IEC 62040-3*. Ao lado são apresentados os valores reais das cargas instaladas na bancada experimental, sendo que estas também foram empregadas nos ensaios de simulação. Estes componentes apresentam discrepâncias em relação aos dimensionados para o exemplo numérico da *UPS*, devido à utilização de valores comerciais, e foram medidos com um multímetro Fluke 179 *True RMS*.

Tabela 5: Parâmetros das cargas de referência para o ambiente de simulação.

Símbolo	Parâmetro	<i>IEC 62040-3</i>	Valor
R_{l_1}	Resistência de 20% da carga linear	32,92 Ω	33,00 Ω
R_{l_2}	Resistência de 80% da carga linear	8,23 Ω	8,20 Ω
R_{s_1}	Resistência série de 25% da carga não-linear	0,73 Ω	0,39 Ω
R_{s_1}	Resistência série de 75% da carga não-linear	0,25 Ω	0,39 Ω
R_{nl_1}	Resistência de 25% da carga não-linear	41,57 Ω	38,30 Ω
R_{nl_2}	Resistência de 75% da carga não-linear	13,86 Ω	16,00 Ω
C_{nl_1}	Capacitância de 25% da carga não-linear	3007 μF	3300 μF
C_{nl_2}	Capacitância de 75% da carga não-linear	9021 μF	9900 μF

A partir desses parâmetros obtêm-se as respectivas matrizes pela representação em espaço de estados do inversor (3):

$$\begin{aligned}
 A(Y_{min}) &= \begin{bmatrix} -15 & -1000 \\ 3333,33 & -0,33 \end{bmatrix}, & A(Y_{max}) &= \begin{bmatrix} -15 & -1000 \\ 3333,33 & -506,33 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix}, & E &= \begin{bmatrix} 0 \\ -3333,33 \end{bmatrix}, & C &= [0 \ 1].
 \end{aligned} \tag{112}$$

A Fig. 16 apresenta a resposta em frequência da planta (112) para as condições de operação com carga mínima e máxima, descritas pelas suas respectivas admitâncias. Verifica-se que há um pico de ganho na frequência 1826 rad/s, devido aos dois polos complexos do filtro de saída, e que este ganho diminui conforme a carga aumenta.

5.1.1 Comparação do modelo da planta

Por se tratar de um sistema variante no tempo com uma continuidade de modelos para cada valor de $Y_0(t)$, foi considerada apenas a condição de operação em que há carga máxima conectada à saída da *UPS*, ou seja, para a matriz $A(Y_{max})$. Nas Figuras 17 a 19 são comparadas as respostas ao degrau das diferentes discretizações com o sistema em tempo contínuo original. Nota-se que, para esse tipo de entrada, o método *ZOH* fornece uma representação digital sem erros. As aproximações de Adams-Bashforth e de Tustin resultam nos menores erros de aproximação, enquanto que com o *Forward Euler* obtêm-se um erro relativamente alto. Já com o intervalo de amostragem maior ($T = 200 \mu s$) a saída do sistema para o método de Euler não é mais limitada em sinal e este é, portanto, instável. O mesmo acontece para o método Adams-Bashforth com $T = 400 \mu s$.

Figura 16: Diagrama de Bode da planta para as condições de operação com carga máxima e mínima.

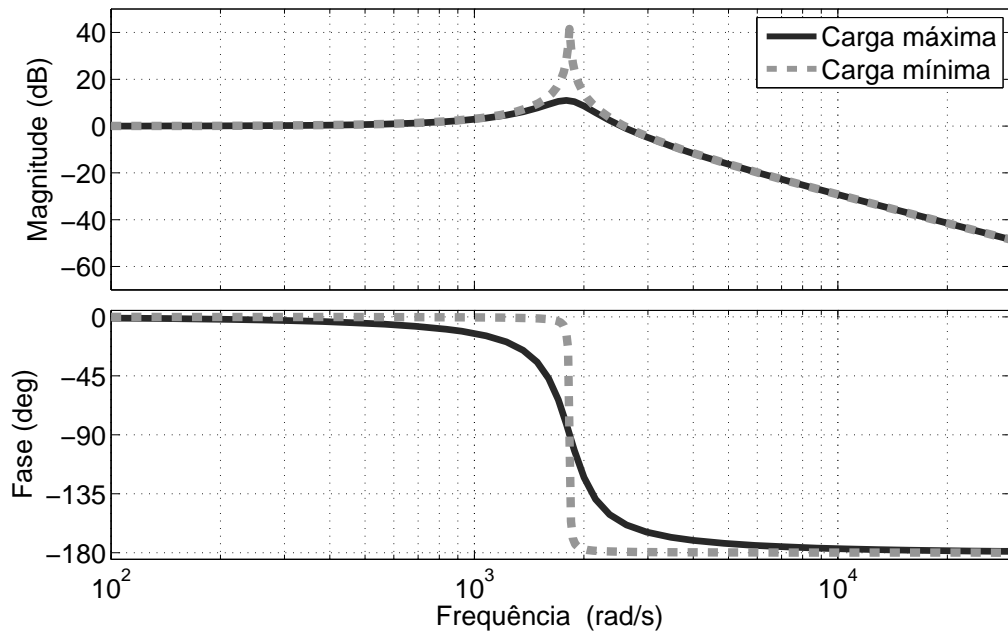


Figura 17: Resposta ao degrau da planta discretizada e erro relativo, para $T = 100 \mu s$.

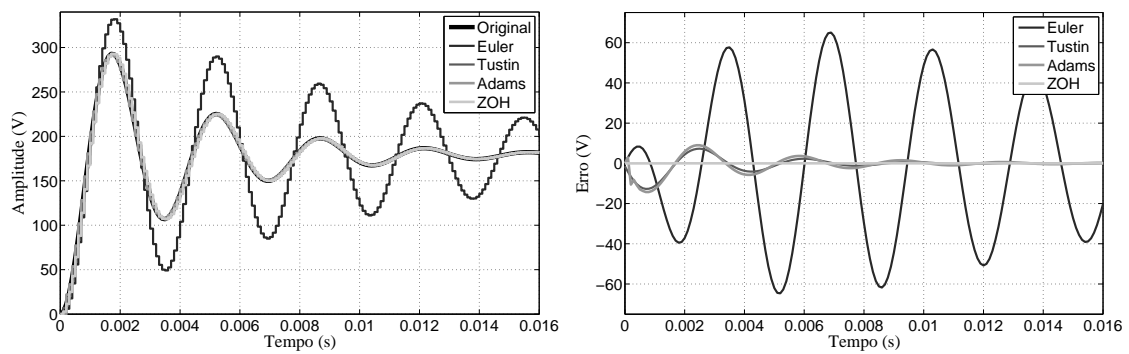


Figura 18: Resposta ao degrau da planta discretizada e erro relativo, para $T = 200 \mu s$.

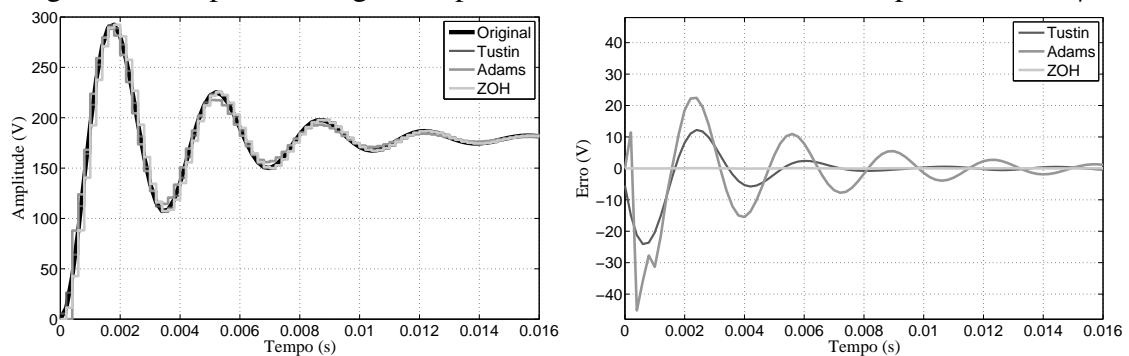
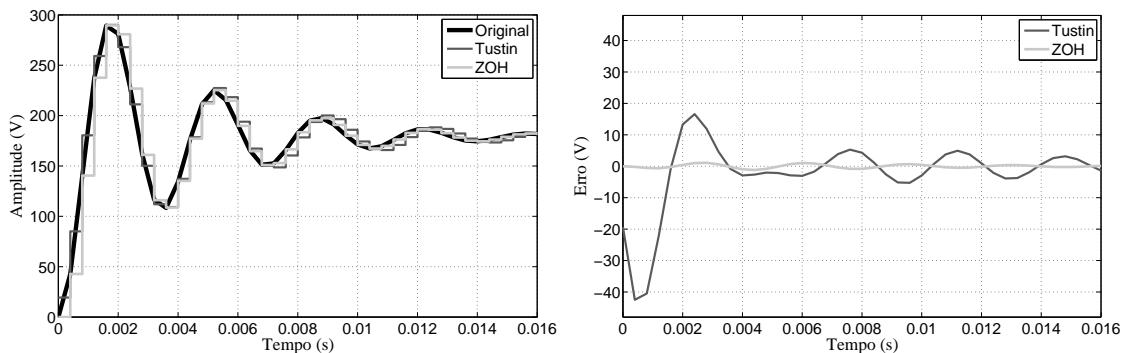


Figura 19: Resposta ao degrau da planta discretizada e erro relativo, para $T = 400 \mu s$.

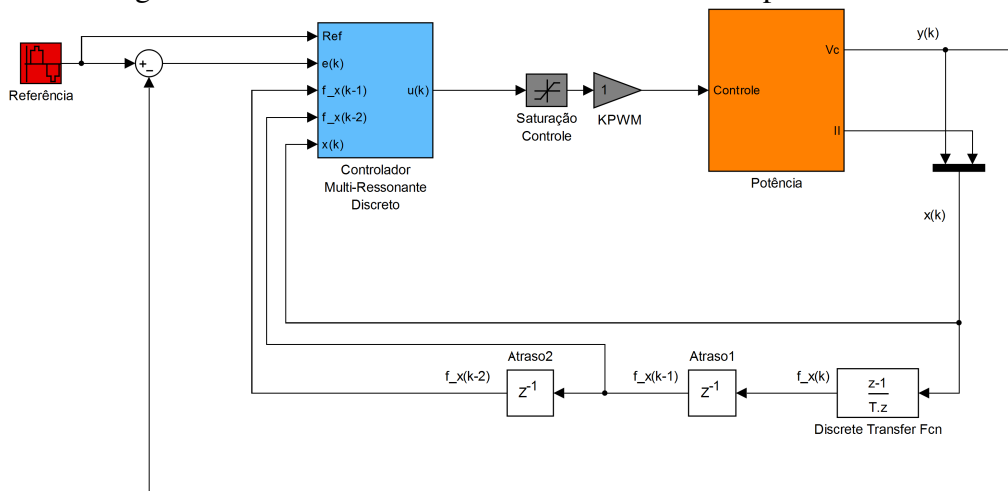


A partir da análise numérica e prática dos métodos apresentados, pode-se concluir que a melhor opção para a discretização da planta é o método *ZOH*. Além disso, optou-se por utilizar também outras técnicas para fins de comparação dos resultados, sendo elas os métodos *Forward Euler* e de *Adams-Bashforth*. Além do método de *Adams-Bashforth* possuir erro de discretização menor que a aproximação de Tustin (TOTH; HEUBERGER; HOF, 2010), suas matrizes possuem dependência afim da variável incerta. Por último, também foi empregado o método *Forward Euler*, por se tratar, teoricamente, do pior caso.

5.2 Ambiente de simulação

O ambiente de simulação utilizado é proveniente de trabalhos anteriores realizados pelo grupo de pesquisa, portanto maiores detalhes podem ser encontrados em (CARVALHO, 2013) e (BONAN, 2010). Este ambiente utiliza os *softwares* Matlab/Simulink e PSIM de forma conjunta, em um processo de co-simulação, onde o Matlab é empregado para a implementação do controlador, acionamento das cargas e para a medição dos resultados numéricos, enquanto que o PSIM implementa o modelo do inversor de meia ponte de 3,5 kVA (Fig. 2) e suas respectivas cargas lineares e não-lineares de referência (Fig. 3). A Fig. 20 apresenta o diagrama de blocos do sistema em malha fechada implementado no Simulink, sendo o bloco em cor laranja relativo a integração com o *software* PSIM, através da ferramenta *SimCoupler*.

Figura 20: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada implementado no Simulink.



No diagrama da Fig. 20 são computados os estados adicionais necessários quando

o projeto utiliza a aproximação Adams-Bashforth. Estes estados $f|_{(k-1)T}$ e $f|_{(k-2)T}$ são obtidos através de um e dois atrasos unitários do valor $f|_{kT}$, respectivamente. Sabendo que $f|_{kT} = Ax(kT) + Bu(kT)$ recupera-se o valor de $f|_{kT}$ pela aproximação $f|_{kT} \approx \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$. Os ganhos de realimentação referentes aos estados adicionais são calculados apenas no projeto com a aproximação Adams-Bashforth, enquanto nos demais projetos estes ganhos são considerados nulos.

5.3 Resultados de simulação

Para o exemplo numérico da *UPS* avaliou-se os resultados com três frequências de amostragem (f_a) distintas: 21600, 10800, 5400 Hz, alterando-se igualmente a frequência de chaveamento (f_s) do *PWM*. Iniciou-se com a seleção de $f_a = 21,6$ kHz por esta faixa de frequência ser a mesma utilizada em (PEREIRA et al., 2014) e em outras referências (HASANZADEH et al., 2012), (RIBAS et al., 2014). A partir disso, procurou-se reduzi-la pela metade, de forma a verificar o quanto pode-se reduzir esse parâmetro sem que haja comprometimento no desempenho do sistema. Com a redução da f_s diminui-se proporcionalmente as perdas nas chaves semicondutoras, componentes magnéticos (HOLTZ, 1992), além de poderem ser usados controladores com menor poder de processamento.

De acordo com a Tabela 4, o sinal de referência empregado possui frequência $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s e uma amplitude de pico de $127\sqrt{2}$ V. Na solução do problema de otimização escolheu-se penalizar ambos estados e sinal de controle, empregando-se pesos diferentes em cada um dos três projetos, tal que o máximo sinal de controle \bar{u} em regime permanente fosse o mesmo entre os métodos e que este não violasse a máxima excursão dada por $\pm V_{cc}/2$. Além disso, o PDD também será comparado com o PE equivalente apresentado no Capítulo 2. Para a conversão do controlador obtido por meio do PE será utilizado o método de Tustin com *prewarping*, uma vez que esta aproximação é utilizada em (YEPES et al., 2011) e (PEREIRA et al., 2014).

5.3.1 Controlador com um modo ressonante

No primeiro exemplo de estudo foi utilizado o controlador com um modo ressonante, sintonizado na frequência do sinal de referência ω_r . A definição dos parâmetros σ (PE) e ρ (PDD), assim como os ganhos de realimentação obtidos solucionando os problemas de otimização (33) e (100) para os três casos abordados, são apresentados no Apêndice C. Deve-se observar que, no projeto contínuo, para fins de comparações justas com a metodologia do PDD, apenas a região R_{CR} foi considerada.

5.3.1.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

A Tabela 6 apresenta os resultados dos ensaios de desempenho estático obtidos nas simulações. As formas de onda da tensão e corrente de saída e os ganhos considerados na obtenção desses resultados podem ser encontrados no Apêndice C.

Tabela 6: Resultados de simulação com o controlador ressonante de um modo.

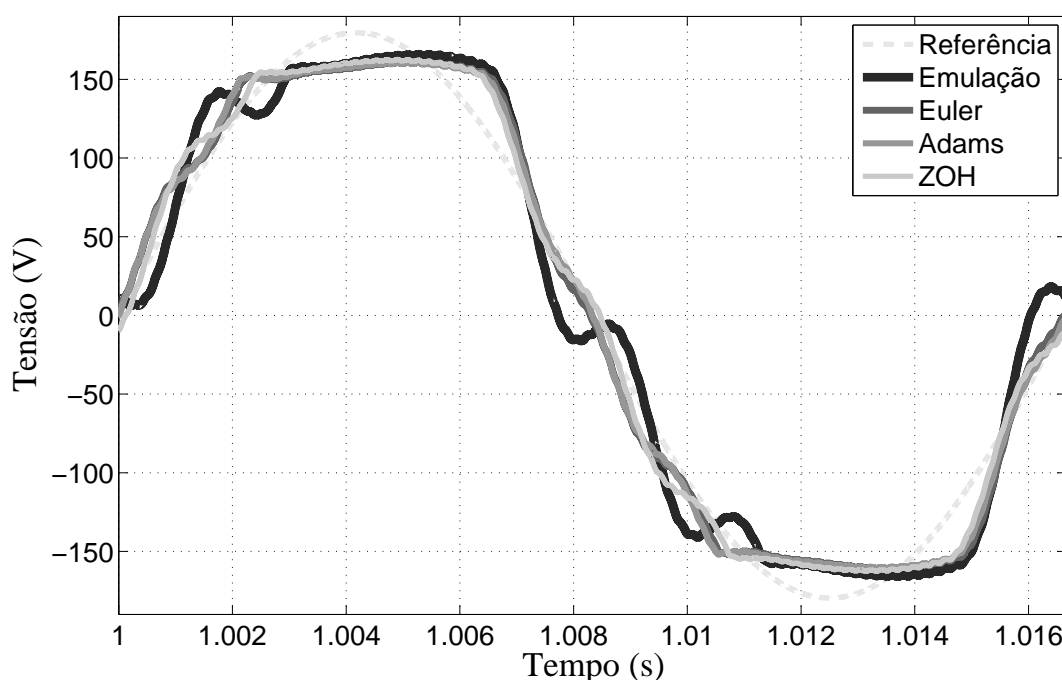
		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 21600$ Hz					
	V_{vaz} [V_{RMS}]	127,00	126,994	126,994	126,994	126,994
	VR_l [%]	$\pm 10,00$	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,433	-0,442	-0,430	-0,432
	THD [%]	8,00	9,309	9,415	9,280	9,302
	IHD_3 [%]	5,00	8,460	8,531	8,381	8,598
	IHD_5 [%]	6,00	3,444	3,531	3,539	3,157
	IHD_7 [%]	5,00	1,017	1,066	1,041	0,945
	IHD_9 [%]	1,50	1,245	1,268	1,274	1,115
	\bar{u} [V]	-	196,233	196,253	196,466	195,921
CASO 2	$f_s = 10800$ Hz					
	V_{vaz} [V_{RMS}]	127,00	126,974	126,974	126,974	126,974
	VR_l [%]	$\pm 10,00$	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,426	-0,450	-0,396	-0,429
	THD [%]	8,00	9,222	9,487	8,886	9,270
	IHD_3 [%]	5,00	8,405	8,800	7,568	8,546
	IHD_5 [%]	6,00	3,351	3,115	4,134	3,165
	IHD_7 [%]	5,00	0,886	0,943	1,043	0,873
	IHD_9 [%]	1,50	1,189	1,100	1,440	1,126
	\bar{u} [V]	-	209,327	209,603	209,515	209,092
CASO 3	$f_s = 5400$ Hz					
	V_{vaz} [V_{RMS}]	127,00	126,887	126,893	126,896	126,899
	VR_l [%]	$\pm 10,00$	-0,003	-0,003	-0,003	-0,002
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-1,545	-0,907	-0,811	-0,668
	THD [%]	8,00	17,656	13,495	12,689	11,608
	IHD_3 [%]	5,00	10,422	11,998	11,466	9,579
	IHD_5 [%]	6,00	7,066	4,021	3,350	3,131
	IHD_7 [%]	5,00	10,104	2,085	1,765	3,564
	IHD_9 [%]	1,50	6,949	2,725	2,504	4,068
	\bar{u} [V]	-	206,035	206,784	206,166	206,540

Verifica-se que, para as frequências de amostragem relativas aos casos 1 e 2 o desempenho do sistema é praticamente igual para os quatro projetos. Ambos controladores apresentam seguimento com erro nulo do sinal de referência para condição de operação a

vazio e com carga linear, como observa-se pelos valores de V_{vaz} e VR_l . No entanto, com a conexão da carga não-linear, as componentes de perturbação nas frequências harmônicas não são completamente rejeitadas, como pode ser verificado pelas formas de onda da corrente de saída encontradas no Apêndice C.

A maior discrepância dos resultados se dá no caso 3, onde o controlador digital obtido pelo PE resulta na maior THD em relação aos demais controladores. Entre eles, o PDD com o método ZOH foi o que apresentou a menor regulação de tensão ($VR_{nl} = -0.668\%$) e THD para carga não-linear ($THD = 11,608\%$). As formas de onda da tensão neste caso são apresentadas na Fig. 21. Pode-se verificar que nenhum dos controladores foi capaz de atender as exigências de desempenho estático estabelecidas pela *IEC 62040-3*.

Figura 21: Tensão de saída para carga não-linear de referência com um modo ressonante e $f_s=5400$ Hz.



5.3.1.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Os ensaios de desempenho dinâmico avaliam o desvio percentual transitório de tensão (V_{dev}) para a aplicação de degraus aditivos e subtrativos de carga. Nas Fig. 22-24 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios com degrau aditivo de carga linear (de 20% para 100% da carga) e não-linear (25% para 100%) para os três casos abordados. Já os ensaios complementares, com degrau subtrativo de carga, são ilustrados no Apêndice C.

Nos ensaios com degrau aditivo de carga linear as curvas $V_{dev}(t)$ levam tempos relativamente semelhantes para atingir 2% do seu valor de regime. Portanto, em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, pode-se dizer que os métodos de discretização são equivalentes. Já para o ensaio com degrau aditivo de carga não-linear, há uma oscilação de $V_{dev}(t)$ em regime permanente com todos controladores devido à não compensação das perturbações harmônicas geradas por esse tipo de carga. Em todos os casos, os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear não permaneceram dentro dos limites de transiente definidos pela *IEC 62040-3* para desempenho dinâmico.

Figura 22: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=21600$ Hz.

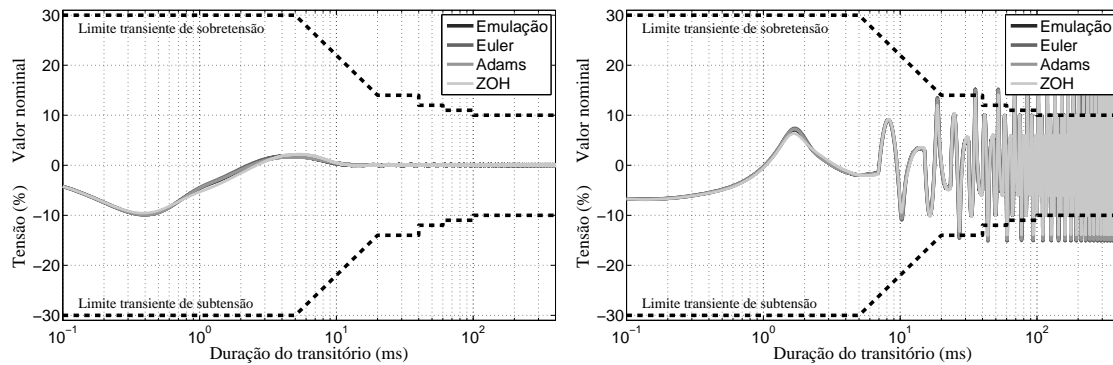


Figura 23: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=10800$ Hz.

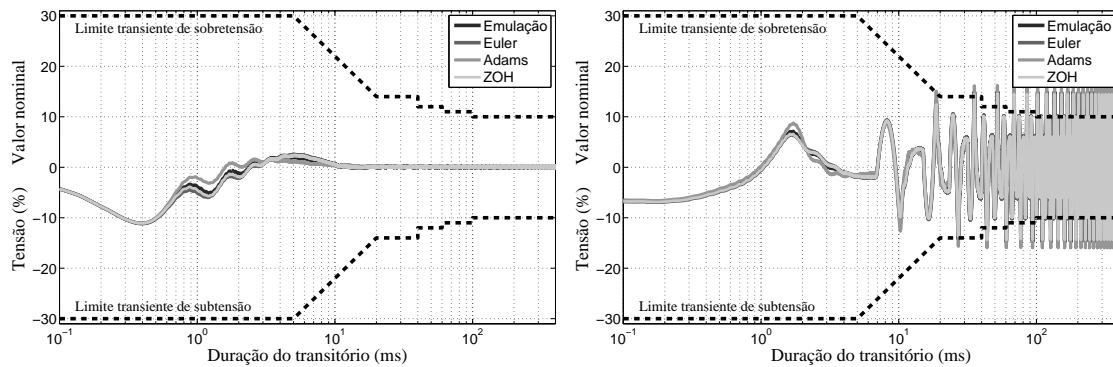
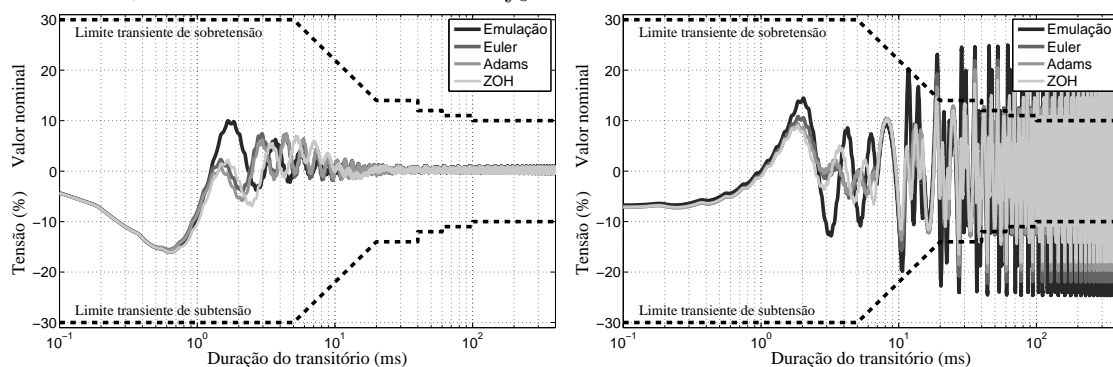


Figura 24: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=5400$ Hz.



5.3.2 Controlador com dois modos ressonantes

Os resultados seguintes foram obtidos com a simulação do sistema para um controlador com dois modos ressonantes, sintonizados na frequência do sinal de referência e na sua 3ª harmônica. A definição dos parâmetros σ e ρ , assim como os ganhos de realimentação obtidos solucionando os problemas de otimização (33) e (100) para os três casos abordados, são apresentados no Apêndice C.

5.3.2.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

Da mesma forma que realizado para o controlador com uma estrutura ressonante, os resultados das simulações dos ensaios de desempenho estático obtidos com os controladores de dois modos ressonantes são apresentados na Tabela 7, e seus resultados complementares no Apêndice C.

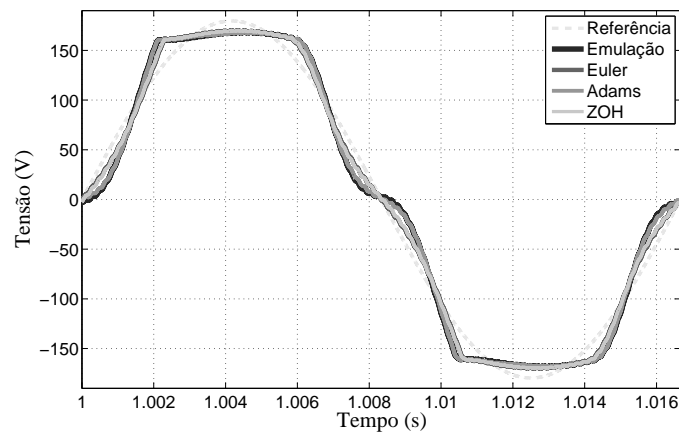
Tabela 7: Resultados de simulação com o controlador ressonante de dois modos.

		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 21600$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,175	-0,176	-0,181	-0,176
	THD [%]	8,00	5,907	5,922	6,013	5,919
	IHD ₃ [%]	5,00	0,001	0,001	0,002	0,001
	IHD ₅ [%]	6,00	5,406	5,406	5,088	5,387
	IHD ₇ [%]	5,00	1,379	1,445	2,144	1,445
	IHD ₉ [%]	1,50	1,491	1,493	1,497	1,512
	\bar{u} [V]	-	218,427	218,764	218,817	218,819
CASO 2	$f_s = 10800$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,171	-0,179	-0,177	-0,169
	THD [%]	8,00	5,794	5,928	5,899	5,760
	IHD ₃ [%]	5,00	0,004	0,004	0,005	0,004
	IHD ₅ [%]	6,00	5,256	5,465	5,029	5,224
	IHD ₇ [%]	5,00	1,335	1,224	2,011	1,314
	IHD ₉ [%]	1,50	1,334	1,386	1,491	1,314
	\bar{u} [V]	-	237,433	237,421	237,452	237,871
CASO 3	$f_s = 5400$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,852	-0,354	-0,367	-0,388
	THD [%]	8,00	13,033	8,395	8,586	8,821
	IHD ₃ [%]	5,00	0,017	0,018	0,019	0,021
	IHD ₅ [%]	6,00	11,749	7,991	8,168	8,379
	IHD ₇ [%]	5,00	5,383	1,369	1,520	1,690
	IHD ₉ [%]	1,50	0,808	1,879	1,862	1,874
	\bar{u} [V]	-	205,766	205,266	205,389	205,634

Verifica-se que, para os casos 1 e 2, o desempenho do sistema com PE e PDD é semelhante em termos de níveis de regulação de tensão e de distorção harmônica. Inclusive, estes foram capazes de atender as exigências de desempenho estático definidas pela norma IEC 62040-3. Já para o caso 3, assim como para o controlador com um modo ressonante, o PDD é sempre melhor que o PE. Além do mais, observa-se que o PDD com Euler resulta em uma THD menor do que com o ZOH, fato que também será verificado nos resultados para os próximos controladores, o que pode estar relacionado com o conservadorismo maior do problema de otimização devido a que, neste último, a incerteza estar propagada também na matriz B_{ad} .

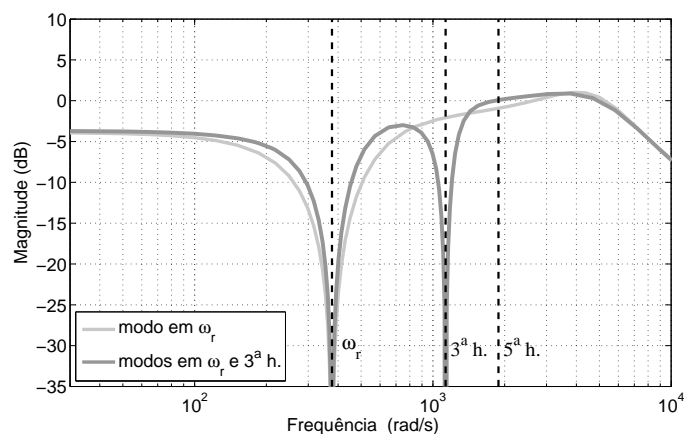
Ambos controladores apresentam seguimento com erro nulo do sinal de referência para condição de operação a vazio e com carga linear, além da diminuição da VR_{nl} em relação ao controlador de apenas um modo. As componentes de perturbação na 3ª harmônica da frequência do sinal de referência, resultantes da carga não-linear, são completamente rejeitadas devido ao ganho infinito nessa harmônica, como pode ser verificado pelos baixos valores de IHD_3 os quais não chegam a 0.03%. A Fig. 25 apresenta a forma de onda da tensão de saída para os controladores do caso 3.

Figura 25: Tensão de saída para carga não-linear de referência com dois modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



Em todos os casos verifica-se que, devido a eliminação da perturbação na 3ª harmônica, a 5ª harmônica aumenta significativamente em comparação com o controlador anterior, de um modo ressonante. Isso acontece porque a função de transferência $T_d(z)$ do sistema, de forma análoga à função sensibilidade¹, deve atender à relação dada pela integral de Bode (SERON; GOODWIN; BRASLAVSKY, 1997) na qual a redução da sua magnitude para uma faixa de frequências implica necessariamente no seu aumento em outra parte do espectro, resultando na amplificação de perturbações nessas frequências. A Fig. 26 compara os diagramas de Bode de magnitude de $T_d(z)$ obtidos com o uso dos controladores de um e dois modos ressonantes.

Figura 26: Magnitude de $T_d(z)$ para controladores com um e dois modos ressonantes.



¹A função de sensibilidade $S(z)$ é definida como a função de transferência da perturbação externa para a saída.

5.3.2.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Nas Fig. 27-29 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios de degraus aditivos de carga linear (20% para 100%) e não-linear (25% para 100%) para os três casos abordados. Os ensaios complementares, com degraus subtrativos de carga, são ilustrados no Apêndice C.

Em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, todos os métodos de discretização são equivalentes. Nos casos 1 e 2 os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear ficaram dentro dos limites de transiente definidos pela IEC 62040-3 para desempenho dinâmico. Já no caso 3, no entanto, verifica-se que nenhum projeto cumpriu as exigências da norma.

Figura 27: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz.

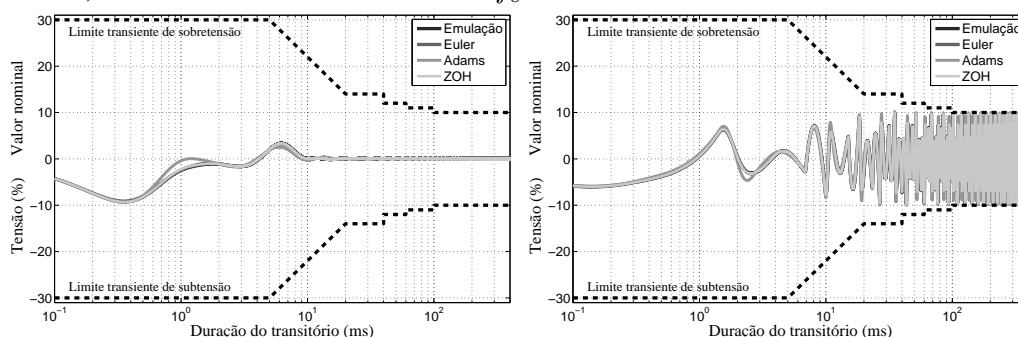


Figura 28: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz.

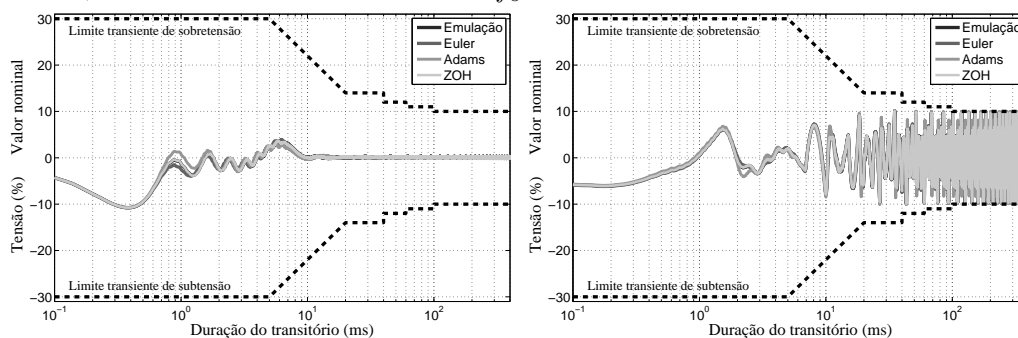
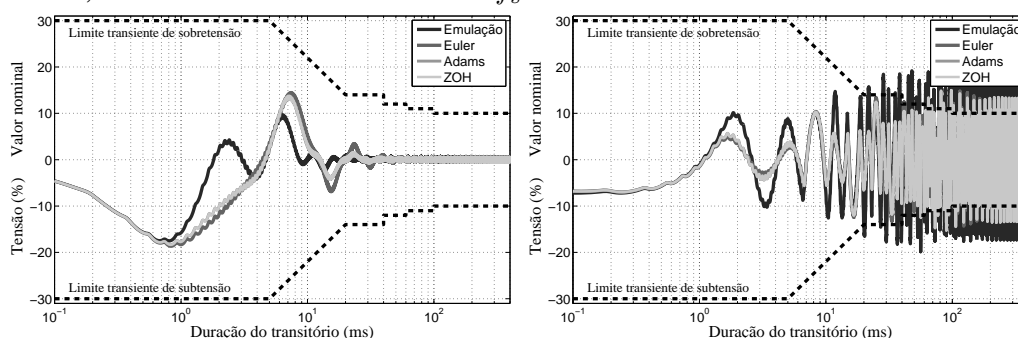


Figura 29: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



5.3.3 Controlador com três modos ressonantes

Os resultados seguintes foram obtidos com a simulação do sistema para um controlador com três modos ressonantes, sintonizados na frequência do sinal de referência e na sua 3ª e 5ª harmônicas. A definição dos parâmetros σ e ρ , assim como os ganhos de realimentação obtidos solucionando os problemas de otimização (33) e (100) para os três casos abordados, são apresentados no Apêndice C.

5.3.3.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

Da mesma forma, os resultados das simulações dos ensaios de desempenho estático obtidos com os controladores de três modos ressonantes são apresentados na Tabela 8, e seus resultados complementares no Apêndice C.

Tabela 8: Resultados de simulação com o controlador ressonante de três modos.

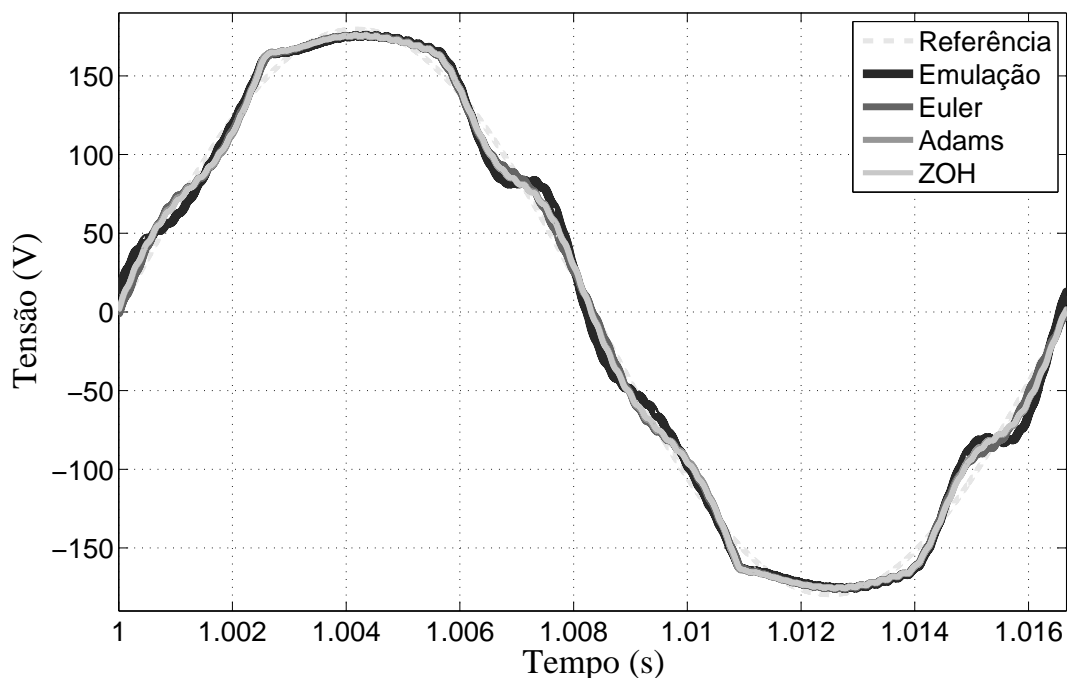
		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 21600$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,067	-0,067	-0,065	-0,067
	THD [%]	8,00	3,642	3,638	3,598	3,633
	IHD ₃ [%]	5,00	0,002	0,002	0,002	0,002
	IHD ₅ [%]	6,00	0,001	0,001	0,001	0,001
	IHD ₇ [%]	5,00	3,195	3,217	3,071	3,187
	IHD ₉ [%]	1,50	0,706	0,690	0,868	0,696
	\bar{u} [V]	-	242,713	242,241	242,490	242,697
CASO 2	$f_s = 10800$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,074	-0,075	-0,081	-0,075
	THD [%]	8,00	3,746	3,770	3,927	3,771
	IHD ₃ [%]	5,00	0,005	0,005	0,005	0,005
	IHD ₅ [%]	6,00	0,002	0,002	0,002	0,002
	IHD ₇ [%]	5,00	3,238	3,303	3,373	3,248
	IHD ₉ [%]	1,50	0,442	0,460	0,656	0,461
	\bar{u} [V]	-	259,054	259,497	259,771	259,023
CASO 3	$f_s = 5400$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,312	-0,128	-0,181	-0,158
	THD [%]	8,00	7,795	5,010	5,850	5,516
	IHD ₃ [%]	5,00	0,017	0,020	0,016	0,018
	IHD ₅ [%]	6,00	0,006	0,011	0,004	0,006
	IHD ₇ [%]	5,00	6,187	4,343	5,140	4,884
	IHD ₉ [%]	1,50	4,171	1,038	1,971	1,897
	\bar{u} [V]	-	239,082	239,889	239,640	239,693

Verifica-se que, para os casos 1 e 2, o desempenho do sistema com PE e PDD é bem parecido, com níveis de regulação de tensão e de distorção harmônica muito próximos.

Inclusive, estes foram capazes de atender as exigências de desempenho estático definidas pela norma *IEC 62040-3*. Já para o caso 3, assim como para os controladores com um e dois modos ressonantes, o PDD é sempre melhor que o PE. Nesta frequência de amostragem, o PE apresenta a *THD* mais elevada, porém não só ele como o PDD com Adams-Bashforth e *ZOH* ainda não atendem à norma *IEC 62040-3*, pois acabam violando o nível máximo admissível para a IHD_7 e IHD_9 .

Ambos controladores apresentam seguimento com erro nulo do sinal de referência para condição de operação a vazio e com carga linear, além da diminuição da VR_{nl} em relação ao controlador anterior. As componentes de perturbação na 3ª e 5ª harmônicas da frequência do sinal de referência são completamente rejeitadas devido aos ganhos infinitos nessas harmônicas. A Fig. 30 apresenta a deformação da tensão de saída para os controladores do caso 3.

Figura 30: Tensão de saída para carga não-linear de referência com três modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



5.3.3.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Nas Fig. 31-33 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios de degraus aditivos de carga linear e não-linear. Os ensaios complementares, com degraus de carga subtrativos, são ilustrados no Apêndice C.

Em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, todos os métodos de discretização são equivalentes. Da mesma forma que os resultados obtidos para dois modos ressonantes, nos casos 1 e 2 os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear ficaram dentro dos limites de transiente definidos pela *IEC 62040-3*. Para o caso 3 verifica-se que apenas o PE apresentou um resultado não satisfatório, violando os limites estabelecidos pela norma.

Figura 31: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz.

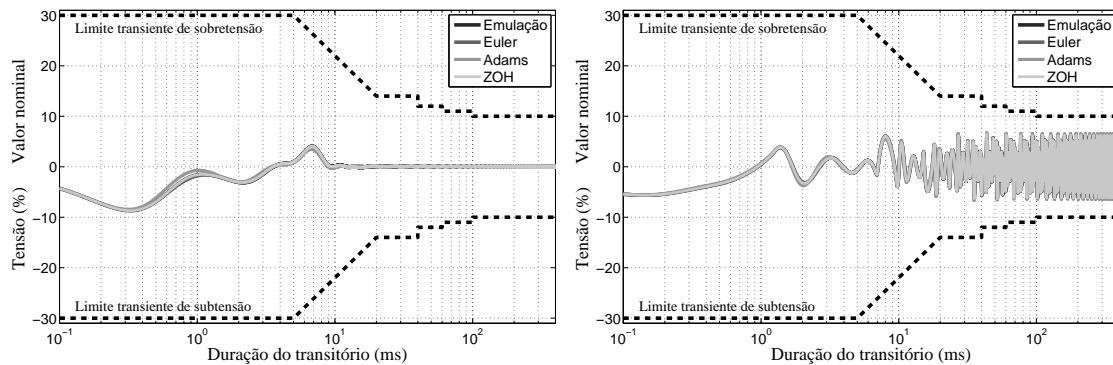


Figura 32: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz.

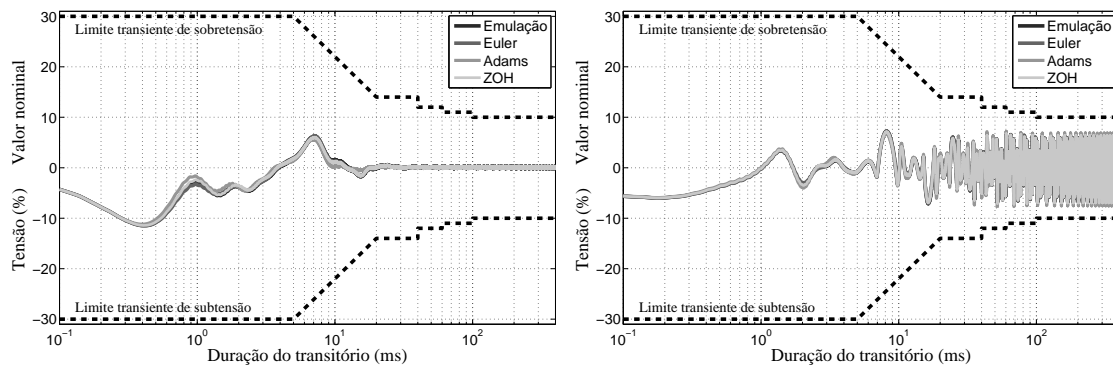
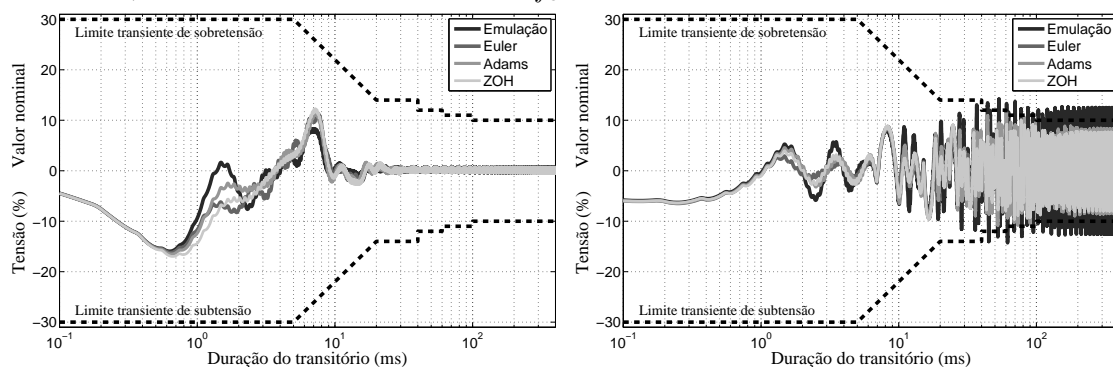


Figura 33: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



5.3.4 Controlador com três modos ressonantes (ganho finito)

Foram realizados novos projetos para o mesmo número de modos ressonantes, agora com o objetivo de minimizar o efeito da integral de Bode na função de transferência $T_d(z)$, observado na Subseção 5.3.2 e, com isso, atender aos níveis aceitáveis de distorção estabelecidos para as harmônicas mais elevadas. Os resultados seguintes foram obtidos com a simulação do sistema para um controlador com três modos ressonantes, sintonizados na frequência do sinal de referência e na sua 3ª e 5ª harmônicas, tal que possui ganho finito

nessas frequências harmônicas. A definição dos parâmetros σ e ρ , assim como os ganhos de realimentação obtidos solucionando os problemas de otimização (33) e (100) para os três casos abordados, são apresentados no Apêndice C.

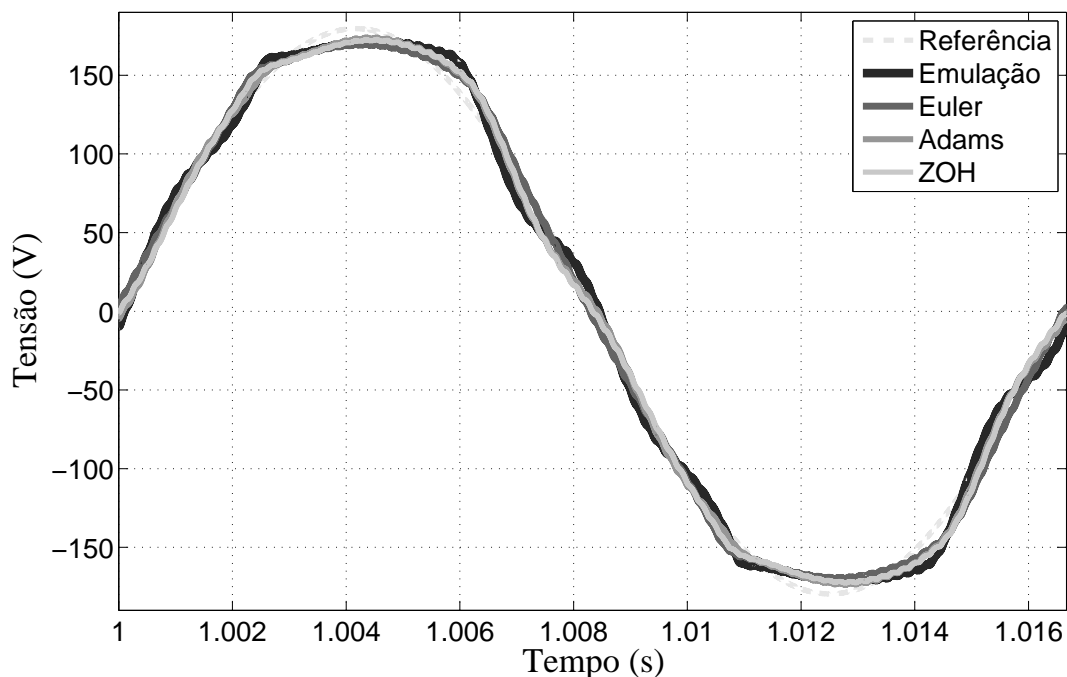
Tabela 9: Resultados de simulação com o controlador ressonante de três modos (ganho finito).

		<i>IEC 62040-3</i>	Emulação	Euler	Adams	<i>ZOH</i>
CASO 1	$f_s = 21600$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,059	-0,058	-0,058	-0,058
	<i>THD</i> [%]	8,00	3,414	3,390	3,390	3,392
	<i>IHD</i> ₃ [%]	5,00	0,478	0,470	0,348	0,461
	<i>IHD</i> ₅ [%]	6,00	0,535	0,533	0,388	0,519
	<i>IHD</i> ₇ [%]	5,00	2,903	2,901	2,834	2,885
	<i>IHD</i> ₉ [%]	1,50	0,669	0,661	0,731	0,656
\bar{u} [V]	-		237,885	237,783	237,343	237,379
CASO 2	$f_s = 10800$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,060	-0,060	-0,065	-0,060
	<i>THD</i> [%]	8,00	3,414	3,411	3,555	3,408
	<i>IHD</i> ₃ [%]	5,00	1,054	1,050	0,780	0,999
	<i>IHD</i> ₅ [%]	6,00	1,233	1,276	0,918	1,187
	<i>IHD</i> ₇ [%]	5,00	2,437	2,443	2,722	2,469
	<i>IHD</i> ₉ [%]	1,50	0,665	0,701	0,627	0,648
\bar{u} [V]	-		248,354	248,516	248,960	248,399
CASO 3	$f_s = 5400$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,216	-0,141	-0,136	-0,163
	<i>THD</i> [%]	8,00	6,526	5,281	5,166	5,630
	<i>IHD</i> ₃ [%]	5,00	2,165	4,053	2,330	2,675
	<i>IHD</i> ₅ [%]	6,00	3,635	3,039	3,812	4,457
	<i>IHD</i> ₇ [%]	5,00	3,789	0,676	2,122	1,700
	<i>IHD</i> ₉ [%]	1,50	3,033	1,103	1,361	1,173
\bar{u} [V]	-		208,419	208,422	208,424	208,452

Verifica-se que, para os casos 1 e 2, o desempenho do sistema com PE e PDD é bem parecido, com níveis de regulação de tensão e de distorção harmônica muito próximos. Inclusive, estes foram capazes de atender as exigências de desempenho estático definidas pela norma *IEC 62040-3*. Já para o caso 3, assim como para os controladores com um e dois modos ressonantes, o PDD é sempre melhor que o PE. Nesta frequência de amostragem, apenas o PE ainda não atende à norma *IEC 62040-3*, pois viola o nível máximo admissível para a *IHD*₉.

Ambos controladores apresentam seguimento com erro nulo do sinal de referência para condição de operação a vazio e com carga linear, além da diminuição da VR_{nl} em relação ao controlador anterior. As componentes de perturbação na 3ª e 5ª harmônicas da frequência do sinal de referência agora são parcialmente rejeitadas devido a modos ressonantes com ganhos finitos nessas harmônicas. A Fig. 34 apresenta a deformação da tensão de saída para os controladores do caso 3.

Figura 34: Tensão de saída para carga não-linear de referência com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.



5.3.4.1 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Nas Fig. 31-33 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios de degraus aditivos de carga linear e não-linear. Os ensaios complementares, com degraus de carga subtrativos, são ilustrados no Apêndice C.

Em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, todos os métodos de discretização são equivalentes. Da mesma forma que os resultados obtidos para dois modos ressonantes, nos casos 1 e 2 os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear ficaram dentro dos limites de transiente definidos pela IEC 62040-3. Para o caso 3 verifica-se que apenas o PE apresentou um resultado não satisfatório, violando os limites estabelecidos pela norma.

Figura 35: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=21600$ Hz.

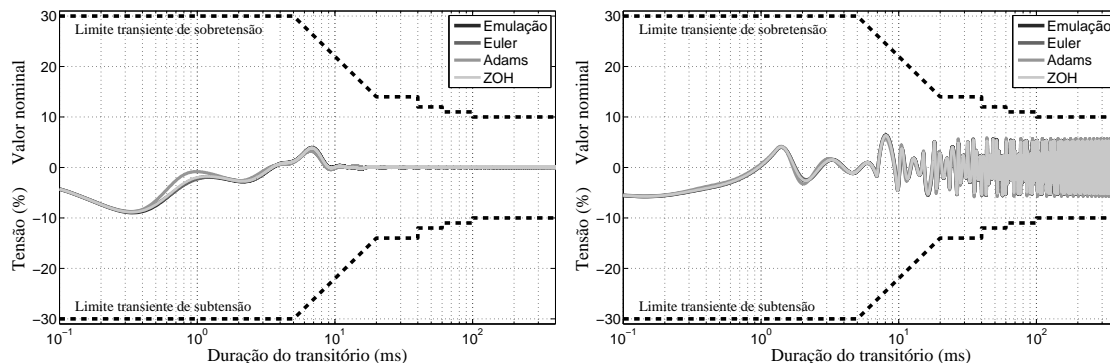


Figura 36: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=10800$ Hz.

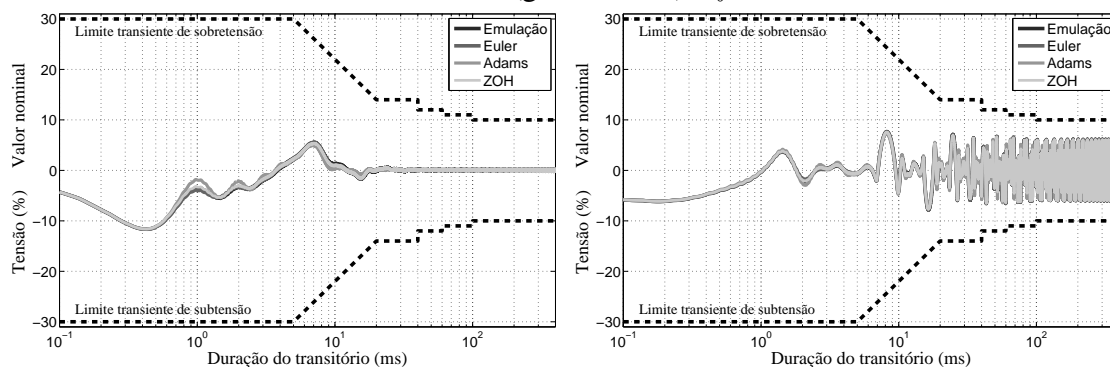
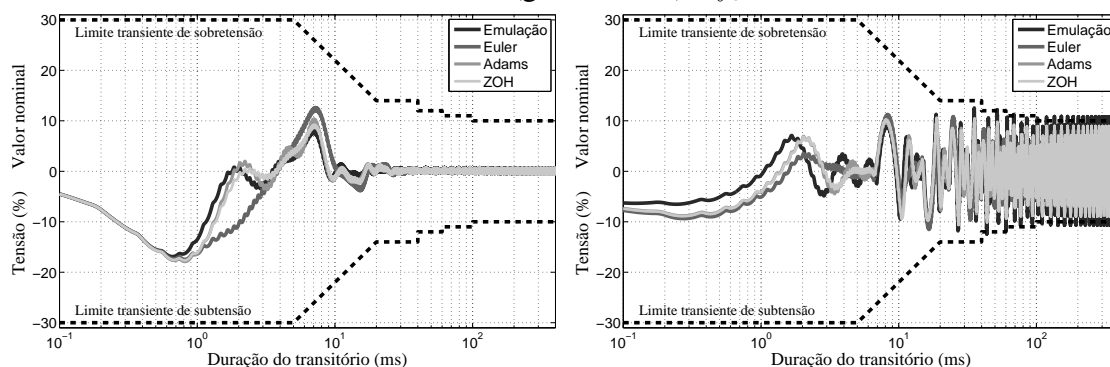


Figura 37: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.



5.3.5 Controlador com quatro modos ressonantes

Os resultados seguintes foram obtidos com a simulação do sistema para um controlador com quatro modos ressonantes, sintonizados na frequência do sinal de referência e na sua 3^a, 5^a e 7^a harmônicas. A definição dos parâmetros σ e ρ , assim como os ganhos de realimentação obtidos solucionando os problemas de otimização (33) e (100) para os três casos abordados, são apresentados no Apêndice C.

5.3.5.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

Da mesma forma, os resultados das simulações dos ensaios de desempenho estático obtidos com os controladores de quatro modos ressonantes são apresentados na Tabela 10, e seus resultados complementares no Apêndice C.

Tabela 10: Resultados de simulação com o controlador ressonante de quatro modos.

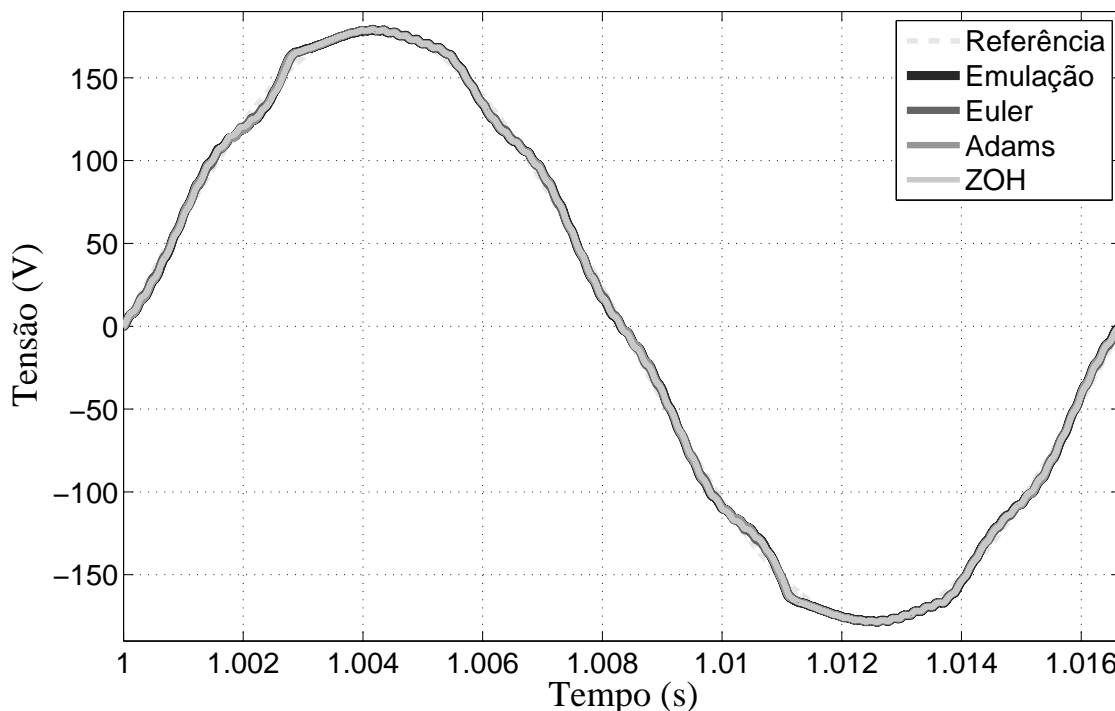
		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 21600$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,041	-0,040	-0,042	-0,043
	THD [%]	8,00	2,856	2,801	2,863	2,903
	IHD_3 [%]	5,00	0,002	0,002	0,002	0,002
	IHD_5 [%]	6,00	0,001	0,001	0,001	0,001
	IHD_7 [%]	5,00	0,000	0,000	0,000	0,000
	IHD_9 [%]	1,50	2,268	2,231	2,273	2,307
	\bar{u} [V]	-	259,659	259,399	260,017	259,119
CASO 2	$f_s = 10800$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,069	-0,058	-0,067	-0,070
	THD [%]	8,00	3,630	3,313	3,588	3,674
	IHD_3 [%]	5,00	0,005	0,005	0,005	0,005
	IHD_5 [%]	6,00	0,002	0,002	0,002	0,002
	IHD_7 [%]	5,00	0,001	0,001	0,001	0,001
	IHD_9 [%]	1,50	2,839	2,621	2,804	2,872
	\bar{u} [V]	-	259,917	259,933	259,334	259,685
CASO 3	$f_s = 5400$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,052	-0,025	-0,060	-0,042
	THD [%]	8,00	3,077	2,308	3,247	2,798
	IHD_3 [%]	5,00	0,020	0,031	0,019	0,022
	IHD_5 [%]	6,00	0,008	0,023	0,007	0,014
	IHD_7 [%]	5,00	0,007	0,012	0,005	0,008
	IHD_9 [%]	1,50	2,464	1,856	2,578	2,264
	\bar{u} [V]	-	251,729	251,649	251,697	251,279

Verifica-se que, para os três casos, o desempenho do sistema com PE e PDD é bem parecido, com níveis de regulação de tensão e de distorção harmônica muito próximos. Deve-se observar que todos casos violam o nível máximo admissível para a IHD_9 , não sendo capazes de atender as exigências de desempenho estático definidas pela norma IEC 62040-3.

Ambos controladores apresentam seguimento com erro nulo do sinal de referência para condição de operação a vazio e com carga linear, além da diminuição da VR_{nl} em

relação ao controlador anterior. As componentes de perturbação na 3^a, 5^a e 7^a harmônicas da frequência do sinal de referência são completamente rejeitadas devido a sintonia de modos adicionais nessas harmônicas. A Fig. 38 apresenta a deformação da tensão de saída para os controladores do caso 3.

Figura 38: Tensão de saída para carga não-linear de referência com quatro modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



5.3.5.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Na Fig. 39 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios de degraus aditivos de carga linear e não-linear. Os ensaios complementares, com degraus de carga subtrativos, são ilustrados no Apêndice C.

Em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, todos os métodos de discretização são equivalentes. Da mesma forma que os resultados obtidos para dois e três modos ressonantes, nos casos 1 e 2 os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear ficaram dentro dos limites de transiente definidos pela IEC 62040-3. Para o caso 3 verifica-se que apenas o PDD com Adams-Bashforth apresentou um resultado não satisfatório, violando os limites estabelecidos pela norma.

Figura 39: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz.

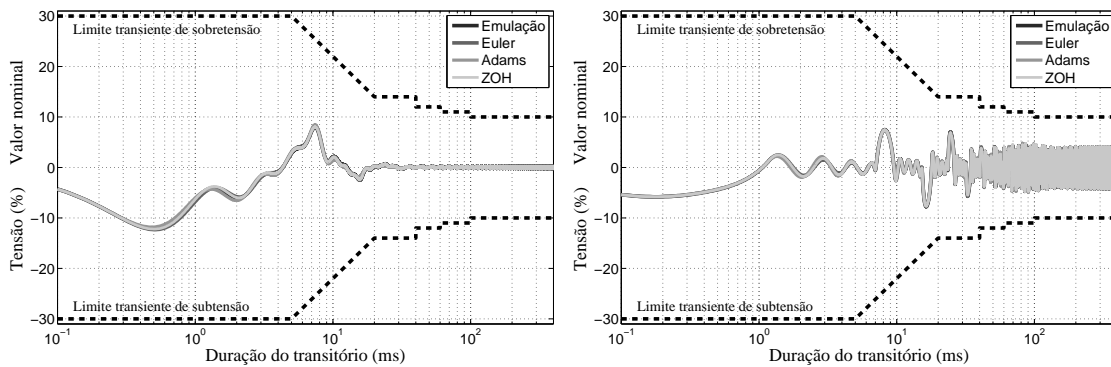


Figura 40: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz.

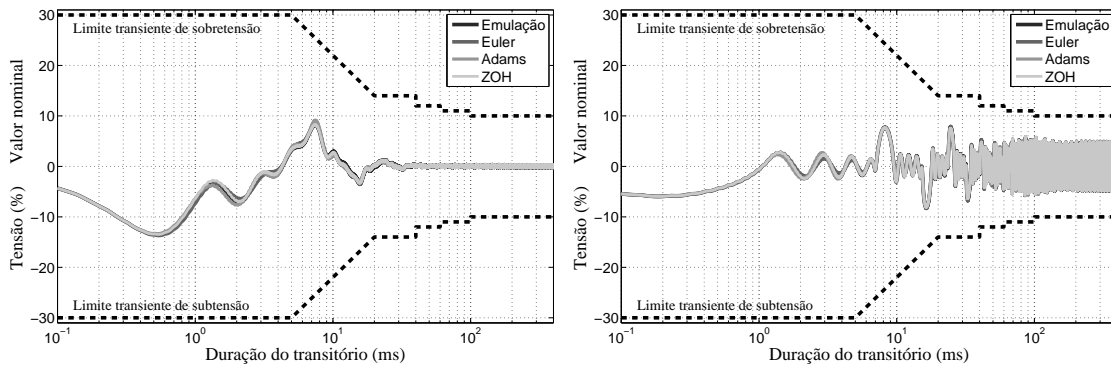
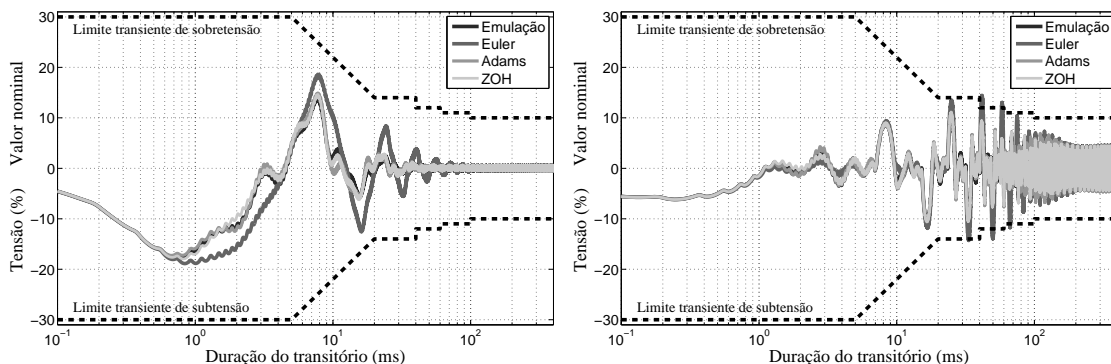


Figura 41: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



5.3.6 Controlador com quatro modos ressonantes (ganho finito)

Os resultados seguintes foram obtidos com a simulação do sistema para um controlador com quatro modos ressonantes, sintonizados na frequência do sinal de referência e na sua 3^a, 5^a e 7^a harmônicas, tal que possui ganho finito nessas frequências harmônicas. A definição dos parâmetros σ e ρ , assim como os ganhos de realimentação obtidos solucionando os problemas de otimização (33) e (100) para os três casos abordados, são apresentados no Apêndice C.

5.3.6.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

Da mesma forma, os resultados das simulações dos ensaios de desempenho estático obtidos com os controladores de quatro modos ressonantes com ganho finito são apresentados na Tabela 11, e seus resultados complementares no Apêndice C.

Tabela 11: Resultados de simulação com o controlador ressonante de quatro modos (ganho finito).

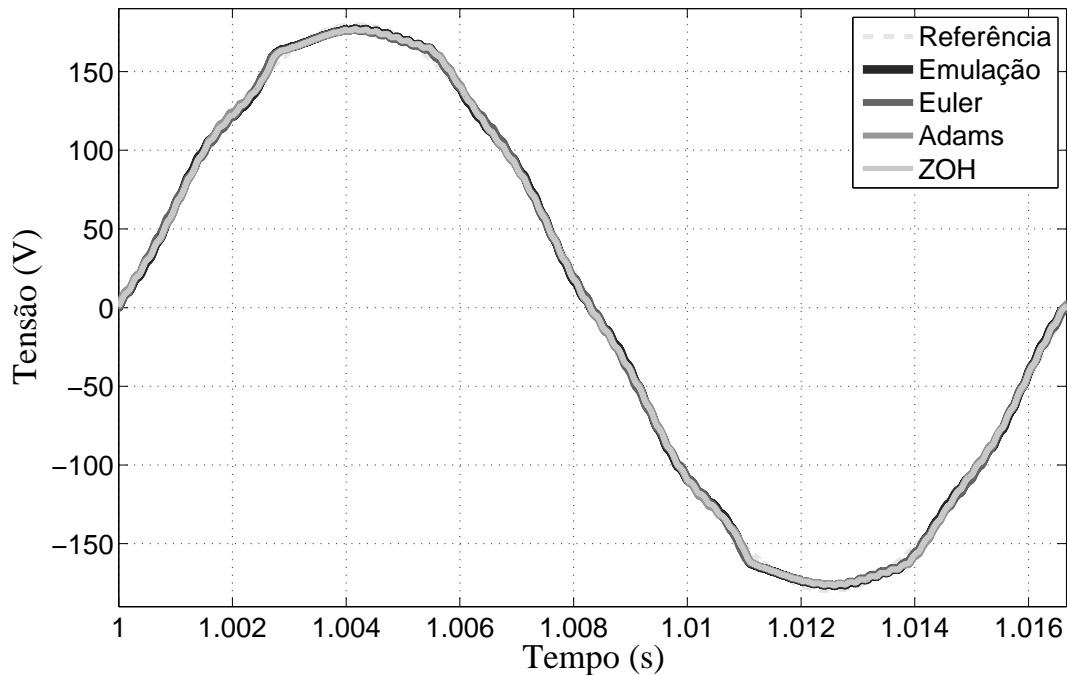
		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 21600$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,030	-0,029	-0,031	-0,030
	THD [%]	8,00	2,420	2,373	2,459	2,438
	IHD_3 [%]	5,00	0,494	0,507	0,458	0,500
	IHD_5 [%]	6,00	0,663	0,702	0,577	0,682
	IHD_7 [%]	5,00	0,500	0,591	0,390	0,540
	IHD_9 [%]	1,50	1,473	1,392	1,597	1,474
	\bar{u} [V]	-	253,091	252,519	252,046	252,672
CASO 2	$f_s = 10800$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,046	-0,044	-0,055	-0,047
	THD [%]	8,00	2,980	2,896	3,258	3,002
	IHD_3 [%]	5,00	0,917	0,787	1,103	0,805
	IHD_5 [%]	6,00	1,288	1,162	1,480	1,124
	IHD_7 [%]	5,00	1,013	1,197	1,152	0,958
	IHD_9 [%]	1,50	1,335	1,361	1,334	1,499
	\bar{u} [V]	-	248,113	248,105	248,015	248,834
CASO 3	$f_s = 5400$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,043	-0,036	-0,036	-0,036
	THD [%]	8,00	2,469	2,007	2,522	2,277
	IHD_3 [%]	5,00	0,571	0,426	0,859	0,619
	IHD_5 [%]	6,00	1,004	0,595	1,427	1,177
	IHD_7 [%]	5,00	0,150	0,138	0,168	0,179
	IHD_9 [%]	1,50	1,478	1,325	1,279	1,190
	\bar{u} [V]	-	246,246	246,582	246,074	246,489

Verifica-se que, para os três casos, o desempenho do sistema com PE e PDD é bem parecido, com níveis de regulação de tensão e de distorção harmônica muito próximos. Inclusive, todos foram capazes de atender as exigências de desempenho estático definidas pela norma IEC 62040-3. No entanto, deve-se lembrar que foi necessário utilizar um controlador múltiplo ressonante com ganhos finitos nas frequências harmônicas ímpares para que se conseguisse atender ao nível máximo admissível para a IHD_9 .

Ambos controladores apresentam seguimento com erro nulo do sinal de referência para condição de operação a vazio e com carga linear, além da diminuição da VR_{nl} em

relação ao controlador anterior. As componentes de perturbação na 3ª, 5ª e 7ª harmônicas da frequência do sinal de referência agora são apenas parcialmente rejeitadas devido a sintonia de modos adicionais com ganho finito nessas harmônicas. A Fig. 42 apresenta a deformação da tensão de saída para os controladores do caso 3.

Figura 42: Tensão de saída para carga não-linear de referência com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.



5.3.6.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Na Fig. 43 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios de degraus aditivos de carga linear e não-linear. Os ensaios complementares, com degraus de carga subtrativos, são ilustrados no Apêndice C.

Em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, todos os métodos de discretização são equivalentes. Da mesma forma que os resultados obtidos para dois e três modos ressonantes, nos casos 1 e 2 os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear ficaram dentro dos limites de transiente definidos pela IEC 62040-3. Para o caso 3 verifica-se que apenas o PDD com Adams-Bashforth apresentou um resultado não satisfatório, violando os limites estabelecidos pela norma.

Figura 43: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=21600$ Hz.

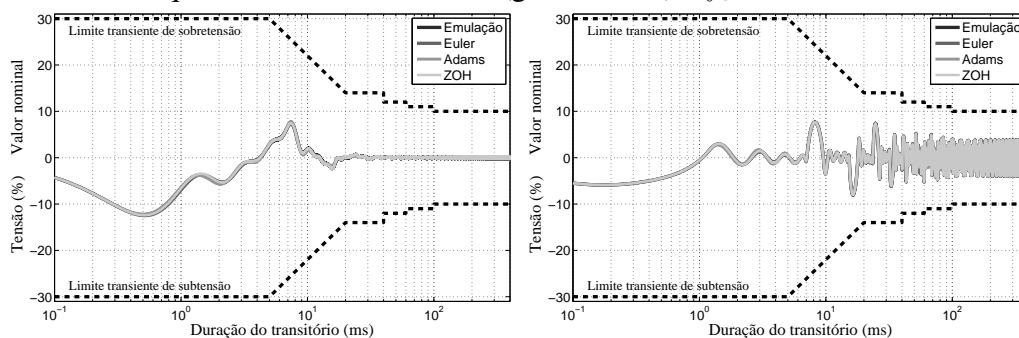


Figura 44: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=10800$ Hz.

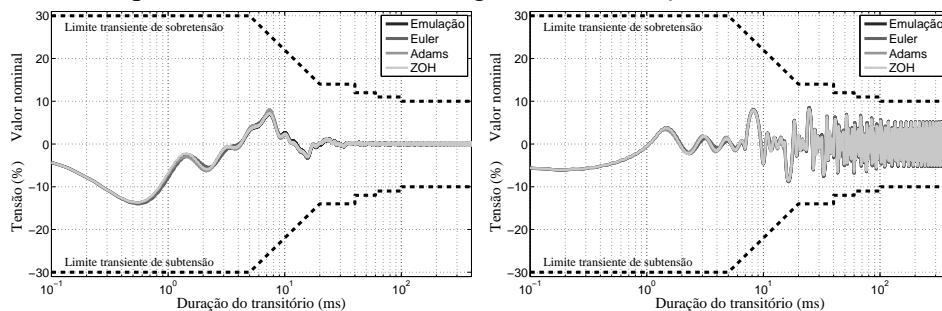
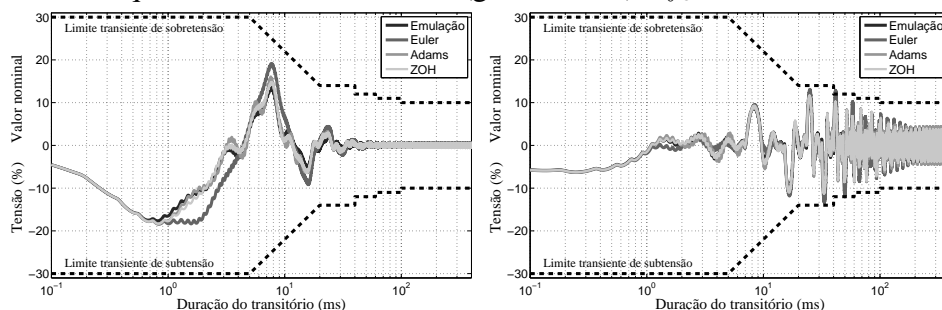
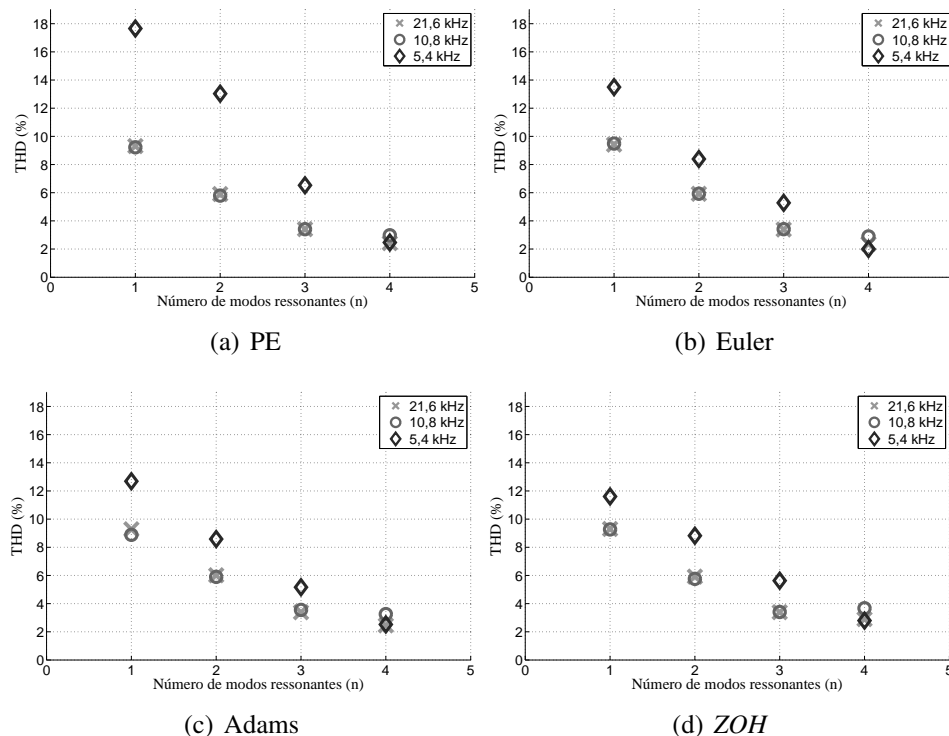


Figura 45: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.



A partir dos resultados obtidos até então, relativos às distorções harmônicas da tensão de saída, pode-se ilustrar na Fig. 46 a relação da *THD* com o aumento do número de modos ressonantes e da frequência de amostragem utilizada.

Figura 46: Comparativo da *THD* com o aumento do número de modos ressonantes.



5.4 Resultados experimentais

A metodologia de projeto proposta neste trabalho foi validada através de resultados experimentais obtidos com a implementação do controlador ressonante de um até quatro modos em uma *UPS* monofásica com potência nominal de 3,5 kVA, instalada no Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica (LASCAR) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Nesta implementação prática foram levadas em consideração apenas as menores frequências de amostragem, em 10,8 e 5,4 kHz, uma vez que 21,6 e 10,8 kHz apresentam resultados semelhantes. Foram realizados, novamente, os mesmos ensaios de desempenho estático e dinâmicos definidos anteriormente para a avaliação dos resultados de simulações.

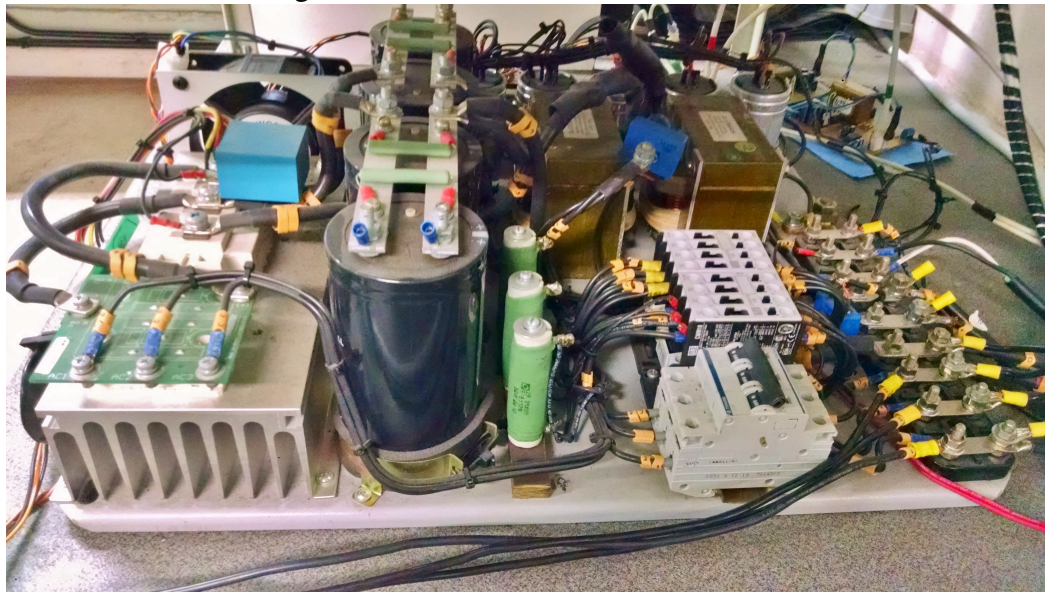
A aquisição de dados e transmissão do sinal *PWM* no conversor foram realizados por meio de uma placa *dSPACE* (DS1104 *R&D Controller Board*), apresentada na Figura 47. Possui canais *ADC* com resolução de 12 Bits e taxa de aquisição limite de 22000 amostras/seg através dos quais são obtidas as amostras dos sinais de tensão no capacitor e corrente no indutor do filtro *LC*, e corrente de saída. O processamento de dados é realizado em tempo real, com uma frequência de 10 MHz, em conjunto com o *software* Matlab. O algoritmo de controle é executado em tempo real pelo *hardware* através do *software* de interface *Control Desk*.

Figura 47: Placa de aquisição e transmissão de dados *dSPACE*® DS1104.



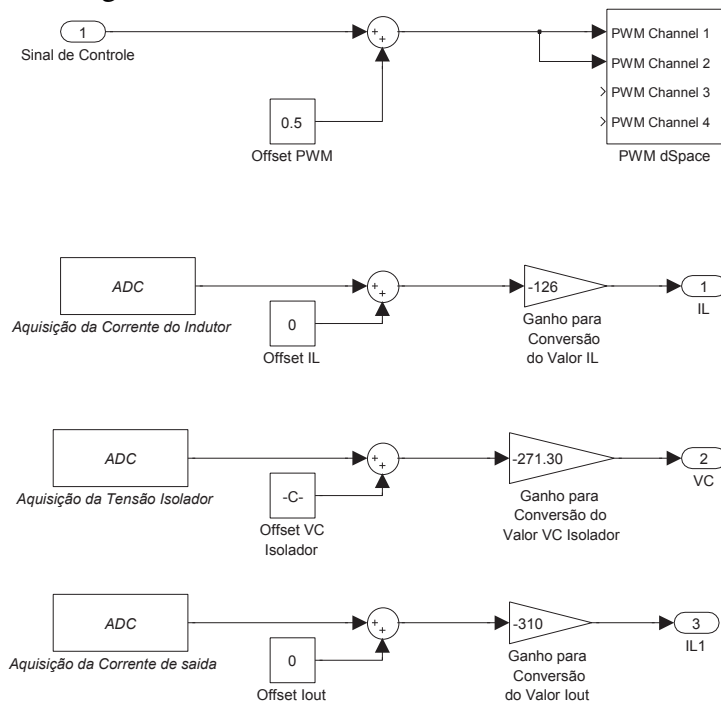
A *UPS* utilizada nos experimentos é constituída por um retificador trifásico, responsável por alimentar o barramento CC, composto de 6 capacitores eletrolíticos totalizando duas capacitâncias de 6600 μF cada; e o inversor de tensão de 3,5 kVA (Fig. 48), composto por dois *IGBTs* na configuração de meia-ponte e um filtro *LC*. Os *IGBTs* são chaveados pelo sinal *PWM* proveniente da *dSPACE*, pelo intermédio de *drivers* de acionamento. O filtro de saída é composto por um indutor de 1 mH e uma capacitância de 300 μF .

Figura 48: Inversor de tensão de 3,5 kVA.



Mantêm-se o diagrama de blocos do sistema em malha fechada utilizado na simulação (*dSPACE* Fig. 20) agora substituindo o modelo do inversor pelas conexões dos seus sinais de entrada e da leitura de seus estados e da corrente de saída. A Fig. 49 mostra o interior do bloco de comando e aquisição de dados do sistema inversor.

Figura 49: Diagrama de blocos com as entradas e as saídas do inversor.



Na sequência são apresentados os resultados dos ensaios de desempenho estático e dinâmico com o uso de controladores ressonantes no inversor experimental. Para a medição dos resultados de desempenho estático foram utilizados os seguintes equipamentos: um multímetro Fluke 179 *True RMS*; um osciloscópio *Tektronics TDS 2014*; uma ponteira medição de corrente Fluke 80i-110s e um analisador de qualidade de energia Fluke 43B.

Para a apresentação dos resultados de desempenho dinâmico avaliou-se os próprios dados adquiridos com a placa *dSPACE*, com o auxílio do *software* Matlab.

5.4.1 Controlador com um modo ressonante

5.4.1.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

A Tabela 12 apresenta os resultados dos ensaios de desempenho estático obtidos experimentalmente, para os dois casos abordados. Novamente, os ganhos utilizados e as formas de onda adicionais podem ser encontrados no Apêndice C.

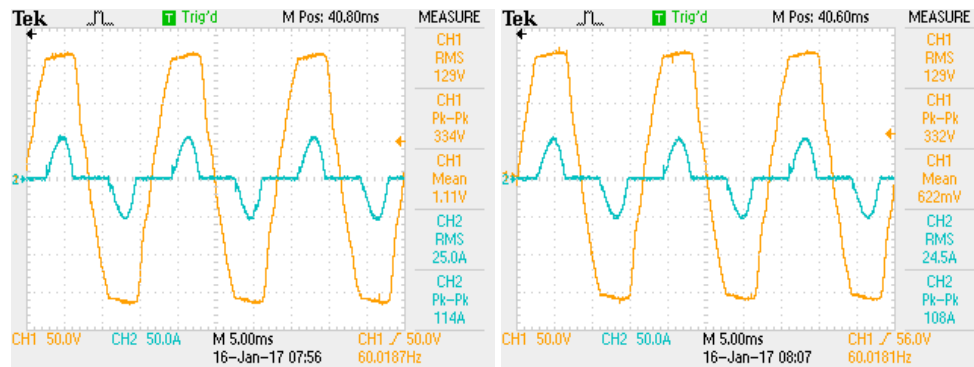
Tabela 12: Resultados experimentais com o controlador ressonante de um modo.

		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 10800$ Hz					
	V_{vaz} [V _{RMS}]	127,00	127,00	127,00	127,00	127,00
	VR_l [%]	± 10,00	0,16	0,07	0,24	0,16
	VR_{nl} [%]	± 10,00	-0,47	-0,47	-0,39	-0,47
	THD [%]	8,00	10,80	10,90	10,80	10,80
	IHD_3 [%]	5,00	9,20	9,80	8,90	9,60
	IHD_5 [%]	6,00	4,80	4,20	5,30	4,30
	IHD_7 [%]	5,00	1,60	1,40	1,90	1,30
	IHD_9 [%]	1,50	2,10	1,80	2,30	1,80
	\bar{u} [V]	-	209,59	209,29	209,50	210,19
CASO 2	$f_s = 5400$ Hz					
	V_{vaz} [V _{RMS}]	127,00	127,00	127,00	127,00	127,00
	VR_l [%]	± 10,00	0,24	0,16	0,16	0,16
	VR_{nl} [%]	± 10,00	-1,90	-1,20	-0,94	-0,63
	THD [%]	8,00	20,40	15,80	14,30	13,20
	IHD_3 [%]	5,00	8,50	14,10	13,00	11,10
	IHD_5 [%]	6,00	14,70	5,70	4,30	4,70
	IHD_7 [%]	5,00	11,20	4,40	3,60	5,00
	IHD_9 [%]	1,50	3,30	2,10	2,20	2,50
	\bar{u} [V]	-	194,19	193,96	193,45	194,29

Verifica-se que esses resultados seguem um comportamento parecido com os de simulação, com taxas de distorções, em geral, 1,6% maiores. Ambos controladores apresentam seguimento com erro nulo do sinal de referência para condição de operação a vazio e com carga linear, como observa-se pelos valores de V_{vaz} e VR_l . No entanto, nenhum dos controladores é capaz de rejeitar distúrbios gerados pela conexão de cargas não-lineares, o que resulta em $THDs$ acima dos níveis aceitáveis pela norma.

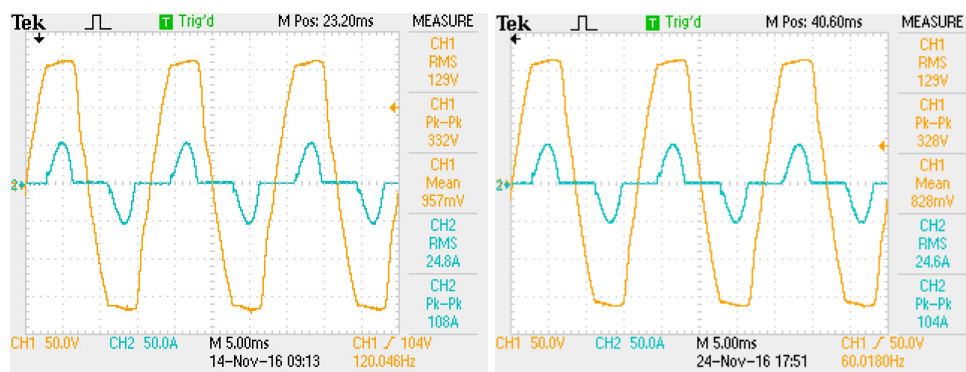
As Figuras 50 e 51 apresentam os registros das formas de onda da tensão e corrente de saída, e a respectiva análise de distorção harmônica da tensão obtidas com o controlador de um modo ressonante para o primeiro caso. As Figuras 52 e 53 exibem os registros para o segundo caso.

Figura 50: Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de um modo ressonante e $f_s = 10800$ Hz.



(a) PE

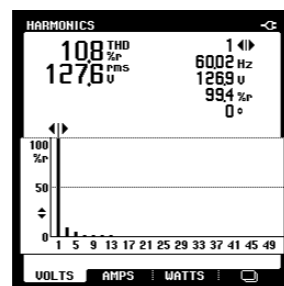
(b) Euler



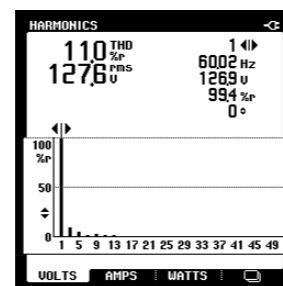
(c) Adams

(d) ZOH

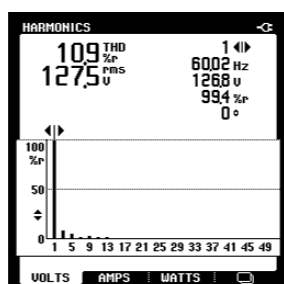
Figura 51: THD da tensão de saída e tensão RMS obtidos com controlador de um modo ressonante e $f_s = 10800$ Hz.



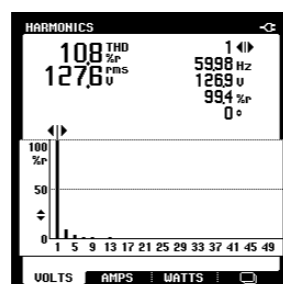
(a) PE



(b) Euler

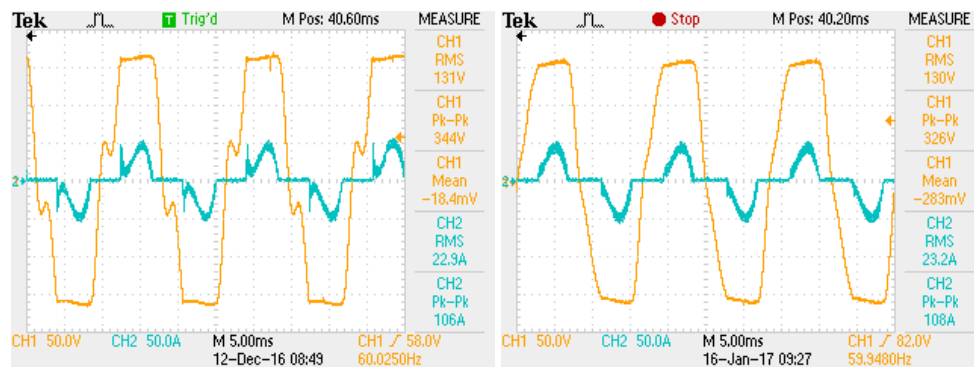


(c) Adams



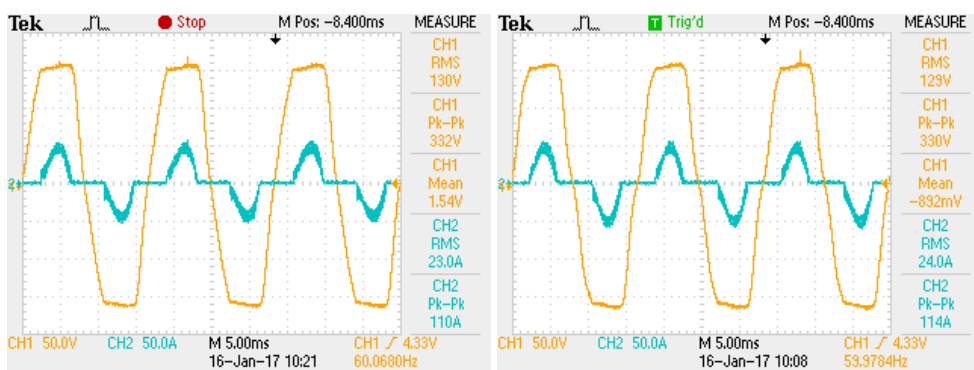
(d) ZOH

Figura 52: Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de um modo ressonante e $f_s = 5400$ Hz.



(a) PE

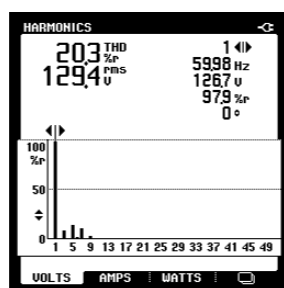
(b) Euler



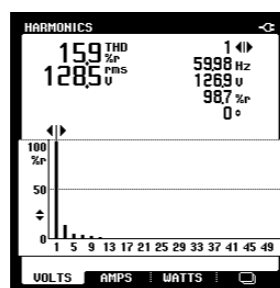
(c) Adams

(d) ZOH

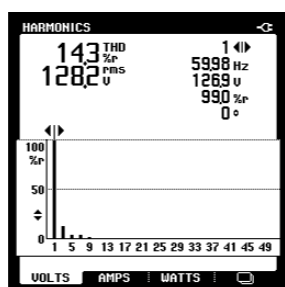
Figura 53: THD da tensão de saída e tensão RMS obtidos com controlador de um modo ressonante e $f_s = 5400$ Hz.



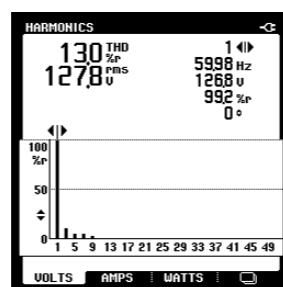
(a) PE



(b) Euler



(c) Adams



(d) ZOH

5.4.1.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Nas Fig. 54-55 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios com degraus aditivos de carga linear (20% para 100%) e não-linear (25% para 100%) para os três casos abordados.

Nos ensaios com degrau aditivo de carga linear as curvas $V_{dev}(t)$ levam tempos relativamente semelhantes para atingir o seu valor de regime. Portanto, em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, pode-se dizer que os métodos de discretização são equivalentes. Já para o ensaio com degrau aditivo de carga não-linear, há uma oscilação de $V_{dev}(t)$ em regime permanente com todos controladores devido à não compensação das harmônicas de perturbação geradas por esse tipo de carga. Em todos os casos os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear não permaneceram dentro dos limites de transiente definidos pela IEC 62040-3. Embora no caso 2, deve-se observar que, o projeto por emulação apresentou o pior resultado entre os controladores.

Figura 54: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s = 10800$ Hz.

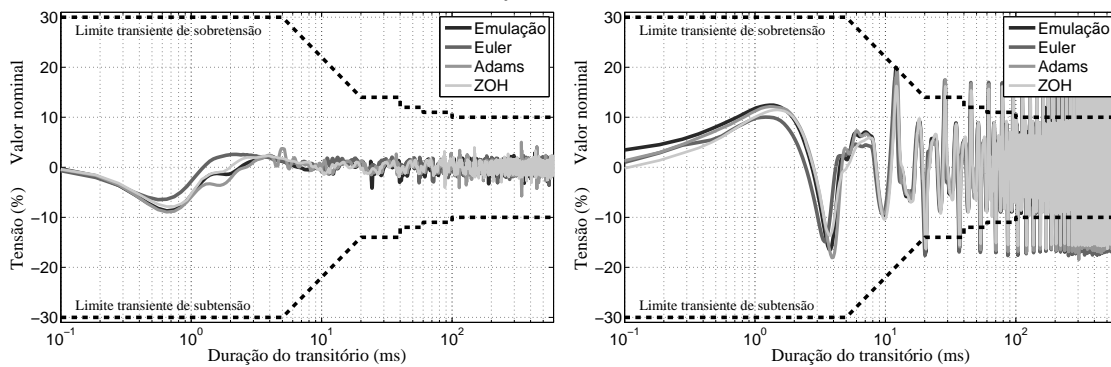
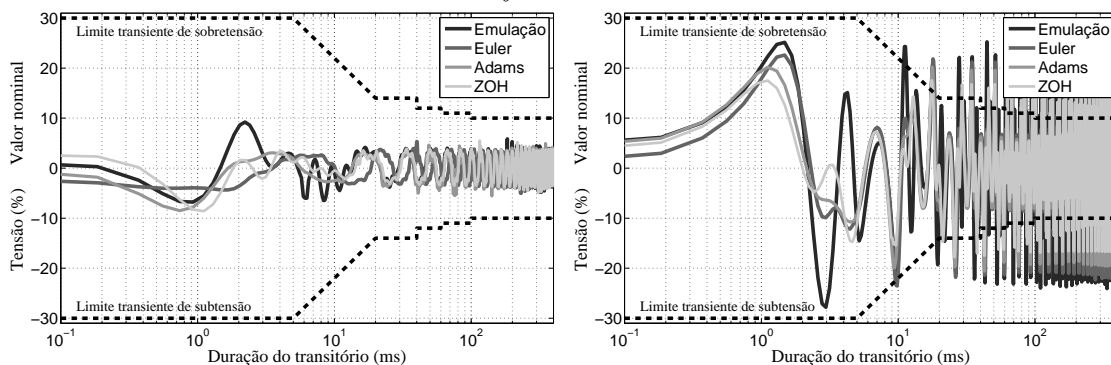


Figura 55: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s = 5400$ Hz.



5.4.2 Controlador com dois modos ressonantes

5.4.2.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

A Tabela 13 apresenta os resultados dos ensaios de desempenho estático obtidos experimentalmente. Mais detalhes em relação a esses resultados podem ser encontrados nas figuras no Apêndice C.

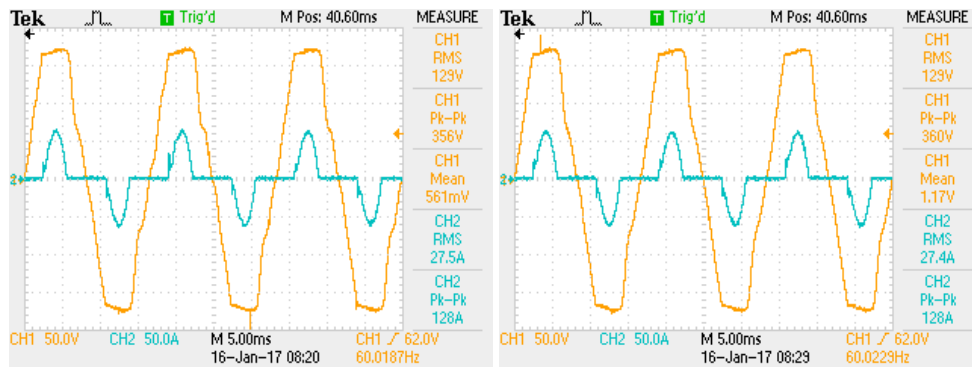
Tabela 13: Resultados experimentais com o controlador ressonante de dois modos.

		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 10800 \text{ Hz}$					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,16	-0,16	-0,08	-0,16
	THD [%]	8,00	7,60	7,70	7,50	7,70
	IHD_3 [%]	5,00	0,10	0,00	0,10	0,00
	IHD_5 [%]	6,00	6,80	6,90	6,70	6,80
	IHD_7 [%]	5,00	1,80	1,70	1,60	1,80
	IHD_9 [%]	1,50	2,10	2,20	2,20	2,20
	\bar{u} [V]	-	226,79	227,88	226,36	227,85
CASO 2	$f_s = 5400 \text{ Hz}$					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,47	-0,31	-0,31	-0,24
	THD [%]	8,00	11,40	10,00	9,50	9,40
	IHD_3 [%]	5,00	0,10	0,10	0,20	0,10
	IHD_5 [%]	6,00	10,80	9,50	8,90	8,90
	IHD_7 [%]	5,00	3,10	1,80	1,40	1,30
	IHD_9 [%]	1,50	1,70	2,40	1,90	1,90
	\bar{u} [V]	-	216,53	215,10	216,85	215,60

Os resultados de THD e $IHDs$ obtidos nos ensaios experimentais continuam não atendendo à norma, enquanto que nos ensaios de simulação, para a frequência de 10,8 kHz, já foi possível cumprir essas exigências. No caso 1, embora a THD do sinal de tensão esteja abaixo do nível especificado, as distorções na terceira e quinta harmônicas não atendem aos seus requisitos. Isso se deve também ao efeito da integral de Bode, mencionado na Seção 5.3, ocasionado pelo emprego do controlador com ganho infinito na terceira harmônica.

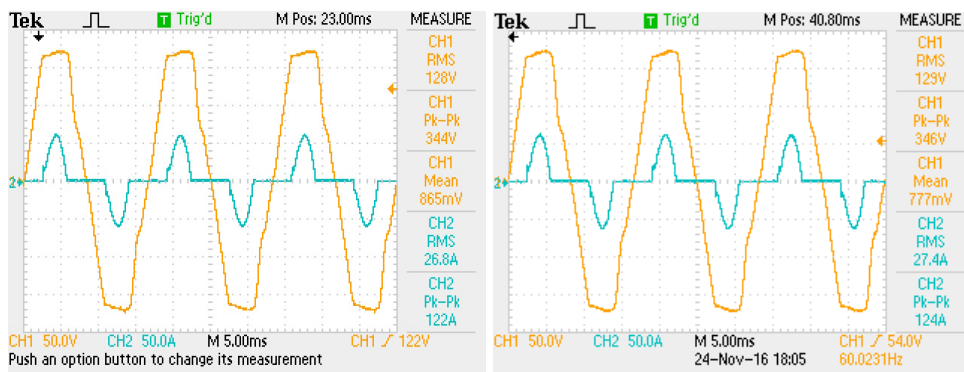
As Figuras 56 e 57 apresentam os registros das formas de onda da tensão e corrente de saída, e a respectiva análise de distorção harmônica da tensão obtidas com o controlador de dois modos ressonantes para o primeiro caso. As Figuras 58 e 59 exibem os registros para o segundo caso.

Figura 56: Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de dois modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.



(a) PE

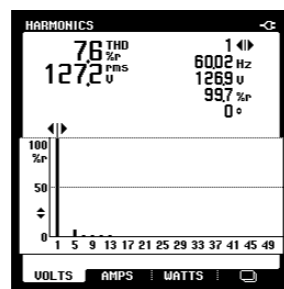
(b) Euler



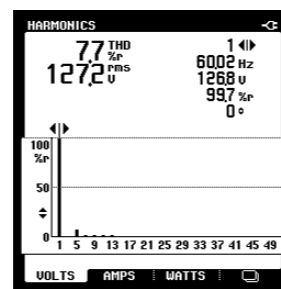
(c) Adams

(d) ZOH

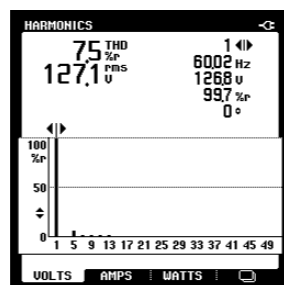
Figura 57: THD da tensão de saída e tensão *RMS* obtidos com controlador de dois modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.



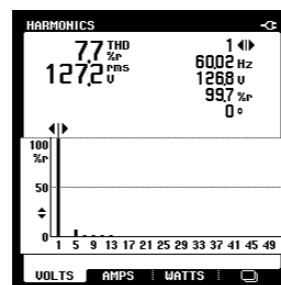
(a) PE



(b) Euler



(c) Adams



(d) ZOH

Figura 58: Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de dois modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.

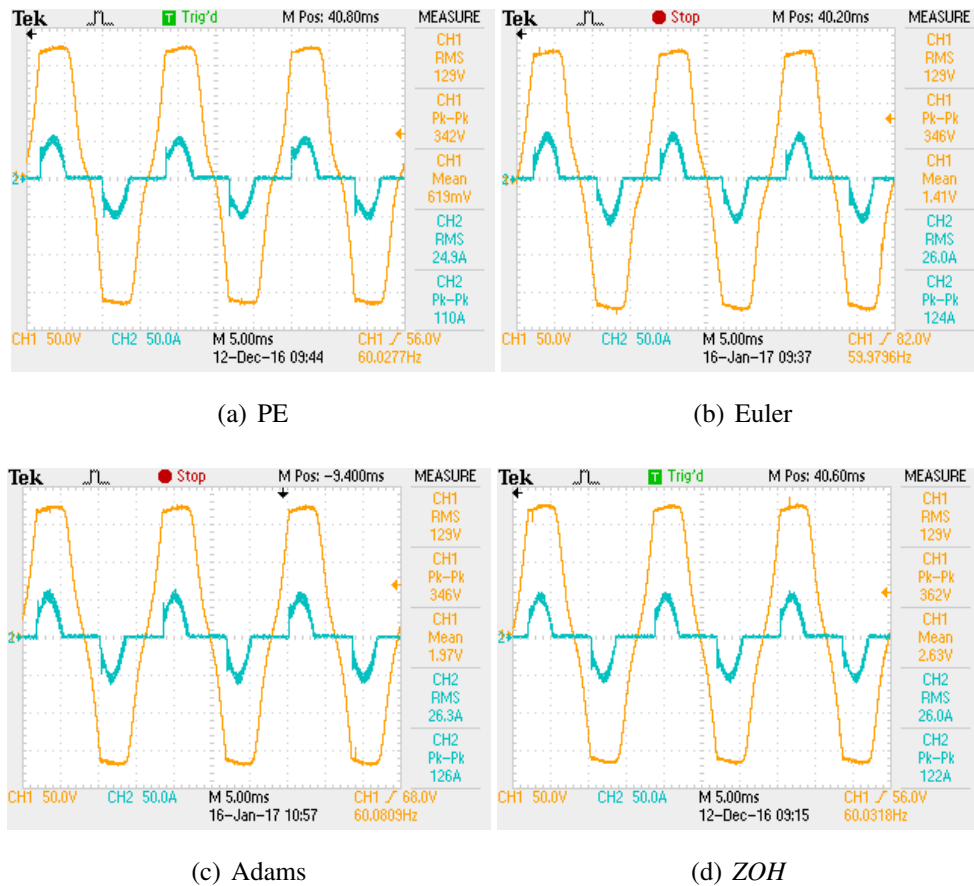
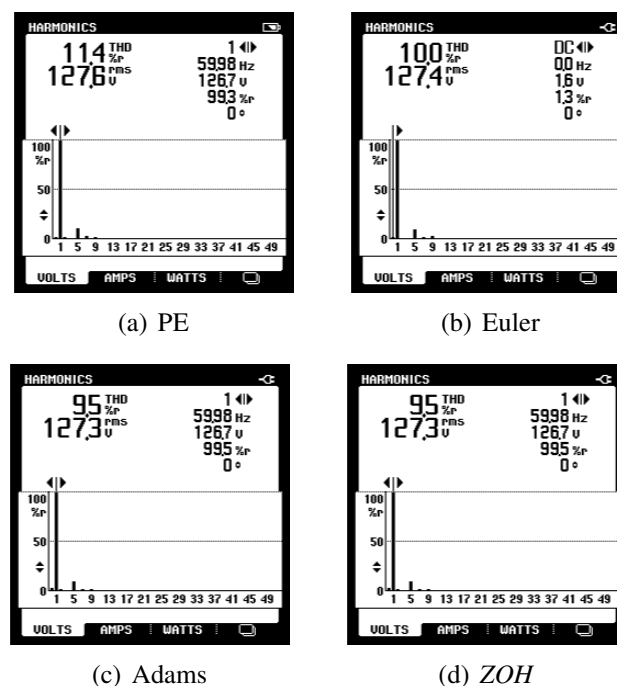


Figura 59: THD da tensão de saída e tensão *RMS* obtidos com controlador de dois modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.



5.4.2.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Nas Fig. 60-61 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios com degraus aditivos de carga linear (20% para 100%) e não-linear (25% para 100%) para os três casos abordados.

Em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, todos os métodos de discretização são equivalentes. Porém, em todos os casos, os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear não ficaram dentro dos limites de transiente definidos pela IEC 62040-3 para desempenho dinâmico.

Figura 60: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.

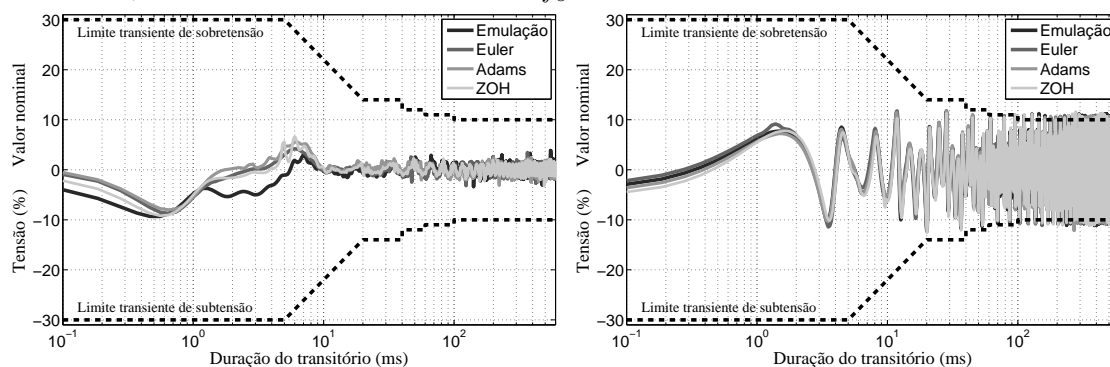
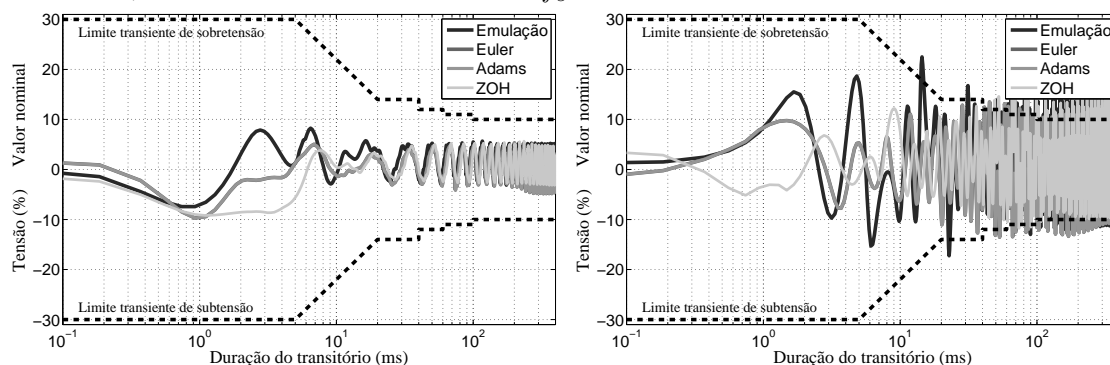


Figura 61: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.



5.4.3 Controlador com três modos ressonantes

5.4.3.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

Devido às limitações de *hardware* não foi possível implementar este controlador com ganho infinito para o caso 1, no qual tornou-se instável, e no caso 2 o mesmo não atende à norma. Apenas para fins de comparação, na Tabela 14 são descritos os resultados utilizando três modos ressonantes com ganho infinito. A Tabela 15 apresenta os resultados utilizando três modos ressonantes, um sintonizado na frequência fundamental e os outros modos com ganhos finitos na terceira e quinta harmônicas.

Tabela 14: Resultados experimentais com o controlador ressonante de três modos.

		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 2	$f_s = 5400$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,16	-0,08	-0,08	-0,08
	THD [%]	8,00	6,90	5,90	5,70	5,80
	IHD_3 [%]	5,00	0,10	0,10	0,10	0,10
	IHD_5 [%]	6,00	0,00	0,10	0,10	0,20
	IHD_7 [%]	5,00	6,30	5,40	5,20	5,40
	IHD_9 [%]	1,50	2,00	1,10	1,00	1,10
	\bar{u} [V]	-	230,92	231,90	230,41	231,10

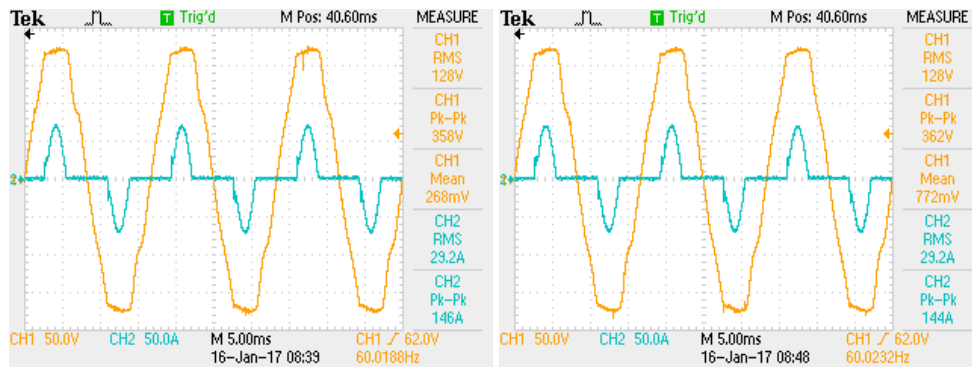
Tabela 15: Resultados experimentais com o controlador ressonante de três modos (ganho finito).

		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 10800$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	0,00	0,08	0,00	0,00
	THD [%]	8,00	4,90	4,90	5,00	4,90
	IHD_3 [%]	5,00	1,40	1,50	1,00	1,40
	IHD_5 [%]	6,00	1,90	2,10	1,40	1,80
	IHD_7 [%]	5,00	3,50	3,40	4,10	3,60
	IHD_9 [%]	1,50	1,00	1,00	1,20	1,00
	\bar{u} [V]	-	237,70	237,70	236,19	237,78
CASO 2	$f_s = 5400$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	-0,08	-0,16	-0,08	-0,08
	THD [%]	8,00	7,20	7,00	7,20	7,20
	IHD_3 [%]	5,00	2,40	4,80	3,40	3,00
	IHD_5 [%]	6,00	5,00	4,70	5,90	5,70
	IHD_7 [%]	5,00	4,10	0,30	1,50	2,70
	IHD_9 [%]	1,50	1,50	1,50	1,40	1,50
	\bar{u} [V]	-	220,40	220,40	220,88	220,62

Analisando a Tabela 15, os resultados de THD e IHDs obtidos nos ensaios experimentais de ambos os casos atendem as exigências da norma. No caso 2, para o PDD, é possível garantir a THD, IHD_3 , IHD_5 e IHD_9 abaixo do nível definido pela norma, porém deve-se observar que, em relação a Tabela 14, o limite aceitável de distorção na 7ª harmônica só pôde ser cumprido devido ao uso de controladores ressonantes com ganho finito nas frequências harmônicas.

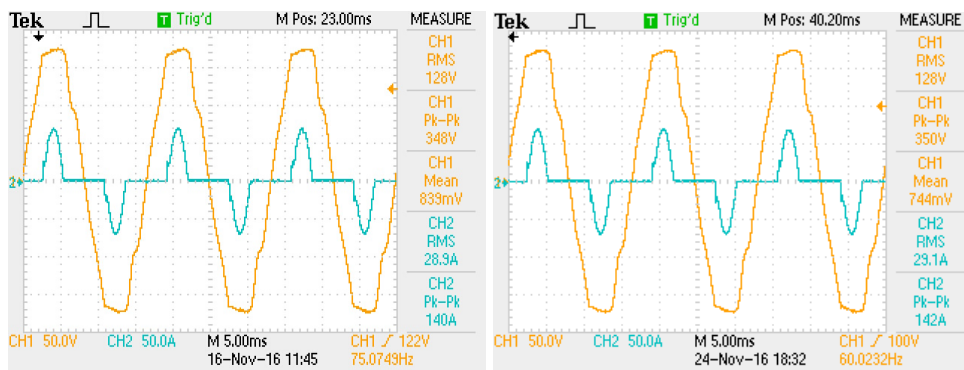
Nas Figuras 62 e 63 são apresentados os registros das formas de onda da tensão e corrente de saída, e a respectiva análise de distorção harmônica da tensão obtidas com o controlador de três modos ressonantes para o primeiro caso. As Figuras 64 e 65 exibem os registros para o segundo caso.

Figura 62: Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de três modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.



(a) PE

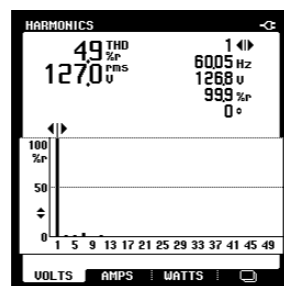
(b) Euler



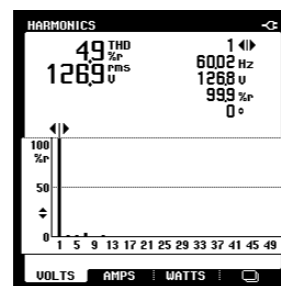
(c) Adams

(d) ZOH

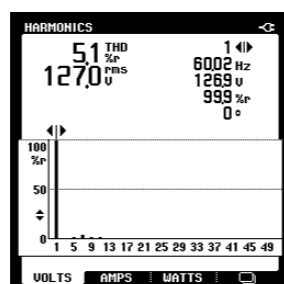
Figura 63: THD da tensão de saída e tensão RMS obtidos com controlador de três modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.



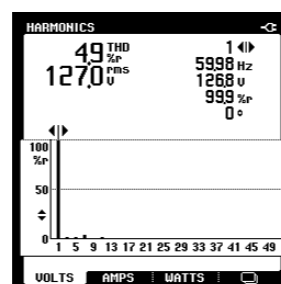
(a) PE



(b) Euler



(c) Adams



(d) ZOH

Figura 64: Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de três modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.

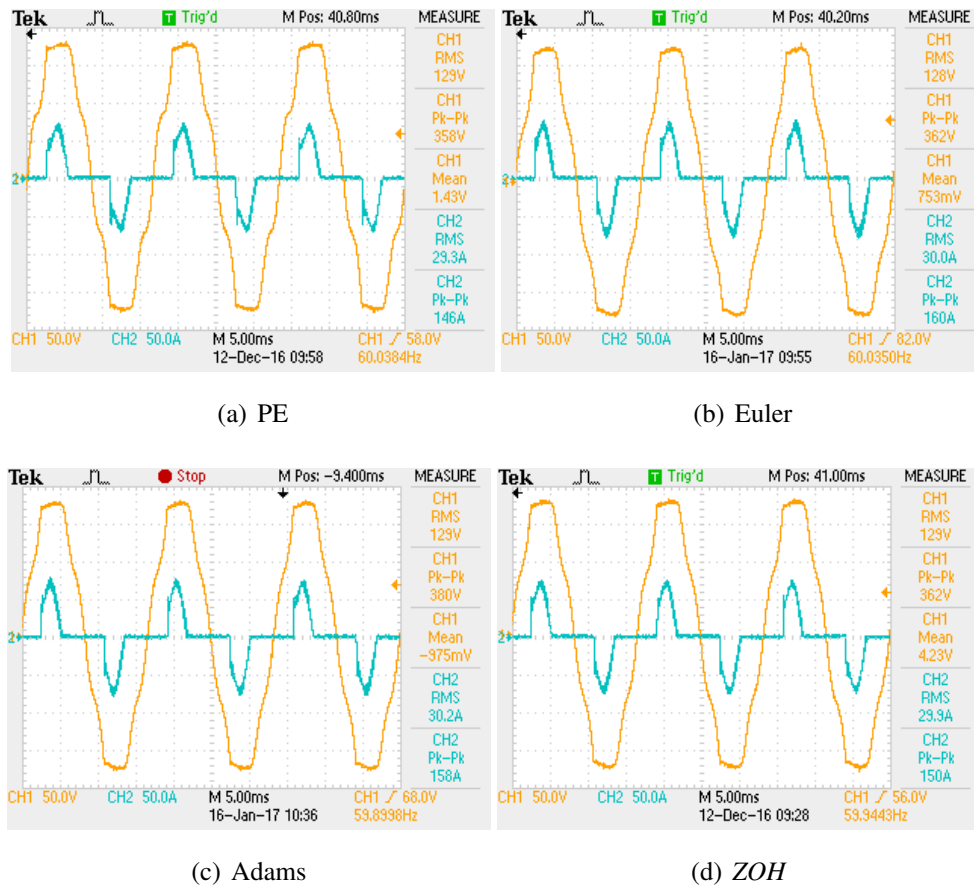
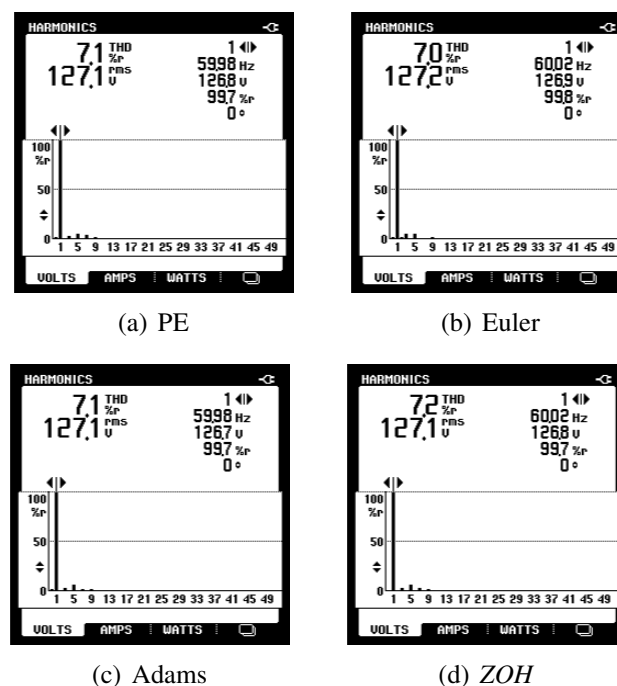


Figura 65: THD da tensão de saída e tensão *RMS* obtidos com controlador de três modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.



5.4.3.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Nas Fig. 66-67 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios com degraus aditivos de carga linear (20% para 100%) e não-linear (25% para 100%) para os três casos abordados.

Em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, todos os métodos de discretização são equivalentes. Nos casos 1 e 2 os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear ficaram dentro dos limites de transiente definidos pela IEC 62040-3 para desempenho dinâmico.

Figura 66: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.

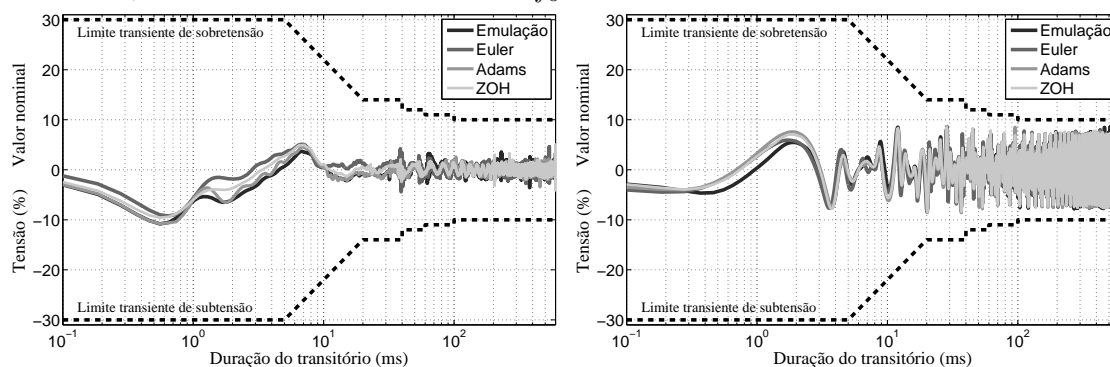
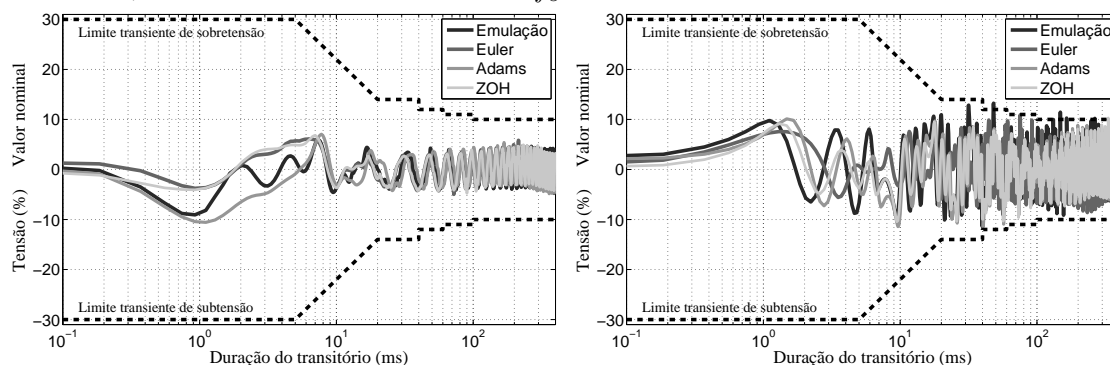


Figura 67: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.



5.4.4 Controlador com quatro modos ressonantes

5.4.4.1 Resultados dos ensaios de desempenho estático

Devido às limitações de *hardware* não foi possível implementar este controlador com ganho infinito para o caso 1, no qual tornou-se instável, e no caso 2 o mesmo não atende à norma. Apenas para fins de comparação, na Tabela 16 são descritos os resultados utilizando quatro modos ressonantes com ganho infinito. A Tabela 17 apresenta os resultados utilizando quatro modos ressonantes, um sintonizado na frequência fundamental e os outros modos com ganho finito sintonizados na terceira, quinta e sétima harmônicas.

Tabela 16: Resultados experimentais com o controlador ressonante de quatro modos.

		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 2	$f_s = 5400$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	0,08	-0,08	0,16	0,08
	THD [%]	8,00	4,20	3,70	4,00	3,90
	IHD_3 [%]	5,00	0,10	0,20	0,30	0,20
	IHD_5 [%]	6,00	0,00	0,30	0,60	0,50
	IHD_7 [%]	5,00	0,00	0,20	0,10	0,10
	IHD_9 [%]	1,50	3,70	2,90	3,40	3,40
	\bar{u} [V]	-	251,84	249,20	248,85	249,95

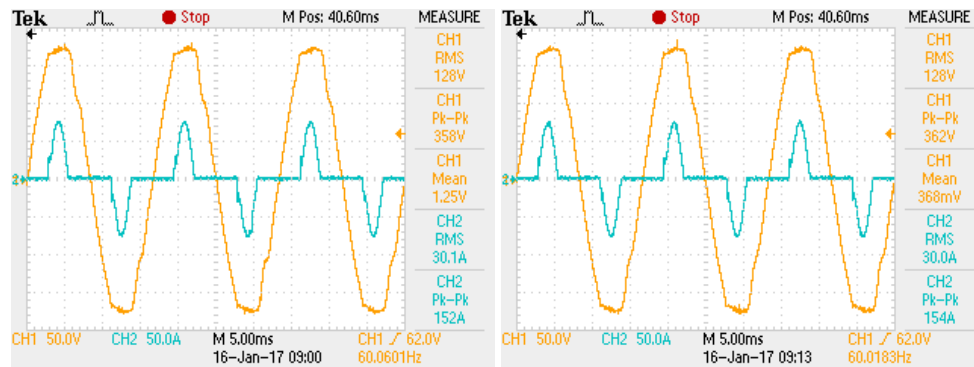
Tabela 17: Resultados experimentais com o controlador ressonante de quatro modos (ganho finito).

		IEC 62040-3	Emulação	Euler	Adams	ZOH
CASO 1	$f_s = 10800$ Hz					
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	0,16	0,08	0,08	0,00
	THD [%]	8,00	4,00	4,00	4,00	4,00
	IHD_3 [%]	5,00	1,60	1,50	1,30	1,40
	IHD_5 [%]	6,00	2,20	2,20	2,00	2,10
	IHD_7 [%]	5,00	1,80	2,00	2,20	1,90
	IHD_9 [%]	1,50	1,00	1,10	1,10	1,20
	\bar{u} [V]	-	247,03	248,31	249,85	249,99
CASO 2	$f_s = 5400$ Hz					
	V_{vaz} [V_{RMS}]	127,00	127,00	127,00	127,00	127,00
	VR_l [%]	$\pm 10,00$	0,16	0,16	0,24	0,16
	VR_{nl} [%]	$\pm 10,00$	0,08	0,08	0,16	0,08
	THD [%]	8,00	4,00	4,00	3,90	3,80
	IHD_3 [%]	5,00	1,50	1,80	1,30	1,30
	IHD_5 [%]	6,00	2,70	2,30	2,50	2,50
	IHD_7 [%]	5,00	0,40	0,50	0,30	0,40
	IHD_9 [%]	1,50	1,10	1,00	1,50	1,30
	\bar{u} [V]	-	240,33	240,75	241,05	240,68

Analisando a Tabela 17, os resultados de THD e IHDs obtidos nos ensaios experimentais de ambos os casos atendem as exigências da norma. No caso 2, para o PDD, é possível garantir a THD , IHD_3 , IHD_5 e IHD_7 abaixo do nível definido pela norma, porém deve-se observar que, em relação a Tabela 16, o limite aceitável de distorção na 9ª harmônica só pôde ser atendido devido ao uso de controladores ressonantes com ganho finito nas frequências harmônicas.

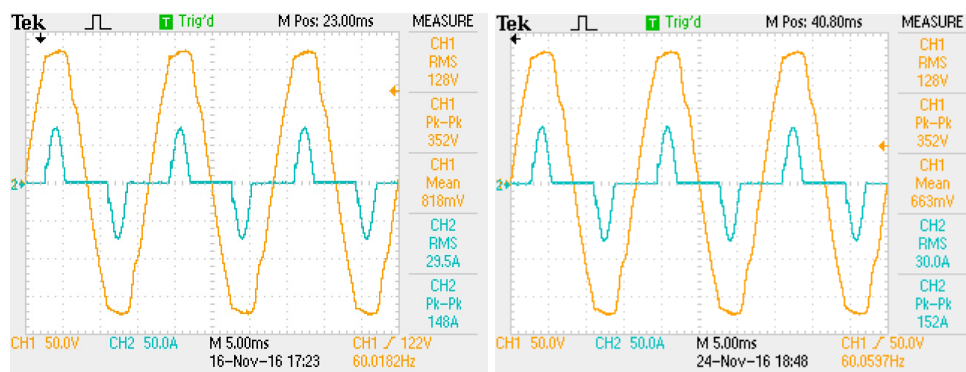
Nas Figuras 68 e 69 são apresentados os registros das formas de onda da tensão e corrente de saída, e a respectiva análise de distorção harmônica da tensão obtida com o controlador de quatro modos ressonantes para o primeiro caso. Nas Figuras 70 e 71 são exibidos os registros para o segundo caso.

Figura 68: Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de quatro modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.



(a) PE

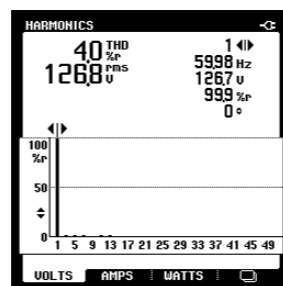
(b) Euler



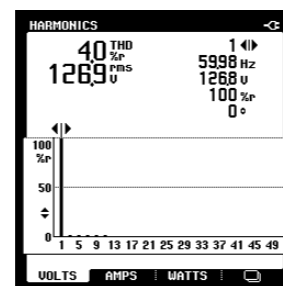
(c) Adams

(d) ZOH

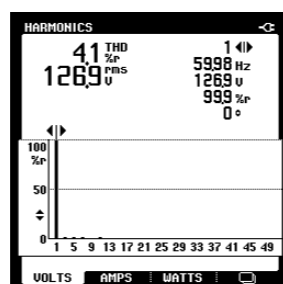
Figura 69: THD da tensão de saída e tensão RMS obtidos com controlador de quatro modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.



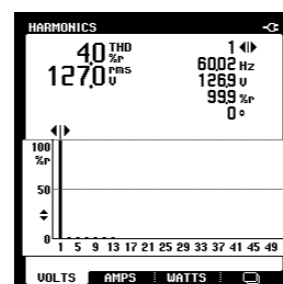
(a) PE



(b) Euler

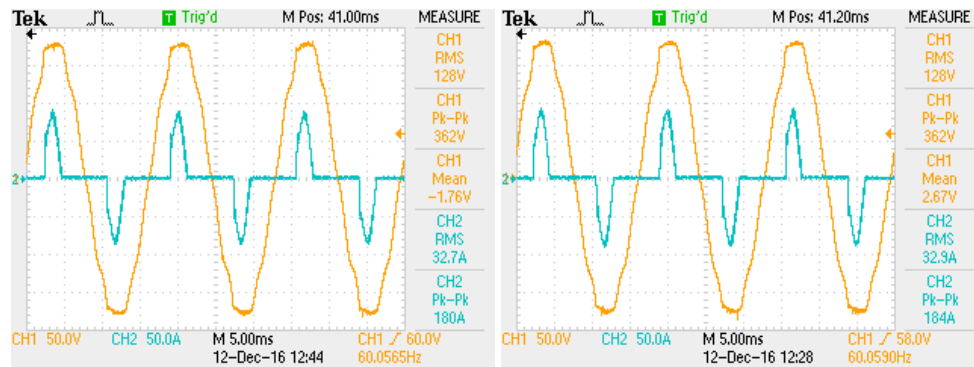


(c) Adams



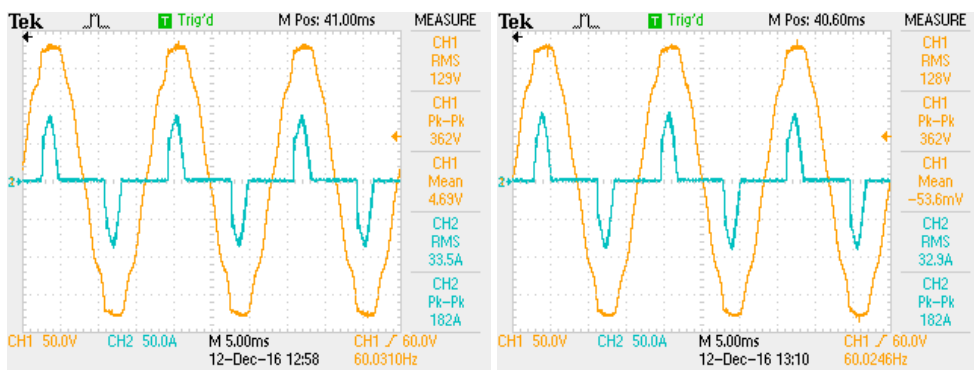
(d) ZOH

Figura 70: Tensão e corrente de saída obtidas com controlador de quatro modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.



(a) PE

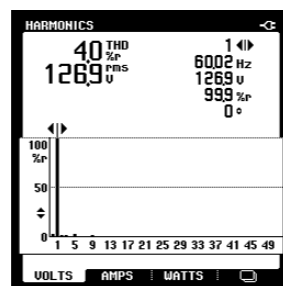
(b) Euler



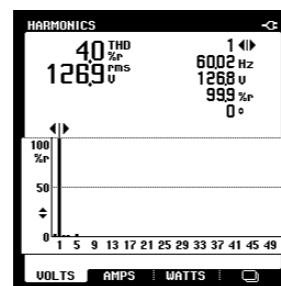
(c) Adams

(d) ZOH

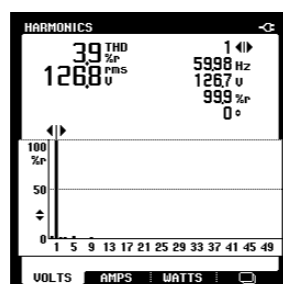
Figura 71: THD da tensão de saída e tensão RMS obtidos com controlador de quatro modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.



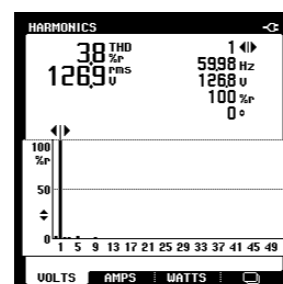
(a) PE



(b) Euler



(c) Adams



(d) ZOH

5.4.4.2 Resultados dos ensaios de desempenho dinâmico

Nas Fig. 72-73 são apresentados os resultados de simulação para os ensaios com degraus aditivos de carga linear (20% para 100%) e não-linear (25% para 100%) para os três casos abordados.

Em termos do tempo de acomodação após um degrau de carga linear, todos os métodos de discretização são equivalentes. Nos casos 1 e 2 os desvios percentuais de tensão para degraus de carga não-linear ficaram dentro dos limites de transiente definidos pela IEC 62040-3 para desempenho dinâmico.

Figura 72: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s = 10800$ Hz.

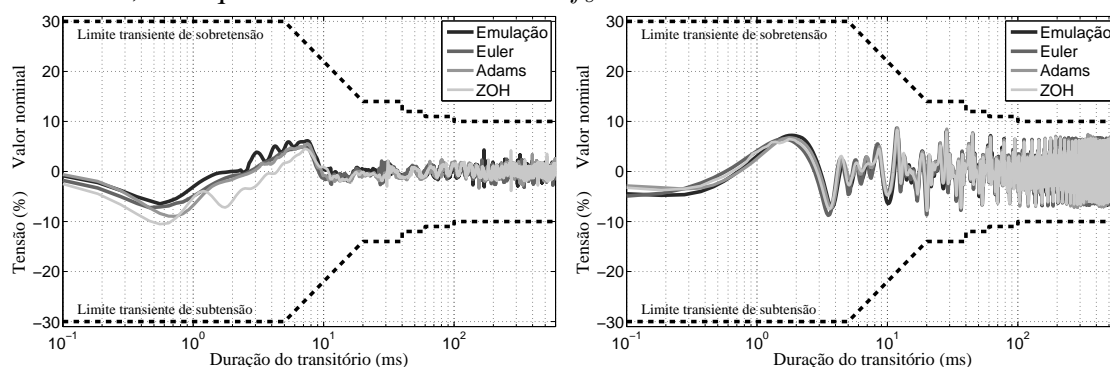
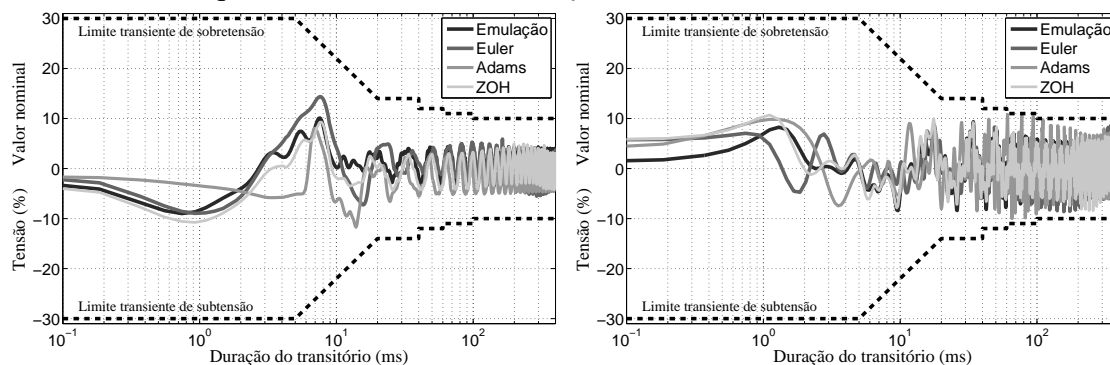


Figura 73: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus aditivos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s = 5400$ Hz.



5.5 Discussão dos resultados

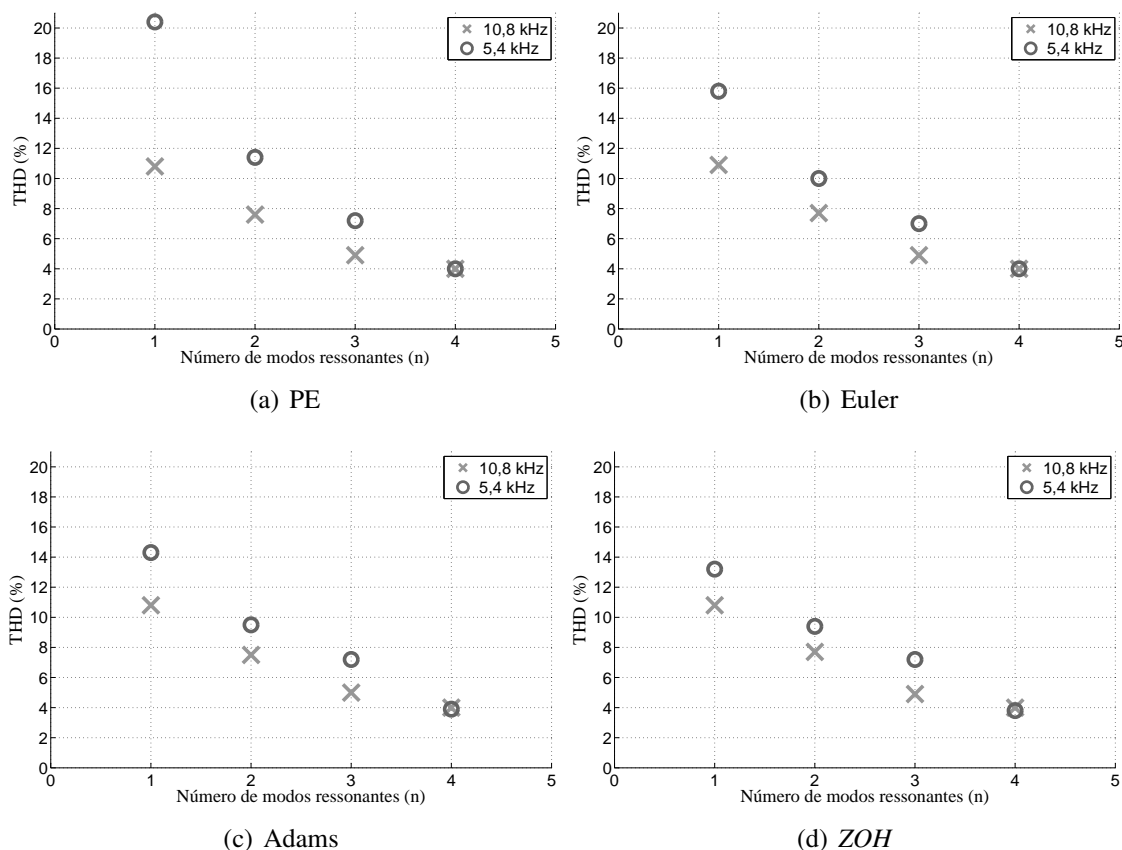
Nos resultados de simulação com os controladores obtidos pelo PDD, verificou-se, com as frequências de amostragem baixas, menores taxas de distorção da tensão de saída e das suas harmônicas em relação às obtidas com o projeto por emulação. A partir de dois modos ressonantes, nos casos 1 e 2, já é possível atender aos requisitos de desempenho estático definidos pela norma IEC 62040-3, enquanto no caso 3 isso só foi possível com a adição de mais modos. Um detalhe importante com relação ao modelo de inversor utilizado foi a necessidade de se adotar um fator de amortecimento no controlador de quatro modos ressonantes como única forma de evitar que este violasse o limite de distorção máxima admissível para a nona harmônica, estipulado em 1,5%.

Com relação ao desvio transitório de tensão, todos os controladores são capazes de atender ao perfil de tolerância para os degraus de carga linear estabelecidos pela norma *IEC 62040-3*, com um tempo de recuperação geralmente menor que 40 ms. No caso 3, a partir de três modos ressonantes já é possível atender ao perfil de tolerância de tensão para degraus de carga não-linear, devido a maior eficácia na rejeição de distúrbios, enquanto que para o PE são necessários quatro modos ressonantes. Para as frequências de amostragem mais elevadas, 10,8 e 21,6 kHz, os resultados com ambas as técnicas de projeto são muito semelhantes, não havendo alterações significativas tanto nos ensaios de desempenho estático como nos de desempenho dinâmico.

Os resultados obtidos por meio de ensaios experimentais seguiram comportamento similar aos resultados de simulação, embora verificou-se valores de distorção harmônica superiores. Por consequência disso, para a frequência de amostragem em 10,8 kHz obtiveram-se controladores com dois modos ressonantes incapazes de ficar abaixo dos níveis máximos de *THD* e *IHDs* definidos pela norma, enquanto nos ensaios de simulação estes já eram satisfeitos. A partir de três modos foi necessário utilizar o controlador ressonante com fator de amortecimento, de forma a tornar possível a implementação do controlador para a frequência de amostragem 10,8 kHz. Esta opção foi para 5,4 kHz, assim como visto nas simulações, a única forma de atender aos limites admissíveis da *IHD₇* e *IHD₉* estabelecidos pela norma *IEC 62040-3*.

A partir dos resultados experimentais obtidos, relativos às distorções harmônicas da tensão de saída, pode-se ilustrar na Fig. 74 a relação da *THD* com o aumento do número de modos ressonantes e da frequência de amostragem utilizada.

Figura 74: Comparativo da *THD* com o aumento do número de modos ressonantes.



Do mesmo modo que os resultados de simulação, todos os controladores são capazes de atender ao perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus de carga linear estabelecido pela norma *IEC 62040-3*. A partir de três modos ressonantes para a frequência de amostragem 5,4 kHz (caso 2) já é possível atender ao perfil de tolerância de tensão para degraus de carga não-linear, enquanto que para o PE são necessários quatro modos ressonantes. Para a frequência de amostragem 10,8 kHz (caso 1), os resultados com ambas as técnicas de projeto ainda são muito semelhantes, não havendo alterações significativas tanto nos ensaios de desempenho estático como para desempenho dinâmico.

Entre o PDD, o projeto que considera a discretização da planta por *ZOH* apresentou, de maneira geral, controladores com os melhores resultados experimentais. Para um e dois modos ressonantes, o projeto com o modelo discreto aproximado por Adams-Bashforth se mostrou melhor que a aproximação *Forward Euler*, ao custo de um número maior de parâmetros para serem determinados. Agora, quando utilizado um número maior de modos ressonantes, o projeto com *Forward Euler* possui resultados melhores que o *ZOH*. Além do mais, nos testes de simulação, também quando empregado um número maior de modos ressonantes, o PDD considerando a discretização da planta por *Forward Euler* se mostrou melhor que todos os outros projetos em tempo discreto, com uma diferença crescente junto com o número de modos ou período de amostragem utilizado.

5.6 Comentários finais

Neste capítulo, primeiramente, foi apresentado o ambiente de simulação utilizado, dando ênfase à obtenção dos estados adicionais referentes ao controle empregando a discretização Adams-Bashforth da planta. Um exemplo numérico da *UPS* foi utilizado para mostrar a efetividade do projeto proposto, com o qual obteve-se diminuição significativa da *THD* e das *IHDs* com controladores resultantes do PDD, em comparação com o PE, quando utilizada uma frequência de amostragem menor, neste caso 5,4 kHz. Essa diferença aparece, sobretudo, quando empregado um menor número de modos ressonantes.

No que diz respeito à simulação, para até dois modos ressonantes os melhores resultados foram obtidos nos projetos com o modelo da planta discretizado por *ZOH*, sendo os quais apresentaram as menores *THDs* e regulação de tensão V_{R_l} e $V_{R_{nl}}$ entre os projetos. A partir de três modos ressonantes o PDD com a aproximação *Forward Euler* passou a apresentar as menores distorções, embora isso seja mais evidente apenas nos resultados de simulação. Os tempos de recuperação após degraus de carga linear são relativamente semelhantes em todos os casos. Para as frequências de amostragem maiores, 21,6 e 10,8 kHz, comumente usadas no controle de *UPS*, os resultados com PDD se mostraram equivalentes ao projeto por emulação, salvo as mesmas condições de projeto.

Os resultados experimentais se mantiveram similares aos obtidos com a simulação do sistema. Porém, para as duas frequências de amostragem analisadas, obteve-se uma *THD* superior devido à possíveis diferenças na implementação prática das cargas não-lineares. Deve-se observar que para a frequência de amostragem de 10,8 kHz não foi possível implementar controladores com mais de dois modos, devido a limitações de *hardware*, obrigando a utilização de um fator de amortecimento no controlador sintonizado para essas harmônicas. Fato esse que não ocorre para 5,4 kHz, o que possibilita a rejeição total de perturbações nessas harmônicas.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, inicialmente foram revisados alguns dos métodos empregados na discretização de controladores ressonantes em tempo contínuo, imprescindíveis para a implementação digital desses controladores. Este estudo possibilitou a escolha de um controlador ressonante em tempo discreto que atendessem à resposta em frequência do controlador ressonante original. As discretizações por equivalência *ZOH* e Tustin com *prewarping* resultam em controladores com pico de ressonância nas frequências desejadas, possibilitando o seguimento com erro nulo de referências senoidais ou rejeição de distúrbios periódicos decorrentes de cargas não-lineares, para sistemas em tempo discreto com intervalo de amostragem fixo.

Na sequência, como objetivo principal deste trabalho, foi desenvolvido um controlador múltiplo ressonante robusto diretamente em tempo discreto aplicado a *UPSs*. A síntese do controlador é formulada como um problema de realimentação estática dos estados do controlador e da planta associado a um termo de alimentação direta do sinal de referência para, então, obter os parâmetros do controlador por meio de um problema de otimização convexa sujeito a restrições *LMI*s. Estas condições asseguram a estabilidade do sistema em malha fechada para uma determinada faixa de carga ao mesmo tempo que garantem um nível mínimo de desempenho transitório e em regime permanente desse sistema.

Relembrando as informações expostas na Seção 5.5, pode-se concluir a superioridade do PDD em relação ao PE quando utilizada uma baixa frequência de amostragem. Com todos os controladores obtidos pelo PDD a *UPS* é capaz de seguir uma referência senoidal com erro nulo quando conectada a cargas lineares, enquanto a rejeição de perturbações geradas por cargas não-lineares só é possível com a inserção de mais modos ressonantes sintonizados nas harmônicas ímpares mais significativas da tensão de saída. Utilizando o controlador de três e quatro modos ressonantes com ganho finito foi possível atender às especificações de desempenho estático da *UPS* definidas pela norma *IEC 62040-3*, considerando os níveis de distorção máxima admissíveis para a tensão de saída na frequência fundamental e em todas as suas harmônicas. Também a partir de três modos ressonantes já foi possível atender, para todas as frequências consideradas, às exigências de desempenho dinâmico estabelecidas na norma tanto para cargas lineares e não-lineares de referência, enquanto no PE foram necessários quatro modos ressonantes.

Entre o PDD, o projeto que utiliza a discretização da planta por *ZOH* apresentou os melhores resultados experimentais, seguido do PDD com o modelo por *Forward Euler* o qual passou a igualar os resultados quando considerado um maior número de modos ressonantes. Embora não perceptíveis nos ensaios experimentais, na simulação estes resultados do PDD com *Forward Euler*, antes atrás, passaram a ser melhores que todos os outros projetos realizados conforme é aumentado o número de modos ressonantes. Este

fato é visível até para as maiores frequências de amostragem. Sob outra perspectiva, o PDD com o modelo discretizado por *ZOH* foi o que apresentou os resultados de desempenho mais consistentes com o PE, com valores de distorção da tensão de saída semelhantes para as frequências mais elevadas e menores para a frequência mais baixa, discrepância essa que passa a ser menos acentuada com o aumento do número de modos ressonantes.

Com o intuito de dar continuidade aos resultados apresentados nesta dissertação, pode-se citar as seguintes propostas de trabalhos futuros:

- Formulação e implementação do controlador ressonante de ganho finito com a análise do efeito do coeficiente de amortecimento de cada modo ressonante nas *IHDs* e no efeito da integral de Bode.
- Avaliação do desempenho do controlador múltiplo ressonante projetado em tempo discreto em outros sistemas tais como *UPSs* trifásicas, filtros ativos ou qualquer aplicação que envolva o seguimento/rejeição de sinais de referência/perturbação periódicos.
- Realização do projeto robusto do controlador ressonante pela metodologia *gain scheduling*.
- Síntese robusta do controlador múltiplo ressonante em tempo discreto levando em consideração o atraso computacional referente à implementação prática do controlador.
- Do mesmo modo que fora feito para o controlador múltiplo ressonante, realizar o projeto em tempo discreto do controlador repetitivo aplicado à *UPS*.

REFERÊNCIAS

ALEMI, P.; BAE, C. J.; LEE, D. C. Resonance Suppression Based on PR Control for Single-Phase Grid-Connected Inverters With LLCL Filters. **IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics**, New York, v.4, n.2, p.459–467, June 2016.

AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE/INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERS (ANSI/IEEE). **IEEE Std 944-1986**: IEEE Recommended Practice for the Application and Testing of Uninterruptible Power Supplies for Power Generating Stations. New York, 1986. 28p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 15014**: Conversor a semicondutor - Sistema de alimentação de potência ininterrupta, com saída em corrente alternada (nobreak) – Terminologia. Rio de Janeiro, 2003. 5p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 15204**: Conversor a semicondutor - Sistema de alimentação de potência ininterrupta, com saída em corrente alternada (nobreak) – Segurança e desempenho. Rio de Janeiro, 2005. 84p.

ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-controlled Systems**. 3rd.ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 1997.

ATKINSON, K. **An Introduction to numerical analysis**. 2nd.ed. New York, NJ, USA: John Wiley & Sons, 1989.

BARDEN, A. T.; PEREIRA, L. F. A. Robust control design of multiple resonant controllers applied to three-phase UPS inverter under unbalanced and nonlinear loads. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY (IECON'15), 41., 2015, Yokohama. **Proceedings...** New York: IEEE, 2015. p.1483–1488.

BONAN, G. **Projeto de controladores repetitivos aplicados a sistemas ininterruptos de energia para seguimento assintótico de sinais de referência senoidais e rejeição de harmônicos**. 2010. 107 f. Dissertação (Mestrado) — Pontífica Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Porto Alegre, 2010.

BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

BURDEN, R.; FAIRES, J. **Numerical Analysis**. Boston, MA, USA: Cengage Learning, 2004.

CARBALLO, R. E. et al. Design approach of discrete-time resonant controllers for uninterruptible power supply applications through frequency response analysis. **IET Power Electronics**, Stevenage, v.9, n.15, p.2871–2879, Sept. 2016.

CÁRDENAS, R. et al. Resonant control system for low-voltage ride-through in wind energy conversion systems. **IET Power Electronics**, Stevenage, v.9, n.6, p.1297–1305, May 2016.

CARVALHO, F. M. **Método alternativo para sintonia de múltiplos controladores ressonantes aplicados em sistemas ininterruptos de energia (Nobreak)**. 2013. 116 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Porto Alegre, 2013.

CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 3rd.ed. New York: Oxford University Press, 1999.

CHEN, S. et al. Optimal design of repetitive controller for harmonic elimination in PWM voltage source inverters. In: INTERNATIONAL TELECOMMUNICATIONS ENERGY CONFERENCE (INTELEC'07), 29., 2007, Rome. **Proceedings...** New York: IEEE, 2007. p.236–241.

CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: an lmi approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.41, n.3, p.358–367, Mar. 1996.

DE, D.; RAMANARAYANAN, V. A Proportional + Multiresonant Controller for Three-Phase Four-Wire High-Frequency Link Inverter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v.25, n.4, p.899–906, Apr. 2010.

ESCOBAR, G. et al. Repetitive-Based Controller for a UPS Inverter to Compensate Unbalance and Harmonic Distortion. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v.54, n.1, p.504–510, Feb. 2007.

FLORES, J. V. **Projeto de controladores para o seguimento de referências periódicas em sistemas com atuadores saturantes**. 2012. 138 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Porto Alegre, 2012.

FRANCIS, B. A.; WONHAM, W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators. **Applied Mathematics and Optimization**, Berlin, v.2, n.2, p.170–194, June 1975.

FRANKLIN, G. F.; WORKMAN, M. L.; POWELL, D. **Digital Control of Dynamic Systems**. 3rd.ed. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing, 1997.

FUKUDA, S.; IMAMURA, R. Application of a sinusoidal internal model to current control of three-phase utility-interface converters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v.52, n.2, p.420–426, Apr. 2005.

FUKUDA, S.; YODA, T. A novel current-tracking method for active filters based on a sinusoidal internal model [for PWM invertors]. **IEEE Transactions on Industry Applications**, New York, v.37, n.3, p.888–895, May 2001.

GHAOUI, L.; NICULESCU, S. **Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control**. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

HASANZADEH, A. et al. Multi-loop linear resonant voltage source inverter controller design for distorted loads using the linear quadratic regulator method. **IET Power Electronics**, Stevenage, v.5, n.6, p.841–851, July 2012.

HOLTZ, J. Pulsewidth modulation-a survey. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v.39, n.5, p.410–420, Oct. 1992.

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION (IEC). **IEC 62040-3: Uninterruptible Power Systems (UPS) - Part 3: Method of specifying the performance and test requirements**. Geneva, 2011. p.214.

KEIEL, G. et al. Discrete-time multiple resonant controller design for uninterruptible power supplies. In: IFAC WORLD CONGRESS, 20., 2017, Toulouse. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2017.

KROKAVEC, D.; FILASOVA, A. On pole placement LMI constraints in control design for linear discrete-time systems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON PROCESS CONTROL (PC), 2013, Strbske Pleso. **Proceedings...** New York: IEEE, 2013. p.69–74.

LISERRE, M.; TEODORESCU, R.; BLAABJERG, F. Multiple harmonics control for three-phase grid converter systems with the use of PI-RES current controller in a rotating frame. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v.21, n.3, p.836–841, May 2006.

LORENZINI, C. **Desenvolvimento de um controlador ressonante-repetitivo aplicado a fontes ininterruptas de energia**. 2015. 116 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Porto Alegre, 2015.

MACCARI, L. A. J. et al. Robust pole location with experimental validation for three-phase grid-connected converters. **Control Engineering Practice**, Oxford, v.59, p.16–26, 2017.

NIAN, H.; ZENG, R. Improved control strategy for stand-alone distributed generation system under unbalanced and non-linear loads. **IET Renewable Power Generation**, Stevenage, v.5, n.5, p.323–331, Sept. 2011.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; BUCK, J. R. **Discrete-time Signal Processing**. 2nd.ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 1999.

PEREIRA, L. F. A.; CARVALHO, F. M.; FLORES, J. V. Alternative resonant controller design for Uninterruptible Power Supplies (UPS). In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY (IECON'13), 39., 2013, Vienna. **Proceedings...** New York: IEEE, 2013. p.3311–3316.

PEREIRA, L. F. A. et al. Multiple Resonant Controllers for Uninterruptible Power Supplies – A Systematic Robust Control Design Approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v.61, n.3, p.1528–1538, Mar. 2014.

RIBAS, S. P. et al. Design and implementation of a discrete-time H-infinity controller for uninterruptible power supply systems. **IET Power Electronics**, Stevenage, v.7, n.9, p.2233–2241, Sept. 2014.

SAINZ, L.; MESAS, J. J.; FERRER, A. Characterization of non-linear load behavior. **Electric Power Systems Research**, Lausanne, v.78, n.10, p.1773–1783, 2008.

SERON, M. M.; GOODWIN, G. C.; BRASLAVSKY, J. **Fundamental Limitations in Filtering Control**. 1st.ed. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, 1997.

SINGH, B. et al. A review of single-phase improved power quality AC-DC converters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Stevenage, v.50, n.5, p.962–981, Oct. 2003.

SUN, J.; GROSTOLLEN, H. Averaged modelling of switching power converters: reformulation and theoretical basis. In: POWER ELECTRONICS SPECIALISTS CONFERENCE PESC'92 RECORD, 23., 1992, Toledo. **Proceedings...** New York: IEEE, 1992. p.1165–1172.

TOTH, R. **Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems**. Berlin, DE: Springer Berlin Heidelberg, 2010.

TOTH, R.; HEUBERGER, P. S. C.; HOF, P. M. J. V. D. Discretisation of linear parameter-varying state-space representations. **IET Control Theory Applications**, Stevenage, v.4, n.10, p.2082–2096, Oct. 2010.

WILLMANN, G. et al. Multiple-Loop H-Infinity Control Design for Uninterruptible Power Supplies. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v.54, n.3, p.1591–1602, June 2007.

WU, E.; LEHN, P. W. Digital Current Control of a Voltage Source Converter With Active Damping of LCL Resonance. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v.21, n.5, p.1364–1373, Sept. 2006.

YEPES, A. G. et al. Effects of Discretization Methods on the Performance of Resonant Controllers. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v.25, n.7, p.1692–1712, July 2010.

YEPES, A. G. et al. Analysis and Design of Resonant Current Controllers for Voltage-Source Converters by Means of Nyquist Diagrams and Sensitivity Function. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v.58, n.11, p.5231–5250, Nov. 2011.

APÊNDICE A INFORMAÇÕES ADICIONAIS SOBRE O MÉTODO ADAMS-BASHFORTH

A.1 Determinação dos coeficientes

Seja $P_n(x)$ um polinômio de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ nos pontos x_0, \dots, x_n . Pode-se representar este polinômio como $P_n(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \dots + f(x_n)l_n(x)$ de forma que $P_n(x_i) = f(x_i)$ seja satisfeita para cada ponto i . O polinômio interpolador, na forma de Lagrange (BURDEN; FAIRES, 2004), fica:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x) \quad (113)$$

com os polinômios da base dados por:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (114)$$

Pode-se reescrever a equação (40) como:

$$x((k+1)T) = x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} P_n(x) dx \quad (115)$$

onde é escolhido um polinômio com $n = 2$ passos anteriores para o cálculo do próximo valor. Portanto, para $x_{j+1} - x_j = T$ obtêm-se:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{-2T^2} \\ l_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{-T^2} \\ l_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2T^2}. \end{aligned}$$

Realizando a mudança de variáveis $\frac{x-x_1}{T} = q$ têm-se:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= -\frac{1}{2}(q+1)(q+2) = -\frac{1}{2}(q^2 + 3q + 2) \\ l_1(x) &= -(q)(q+2) = q^2 + 2q \\ l_2(x) &= \frac{1}{2}(q)(q+1) = \frac{1}{2}(q^2 + q) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{kT}^{(k+1)T} P_n(x)dx &= -\frac{T}{2}f(x_{n-2}) \int_0^1 (q^2 + 3q + 2)dq + \\
 &\quad + Tf(x_{n-1}) \int_0^1 (q^2 + 2q)dq + \frac{T}{2}f(x_n) \int_0^1 (q^2 + q)dq \\
 &= \frac{23}{12}Tf(x_{n-2}) - \frac{4}{3}Tf(x_{n-1}) + \frac{5}{12}Tf(x_n)
 \end{aligned} \tag{116}$$

resultando no método de passo múltiplo:

$$x((k+1)T) \simeq x(kT) + \frac{T}{12} \left(5f|_{(k-2)T} - 16f|_{(k-1)T} + 23f|_{kT} \right)$$

APÊNDICE B DISCRETIZAÇÃO DO CONTROLADOR RESONANTE

B.1 Forward Euler

A discretização de $C_r(s)$ com o método *Forward Euler* resulta em:

$$C_r^f(z) = \frac{k_{c2} \frac{(z-1)}{T} + k_{c1} \omega_r}{\frac{(z-1)^2}{T^2} + \omega_r^2} = \frac{k_{c2}(z-1)T + k_{c1} \omega_r T^2}{(z-1)^2 + \omega_r^2 T^2} = \frac{Tk_{c2}z + (k_{c1} \omega_r T - Tk_{c2})}{z^2 - 2z + (\omega_r^2 T^2 + 1)}. \quad (117)$$

B.2 Adams-Bashforth

A discretização de $C_r(s)$ com o método de Adams-Bashforth resulta em:

$$\begin{aligned} C_r^a(z) &= \frac{k_{c2} \frac{12(z^3 - z^2)}{T(23z^2 - 16z + 5)} + k_{c1} \omega_r}{\left(\frac{12(z^3 - z^2)}{T(23z^2 - 16z + 5)}\right)^2 + \omega_r^2} \\ &= \frac{12k_{c2}(z^3 - z^2)T(5 - 16z + 23z^2) + k_{c1} \omega_r T^2(5 - 16z + 23z^2)^2}{12^2(z^3 - z^2)^2 + \omega_r^2 T^2(5 - 16z + 23z^2)^2} \\ &= \frac{12k_{c2}T(z^3 - z^2)(5 - 16z + 23z^2) + k_{c1} \omega_r T^2(5 - 16z + 23z^2)^2}{144z^6 - 288z^5 + (529\omega_r^2 T^2 + 144)z^4 + \omega_r^2 T^2(-736z^3 + 486z^2 - 160z + 25)} \end{aligned} \quad (118)$$

B.3 Tustin

A discretização de $C_r(s)$ com o método de Tustin resulta em:

$$\begin{aligned} C_r^t(z) &= \frac{k_{c2} \frac{2(z-1)}{T(z+1)} + k_{c1} \omega_r}{\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^2 + \omega_r^2} = \frac{2k_{c2}(z-1)T(z+1) + k_{c1} \omega_r T^2(z+1)^2}{4(z-1)^2 + \omega_r^2 T^2(z+1)^2} \\ &= \frac{2k_{c2}T(z^2 - 1) + k_{c1} \omega_r T^2(z^2 + 2z + 1)}{(\omega_r^2 T^2 + 4)z^2 + (2\omega_r^2 T^2 - 8)z + (\omega_r^2 T^2 + 4)} \\ &= \frac{(2Tk_{c2} + k_{c1} \omega_r T^2)z^2 + 2k_{c1} \omega_r T^2 z + (k_{c1} \omega_r T^2 - 2Tk_{c2})}{(\omega_r^2 T^2 + 4)z^2 + (2\omega_r^2 T^2 - 8)z + (\omega_r^2 T^2 + 4)} \end{aligned} \quad (119)$$

B.4 Tustin com *prewarping*

A discretização de $C_r(s)$ com o método de Tustin com *prewarping* resulta em:

$$\begin{aligned}
C_r^{tp}(z) &= \frac{k_{c2} \frac{\omega_r}{\tan(\frac{\omega_r T}{2})} \frac{(z-1)}{(z+1)} + k_{c1} \omega_r}{\frac{\omega_r^2}{\tan^2(\frac{\omega_r T}{2})} \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \omega_r^2} \\
&= \frac{k_{c2} \omega_r (z-1)(z+1) \tan(\frac{\omega_r T}{2}) + k_{c1} \omega_r (z+1)^2 \tan^2(\frac{\omega_r T}{2})}{\omega_r^2 (z-1)^2 + \omega_r^2 (z+1)^2 \tan^2(\frac{\omega_r T}{2})} \\
&= \frac{k_{c2} \omega_r (z-1)(z+1) \cos(\frac{\omega_r T}{2}) \sin(\frac{\omega_r T}{2}) + k_{c1} \omega_r (z+1)^2 \sin^2(\frac{\omega_r T}{2})}{\omega_r^2 (z-1)^2 \cos^2(\frac{\omega_r T}{2}) + \omega_r^2 (z+1)^2 \sin^2(\frac{\omega_r T}{2})} \\
&= \frac{1}{\omega_r} \frac{k_{c2} (z-1)(z+1) \cos(\frac{\omega_r T}{2}) \sin(\frac{\omega_r T}{2}) + k_{c1} (z+1)^2 \sin^2(\frac{\omega_r T}{2})}{(z-1)^2 \cos^2(\frac{\omega_r T}{2}) + (z+1)^2 \sin^2(\frac{\omega_r T}{2})} \\
&= \frac{1}{2\omega_r} \frac{k_{c2} (z^2 - 1) \sin(\omega_r T) + k_{c1} (z+1)^2 (1 - \cos(\omega_r T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1} \\
&= \frac{1}{2\omega_r} \frac{(k_{c1} - k_{c1} \cos(\omega_r T) + k_{c2} \sin(\omega_r T)) z^2 + (2k_{c1} - 2k_{c1} \cos(\omega_r T)) z}{z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1} \\
&+ \frac{1}{2\omega_r} \frac{(k_{c1} - k_{c1} \cos(\omega_r T) - k_{c2} \sin(\omega_r T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1}
\end{aligned} \tag{120}$$

B.5 Zero-Order Hold

A discretização de $C_r(s)$ com o método *zero-order hold* resulta em:

$$\begin{aligned}
C_r^{zoh}(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{C_r(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_{c_2}s + k_{c_1}\omega_r}{s(s^2 + \omega_r^2)} \right] \right\} \\
&= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_{c_2}}{s^2 + \omega_r^2} + \frac{k_{c_1}\omega_r}{s(s^2 + \omega_r^2)} \right] \right\} \\
&= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{k_{c_2}}{\omega_r} \sin(\omega_r t) + \frac{k_{c_1}}{\omega_r} - \frac{k_{c_1}}{\omega_r} \cos(\omega_r t) \right\} \\
&= \frac{(1 - z^{-1})}{\omega_r} \left[\frac{k_{c_2} z^{-1} \sin(\omega_r T)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_r T) + z^{-2}} - \frac{k_{c_1}(1 - z^{-1} \cos(\omega_r T))}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_r T) + z^{-2}} + \frac{k_{c_1}}{1 - z^{-1}} \right] \\
&= \frac{1}{\omega_r} \frac{k_{c_2} z^{-1} \sin(\omega_r T)(1 - z^{-1}) - k_{c_1}(1 - z^{-1} \cos(\omega_r T))(1 - z^{-1})}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_r T) + z^{-2}} \\
&\quad + \frac{k_{c_1}(1 - 2z^{-1} \cos(\omega_r T) + z^{-2})}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_r T) + z^{-2}} \\
&= \frac{1}{\omega_r} \frac{k_{c_2} z^{-1} \sin(\omega_r T)(1 - z^{-1}) + k_{c_1} \cos(\omega_r T)(1 - z^{-1}) + k_{c_1} z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_r T) + z^{-2}} \\
&\quad + \frac{-2k_{c_1} z^{-1} \cos(\omega_r T) + k_{c_1} z^{-2}}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_r T) + z^{-2}} \\
&= \frac{1}{\omega_r} \frac{(k_{c_1} - k_{c_1} \cos(\omega_r T) + k_{c_2} \sin(\omega_r T))z + (k_{c_1} - k_{c_1} \cos(\omega_r T) - k_{c_2} \sin(\omega_r T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_r T) + 1}.
\end{aligned} \tag{121}$$

APÊNDICE C RESULTADOS DE SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR RESSONANTE DE TEMPO DISCRETO

Neste apêndice são apresentadas as tabelas e figuras que complementam os resultados de simulação para o exemplo numérico da *UPS* abordado no Capítulo 5.

C.1 Controlador com um modo ressonante

As Tabelas 18 a 20 apresentam os parâmetros obtidos para o controlador de um modo ressonante pela solução de (100) para os 3 casos abordados. São apresentados também os parâmetros obtidos no PE a partir da solução de (33).

Tabela 18: Parâmetros para o controlador ressonante com um modo e $f_s=21600$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9945	0,9968	0,9954
k_{p1}	-5,8086	-5,8571	-5,8562	-6,5687
k_e	6,2456	6,3292	6,3033	7,2495
k_{p3}	-	-	$3,6344 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$5,5363 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-1,6480 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-2,5161 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	878,6908	1161,4318	551,5945	755,2319
k_{c2}	5168,1345	5467,8497	5448,2179	4901,6330

Tabela 19: Parâmetros para o controlador ressonante com um modo e $f_s=10800$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9908	0,9908	0,9908
k_{p1}	-5,8086	-6,0650	-6,0558	-5,9057
k_e	6,2455	6,4970	6,6529	6,5641
k_{p3}	-	-	$11,5715 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$16,7023 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-5,2052 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-7,5528 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	833,2385	655,1612	1499,7230	672,5420
k_{c2}	5174,5700	4434,7809	8308,2647	4566,6655

Tabela 20: Parâmetros para o controlador ressonante com um modo e $f_s=5400$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9672	0,9835	0,9817
k_{p1}	-2,4331	-3,2564	-3,1205	-1,9362
k_e	1,2717	2,1113	2,0552	1,5241
k_{p3}	-	-	$31,6670 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$23,1202 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-9,3973 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-8,5932 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	860,0948	868,8406	318,9288	85,3975
k_{c2}	3051,7646	2496,0553	1919,4646	793,1367

C.1.1 Resultados de simulação

Nas figuras seguintes são apresentados os resultados de simulação adicionais obtidos com os controladores de um modo ressonante. A Fig. 75 apresenta a forma de onda da tensão de saída para carga linear com esses controladores para $f_a=5,4$ kHz. A Fig. 76 apresenta a corrente de saída para carga não-linear de referência para a mesma frequência de amostragem. Por fim, as Figuras 77 a 79 retratam os ensaios de desempenho dinâmico para degraus subtrativos de carga linear e não-linear de referência.

Figura 75: Tensão de saída para carga linear de referência com um modo ressonante e $f_s=5400$ Hz.

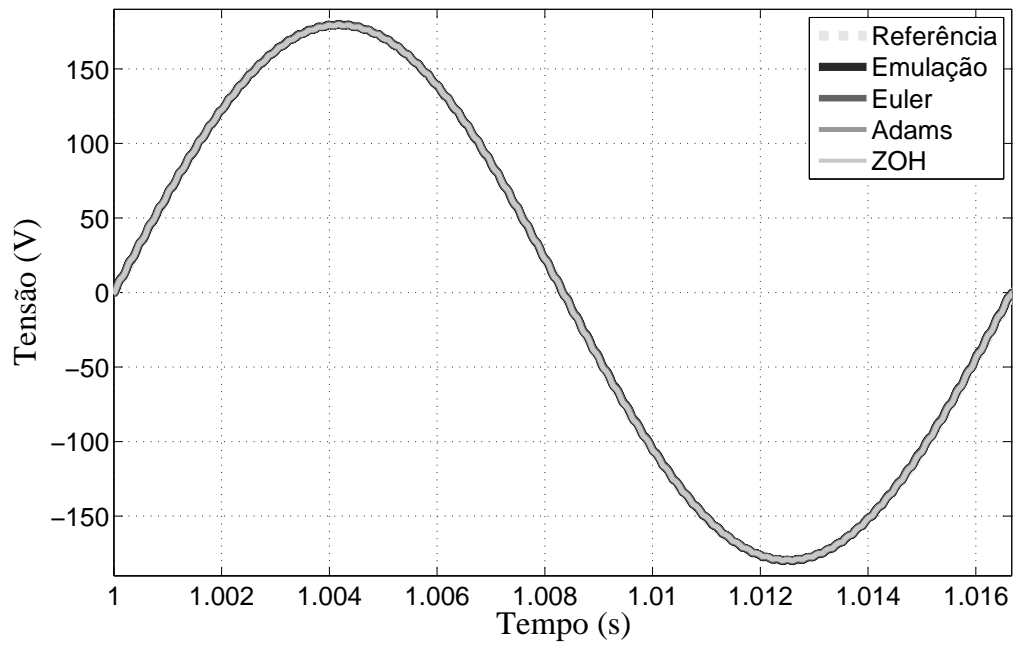


Figura 76: Corrente de saída para carga não-linear de referência com um modo ressonante e $f_s=5400$ Hz.

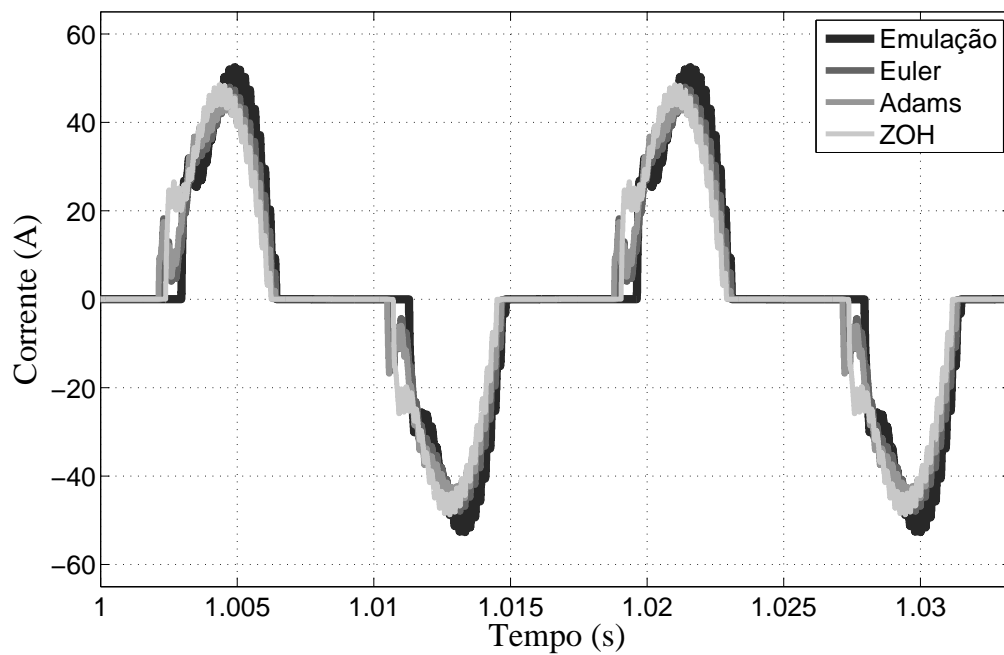


Figura 77: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=21600$ Hz.

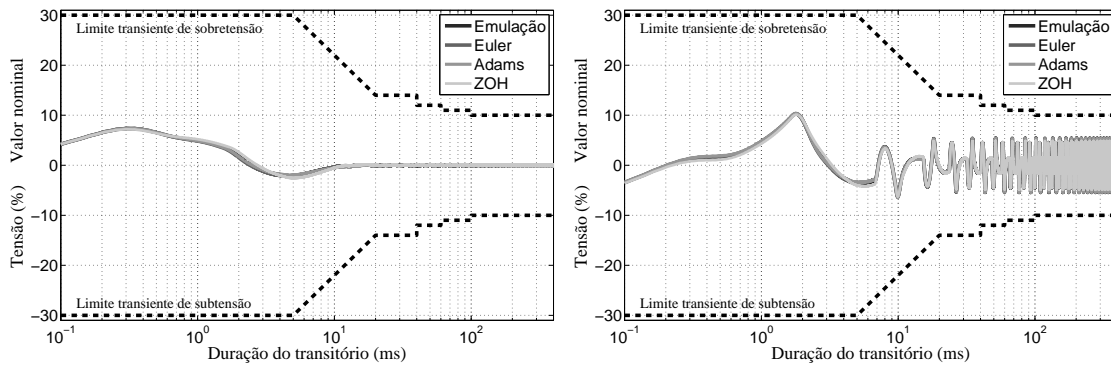


Figura 78: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=10800$ Hz.

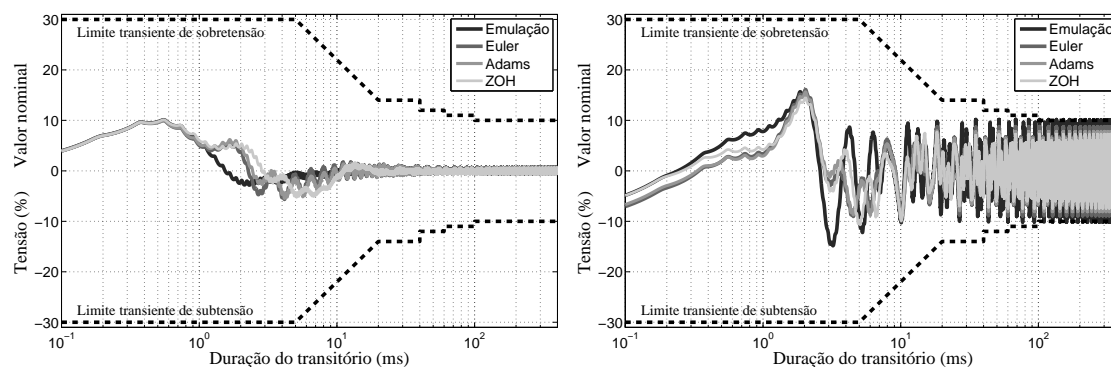
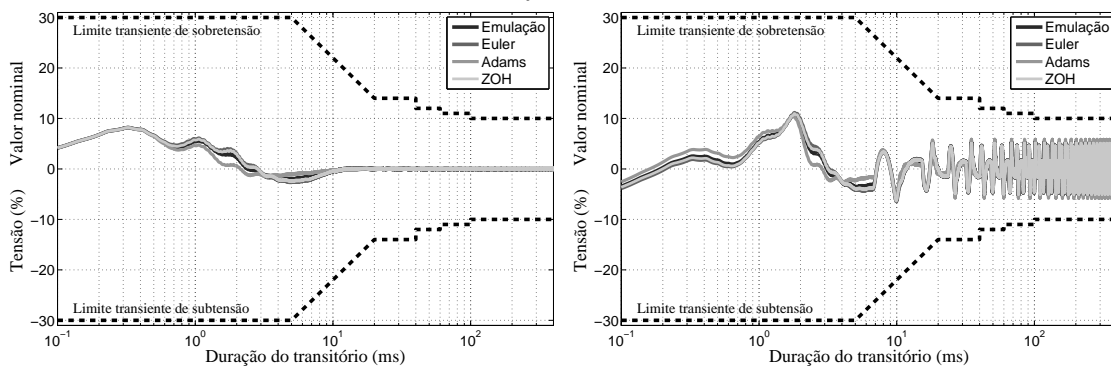


Figura 79: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com um modo ressonante e $f_s=5400$ Hz.

C.2 Controlador com dois modos ressonantes

As Tabelas 21 a 23 apresentam os parâmetros obtidos para o controlador ressonante com a solução de (100) para os 3 casos abordados. São apresentados também os parâmetros obtidos no PE a partir da solução de (33).

Tabela 21: Ganhos para o controlador ressonante com dois modos e $f_s=21600$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9954	0,9954	0,9954
k_{p1}	-6,4911	-6,9278	-5,2295	-6,3436
k_e	7,3892	8,0481	4,3567	7,4886
k_{p3}	-	-	$13,8983 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$9,0676 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-6,2518 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-4,1176 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	280,9503	426,7186	564,4504	369,8100
k_{c2}	5141,1832	5808,0170	5193,2172	5200,5568
k_{c3}	1216,9947	1407,0658	1814,5549	1228,2301
k_{c4}	4814,8407	5399,5398	5150,0968	4864,2527

Tabela 22: Ganhos para o controlador ressonante com dois modos e $f_s=10800$ Hz.

Parâmetros	Emulação	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9908	0,9908	0,9908
k_{p1}	-6,5606	-6,9540	-7,2020	-6,4871
k_e	7,5033	8,0182	8,4799	7,9826
k_{p3}	-	-	$21,4504 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$32,4621 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-9,5335 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-14,5629 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	251,7946	430,6606	737,5464	404,7785
k_{c2}	5385,3087	5293,3735	8147,8753	5269,9532
k_{c3}	1151,7090	1131,5511	2009,8726	1084,8571
k_{c4}	5076,2959	4904,1731	7866,8291	4967,5027

Tabela 23: Ganhos para o controlador ressonante com dois modos e $f_s=5400$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9908	0,9654	0,9817
k_{p1}	-1,6314	-2,2977	-3,8812	-2,3865
k_e	0,3237	0,2100	1,3120	0,3140
k_{p3}	-	-	$58,3536 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$23,8244 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-23,4521 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-10,9810 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	60,9804	-16,6812	639,8051	-50,9609
k_{c2}	645,5245	270,7434	2064,9776	366,6592
k_{c3}	138,3926	-91,4904	1120,7051	-199,8634
k_{c4}	459,9852	185,9330	1189,1012	313,7867

C.2.1 Resultados de simulação

Nas figuras seguintes são apresentados os resultados de simulação adicionais obtidos com os controladores de dois modos ressonantes. A Fig. 80 apresenta a forma de onda da tensão de saída para carga linear com esses controladores para $f_a=5,4$ kHz. A Fig. 81 apresenta a corrente de saída para carga não-linear de referência para a mesma frequência de amostragem. Por fim, as Figuras 82 a 84 retratam os ensaios de desempenho dinâmico para degraus subtrativos de carga linear e não-linear de referência.

Figura 80: Tensão de saída para carga linear de referência com dois modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.

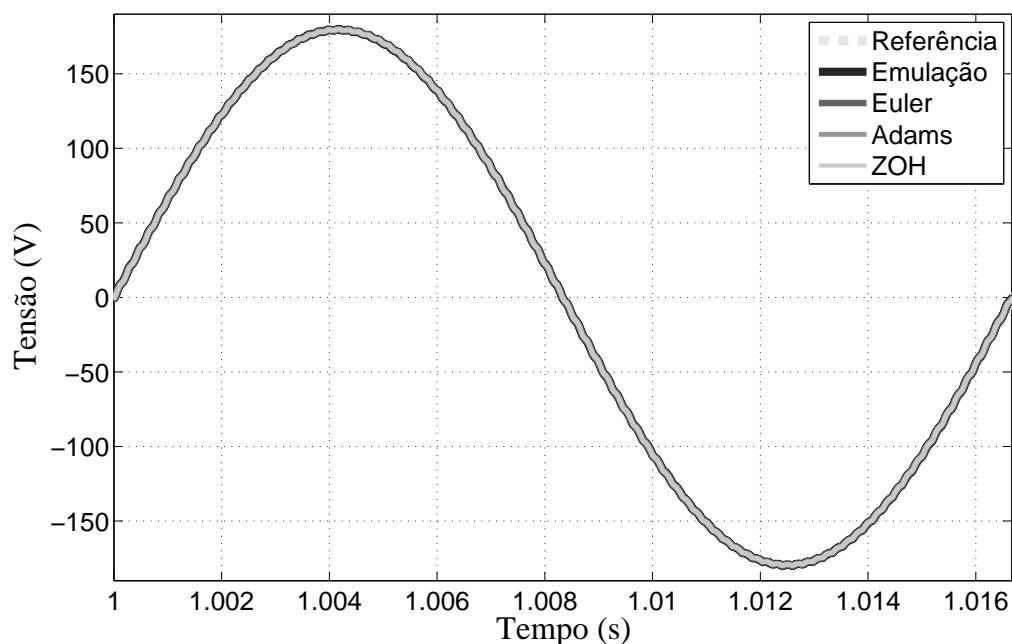


Figura 81: Corrente de saída para carga não-linear de referência com dois modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.

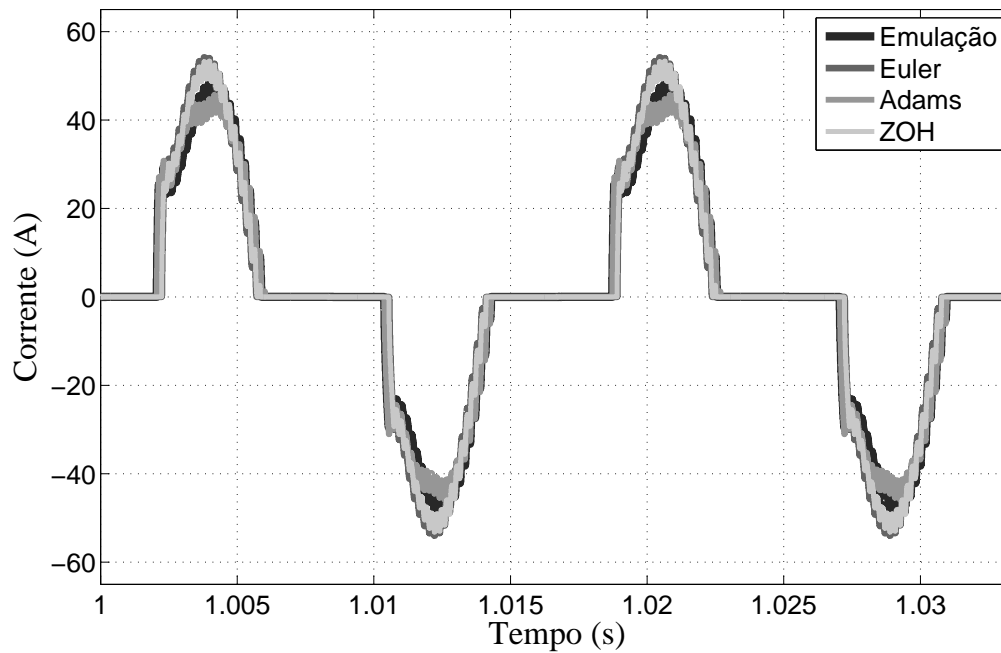


Figura 82: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz.

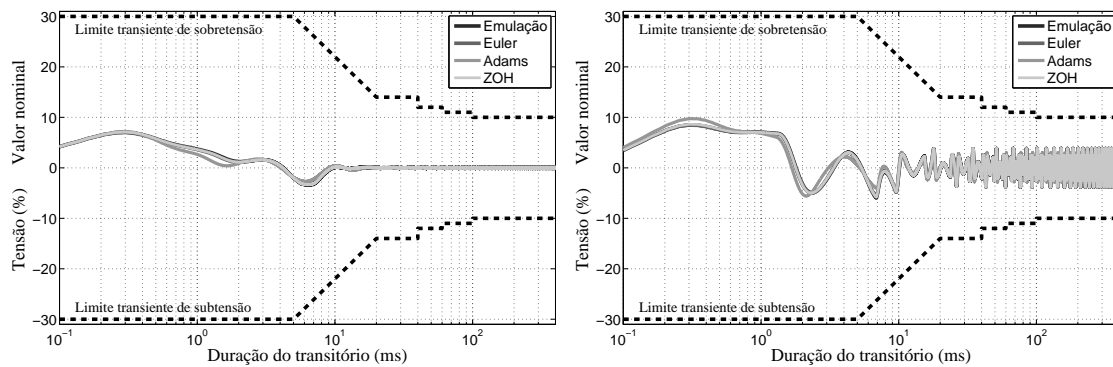


Figura 83: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz.

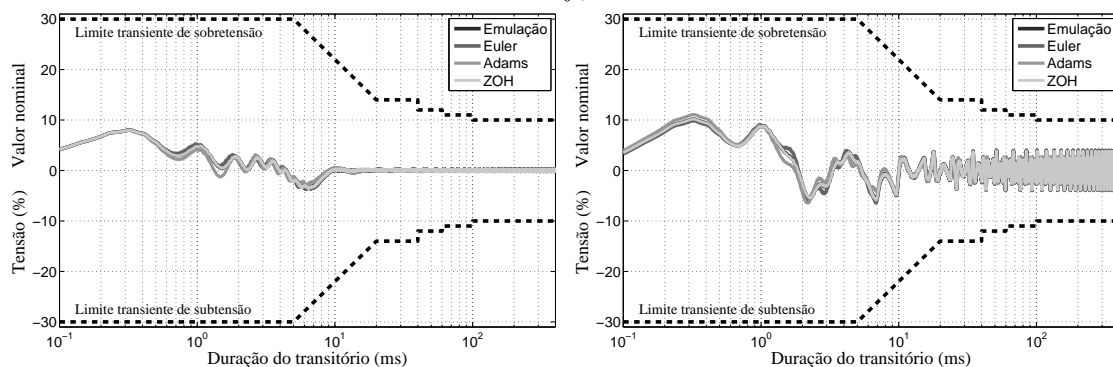
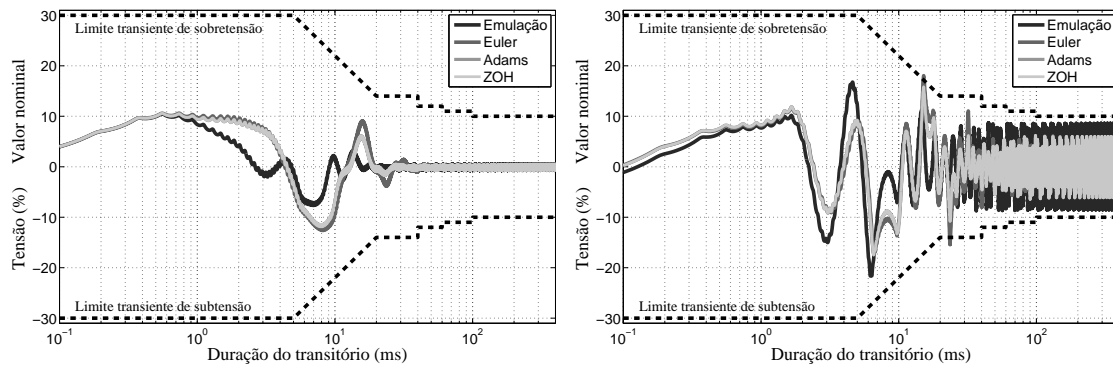


Figura 84: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com dois modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



C.3 Controlador com três modos ressonantes

As Tabelas 24 a 26 apresentam os parâmetros obtidos para o controlador ressonante com a solução de (100) para os 3 casos abordados. São apresentados também os parâmetros obtidos no PE a partir da solução de (33).

Tabela 24: Parâmetros para o controlador ressonante com três modos e $f_s=21600$ Hz

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9954	0,9954	0,9954
k_{p1}	-7,2881	-7,7951	-8,3467	-7,1952
k_e	8,8569	9,6573	10,6639	9,1820
k_{p3}	-	-	$13,9954 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$23,8908 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-6,2601 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-10,7705 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	50,5940	252,0948	370,8776	220,2470
k_{c2}	5403,6881	5750,0505	7747,5106	5314,2320
k_{c3}	249,2713	374,3377	577,1089	312,3794
k_{c4}	5328,5255	5626,5688	7741,2337	5231,7238
k_{c5}	958,2541	1055,6496	1579,2704	940,5453
k_{c6}	5023,8846	5201,3068	7521,9353	4904,2767

Tabela 25: Parâmetros para o controlador ressonante com três modos e $f_s=10800$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	50	0,9954	0,9954	0,9954
k_{p1}	-5,0357	-5,2726	-5,7250	-5,0506
k_e	5,3355	5,5629	6,2291	5,6494
k_{p3}	-	-	$14,1707 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$18,8337 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-6,2739 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-8,5122 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	-96,0242	29,4842	62,7742	23,8339
k_{c2}	1782,7895	1876,8775	2845,7591	1898,8025
k_{c3}	-272,6481	-209,9770	-300,0763	-236,3411
k_{c4}	1735,1098	1801,2700	2874,3558	1850,8598
k_{c5}	-382,4458	-339,3820	-583,9255	-394,5709
k_{c6}	1660,4510	1648,0534	2954,3120	1754,3312

Tabela 26: Parâmetros para o controlador ressonante com três modos e $f_s=5400$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9817	0,9817	0,9817
k_{p1}	-3,1848	-4,0559	-3,4138	-2,7480
k_e	1,5119	1,6581	1,3133	0,9324
k_{p3}	-	-	$49,6472 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$22,3090 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-19,7693 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-10,4891 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	44,8215	90,9933	214,1829	98,5646
k_{c2}	1231,1467	1019,0125	1038,8681	685,1201
k_{c3}	85,0171	-80,9708	213,3999	6,7692
k_{c4}	1054,0778	838,1308	894,4730	530,8647
k_{c5}	-141,5092	-208,7629	-166,6488	-297,0479
k_{c6}	658,1416	467,7834	574,5688	140,3919

C.3.1 Resultados de simulação

Nas figuras seguintes são apresentados os resultados de simulação adicionais obtidos com os controladores de três modos ressonantes. A Fig. 85 apresenta a forma de onda da tensão de saída para carga linear com esses controladores para $f_a=5,4$ kHz. A Fig. 86 apresenta a corrente de saída para carga não-linear de referência para a mesma frequência

de amostragem. Por fim, as Figuras 87 a 89 retratam os ensaios de desempenho dinâmico para degraus subtrativos de carga linear e não-linear de referência.

Figura 85: Tensão de saída para carga linear de referência com três modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.

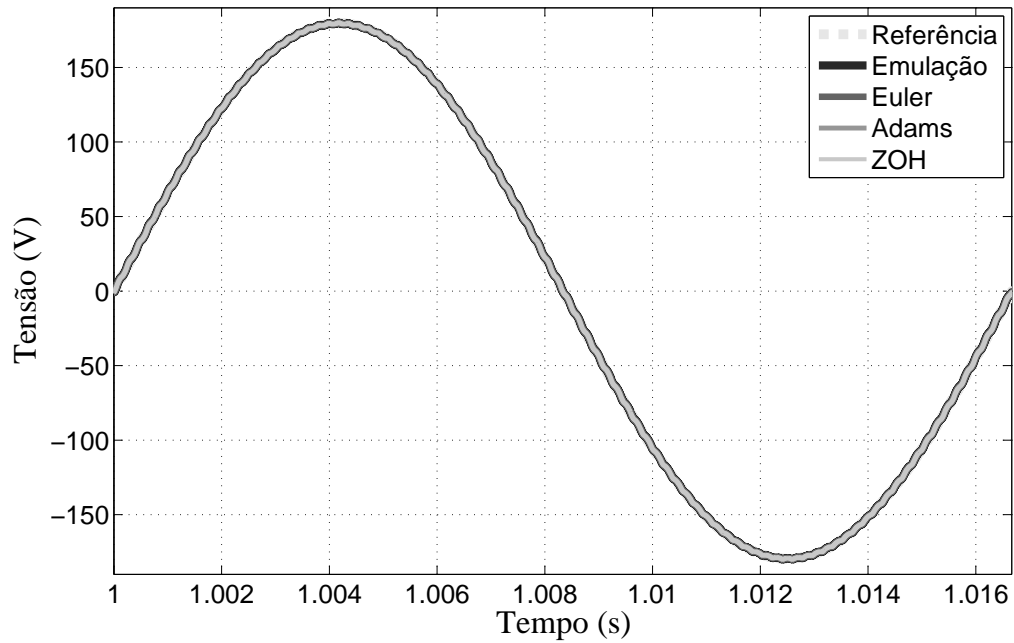


Figura 86: Corrente de saída para carga não-linear de referência com três modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.

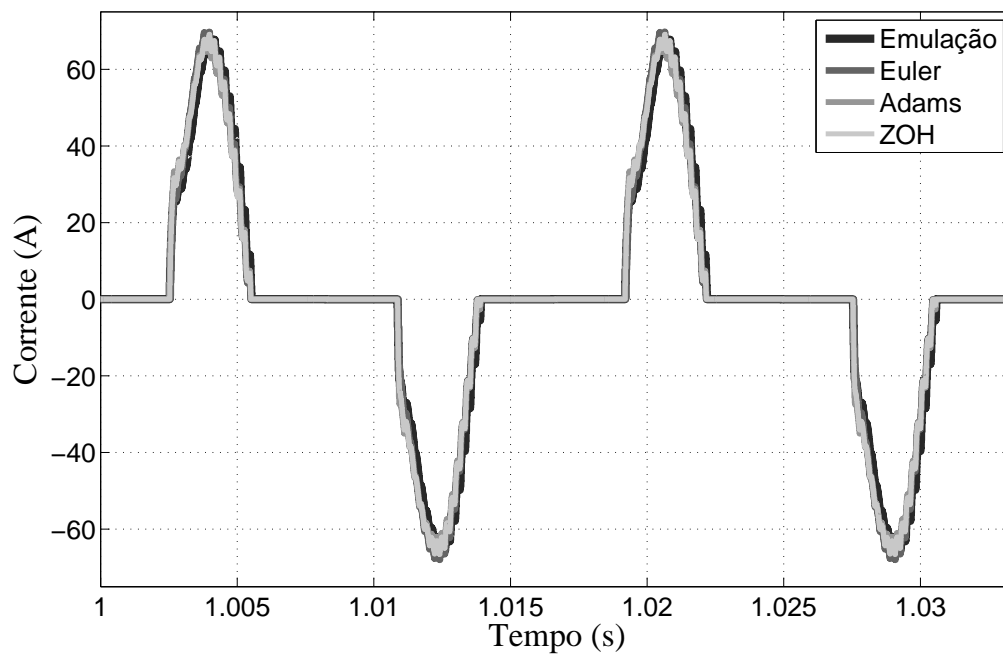


Figura 87: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz.

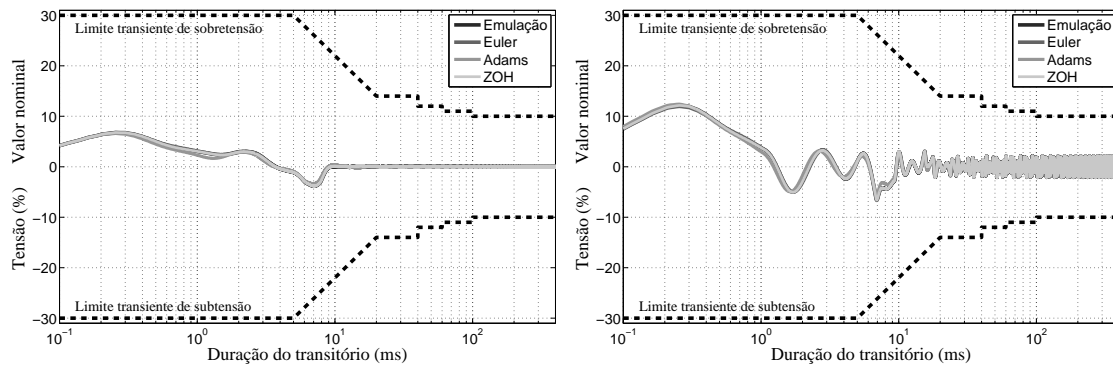


Figura 88: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz.

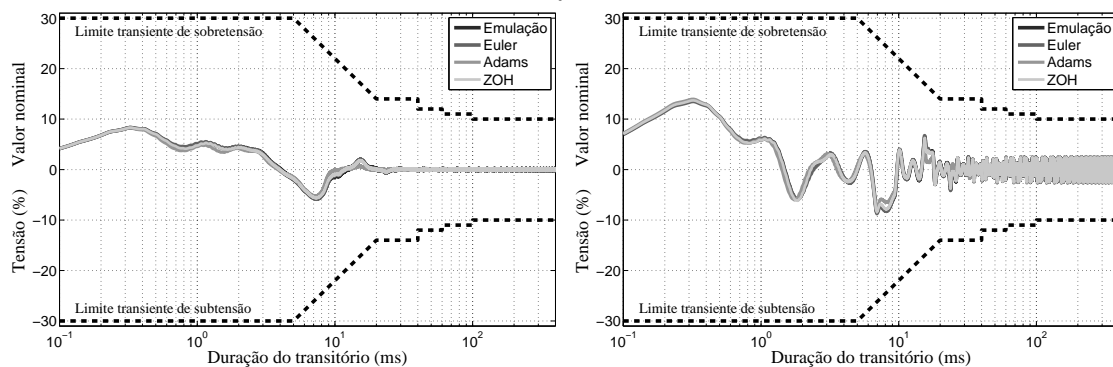
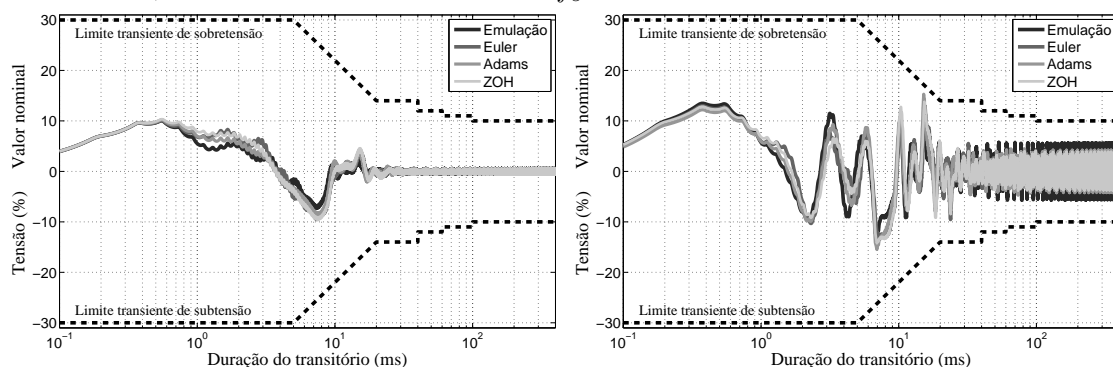


Figura 89: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



C.4 Controlador com três modos ressonantes (ganho finito)

As Tabelas 27 a 29 apresentam os parâmetros obtidos para o controlador ressonante com a solução de (100) para os 3 casos abordados. São apresentados também os parâmetros obtidos no PE a partir da solução de (33).

Tabela 27: Parâmetros para o controlador ressonante (ganho finito) com três modos e $f_s=21600$ Hz

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	100	0,9954	0,9954	0,9954
k_{p1}	-6,9025	-7,4775	-7,9829	-6,9758
k_e	8,1498	9,0267	9,9226	8,6855
k_{p3}	-	-	$13,3348 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$21,6381 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-5,9757 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-9,7691 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	203,7448	418,1944	643,4584	387,2104
k_{c2}	5059,1489	5589,2466	8013,9121	5301,2466
k_{c3}	396,4982	524,2493	865,8662	476,8741
k_{c4}	4209,7784	4623,6903	6798,7387	4414,4016
k_{c5}	493,7752	579,9740	1004,3897	529,1149
k_{c6}	3557,7151	3852,5021	5984,3014	3731,2169

Tabela 28: Parâmetros para o controlador ressonante (ganho finito) com três modos e $f_s=10800$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	50	0,9954	0,9954	0,9954
k_{p1}	-4,7793	-5,0196	-5,1839	-4,8476
k_e	4,9740	5,2287	5,4919	5,2872
k_{p3}	-	-	$9,6844 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$12,5149 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-4,3030 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-5,6692 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	-33,8151	94,1322	145,5932	90,2906
k_{c2}	1775,6207	1909,0232	2623,2099	1920,3187
k_{c3}	-128,5063	-80,8765	-102,5783	-101,3725
k_{c4}	1228,5039	1301,2459	1864,9209	1327,8166
k_{c5}	-247,0087	-225,6828	-349,6741	-260,3201
k_{c6}	848,5611	860,5922	1342,2945	909,8866

Tabela 29: Parâmetros para o controlador ressonante (ganho finito) com três modos e $f_s=5400$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	80	0,9853	0,9853	0,9853
k_{p1}	-2,2453	-3,2469	-1,6697	-1,5601
k_e	0,7844	0,7152	0,3807	0,4078
k_{p3}	-	-	$25,6247 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$6,4682 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-10,6836 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-3,2997 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	93,5682	61,2909	137,3150	98,7702
k_{c2}	888,1512	581,3736	546,6515	499,5841
k_{c3}	100,5467	-59,6838	87,6665	28,9623
k_{c4}	520,2489	297,9304	320,4695	272,3763
k_{c5}	-110,3213	-135,6522	-86,6171	-78,5844
k_{c6}	166,3413	46,8150	76,7154	43,1911

C.4.1 Resultados de simulação

Nas figuras seguintes são apresentados os resultados de simulação adicionais obtidos com os controladores de três modos ressonantes com ganho finito. A Fig. 90 apresenta a forma de onda da tensão de saída para carga linear com esses controladores para $f_a=5,4$ kHz. A Fig. 91 apresenta a corrente de saída para carga não-linear de referência para a mesma frequência de amostragem. Por fim, as Figuras 92 a 94 retratam os ensaios de desempenho dinâmico para degraus subtrativos de carga linear e não-linear de referência.

Figura 90: Tensão de saída para carga linear de referência com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.

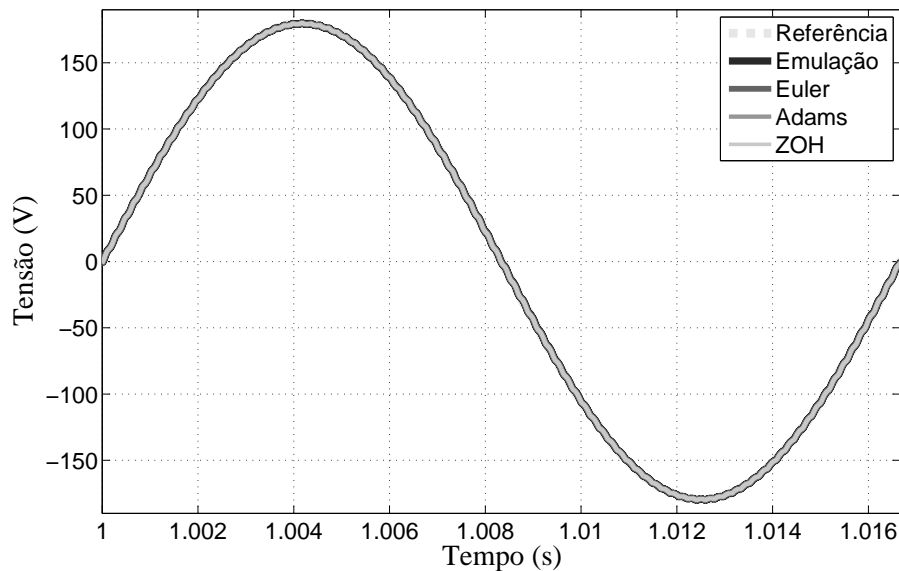


Figura 91: Corrente de saída para carga não-linear de referência com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.

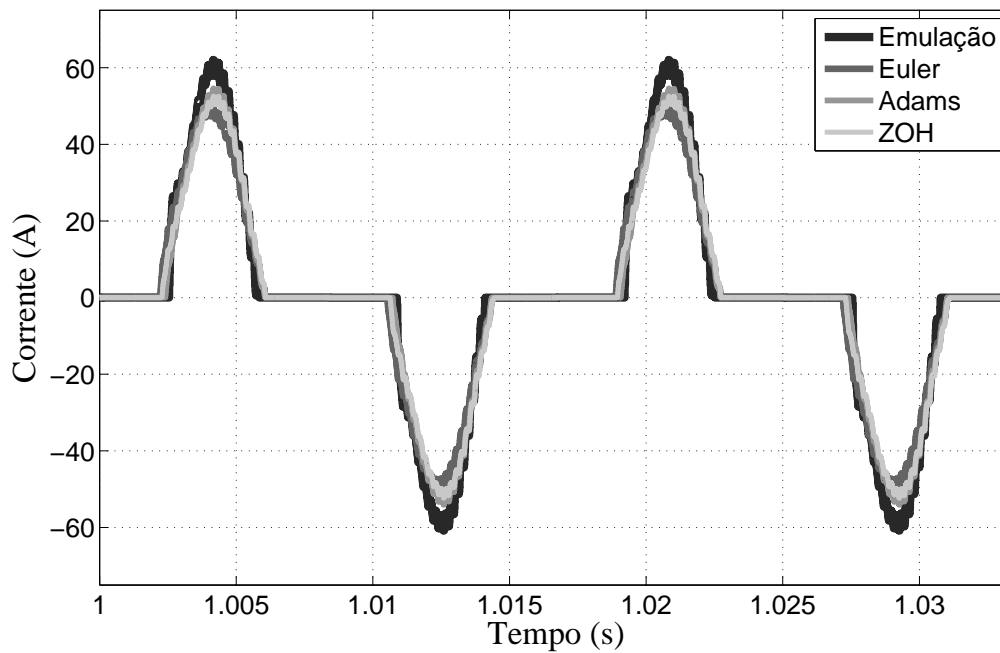


Figura 92: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=21600$ Hz.

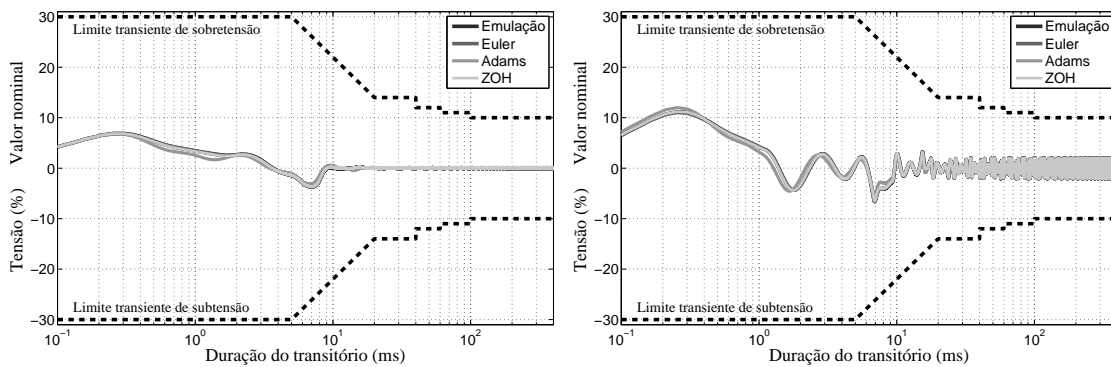


Figura 93: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=10800$ Hz.

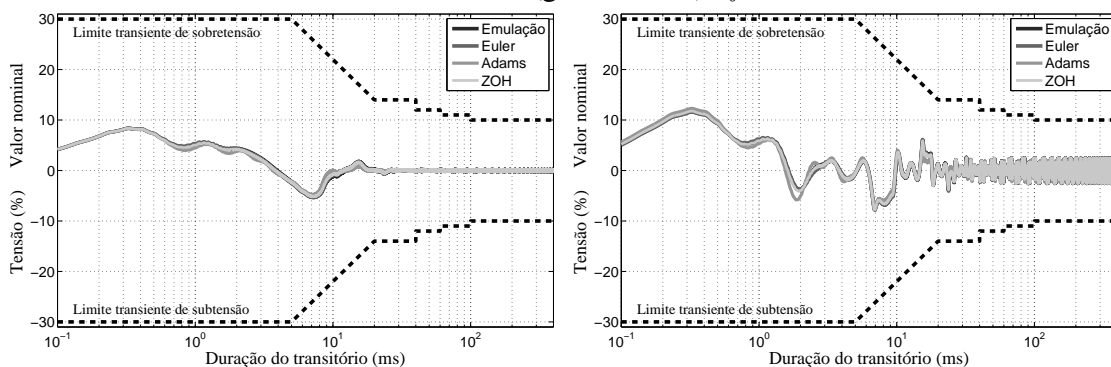
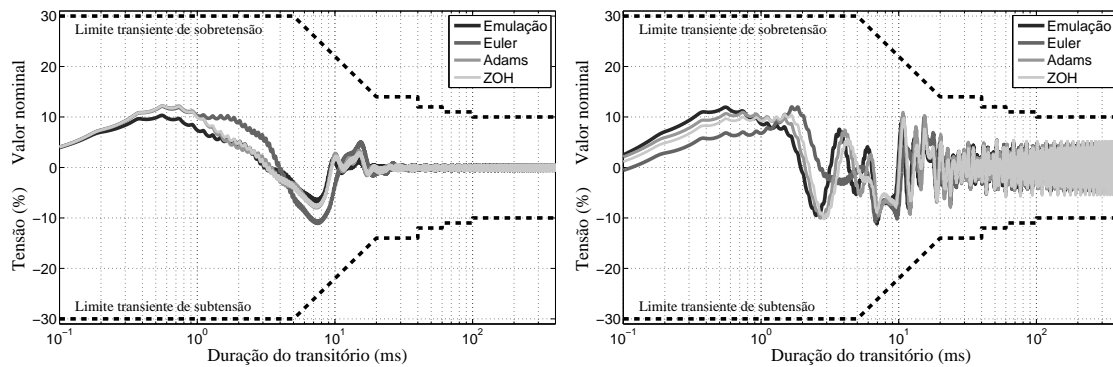


Figura 94: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com três modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.



C.5 Controlador com quatro modos ressonantes

As Tabelas 30 a 32 apresentam os parâmetros obtidos para o controlador ressonante com a solução de (100) para os 3 casos abordados. São apresentados também os parâmetros obtidos no PE a partir da solução de (33).

Tabela 30: Parâmetros para o controlador ressonante com quatro modos e $f_s=21600$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	50	0,9977	0,9977	0,9977
k_{p1}	-3,3057	-3,3181	-3,8502	-3,2340
k_e	2,8358	2,7774	3,2546	2,8340
k_{p3}	-	-	$8,5927 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$6,3522 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-3,8399 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-2,9335 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	-45,9502	1,8681	14,7954	2,0268
k_{c2}	992,3302	971,8656	1216,4423	978,7579
k_{c3}	-145,3153	-104,0188	-121,9718	-113,6136
k_{c4}	926,8088	909,8036	1186,4979	922,8696
k_{c5}	-284,3369	-230,1013	-338,2911	-260,4940
k_{c6}	793,5332	767,2973	1117,3082	796,6258
k_{c7}	-512,2594	-404,4310	-788,1275	-473,7821
k_{c8}	611,0041	539,7888	1038,3540	605,1478

Tabela 31: Parâmetros para o controlador ressonante com quatro modos e $f_s=10800$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
$f_s = 10800$ Hz				
σ ou ρ	40	0,9963	0,9963	0,9963
k_{p1}	-2,7973	-2,90333	-3,2265	-2,7940
k_e	2,3239	2,3041	2,6163	2,4456
k_{p3}	-	-	$13,2195 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$8,9001 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-5,7844 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-4,1797 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	-43,3383	32,4443	40,6157	23,9071
k_{c2}	699,0331	709,7706	831,9271	715,7751
k_{p3}	-134,4296	-76,0680	-95,4234	-98,9741
k_{p4}	645,5000	659,0408	810,3911	671,2721
k_{p5}	-253,3039	-180,8611	-293,4280	-233,4353
k_{p6}	526,7867	526,2635	744,4233	552,9496
k_{p7}	-444,9601	-274,8166	-697,5173	-386,7686
k_{p8}	332,5826	282,8518	620,0247	344,4510

Tabela 32: Parâmetros para o controlador ressonante com quatro modos e $f_s=5400$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
$f_s = 5400$ Hz				
σ ou ρ	50	0,9954	0,9890	0,9908
k_{p1}	-2,1781	-2,4178	-2,5133	-1,9311
k_e	0,6283	0,2093	0,7582	0,4365
k_{p3}	-	-	$38,1910 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$16,3256 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-14,9180 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-8,0835 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	-19,3270	5,6222	76,2468	37,0396
k_{c2}	329,1958	151,8158	406,6445	301,8283
k_{c3}	-66,4169	-54,9915	1,9904	-46,0109
k_{c4}	238,8620	107,8729	329,2146	232,6968
k_{c5}	-153,8676	-83,5780	-158,2473	-125,5970
k_{c6}	7,2396	-5,3916	105,6374	34,1238
k_{c7}	-482,8721	57,3841	-751,4465	-270,7965
k_{c8}	-557,0830	-216,8723	-451,0164	-456,6012

C.5.1 Resultados de simulação

Nas figuras seguintes são apresentados os resultados de simulação adicionais obtidos com os controladores de quatro modos ressonantes. A Fig. 95 apresenta a forma de onda da tensão de saída para carga linear com esses controladores para $f_a=5,4$ kHz. A Fig. 96 apresenta a corrente de saída para carga não-linear de referência para a mesma frequência de amostragem. Por fim, as Figuras 97 a 99 retratam os ensaios de desempenho dinâmico para degraus subtrativos de carga linear e não-linear de referência.

Figura 95: Tensão de saída para carga linear de referência com quatro modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.

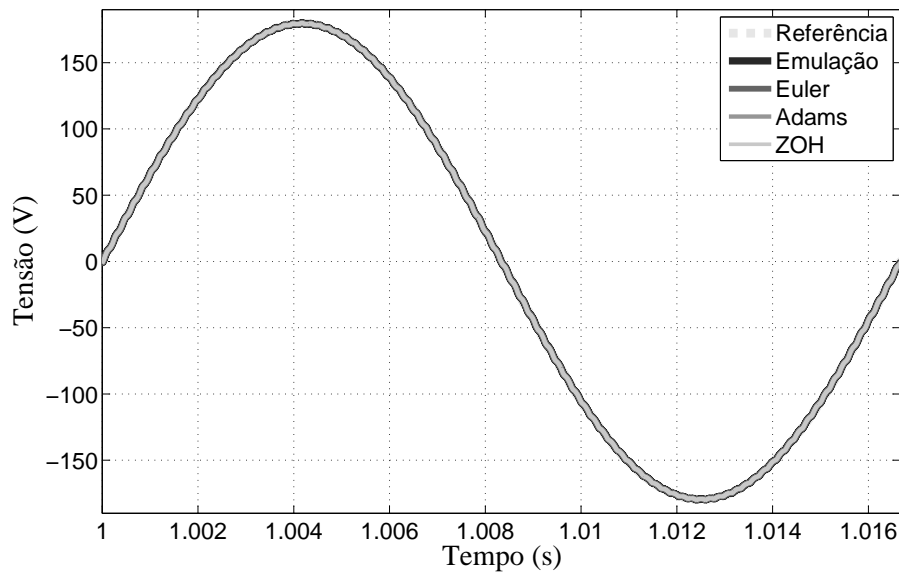


Figura 96: Corrente de saída para carga não-linear de referência com quatro modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.

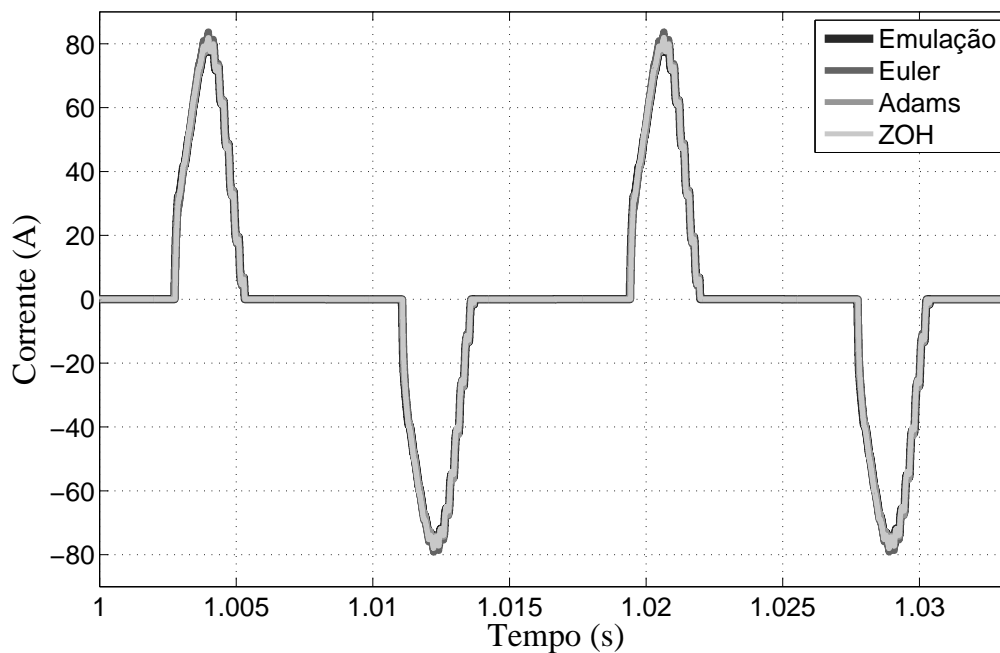


Figura 97: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=21600$ Hz.

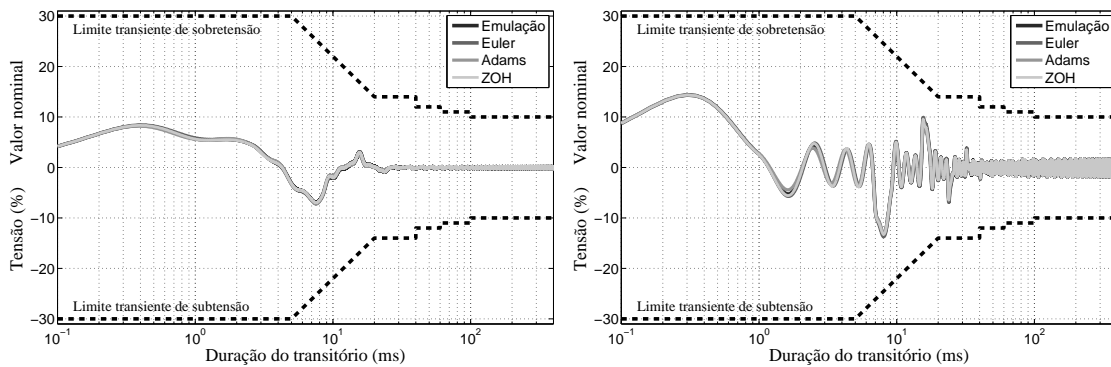


Figura 98: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=10800$ Hz.

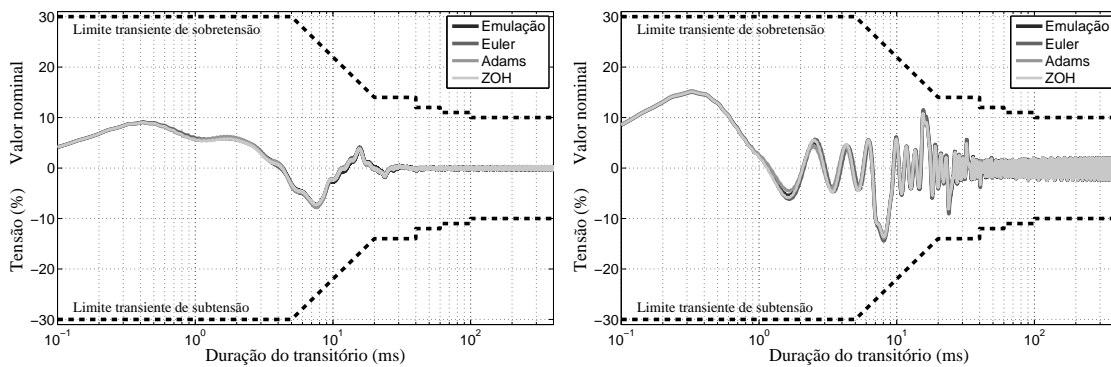
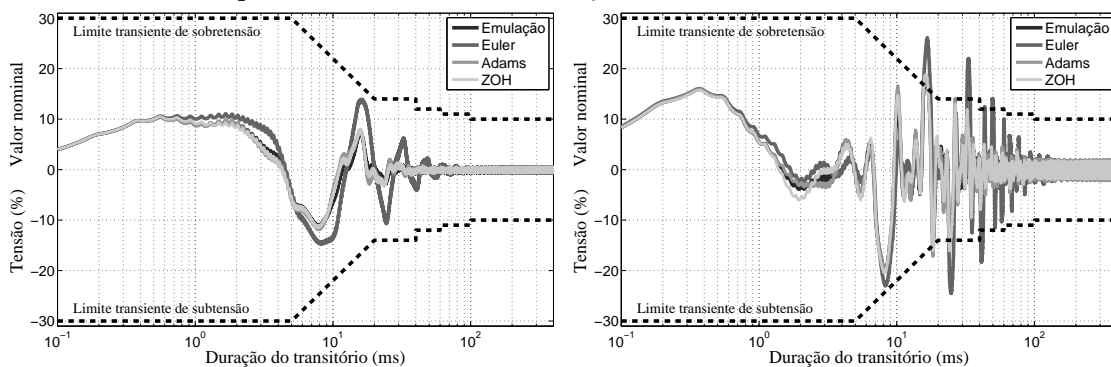


Figura 99: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes e $f_s=5400$ Hz.



C.6 Controlador com quatro modos ressonantes (ganho finito)

As Tabelas 30 a 32 apresentam os parâmetros obtidos para o controlador ressonante com a solução de (100) para os 3 casos abordados. São apresentados também os parâmetros obtidos no PE a partir da solução de (33).

Tabela 33: Parâmetros para o controlador ressonante com quatro modos (ganho finito) e $f_s=21600$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
σ ou ρ	50	0,9977	0,9977	0,9977
k_{p1}	-3,1042	-3,1123	-3,4101	-3,003
k_e	2,6774	2,6107	2,8896	2,6369
k_{p3}	-	-	$6,7674 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$4,7582 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-3,0325 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-2,1997 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	-27,6253	17,7805	32,3192	18,7214
k_{c2}	989,4719	973,4287	1135,3729	953,7484
k_{c3}	-99,6819	-67,2887	-71,8417	-72,9477
k_{c4}	830,1612	813,5995	983,6202	799,3719
k_{c5}	-224,0366	-184,7130	-249,7753	-200,6291
k_{c6}	657,2937	629,1066	835,5129	627,2257
k_{c7}	-406,6704	-326,4963	-554,1636	-358,4546
k_{c8}	443,1926	382,0434	641,0245	406,6236

Tabela 34: Parâmetros para o controlador ressonante com quatro modos (ganho finito) e $f_s=10800$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
$f_s = 10800$ Hz				
σ ou ρ	40	0,9963	0,9963	0,9963
k_{p1}	-2,4769	-2,5340	-2,6415	-2,5474
k_e	2,0871	2,0196	2,2697	2,2626
k_{p3}	-	-	$7,5577 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$4,7323 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-3,3522 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-2,2171 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	-24,9190	46,2462	65,5689	43,8413
k_{c2}	685,9085	671,1271	812,4406	721,0023
k_{p3}	-80,3529	-37,8924	-35,1775	-54,6143
k_{p4}	505,4050	514,9001	579,5337	551,7986
k_{p5}	-157,7157	-116,1679	-150,9328	-154,7453
k_{p6}	338,2055	345,8048	392,7919	382,4662
k_{p7}	-232,7767	-156,9653	-230,6442	-223,8688
k_{p8}	145,0344	127,8793	167,6319	171,7002

Tabela 35: Parâmetros para o controlador ressonante com quatro modos (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.

Parâmetros	PE	Euler	Adams	ZOH
$f_s = 5400$ Hz				
σ ou ρ	50	0,9908	0,9908	0,9908
k_{p1}	-2,0613	-3,2253	-1,9023	-1,8117
k_e	0,5570	0,4736	0,3684	0,2934
k_{p3}	-	-	$30,6743 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p4}	-	-	$10,0150 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p5}	-	-	$-12,2276 \cdot 10^{-5}$	-
k_{p6}	-	-	$-5,2262 \cdot 10^{-5}$	-
k_{c1}	-17,9318	15,6538	52,9168	34,1126
k_{c2}	325,1769	301,2065	285,3290	272,6252
k_{c3}	-62,4080	-100,0449	-5,2759	-41,6611
k_{c4}	223,6755	207,7915	206,0859	191,7451
k_{c5}	-140,9179	-176,2157	-114,1600	-114,0757
k_{c6}	8,5190	-15,6861	28,2126	-0,9088
k_{c7}	-389,8902	-224,8373	-432,8268	-218,1756
k_{c8}	-464,5842	-412,9639	-418,3134	-461,7558

Nas figuras seguintes são apresentados os resultados de simulação adicionais obtidos com os controladores de quatro modos ressonantes com ganho finito. A Fig. 100 apresenta a forma de onda da tensão de saída para carga linear com esses controladores para $f_a=5,4$ kHz. A Fig. 101 apresenta a corrente de saída para carga não-linear de referência para a mesma frequência de amostragem. Por fim, as Figuras 102 a 104 retratam os ensaios de desempenho dinâmico para degraus subtrativos de carga linear e não-linear de referência.

Figura 100: Tensão de saída para carga linear de referência com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.

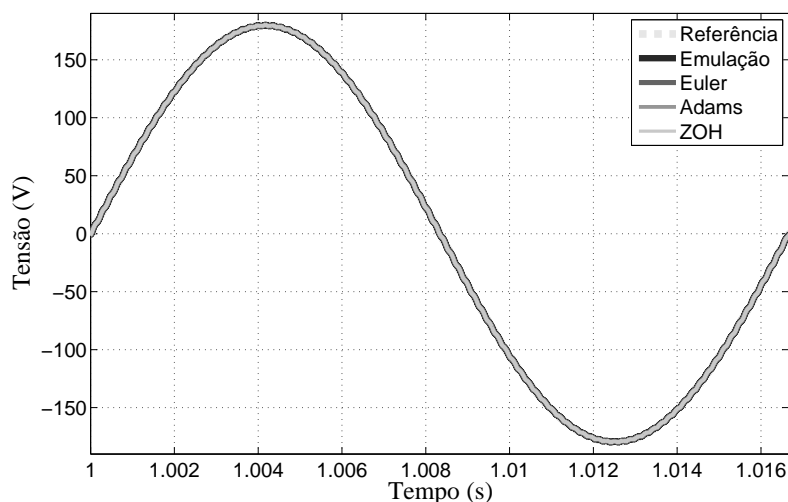


Figura 101: Corrente de saída para carga não-linear de referência com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.

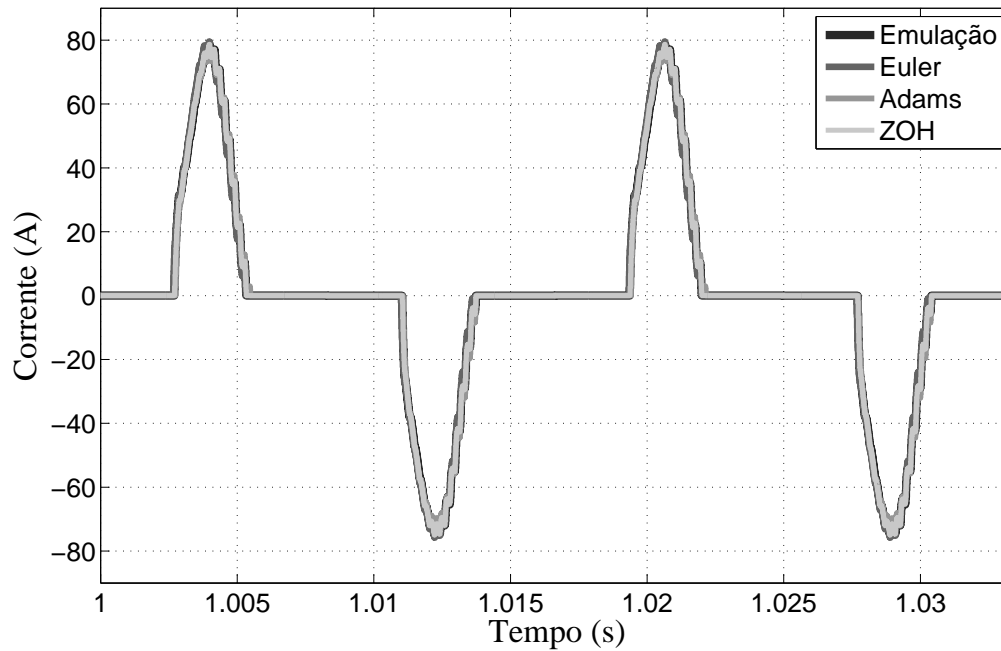


Figura 102: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=21600$ Hz.

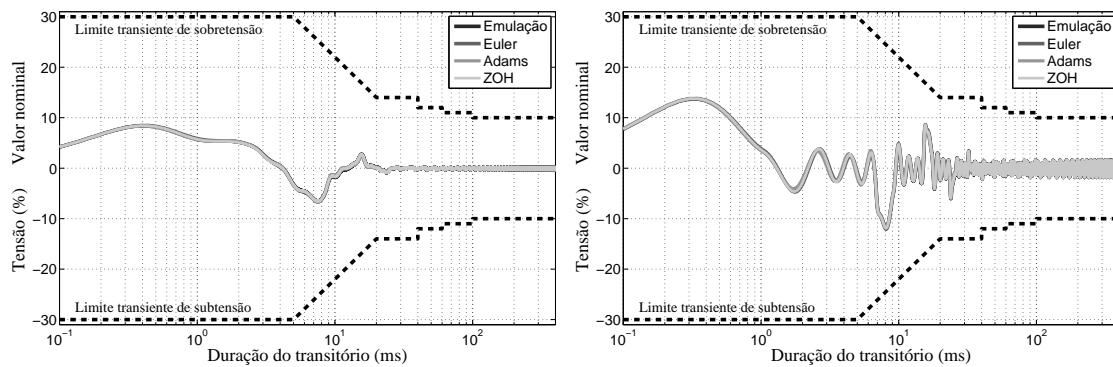


Figura 103: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=10800$ Hz.

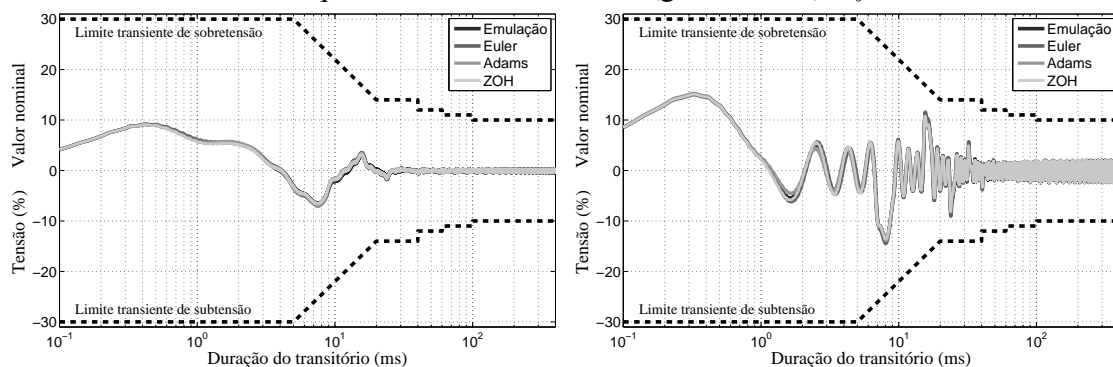
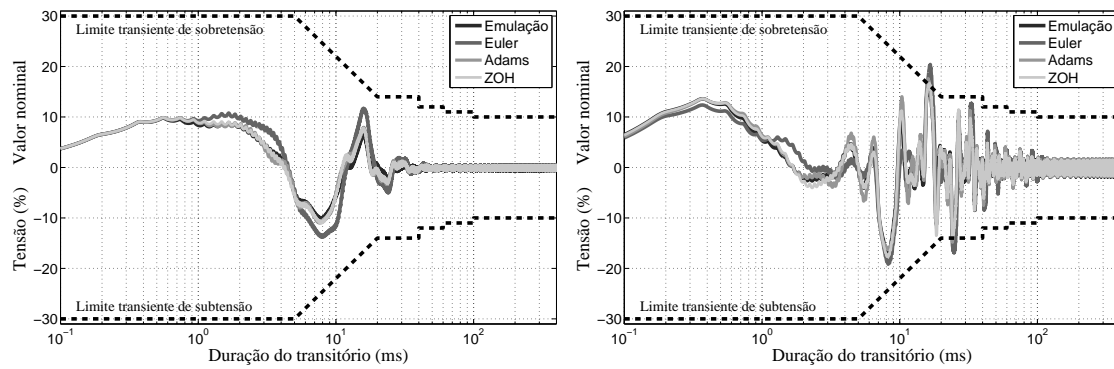


Figura 104: Perfil de tolerância do desvio de tensão para degraus subtrativos de carga linear e não-linear, com quatro modos ressonantes (ganho finito) e $f_s=5400$ Hz.



APÊNDICE D DISCRETIZAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS DO CONTROLADOR RESSONANTE

D.1 Zero-Order Hold

A discretização do controlador ressonante (21) com o método *zero-order hold* (ZOH) é obtida pelas seguintes conversões:

$$A_{rd} = e^{A_r T}, \quad B_{rd} = \left(\int_0^T e^{A_r s} ds \right) B_r, \quad C_{rd} = C_r, \quad D_{rd} = D_r. \quad (122)$$

A partir da solução da função exponencial matricial, obtêm-se as seguintes equações:

$$A_{rd} = e^{A_r T} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_r T) & \sin(\omega_r T) \\ -\sin(\omega_r T) & \cos(\omega_r T) \end{bmatrix} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} B_{rd} &= A_r^{-1}(e^{A_r T} - I)B_r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\omega_r} \\ \frac{1}{\omega_r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega_r T) - 1 & \sin(\omega_r T) \\ -\sin(\omega_r T) & \cos(\omega_r T) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\omega_r T)}{\omega_r} \\ \frac{1}{\omega_r} \sin(\omega_r T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (124)$$

$$C_{rd} = C_r = [k_{c1} \quad k_{c2}] \quad (125)$$

$$D_{rd} = D_r = \bar{k}_e \quad (126)$$

Resulta, portanto, nas seguintes matrizes de estado:

$$\begin{aligned} A_{rd} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega_r T) & \sin(\omega_r T) \\ -\sin(\omega_r T) & \cos(\omega_r T) \end{bmatrix}, \quad B_{rd} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\omega_r T)}{\omega_r} \\ \frac{1}{\omega_r} \sin(\omega_r T) \end{bmatrix}, \\ C_{rd} &= [k_{c1} \quad k_{c2}], \quad D_{rd} = \bar{k}_e. \end{aligned} \quad (127)$$

APÊNDICE E DISCRETIZAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS DO CONTROLADOR QUASI-RESSONANTE

E.1 Zero-Order Hold

O controlador ressonante com ganho finito na frequência ω_r é uma alternativa ao controlador ressonante utilizada nos experimentos com três e quatro modos ressonantes. Possibilita implementar o controlador ressonante em plataformas com processadores com ponto fixo, ao custo de ganhos finitos na frequência de ressonância. Na estrutura em tempo contínuo suas matrizes são dadas por:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r \\ -\omega_r & -2\xi\omega_r \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_r = [k_{c1} \quad k_{c2}], \quad D_r = \bar{k}_e. \quad (128)$$

A discretização do controlador ressonante de ganho finito (128) com o método *zero-order hold* (ZOH) é obtida pelas seguintes conversões:

$$A_{rd} = e^{A_r T}, \quad B_{rd} = \left(\int_0^T e^{A_r s} ds \right) B_r, \quad C_{rd} = C_r, \quad D_{rd} = D_r. \quad (129)$$

A partir da solução da função exponencial matricial, obtêm-se as seguintes equações:

$$A_{rd} = e^{A_r T} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \omega_r \beta_1 \\ -\omega_r \beta_1 & \beta_0 - 2\xi\omega_r \beta_1 \end{bmatrix} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} B_{rd} &= A_r^{-1}(e^{A_r T} - I)B_r \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-2\xi}{\omega_r} & \frac{-1}{\omega_r} \\ \frac{1}{\omega_r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 - 1 & \omega_r \beta_1 \\ -\omega_r \beta_1 & \beta_0 - 2\xi\omega_r \beta_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-\beta_0}{\omega_r} \\ \beta_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (131)$$

$$C_{rd} = C_r = [k_{c1} \quad k_{c2}] \quad (132)$$

$$D_{rd} = D_r = \bar{k}_e \quad (133)$$

com os parâmetros

$$\beta_0 = e^{-\xi\omega_r T} \left(\frac{\xi\omega_r}{\omega_d} \sin(\omega_d T) + \cos(\omega_d T) \right), \quad \beta_1 = \frac{e^{-\xi\omega_r T}}{\omega_d} \sin(\omega_d T).$$

Resulta, portanto, nas seguintes matrizes de estado:

$$\begin{aligned} A_{rd} &= \begin{bmatrix} e^{-\xi\omega_r T} \left(\frac{\xi\omega_r}{\omega_d} \sin(\omega_d T) + \cos(\omega_d T) \right) & \frac{e^{-\xi\omega_r T}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d T) \\ -\frac{e^{-\xi\omega_r T}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d T) & e^{-\xi\omega_r T} \left(-\frac{\xi\omega_r}{\omega_d} \sin(\omega_d T) + \cos(\omega_d T) \right) \end{bmatrix}, \\ B_{rd} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_r} - \frac{1}{\omega_r} e^{-\xi\omega_r T} \left(\frac{\xi\omega_r}{\omega_d} \sin(\omega_d T) + \cos(\omega_d T) \right) \\ \frac{e^{-\xi\omega_r T}}{\omega_d} \sin(\omega_d T) \end{bmatrix}, \\ C_{rd} &= [k_{c1} \quad k_{c2}], \quad D_{rd} = \bar{k}_e. \end{aligned} \tag{134}$$

É fácil verificar que, para $\xi = 0$ essa discretização resulta na representação em espaço de estados do controlador ressonante com ganho infinito (127).