UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Antonio José da Silva

Tese

Porto Alegre
2017

Antonio José da Silva

NOÇÃO DE LIMITE DE FUNÇÕES REAIS E GEOGEBRA: Um estudo em Epistemologia Genética

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para obtenção do título de Doutor em Informática na Educação.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Becker

Área de Concentração: Paradigmas para a Pesquisa sobre o Ensino Científico e Tecnológico

Porto Alegre
2017

CIP - Catalogação na Publicação

Silva, Antonio José da
NOÇÃO DE LIMITE DE FUNÇÕES REAIS E GEOGEBRA: Um estudo em Epistemologia Genética / Antonio José da Silva. -- 2017.
221 f.

Orientador: Fernando Becker.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2017.

1. Noção de limite. 2. Objetos de aprendizagem. 3. Abstração reflexionante. 4. Geogebra. I. Becker, Fernando, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

ATA SOBRE A DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
ANTONIO JOSÉ DA SILVA

Às nove horas do dia trinta de março de dois mil e dezessete, na sala 329 do PPGIE/CINTED, nesta Universidade, reuniu-se a Comissão de Avaliação, composta pelos Professores Doutores: Léa da Cruz Fagundes, Elisabete Zardo Búrigo e João Batista Bottentuit Junior, para a análise da defesa de Tese de Doutorado intitulada ***"Noção de Limite de Funções Reais e Geogebra: um Estudo em Epistemologia Genética"***, do doutorando do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação Antonio José da Silva, sob a orientação do Prof. Dr. Fernando Becker.
A Banca, reunida, após a apresentação e arguição, emite o parecer abaixo assinalado.

[X] Considera a Tese aprovada

(X) sem alterações;
( ) e recomenda que sejam efetuadas as reformulações e atendidas as sugestões contidas nos pareceres individuais dos membros da Banca;

[ ] Considera a Tese reprovada.

Considerações adicionais (a critério da Banca):
Sugere-se maior detalhamento sobre o percurso metodológico do trabalho.
Recomenda-se a publicação no formato de artigos.

Porto Alegre, 30 de março de 2017.

Prof. Dr. Fernando Becker
Presidente e Orientador

Léa da Cruz Fagundes
Profª. Drª. Léa da Cruz Fagundes
PPGIE/UFRGS

Profª. Drª. Elisabete Zardo Búrigo
PPGMat/UFRGS

(videoconferência)
Prof. Dr. João Batista Bottentuit Junior
UFMA

Resumo

Esta pesquisa reporta-se ao problema descrito na literatura científica como o "fracasso do ensino do cálculo". Propusemos conhecer as noções que alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral apresentam sobre limite, e também como a qualidade dessa noção ou conceito afeta a elaboração de noções sobre derivadas e integrais. Para obter essas noções, objetos de aprendizagem foram criados e disponibilizados online, em páginas de um site com domínio privado, mas de acesso aberto. Cada objeto de aprendizagem foi elaborado contendo uma situação-problema referente aos *applets* de cada página e um espaço de registro de respostas. Os *applets* abordam situações que permitem o estudo de limites, derivadas e integrais; foram elaborados no Geogebra. Os espaços de registro de respostas foram elaborados com tecnologia Google e incorporados à página do site. A metodologia consistiu na aplicação de atividades na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Nelas interagiram alunos e OA. As aplicações foram realizadas nas três unidades da disciplina. Para a complementação e investigação, foram feitas entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano. Tanto os registros de respostas, quanto as entrevistas, foram autorizadas com a assinatura do termo de consentimento livre e esclarecido. Fundamenta-se a análise das respostas na Epistemologia Genética; em especial, na abstração reflexionante. A escolha deu-se devido ao caráter explicativo dessa teoria da gênese do conhecimento matemático. Os resultados demonstram que conhecimentos foram construídos em situação de interação entre alunos e OA. Várias noções foram registradas. Constatou-se, inclusive, conceituação de limite, de derivada e integral definida. Foi possível, a partir dos conhecimentos e noções apresentadas, estabelecer relações lógicas entre esses conhecimentos e, posteriormente, observar grupos com desenvolvimento cognitivo compatíveis com as relações lógicas apresentadas. O OA, com tecnologia Geogebra e Google, mostrou-se como um importante instrumento nos processos de desenvolvimento e aprendizagem do conceito de limite e dos demais conceitos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Mostrou-se também como um importante instrumento para a avaliação no ambiente escolar a partir dos registros coletados.

Palavras-chave: Noção de limite. Objetos de aprendizagem. Abstração reflexionante. Geogebra.

Abstract

This research refers to the problem described in the scientific literature as the "failure of calculus teaching". We propose to know the notions that students of the discipline Differential and Integral Calculus present on limit, and also how the quality of this notion or concept affects the elaboration of notions about derivatives and integrals. To get these notions, learning objects were created and made available online, on pages of a privately-owned, but open-access site. Each learning object was elaborated containing a problem situation regarding the applets of each page and a space of record of answers. The applets approach situations that allow the study of boundaries, derivatives and integrals; Were developed in Geogebra. Response log spaces were crafted using Google technology and embedded into the site page. The methodology consisted of the application of activities in the discipline Differential and Integral Calculus. In them they interacted students and OA. The applications were carried out in the three units of the discipline. For the complementation and investigation, interviews were made inspired by the Piagetian clinical method. Both the response records and the interviews were authorized with the signing of the informed consent form. It is based the analysis of the answers in the Genetic Epistemology; In particular, in reflective abstraction. The choice was due to the explanatory character of this theory of the genesis of mathematical knowledge. The results demonstrate that knowledge was built in a situation of interaction between students and OA. Several notions were recorded. It was also found a concept of limit, derivative and definite integral. It was possible, based on the knowledge and notions presented, to establish logical relations between these knowledges and, later, to observe groups with cognitive development compatible with the presented logical relations. The OA, with Geogebra and Google technology, proved to be an important instrument in the development and learning processes of the concept of boundary and other concepts of the Differential and Integral Calculus discipline. It was also shown as an important instrument for the evaluation in the school environment from the collected records.

Keywords: Limit notion. Learning objects. Reflective abstraction. Geogebra.

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional.

Agradeço a minha mãe, dona Marimi da C. Silva Guimarães, pelo incentivo e cuidado com minha educação e de meus irmãos.

Agradeço o apoio que recebi de minha esposa, Irleide A. F. da Silva, sempre cuidando de nossa filha, Íris Mariana F. da Silva, nos meus muitos momentos de ausência.

Agradeço a minha filha Íris Mariana F. da Silva por já demonstrar compreender, mas sem aceitar a ausência do seu pai.

Agradeço o corpo docente e administrativo do PGIE/CINTED/UFRGS pelo apoio e companheirismo. Em especial agradeço aos professores e professoras que foram promotores e exemplos para minha formação: José Valdeni Lima, Léa da Cruz Fagundes, Eliseu Berni Reategui, Maria Cristina V. Biazus, Liane M. R. Tarouco e a sempre amável Magda Bercht. Aos servidores do PGIE e CINTED: Giovani Oliveira (a quem devo pela ajuda na elaboração do primeiro ambiente virtual com o CmapTools), Dona Helena (Pelo sorriso e amabilidade), Nina, Everson e Carla (pelo atendimento impecável e pela paciência com as demandas que foram surgindo).

Agradeço os colegas, amigos e amigas do DINTER/UFMA/UEMA/UFRGS.

Agradeço os colegas e amigos e amigas do doutorado no PGIE.

Agradeço os colegas do Grupo de Pesquisa em Epistemologia Genética pela amizade, parceria intelectual e companheirismo.

Agradeço o companheirismo dos professores e professoras do CCHNST/UFMA e CCLCN/UFMA.

Agradeço ao meu orientador, de fato um orientador, o professor, educador, Dr. Fernando Becker, pelo cuidado pessoal, e pela forma competente e brilhante que soube conduzir a orientação desta agora Tese, em todos os meus processos de construção, me considerando um sujeito de minha própria aprendizagem.

Agradeço a todos os docentes da minha vida escolar e acadêmica que certamente contribuíram para minha formação pessoal, profissional e intelectual.

Agradeço à UFMA, à CAPES e à FAPEMA pelo apoio financeiro, essenciais para a manutenção e conclusão desta pesquisa.

Dedicatória

Em respeito à minha fé, dedico esta obra a Deus.

Em respeito à minha ausência como pai, filho, neto e esposo, dedico esta obra à minha filha Íris Mariana Fonsêca da Silva, à minha mãe Marimi da Conceição Silva Guimarães, à minha avó Inocência de A. Silva e à minha esposa Irleide A. F. da Silva.

LISTA DE TABELAS E QUADROS

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE SIGLAS

AE - Abstração empírica
AMT - Advanced Mathematical Thinking
AR - Abstração reflexionante
AVA - Ambientes Virtuais para a Aprendizagem
CDI - Cálculo Diferencial e Integral de Integral de uma Variável Real
Cinvestav-IPN - Centro de Investigação e Estudos Avançados do Instituto Politécnico Nacional do México
CVM - Centro Virtual de Modelagem
DEOAC - Desenvolvimento e Organização Acadêmica
DM - Didática da Matemática
DME - Departamento de Matemática Educativa
EG - Epistemologia Genética
EM - Educação Matemática
GGB - Geogebra
HTML - Hiper Text Markup Language
IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IE - Informática Educativa - Informática na Educação
IES - Instituição de Ensino Superior
LCN - Licenciatura em Ciências Naturais
LMS - *Learning Management Systems*
MC - Método Clínico
MERC - Mathematics Education Research Center
NEAD - Núcleo de Educação a Distância
NTI - Núcleo de Tecnologia da Informação
OA - Objeto de Aprendizagem
PROFEBPAR - Plano Nacional de Formação para Professores da Educação Básica
PUC-SP - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SGA - Sistemas de Gestão da Aprendizagem
SIGAA – Sistema Integrado de Gerenciamento de Atividades Acadêmicas
TC - Tomada de consciência
TIC - Tecnologia de Informação e Comunicação
UAB - Universidade Aberta do Brasil
UFF - Universidade Federal Fluminense
UFMA - Universidade Federal do Maranhão
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

Na escola, o professor se vale de uma didática ou metodologia para gerar situações que favoreçam a aprendizagem do aluno. Seguindo esse pensamento, foi possível observar que tal prática é reproduzida em muitas das pesquisas que foram catalogadas quando analisamos artigos sobre as propostas de inserção da informática e das tecnologias no ambiente escolar (KESSLER, 2008; BIZELLI; FISCARELLI; BARROZO, 2010; FERNANDES, 2012; CARNEIRO; SILVEIRA, 2014). Não generalizando, pode-se dizer que, em grande parte desses trabalhos, o processo de conhecimento específico não é tratado objetivando a sua construção nem os processos cognitivos que resultam das atividades propostas. Geralmente, limita-se a reportar, na visão dos autores, como a tecnologia ajuda a melhorar os resultados da sala de aula. Entretanto, algumas pesquisas se destacam por estudar o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem (PIAGET, 1977; 1995; FAGUNDES; SATO; MAÇADA, 1999; VALENTE, 2002; BONA; BASSO; FAGUNDES, 2014; BONA; BASSO, 2014; NOTARE; BASSO, 2012).

No prosseguimento deste texto, serão abordados trabalhos que se propuseram a estudar a Informática Aplicada à Educação em seus aspectos qualitativos e quantitativos no ensino de matemática. Diante dessas observações, tentamos caracterizar esta pesquisa como uma inserção de tecnologia no processo educativo para que, a partir do seu uso, sejam analisados os processos realizados pelos alunos quando objetivam a aprendizagem.

A informática nos traz a ideia da inovação e a expectativa de que seus recursos irão facilitar de algum modo a vida do ser humano. Nas salas de aula da Educação Básica e superior, a informática apresenta-se como alternativa para potencializar as atividades escolares, levando à inovação (novas práticas e vivências docentes e discentes) por meio de seus conceitos, suas teorias, seus ambientes virtuais, suas redes de comunicação virtual, objetos de aprendizagem, dispositivos de comunicação e informação móveis, além de seus *softwares*, *apps (aplicativos para dispositivos móveis)* e *hardwares*.

Tanto no âmbito da Educação Básica quanto da Educação Superior, o docente se depara com diversas situações que não são exitosas sob o ponto de vista de resultados, mas deveriam ser sob o ponto de vista da capacidade de produzir conhecimento. Jean Piaget defende, como uma das finalidades da educação, a formação científica do aluno, capaz de gerir e construir conhecimento (PIAGET, 1970). Com o intuito de modificar esse cenário desfavorável à aprendizagem, o professor tende a modificar suas práticas, mas tal ação só surtirá efeito se forem considerados outros aspectos do aluno, como os da individualidade e do desenvolvimento intelectual frente às questões que objetiva. Sob o olhar da Informática Aplicada à Educação, a conduta do aluno frente ao conhecimento deve ser o de um explorador, quer seja por atividade individual quer seja em grupo, mas que, nessas ações, esse aluno possa tomar consciência de suas ações e dos mecanismos que se valeu para obter êxito; é assim que aprenderá (VALENTE, 2002a; FAGUNDES; SATO; MAÇADA, 1999; BECKER, 2012).

Inserir o aluno no contexto da educação e de suas tecnologias de informação tem sua relevância, uma vez que a sociedade atual vive a tecnologia e necessita dela para necessidades diversas. Os alunos precisam ver na escola um reflexo da sociedade em que vivem (TAJRA, 2012). Se, no meio social, externo à sala de aula, esse aluno tem uma rede particularizada que troca e acessa informação em instantes, então porque não trazer elementos que façam sentido a essa realidade? Nesse sentido, a informática age para propiciar a inovação, afinal, o cotidiano de muitos alunos é a vivência com as tecnologias. É importante salientar que a sala de aula é um lugar de interação entre aluno e a cultura mais elaborada, especialmente o conhecimento científico. Portanto, é natural que lhe sejam ofertadas vivências educacionais com suporte da informática educativa (FAGUNDES, SATO e MAÇADA, 1999).

A “informática educativa” e a “informática na educação” (IE) são termos que designam um tema ou uma área de pesquisa de extrema relevância na atualidade. É uma temática bem difundida em diversos grupos de estudo interdisciplinar de pós-graduação, como os do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, da UFRGS, e o Núcleo de Informática Aplicada à Educação, da UNICAMP. Esses e outros centros acadêmicos dão ao tema uma posição de destaque no estágio atual das pesquisas educacionais, trazendo, para o ambiente escolar, as tecnologias e as práticas inovadoras, e orientam as políticas educacionais. Diante do contexto apresentado, torna-se importante destacar que a escola tem tido dificuldades em cumprir seu papel social, de instrumento a favor da inclusão, e de ambiente de construção e troca de saberes na coletividade (PIAGET, 1977b; MACHADO, 2009; DOLLE, 2011). Vemos, por isso, na possibilidade de conhecer os processos cognitivos, um meio para orientar o aluno em seu desenvolvimento cognitivo, oportunizando, assim, a aprendizagem.

A Informática educativa surge como uma área de pesquisa necessária, tanto para o ensino presencial quanto para o ensino a distância. Para desenvolver esse tema, é necessário analisar na totalidade esse conceito que passa pelo de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Segundo Blunter (1999, p. 01), TIC: "é o conjunto de ferramentas e recursos tecnológicos usados para comunicar, criar, disseminar, armazenar e gerenciar informação". Sendo assim, as TIC são compreendidas no escopo da IE, tendo sua importância configurada nas práticas cada vez mais constantes por meio de *softwares*, ambientes informatizados e virtuais que objetivam a aprendizagem escolar (SOUZA JÚNIOR; MOURA, 2010). Neste trabalho, foi feito o uso de tecnologias educacionais de ampla utilização nos espaços educacionais; são elas: o "Google Drive", com suas tecnologias embarcadas; um ambiente virtual (Moodle, SIGAA – Sistema Integrado de Gerenciamento de Atividades Acadêmicas, e o Site Cálculo NasNuvens) e o "Geogebra". O primeiro nos permitiu a coleta de dados e o seu armazenamento em tempo real. O segundo foi utilizado para criar um ambiente controlado para a pesquisa. Já o terceiro foi utilizado para criar e gerir as situações-problema[1] sob a forma de objetos de aprendizagem (OA). Nesta pesquisa, adotaremos o termo "tecnologia" para identificar TIC.

Este trabalho se insere em um contexto escolar universitário. O sujeito da pesquisa é o aluno que cursa a disciplina Cálculo Diferencial e Integral e, segundo Becker (2012), o aluno só construirá conhecimento, ou melhor, só aprenderá se agir e problematizar a própria ação, apropriando-se dos mecanismos íntimos dessa ação. A epistemologia genética (EG) se propõe a estudar como o ser humano constrói seu conhecimento ou sua capacidade cognitiva, considerando esse sujeito um ser biológico e que age sobre o meio por força das estruturas que construiu. O conhecimento resulta de um processo ativo em que um indivíduo o elabora a partir da realidade (interna ou externa).

Segundo Dolle (2011, p. 13), "Conhecer a explicação não é explicar. É preciso, primeiro, a compreensão, ou seja, a representação do encadeamento e fornecer, assim, a explicação". Piaget afirmava que os fatores externos e os internos são indissociáveis e de igual importância para o conhecimento. Ele apresentou discussão a esse respeito em duas obras que se complementam, o "Tomada de Consciência" (PIAGET, 1977) e o "Fazer e Compreender"

[1]Termo utilizado para identificar as atividades propostas aos alunos ou situações que o aluno identifica e se dispõe a solucionar.

(PIAGET, 1978), ambas referências utilizadas nesta proposta de pesquisa. Outra obra de referência para esta pesquisa é a “Abstração Reflexionante” (PIAGET, 1995).

A abstração reflexionante desperta o interesse de muitos educadores, se valendo dela como referencial teórico de suas pesquisas, ou até mesmo dedicando-se em demonstrar como essa teoria pode contribuir para explicar os fenômenos que envolvem o ensino e a aprendizagem.

Em Becker (1993) há uma vasta abordagem teórica da abstração reflexionante. Nesse estudo, o autor discute a importância dessa teoria nas práticas educativas. Apresenta reflexões sobre as concepções pedagógicas de docentes sobre o processo de aprendizagem. Aponta nessa teoria, e na própria epistemologia genética, meios para tornar as práticas educativas, numa visão epistemológica, mais construtivas. Em Becker (2014) o autor apresenta a teoria da abstração reflexionante contrapondo-a à abstração empírica. Apresenta na extensa obra de Jean Piaget os elementos que fundamentam a proposta da abstração reflexionante como uma alternativa à metodologia da repetição, garantindo assim os elementos necessários para uma pedagogia ativa, fundada na característica construtiva do conhecimento. Demonstra a importância que a abstração pseudoempírica tem para a Epistemologia Genética e para a compreensão do mecanismo da abstração reflexionante.

Em Bona e Souza (2015) as autoras se propõem a compreender o processo de construção dos conceitos matemáticas por meio de atividades de investigação. Fundamentado pela abstração reflexionante, os pesquisadores observaram as aulas e atividades investigativas com alunos do ensino fundamental. Destacam como resultado, o processo de construção do conceito de múltiplos e divisores de um número natural. Em Becker (2013), o autor faz uma crítica ao ensino de matemática da forma como está posto. As críticas são resultantes de pesquisa realizadas com professores da educação básica. Nesse texto faz severas crítica às concepções epistemológicas inatistas, empiristas e de maneira comparativa apresenta a concepção epistemológica do ensino pautada no construtivismo interacionista proposto por Jean Piaget. Esse modelo epistemológico sugere um modelo pedagógico centrado na ação do sujeito, mais especificamente na qualidade da interação entre sujeito e objeto. Faz ainda uma revisão teórica sobre a teoria da abstração reflexionante, relacionando os principais temas com pesquisas realizadas com professores da educação básica e superior.

Em Menegais et al (2015) as autoras promoveram um estudo para investigar a inversão das operações aritméticas, utilizando como referencial teórico a abstração reflexionante. A aplicação do método clínico piagetiano permitiu observar os níveis de desenvolvimento, concluindo que sujeitos do nível III adquirem a noção de número por abstração refletida considerando o processo do caminho percorrido, da ordenação e da inversão das operações. Em Becker (2017), o autor além de percorrer o tratado sobre abstração reflexionante, publicado em 1977 por Jean Piaget e colaboradores, apresenta a abstração pseudoempírica como um importante instrumento a ser aproveitado por docentes em suas práticas de sala de aula. Apresenta ainda o valor epistemológico e metodológico da abstração pseudoempírica. Insere a teoria da abstração reflexionante no contexto educacional, afirmando que pela abstração pseudoempírica os dados empíricos são enriquecidos, acrescentando a eles significados, valorizando assim a atividade do sujeito no seu processo de aprendizagem.

Em Bona, Basso e Fagundes (2014), os autores estabelecem um estudo teórico e prático sobre os processos de aprendizagem dos conceitos de Matemática através da cooperação entre alunos em uma rede social. Trata-se de uma pesquisa-ação. Ao relacionar os conceitos de cooperação com a abstração reflexionante, os autores apresentam, segundo eles, uma nova visão sobre o processo de construção do conhecimento de Matemática. Nessa visão, os alunos exploram as tecnologias digitais online em seus processos criativos. Em Notare e Basso (2012), os autores discutem o potencial do software GeoGebra no processo de construção de conceitos matemáticos. A abstração reflexionante é utilizada para subsidiar a análise de resultados obtidos a partir de um projeto de modelagem geométrica, da trajetória de uma bola de basquete. Segundo os autores foi possível evidenciar a construção de diversos conceitos, dentre eles, função e continuidade. O que evidencia não só o potencial da tecnologia no processo de construção do conhecimento matemático, mas também o potencial da abstração reflexionante na composição metodológica e na análise de resultados educacionais.

Em Bona, Coelho e Basso (2013), os autores investigam a simbologia e a linguagem, a representação própria, desenvolvida por estudantes do Ensino Fundamental. Nessa investigação os alunos utilizam o aplicativo *whatsapp* com o objetivo de analisar os registros escritos na tentativa de construção de conceitos matemáticos. A base teórica é a abstração reflexionante. Concluem que as representações escritas, dos alunos sobre as situações postas como problemas, constituem verdadeiras expressões de processos de abstração reflexionante.

Nesses trabalhos nota-se quão próximos são os temas ensino e aprendizagem da matemática; abstração reflexionante e tecnologias digitais.

Na abstração reflexionante (AR), a construção do conhecimento é conduzida pelas generalizações, em nível de trocas simbólicas. Essa última obra referida faz-nos perceber que todo novo conhecimento supõe uma abstração. Ampliando esse tema, Piaget disse a Bringuier (1978, p. 32):

> O conhecimento é uma interação entre o indivíduo e o objeto, mas eu penso que o indivíduo não pode ser encerrado em uma estrutura dada, definitivamente [...] [acredita que] [...] o indivíduo constrói seus conhecimentos, constrói suas estruturas.

Nas palavras de Dolle (2011) e Bringuier (1978), fica evidente que o sujeito realiza seu desenvolvimento cognitivo; concebe o conhecimento como algo a ser construído, e cabe ao meio gerar condições para que esse sujeito construa seu conhecimento. Empregamos essa concepção nas situações-problema apresentadas aos alunos nesta pesquisa. A partir de uma situação descrita, os alunos podem agir livremente sobre os OA, o que permite ao aluno a possibilidade de observar as características dos objetos e refazer suas ações na busca da solução ou do entendimento do problema, pois compreendemos que os alunos são sujeitos ativos em um processo de aprendizagem e não apenas objeto da ação docente, por mais importante que seja esta (BECKER, 2012; 2012b). Compreendendo sua função, é possível descentrar as ações da sala de aula, com ênfase nos conteúdos, e voltá-las para a investigação dos processos de aprendizagem produzidos (DOLLE, 2011; PIAGET, 1970). Não que os conteúdos sejam menos importantes, mas trata-se de conhecer como os alunos se desenvolvem e aprendem no ambiente escolar, e tanto a IE quanto a EG têm muito a contribuir para essa análise.

1.1 MOTIVAÇÃO

A motivação para a proposição desta pesquisa repousa em inquietações formuladas por mim ao longo da vida docente. Dos 18 anos de docência, 11 ocorreram na Educação Básica e nove no Ensino Superior, sendo dois em concomitância. No Ensino Superior, em faculdades particulares e universidades públicas, ao lecionar a disciplina “Cálculo Diferencial e Integral de Integral de uma Variável Real” (CDI) para cursos de Informática, Engenharia e Licenciaturas, observava a dificuldade e o desconforto que os alunos demonstravam diante das exigências teóricas e práticas. Tal desconforto era decorrente não apenas da forma como a estrutura curricular estava posta, mas também das dificuldades que eles apresentavam em prosseguir nas unidades de conteúdo da disciplina que necessitavam de base conceitual sobre o limite de funções. Embora não tenha ainda explicitado o problema da pesquisa, na próxima seção, o farei com referência a esse pensamento. Mas, em geral, os livros apresentam uma linguagem muito técnica e exacerbadamente abstrata, e a sua concepção visa atender a uma estrutura curricular.

Ao observar as turmas, por meio de conversas e abordagens com problemas relacionados a outras áreas, foi possível identificar dificuldades de natureza bem diversa, que iam desde a dificuldade em relacionar os temas da disciplina (limite de funções, derivada de funções e integração), até mesmo, inabilidade técnica e lógica por ausência de conhecimentos específicos que deveriam ter sido aprendidos na Educação Básica.

Na docência pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA), no curso de Licenciatura em Ciências Naturais, foi registrado um número muito baixo de aprovados na disciplina CDI considerando o número de inscritos, conforme é exposto na Tabela 1.

Tabela 1: Percentual de aprovação, por turma**,** em relação ao número de matrículas

Ano	Período	Matriculados	Aprovados	Aprovação (%)
2012	2	60	3	5,00
2012	2	50	4	8,00
2013	2	54	33	61,11
2013	1	33	28	84,85
2013	2	14	13	92,86
2015	2	56	12	21,43
2015	1	44	30	68,18

Fonte: PROEN/DEOAC – UFMA

Ao confrontar os dados da Tabela 1, com dados de outros professores, que também lecionam para esse curso em outros *campi* da UFMA, constatei que os números eram muito similares, retomando, assim, as inquietações anteriores. Ao realizar pesquisas sobre os resultados finais da disciplina CDI, foi possível perceber a dimensão do problema, e, segundo Rezende (2003), Fogaça (2003) e Lafuente, Armenteros e Moll (2012), ele existe em escala mundial.

O curso de Licenciatura em Ciências Naturais (LCN) está distribuído em diversos *campi* da UFMA, espalhados pelo estado do Maranhão. O curso de LCN, que foi alvo desta pesquisa, localiza-se no *Campus* da UFMA da cidade de Pinheiro. Esse curso tem suas vagas ocupadas, na grande maioria, por alunos oriundos de três microrregiões maranhenses, a Baixada com 21 municípios em que se situa a cidade de Pinheiro, o Litoral Ocidental, que abrange 13 municípios e Gurupi, que abrange 14 municípios. É possível projetar a responsabilidade social desta pesquisa, não apenas pela possibilidade de conhecer o cenário educacional ou, de alguma forma, melhorar os índices de aproveitamento na disciplina, mas pela possibilidade de atuar na formação científica de professores para essas regiões tão carentes, inclusive de uma educação de qualidade.

Em minhas atividades como docente do curso de licenciatura em Matemática, na modalidade a distância, foi possível ter contato com uma realidade tecnológica bem diferente da do curso presencial. Nesse curso, os recursos tecnológicos, como laboratórios, estúdios de transmissão, material de apoio ao estudante nos Sistemas de Gestão da Aprendizagem (SGA) *Moodle* chamavam a atenção. No propósito de relativizar o ensino presencial com o ensino a distância, solicitei à coordenação do curso os índices de aprovação na disciplina Cálculo Diferencial e Integral dessa modalidade e os analisei. A observação numérica dos índices não deixa dúvida de que é necessário investigar, no âmbito da UFMA, as razões que tornaram essa disciplina um verdadeiro obstáculo ao prosseguimento de cursos de graduação. A existência desse obstáculo foi comprovada pela análise dos dados que foram solicitados ao Departamento de Desenvolvimento e Organização Acadêmica (DEOAC), e atendido pelo Núcleo de Tecnologia da Informação (NTI). Solicitações conforme constam nos Anexos IV e V .

A UFMA possui dois cursos de licenciatura em Matemática na modalidade a distância, administrados pelo Núcleo de Educação a Distância (NEAD). O NEAD administra diversos cursos na modalidade a distância, cursos de graduação e pós-graduação, além dos cursos de Licenciatura em Matemática. Um curso de licenciatura em Matemática é ofertado em convênio com a Universidade Aberta do Brasil (UAB) em oito polos presenciais: Caxias, Humberto de Campos, Imperatriz, Nina Rodrigues, Carolina, Fortaleza dos Nogueiras, Anapurus e Bom Jesus das Selvas; e o outro, pertencente ao Plano Nacional de Formação para Professores da Educação Básica (PROFEBPAR), é ofertado em seis polos presenciais: Porto Franco, Imperatriz, Grajaú, Santa Inês, Codó e Timbiras.

Conforme dados fornecidos pela coordenação do curso de Matemática, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I foi ofertada, até 2014, uma única vez em cada polo. Nos dados coletados, fica caracterizado um índice relativamente baixo de aprovados se comparado ao número de matriculados. Chegou-se ao extremo de dois polos não terem nenhum aluno aprovado. Dos quatorze polos, oito não obtiveram índice de aprovação superior a 40%, sendo que os dois maiores percentuais de aprovados chegaram a 70%.

Após consultas aos órgãos de controle da UFMA, verificou-se que, entre o segundo semestre de 2012 e o segundo semestre letivo de 2015, o que totaliza doze períodos letivos regulares e especiais, matricularam-se, em números absolutos, 8.805 (oito mil oitocentos e cinco) alunos, em 32 (trinta e duas) disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral ou disciplinas que tenham em sua ementa os tópicos de limite, derivada e integral de funções. Essas disciplinas foram ofertadas em 25 (vinte e cinco) diferentes cursos. Desse total de alunos matriculados, 43,68%, isto é, 3.846 (três mil oitocentos e quarenta e seis) alunos foram aprovados e prosseguiram em seus cursos; e 4.959 (quatro mil novecentos e cinquenta e nove) alunos, de alguma forma, ficaram retidos. Até o primeiro semestre de 2014, dentre os matriculados, o percentual de alunos aprovados era 43,59%, ou seja, após 5 períodos letivos, quase não houve variação percentual em relação ao número de aprovados.

Os números apresentados são preocupantes, pois implicam a manutenção de vagas públicas que precisam ser aproveitadas para o seu objetivo fim: formar professores de Matemática, Física, Química, Biologia ou, ainda, engenheiros, médicos, farmacêuticos, enfim, parte significativa da força de trabalho deste país.

1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Explicitadas as motivações que originaram este projeto de pesquisa, apresento o problema: “Qual a noção de limite de funções que alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, do Curso de Licenciatura em Ciências Naturais, apresentam na interação com objetos de aprendizagem do Geogebra em ambiente virtual?”. A partir desse questionamento, saber: “Como eles relacionam essa noção com a derivada e a integral de funções reais de uma variável?”.

1.3 OBJETIVOS

Os objetivos desta pesquisa foram formulados visando atender as expectativas geradas pelo problema.

1.3.1 Objetivo Geral

Analisar, pelo espectro da epistemologia genética, a noção de limite de funções que alunos apresentam na interação com objetos de aprendizagem do Geogebra, em ambiente virtual.

1.3.2 Objetivos Específicos

a) Investigar a noção de limite de funções que os sujeitos desta pesquisa apresentam ao utilizarem as atividades do ambiente virtual;

b) Investigar processos de abstração reflexionante realizados por eles ao tentar conceituar “limite de funções”;

c) Investigar a relação que fazem os alunos entre a noção de limite de funções, e os problemas da derivada e integral de funções reais de uma variável.

1.4 JUSTIFICATIVA

Desde que o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) começou a ser divulgado, o ano de 2013 foi o primeiro em que os anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio não atingiram as metas nacionais. Esses números são globais e a realidade para alguns municípios pode representar um cenário ainda mais desafiador e distante dessas metas (BRASIL, 2015 e G1, 2014). Considerando a possibilidade de contribuir para um cenário de mudança, esta pesquisa tem a sua ênfase na análise do processo de desenvolvimento cognitivo de alunos em ambiente escolar, físico e virtual.

Este trabalho propõe-se a contribuir para o entendimento dos processos cognitivos envolvidos na noção de limites de funções[2]. Quer-se conhecer que noções de limite de funções os alunos apresentam e que relações estabelecem com a derivada de funções e a integral de funções, na disciplina CDI. Para conhecer essa noção e essas relações, foram feitas aquisições de dados mediante ambiente virtual e com entrevistas inspiradas no Método Clínico (MC) piagetiano, com suporte de *applets*[3] do Geogebra. A análise dos dados coletados foi fundamentada na EG, mais especificamente, no mecanismo da abstração reflexionante. Justifica-se essa escolha pois esse mecanismo permite a análise adequada do processo de construção de conhecimento na área de Matemática Pura.

O ensino presencial com acesso *online* evoluiu de forma gradativa e segura. As tecnologias acompanharam de perto esse processo (TAJRA, 2012). Nas duas últimas décadas, houve um aumento significativo da oferta de Ambientes Virtuais para a Aprendizagem (AVA) e Sistemas de Gestão da Aprendizagem (SGA ou LMS do Inglês, *Learning Management Systems*). Esses avanços foram possibilitados, dentre outros fatores, pela revolução das redes de computadores, pela ampliação e pelo acesso à Internet, pelas multimídias e pelos dispositivos móveis de comunicação, tornando realidade a aprendizagem com o uso de tecnologias (TAJRA, 2012; PIVA JÚNIOR, 2011; FERREIRA; TAROUCO; BECKER, 2003; KONRATH; CARNEIRO; TAROUCO, 2009). Na área de Educação Matemática, a construção de ambientes virtuais tem instaurado uma possibilidade de avanço nas discussões sobre o uso da IE; um exemplo é o Centro Virtual de Modelagem (CVM), proposto, e implementado por Borba e Malheiros (2008).

Temas tratados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral são relevantes em muitas áreas do conhecimento, dentre elas: Engenharias, Física, Química, Astronomia, além da própria Matemática. Daí a importância de investigar os problemas relativos ao desenvolvimento de noções elementares nessa disciplina, como é a noção de limite de funções reais de uma variável, e sua relação com a derivada e a integral. O processo de conceituação depende, entre outros fatores, de um processo de transformação de esquemas de ação em noções e em

[2]Neste trabalho, a expressão escrita “limite de funções” corresponde a “limite de funções Reais de uma variável real”.

[3] *Applet* é um pequeno *software* que executa uma atividade específica, dentro (do contexto) de outro programa maior (como, por exemplo, um web browser), geralmente como um *Plugin*. O termo foi introduzido pelo AppleScript em 1993. Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Applet>. Acessado em 23 de fevereiro de 2015.

operações (VALENTE, 2002a; PIAGET, 1977,1978). Trataremos, no aprofundamento teórico, de delinear processo de conceituação no aluno.

A noção de limite está presente em diversas situações vividas por estudantes na Educação Básica. Por exemplo, inscrever figuras regulares planas na circunferência; aproximar pontos; dividir segmentos de retas; analisar o comportamento de sequências de números; comparar áreas, aproximar valores por meio de variação, etc. Julga-se natural que o aluno, ao chegar ao Ensino Superior, apresente noções de limite mesmo sem ter tido contato direto com essa forma específica de explicar o comportamento de funções na vizinhança de um ponto. O CDI, como todo conhecimento matemático, estrutura-se por conceitos. São conceitos que advêm de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática, garantindo-lhe uma complexa estruturação. Os conceitos de função, limite, derivação e integração são fundamentais no CDI, e compreender como esses conceitos se formam e se mobilizam no sujeito, ao utilizarem *applets* do Geogebra, dá a esta pesquisa relevância no cenário da informática educacional.

É possível observar, na EG, a possibilidade de sua análise, pois, como diz Piaget, Beth e Mays (1974, p. 19): “Na sua forma limitada ou especial, a epistemologia genética é o estudo de estados sucessivos de uma ciência S em função de seu desenvolvimento”. E, nesta pesquisa, a EG sustentará a análise da noção de limite e de conceitos que podem ser construídos ao longo do desenvolvimento da disciplina CDI. A EG pode ser entendida como a teoria da gênese do conhecimento do ser humano em geral e da ciência em particular; teoria que permite explicar, por meio de método experimental considerando as variáveis em estudo, a evolução dessa ciência. A EG é uma teoria do conhecimento que consiste em descrever os processos pelos quais se produz conhecimento em geral e o científico em particular, mediante sua gênese (DOLLE, 2011; PIAGET, 1977b).

O Método Clínico Experimental, Psicogenético ou Crítico (MC), amplamente difundido por Jean Piaget e seus colaboradores, foi o mais adequado que Piaget encontrou para responder as suas inquietações iniciais. Na aplicação dos testes de raciocínio de Cyril Lodowic Burt (1883 - 1971), ele se interessou mais em saber as razões das respostas do que, propriamente, em quantificar o número de acertos ou erros. Começou, então, a conversar com as crianças fazendo perguntas, a modo como acontecia na clínica, possibilitando, assim, constatar que certos raciocínios infantis só apareciam em determinadas faixas etárias (DELVAL, 2002).

Objetivando responder suas questões de pesquisa, Piaget utilizou o MC para coletar dados sobre os mais íntimos processos cognitivos da criança. Piaget estruturou uma teoria para explicar a gênese dos conhecimentos coletados, a Epistemologia Genética. À medida que encontrava novos resultados, o método se modificava. Essa dinâmica, naturalmente, tornou necessária a elevação dessa teoria a um padrão cada vez mais estruturado para explicar esses novos resultados, um dinamismo que permitiu à Epistemologia Genética (EG) um amplo reconhecimento como teoria científica que explica a gênese e o desenvolvimento do conhecimento humano. Muito dos processos que ocorrem em estudantes em relação a seu desenvolvimento e a sua aprendizagem ocorrem de maneira não observável. O MC insere-se nessa proposta por oferecer uma situação propícia à observação dos indícios de tais fenômenos, o que possibilita compreender o processo ou parte dele (CARRAHER, 1989). O método clínico permite descobrir as inferências que o sujeito faz para resolver os problemas que lhe são propostos. Permite descobrir o processo evolutivo da capacidade cognitiva em função da ação do sujeito.

Vê-se que o método clínico é um método poderoso para obtenção de dados sobre os processos efetuados pelo sujeito para construir seu conhecimento ou sua capacidade cognitiva. Entrevistas inspiradas no MC, associadas com as tecnologias, possibilitou a coleta de dados referentes a estudantes em situação de aprendizagem escolar, e a EG, mais especificamente pelo processo de abstração reflexionante, permitiu a análise do processo de construção do conhecimento do CDI desde o surgimento da noção de limite de funções reais até os processos que conduziram à aprendizagem de seus conceitos fundamentais.

Esta pesquisa se justifica pela possibilidade de analisar as noções de limite de funções reais em estudantes do Ensino Superior. Justifica-se, ainda, por se tratar de um tema fundamental dentro da disciplina CDI. Outras temáticas da disciplina, como derivada e integral de funções de uma variável real, também se valem dessa noção para sua elaboração conceitual. Agindo sobre a temática das noções de limite de funções, tem-se a expectativa de que melhor se compreendam as dificuldades na aprendizagem dos conceitos básicos do CDI (Limite, Derivada e Integral).

Para Collares (2003, p. 31), “o construtivismo epistemológico ou endógeno de Piaget decorre e mantém as investigações sobre o crescimento do conhecimento através da investigação da construção das estruturas cognitivas”. Ou seja, o desenvolvimento é um processo que se apresenta por etapas de evolução e construção, um processo verdadeiramente ativo. Nesse sentido, o CDI mobiliza diversos conhecimentos construídos em toda a Educação Básica.

A educação traz à tona temas sempre relevantes e atuais, e a inserção de alguns temas, como redes sociais, dispositivos móveis, informática, redes de computadores, Internet e TIC, torna-se necessária considerando que a escola reflete a sociedade; essa, por sua vez, se modifica à medida que essas temáticas se inserem na realidade dos indivíduos. Portanto, acompanhar as necessidades dessa sociedade que gira em torno da informação, seja por *sites*, seja pela televisão, seja pelas redes de relacionamento em tempo real, tornou-se uma tarefa indispensável à escola.

Tratar temas como desenvolvimento e aprendizagem, sob a ótica da EG, possibilita ao docente o entendimento de diversos fenômenos que ocorrem na sala de aula. No entanto, essa abordagem voltada para o meio escolar não ocorre diretamente na obra de Piaget e seus colaboradores, mas está relacionada ao objeto de estudo da EG.

A sala de aula corresponde a uma aplicação possível para a EG, mesmo não sendo explícito o direcionamento dos estudos de Piaget para esse *lócus*, é possível estabelecer uma relação dessa teoria com o ambiente escolar nos olhares do aluno e do docente. Segundo Becker e Marques (2012), a pesquisa e a docência caminham juntas, ou, pelo menos, deveriam, afinal, segundo esses autores, a pesquisa aprimora a docência. Nesse sentido, é importante que o professor pesquise a sua prática. Esse tipo de ação possibilita o entendimento de diversas situações do convívio escolar, como, por exemplo: compreender por que alguns alunos apresentam dificuldades de compreensão com alguns assuntos e outros não. Ou, ainda, por que um aluno que tem um ótimo desempenho com determinadas atividades não consegue resolver outras em razão da modificação de alguns parâmetros? Sobre a possibilidade de utilização da Epistemologia Genética na atividade docente para uma intervenção diagnostica, Dolle (2011, p. 10) diz:

> De qualquer forma, o diagnóstico deixa aberta a possibilidade de uma intervenção que se apoiará no modelo da gênese da epistemologia genética e que, por meio de solicitações apropriadas ao sujeito, o colocará em situação de criar as estruturas que lhe faltam por sua própria atividade.

Os sujeitos se valem de suas estruturas cognitivas para criar outras à medida que lhe são solicitadas, assim se desenvolve e aprende. Portanto, é preciso refletir e agir sobre os processos envolvidos no ensino de matemática, especificamente refletir e agir sobre a aprendizagem do CDI e seus problemas de ordem cognitiva, epistemológica ou, até mesmo, institucional, conforme discussões já iniciadas em Tall (1992), Baruffi (1999) e Rezende (2003). Uma proposta que englobe atividades envolvendo tecnologia pode ser uma alternativa para as novas necessidades da escola, visto que o mundo digital é o novo ambiente tanto de jovens quanto de adultos (SOUZA JÚNIOR; MOURA, 2010).

Acredita-se que um ambiente virtual pensado com atividades que envolvam a utilização de *applets* manipuláveis do Geogebra com situações para a mobilização de noções ou conceitos matemáticos já formados em nível de estrutura cognitiva subsidie a análise da noção de limite de funções, e sua relação com os conceitos de derivada e integral (derivação e integração). Nesse sentido, destacamos, nesta proposta de pesquisa, alguns trabalhos exitosos sob o ponto de vista de aplicações do Geogebra ao ensino do CDI, dentre eles, o ambiente virtual desenvolvido por Bizelli, Fiscarelli e Barrozo (2010), e o OA desenvolvido por Gonçalves (2013), os quais serão apresentados no prosseguimento deste texto.

A facilidade no uso de formulários *online* da *Google* (*Google Forms*) permitirá, além da coleta e do armazenamento dos registros nas situações-problema, investigar elementos que surgem nas ações e ainda sobre o pensamento do aluno na interação com as atividades.

Neste trabalho, trata-se a atividade como uma situação-problema. Para Dolle (2011, p. 13), "É colocando o aluno diante de situações-problema que ele é solicitado a construir sua solução e, assim, a fornecer a explicação para estas". As atividades são tratadas como elementos que possibilitam a aprendizagem dos alunos frente aos conteúdos da disciplina CDI.

A presente pesquisa reveste-se de relevância na área de Educação Matemática e na Informática Aplicada à Educação por abordar um assunto que, embora já conhecido e pesquisado, ainda necessita de aprofundamento e permanece como um problema em aberto (BARUFI, 1999; MACHADO, 1993; REZENDE, 2003; TALL, 1992,1995; VINNER; TALL, 1981). A importância dos conhecimentos do CDI para as ciências e a própria matemática é um fator que também justifica a pesquisa.

Segundo Mendes (2009, p. 113):

> [...] a informática é considerada uma das componentes tecnológicas mais importantes para a efetivação da aprendizagem matemática no mundo moderno. Sua relação com a educação matemática se estabelece a partir das perspectivas metodológicas atribuídas à informática como meio de superação de alguns obstáculos encontrados por professores e estudantes no processo do ensino e da aprendizagem.

A proposta de utilizar o *software* Geogebra associado à tecnologia *Google Forms* (Formulários Google) permite que registros sejam organizados em planilhas *online*. Essas tecnologias se configuram como alternativa real, considerando a sua fácil manipulação, a ampla utilização em laboratórios virtuais tanto por professores quanto por alunos, e disponíveis em dispositivos móveis, como *tablets* e computadores portáteis. A contribuição da informática nesta pesquisa vai além da utilização de *softwares* para obter resultados ou dados, está na possibilidade de melhor entender as relações dos alunos com computadores à luz de uma teoria sólida e amplamente difundida, como a EG, e, nesse sentido, os trabalhos de Fagundes; Sato e Maçada (1999), e Valente (2002b) reforçam essa prática.

As práticas e os temas a serem discutidos nesta pesquisa sustentam-se no escopo teórico da Epistemologia Genética, concentrando análise sob o enfoque da teoria da Abstração Reflexionante, pois, segundo Piaget (1995, p. 6-7), "[...] é a única a operar na lógica e matemática puras". Assim como em Lira (2008), que estudou o conceito de Limite de funções, nos apoiaremos nesta teoria para analisar e compreender, nessa ordem, as respostas e o pensamento de alunos sobre a temática aqui colocada.

1.5 O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: RELATOS DE SUA GÊNESE

Em geral, as disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real apresentam uma composição em três unidades: unidade 1 (U1), unidade 2 (U2) e unidade 3, (U3). A primeira unidade aborda alguns conceitos de função e funções elementares, a noção intuitiva, a definição formal, propriedades e operações para o estudo do limite de funções de uma variável. A segunda unidade contempla o estudo da derivada de funções e a terceira a integral de funções, podendo variar de acordo com a instituição, ou curso, à qual a disciplina está vinculada.

Há uma relação de interdependência conceitual nessa disciplina. O conceito de limite apoia-se no conceito de função. Tanto os conceitos de derivada quanto o de integral de funções são formalizados em termos de limites. Ocorre também uma relação de reversão entre a derivada de uma função e a integral indefinida de funções. Ou seja, caso queiramos entender esse problema, faz-se necessário compreender sua gênese ou a gênese desse conhecimento, recaindo, assim, nossa atenção sobre o estudo de funções e o estudo do limite delas. No entanto, já há uma discussão iniciada sobre o estudo de funções como um obstáculo epistemológico à compreensão do conceito de limite, como os feitos por Baruffi (1999) e Rezende (2003).

Diferentemente dessa abordagem, esta pesquisa volta-se para o estudo do limite de funções sob o olhar da abstração reflexionante, procurando investigar os processos internos que o sujeito mobiliza para coordenar suas ações em busca da compreensão.

O conceito de limite é que formaliza e fundamenta os conceitos de derivada e integral de funções conforme são tratados hoje no CDI. Para uma melhor compreensão da extensão desta temática e sua importância, trataremos, neste texto, de alguns aspectos históricos e seu significado global para compreender a gênese do CDI.

O CDI está relacionado aos tipos de variações, ou seja, a medida de aumento ou diminuição de uma grandeza. E, segundo Machado (1993, p. 148), o CDI:

> Trata também de questões envolvendo a interpretação de grandezas que variam continuamente como se variassem através de pequenos patamares onde se manteriam constantes, conduzindo a somas com um número cada vez maior de parcelas cada vez menores.

O autor fala da ideia que sustenta a noção de infinito, resultante da interpretação de grandezas numéricas e suas relações na reta real. A forma pela qual a disciplina CDI está estruturada depende do conceito de limite para conceituar tanto a derivação quanto a integração e, assim, o entendimento (tomada de consciência) do conceito de limite torna-se uma ação fundamental para a compreensão desse conteúdo e o êxito nessa disciplina.

Tanto as noções de derivada quanto de integral relacionam seus significados com um fenômeno descrito na geometria: a aproximação de curvas por retas. Aproximar uma curva por uma reta que lhe é tangente conduz à noção de derivação ou diferenciação e, segundo Machado (1993, p. 148), “A medida da rapidez de variação conduz à noção de derivada”, semelhante ao que acontece quando temos uma reta secante a uma curva e dela origina-se uma tangente na mesma curva. Já “o estudo das somas com muitas pequenas parcelas conduz à noção de integral” (MACHADO, 1993, p. 148). Esse fato pode ser observado quando temos uma curva sob ou sobre um eixo cartesiano e queremos calcular sua área; a aproximação dessa curva por retas para compor as figuras regulares da área aproximada é o que dá origem ao processo de integração.

Considerando o contido em Eves (2004), Machado (1993) e Rezende (2003), as formas conceituais de derivada e integração diferem bastante de sua concepção inicial. É sabido por muitos que Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) desenvolveram, simultaneamente, os primeiros fundamentos do CDI, mas, somente no século seguinte às suas descobertas, tanto a derivada quanto a integração seriam explicadas em termos de limite. Mas, como o conhecimento matemático acompanha a própria história do ser humano, a gênese desse conceito é controversa, pois, segundo Eves (2004) e Boyer (2012), a noção de limite se apresenta em trabalhos de matemáticos da Antiguidade. Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) é tido, em textos de História da Matemática, como o precursor das ideias básicas do Cálculo. Arquimedes desenvolveu métodos para obter áreas de regiões com contornos por meio de pequenas somas de regiões menores com contornos retos (BOYER, 2012; MAOR, 2008; EVES, 2004). Segundo Maor (2008, p. 61), Arquimedes foi "[...] um dos primeiros a usar o conceito de limite para calcular a área e o volume de figuras planas e sólidas. [...] ele nunca usou o termo limite, mas era isso, precisamente, o que tinha em mente". Arquimedes usou o método da exaustão de Eudoxo (aprox. 370 a.C.) em parábolas com o propósito de obter a área dessa secção cônica; as outras são a elipse e a hipérbole. Sobre o método da exaustão e o Cálculo Integral, Maor (2008, p. 66) diz: "O método da exaustão chegou muito perto do nosso moderno Cálculo Integral". Porém, eles não desenvolveram os conceitos do CDI por dificuldades conceituais sobre o estudo de limite. Não dominavam a linguagem da Álgebra, e, por essa razão, não havia formalização de muitos conceitos matemáticos como vemos hoje, dentre eles, o conceito de limite de funções, que só foi formalizado, e culminou por explicar a derivação e a integração em função dos épsilons e deltas, no século XVIII.

É curioso notar que conceitos básicos do Cálculo, conforme estão dispostos hoje no CDI, surgiram em ordem inversa. Primeiro, surgiu o Cálculo Integral em processos somatórios ligados a cálculos de certos comprimentos, áreas e volumes encontrados em trabalhos de Eudoxo e Arquimedes. Em seguida, a diferenciação com questões sobre tangentes a curvas e problemas de máximos e mínimos, em trabalhos de Pierre de Fermat (1601 - 1665) e René Descartes (1596-1650). O conceito de limites surgiu, posteriormente, com trabalhos de d'Alembert (17177-1783), Cauchy (1789-1857) e Weierstrass (1815-1897), fundamentando com mais rigor os processos de diferenciação e integração que, posteriormente, se verificou que um é o inverso do outro, com trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (BOYER, 2012; EVES, 2004).

Segundo Machado (1993, p. 149):

> Inicialmente, as ideias básicas do Cálculo não eram muito claras nem pareciam bem fundamentadas, sendo recebidas com profunda desconfiança pelos matemáticos em geral. Newton lidava com entidades como *fluentes* e *fluxões*, noções que só bem mais tarde, já no século XVIII, seriam convenientemente depuradas, conduzindo às noções de função e derivada. Leibiniz chamava de infinitésimos as pequenas parcelas a serem somadas no processo de integração, ao mesmo tempo em que imaginava as curvas sendo constituídas de partes *infinitesimais*, como se fossem pequenos segmentos de

> reta. Tais infinitésimos, em alguns cálculos, eram considerados relevantes, enquanto em outros eram desprezados, sem que as razões de tais procedimentos fossem bem explicadas.

Sendo assim, é possível perceber que, no princípio do Cálculo, havia falta de coerência em justificativas sobre alguns procedimentos adotados, como o caso da exclusão ou aceitação dos infinitésimos. Apesar de ser uma técnica eficiente, essa falta de rigor trouxe desconforto na aceitação dessas ideias. A aceitação da técnica de derivação (diferenciação) e integração só aconteceu após o surgimento do conceito formal de limite. Se, por um lado, o conceito de limite atribuiu à diferenciação e à integração o rigor que a matemática exige, por outro lado, passou a ser o tema central do Cálculo. A linguagem dos limites, adotada no século XIX, vem substituir a lógica dos infinitésimos (EVES, 2004; BOYER, 2012).

A definição formal de limite de funções – A análise deste texto sobre a noção de limite é direcionada pelo livro "Cálculo A". Nesta obra, o limite é definido de forma intuitiva: "Intuitivamente, dizemos que uma função tem limite L quando x tende para a se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de x, $x \neq a$, e suficientemente próximo de a." (FLEMMING; GONÇALVES, 2007, p. 66). Uma maneira de definir limite é: seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente o próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L e escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad , \tag{1}$$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ (FLEMMING; GONÇALVES, 2007, p. 66).

Essa definição descreve o comportamento da função $f(x)$ enquanto se aproxima de um valor L. A função assumirá valores de x que tendem a a, mas que não necessariamente chegam em a.

O problema aqui tratado conceitualmente depende de função. O desenvolvimento da teoria de funções é obra do século XIX. A palavra "Função" foi introduzida por Leibniz em 1673, justamente por designar qualquer das várias variáveis geométricas associadas como uma dada curva. Só aos poucos é que o conceito foi se tornando independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável em termos de outras (BOYER, 2012; EVES, 2004).

Quando explicitado o problema da aprendizagem do Cálculo em Baruffi (1999) e Rezende (2003), diz-se que esse conceito é em função de "epsilon" e "delta", são as diferenças, as variações. Esses processos se originam de outro conceito às vezes negligenciado pelos livros de Cálculo, tratado nos livros de Análise Matemática, o conceito de Ponto de Acumulação.

Ponto de acumulação: Dado um subconjunto $D \subset \mathbb{R}$, diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto D se dado $\delta > 0$ todo intervalo aberto de centro a, $A = (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$, $A \subset D$, contém algum ponto $x \in D$ diferente de a, ou seja, a é um ponto de acumulação de um conjunto D quando toda vizinhança de a contém algum elemento diferente de a que pertença a D. Se D for igual a $\mathbb{R}$, então todo elemento de $D = \mathbb{R}$ é ponto de acumulação, pois toda a vizinhança de qualquer elemento de $D = \mathbb{R}$ contém uma infinidade de elementos pertencentes a $D = \mathbb{R}$.

Após a apresentação da definição de Ponto de Acumulação, podemos definir, novamente, o limite de uma função da seguinte forma: seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e seja a um ponto de acumulação de D, diz-se que $f(x)$ tem limite $L \in \mathbb{R}$ em a se dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, o que implica em $|f(x) - L| < \varepsilon$. Denota-se isto por $\lim_{x \to a} f(x) = L$. A definição de limite não diz que a função tem um limite ou barreira; esse entendimento é visto como um obstáculo epistemológico. (RESENDE, 2003). A definição formal de limite expressa o comportamento de uma função $f(x)$; objetiva-se conhecer esse comportamento observando que valores essa função assume à medida que valores de seu domínio, na vizinhança de um número a contido ou não no domínio de $f(x)$, são introduzidos no cálculo de $f(x)$. O conhecimento mais profundo do conceito de limite, depende da compreensão do significado das medidas ε e δ entre elementos da imagem e do domínio da função, respectivamente.

Em geral, os cursos de CDI iniciam com exemplos de sequências numéricas (Domínio, Contradomínio e variações) objetivando inferir a regra de formação (função), com ou sem recurso de gráficos. Tanto em sala de aula quanto nos livros cria-se a perspectiva de que o aluno possa perceber como, diante de duas sequências, ocorre a convergência para um número limite em uma sequência A_1à medida que outros valores se aproximam de um número dado de uma sequência A_2. Em seguida, parte-se para a definição formal de limite de funções; são apresentadas suas propriedades e operações dotadas de álgebra e regras de inferência lógica. Segue-se, então, para a estruturação do conceito da função derivada. Esse conceito é fundamentado no conceito de limite para o caso de inclinação da reta até obter uma tangente a uma curva dada. A integral é também fundamentada no conceito de limite, com o caso da aproximação da área de uma curva sobre um eixo cartesiano por meio de particionamentos e somatório de áreas de figuras planas.

Percebe-se que o CDI necessita, inicialmente, de noções como as de grandezas constantes, variáveis, proporcionalidade, área, velocidade, taxas de variação, reta tangente e inclinação. Assim como o limite de funções apresenta definição ou tratamento com significado específico na matemática, o infinito e a função também; esses termos aparecem muitas vezes nas falas com conotações diversas do senso comum.

O conceito de infinito vem sendo formulado e discutido desde a Grécia antiga. Desde essa época havia muitas controvérsias quanto ao seu significado e definição, mas somente após desenvolvimentos da matemática, ocorridos até o século XIX, em especial os trabalhos de Geoge Cantor, é que algumas questões foram resolvidas. Cantor, ao estudar o tamanho dos conjuntos, mostrou que há infinitos iguais e diferentes. O estudo do conceito de infinito, a saber: o infinito potencial e o infinito *actual*, não constitui um objetivo desta pesquisa, mas a referência ao termo foi constante. (BOYER, 2012; EVES, 2004).

Para ajudar o leitor a construir noções desse conceito complexo, imagine que na reta dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) temos um número n que corresponde a um valor dessa reta, um fato relevante é que para qualquer n, o número imediato à direta de n é o $n+1$. Com raciocínio análogo, para todo n inteiro, o número imediato à esquerda é o $n-1$. Pensando no maior número possível, é possível obter o número seguinte, maior que o anterior. Do mesmo modo, é possível pensar que podemos ter o menor número possível, mas um número com uma unidade a menos é sempre possível. Como termina esse raciocínio se pensarmos que sempre poderemos ter um número maior que o outro ou menor que o outro? Esses números, com suas medidas maiores ou menores, revelam noções de infinitos.

O método da exaustão foi um tema que surgiu de forma natural nos registros de respostas dos alunos. Esse tema foi tratado ao responder questionamentos das atividades sobre limites e integração. Contudo, deve-se esclarecer que para a exaustão não é suficiente que a diferença entre as áreas seja decrescente. Para mostrar que a diferença entre a área do círculo e a área do polígono inscrito pode ser tão pequena quanto se queira (em linguagem moderna, que tenda a zero), o método da exaustão usa o argumento de que a cada vez que dobramos o número de lados do polígono inscrito, a diferença entre a área do círculo e a área do novo polígono é menor do que a metade da diferença entre a área do círculo e a do polígono interior.

1.6 PESQUISAS CORRELATAS

As pesquisas feitas para investigar os problemas relativos à aprendizagem de conceitos do Cálculo apontam várias causas, dentre elas, as dificuldades de mobilizar conhecimentos por falta de outros conhecimentos que os pesquisadores julgam necessários à aprendizagem; afirmam, também, que as dificuldades de aprendizagem são decorrentes da ausência de estruturas cognitivas importantes e, até mesmo, de dificuldades de natureza didática, pedagógica e epistemológica.

Rezende (2003) acredita que as causas do problema de aprendizagem dos conceitos do CDI vão além dos métodos e das técnicas aplicadas. Na pesquisa desse autor, esses problemas são de natureza epistemológica. Assim, conduziu sua pesquisa por dualidades essenciais e mapas históricos conceituais, culminando por determinar cinco macroespaços de dificuldades de natureza epistemológica do Cálculo, a saber: discreto/contínuo; variabilidade/permanência; finito/infinito; local/global e sistematização/construção.

Para entender o problema aqui tratado e compreender a sua dimensão no âmbito das pesquisas no Brasil e no mundo, foram feitas pesquisas com as seguintes temáticas: ensino de cálculo, problemas na aprendizagem do cálculo diferencial e integral, conceito de limite e tecnologia educativa, *software* educativo e cálculo diferencial e integral, epistemologia genética e cálculo, abstração reflexionante e limite de funções, limite de funções e Geogebra, Geogebra e cálculo, epistemologia genética e informática educativa. A pesquisa foi feita na base de dados da CAPES pelo Portal de Periódicos, em *sites* com motor de busca pela Internet, e no portal domínio público. Para a pesquisa, utilizamos termos correlatos em Inglês e Espanhol.

Durante a pesquisa, foi possível perceber que a temática a que se refere esta pesquisa é amplamente discutida e pesquisada no Brasil em programas de pós-graduação em ensino de matemática e ciências, de Informática Aplicada à Educação, educação matemática, em matemática aplicada e em mestrados profissionalizantes. Eventos nacionais e internacionais disponibilizam espaço para discussão e divulgação de resultados, sendo esses eventos organizados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática e a Sociedade Brasileira de Computação.

No cenário mundial, é possível destacar os trabalhos de David Tall e seu centro de pesquisa na Universidade de Warwick. Desde a década de 70 do século passado, o MERC (*Mathematics Education Research Center*) estuda o pensamento matemático avançado, desenvolvendo o que chamou de *Advanced Mathematical Thinking* (AMT). Dos trabalhos desenvolvidos por David Tall e seus colaboradores, surgiram outros grupos que pesquisam o ensino e a aprendizagem da matemática, geralmente centros universitários vinculados a cursos de licenciatura e bacharelado de Matemática ou Engenharias.

Um Periódico especializado na temática desta pesquisa é a Revista *El cálculo y su enseñanza*, uma publicação anual bilíngue do Departamento de Matemática Educativa (DME) do Centro de Investigação e Estudos Avançados do Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) do México; periódico dedicado à investigação dos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

A respeito do Geogebra, é possível afirmar que essa tecnologia educativa está presente na maioria dos centros de pesquisa em educação matemática, nacional e internacional. A sua ampla utilização em trabalhos relacionados aos temas do Cálculo Diferencial e Integral é reconhecida. No Brasil, destacam-se os Institutos Geogebra do Rio de Janeiro, na Universidade Federal Fluminense (UFF); e de São Paulo, na Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). Esses centros promovem pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem por meio do *software* Geogebra nas mais diversas áreas de conhecimento.

Esta pesquisa se propôs a estudar um problema presente nos espaços educativos tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior. Em Gravina e Santarosa (1998), apresenta-se a análise de ambientes virtuais sob a perspectiva do Construtivismo, relacionando aprendizagem e processos cognitivos. Alguns *Softwares* de programação em linha e de geometria dinâmica foram analisados, evidenciando a potencialidade de uso em projetos educativos. A pesquisa evidenciou que a abstração ocorre pela interação com o ambiente virtual por reflexionamento e reflexão (ação). Essa mesma pesquisa propõe o entendimento de que a informática é um recurso auxiliar na aprendizagem e que a ferramenta computacional, por si só, não produz conhecimento. Assim, torna-se necessário o uso adequado e a conciliação das diversas formas de se ensinar para que os alunos obtenham êxito em suas aprendizagens.

Interação é um conceito bem definido na Epistemologia Genética, e só há interação quando conjuntamente, sujeito e objeto agem entre sim. Em Becker e Ferreira (2012) os autores apresentam os resultados das discussões virtuais sobre o termo interação, da Epistemologia

Genética. Nesse relato, os autores apresentam e analisam os registros e as contribuições dadas por pesquisadores em uma lista de discussão virtual. A utilização do termo interação, nas discussões virtuais, ocorreu na maioria das vezes, de forma dissonante do seu significado na EG. Essa análise foi subsidiada a partir a do conceito de ação.

Existe uma infinidade de Objetos de Aprendizagem disponíveis na Internet, e utilizar um OA requer planejamento e adequação a uma necessidade específica, cujo propósito seja o de auxiliar no processo de aprendizagem do sujeito. Em Marin (2012), apresenta-se uma pesquisa que objetivou compreender de que forma professores do Ensino Superior utilizam as tecnologias de informação e comunicação (TIC) em aulas de CDI. A pesquisa foi realizada em cursos de matemática e, também, em outras áreas. Foram observados diversos aspectos, dentre eles, o tipo de TIC utilizada, os conteúdos matemáticos passíveis de utilização das TIC, as vantagens e desvantagens do uso de TIC, e a formação dos professores para o uso delas. Mostrou algumas estratégias para o ensino de Cálculo. O que chama a atenção na pesquisa é a constatação de uma readequação da prática expositiva do quadro negro e do giz para a utilização da projeção em *slides*.

Um caso de utilização de registro para avaliação da aprendizagem é o estudo de Notare e Behar (2009). Nele é descrita uma experiência de aprendizagem na disciplina Cálculo Diferencial. Os registros foram realizados em um ambiente virtual de aprendizagem com suporte para escrita científica, possibilitando inferir como os alunos desenvolviam conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

Em Fernandes et. al (2012), os autores desenvolveram e validaram um sistema *web* (SCDI) que, além de conter teoria do CDI, permite realizar operações. Verificou-se que tal utilização resultou em melhorias significativas de aproveitamento dos alunos em relação aos resultados da disciplina.

Em Gonçalves (2013), é apresentado um “produto educacional” criado a partir do *software* Geogebra para auxiliar na aprendizagem de aplicações da Derivada. Nesse trabalho, além de abordar as pesquisas sobre aprendizagem do Cálculo, a autora traz à discussão a inserção de tecnologias no ensino com atividades investigativas. Destacam-se algumas contribuições da pesquisa, como a ressignificação dos conhecimentos dos alunos em relação às aplicações da derivada e aos conceitos nucleares do Cálculo Diferencial e Integral por meio das TICE's (Tecnologias Informacionais e Comunicacionais na Educação). Outra contribuição foi a criação de um ambiente de aprendizagem diferenciado e complementar à sala de aula com discussão e colaboração, que, por muitas vezes, é ausente da sala de aula tradicional. Segundo a pesquisa, a oportunidade de refletir sobre a importância da realização de atividades com *software* contribuiu para os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I.

Um trabalho de grande destaque é o realizado por La Fuente, Armenteros e Moll (2012). Esse trabalho objetivou a análise do ensino de limite de uma função sob sua forma intuitiva. Os autores analisaram o conhecimento e a forma de instruir para, então, poder descrever, explicar e valorar o processo de estudo de limite de funções. Eles realizaram uma descrição das principais tentativas de explicar os mecanismos e processos cognitivos que os alunos utilizam para aprender o conceito de limite. Nessa pesquisa teórica, destacam-se trabalhos de David Tall e colaboradores, com sua linha de pensamento pautado na AMT. Os autores destacam, ainda, haver uma teoria denominada APOE (ação, processo, objeto, esquema) de Ed Dubinsky, em que se utiliza a AMT com determinados conceitos da Epistemologia Genética, como abstração reflexionante, ação, esquema e estrutura para fundamentar suas análises.

São inúmeras as investigações sobre ensino e aprendizagem de limite de funções. Em Vinner e Tall (1981), são estudadas as imagens conceituais de limites e continuidade considerando a abordagem feita na escola secundária e na universidade. Aplica-se AMT no propósito de estudar os conflitos cognitivos originados pela ruptura entre a imagem conceitual e a definição conceitual do aluno de limites e continuidade de funções.

Em Tall (1992, 1995), são feitos estudos com estudantes de Cálculo sobre o ensino dessa disciplina. Nesses trabalhos, a pesquisa está direcionada para as dificuldades apresentadas por estudantes para a compreensão dos conceitos do Cálculo. Ao buscar as causas para tais dificuldades, concluiu-se que, para a aprendizagem desses conceitos, é necessário o desenvolvimento da representação gráfica, numérica e simbólica.

Em Kessler (2008), discute-se a criação de material didático e estratégia de ensino com utilização de objetos de aprendizagem em CD-ROM. Verificou-se que a produção de material em multimídia, além de colaborar na aprendizagem do Cálculo, contribuiu, também, com a problematização dos processos de ensinar e aprender no Ensino Superior.

Em Sousa (2013), buscou-se investigar a transição de alunos do Ensino Médio para o Superior e as dificuldades nessa transição ao ter contato com a disciplina de Cálculo. Essa pesquisa constata os altos índices de evasão e repetência apresentados em outras pesquisas.

Ações foram realizadas para minimizar as dificuldades na disciplina de Cálculo. Foram propostas atividades investigativas sobre taxas relacionadas. As conclusões indicam, entre outros fatores, que o baixo índice de aprovação nessa disciplina é devido à aprendizagem deficitária de conteúdos de Matemática da Escola Básica. Indicam, ainda, que é preciso desenvolver, na Educação Básica, ações que propiciem o desenvolvimento da disciplina CDI.

Outra pesquisa nesse sentido, descrita em Torres, Giraffa e Claudio (2008), indica que as dificuldades de aprendizagem em disciplinas de CDI são provenientes, dentre outros fatores, de uma formação precária dos conhecimentos matemáticos da Educação Básica. Para tanto, os autores desenvolveram uma metodologia apoiada em monitoria virtual e experimentos no AVA Moodle para apoio à disciplina Cálculo A. No quadro geral das observações finais, os resultados indicam que a utilização do ambiente Moodle e a criação de uma Monitoria Virtual de apoio à disciplina Cálculo A auxiliaram os alunos a desenvolver competências para a aprendizagem na disciplina Cálculo A.

Pesquisar as causas que dificultam a aprendizagem do conceito de limite é tema muito recorrente, como no trabalho de Vieira (1999), que apresenta uma análise sobre as concepções de limite que alunos de Análise Matemática apresentam a partir do conceito escrito de limite de funções. Segundo o autor, algumas das respostas permitiram perceber confusões conceituais, dificuldades de exprimir de forma escrita o significado de limite; verificou, também, grande confusão na manipulação de expressões simbólicas e algébricas. O autor pôde verificar, ao analisar livros, que essas publicações tratam o assunto de forma um tanto numérica ou são demasiadamente voltados ao exercício da docência, referindo-se ao fato de que a linguagem utilizada faz mais sentido ao professor do que ao aluno.

Em Martins Júnior (2013), o ensino de Derivadas foi tratado com a adoção de uma metodologia para o respectivo ensino. As atividades de construção e interpretação de funções e gráficos foram feitas com a utilização do *software* Geogebra. Para o desenvolvimento da atividade, partiu-se da hipótese de que a utilização de *softwares* matemáticos pode contribuir para o ensino a partir da visualização de funções e imagens gráficas relacionadas às derivadas de funções reais.

Sem o auxílio de uma tecnologia explícita, o trabalho de Vogado, Jucá e Mota (2014) analisa a produção escrita de alunos sobre os conceitos de limite e derivada de funções. Nesse estudo, foram utilizadas as avaliações escritas de alunos da disciplina Cálculo I. Os autores concluíram que os principais erros cometidos nas questões de limite de funções estão relacionados à falta de compreensão da "ideia" de limite e erros em procedimentos algébricos. Sobre o estudo de derivadas, verificou-se a falta de compreensão das regras de derivação e de seus procedimentos algébricos.

O trabalho de Ricaldoni (2013) apresenta uma investigação sobre a construção e interpretação de gráficos no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, com a utilização de TIC. Já em Bizelli, Fiscarelli e Barrozo (2010), há um estudo sobre o desenvolvimento e a implementação de conteúdos didáticos digitais. Esses conteúdos foram organizados em um ambiente virtual e ficou à disposição de alunos das disciplinas Cálculo I e II para apoio didático. Para a elaboração dos conteúdos, foram utilizados *softwares* como o Camtasia Studio, Macromédia Flash, Geogebra e Linguagem de Programação em HTML (*Hiper Text Markup Language*). A ideia de conjugar OA em um AVA é justificada pelo autor devido à facilidade de acesso e utilização por parte de alunos, cujas tecnologias estão em seu dia a dia. Segundo os autores, o ambiente proposto corresponde ao desenvolvimento de um material de apoio educacional. Na avaliação inicial feita por alunos, o ambiente tem correspondido às expectativas de estimular o aprendizado com conteúdo de qualidade e de fácil acesso e uso.

2 A INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Neste capítulo, estabeleceremos uma relação entre a informática e a educação. Focaremos mais nos temas Ambiente Virtual e Objetos de Aprendizagem, procurando, também, situar a ação do sujeito sobre os OA e quão rica pode ser essa experiência de interação entre homem e máquina.

2.1 UM CONTEXTO GERAL SOBRE A INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO E NA SOCIEDADE

A informática, por muitas vezes, é associada à figura física de uma máquina, o que não configura uma verdade. Essa comparação não expressa a complexidade do tema, pois as aplicações são diversas e se contextualizam de acordo com as aplicações. Se observarmos com cuidado, perceberemos que a informática processa dados, configura novos tipos de relações sociais, novas formas de gerir conhecimentos e de difundi-los. Relacionada com a educação, pode-se dizer que a informática é um fenômeno social. Nos últimos anos, ela colocou à disposição da sociedade diversos instrumentos de comunicação e de apoio à construção de conhecimento.

Não cabe aqui realizar um paralelo entre os pontos ditos positivos ou negativos da influência da informática na educação, mas de reconhecer que a ela é um instrumento transformador e que propicia a construção de conhecimento (BRANDÃO, 1993). Diante de uma infinidade de OA e ferramentas digitais que estão dispostas pela Internet, faz-se necessária uma reflexão acerca desse conjunto classificado como educacional. Para a formulação e concepção de um OA, AVA ou *software* educativo, deve haver parâmetros e objetivos educacionais bem definidos, pois, caso contrário, aquilo que foi planejado para ajudar na aprendizagem pode ser mais obstáculo ao êxito do que ajuda (KONRATH; CARNEIRO; TAROUCO, 2009).

De nada adianta a sofisticação na elaboração do objeto se o público ao qual se destina não consegue operacionalizar e agir sobre esse objeto. Valente (2002b, p. 19) situa o computador no que chama de ciclo de ações: “Ele [O computador] está sendo um elo importante no ciclo de ações descrição-execução-reflexão-depuração, que pode favorecer a aprendizagem”. Esse ciclo de ações se localiza no que chama de “espiral de aprendizagem”, utilizado pelo autor para explicar o processo de aprendizagem que parte da interação entre homem e máquina com fortes elementos da epistemologia genética e da teoria sócio-histórica.

No espaço virtual, tanto as atividades quanto um OA estão dispostos e propostos em contextos diversos. O uso dessas atividades e desses OA requerem cuidado e o estabelecimento de critérios para selecionar quais utilizar, quando utilizar e se são permitidos. Por definição, para utilização de um OA, não se faz necessário um treinamento ou conhecimento específico, mas, em muitas vezes, torna-se conveniente estabelecer um conjunto de instruções mínimas necessárias para guiar e estabelecer um padrão também mínimo de comunicação entre o OA e o sujeito usuário, objetivando desenvolver ou realizar a atividade.

Pela interação com uma máquina, é possível gerar novos conhecimentos e é possível, também, a quem observa, verificar com métodos apropriados o processo de desenvolvimento cognitivo à medida que tarefas são solucionadas em níveis cada vez mais complexos e, assim, o sujeito passa de um nível inicial de compreensão para um outro mais elaborado (VALENTE, 2002b, p. 19-20).

De acordo com Mendes (2009, p. 93), “[...] independente do nível escolar que se encontrem [alunos], é adequado o uso de atividades que favoreçam a interatividade entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento”. Resolver uma situação-problema proposta em um ambiente virtual é possível quando se parte de uma ideia inicial (VALENTE, 2002b). Para que isso ocorra da melhor forma possível, o ideal é criar, em um ambiente virtual, uma situação-problema em que o aluno pode se dispor a tentar não só resolver como abstrair dessa atividade algum conhecimento.

A investigação de uma boa situação-problema realiza-se pela interação entre sujeito e objeto. Agindo sobre o objeto, em níveis progressivos de profundidade, o sujeito constrói soluções ao que lhe é colocado pela situação-problema. Cabe, pois, ao docente oportunizar o desenvolvimento do aluno, priorizando as execuções, os ensaios, as práticas que desafiam o aluno a utilizar seus esquemas, até agora construídos, e refazê-los na medida das necessidades que essas situações exigem; no limite, construindo novos esquemas que deem conta das novidades trazidas por essas situações. O papel do professor é fundamental para que a aprendizagem se realize e, no limite, desafie o desenvolvimento cognitivo a se reestruturar ou a construir novas estruturas. (AEBLI, 1978).

A informática na educação consolida-se como uma possibilidade de enriquecimento das situações vividas na escola, tangível àqueles alunos já inseridos no contexto das tecnologias, e se apresenta como alternativa para a superação dos obstáculos encontrados por professores no processo de ensino e por alunos em sua aprendizagem (MENDES, 2009; TAJRA, 2012).

É inegável, em dias atuais, a influência da tecnologia em nosso modo de vida, afetando nossas atividades sociais e modificando o modo de nos relacionarmos com o conhecimento. Utilizar *softwares* no ensino de matemática é prática considerada acessível e que diminui a morosidade de algumas tarefas matemáticas, o que pode dinamizar o tratamento dos conteúdos tratados em sala e potencializar a aprendizagem (ALBERTO, COSTA E CARVALHO, 2010). No trabalho citado, utiliza-se o *software* Geogebra para o desenvolvimento e a arquitetura de OA de fácil acesso e uso para o ensino de matemática. Os autores apresentam suas funcionalidades e uso no ensino de funções.

Segundo Valente (2002b), quando o sujeito age sobre o OA, esse objeto, por meio do computador, realiza a execução dos comandos e apresenta os resultados dessa ação. Pelas informações obtidas, é possível realizar uma reflexão sobre a ideia inicial e, assim, produzem-se diversos níveis de abstração, que, segundo Piaget (1995), podem ser empíricos ou reflexionantes.

Na rede mundial de computadores, a matemática tem um número considerável de *sites* especializados em difundir conhecimento. Alguns apenas postam conteúdo, outros fornecem instruções para autogestão de conhecimento; há sites e ambientes de conteúdo, *blogs* e páginas em redes sociais. Há, também, um número considerado de objetos virtuais educacionais organizados em repositórios, como o GeogebraTube, Merlot, Youtube, Nuted, RIVED, LabVirt, CESTA, Banco internacional de objetos de aprendizagem, etc.

O cálculo tem na tecnologia, o suporte para a representação gráfico, para o cálculo e para a busca de soluções mais complexas quando lhe são exigidas. É importante salientar que, nesta pesquisa, o uso de OA ou AVA não é apresentado como elemento principal para a efetivação da aprendizagem, pois há vários outros fatores envolvidos nesse complexo processo. No entanto, entende-se que é dele que o sujeito extrai características, formas, informações para processos de conceituação, e seu uso se constitui alternativa ao meio, considerando a facilidade de acesso e uso de tecnologias em ambiente escolar e social.

2.2 OBJETOS DE APRENDIZAGEM

Objetos de Aprendizagem são mídias digitais projetadas para o uso educacional. É um conceito de considerável amplitude, pois temos uma quantidade considerável de ambientes, linguagens e mídias de variadas características. Os OA são caracterizados por sua reusabilidade, portabilidade e modularidade. A reusabilidade garante economia de tempo e espaço na rede, a portabilidade garante o *status* de multiplataforma, não necessitando de atualização de *software* ou *hardware* para sua utilização. A modularidade garante que todo OA é parte integrante do contexto de um curso em que outros OA estão interligados. De forma mais simples, é possível dizer que são arquivos digitais que auxiliam os processos de ensino e de aprendizagem (PIVA JÚNIOR, 2011).

Um conceito amplamente discutido na informática educativa é o de Objetos de Aprendizagem (*Learning Objects*). Segundo Wiley (2002, p. 3):

> Objetos de aprendizagem são elementos de um novo tipo de instrução baseada em computador que sustenta-se no paradigma da orientação ao objeto da ciência da computação. Orientação a objetos valoriza fortemente a criação de componentes (chamados "objetos") que podem ser reutilizados (Dahl & Nygaard, 1966) em múltiplos contextos. Esta é a idéia fundamental por trás dos objetos de aprendizagem: os *designers* instrucionais podem construir componentes educacionais pequenos (relativos ao tamanho de um curso inteiro) que podem ser reutilizados várias vezes em diferentes contextos de aprendizagem. Além disso, os objetos de aprendizagem são geralmente entendidos como entidades digitais que podem ser disponibilizados pela Internet, o que significa que qualquer pessoa pode acessar e usar simultaneamente (em oposição à mídia instrucional tradicional, como uma sobrecarga ou fita de vídeo que só pode existir em um Lugar por vez). Além disso, aqueles que incorporam objetos de aprendizagem podem colaborar e beneficiar imediatamente de novas versões. Estas são diferenças significativas entre objetos de aprendizagem e outros meios instrucionais que existiram anteriormente.

Nesse sentido, o autor define um objeto de aprendizagem como qualquer recurso digital que possa ser utilizado e reutilizado em variados contextos de aprendizagem e ensino. Segundo Beck (2001, *apud* BETTIO & MARTINS, 2002, p.3), os objetos de aprendizagem são definidos como: “Qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para o suporte ao ensino”. Um objeto de aprendizagem deve ser bem estruturado e dividido em três partes bem definidas, a saber: objetivos (indicar o que é pretendido), conteúdo instrucional (lista e dinamiza os conhecimentos necessários para atingir os objetivos definidos) e prática com Feedback (a partir da utilização, o aluno avalia seu desemprenho e o reforça com novas práticas) (SINGH, 2000, *apud* BETTIO & MARTINS, 2002).

Segundo Becker (2012, p. 43), “[...] o termo “objeto”, que abrange na epistemologia tudo aquilo que o sujeito não é, incluindo ali o meio social e físico, é reduzido a objetos do mundo físico. ”; segundo ele, isso destrói a contribuição da Epistemologia Genética.

A informática tem em seu vocabulário o termo objeto, amplamente utilizado na orientação em programação. Na informática aplicada à educação o termo objeto de aprendizagem é amplamente difundido desde os anos 2000. Entre autores, a definição de Objeto de Aprendizagem (OA) é controversa, e vários trabalhos tentam reformular essa definição no intuito de adequá-la a contextos educacionais e digitais mais atuais (CARNEIRO; SILVEIRA, 2014). Nesta pesquisa iremos apresentar uma definição, e sua abordagem será condizente com a crítica contida em Becker (2012), e consideraremos como objeto tudo aquilo que não é o sujeito, inclusive os objetos de aprendizagem tal como são definidos. Um OA é uma: “[...] unidade de conteúdo digital, autocontida e independente, a qual está associada com um ou mais objetivos de aprendizagem e tem como objetivo primário a habilidade de reuso em diferentes contextos educacionais” (NIKOLOPOULOS et al., 2012 apud CARNEIRO; SILVEIRA, 2014, p. 239). Essa definição é abrangente quanto à variabilidade de conteúdos digitais, mas bem definida quanto aos objetivos e características para seu fim educacional

Mudar a forma de pensar é reflexo de diversos fatores, dentre eles: a maturação biológica, a experiência (física ou lógico-metamática), as transmissões sociais e a equilibração. É pela interação desses fatores que o sujeito se modifica e, por consequência, se desenvolve e aprende. Nesta pesquisa, trabalhamos com o conceito de OA, no entanto, vale ressaltar que, embora haja condições oferecidas pelos *applets* que favoreçam o desenvolvimento, aquilo que é construído ocorre no interior do indivíduo, necessitando ser assim para que a mudança seja construtiva e que favoreça o entendimento da realidade. As condições externas podem facilitar ou dificultar a formação de determinados conhecimentos, mas, de alguma forma, não o produzem sem que haja a ação do sujeito.

2.3 O GEOGEBRA

O Geogebra (GGB) é um *software* livre de matemática e multiplataforma. É um *software* que desperta cada vez mais interesse de professores dos diversos níveis de ensino e das mais diferentes áreas de conhecimento devido à sua ampla utilização. É um *software* com usabilidade[4] simples. Possui amplos recursos que possibilitam o desenvolvimento de estruturas de OA simples e de alta complexidade (ALBERTO; COSTA; CARVALHO, 2010). É possível utilizá-lo por manipulação simbólica, programação em linha, desenho de estruturas geométricas e planilhas. Oferece uma estrutura gráfica que permite visualizar construções e gráficos em duas ou três dimensões. Os arquivos gerados pelo Geogebra possuem extensão (.ggb). Por serem desenvolvidos em ambiente Java, são facilmente manipuláveis em estruturas de ambientes desenvolvidas tanto em PHP quanto em HTML. Os desenvolvedores desse programa mantêm, na rede mundial de computadores, um servidor dedicado como repositório de OA

[4]Pela definição da International Organization for Standardization, usabilidade é a medida pela qual um produto pode ser usado por usuários específicos para alcançar objetivos específicos com efetividade, eficiência e satisfação em um contexto de uso específico (ISO 9241-11). Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Usabilidade>

desenvolvidos por todos os seus usuários. Sua licença de distribuição é *creative comons* (cc). (ROCHA, 2008, SANTOS, BARCELOS, BATISTA, 2014).

Apesar deste trabalho ter, em sua estrutura, algumas atividades para serem desenvolvidas com suporte de tecnologia, a responsabilidade pela aprendizagem recai sobre o próprio sujeito. Sobre isso Piaget diz: “Toda ênfase é colocada na atividade do próprio sujeito, e penso que, sem essa atividade, não há possível didática ou pedagogia que transforme significativamente o sujeito” (PIAGET, 1972, p. 07). Ou seja, se não houver no espaço educativo, um tempo ou uma situação para que o sujeito possa agir sobre o objeto de conhecimento para compreendê-lo, então dificilmente, ocorrerá aprendizagem capaz de modificar o sujeito.

Os *applets* geram uma situação-problema. Ao agir sobre o OA, o sujeito se valerá dos esquemas que construiu, o que possibilita a assimilação dessa situação-problema, a acomodação ou modificação dos esquemas assimiladores e, como resultado, a equilibração, tornando o sujeito capaz de enfrentar situações-problema mais complexas; suscetível, portanto, a novos desequilíbrios. Em termos gerais, pode-se dizer que o conceito de Piaget sobre adaptação é o de equilíbrio progressivo entre assimilação e acomodação. Então, no processo de trocas entre o sujeito e o meio, ou melhor, entre o aluno e o AVA, ou entre o usuário e o computador, ocorre a construção de conhecimento. Ou seja, nessa situação desejada de interação entre o aluno e o AVA ou o AO, perante a máquina, o aluno, ao assimilar uma situação-problema, irá necessitar entrar em equilíbrio, devendo se valer de seus esquemas para acomodar, isto é, refazê-los para esse fim. É pela equilibração sucessiva que ocorre o desenvolvimento cognitivo. A equilibração ocorre por um processo contínuo entre a assimilação e acomodação. Na assimilação, o sujeito se vale de suas estruturas de pensamento para a compreensão da realidade; já na acomodação, ocorre uma transformação do sistema de esquemas (RAMOS, 2008), uma transformação do próprio sujeito. Assim, esperamos que os OA auxiliem na construção do seu conhecimento.

Acredita-se que a incorporação da tecnologia ao processo educativo oportuniza a estruturação e implantação de ambientes educativos (RAMOS, 2008; PIVA JÚNIOR, 2011; TAJRA, 2012). Observando as pesquisas que aqui relacionamos, e que utilizaram o Geogebra para o ensino e a aprendizagem, destacamos o potencial de interatividade do Geogebra para produzir novas e ricas situações que oportunizam a aprendizagem.

2.4 AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM

Genericamente, o AVA é um *software* de gerenciamento dos processos de ensino e de aprendizagem. O AVA não tem a pretensão de reproduzir o espaço físico da sala de aula no espaço virtual, mas tem a expectativa de fornecer ferramentas e meios que facilitem uma situação propícia à aprendizagem. O Moodle é um sistema de gerenciamento acadêmico, de grande abrangência em instituições de ensino dos diversos níveis no mundo inteiro, e um dos mais utilizados. É um *software* livre de grande portabilidade (multiplataforma) utilizado tanto para criar quanto para gerir e manter um ambiente virtual para a aprendizagem de alunos em um curso. O Moodle é um conjunto de *softwares* que produz cursos baseados na Internet e em *websites*. Por ser um *software* educacional, sua arquitetura obedece a um modelo pedagógico:

> O Moodle foi desenvolvido seguindo os conceitos do construtivismo social, isso o torna mais direcionado ao aprendizado, diferente da maioria dos LMS que possuem uma abordagem mais centrada em *software* de computador [...] não foca na disponibilidade de material estático, mas sim na comunicação e colaboração entre os alunos visando à construção do conhecimento. (PIVA JÚNIOR, 2011, p. 103).

Mas de nada vale ter uma ferramenta que foi idealizada para que a ação seja percebida nos polos receptores sujeito e objeto, se a arquitetura metodológica do ensino privilegiar somente um deles. A ampla adoção do SGA Moodle por instituições educacionais é motivada pelo baixo custo para disponibilizar cursos *online* e pela facilidade em customizar e realizar manutenção do sistema devido à sua interface e a uma rica diversidade de módulos adicionais que podem ser incorporados. Mas apesar da riqueza de recursos didáticos, recursos de comunicação e sua ampla utilização no meio educacional online, nesta pesquisa a experiência com a utilização do Moodle não foi exitosa, pois os alunos já utilizavam o Sistema Integrado de Gerenciamento de Atividades Acadêmicas (SIGAA). A utilização de dois ambientes virtuais de aprendizagem, no relato dos alunos, foi conflituosa revelando-se desnecessária; por essa razão que motivou a adoção do SIGAA nesta pesquisa.

O SIGAA é um sistema que gerencia atividades acadêmicas. Integra funcionalidades acadêmicas e administrativas educacionais. É um sistema utilizado por diversas instituições públicas de ensino superior. É parte integrante do sistema SIG, que é composto ainda pelo SIGRH, SIGAdmin e o SIPAC. O SIGAA apresenta características de sistema virtual de aprendizagem com diversas funcionalidades que permitem organizar turmas virtuais. Apresenta ferramentas síncronas e assíncronas, suporte para exibição de vídeos e páginas

HTML. Oferece ainda espaço para armazenamento de arquivos dentre outras funcionalidades. (MARANHÃO; SERGIPE; PARAÍBA; PARÁ, 2017). Especificamente nesta pesquisa, essas funcionalidades básicas permitiram que docentes e alunos utilizassem os recursos da turma virtual como complementação às aulas presenciais. A arquitetura pedagógica da turma virtual não constitui um tópico de análise desta pesquisa. A turma virtual da disciplina CDI serviu, nesta pesquisa, para o direcionamento dos alunos para as atividades em análise.

Como conclusão deste capítulo, podemos afirmar que a experiência de interação entre homem e máquina ou ambiente virtual pode ser muita rica para o processo de desenvolvimento cognitivo, desde que o ambiente seja propício a isso. E veremos, no capítulo seguinte, que Piaget nos leva a compreender que o conhecimento se constrói muito mais pela interação com os objetos e com as pessoas no ambiente em que se vive do que pela transmissão de informações. Essa é a visão que temos do modelo pedagógico propiciado por um AVA, assim como, da concepção sobre a arquitetura de um OA inspirado no construtivismo.

3 EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos base da Epistemologia Genética que utilizaremos para traçar os rumos desta pesquisa. São conceitos necessários à compreensão dos dados a serem analisados pela proposta de pesquisa aqui descrita. A teoria de base orienta, também, os critérios para a elaboração das atividades no AVA. Os conceitos base que abordaremos neste capítulo serão apresentados sob o enfoque da teoria da equilibração piagetiana, até chegar à abstração reflexionante. Esta última com grande utilidade, pois permite operar na Lógica e na Matemática Pura, áreas muito significativas no CDI, compreendendo seu processo de construção.

3.1 ORIGENS

Para tentar compreender a origem do conhecimento, Piaget formulou a EG. Para que isso acontecesse, ele criticou radicalmente as propostas epistemológicas do empirismo e do apriorismo, e conjugou o que considerava válido em um modelo explicativo do conhecimento que primava pela interação entre sujeito e objeto de conhecimento. Piaget acreditava que o conhecimento não estava nem no sujeito nem no objeto, mas ele se construía à medida que o sujeito agia sobre o objeto de conhecimento (assimilação) e, ao sofrer a ação desse objeto, modificava seus esquemas assimiladores (acomodação) perfazendo novos patamares de equilibração.

A construção do conhecimento foi amplamente estudada e estruturada por Piaget e seus colaboradores ao longo dos anos. Desenvolveram pesquisas e publicaram resultados sempre pela mesma motivação: descrever cientificamente, por meio de uma teoria sólida, como um indivíduo constrói sua capacidade cognitiva. Ele formulou a EG para estudar e explicar a origem dos novos conhecimentos que surgiam em seus sujeitos da pesquisa, na grande maioria, crianças, mas pesquisando, também, adolescentes ou jovens (DELVAL, 2002; DOLLE, 2005).

Piaget, que era biólogo de formação, dedicou-se, no início de sua vida acadêmica, a estudar a classificação de espécies e sua evolução (FRANCO, 1998). Acredito que esse foi um conhecimento que o inspirou a descrever as etapas do desenvolvimento das estruturas da inteligência em estádios.

Ao formular a EG, Piaget considerou a condição do sujeito como um ser biológico que age sobre o meio, percebe as ações do meio sobre suas estruturas e se modifica para se adaptar a novas situações, conservando, em forma de esquemas ou estruturas, o que essa relação gera. Piaget também considerou, em suas pesquisas, o sujeito como um ser psicológico, epistemológico e cognitivo; por essa razão, a EG é uma teoria de conhecimento, uma epistemologia, das mais difundidas e utilizadas.

A EG tem forte influência da Biologia; buscou, nessa ciência, elementos conceituais para explicar como o ser humano se desenvolve, tanto no aspecto maturacional quanto no cognitivo. Dentre muitos conceitos básicos, o de equilibração é de extrema importância para se compreender como o sujeito produz novidades em suas estruturas cognitivas. A partir da ação sobre um objeto novo ou um novo conhecimento, ocorre o desequilíbrio; surge, então, a necessidade de voltar ao estado de equilíbrio. Em situação de desequilíbrio, o processo é iniciado com a assimilação do elemento novo, ocorrendo uma incorporação às estruturas já esquematizadas. Convém, aqui, destacar que “[...] nenhum conhecimento, mesmo perceptivo, constitui uma simples cópia do real, porque contém um processo de assimilação a estruturas anteriores. Empregamos o termo assimilação no sentido de integração a estruturas prévias”

(PIAGET, 1973, p. 13). Mas é necessário que ocorra a assimilação, ou seja, o sujeito age para conhecer seu objeto; assim, assimila-o a seus esquemas de ação para, então, transformá-lo. Nesse sentido, o conhecimento novo é transformado internamente pela assimilação, que atribui significado à nova informação com as estruturas anteriores.

Outra forma de entender o que acontece na construção do conhecimento é observar que, ao assimilar a situação-problema, o sujeito precisa se modificar, pois é a partir dessa modificação que a acomodação ocorre. Isso possibilita uma resposta àquilo que lhe provocou desequilíbrio prévio. Nesse processo de assimilação, o sujeito incorpora o meio e, desafiado por ele, modifica-se, para dar conta desse meio; é o que Piaget chama de acomodação, que, aos poucos, chega à organização interna por meio de novas ações sobre objetos mais complexos (PIAGET, 1976; BECKER, 2012). O sujeito está dotado por outro processo, complementar à adaptação, que é a organização; ela lhe permite dar sentido ao conhecimento que já possui. Assim, apesar do fato de que fatores externos têm função na gênese do conhecimento, os ajustes ocorrem pela equilibração, que permite reorganizar o conhecimento internamente por meio desse processo de adaptação. Esse processo pode ser observado conforme a Figura 1.

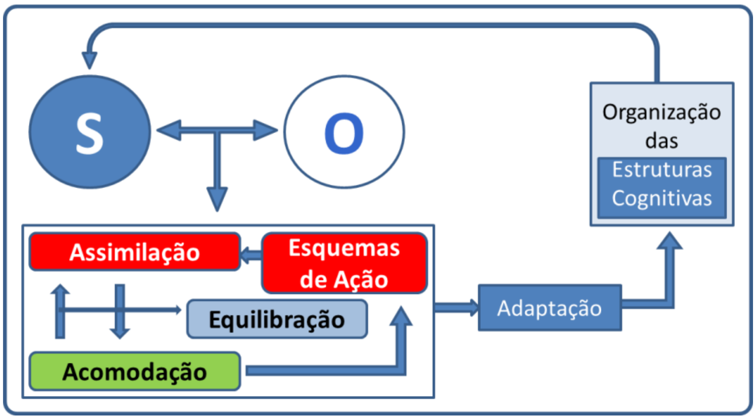

Figura 1: Representação de Conceitos Básicos da EG.

Um novo desequilíbrio é possível acontecer, pois pode haver dúvidas ou informações adicionais, compondo, assim, esse movimento cíclico de desequilíbrio-equilíbrio-equilibração (PIAGET, 1976; 1973). São os desequilíbrios ou conflitos as fontes de progresso do desenvolvimento do conhecimento e, uma vez perturbado, o sistema tende a se reequilibrar, porém em um nível majorante; isso é, com melhoramentos (VALENTE, 2002b, p. 28).

3.2 CONHECIMENTO ESCOLAR

O conhecimento é decorrente da interação entre sujeito e objeto, ou melhor, da qualidade das ações que o sujeito exerce sobre os objetos e das modificações devidas à ação do objeto sobre o sujeito. (BECKER, 2012). Para Piaget (1973, p. 15), "Conhecer não consiste, com efeito, em copiar o real, mas agir sobre ele e transformá-lo (na aparência e na realidade), de maneira a compreendê-lo em função dos sistemas de transformação aos quais estão ligadas estas ações". Ou seja, para conhecer, o sujeito age fisicamente ou por meio de operações e transformações sobre a realidade. Nesse sentido, é difícil acreditar quando um professor diz que um aluno não sabe matemática. Talvez não saiba em volume e complexidade de informação o que lhe é exigido, mas tem, a depender do seu estágio de desenvolvimento, estruturas que lhe possibilitam desenvolver e aprender. Independente do modelo pedagógico adotado pela escola ou pelo docente, a relação entre o aluno e o objeto de conhecimento acontecerá de forma espontânea; por ser um ambiente escolar, a figura do docente, além de observador desse processo evolutivo do aluno é, também, seu objeto de estudo, pois é parte integrante do meio. É evidente, também, que os efeitos dessa relação serão os mais diversos e dinâmicos possíveis, mas é um fator importante a ser considerado no processo educacional, afinal, o aluno não é tábula rasa; ao nascer, traz possibilidades de desenvolvimento; porém, sua estrutura intelectual vai se formando ao longo da vida e, espera-se, também da vida escolar.

Ao discutir o ensino de ciências (Matemática, Física, Química, Biologia etc.), em sua obra *Para onde vai a educação*? Piaget expressa preocupação com o baixo interesse pelas áreas das ciências. Levanta, nessa crítica, questões que vão bem além das didáticas empregadas em cada área. Acredita que a aplicação de conhecimentos psicológicos e a valorização do aspecto interdisciplinar da ciência acontecem menos do que deveria e o fracionamento da ciência se torna problema mais expressivo, tanto no nível superior quanto no secundário. Piaget acredita que é necessário discutir a formação científica dos alunos. Ele afirma, também, que parte do insucesso escolar decorre de uma passagem demasiadamente rápida da estrutura qualitativa dos problemas, na qual se valoriza o raciocínio lógico sem as relações numéricas e métricas, para uma esquematização quantitativa, que está diretamente nas relações preconcebidas por meio de relações algébricas. Outra crítica que faz, especificamente, sobre o ensino de matemática, é a precoce introdução de regras axiomáticas quando o aluno ainda não tem estruturas que lhe permitam raciocinar em nível avançado, e que a didática concebida por muitos professores estaria voltada apenas para a transmissão de conteúdos (PIAGET, 1977b).

3.3 EQUILIBRAÇÃO, DESENVOLVIMENTO E APRENDIZAGEM

Inicialmente, Piaget se propôs a estudar o processo de desenvolvimento cognitivo e não a aprendizagem em si. Ele quis compreender como a criança formula suas respostas frente aos problemas que lhe são colocados, priorizando, assim, a compreensão das estruturas cognitivas mobilizada pela criança e como essas estruturas se ampliavam. O estudo dessas estruturas se justifica, pois funcionam classificando e ordenando a experiência e, assim, uma condição necessária para a construção do conhecimento, pois delas precedem todas as ações (PALANGANA, 2001). O processo de construção do conhecimento parte da ação, em última instância, da formalização, ou seja, do conhecimento lógico-matemático, por um processo de abstração reflexionante (PIAGET, 1976, 1995).

A ampliação da capacidade dos sistemas de adaptação privilegia o sujeito, pois se ampliam suas estruturas. E, à medida que suas estruturas cognitivas se ampliam, o sujeito se desenvolve e amplia suas capacidades de aprendizagem. Tem-se, então, uma relação em que a aprendizagem é em função do desenvolvimento do sujeito, e a relação entre esses dois polos com enfoque no ser humano é o processo de conhecimento que a Epistemologia Genética procura explicar. Neste trabalho, quando tratamos de objeto do conhecimento, quer dizer que tratamos de um meio genérico, que engloba tanto os aspectos físicos como os sociais.

A aprendizagem é provocada por situações externas, enquanto o desenvolvimento é um processo espontâneo. Sendo assim, o desenvolvimento pode ser entendido como um processo de equilibração progressiva; uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior (PALANGANA, 2001, p. 81). Para Dolle (2011, p. 09), "[...] aprender é uma atividade e, como toda atividade, ela envolve estruturas". Ou seja, o desenvolvimento ou a ampliação das estruturas do pensamento dá-se à medida que novos conhecimentos são construídos pelo sujeito.

Piaget utilizou os processos de assimilação, acomodação e adaptação para explicar o processo de equilibração na construção de conhecimento (PIAGET, 1976). Um esquema se origina de um processo de generalização da ação. A estrutura cognitiva de um sujeito é capaz de se adaptar, mas, para a adaptação ocorrer, é preciso assimilar a fonte que causou desequilíbrio à sua estrutura (PIAGET, 1976). Da interação com o objeto de conhecimento, ocorre o desequilíbrio. Para a continuidade do processo, é necessário que ocorra a assimilação e, ocorrendo a assimilação, esse conhecimento pode se acomodar pelos esquemas de ação. Pela adaptação, o sujeito reorganiza as suas estruturas cognitivas. Assim, os esquemas de ação se revelam necessários à acomodação.

Para Piaget (1976, prefácio), o desenvolvimento do conhecimento "[...] não procede nem da experiência única dos objetos, nem de uma programação inata pré-formada no sujeito, mas de construções sucessivas com elaborações constantes de estruturas novas". Piaget acreditava que esse processo ocorria como um ciclo, iniciado pelas regulações que geravam reequilíbrios, melhorando, assim, as estruturas anteriores. A regulação é uma ação em resposta a um desequilíbrio, é uma forma de corrigir o processo em busca da equilibração. Há dois tipos básicos de regulações: as regulações inconscientes, aquelas que são realizadas automaticamente em nível de estruturas, e as regulações ativas, aquelas em que o sujeito conscientemente as realiza objetivando a equilibração. A equilibração realiza-se por um processo autorregulatório que ocorre de forma progressiva; pela ação do sujeito sobre o meio no qual está inserido.

Para elaborar a Teoria da Equilibração, Piaget (1976, p. 14) estabelece dois postulados:

> Primeiro Postulado: Todo esquema de assimilação tende a alimentar-se, isto é, a incorporar elementos que lhe são exteriores e compatíveis com sua natureza. [...] Segundo Postulado: Todo esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, isto é, a se modificar em função de suas particularidades, mas, sem com isso, perder sua continuidade (portanto, seu fechamento enquanto ciclo de processos independentes), nem seus poderes anteriores de assimilação.

A assimilação é uma ação necessária do sujeito sobre o objeto, mas, como ação isolada, não implica novidade. A novidade é alcançada pela equilibração entre a assimilação e a acomodação; esta última é que regula os esquemas de ação, modificando-os até equilibrar esse sistema de ações. Percebe-se, então, que a equilibração não ocorre de forma imediata, apresentando-se de forma crescente e se torna, necessariamente, provisória em função do desenvolvimento e da aprendizagem, enfatizando, assim, o aspecto majorante da equilibração.

> [...] os desequilíbrios não representam senão um papel de desencadeamento, pois que na sua fecundidade se mede pela possibilidade de superá-los – quer dizer, sair deles. É, pois, evidente que a fonte real do progresso deve ser procurada na reequilibração, naturalmente, no sentido não de um retorno à forma anterior de equilíbrio, cuja insuficiência é responsável pelo conflito ao qual esta equilibração provisória chegou,

> mas de um melhoramento desta forma precedente. Entretanto, sem o desequilíbrio, não teria havido “reequilibração majorante” (designando-se assim a reequilibração com melhoramentos obtidos). (PIAGET, 1976, p. 19).

O processo de equilibração se dá na ação própria do sujeito pela interação com o objeto, propiciando, assim, o desenvolvimento cognitivo; já os processos de assimilação e acomodação são conceitos fundamentais para compreender como ocorre esse desenvolvimento. Esses conceitos são amplamente tratados e sustentados pela teoria da equilibração de Piaget (1976). Contudo, esse processo cíclico não implica em uma ação primeira e, depois, na interação. A ação assimiladora já instaura a interação porque o sujeito está assimilando o objeto. Isso conduz à acomodação que, por sua vez, leva a níveis novos de adaptação, que, por sua vez, também, são organizados na estrutura cognitiva do sujeito, e essa inovação é que caracteriza o desenvolvimento.

Podemos dizer, também, que a assimilação é: “[...] a incorporação de um elemento exterior (objeto, acontecimento, etc.) em um esquema sensório-motor ou conceitual do sujeito” (PIAGET, 1976, p. 13). Na acomodação, repousa “[...] a necessidade em que se acha a assimilação de levar em conta as particularidades próprias dos elementos a assimilar” (PIAGET, 1976, p. 14). São as diferenciações decorrentes da relação entre os esquemas e o meio que propiciam a transformação dos esquemas.

A acomodação estabelece com a assimilação um movimento cíclico marcado pela subordinação da acomodação pela assimilação “[...] pois é sempre a acomodação de um esquema da assimilação” (PIAGET, 1976, p. 14). A transformação dos esquemas do sujeito ocorre pela necessidade imposta pelo sujeito, e isso se dá à medida que os esquemas de ação se acomodam, promovendo-lhe o desenvolvimento.

A teoria da equilibração é de fundamental importância sob o aspecto do desenvolvimento do sujeito, pois, segundo Piaget (1976, p. 19): “o desequilíbrio é uma das fontes de progresso no desenvolvimento”. O desequilíbrio e a equilibração são partes de um ciclo cujo movimento se dá pela interação com o meio. Piaget (1976, p. 12) descreve que o processo de equilibração é aberto nas trocas com o meio e fechado enquanto ciclo. Uma forma esquemática que Piaget apresenta é a seguinte:

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{A}') \rightarrow \mathrm{B};\ (\mathrm{B} \times \mathrm{B}') \rightarrow \mathrm{C}; \ldots;\ (\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}') \rightarrow \mathrm{A}, \text{etc.}$$

Em que A, B, C, ..., Z, A, são as partes de um ciclo, neste caso, os esquemas, enquanto que A’, B’, C’, ..., Z’, A’ são os elementos do meio, necessários à alimentação do ciclo nesse processo de interação, cujo propósito é o equilíbrio, mas suscetível ao desequilíbrio. Esse processo de equilibração ocorre pela acomodação que, por sua vez, estabelece uma relação entre os subsistemas conforme a esquematização anterior, e se configura pelos processos de diferenciação e integração.

A equilibração dos esquemas de ação do sujeito ocorre pelas regulações, que ocorrem ao longo de toda a vida. A regulação se manifesta quando o sujeito se modifica pela sua relação com o meio, ou seja, por seus esquemas de ação. Das regulações decorre também o processo da tomada de consciência (TC). Mas, antes de adentrar nesse conceito, trataremos de outros dois termos necessários tanto para a equilibração quanto para a TC, os observáveis e as coordenações. “Um observável é aquilo que a experiência permite constatar por uma leitura imediata dos fatos por si mesmos evidentes, enquanto uma coordenação comporta inferências necessárias e ultrapassa assim a fronteira dos observáveis” (PIAGET, 1976, p. 46). As inferências são produtos das regulações ativas. Realizar inferência é retirar, a partir das estruturas, uma novidade; é por intermédio da TC que uma inferência origina um conceito. Para o processo que origina a TC, são necessários a reflexão e o reflexionamento, processos da Abstração Reflexionante (ver seção 3.5).

A TC “[...] consiste em elaborar, não a consciência considerada como um todo, mas seus diferentes níveis enquanto sistemas mais ou menos integrados” (PIAGET, 1977, p. 9). Pode-se dizer, então, que tanto a equilibração quanto a tomada de consciência necessita da descrição dos mecanismos de regulação e da coordenação de ações.

Assim como no processo de equilibração, a tomada de consciência pode ocorrer em etapas. Nas conclusões do segundo capítulo do TC, Piaget (1977, p. 35) diz: “essa tomada de consciência conceituada torna-se válida quando pode apoiar-se numa coordenação inferencial ou operatória extraída da coordenação das próprias ações por abstração refletidora [refletida]”. A abstração enquanto teoria de conhecimento na EG será abordada em seção posterior, mas é possível observar a sua inserção no processo de TC, pois é com ela que ocorrem as inferências (conceituação) em nível de lógica e matemática pura.

Pode-se dizer, então, que, ao analisar o sujeito pelo espectro do desenvolvimento, diz-se que esse sujeito se desenvolve sempre que o novo se agrega às suas estruturas em um processo que resulta em equilibração. É sabido também que as estruturas formadas pelo processo de equilibração constituirão o conhecimento como capacidade cognitiva, e, assim, o sujeito se desenvolve por equilibrações sucessivas. A aprendizagem é outro processo precedido pelo desenvolvimento, discutido por Piaget na forma da tomada de consciência que será abordado na seção seguinte.

3.4 A TOMADA DE CONSCIÊNCIA PELO FAZER E COMPREENDER

A tomada de consciência é um processo cognitivo que exige a intervenção de atividades específicas. Segundo Piaget (1977), percebeu-se que a tomada de consciência, enquanto conduta, ocorre em decorrência dessas ações específicas, mas seus mecanismos agem de forma inconsciente. Os trabalhos desenvolvidos em Piaget (1977) tratam de investigações sobre a tomada de consciência da ação própria do sujeito, e como essa ação se modifica via processo de interiorização.

Em Piaget (1977), reúne-se um conjunto de trabalhos realizados por ele e seus colaboradores. Nessa obra, dispõe-se a descrição de atividades apreciadas sob o ponto de vista das condutas que vão desde a ação material até as operações, complementares ao estudo da causalidade em trabalhos anteriores de Piaget. E, segundo Piaget (1977, p. 10), "[...] as pesquisas de causalidade deveriam levar ao problema da tomada de consciência, pois, embora a noção de causa tenha nascido da ação própria, as estruturas causais são profundamente transformadas conforme os graus de conceituação", reafirmando, assim, o caráter de desenvolvimento da EG, que procura explicar o processo de construção do conhecimento humano.

Segundo resultados obtidos em pesquisa, os processos que levam à tomada de consciência constituem-se como processos inconscientes, diferentemente da tese *biraniana* que preconizava a intuição imediata privada de relações com a consciência do eu. (PIAGET, 1977, p. 10).

Segundo Piaget (1977, p. 197), "a tomada de consciência de um esquema de ação o transforma num conceito, essa tomada de consciência consistindo, portanto, essencialmente, numa conceituação". Assim, a construção dos conceitos ocorre com a tomada de consciência, ou seja, com a apropriação dos mecanismos das ações próprias. Trata-se de aproximar o consciente do inconsciente. Esse processo se desencadeia quando as regulações automáticas não mais respondem às solicitações, e isso ocorre por inadaptações, necessitando, assim, uma regulação mais ativa com escolhas deliberadas, conscientes. Mas Piaget ressalta que o mecanismo de tomada de consciência não está tão somente nas inadaptações, pois puderam observar nos resultados das pesquisas que o êxito sempre ocorre, bastando, para isso, que o sujeito se proponha a achar um objetivo consciente, fato este que não se caracteriza como uma inadaptação.

A tomada de consciência de esquemas pode transformá-los em conceitos, o que torna possível a elaboração de níveis cada vez mais complexos de regulações, agora, em nível de conceituação. É um processo que gera novas equilibrações, sendo responsável pela evolução do pensamento. Permite que o sujeito descubra a novidade que, antes, não conseguia alcançar por limitações estruturais.

> [...] a tomada de consciência parte, em cada caso, dos resultados exteriores da ação para, somente em seguida, engajar-se na análise dos meios empregados e, por fim, na direção das coordenações gerais (reciprocidade, transitividade, etc.), isto é, dos mecanismos centrais, mas, antes de tudo, inconscientes da ação (PIAGET, 1977, p. 173).

Para Piaget (1977, p. 198), "[...] a tomada de consciência procede da periferia para o centro", ver Figura 2.

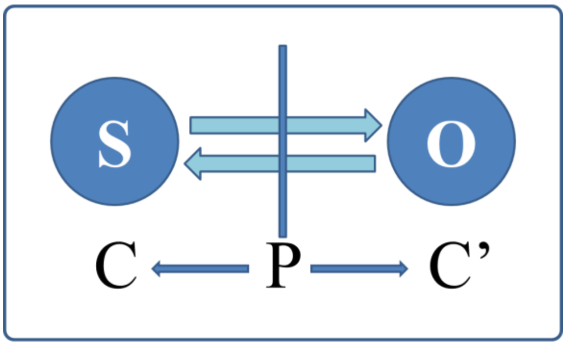

Figura 2: Representação da Tomada de Consciência - Piaget (1977, p. 199)

Segundo Becker (2003, p. 18 - 19):

> Qualquer ação do sujeito dá-se sempre sobre o objeto (os objetos materiais ou mundo físico, a cultura, as línguas, os conceitos, a história, as artes, as ciências, enfim, as coisas, as ações e as relações entre todos esses fatores). Sempre que o sujeito age, assimilando, ele o faz na direção do centro (C) do objeto – assimilar implica decifrar o objeto; quando enfrenta dificuldades nesse esforço assimilador, isto é, sente-se incapaz de assimilar na medida que gostaria de fazê-lo, volta-se para si mesmo e, em um esforço de acomodação, produz transformações em si mesmo. Assim, após agir sobre o objeto, busca apreender sua ação; sentindo-a aquém das exigências do objeto, volta-se para si, produzindo transformações em si mesmo, e assim *ad infinitum*, dependendo sempre das condições objetivas. As transformações no mundo do objeto são transformações no plano da causalidade; as transformações no mundo do sujeito são transformações no plano das implicações lógico-matemáticas. O ser humano é o

> único capaz de se apropriar das ações que praticou ou, melhor dito, dos mecanismos íntimos dessas ações. Aí reside o segredo de sua ilimitada capacidade de aprender.

Piaget explica epistemologicamente a origem do conhecimento pelas ações de assimilação e acomodação. Quando sujeito (S) e objeto (O) interagem, o conhecimento não se origina no sujeito ou no objeto, mas, dessa interação, de um ponto ou zona que Piaget chamou de periferia (P), conforme pode ser visto na Figura 2. Quando o sujeito (S) age, assimilando o objeto (O), ele busca conhecê-lo, indo em direção ao centro (C'). Na tentativa de assimilar adequadamente o objeto, o sujeito faz um esforço para acomodar o conhecimento e produz transformações em seu esquema assimilador ou mecanismos de ação (C). Esse processo segue objetivando a equilibração (BECKER, 2012; PIAGET, 1977).

De modo geral, os estudos sobre a TC buscaram investigar as conceituações feitas pelos sujeitos a partir das ações e daquilo que chamou de Inteligência prática; o que faz sentido sobre o enfoque da abstração reflexionante (PIAGET, 1977).

Para Piaget, um conceito implica generalização simbólica. Diz ele: "[...] a tomada de consciência aparece [...] como um processo de conceituação que se reconstrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação" (PIAGET, 1977, p. 204).

No *A tomada de consciência* (Piaget, 1977), foram estudadas as situações de êxito precoce, decorrentes das coordenações de ações advindas de diferenciações originadas das regulações "mais ou menos" automáticas de um processo global inicial. Já no Fazer e compreender, (Piaget, 1978), "[analisou-se] o caso dos êxitos mais tardios por etapas sucessivas decorrentes de coordenações entre esquemas distintos e de uma regulação mais ativa que supõe um andamento a introdução de novos meios" (PIAGET, 1977, p. 11).

Um êxito precoce é a situação em que o sujeito consegue um objetivo, mas não consegue explicá-lo. Já o êxito tardio indica que o sujeito consegue alcançar êxito explicando os meios utilizados, conceituando suas ações. Esse processo é precedido de várias tentativas e regulações decorrentes, a partir de inadaptações. De um conjunto de ideias dessas duas obras, verifica-se que a passagem da forma prática de conhecimento (êxito precoce) para a compreensão conceitualizada (êxito tardio) é realizada por intermédio da tomada de consciência.

Esse nível de pensamento, compreensão ou aprendizado é alcançado graças a um processo de transformação de esquemas de ação em noções e em operações. Justifica-se, nesse sentido, conhecer as noções apresentados pelos alunos ao utilizar os OA elaborados pelo Geogebra que estão dispostos no AVA, pois dessas noções depende a conceituação de limite pelo sujeito. Assim, por uma série de coordenações de conceitos mais complexos, a criança pode passar do nível de sucesso prematuro para um nível de compreensão conceitualizada (VALENTE, 2002b, p. 29-30).

Piaget (1977, 211) conclui assim os estudos sobre a TC:

> Em suma, o estudo da tomada de consciência levou-nos assim a recolocá-la na perspectiva geral da relação circular entre o sujeito e os objetos, o primeiro só aprendendo a conhecer-se mediante a ação sobre estes e os segundos só se tornando cognoscíveis em função do progresso das ações exercidas sobre eles.

O sujeito se desenvolve e aprende à medida que sujeito e objeto de conhecimento interagem, permitindo aprofundar os processos de interiorização e exteriorização. Segundo Piaget (1977, p. 209), “A interiorização leva à construção de estruturas lógico-matemáticas, já o processo de exteriorização leva à elaboração de explicações físicas, portanto, à causalidade”. Quanto mais consciência o sujeito tem de suas ações e dos meios empregados, mais conhece de si e do meio.

Pelas palavras de Piaget (1978, p. 176), percebe-se que as ações do fazer e do compreender estão estreitamente vinculadas ao problema da aprendizagem:

> [...] fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos, e compreender é conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas [situações] levantados, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação. (PIAGET, 1978, p. 176).

Fazer com êxito não implica compreender o que foi feito. Aprender é saber fazer, realizar; e conhecer é compreender a situação, é atribuir significado às coisas estudadas, considerando não apenas os aspectos explícitos, mas, também, o implícito e suas características. Para Piaget (1978, p. 10), a TC “[...] consiste numa conceituação propriamente dita, isto é, numa transformação dos esquemas de ação em noções e operações [...]”. É na relação entre o fazer e o compreender que ocorre o processo da tomada de consciência. Afirma Piaget (1978, p. 10):

> [...] essa transformação fundamental pode não se produzir senão alguns anos após o êxito prático, sendo a tomada de consciência, então retardada por deformações variadas, chegando até a espécies de repressões espetaculares, sem que o indivíduo consiga “ver” em suas próprias ações certas características, totalmente observáveis no entanto, que asseguram seu êxito, mas cuja inconsciência impeça a compreensão conceitualizada.

Nos termos assim apresentados, da forma como procede o sujeito até a tomada de consciência, apresenta-se como um dos problemas que a escola precisa atacar, pois ela considera, equivocadamente, os sujeitos da aprendizagem como um todo homogêneo. A escola precisa se transformar em espaço para a aprendizagem dos conhecimentos necessários à formação intelectual de um sujeito consciente de sua aprendizagem, que sabe e consegue aprender cada vez mais com autonomia.

3.5 ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE

Abstrair significa retirar, extrair de um determinado objeto algumas informações que fazem sentido ao sujeito. Em matemática, usualmente, o termo “abstrair” é usado para justificar processos mentais sobre um objeto (teorema, situação-problema, experimento, etc.), até mesmo sobre os conhecimentos próprios, e retirar desse objeto determinadas características (afirmações, particularidades, etc.) a fim de executar um raciocínio. E esse processo de retirada ocorre, muitas vezes, pela manipulação de um gráfico, de uma relação (fórmula), até chegar a formas inferenciais complexas e específicas de cada sujeito sobre a matemática.

A obra em dois volumes: “*Recherches Sur L´abstraction Réflechissante – L´abstracion desrelations logico-arithmétiques*” (vol. 1) e *L´abstracion de l´ordre des relations spatiales*” (vol. 2) foi publicada, originalmente, em Francês, em 1977. Foi traduzida para o Português, em 1995, sob o título Abstração Reflexionante: Relações Lógico-Aritméticas e Ordens das Relações Espaciais (vol. único). A obra é composta por três partes: “A abstração das relações lógico-aritméticas, A abstração da ordem das relações espaciais e A abstração das relações espaciais”. Piaget (1995) apresenta relatos de 18 pesquisas, feitas com crianças e adolescentes, se valendo da proposição de situações-problema para inferir sobre o desenvolvimento das crianças ou adolescentes, sujeitos das pesquisas. A abstração Reflexionante é um tema presente em algumas obras anteriores à publicação do original em Francês.

Piaget sentiu a necessidade de discutir e aprofundar sobre a abstração reflexionante (AR) distinguindo-a da abstração empírica (AE). No livro Abstração reflexionante (1995) ele relata:

> [...] insistia sobre a necessidade de distinguir uma "abstração reflexionante" da abstração apoiada sobre objetos, procedente de ações ou operações do sujeito, e transferindo a um plano superior o que foi tirado de um nível inferior de atividade, do que advém diferenças que levam necessariamente ao patamar de chegada a composições novas e generalizadoras. (PIAGET, 1995, p. 05)

Para explicar os processos envolvidos nesta pesquisa, iremos utilizar a Epistemologia Genética de Jean Piaget e, mais especificamente, a teoria da abstração reflexionante (AR), para explicitar, sob o ponto de vista do desenvolvimento, como um conhecimento, que é a noção de limite, é apresentado por alunos na interação com OA em um ambiente virtual.

A epistemologia genética concebe o conhecimento como uma construção. Essa construção ocorre a partir da interação entre sujeito e objeto, podendo ocorrer pela experiência física (abstração empírica) ou a pela experiência lógico-matemática (abstração reflexionante). (BECKER, 2010; 2012, PIAGET, 1995). Sobre as relações entre a abstração reflexionante, a abstração empírica e a construção de conceitos matemáticos, Bona, Basso e Fagundes (2014, p. 100) dizem que:

> [...] a abstração empírica é a conceituação descritiva; a reflexionante baseada no reflexionamento e na reflexão é o conceito (atividade cognitiva do sujeito), isto é, ligar e interpretar ações; e a refletida que requer a tomada de consciência (reflexão da reflexão) é a generalização ou a demonstração em Matemática".

Traz-se para a discussão a importância do desenvolvimento sob o enfoque da AR. Nesse aspecto, pode-se dizer que é da atividade do sujeito que depende tanto o desenvolvimento quanto a aprendizagem, sendo que a aprendizagem é possibilitada à medida que o sujeito se desenvolve (BECKER, 2012b, p. 35). O que atribui, fortemente, ao sujeito, e ao desenvolvimento, um papel de extrema importância na aprendizagem. Ainda segundo Becker (2010, p. 171): "A aprendizagem [...] só pode ser entendida como um processo de progressivas tomadas de consciência mediante abstrações reflexionantes (1977)". Entendendo, assim, que a abstração reflexionante é de grande importância para explicar os processos do desenvolvimento, ao nível das trocas simbólicas, e, por conseguinte, o da aprendizagem via TC.

Para explicitar a AR, é feita, inicialmente, uma distinção entre abstração empírica (AE), e AR. Para Piaget (1995, p. 05-06), abstração empírica é:

> [...] a que se apoia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões, etc. [...] as propriedades [extraídas] sobre as quais se refere a abstração empírica existiam nos objetos antes de qualquer constatação por parte do sujeito. [Já a AR], [...] apoia-se sobre tais formas [geradas por esquemas] e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, etc.), para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc.).

Para Becker (2012b, p. 35):

> [...] [AE] apoia-se sobre os observáveis dos objetos e das ações nas suas características materiais [...] aquilo que o objeto ou as ações em suas características materiais possuíam antes de o sujeito agir sobre eles. Enquanto [a AR] apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito.

A abstração empírica limita-se a fornecer informações e dados do objeto. Ela não é fonte de novas construções. A abstração reflexionante realiza essa tarefa, pois “[...] toda abstração empírica necessita, para se efetivar, de quadros de conhecimentos que foram criados graças a uma abstração reflexionante prévia.” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 89). Já a AR acontece quando o sujeito retira das ações, e não do objeto, as características e propriedades, configurando, assim, a AR como um processo endógeno, afirmado por Piaget quando diz: “[AR] apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas” (PIAGET, 1995, p. 274). A abstração reflexionante realiza-se, portanto, pela retirada das qualidades das coordenações de ações do sujeito repassando-as para um patamar superior e reorganizando-as nesse patamar.

A interação homem e máquina ou homem com OA ou AVA é uma relação de interesse a todos os pesquisadores que buscam efetivar um modelo pedagógico com o uso de tecnologias educacionais. Valente (2002b, p. 22) estabelece, por meio figurativo, um modelo explicativo híbrido da interação entre usuário e computador. Após adaptação, representamos a relação sujeito-objeto conforme a Figura 3.

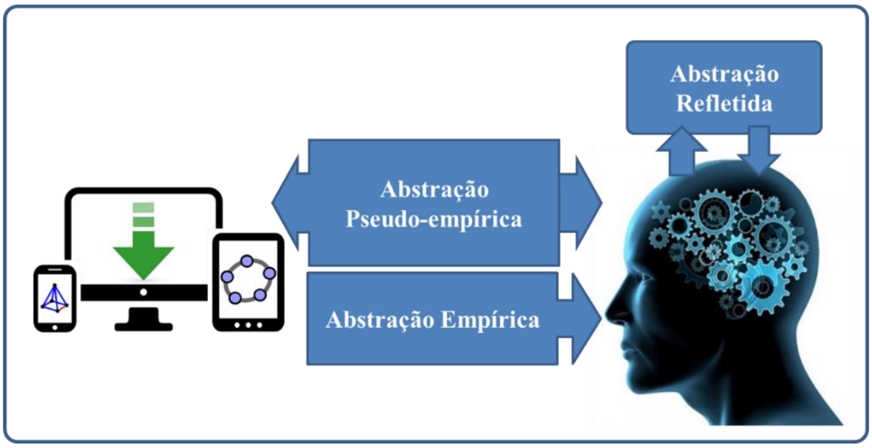

Figura 3: Interação Sujeito-Objeto. Adaptado de Valente (2002b, p. 22).

Na Figura 3, tem-se a representação dos processos de interação e AR, cujas trocas (entre o sujeito e o objeto) e a ocorrência dessa abstração são indicadas. Na AR, uma vez que as ações são internalizadas em operações, elas podem ser executadas simbolicamente. Esse processo está acompanhado de uma formalização dos elementos que foram abstraídos. Nessa figura, há, então, a representação da interação do sujeito com os OA, que, por processos endógenos, se convertem em conceitos lógico-matemáticos. No processo que sugere a Figura 3, a AE retira qualidades dos objetos ou das ações em suas características materiais, enquanto a AR retira qualidades das coordenações das ações; é esse processo que transforma as ações em operações.

Sobre a relação entre as duas formas de abstração, Montangero e Maurice-Naville (1998, p. 89) destacam: “[...] toda abstração empírica necessita, para se efetivar, de quadros de conhecimentos que foram criados graças a uma abstração reflexionante prévia”. De fato, para Piaget (1995), a AE só avança se apoiada na AR, enquanto a AR se torna autônoma à medida que o sujeito avança nos estágios de desenvolvimento.

Como é comum dentro da EG, alguns conceitos-chave são estudados para poder diferenciá-los ou relacioná-los ou, até mesmo, melhor empregá-los. A AR apresenta dois processos de sentido complementar um em relação ao outro, a saber, o reflexionamento e a reflexão. O Reflexionamento é o processo responsável por (projetar) transpor para um patamar superior o que foi retirado do patamar inferior. Já a “Reflexão” é o ato mental responsável por reorganizar sobre o plano superior o que foi retirado de um nível inferior. Nesse sentido, sob o enfoque da construção de conhecimento por trocas simbólicas, é possível compreender que, pelo processo contínuo (... → Reflexionamento → Reflexão → Reflexionamento → Reflexão → ...), realiza-se a AR. Por conduzir cada vez mais a patamares superiores, a AR é capaz de produzir novidades. Piaget (1995, p. 205) salienta que: “Quanto à abstração reflexionante, ela é fonte contínua de novidades, porque atinge novas ‘reflexões’ sobre cada um dos planos sucessivos do ‘reflexionamento’ e estes se engendram sem que sua sequência seja jamais acabada”.

Para Montangero e Maurice-Naville (1998, p. 93-94):

> [...] a reflexão enriquece notavelmente o conhecimento extraído. O resultado de uma abstração reflexionante é uma nova forma de conhecimento ou instrumento de pensamento. Esse ato criador pode conduzir a dois resultados, segundo Piaget: ou ele cria um novo esquema (instrumento de conhecimento) por diferenciação, ou ele conduz à “objetivação” de um processo de coordenação de atividades: o que era instrumento de pensamento torna-se objeto de pensamento e alarga o campo de consciência do sujeito. Vê-se, portanto, que o processo constrói tanto formas ou estruturas de raciocínio como noções (estando ambas pouco diferenciadas, na teoria de Piaget, provavelmente por ter ele insistido na natureza ativa do conhecimento).

Situada dessa forma, a reflexão desempenha função primordial na construção da novidade. Como processo complementar do reflexionamento, a reflexão assume função de acomodação; assim, a AR realiza progressivos patamares de equilibração, sendo responsável, pois, pela construção de novidades.

A AR pode ser observada em todos os estádios, desde o final do nível sensório-motor até a vida adulta. Isso possibilita-nos compreender o poder explicativo dessa teoria. Contudo, faz-se necessário destacar que a AR pode se apresentar sob duas formas: a abstração pseudoempírica e a abstração refletida.

As abstrações pseudoempíricas (*pseudo-empiriques*) ocorrem “[...] a partir de objetos materiais, como se tratassem de abstrações empíricas, [no entanto] as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nestes objetos por atividades do sujeito. ” (PIAGET, 1995, p. 06). Nesse tipo de AR, “[...] o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações” (PIAGET, 1995, p. 274). Já a abstração refletida (*réflechie*) implica em TC, ou seja, apropriação dos mecanismos gerais da ação e se trata de “[...] um processo de abstração reflexionante, procedendo por reflexão sobre as reflexões particulares” (PIAGET, 1995, p. 18). É a que resulta de um pensamento, ou seja, uma reflexão sobre a reflexão. Nesse sentido, Montangero e Maurice-Naville (1998, p. 94) afirmam: “A abstração reflexionante não está necessariamente acompanhada de tomada de consciência, porque não somos sempre conscientes dos novos instrumentos de raciocínio que utilizamos”. De fato, não há TC na abstração pseudoempírica, mas, por definição, uma abstração refletida implica TC.

Segundo Piaget (1995, p. 147):

> [...] a abstração pseudo-empírica apareceu bem como um caso particular de abstração reflexionante: o que o sujeito tira dos objetos (além, naturalmente, de suas qualidades físicas registradas por abstração empírica [...] são as propriedades que é capaz de neles introduzir, de acordo com o nível de suas coordenações de ações.

Pela abstração pseudoempírica, que é um desdobramento da abstração reflexionante, o sujeito retira dos objetos, não suas características observáveis, perceptíveis, como na abstração empírica, mas o que o próprio sujeito colocou neles. Na abstração pseudoempírica, o sujeito coloca no objeto algo que, originalmente, não estava nele; ao abstrair do objeto uma qualidade que o objeto não tinha antes da ação do sujeito sobre ele, fica claro o que o sujeito abstraiu não pertence ao objeto; foi o sujeito que colocou lá. Se ele retira algo do objeto que não pertence ao objeto, essa abstração é falsa, daí o nome de pseudoempírica, enganosamente empírica. Parece empírica, mas não o é.

Pensemos alguns exemplos. Quando atribuo cinco a um conjunto de cinco laranjas, pergunto: Onde está o cinco? Em nenhuma das laranjas. Ao atribuir cinco às laranjas, eu as envolvi num universo de relações seriais e de classe. Como assim? Fui eu, sujeito, quem colocou o cinco lá. Se eu retiro o cinco das laranjas, eu o retiro porque fui eu quem o colocou lá. Parece abstração empírica, mas não é; é falsamente empírica, é pseudoempírica. Eu retiro das laranjas o que eu coloquei nelas e não alguma qualidade delas.

O número como toda a matemática só existe na mente, no cérebro do sujeito; não existe na natureza. Se o sujeito retira alguma instância matemática da natureza ele a retira porque ele a colocou lá, previamente. Se um aluno afirma que são necessárias infinitas transformações dos polígonos para que se transformem em circunferência, mesmo sem poder o ser, o infinito não está na circunferência que ele desenhou; se ele retirou o infinito da circunferência é porque ele o colocou lá.

Piaget diz que: “[...] todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão [...]” (p. 276), e assim teremos uma alternância entre esses dois processos (reflexionamento e reflexão), como também conteúdos e formas, e numa projeção seguinte suas novidades e reelaborações, e sobretudo, sem começo absoluto.

Um processo didático, fundamentado na Epistemologia Genética, concebe o pensamento como não estático; não é uma coleção de conteúdos e imagens, é sim dinâmico, atuante e realiza-se mediante operações. Pensar é operar com os conhecimentos; constroem-se novos conhecimentos à media que submetemos novas experiências aos esquemas existentes por processos interiorizados. O ensino deve provocar a execução de certas operações, pois são as operações que definem as noções que condensam as significações (AEBLI, 1978). O conhecimento é produzido pela ação, interação entre sujeito e objeto, sendo concebido em função das estruturas que o estabeleceram; é assim que o sujeito se apropria dos mecanismos mais íntimos das ações, problematizando-as; sem isso não há novidade (BECKER, 2012; DOLLE, 2011).

Segundo Becker (2012, p. 41) “[...] o processo da aprendizagem deve ser radicalmente vinculado ao processo de desenvolvimento [...]. Desvinculado dele não passará de treinamento [...] ”. A aprendizagem é uma atividade que resulta das estruturas de que o sujeito dispõe, construídas pelo processo de desenvolvimento cognitivo. Quando retomada essa atividade, com progressiva profundidade e frequência, mediante situações-problema, ela poderá atingir o processo de desenvolvimento dando origem a novas estruturas. Aprendizagem e desenvolvimento implicam-se mutuamente, porém de forma parcial; a aprendizagem depende sempre de estruturas construídas previamente pelo processo de desenvolvimento cognitivo (DOLLE, 2011; BECKER, 2012), enquanto o desenvolvimento depende das ações e coordenações das ações do sujeito (PIAGET, 1995).

O princípio da pesquisa pelo aluno é o mais difícil, pois se considerarmos uma boa ordenação dos trabalhos docentes, a pesquisa ou investigação de problemas, ou situação problema, depende do aluno. Uma outra questão que envolve atividades de pesquisa é que se o problema for apresentado e não se apelar para esquemas que o aluno dispõe com facilidade e os dados iniciais não são suficientes, então a pesquisa não chega aos resultados esperados. É preciso dar ao aluno a oportunidade de executar materialmente as operações durante os ensaios, tateios, ou seja, deve-se oportunizar a interação entre aluno e seu objeto de conhecimento, tendo presente a visão didática que professamos: “[...] um problema, que tem por objeto a realização ou a descoberta de uma operação, é sempre um projeto de ação, realizável por manipulações efetivas [...]” (AEBLI, 1978, p. 97).

Nesta seção, buscamos trazer para a pesquisa um conjunto conceitual na vasta teoria que é a EG. Partimos da visão mais genérica sobre a interdependência dos processos até chegar aos mecanismos de funcionamento da teoria da equilibração. Optamos por essa abordagem para discutir como ocorre a relação entre sujeito e objeto, e as consequências para o desenvolvimento cognitivo. Em seguida, partimos para a discussão sobre processos mais internos ao sujeito, partindo de sua interação com o sujeito em nível de troca simbólica com a Teoria da abstração reflexionante. Essa teoria tem um alto grau explicativo dos processos que ocorrem nos sujeitos quando em interação com o conhecimento matemático, por se concentrar em conhecer como internamente o sujeito constrói seu conhecimento como capacidade. Essa razão justifica a escolha pela abstração reflexionante para estudar as noções de limite que alunos apresentam em situação de aprendizagem.

3.6 A INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA: O MÉTODO CLÍNICO

O método clínico foi utilizado por Jean Piaget para entender como as crianças se desenvolvem intelectualmente a partir de situações que permitem a interação com o meio. Este método de coleta de dados permite obter informações sobre a gênese e o desenvolvimento do conhecimento.

É possível, então, perguntar: “Qual é a gênese das estruturas lógicas do pensamento da criança? ”. Ou melhor: “Como pensam? ”, “Quais processos essa criança utiliza? ”, “O que está por trás dos erros que a criança comete? ”, “Por que são cometidos de forma tão sistemática? ” e “Por que alguns problemas ofereciam dificuldade para alguns sujeitos e para outros não?”. Essas são perguntas que definiram a origem de uma teoria do conhecimento, a Epistemologia Genética. Qual o método de investigação utilizado por ela? O método clínico.

O sucesso de um método pode ser medido pela frequência com que é utilizado. Quando se aplica um método como o MC, os resultados variam a depender do aplicador, do universo pesquisado e, até mesmo, dos indivíduos; se aplicado mais de uma vez, no mesmo indivíduo, poderão ser observadas variações nos resultados, dado o nível de desenvolvimento do ser humano. À medida que suas experiências se acumulam, esse desenvolvimento acontece, mas a experiência não é o único fator.

Battro (1969, p.15 apud DELVAL, 2002, p. 75) afirma:

> A fecundidade do método clínico de Jean Piaget se mede pelo alcance das ideias postas em marcha. Quando outros pesquisadores acolhem seus trabalhos com a disposição de pô-los à prova, empregando os métodos mais estritos de mensuração, na maioria dos casos apenas o confirmam.

A Epistemologia Genética de Jean Piaget, que, notadamente, movimentou no século XX o pensamento sobre a gênese da inteligência humana, valeu-se de um sistema teórico metodológico experimental chamado “Método Clínico Experimental” para obter informações sobre a gênese da construção do conhecimento.

Jean Piaget tinha a seguinte proposta de pesquisa: realizar estudo sobre a gênese das estruturas do conhecimento. Procurava responder as seguintes questões: “Como o ser humano se desenvolve? ”, “Como o ser humano, a partir de um conhecimento, alcança, em um patamar superior, um conhecimento novo? ”, “Como o ser humano torna-se inteligente e como ele passa de um estádio de inteligência inferior para outro superior? ”. Dolle (2005, p.59) descreve assim: “[...] ela [EG] é o estudo do conhecimento, tendo como questões principais as seguintes: “Como se formam os nossos conhecimentos? ” e “De que modo eles aumentam”. Visando responder a esses questionamentos, seus estudos culminaram na estruturação da sua teoria denominada Epistemologia Genética.

O método clínico foi se desenvolvendo à medida que Piaget e seus colaboradores avançavam em suas pesquisas. Adaptaram-no aos problemas e temas que abordavam em suas pesquisas. Vinh-Bang, colaborador de Piaget, descreve as mudanças em quatro períodos: a) A elaboração do método, entre os anos de 1920 e 1930; foi o marco inicial das pesquisas sobre a representação do mundo na criança; b) Observação crítica, entre os anos de 1930 e 1940, período esse dedicado ao estudo das origens da inteligência; verificou que não podia mais se apoiar na entrevista verbalizada; c) O método clínico e formalização (Professor Delval caracteriza esse período como “Manipulação e Formalização”, p. 62), entre os anos de 1940 e 1955, o período das operações concretas, com tarefas de manipulação de material concreto; d) Desenvolvimentos posteriores a 1955 (DELVAL, 2002, p. 58).

Delval (2002), no Capítulo III, e Dolle (2005), no Capítulo I, realizam uma descrição do processo evolutivo do MC frente às dificuldades impostas. À medida que as questões da pesquisa de Piaget se modificavam e se tornavam cada vez mais complexas, o método evoluía.

Uma visão superficial do método clínico restringe sua aplicação a crianças, com entrevistas verbalizadas. Sobre isso Delval (2002, p. 67) esclarece:

> Partimos do pressuposto que o método clínico é um procedimento para investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem, que procura descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras. [...] a essência do método não está na conversa, mas sim no tipo de atividade do experimentador e de interação com o sujeito.

Nas pesquisas contidas em Piaget (1995) e Piaget (1978), os sujeitos que foram entrevistados eram crianças maiores e adolescentes, e, teoricamente, no período Operatório Formal.

Na pesquisa que ora proponho, os sujeitos são jovens maiores que 17 anos. Apresentam uma visão bem mais densa da realidade e possuem vivência escolar. Não se busca investigar a origem da noção que esse sujeito apresenta de limite de funções, mas quais noções apresentam mediante situações-problema, dispostas no AVA.

O desenvolvimento do método permitiu compreender as respostas dos sujeitos, crianças inicialmente, e o desenvolvimento da própria Epistemologia Genética com o avanço das pesquisas. Evidenciou o pensamento na criança (interiorização das ações): como cada resposta decorre do desenvolvimento cognitivo.

Quanto à origem da expressão Método Clínico, Delval (2002) explica:

> [...] no âmbito da psicologia a expressão "método clínico" foi usada pela primeira vez em 1896, por L. Witmer, psicólogo norte-americano, que foi aluno de Wilhelm Wundt [...]. O método clínico servia para prevenir e tratar anomalias mentais de indivíduos, entre elas crianças com dificuldades escolares normais. Para isso, efetuavam-se diversos exames e se fazia um diagnóstico. Posteriormente, o método clínico foi bastante utilizado por psiquiatras que realizavam estudos minuciosos de um indivíduo, a partir dos quais é possível fazer generalizações acerca de outros indivíduos e, com isso, estabelecer categorias de sintomas de doenças.
>
> Na medicina, a clínica constituiu-se em ramo das ciências médicas que compreende outras disciplinas, com a finalidade prática para estudar um organismo doente e poder devolvê-lo ao seu estado normal. Mas no caso da psicologia normal e do estudo do pensamento das crianças, foi Piaget quem introduziu o método clínico, dando-lhe um significado muito distinto que só guarda uma semelhança distante com suas origens. (REUCHLIN, 1969, p.121 *apud* DELVAL, 2002, p.54)

Piaget iniciou o MC por meio de conversas abertas com objetivo de compreender o pensamento das crianças, e não apenas o de quantificar as respostas certas. Piaget fixou-se na análise das justificativas dadas pelas crianças ao responder suas indagações.

Piaget abordou, nas aplicações do MC, temas sobre física, natureza, matemática, moral e conhecimento universal. Alguns temas foram: o realismo nominal; a ideia sobre sonhos; realismo e consciência; a consciência atribuída às coisas; o conceito de vida; a origem dos astros; a meteorologia e a origem das águas; a origem das árvores, montanhas e da Terra; a noção de conservação de massa, peso e volume; seriação, classificação; permanência do objeto; noção de todos e alguns; entre outros.

A aplicação do MC e os resultados das pesquisas de Piaget foram observados pela comunidade científica à sua época. Muitos acompanharam com incredulidade, alguns tentaram até refutar seus resultados, mas psicólogos de grande notoriedade reconheciam o valor desse método.

Vygotsky (1934, p. 31), *apud* Delval (2002, p.73-74), relata:

> Piaget deve a descoberta de novos dados, uma mina de ouro, ao novo método que introduziu, o método clínico, cuja força e originalidade situam-se entre os melhores métodos de pesquisa psicológica e fazem dele um elemento insubstituível para o estudo da mudança evolutiva das complexas formações do pensamento infantil. Esse

> método proporciona uma unidade coerente à totalidade das pesquisas empíricas tão diversificadas de Piaget, reunindo-as em descrições cheias de vida do pensamento da criança.

O relato é parte da obra "Pensamiento y lenguage", de 1934. Vygotski apoiou-se na obra de Piaget para o desenvolvimento de suas pesquisas iniciais (DELVAL, 2002).

No MC, há uma hipótese prévia e um núcleo referencial que se problematiza e apresenta-se ao sujeito. Caracteriza-se por uma série de entrevistas na qual ocorre a coleta de dados. Costuma-se identificar o MC como um método de conversas. No entanto, Delval (2002, p. 67) alerta: "[...] a essência do método não está na conversa, mas, sim, no tipo de atividade do experimentador e de interação com o sujeito". Em seguida Delval (2002, p. 68) reforça: "[...] e aquilo que tem de mais específico, que o diferencia de outros métodos, consiste precisamente nessa intervenção sistemática do experimentador diante da atuação do sujeito e como respostas às suas ações ou explicações". Assim, transfere-se o sucesso do MC para as possibilidades de interação entre o sujeito e o objeto, criadas a partir da escolha do tipo de atividade visando desafiar o sujeito. Busca-se, com esse método, acompanhar o pensamento do sujeito por meio de perguntas com intervenções sistemáticas; e, dependendo das respostas e a partir delas, são elaboradas novas perguntas. O entrevistador sempre se vale de contra-argumentações, estratégia que tem mostrado especial valor heurístico. Tais ações se justificam para avaliar a qualidade, abrangência e segurança das respostas.

O MC é, essencialmente, um método de investigação. Coleta dados de caráter qualitativo. Considerando a natureza dos números e sua importância na constituição da matemática e seu ensino, é possível pensar que esse tipo de método em nada subsidiaria uma pesquisa de educação matemática, mas não é o que acontece. Em Borba e Araújo (2010), são reunidas diversas pesquisas que utilizam a metodologia de investigação qualitativa. Fica evidente, em tais trabalhos, que, na educação matemática, a investigação qualitativa é de grande importância. Com a ampla utilização desse método, muitas questões foram desmistificadas entre os docentes da área verificando procedimentos, hipóteses didáticas, avaliação de atividades, entre outras ações.

Um problema que os autores caracterizam como entrave para a utilização eficaz de uma investigação qualitativa é a composição de uma pergunta que caracteriza o problema a ser investigado; a formulação adequada direciona a pesquisa. Nesse sentido, Araújo e Borba (2010, p. 29) comentam:

> Um dos momentos cruciais no desenvolvimento de uma pesquisa é o estabelecimento de sua pergunta diretriz. É ela que, como o próprio nome sugere, irá dirigir o desenrolar de todo o processo. [...] O processo de construção da pergunta diretriz de uma pesquisa é, na maioria das vezes, um longo caminho, cheio de idas e vindas, mudanças de rumo, retrocessos, até que, após um certo período de amadurecimento, surge a pergunta.

Os pesquisadores que se interessam por esse tipo de investigação adotam-na por sua natureza descritiva; priorizam o processo bem mais que o resultado final das atividades, ou situações-problema, com as quais o aluno interage.

Segundo Delval (2002, p. 70):

> A utilização do método clínico baseia-se no pressuposto de que os sujeitos têm uma estrutura de pensamento coerente, constroem representações da realidade à sua volta e revelam isso ao longo das entrevistas ou de suas ações.

Do ponto de vista da EG, na aplicação do MC, deve-se considerar a organização dos esquemas, pois o esquema é o ponto de partida para a ação do sujeito. De nada valerá a proposição de uma situação-problema se o sujeito não a assimilar.

O método clínico apresenta extraordinária flexibilidade, o que possibilita ajustes de acordo com a conduta do sujeito.

Segundo Delval (2002, p. 79-80):

> Graças à sua flexibilidade, permite explorar novos campos e descobrir aspectos desconhecidos do pensamento. Sua capacidade de explorar caminhos que o sujeito percorre em suas explicações nos ajuda a encontrar novos tipos de respostas que sequer imaginávamos ao iniciar a pesquisa.

O que torna evidente as características exploratórias e seu potencial para o desenvolvimento desta pesquisa, haja vista a infinidade de conceitos e noções da matemática desenvolvidas em toda a vida escolar dos sujeitos da pesquisa.

Diz Delval (2002, p. 79), "A elaboração de um trabalho de pesquisa utilizando o método clínico deve seguir uma série de passos, que são semelhantes aos que se seguem para a realização de qualquer trabalho científico...". O MC é um método científico de ampla utilização e de grande relevância para entender como ocorrem os processos cognitivos do ser humano. Esses processos objetivam responder às situações de desequilíbrio geradas pelo experimento apresentado pelo entrevistador. Nas conclusões do TC, Piaget (1977. p. 211) revela o que considera um acordo do pensamento com o real: "[...] a ação procede das leis de um organismo que é ao mesmo tempo um objeto físico entre os outros e a fonte do sujeito que age e, depois pensa". O que remete à construção do conhecimento ao princípio da ação.

Após caracterizar o MC, torna-se necessário conhecer os procedimentos necessários à sua aplicação. Segundo Delval (2002, p. 80), os passos principais são:

a) A definição do problema – Define-se o problema com precisão, examinam-se os antecedentes da pesquisa sobre o tema de estudo e planejam-se os procedimentos para a coleta de dados;

b) Coleta de dados – Aplicação da entrevista clínica;

c) Análise de dados – Extrai-se o máximo de informações dos dados coletados;

d) Resultados – Organizam-se os resultados da análise dos dados para publicação e apreciação.

Para definir o problema, o pesquisador deve levar em consideração a representação da realidade por parte do sujeito, pois ela é única. Segundo Delval (2002), no livro "A representação do mundo na criança", fica evidente que a criança tem ideias ou representações próprias da realidade, independente do que lhe tenha sido ensinado.

É necessário, também, ter uma hipótese inicial ou mais, bem geral. Posteriormente, delimita-se o problema. Nessa etapa, costuma-se elaborar um questionário com perguntas básicas, o que permitirá, a partir das respostas, investigar os problemas colocados pelos sujeitos.

Na coleta de dados, é importante encontrar um procedimento adequado para perguntar e interpelar o sujeito, valendo-se do tempo apenas o suficiente. Faz-se necessária, também, a revisão da literatura sobre o problema investigado, isso dará ao entrevistador liberdade maior para entender e reagir às respostas dadas. Ao definir o problema que abordará com o sujeito, é importante que o entrevistador defina, também, a abordagem adequada. Essa abordagem compõe-se de todos os passos necessários à coleta dos dados, é a situação que deve ser criada para realizar a entrevista.

Os sujeitos da pesquisa serão selecionados de um conjunto universo visando atender o perfil que requer a pesquisa. Quanto ao número de sujeitos selecionados para a pesquisa, Delval (2002) alerta:

> Como norma geral, pode-se dizer que 10 sujeitos é um número adequado por idade. Com um número menor, é difícil tirar conclusões e, naturalmente, fazer as comparações estatísticas. [...] entrevistar um grande número de sujeitos não chega a

> ser prejudicial, porém o trabalho fica mais pesado, e os benefícios não compensam essa desvantagem. Podemos ter até 15 ou 20 sujeitos por idade, mas a partir daí constataremos que de maneira geral as respostas são sempre do mesmo tipo e que não conseguimos informação nova. (DELVAL, 2002, p. 101-102)

Outro critério relatado pelo mesmo autor é definido pela observação; se, ao acrescentar novos sujeitos e não aparecerem novos tipos de respostas, pode-se considerar que o número é suficiente.

A importância do MC para esta pesquisa fica evidenciada pela natureza exploratória desse método. Realizar uma investigação inspirada no MC, subsidiada por tecnologias educacionais em um ambiente virtual, permitirá observar as noções de limite que os sujeitos desta pesquisa apresentam.

4. METODOLOGIA

Um site foi desenvolvido para receber e possibilitar a utilização de objetos digitais de aprendizagem. Essa iniciativa ocorreu após tentativas de implementação desta pesquisa, em oportunidades anteriores à sua efetivação; a utilização do SGA *Moodle* mostrou-se como um obstáculo à realização das atividades desta pesquisa. Segundo relatos dos alunos, o cadastro, o acesso e a utilização do ambiente tornaram-se difíceis por razões diversas, que iam desde o carregamento desse sistema e suas funcionalidades, até a resistência em acessar um segundo SGA; isso por já existir um institucional, o SIGAA, que possui design diferente, mas com ferramentas e funcionalidades semelhantes às do *Moodle*. Em Silva e Becker (2016), foi feita a descrição completa dos procedimentos e fundamentos teóricos e metodológicos adotados na construção do site e dos objetos de aprendizagem desta pesquisa.

Esta pesquisa é de natureza aplicada. Quanto aos objetivos, é descritiva/explicativa e sua abordagem é qualitativa. (PRODANOV; FREITAS, 2013).

4.1 DESCRIÇÃO GERAL DOS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O núcleo metodológico desta pesquisa é constituído por três procedimentos de coleta, sequenciados (P1, P2 e P3), distintos, porém complementares entre si: análise e resolução das situações-problema como parte das atividades complementares (A1, A2, A3 e A4) da disciplina CDI; entrevista inspirada no método clínico, criado e utilizado por Jean Piaget, que objetiva a investigação dos processos construtivos dos conhecimentos, ou capacidades cognitivas, propostos na disciplina; análise dos dados obtidos a partir dos fundamentos da teoria da abstração reflexionante (PIAGET, 1995).

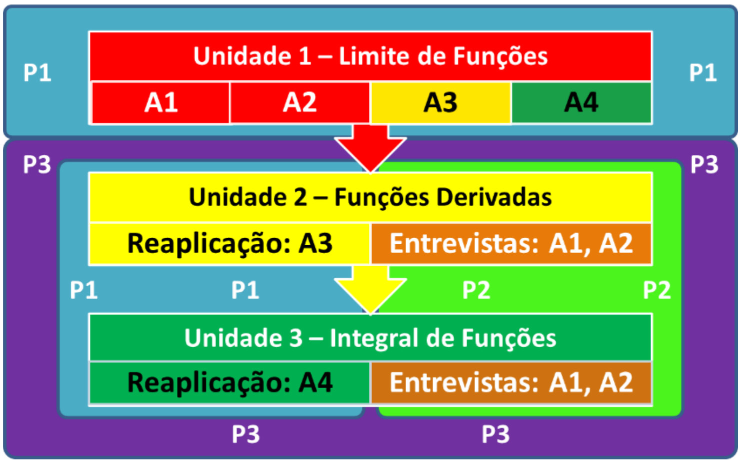

Figura 4: Procedimentos e atividades

Representam-se, na Figura 4, os procedimentos de aplicação das atividades, nas 3 (três) unidades da disciplina CDI (U1, U2, U3). Os procedimentos citados estão intimamente relacionados à utilização dos recursos do site Cálculo NasNuvens (ver seção 4.3). Esses procedimentos estão caracterizados e relatados nos parágrafos seguintes. Compõem a estrutura metodológica geral desta pesquisa, assim definida:

Procedimento 1 (P1) – Análise e resolução das situações-problema – as atividades complementares, numeradas de 1 a 4, foram programadas com o professor da disciplina CDI; as atividades envolveram o acesso e a discussão das situações-problema contidas no site Cálculo NasNuvens. Os assuntos tratados nas situações-problema foram relativos aos conceitos que envolvem limites, derivação e integração de funções de uma variável real. Os alunos utilizaram as tecnologias disponíveis nas páginas do site e agiram com os *applets* do Geogebra, e estes foram criados para compor as situações-problema utilizadas nesta pesquisa.

Da interação entre aluno e situação-problema, foi possível coletar registros escritos, realizados pelos alunos; a saber, os principais conhecimentos envolvidos, dificuldades e conclusões. Os registros foram coletados com a utilização de tecnologia *Google Drive*, sendo armazenados em planilhas eletrônicas disponíveis *online* para consulta dos pesquisadores envolvidos. A realização do registro escrito fez parte das atividades sugeridas complementarmente às práticas desenvolvidas em sala de aula, uma vez que houve a adoção do uso do *software* Geogebra, tanto para apresentação gráfica quanto para cálculos relativos às funções no contexto da disciplina. Este procedimento foi realizado em três períodos letivos e em três aplicações (AP1, AP2, AP3). Essas aplicações serão definidas e descritas à frente (ver 4.3).

Nesta etapa, as atividades A1, A2, A3 e A4 foram aplicadas ao final do primeiro terço da disciplina CDI, o que equivale à conclusão da unidade disciplinar relativa ao estudo de limites de funções. Algumas atividades foram propositalmente reaplicadas como parte integrante da proposta metodológica: a atividades A3 foi reaplicada ao término da segunda unidade disciplinar que trata do estudo de derivadas de funções; a atividades A4 também foi reaplicada ao término da terceira unidade disciplinar que trata do estudo da integral de funções.

Procedimento 2 (P2) – Entrevista inspirada no método clínico utilizado por Jean Piaget – Os alunos foram entrevistados em dias marcados, e a realização da entrevista não foi considerada atividade programada da disciplina CDI. Foi feita a entrevista visando coletar dados sobre as ações e os processos construtivos dos conhecimentos, realizados pelos alunos com os *applets* contidos na situação-problema. Subsidiaram a entrevista os registros escritos, coletados anteriormente via tecnologia *Google Drive* como uma atividade programada da disciplina. As entrevistas foram gravadas em áudio e vídeos para facilitar a transcrição de falas e ações. Este procedimento foi realizado nas aplicações AP1, AP2, AP3 em períodos letivos distintos.

Nesse procedimento, a entrevista é iniciada a partir de questionamentos advindos das situações-problema contidas nas atividades A1 e A2. Seguem-se outros questionamentos, podendo ser resultantes ou não da análise dos registros escritos de respostas; observam-se, ainda, as ações resultantes do processo de interação entre o aluno e o *applet* do Geogebra ao tentar solucionar as situações-problema. São exploradas as respostas dadas aos questionamentos feitos sobre a situação-problema, seus desdobramentos e a utilização dos *applets* contidos nas atividades $A1$ e $A2$.

Procedimento 3 (P3) – Análise dos dados obtidos – Para a realização da análise, as entrevistas foram transcritas e, a partir dos vídeos, foram analisadas as falas do docente, as falas dos discentes e as ações realizadas por ambos. Foram incluídos nesse procedimento os registros escritos de respostas, coletados a partir das experiências dos alunos com as situações-problema e organizados no Google Drive. Visando investigar a noção de limite de funções, que alunos apresentavam na interação entre eles e os *applets*, disponíveis em cada situação-problema, utilizou-se como aporte teórico a abstração reflexionante para análise das falas, ações e registros escritos de respostas.

A análise dos dados será feita a partir de cada uma das atividades A1, A2, A3 e A4, nessa ordem, observando os dados obtidos por aluno tanto nos registros escritos de respostas em P1 quanto nas entrevistas realizadas em P2. Os alunos foram identificados por códigos não sequenciais. Os registros escritos foram organizados em planilhas e as respostas foram individualizadas. As entrevistas foram transcritas a partir dos áudios e vídeos produzidos no procedimento P2.

Para tratar os dados relativos às atividades A1 e A2, foram analisados, inicialmente, os registros escritos de respostas a essas atividades. Essa análise possibilitou, de forma comparativa, sob o aspecto do desenvolvimento cognitivo, o entendimento das respostas obtidas durante as entrevistas; procuraram-se semelhanças e contradições ocorridas. A análise procurou caracterizar e registrar os processos construtivos do conhecimento de limites, ocorridos na interação entre alunos e situações-problema, especificamente com os *applets* do Geogebra. A análise das atividades A3 e A4 ocorreu pela comparação entre as respostas dadas por alunos à mesma questão em momentos distintos no andamento da disciplina CDI. Privilegiou-se a análise dos processos construtivos, por abstração reflexionante, que ocorreram antes e depois do estudo de conhecimentos específicos sobre derivada na A3 e integral definida na A4. Foram investigadas as relações de conhecimento construídas pelos alunos.

A análise das respostas foi feita considerando os aspectos construtivos do conhecimento de limite de funções. Essa análise ocorreu de acordo com os fundamentos da EG, especificamente pela abstração reflexionante. Ao final da análise de cada atividade, relações (R) foram organizadas com os conhecimentos construídos pelos alunos. Essas relações R são decorrentes do processo construtivo do conceito de limites de funções nas situações-problema descritas nos *applets* do Geogebra.

4.2 PÚBLICO-ALVO E LOCAL DE PESQUISA

O universo desta pesquisa é o conjunto de estudantes de graduação da UFMA matriculados em disciplinas que tratam de temas relativos ao estudo de limites de funções. A amostra de alunos que participaram desta pesquisa foi composta por alunos do primeiro ou segundo período do curso de Licenciatura em Ciências Naturais (LCN) da UFMA, no Campus da cidade de Pinheiro, no estado do Maranhão, autorização contida no Anexo II. Participaram das atividades desta pesquisa todos os alunos matriculados na turma única da disciplina CDI que se disponibilizaram a prosseguir até o final da pesquisa. A escolha por aplicar a pesquisa no Campus da UFMA de Pinheiro, deu-se por haver nesse local, média de aprovação na disciplina CDI semelhante à média geral da UFMA nos períodos letivos analisados, além da facilidade de aplicação, por ser o local de atuação profissional do proponente desta tese; justifica-se a escolha, além da conveniência, também pelo retorno com resultados, podendo impactar positivamente o aproveitamento dessa disciplina pelos alunos. A participação na pesquisa ocorreu com a assinatura do termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE), contido no Anexo I, que foi lido, discutido, entregue e recebido em datas posteriores à sua entrega. A coleta de dados ocorreu nos procedimentos P1 e P2. Para a análise desses dados, foram utilizados os registros escritos e a transcrição de entrevistas. Em ambas as atividades, interagiram alunos e *applets* do Geogebra, contidos nas situações-problema. Participaram efetivamente desta pesquisa 18 indivíduos chamados apenas de alunos. A identificação dos alunos, tanto nas atividades ou entrevistas quanto nas análises dos resultados, foi feita por códigos, impossibilitando a identificação dos sujeitos da pesquisa por outras pessoas, preservando, assim, a identidade e intimidade dos alunos envolvidos na pesquisa.

Como esta pesquisa foi realizada em três aplicações, conforme descrição a seguir, participaram da pesquisa um total de 69 alunos. No entanto, como a primeira aplicação tinha caráter de execução, correção e adequação, não houve na segunda a adesão esperada. Os 18 alunos desta pesquisa são aqueles da aplicação 3 que se enquadraram nos critérios de aceitação e participação. A aplicação 3, na disciplina CDI, foi a utilizada nos resultados desta pesquisa.

4.2.1 Aplicações, o histórico da pesquisa

Esta proposta metodológica, como atividade complementar da disciplina CDI, foi aplicada em três períodos letivos distintos que a disciplina CDI foi ofertada, aqui destacada como aplicação, seguidas de sua ordem de aplicação, a aplicação 1 (AP1), a aplicação 2 (AP2) e a aplicação 3 (AP3). As aplicações foram feitas em amostras de alunos, retiradas do universo da pesquisa.

Aplicação 1 (AP1) – No primeiro semestre letivo de 2015, foram coletados registros da utilização de três atividades (situação-problema). Participaram efetivamente das atividades *online* um total de 31 (trinta e um) alunos individualmente. As entrevistas foram realizadas em grupos, e, destas, participaram 26 (vinte e seis) alunos, totalizando 6 grupos. Os registros de respostas foram utilizados para compor complementarmente as avaliações por opção do docente. Nesta aplicação, houve a aproximação entre docente e pesquisador para definir como as atividades seriam propostas. Esta aplicação foi realizada entre os meses de setembro, outubro e novembro (segundo semestre de 2015). Foi a aplicação inicial para testagem e adequação da pesquisa e suas atividades. Esta aplicação foi realizada na terceira de três unidades da disciplina CDI, e as atividades desta aplicação foram disponibilizadas no Moodle. O pesquisador auxiliou nas aulas e na aplicação das atividades com os alunos de forma presencial e virtual, às vezes, *online*. As atividades, propostas de forma complementar à disciplina, foram discutidas e programadas com o docente responsável dessa, nas unidades anteriores, a utilização do *software* Geogebra ou das situações-problema ficou por conta do docente; não só a utilização como o planejamento das atividades. O docente utilizava o SIGAA para auxiliar a execução das aulas. Segundo relatos, a utilização de dois sistemas de suporte para as atividades online não seria viável, demandaria tempo e acúmulo de acessos. Prioritariamente, os alunos acessariam o sistema SIGAA e, por essa razão, optou-se por utilizar esse sistema, que já oferecia apoio às atividades da disciplina. Além disso, poderia direcionar, a partir desse AVA, as atividades para o site Cálculo NasNuvens. Esse site foi projetado e desenvolvido para receber e organizar os *applet*s e conteúdos complementares à disciplina CDI, de modo que os alunos os pudessem acessar mais livremente e, assim, viabilizar a pesquisa.

Aplicação 2 (AP2) – No segundo semestre letivo de 2015, foram coletados registros de respostas de 5 (cinco) atividades diretamente no site; contou-se, para isso, com a participação de 20 (vinte) alunos. Desses, foram entrevistados 5 (cinco) alunos, individualmente. A participação dos alunos nas situações-problema ocorreu de forma voluntária. Foi solicitada a apreciação de vídeos.

A coleta dos relatos de observações e respostas foi feita com a tecnologia *Google Drive*. Esta aplicação foi realizada entre novembro de 2015 e abril de 2016. Esta seria a aplicação fundamental para a realização da pesquisa. No entanto, a adesão de alunos às atividades e à entrevista foi baixa, o que inviabilizou a pesquisa. O pesquisador limitou-se à supervisão *online* da execução das atividades, já o planejamento e a execução ficaram a cargo do docente responsável pela disciplina.

Aplicação 3 (AP3) – No primeiro semestre letivo de 2016, fez-se a integração do site Cálculo NasNuvens com o ambiente virtual de aprendizagem institucional, o SIGAA. A integração deu-se pela indicação de material e das situações-problema com *links* a partir do SIGAA para o site Cálculo NasNuvens. As situações-problema, contidas no site, foram relacionadas com as práticas da disciplina CDI. Durante o desenvolvimento da disciplina, foram coletados registros da utilização de seis atividades, das quais participaram 18 (dezoito) alunos. O resumo de algumas aulas foi solicitado por meio de formulários eletrônicos do *Google Drive*. Foram realizadas entrevistas investigativas com os alunos; essas entrevistas foram inspiradas no método clínico, amplamente utilizado por Jean Piaget em suas pesquisas. Elas visaram obter, sobre as práticas com as situações-problema, informações sobre os processos de construção de conhecimento ou capacidades cognitivas. Esta aplicação foi realizada entre os meses de maio e setembro de 2016.

Para a realização definitiva da pesquisa, foi necessária a participação do pesquisador para planejar e executar com o professor, dentro e fora da sala de aula, as ações necessárias à execução da disciplina CDI. Essa disciplina foi dividida em três unidades: a primeira trata do limite de funções, a segunda do estudo das funções derivadas, e a terceira da integral de funções.

Nessa aplicação, as atividades 1, 2, 3 e 4 foram concluídas no término da unidade 1. Tratam de noções de limites contidas nas situações-problema que cada uma das atividades sugere. A atividade 3 foi refeita pelos alunos ao término da unidade 2; objetivou-se, com isso, a comparação com os registros realizados na unidade 1, verificando, assim, como a abordagem do tema limite de funções modificava-se na resposta dada à mesma atividade após a abordagem do conceito de derivadas. A atividade 4 seguiu a mesma linha de procedimento; foi reaplicada ao término da unidade 3 e seus registros foram comparados com os registros dessa mesma atividade, feitos no término da unidade 1. Investigaram-se as noções de limite de função, utilizadas nas respostas da atividade 4 e o que modificava nos registros, e noções após a abordagem do conceito de integral definida.

As entrevistas ocorreram em 5 (cinco) datas distintas ao término da unidade 1 com os 18 (dezoito) alunos. Nas entrevistas, foram utilizadas as atividades 1 e 2 para investigar as noções de limite apresentadas. Os alunos foram submetidos à utilização do *software* Geogebra, nessa oportunidade, os alunos foram indagados sobre questões referentes ao cálculo de limites e, para tanto, utilizaram as representações gráficas de algumas funções. A execução das entrevistas exploratórias sobre as situações-problema foi inspirada no método clínico piagetiano.

4.3 DESENVOLVIMENTO DO SITE CÁLCULO NASNUVENS

O modelo teórico adotado para a construção do site tem inspiração nos fundamentos da EG. O site Cálculo NasNuvens possui um conjunto de OA que tratam de temas e conteúdos do CDI. As páginas contêm os OA. Como princípio didático, nesta pesquisa, consideramos a possibilidade de desenvolvimento cognitivo por meio da interação entre sujeito e esses OA. O sujeito assimila as situações-problema; desafiado por elas, age sobre si mesmo (acomodação), refazendo seus esquemas de assimilação responde, assim, aos desafios trazidos pela assimilação das situações-problema contidas nos OA. Nesta pesquisa, esses OA apresentam uma situação-problema, com o auxílio de *applets* do Geogebra, que funciona como um meio que permite registro do aluno pela inserção e pelo armazenamento de respostas às problemáticas estudadas. Os registros de respostas são expressões das noções e dos conceitos dos alunos ao tentar solucionar as situações-problema. Optou-se pela utilização dos registros de respostas, após a utilização dos OA, para fins de análise. Para coletar e armazenar os registros de respostas, os OA dispõem da tecnologia *Google Drive*, que também as organiza em registros individuais e temporais no formato de planilhas eletrônicas, acessíveis *online*.

Para o desenvolvimento do site, foram pesquisadas e analisadas mídias, sites e OA, na *Internet*. *Applets*, vídeos e formulários foram elaborados para compor o material do site "Cálculo NasNuvens" e satisfazer seu propósito educacional. Foram pesquisados vídeos no *Youtube* para compor parte das atividades contidas no site. Para o desenvolvimento dos *applets*, utilizou-se o *software* Geogebra. Os vídeos de aulas e ajuda de atividades foram gravados utilizando o *software Screen Capture*. O site foi elaborado a partir de um modelo do *Word Press*. A escolha dessas tecnologias para a construção do site deu-se em razão do baixo custo financeiro, a qualidade dos arquivos produzidos e o amplo conhecimento e uso dessas tecnologias nos meios escolares e acadêmicos. O uso do site está fundamentado na utilização dos textos, vídeos, *applets* e formulários para as práticas de aula pelos docentes; estudos individualizados e em grupo, pelos alunos.

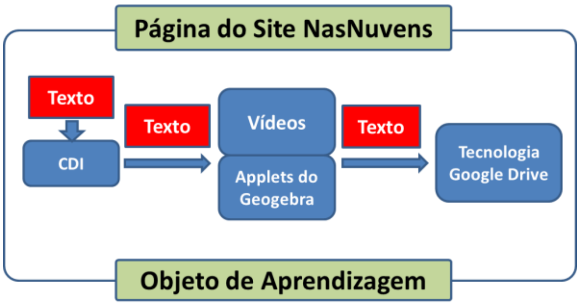

Figura 5: Modelo de Navegação no site Cálculo NasNuvens

Conforme exposto na Figura 5, o modelo de navegação detalha o ambiente à disposição dos usuários e as relações entre seus elementos. O site concentra seus objetivos em propor situações-problema que tratam de quatro temas: estudo de funções, limite de funções, derivada de funções e integral de funções. As páginas apresentam conteúdo da disciplina em forma de vídeos, textos e *applets*. Os textos podem ser teóricos, introdutórios, comentários ou a própria descrição da situação-problema. As proposições feitas para estudo das situações-problema são respondidas em formulário, próprio da tecnologia *Google Drive*, e armazenados em planilha eletrônica *online* para posterior análise.

Na Figura 5, é possível observar a dimensão da navegabilidade posta ao usuário; inicia, dentro da temática do OA, um texto teórico, introdutório ou uma situação-problema expressa, prosseguindo, em seguida, até os *applets* do Geogebra; após sua utilização, acessa os formulários e insere registros de respostas. O site tem acesso livre. Professores, alunos e usuários, em geral, poderão utilizar livremente suas funcionalidades, a qualquer hora, em dispositivos multiplataforma como: *desktops*, *smartphones* e *tablets*.

Figura 6: Interface de uma página do site Cálculo NasNuvens.

Na Figura 6, temos, em destaque com letras, os itens a serem identificados. O item **A** pode conter texto teórico ou a descrição da situação-problema. O item **B** destina-se a alocar vídeos ou *applets* embutidos. No item **C**, há um *link* para acessar o *applet*, na versão *web* do Geogebratube, que permite o visualizar em tela cheia no navegador. No item **D**, está disponível o *link* para o formulário de registro das respostas da situação-problema. Os itens **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J**, **K**, **L** estão na barra de menus; tratam dos temas centrais do site. No Menu **E**, estão dispostas páginas com teoria e situações-problema que tratam de funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e modulares. Existem *applets* para estudo de domínio e imagem, operações e composição de funções. No menu **F**, há um conjunto de situações-problema para estudo: da noção intuitiva, do conceito de limite de funções, da definição formal com animação, da verificação de valores de limite e do cálculo do limite de funções.

Nos menus **G** e **H**, estão disponíveis *applets* para introdução, aprofundamento, problematização e aplicação dos conceitos de derivada e integral, respectivamente; são *applets* dinâmicos e manipuláveis. No menu **I**, estão as atividades propostas como situações-problema; essas atividades individualmente são objetos de aprendizagem que permitem desenvolver conceitos sobre os temas do CDI, mas, em conjunto, permitem desenvolver o conceito de limite, derivada e integral; permite, ainda, compreender como a teoria de limites se apresenta na tentativa de conceituação da função derivada e integral de funções. Nos menus **J** e **L**, estão disponíveis textos de CDI e *links* úteis à disciplina. No menu **K**, estão dispostas vídeo-aulas da disciplina CDI; essas aulas foram embutidas (*embedded*) no site diretamente do canal *Youtube* da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP); são utilizadas no site com a mesma proposta de utilização de *applets*; nessa proposta, os alunos realizam registros após a utilização de vídeos.

O site foi disponibilizado no endereço: http://geogebra.nasnuvens.net.br. Para esta pesquisa, foi solicitada a colaboração de professores para a utilização do site e de seu conteúdo em sala de aula. Houve a colaboração de professores da disciplina CDI. O site foi submetido à utilização em três ocasiões e em semestres letivos distintos. Os *applets*, os vídeos e as situações-problema foram utilizados durante as aulas dos semestres letivos, e os registros foram coletados e organizados para posterior análise e avaliação. Além da análise das entrevistas, subsidiadas pelo conteúdo do site, também serão relatadas nesta pesquisa as análises gerais dos registros realizados pelos alunos sobre as atividades propostas pelo docente.

Nesta pesquisa, as atividades propostas como situação-problema são concebidas como elementos que podem possibilitar aos alunos a aprendizagem dos conteúdos da disciplina CDI. Essas atividades foram disponibilizadas no site Cálculo NasNuvens, que serviu como um repositório dos OA criados ou modificados para os fins desta pesquisa. A elaboração do site, como um repositório, não foi um objetivo explícito desta pesquisa, mas sua elaboração aconteceu de forma cuidadosa e criteriosa para atender as demandas desta pesquisa e da disciplina CDI. Em Silva e Becker (2017) há uma descrição do modo como dados foram coletados e analisados durante um curso de formação de docentes para que fosse possível a elaboração das situações-problema, foram utilizados relatos e falas de docentes. Em Silva e Becker (2016) foram relatadas as experiências com a utilização do site Cálculo NasNuvens como uma opção didática na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Esse site contém os OA utilizados nesta pesquisa.

O acesso às atividades no site Cálculo NasNuvens pôde ser feito tanto por dispositivos fixos quanto por dispositivos móveis, o que facilitou o acesso e a realização das ações sugeridas em sala de aula. A realização de atividades no site corresponde às atividades programadas conjuntamente com o docente para complementação das aulas presenciais. As entrevistas com os alunos foram realizadas objetivando a investigação das ações, procedimentos e processos construtivos de conhecimento realizados a partir da utilização de *applets* do Geogebra numa situação-problema.

4.4 DESCRIÇÃO DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA

Piaget, ao falar sobre conhecimento científico e sobre sua não linearidade, revela, nas conclusões do livro *A tomada de consciência*, (1977. p. 211) o que considera um acordo do pensamento com o real: “[...] a ação procede das leis de um organismo que é ao mesmo tempo um objeto físico entre os outros e a fonte do sujeito que age e, depois, pensa”. Condiciona, assim, a construção do conhecimento à ação do sujeito sobre o objeto, sobre o mundo e sobre seu próprio conhecimento. Esse pensamento fundamenta a construção de *applets* para trabalhar com alunos na Educação Básica e no Ensino Superior.

As atividades das situações-problema sobre as noções de limite abrangeram temas como áreas e sequências, além de limite nas noções sobre derivação e integração de funções. Serão exigidos alguns esquemas de comparação, aproximação e dedução que deverão depender da qualidade da inferência. Nos parágrafos seguintes, será feita a descrição de cada uma das situações-problema, ressaltando suas características funcionais e conhecimento matemático que cada uma abrange. Durante a pesquisa, foram desenvolvidas cinco atividades com OAs para fins de registro; no entanto, selecionamos apenas as quatro primeiras atividades, pois a atividade 5 aborda conceitos já tratados nas atividades 1 e 2, não sendo necessária sua análise para alcançar os objetivos da pesquisa.

4.4.1 Atividade 1 – A noção de limite em cálculo de áreas

A proposta desta atividade (A1) é permitir que o aluno relacione a forma entre figuras geométricas e possa, por aproximação e comparação, diferenciar suas áreas. Nessa atividade, o aluno poderá variar a área de um polígono pelo comprimento do lado ou obter várias áreas de polígonos distintos pela variação do número de lados.

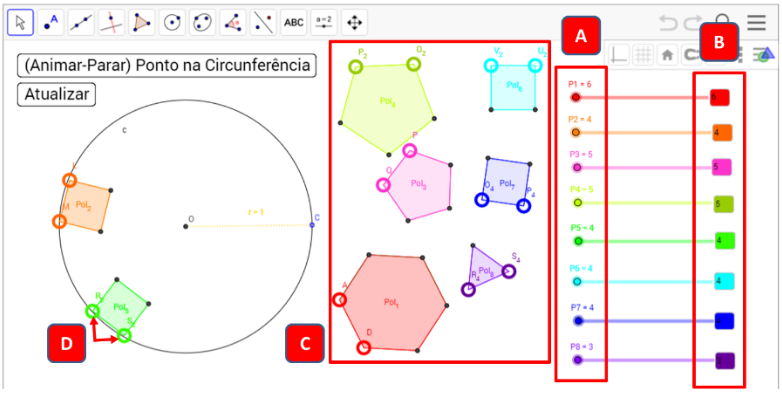

Figura 7: Interface da atividade 1 (A1)

A Figura 7 corresponde à interface do *applet* que foi utilizado para estudo das relações da forma, e as implicações entre limites e área de figuras geométricas regulares. Esse *applet* faz parte de uma situação-problema denominada de atividade 1, disponível no seguinte endereço: http://geogebra.nasnuvens.net.br/atividades/a01. O item **A** são os controles deslizantes, no item **B**, temos a entrada de valores que, ao serem manipulados, implicam na variação do número de lados dos polígonos regulares indicados no item **C** e nos polígonos no interior do círculo. O comprimento do lado está em função da aproximação entre dois vértices de cada um dos polígonos, destacado no exemplo do item **D**. Para o preenchimento da área do círculo por figuras geométricas regulares, o aluno poderá comparar as áreas por sobreposição, tendo como objetivo diminuir as diferenças entre as áreas do círculo e dos polígonos regulares. A sobreposição poderá ocorrer com apenas uma única figura, fazendo seus lados variarem de três até 1000 lados, limitados no *applet*. Caso ocorra a variação do número de lados, a implicação direta é ter uma sequência de polígonos distintos com áreas distintas. Caso ocorra a variação do comprimento do lado mantendo fixo o número de lados, a implicação será a variação da área. É interessante destacar que a área ocupada pelo polígono dependerá do comprimento dos lados, fundamental para caracterizar a área como uma função que depende do comprimento do lado da figura geométrica. O *applet* da situação-problema possui animação, mostrando que, em toda a extensão da circunferência, há pontos.

Investigando uma noção de Limite: nesta atividade, o aluno deverá se colocar a seguinte situação-problema: admitindo ser possível construir figura(s) geométrica(s) regular(es), no interior de uma circunferência de raio unitário ou fora dela, é possível estimar a área do interior dessa circunferência por meio de figura(s) geométrica(s) regular(es)? Justifique sua resposta. Diante dessa situação-problema, aluno e *applet* deverão interagir, o aluno conhece a situação-problema, modifica valores, o *applet* apresenta figuras, valores, o que permite novas construções, modificações de valores e apresentação de novas figuras, e segue um ciclo com o aluno interagindo com o *applet* e com o meio diferente do *applet*, e caberá ao aluno registrar livremente sua resposta em espaço do formulário *Google* contido na página. A análise da resposta subsidiará a análise docente objetivando identificar questões para aprofundamento. Este *applet* pode ser utilizado tanto no Ensino Básico quanto na Educação Superior. O *applet*, além de possibilitar que o aluno extraia características, para a conceituação de limite, possibilita, pela leitura de registros, a compreensão do docente sobre como o aluno argumenta ou mobiliza conhecimentos ou estruturas cognitivas para responder à situação-problema.

Conhecimento Matemático: Seja P_n um polígono regular com número de lados $n \geq 3$ e $l > 0$ o comprimento do lado de P_n. Seja $A(C)$ a área de um círculo C de raio r e $A(P_n)$ a área de P_n. Se $n \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$. Dado um n qualquer, se $l \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$. Se $n \to \infty$ e $l \to 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \to 0$, desde que o polígono P_n mantenha-se inscrito na circunferência C, caso contrário, o valor da área de P_n não poderia ser obtido na vizinhança de $A(C)$; ele poderia assumir valores muito pequenos ou muito grandes. Esse processo de inscrição deve ocorrer fixando um valor de n e variando l. Desse modo, toda vez que houver a implicação: "se $n \to \infty$ e $l \to 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \to 0$ ou $A(P_n) \to A(C)$", essa afirmação será no contexto referido anteriormente. O princípio da diferença conforme está estabelecido pode ser mais bem compreendido considerando que P_n está inscrito em C. Seja S_i a área resultante da diferença entre C e a área de P_n interna a C, e quando $S_i \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$. P_n pode estar circunscrito em C, e S_e será a soma resultante da diferença entre C e a área de P_n externa a C, caso $S_e \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$. No entanto, nada impede que os vértices sejam localizados na parte exterior da circunferência com os lados de P_n secantes em C; nesse caso, a aproximação das áreas ocorrerá por diferenças entre S_e e S_i, se $|S_e - S_i| \to 0$, então $A(P_n) \to A(C)$.

É necessário o entendimento da área de um polígono P_n definido como uma função cuja variação depende do comprimento do lado l. Eis procedimentos e conhecimentos (C) contidos na situação-problema do OA. O aluno poderá:

C1. Estimar a área do círculo pela diferença entre sua área e a área do polígono P_n em razão de comparações visuais. (Sobreposição de figuras);

C2. Realizar a estimativa com um polígono inscrito;

C3. Realizar a estimativa com um polígono circunscrito;
C4. Realizar a estimativa com um polígono, mas decomposto em triângulos;
C5. Realizar a estimativa com vários polígonos;
C6. Compreender que dado um l qualquer, se $n \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$;
C7. Compreender que dado um n qualquer, se $l \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$;
C8. Concluir que se $n \to \infty$ e $l \to 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \to 0$, se e somente se, P_n estiver inscrito na circunferência;
C9. Concluir que se $S_i \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$;
C10. Concluir que se $S_e \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$;
C11. Concluir que se $|S_e - S_i| \to 0$, então $A(P_n) \to A(C)$.

A partir desses conhecimentos, é possível estabelecer diversas relações R de conhecimentos (ver seção 5.1 INVESTIGANDO UMA NOÇÃO DE LIMITE – ATIVIDADE 1). Diversos conceitos geométricos estão associados a essas atividades, e relacionar o conceito de limite com a geometria é algo pertinente, pois, historicamente, todo o desenvolvimento desse conceito foi concebido dentro da geometria e, posteriormente, foi formalizado e suportado pela álgebra (FLEMMING; GONÇALVES, 2007; STEWART, 2013). Da interação entre alunos e *applet* podem surgir diversas abordagens para auxiliar a conceituação de limites de funções e integral definida.

4.4.2 Atividade 2 – Os limites na aproximação entre áreas

A atividade 2 (A2) corresponde a uma situação específica da atividade 1, essa situação trata-se do fato de termos um polígono inscrito na circunferência para a estimativa da área do círculo. É uma atividade com possibilidades de exploração do conceito de limite em várias situações.

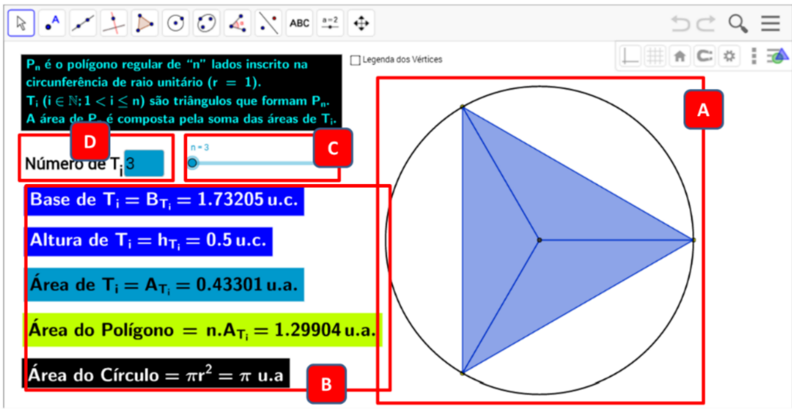

Figura 8: Interface da atividade 2 (A2)

Algumas dessas situações apresentadas nesta atividade demonstram, na análise de valores numéricos, a possibilidade de construção de novos conceitos e a ampliação de outros já existentes. A atividade A2 foi disponibilizada para acesso livre com todas as suas funcionalidades no endereço: http://geogebra.nasnuvens.net.br/atividades/a02/. Esta atividade foi originada a partir de um OA disponibilizado pelo professor Thales Vieira em sua página: www.im.ufal.br/professor/thales/tics/. O *applet* desse OA foi modificado, sendo incorporado a ele novos recursos em conformidade às exigências desta pesquisa. A autorização consta no Anexo III.

Investigando Limites: A atividade apresenta uma circunferência C de centro O e raio r. Inscrito nessa circunferência temos um polígono regular P_n com número de lados $n \geq 3$ e comprimento do lado $l > 0$, conforme está descrito na Figura 8 no item **A**. O círculo tem área $A(C) = \pi r^2$. P_n é composto por triângulos isósceles T_i idênticos. Os lados isósceles de T_i tem medida r. O número de lados pode ser alterado por meio dos controles deslizantes laterais e controle de entrada numérica observada nos itens **C** e **D** da Figura 8. A implicação direta disso é a alteração do número de triângulos. O Quadro **B** destaca os valores numéricos que variam em função de n, e, nele, temos a base B_{T_i} de T_i, que é também $l > 0$ de P_n. Temos a altura h_{T_i} de T_i, a área A_{T_i} de T_i, a área do polígono $A(P_n) = n \cdot A_{T_i}$ e a área do círculo $A(C) = \pi r^2 = \pi$, pois $r = 1$. O círculo é delimitado pela circunferência C e S_i é a área resultante da diferença entre a área do círculo e a área de P_n interno a C.

Conhecimento Matemático: Variando n, o valor de $A(P_n)$ varia diretamente, se n aumenta, $A(P_n)$ aumenta; da mesma forma que se $A(P_n)$ diminui, é porque n foi diminuído. Se $n \to \infty$, a implicação direta é que $A(P_n) \to A(C)$. Outras implicações são que se $n \to \infty$, então $l \to 0$, ou seja, a base $B_{T_i} \to 0$, a altura $h_{T_i} \to r = 1$, $A_{T_i} \to 0$ e $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$, e, nesse caso, podemos escrever: $\lim_{n\to\infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$. Conhecimentos podem ser construídos a partir do *applet*. Os alunos poderão:

C1. Reconhecer que se $n \to \infty$, a implicação direta é que $A(P_n) \to A(C)$ por diferença de áreas em que $S_i \to 0$;

C2. Compreender que se $n \to \infty$, então $l \to 0$ ($B_{T_i} \to 0$);

C3. Compreender que se $n \to \infty$, então a altura $h_{T_i} \to r = 1$;

C4. Compreender que se $n \to \infty$, $A_{T_i} \to 0$;

C5. Concluir que se $n \to \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$;

C6. Concluir que $\lim_{n\to\infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$.

É interessante observar que o conceito de limite está presente na descrição desse processo em diversas situações. Algumas relações (R) foram estabelecidas conforme descrição feita na seção 5.2 INVESTIGANDO NOÇÕES DE LIMITES EM UM PROBLEMA DE ÁREA – ATIVIDADE 2).

4.4.3 Atividade 3 – Limites e Derivadas

A atividade 3 (A3) versa sobre o estudo de variação de grandezas cujas representações são dadas por intermédio de funções. A atividade A3 foi disponibilizada com suas funcionalidades no endereço: http://geogebra.nasnuvens.net.br/atividades/a03/. Essa situação-problema é comumente tratada nos livros de Cálculo Diferencial nas noções iniciais do estudo de funções derivadas.

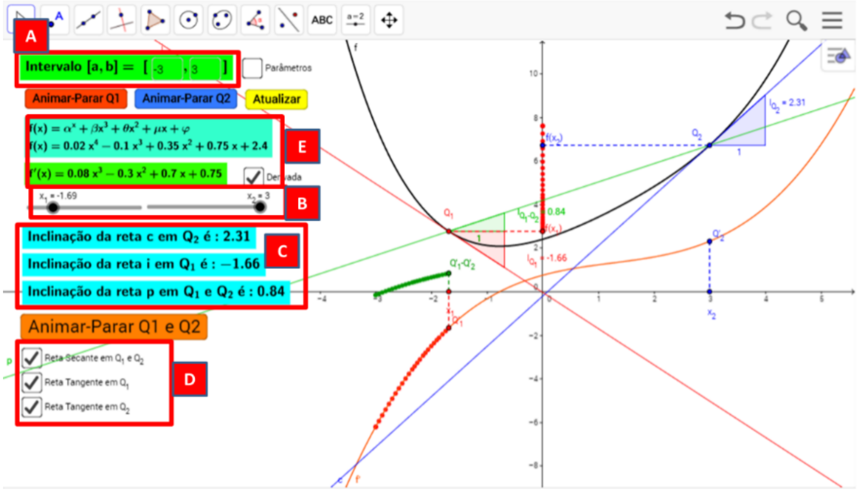

Figura 9: Interface da atividade 3 (A3)

A Figura 9 apresenta a interface do *applet* contido no objeto de aprendizagem, aqui tratado como atividade A3. O item **A** da interface do *applet* corresponde ao campo de entrada do intervalo $[a, b]$, sendo possível modificar os extremos. Os valores x_1 e x_2 , no item **B** da FIGURA, pertencem ao intervalo $[a, b]$. No item **C**, é possível visualizar numericamente o valor da inclinação de cada uma das retas. O item **D** permite selecionar no gráfico do *applet* as retas a serem analisadas. As funções $f(x)$ e $f'(x)$ podem ser observadas conforme está no item **E** da Figura 9; para alterá-las, é necessário marcar a opção "Parâmetros". As animações têm sua dinâmica de início e interrupção nos botões indicados com os textos "Animar-Parar Q1", "Animar-Parar Q2" e "Animar-Parar Q1 e Q2".

Investigando Limites: Essa situação-problema é o fato geométrico amplamente utilizado nos livros de referência da disciplina CDI. A situação-problema contida nesse objeto de aprendizagem trata do estudo de uma função derivada $f'(x)$ a partir da aproximação da inclinação de uma reta secante "*p*" para uma "*i*" ou "*c*", tangentes nos pontos da Q_1 e Q_2 respectivamente, pontos esses da função $f(x)$. No *applet*, é possível observar as inclinações I_{Q_1}e I_{Q_2} das retas tangentes "*i*" e "*c*", respectivamente nos pontos Q_1 e Q_2, e a inclinação $I_{Q_1-Q_2}$ da reta "*p*" secante à função $f(x)$ nos pontos Q_1 e Q_2. Há uma representação gráfica que relaciona essas inclinações à função derivada e o ajuste realizado com as retas até a obtenção da inclinação em um ponto da função $f(x)$ e outro na função $f'(x)$.

A situação-problema consiste em fazer o ponto Q_1 se aproximar de Q_2 para obtenção de uma reta tangente para um ponto $|Q_1 - Q_2| \to 0$. É proposto que esse processo de aproximação seja analisado sob o enfoque do limite de funções, analisando a função ponto a ponto para que possa estabelecer a relação de uma função $f(x)$ com uma função $f'(x)$, gerada quando são projetados pontos na métrica dada pela inclinação como valor da $f'(x)$ no ponto de Ox que também define o ponto de $f(x)$ para a inclinação.

Conhecimento Matemático: O conceito de derivada é associado em muitos livros de Cálculo Diferencial e Integral com um fato geométrico definido na geometria analítica pela aproximação de dois pontos em que temos uma reta secante aos pontos e, no limite da aproximação desses dois pontos, uma reta tangente. A inclinação dessa reta tangente representa a variação entre x e $f(x)$ no ponto que temos a reta tangente. Considere a função real $f(x)$, considere ainda dois pontos $Q_1 = (x_1, f(x_1))$ e $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ dessa função. Fazer $Q_1 \to Q_2$ ou $Q_2 \to Q_1$ implica em uma série de conhecimentos, listados logo em seguida. Os alunos deverão:

C1. Reconhecer que $Q_1 = (x_1, f(x_1))$ e $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ estão em função de x_1 e x_1 respectivamente;

C2. Compreender que se $Q_1 \to Q_2$ ou $Q_2 \to Q_1$ é porque $x_1 \to x_2$ ou $x_2 \to x_1$ respectivamente. Ou seja, se $x_1 \to x_2$, então $Q_1 \to Q_2$ e se $x_2 \to x_1$, então $Q_2 \to Q_1$;

C3. Diferenciar uma reta secante de uma tangente em razão de suas características;

C4. Reconhecer que a inclinação da reta em um ponto da função é a tangente do ângulo que essa reta faz com o eixo Ox;

C5. Reconhecer que ao realizar aproximações do tipo $Q_1 \to Q_2$ ou $Q_2 \to Q_1$, a reta continua secante;

C6. Explicar, por meio da teoria de limites, como é obtida a reta tangente e sua inclinação a partir da reta secante. se $x_1 \to x_2$, então $Q_1 \to Q_2$ e se $x_2 \to x_1$, então $Q_2 \to Q_1$; nesses casos, $I_{Q_1 - Q_2} \to I_{Q_2}$ e $I_{Q_1 - Q_2} \to I_{Q_1,}$ respectivamente;

C7. Reconhecer que a inclinação da reta tem a função de uma métrica para $f'(x)$. Assim que tivermos a medida unitária do cateto adjacente ao ângulo, a inclinação corresponderá à medida do cateto oposto ao ângulo. Essa métrica originará ponto a ponto a partir do eixo Ox o conjunto de valores, pontos da função $f'(x)$;

C8. Reconhecer a $f'(x)$ como uma outra função definida pela variação das grandezas de $f(x)$ da seguinte maneira: se $Q_2 \to Q_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, então, a derivada $f'(x) = \lim\limits_{Q_2 \to Q_1} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$.

No conhecimento $(C8)$, para que a derivada exista, o limite deverá existir. Não só a definição de derivadas como diversos elementos conceituais importantes são descritos por noções de limite.

4.4.4 Atividade 4 – Limites e Integral Definida

A atividade 4 (A4) foi disponibilizada com todas as suas funcionalidades para acesso livre no seguinte endereço: http://geogebra.nasnuvens.net.br/atividades/a04/. A atividade $A4$ aborda a situação-problema comumente utilizada nos estudos introdutórios sobre a integral definida.

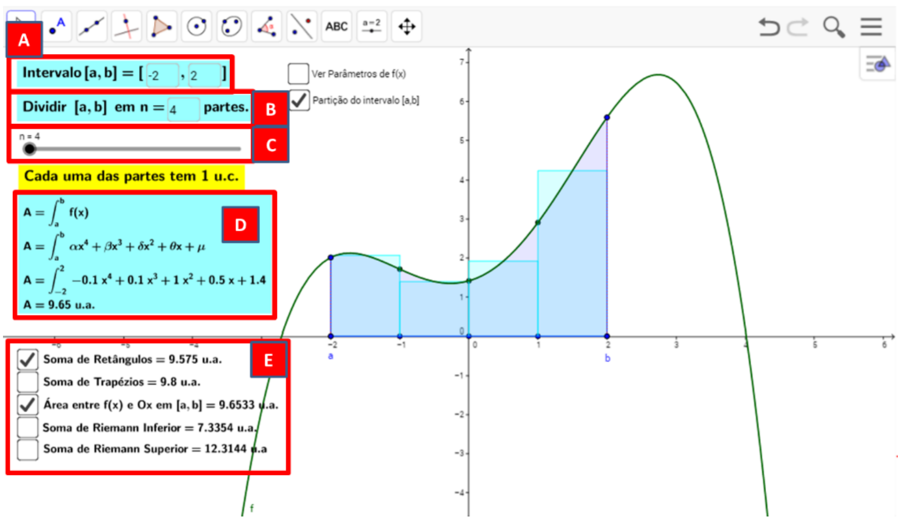

Figura 10: Interface da atividade 4 (A4)

A Figura 10 apresenta a interface do *applet* contido no objeto de aprendizagem, aqui tratado como atividade A4. O item **A** da interface do *applet* corresponde ao campo de entrada do intervalo $[a, b]$, sendo possível modificar os extremos. No item **B**, é possível determinar o número de partições do intervalo pelo campo de entrada; no item **C**, é possível realizar o mesmo procedimento pelo controle deslizante. No item **D**, é possível observar os parâmetros da função. No item **E**, é possível marcar a representação das somas das áreas.

Investigando Limites: Essa situação-problema é o fato geométrico amplamente utilizado nos livros de referência da disciplina CDI. A proposta da atividade é relacionar o cálculo da área, delimitada entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$, com o conceito de limite.

Conhecimento Matemático: Uma partição P de um intervalo $[a,b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Uma partição P de um intervalo $[a,b]$ divide $[a,b]$ em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\dots,n$. A amplitude ou comprimento de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é determinado por $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$. Fazendo o número de intervalos tender para infinito, a implicação direta é o cálculo da área de uma região delimitada pela função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$. Esse cálculo de área é definido como uma soma (S) das áreas de retângulos cujas bases são determinadas pelo comprimento Δ_{x_i} de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ na partição P; as alturas são valores de $f(c_i)$, em que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Fazer $n \to \infty$ implica em uma série de conhecimentos (C), e, nesse processo, o aluno poderá:

C1. Reconhecer que é possível dividir o intervalo $[a,b]$ em n intervalos;
C2. Compreender que se $n \to \infty$, então $\Delta_{x_i} \to 0$;
C3. Comparar e somar áreas por sobreposição;
C4. Diferenciar os métodos de integração;
C5. Comparar e somar áreas por sobreposição;
C6. Compreender que o cálculo da área de uma região delimitada pela função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$ é realizado pela soma de retângulos cujas bases são determinadas pelo comprimento Δ_{x_i} de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ na partição P e as alturas são valores de $f(c_i)$, em que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$;
C7. Compreender que, se $n \to \infty$, então $\Delta_{x_i} \to 0$ e a consequência direta disso é que a distância entre c_i e os extremos x_{i-1} e x_i tende para zero. O que implica na compreensão da diferença entre os resultados dos métodos e a integração com um número de partições muito pequeno;

C8. Reconhecer que a melhor aproximação ou cálculo de área da região delimitada é quando a área de cada retângulo (A_R) tende para zero quando $n \to \infty$.

C9. Reconhecer que as partições não precisam ter a mesma amplitude para a realização do cálculo da soma das áreas dos retângulos de modo que, se tivermos a maior amplitude $max\Delta_{x_i} \to 0$, teremos:

$$A = \lim_{máx\Delta_{x_i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Da interação entre sujeito e esse objeto, é possível determinar diversas abordagens para auxiliar a conceituação de limite de funções e integral definida. Desses conhecimentos (C), é possível estabelecer diversas relações (R).

5 ANÁLISE DOS DADOS

Na sequência da atividade A1, A2, ocorreram as entrevistas cuja inspiração é o MC. Segundo Delval (2002 p. 67), "[...] a essência do método não está na conversa, mas sim no tipo de atividade do experimentador e de interação com o sujeito". O MC possibilita a explicação sobre uma situação, e, na grande maioria, essa explicação ocorre com um objeto pertencente à proposta de investigação. Em seguida, serão analisadas as atividades A3 e A4. Na sequência do texto, será feita a análise dos dados coletados tanto nos registros escritos de respostas quanto nas entrevistas.

5.1 INVESTIGANDO UMA NOÇÃO DE LIMITE – ATIVIDADE 1

Os registros escritos da atividade 1 foram coletados no final da unidade 1 (U1). As entrevistas relativas a essa atividade ocorreram também no final dessa unidade. Em Silva e Becker (2017) foi realizado um estudo sobre as noções de limite. Esse estudo foi realizado com um grupo de 30 alunos na mesma IES que sediou esta pesquisa. Foi utilizada a mesma situação-problema e OA da atividade A1. Nessa pesquisa foi possível identificar 6 grupos de desenvolvimento que apresentaram maneiras próprias de relacionar os conhecimentos contidos na situação-problema. Na sequência do texto, serão descritos os resultados da atividade A1, apresentados por aluno, devidamente identificados com código.

5.1.1 Aluno M1

Registros Escritos de Respostas – O aluno M1 acredita ser possível estimar a área do círculo pela comparação entre áreas, utiliza como estratégia de comparação a sobreposição de áreas com um polígono inscrito na circunferência, o que fica evidente quando diz: "*Todo polígono regular é inscritível*". Ao dizer: "*Ao aumentarmos o número de lados do polígono, o raio permanecerá inalterado, mas o apótema estará aumentando. Quanto maior foi o número de lados do polígono, mais o apótema tenderá para o raio*", M1 apresenta noções de limite tanto no processo de aproximação das áreas do círculo e de um polígono de n lados, quanto na aproximação do valor do apótema com o comprimento do raio da circunferência. O aluno demonstra compreender que a área do polígono é uma soma da área de muitos triângulos quando diz: "*A área do polígono é a soma da área de n triângulos isósceles, cujos lados são iguais ao raio da circunferência e cuja altura é o apótema do polígono*". A noção de limite como área fica nítida quando diz: "*Quanto maior n, mais próxima a área do polígono será da área do círculo*", no entanto, acredita que a área está em função de n, o que não configura uma verdade, pois a função área está definida nos valores do comprimento do lado de um polígono. Não está explícito nos registros, como ele realiza a aproximação entre áreas, que estão em função do comprimento dos lados de um P_n.

Entrevista – M1 confirma a possibilidade de estimar a área do círculo com um polígono regular inscrito. No entanto, ao ser questionado sobre outra possibilidade, admite que é possível realizar a estimativa da área do círculo a partir de um polígono com n lados, mesmo que tenha a área maior que a do círculo, para realizar o ajuste à área do círculo, bastaria diminuir o comprimento do lado. Utiliza como justificava para esses dois métodos de comparação entre áreas a obtenção da área máxima, o que não fica claro de imediato, o que significa ter área máxima. O esclarecimento ocorre quando ele mostra essa área por meio de um polígono com área maior e outro com área menor que a do círculo, ficando evidente se tratar da melhor aproximação possível, evidenciada quando aumentou o valor de n e diminuiu o comprimento do lado. Quando diz "*Diminuindo os lados*" ao ser perguntado sobre o mecanismo de ajuste para aproximar a área do polígono com a do círculo, o aluno demonstra conhecer a operação, necessária ao ajuste; ele o faz por processos repetidos de abstração pseudoempírica e, posteriormente, por abstração refletida. Quando questionado sobre como procederia na situação-problema, M1 diz: "*Aproximando as áreas*", "*Diminuiria [a distância entre] os vértices*". Quanto ao número de polígonos, foi dito que: "*Alteraria eles para [...] cada vez maior. Porque vai ficando arredondado. Ainda agora em 6 não estava tão redondo, em 8 ficou mais, em 20 estava praticamente redondo"*, realizando o ajuste entre as áreas pela variação do comprimento do lado sem destacar essa ação. Ao adotar essa prática, M1 demonstra conhecer o mecanismo de aproximação entre as áreas, mas não reconhece a natureza da área como uma função que vai variando de acordo com o comprimento do lado.

Resultado: A conclusão pela possibilidade de estimar a área do círculo a partir de polígonos regulares é resultante de processos de abstração reflexionante, decorrentes da interação com a situação-problema anterior. Apresenta a noção de limite ao aproximar os valores da área do polígono e do círculo. Realiza diversos processos que se originam a partir de abstrações pseudoempíricas alterando o valor do número de lados em cada polígono. Ao coordenar as ações acerca da alteração do número de lados e do comprimento do lado desse polígono, conclui que o ajuste para a aproximação entre as áreas ocorre aumentando o número de lados e, em seguida, diminuindo o comprimento dos lados, mas esse processo não se apresenta bem fundamentado, pois o conceito de função não foi construído nem constatado, apresentando noções de variações quando altera o parâmetro n no *applet*.

5.1.2 Aluno M2

Registros Escritos de Respostas – Este aluno acredita ser possível estimar a área do círculo nas seguintes condições: *"[...]É possível estimar a área de um círculo do raio unitário utilizando os polígonos porque todo polígono é inscritível, ou seja, pode ser escrito em uma circunferência [...] nos polígonos, temos a distância entre o centro da circunferência e o vértice do polígono igual ao raio da circunferência e a distância entre o centro da circunferência e o meio lado igual ao apótema do polígono. Assim, será possível estimar a área de um círculo calculando a área de um polígono*". Para o aluno, é possível estimar a área, pois conhece os elementos necessários para o cálculo da área, no entanto, não explicita como e com que tipo de polígono realizará esse cálculo. Acredita que esse processo de aproximação, entre a área do círculo e a área de um polígono, ocorre quando é aumentada a área do polígono, aproximando e comparando o comprimento entre o centro do polígono e seus vértices, com o raio da circunferência, diz o aluno: "*Pode-se concluir que, quanto mais se aumenta o polígono, mais o polígono irá se aproximar do raio do círculo, pode ser que preencha todo o círculo*".

Sobre o processo de aproximação, o aluno descreve assim: "*[...] uma primeira aproximação para a área do círculo é dada pela área do quadrado inscrito no círculo. Com o acréscimo de quatro triângulos isósceles convenientes, obtemos o octógono regular inscrito no círculo, cuja área fornece uma aproximação melhor à área do círculo. No decorrer dos processos, vai se ter a impressão de termos exaurido o círculo*". Nesse caso, exaurir o círculo significa preencher grande parte da área do círculo com a área do polígono. Não fica claro, na resposta dada pelo aluno, se, no processo de composição descrito por ele, trata-se de um polígono regular decomposto por triângulos isósceles, no entanto, no início de sua resposta, é estabelecida uma relação de aproximação do lado isósceles de cada triângulo que compõe o polígono regular com o raio da circunferência, o que demonstra uma noção de limite na aproximação do comprimento entre esses elementos, mas não demonstra clareza quanto ao método empregado na aproximação e comparação.

Entrevista – O aluno acredita ser possível estimar a área de um círculo a partir de polígonos regulares e detalha o modo. Falando sobre polígono regular inscritível, ao tentar explicar como o processo de estimação ocorre, afirma o seguinte: "*[...] à medida que vai se expandindo, vai aumentando os lados*", e, nessa fala, confirma a dificuldade em conceituação da área como uma função, o que já havia sido constatado nos registros de respostas. Inicia o processo de estimação com um polígono de três lados não inscrito, e, claramente, faz uma comparação entre as áreas do triângulo e do círculo, dizendo que estão próximas às áreas, justificando, em seguida, que parte da área do triângulo também era área do círculo, "*Ele pegou uma parte do raio [referindo-se à área]*". O aluno havia informado tanto nos registros escritos quanto na entrevista, que sua estimativa dessa área seria com um polígono circunscrito. Quando questionado como seria isso, ele utilizou um polígono com 6 (seis) lados; em seguida, aumentou para 7 (sete) lados e, em seguida, para 13 (treze) lados, e, em ambos os casos, realizou ajustes no comprimento do lado de P_n, no entanto, a posição dos polígonos não é inscrita na circunferência, pois sempre os vértices estão do lado externo da circunferência e não sobre ela, mas consegue concluir que um polígono com número maior de lados ajustados pode ser uma aproximação possível, mas o ajuste do lado tem por finalidade aproximar a forma entre as figuras, não sendo claro o método aplicado, "*Nunca vai ficar certinho, se for para ficar perfeito, tinha que ser um círculo*". Importa dizer que, quando pega o primeiro polígono de 6 (seis) lados e ajusta-o com forma e área visualmente próximas da área e do círculo, ele reluta em utilizar um de 7 (sete) lados, alegando que ficaria maior, mas, após manipular o *applet* e observar, consegue coordenar a ação de ajuste do comprimento com o número de lados, e, assim, ajusta a área com 7 (sete) lados e, em seguida, com 13 (treze) lados, mas sem demonstrar conhecer o que estava fazendo, a explicação ocorre por intermédio da variação do comprimento do lado, mas sem sequer relacionar com o número de lados e a área de P_n.

Resultado: O aluno realiza a comparação entre as áreas com o propósito de estimá-las. Produz as aproximações após alterações de n e l. A estimativa é exclusivamente visual, pois não explicita se procede com polígono inscrito ou circunscrito, no processo de aproximação entre as áreas. Não expressa claramente o conceito de área como uma função em relação a l. Apresenta a noção de limite na aproximação do comprimento entre os lados isósceles do triângulo e o raio da circunferência.

5.1.3 Aluno M3

Registros Escritos de Respostas – O aluno M3 pensa a estimação como um processo de exaustão que polígonos ocupam a área do círculo, diz o aluno: "*[...] quanto mais preenchido o círculo utilizando um polígono, mais você pode chegar a um valor aproximado da área dele, tendo, assim, a ideia de limite*". Essa ideia de limite associada ao preenchimento progressivo da área do círculo é descrita assim: "*[...] quanto mais preenchido, mais o polígono se aproxima da área total do círculo, mas não do valor exato*". A conceituação de área como função não ocorreu; ficou evidente a utilização de elementos primários da geometria para explicitar o processo de exaustão ou recobrimento da área do círculo, "*[...] acho que a relação entre eles, é quando o poligonal é projetado no círculo para se estimar o valor do círculo*". No registro, não foi possível identificar o estabelecimento de uma relação direta do processo de recobrimento da área do círculo pelo polígono com o comprimento do raio, e admite o recobrimento pelo acréscimo do número de lados de P_n.

Entrevista – Confirma que a estimação da área do círculo poderia ser feita com o auxílio de polígonos, e, segundo o aluno: "*Limitando o polígono dentro da circunferência,* justificando essa ação dizendo que: "*Dentro, eu teria uma precisão muito maior [...] Seria mais fácil aproximar na área da circunferência toda.*". Utiliza o polígono circunscrito na estimação. Objetiva sempre a circunscrição para qualquer n no polígono, mas, quando questionado do porquê a melhor aproximação com da área do círculo era com um polígono de 6 (seis) lados, e não um que um de 4 (quatro) lados, ele afirma ser em razão do número de lados, e, sobre isso, ele diz: "*Digamos aqui [com 6 (seis) lados] tem mais pontos que chegam na circunferência*", e, novamente, fica claro o desprendimento de suas ações do conceito de função no processo por ele estabelecido para a estimação da área. O processo de comparação entre as áreas do polígono e do círculo é o mesmo que faz quando se sobrepõem as figuras de um polígono de 6 (seis) e 4 (quatro) lados, ambos inscritos. Observa a área de interseção entre os polígonos e avalia o restante, na estimativa do aluno, aquele que sobrar mais partes é o que tem a área maior. Na análise da comparação entre as áreas do polígono e do círculo, o aluno apresenta uma noção de limite, pois acredita que o limite da área do polígono será a área do círculo se a diferença entre suas áreas tender para zero, descrito assim pelo aluno: "*Você tem uma área desses polígonos e vai calcular aproximadamente e não exatamente, a área vizinha desse polígono. E ficam faltando essas áreas aqui em branco. Assim, eu teria uma certa aproximação do total dessa circunferência [...] A área branca é a área do círculo onde o polígono não conseguiu chegar. A área branca é o que diferiu*". Após algumas tentativas e modificações realizadas no polígono, o aluno concluiu que, mantido o polígono inscrito e elevando o número de *n*, a área do polígono tende para equivalência com a área do círculo, diz o aluno: "*Esse polígono não preencheria o branco. Não teria a área certa da circunferência [círculo] e sim uma ideia aproximada [...] Seria aumentar a área do polígono, e, quanto mais aumenta a área do polígono, mais aproximado fica o valor da circunferência*". Acredita que o modo mais eficaz para a estimação da área do círculo é a partir do polígono inscrito e não o circunscrito, e segundo o aluno não teria como controlar a aproximação, que, supostamente, seria a diferença entre as áreas dessas duas figuras geométricas, sempre fazendo relação aos vértices do polígono que estão na interseção com a circunferência.

Resultado: Não apresentou bem fundamentado o conceito de função. Realiza a estimação da área do círculo pela diferenciação entre sua área e a área do polígono, sendo essa a noção de limite apresentada. A alteração do parâmetro n propiciou processos construtivos por abstração reflexionante em decorrência da apropriação da coordenação de ações sobre n e a deformação da área do polígono inscrito, mas sem a apropriação do conceito de função e limite.

5.1.4 Aluno M4

Registros Escritos de Respostas – O aluno M4 apresenta uma noção de limite, expressa geometricamente por ele assim: "*Tentaríamos fazer uma aproximação de pontos, fazendo a apótema do polígono tender para o raio adotado pela circunferência. Esses pontos são os do polígono que imaginemos, tangenciam os pontos da circunferência. Levando em consideração que a questão trata de polígonos regulares, poderíamos escolher, por exemplo, um hexágono, aumentando o seu tamanho ao tamanho da circunferência, fazendo com que cada vértice tocasse na circunferência, sendo a própria circunferência seu limite*". Esse procedimento, descrito pelo aluno, apresenta várias noções de limite, e todas relacionadas à situação-problema colocada, relacionando o apótema do polígono ao raio da circunferência, o que implica, necessariamente, para comparação, que o polígono está inscrito. Outra noção de limite é posta pelo aluno quando apresenta a ideia de que o limite da área do polígono circunscrito é a área do círculo delimitada pela mesma circunferência. Quando diz que fixa um polígono com 6 (seis) lados e aumenta a área, sugere uma noção de função, já que o aumento será em decorrência do ajuste do comprimento do lado l. Nos registros, o aluno faz uma descrição bem detalhada explicitando o modo como terá a circunscrição e o modo como a área do polígono aumenta propiciando a estimação. No entanto, na descrição, não ficou explícita a coordenação entre $n \to \infty$ e l com P_n inscrito.

Entrevista – Confirma que a estimação da área do círculo pode ser feita pelo ajuste do comprimento do lado. Realiza a estimação com um polígono inscrito na circunferência. Incialmente promove alterações no comprimento do lado, afastando e aproximando os vértices do polígono escolhido. Acredita que os polígonos regulares fazem boa estimativa da área descrita na situação-problema. Após alterar o valor de n algumas vezes, conclui que, à medida que n aumenta o polígono $P_{n,}$ torna-se uma boa estimativa desde que esteja inscrito e o comprimento de l diminui. Admite a composição do polígono P_n por triângulos isósceles cujos lados isósceles correspondem à medida do raio. No processo de aproximação entre as áreas, o aluno demonstra uma noção de limite quando faz o apótema tender para o raio da circunferência, afirmando: "*[...] Todos eles [polígonos P_n]são formados por triângulos e cada um desses triângulos tem base e da base até o centro da circunferência [polígono] um segmento, e esse segmento é o apótema. Se o apótema for 1, então caberia [ocorreria a aproximação entre as áreas]"*, responde o aluno ao explicar porque a aproximação fica melhor à medida que aumenta o valor de n até 30. Solicitado a tentar ajustar um polígono com 20 (vinte) lados, o aluno encontrou dificuldade, disse ele: "*Era só com aquele número de lados"*, referindo-se ao polígono de 6 lados. É perceptível, depois de tantas tentativas, que o aluno sabia do mecanismo de ajuste, tanto que fez por vezes, no entanto, não conseguiu realizar a operação quando foi provocado.

Resultado: O aluno apresenta a noção de função, mas não demonstra consciência acerca da coordenação de ações desenvolvidas para esse conceito em relação à área. Em algumas ocasiões, se vale da relação entre n e l com o polígono regular inscrito para realizar ajustes e permitir a comparação com a área do círculo. Apresenta uma noção de limite quando faz o apótema tender para o raio da circunferência. Outra noção de limite apresentada foi aquando analisou a aproximação da área do polígono que se aproximava do valor da área do círculo. Uma noção de infinito foi construída quando o aluno observou inúmeros vértices do polígono regular sobre a circunferência.

5.1.5 Aluno M5

Registros Escritos de Respostas – O aluno M5 acredita ser possível a estimação da área do círculo a partir de um polígono inscrito. Para aproximar a área, o aluno sugere que dado um polígono de n lados, é possível obter outro inscrito com $2n$ lados, obtidos a partir do ponto médio de cada um dos n lados. Segundo ele, há um segmento com origem no centro do polígono, que coincide com o centro da circunferência, que projeta um ponto nessa circunferência pelo ponto médio de l. Diz o aluno: "*Sim pois a mediatriz de cada lado encontra com a circunferência e estes pontos são os vértices adicionais para o polígono seguinte, ampliando o triângulo para um hexágono. O processo é repetido sucessivamente e o apótema do novo polígono formado tenderá ao valor do raio*", o que nos apresenta uma noção de limite na aproximação de lados de triângulos isósceles com o comprimento do raio, fato esse que ocorre quando o polígono é regular e inscrito. Outra noção apresentada nos registros é a noção de limites no infinito, que admite haver uma sequência geométrica de polígonos de razão $q = 2$ para cada divisão do lado ao meio, obtendo, assim, um polígono subsequente com o dobro de lados que o anterior utilizado na estimação, e esse processo ocorre por abstração refletida, uma vez tal processo não é possível operacionalizar no *applet*. O aluno M5 demonstra organização de conhecimentos e procedimentos, conforme pode ser observado no registro feito por ele: "*Círculo é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é menor ou igual a uma distância, sendo assim, área do polígono é a soma da área de n triângulos isósceles, cujos lados são iguais ao raio da circunferência e cuja altura é o apótema do polígono",* no entanto, fica evidente a ausência do conceito de função quando diz: "*Quanto maior n, mais próxima a área do polígono será da área do círculo*", o que não configura verdade, pois só é válido na questão porque, ao assumir que o polígono está inscrito, se $n \to \infty$, necessariamente $l \to 0$. Essa mesma afirmação compromete a conceituação, no entanto, é uma noção de limite que envolve uma sequência de áreas.

Entrevista – Conforme afirmação do registro de resposta, o aluno M5 acredita ser possível estimar a área de um círculo a partir de um polígono regular, mas, inicialmente, não descreve esse processo. Quando foi solicitado a demonstrar que ações havia realizado com o *applet*, o aluno mostra o conjunto de polígono e diz que os alterou. Observou que, quando altera o valor de n de um polígono, sua área deforma, diz ele: "*Quando eu altero, ela cresce [...]A área vai aumentando e vai se tornando uma circunferência*". Quando foi questionado, não soube informar como iria fazer para comparar as áreas. No entanto, coloca o polígono pol1 com 19 (dezenove) lados preenchendo o interior da circunferência, quase circunscrito. Quando perguntado se era possível aumentar o polígono para 20 (vinte) lados, ele responde: "*Não, fica maior que a circunferência*". Contradigo o aluno e afirmo que cabe, e logo o aluno aumenta n, e, após algumas tentativas de modificação da figura, descobre que pode diminuir a área alterando o comprimento do lado, diz ele: "*Diminui aqui. Se eu diminuir totalmente ele, vai aproximar de zero*". Perguntado se isso seria um problema, o aluno responde: "*Mas aí ele [polígono] não vai existir. Se chegar a zero [área], ele [polígono] não existe*". Mesmo com essa afirmação, o aluno continua a aumentar o número de lados e diminuir o comprimento do lado, ajustando o polígono na circunferência, mas, desta vez, com ele inscrito. Já demonstra se apropriar dos mecanismos de ajuste e comparação quando diz: "*Aumentei os lados [a quantidade] e diminui [...] Centímetros, lados [...]Aumentaria tantas vezes até chegar no zero [referindo-se ao comprimento de l]*", no entanto, não relaciona de forma espontânea esse processo à comparação necessária para à estimativa da área do círculo.

Resultado: Os registros escritos de respostas e a entrevista demonstraram algumas divergências nos procedimentos e resultados na estimação. Enquanto que, no registro escrito, o aluno estima a área por um polígono inscrito com uma sequência geométrica de polígonos fazendo $n \to \infty$ e $l \to 0$, na entrevista, a estimação com esse mesmo conjunto de ações ocorreu com um polígono circunscrito sem tender para a área do círculo, e somente após diversas tentativas de modificação ocorre uma coordenação de ações que resulta na relação inversa entre n e l, fazendo a área do polígono tender para a área do círculo. Apresenta uma noção de limite na aproximação de lados de triângulos isósceles com o comprimento do raio. Outra noção é a de limites no infinito, na sequência geométrica de polígonos de razão $q = 2$. O conceito de função não foi verificado nos registros. Foi apresentada uma noção de limite no infinito que envolve a sequência de áreas resultantes da decomposição geométrica da área do polígono inscrito.

5.1.6 Aluno M6

Registros Escritos de Respostas – O aluno M6 acredita ser possível o processo de estimação da área do círculo por meio de um polígono inscrito na circunferência. Apresenta uma noção de limite quando sugere que, se a área do polígono inscrito tende para a área do círculo, então o comprimento do apótema tende para o comprimento do raio, diz o aluno: "*Ao aumentarmos o número de lados do polígono, o raio permanecerá inalterado, mas o apótema estará aumentando. Quanto maior for o número de lados do polígono, mais o apótema tenderá para o raio*", porém, nessa descrição, não há uma caracterização de função, pois há uma inversão do que seria o correspondente ao domínio e à imagem, pois, segundo ele, é do aumento da área, em razão do acréscimo n, que o comprimento de l tende para zero. O aluno descreve a área do polígono como uma composição de triângulos idênticos: "*A área do polígono é a soma da área de n triângulos isósceles, cujos lados são iguais da circunferência e cuja altura e o apótema do polígono*", nessa última parte, quando se refere a lados, trata-se do fato de que o polígono está inscrito na circunferência e seus vértices são comuns a pontos da circunferência. Uma noção de limite apresentada está descrita assim: "*Quanto maior n, mais próxima a área do polígono será da área do círculo*", e, novamente, percebe-se a ausência do conceito de função nessa descrição.

Entrevista – Diferentemente do registro escrito, o aluno M6 afirma não acreditar ser possível a estimação da área do círculo por meio de polígonos regulares. No entanto, ao mostrar a circunferência, indica apenas não ser possível o preenchimento por completo da circunferência por polígonos regulares, o que já demonstra uma ideia inicial do processo de comparação e estimação, o que também não deixa de ser uma noção de limite que envolve infinito. Questionado sobre a estimação e o método, o aluno já descreve uma resposta afirmativa à possibilidade de estimação da área do círculo, afirmando não ter mudado de opinião e esclarece: "*[...] é porque a área nunca vai estar totalmente completa*". Quando foi perguntado sobre o que levava a acreditar na aproximação, ele observa os polígonos e modifica o valor de n do pol3, $n = 99$, em seguida, $n = 9$. A redução para um polígono de 9 lados foi justificada pela área, acredita ser menor do que a de um polígono de 99 lados. Perguntado se um polígono de 99 lados poderia ter uma área menor que a área de um polígono de 9 lados, o aluno pensa um pouco e diz que sim, mas diz: "*Mas com* $n = 99$ *a circunferência não ficará menor que o polígono?*", essa pergunta é uma clara intenção de comparação entre as áreas, motivada pela forma das figuras. Após diversas deformações da área alterando n, o aluno compreende que pode alterar a área pelo comprimento de l. Perguntado se havia alguma relação entre a área e o lado, diz ele: "*Professor, de acordo com os pontos aqui de animação [vértices], eu vou fazer o polígono ficar do mesmo tamanho da circunferência*", demonstrando, em seguida, a compreensão do processo da equivalência entre as áreas quando afirma que, para um polígono de 99 lados ter área próxima da área do círculo dado, necessitaria diminuir o comprimento dos lados, demonstrando, assim, o conceito de função. Em seguida, reconhece esse processo com $n \to \infty$. Faz a comparação da área do círculo com o polígono inscrito, pois acredita que, somente dessa forma, saberia relacionar as duas áreas, ocorrendo por preenchimento ou diferenciação entre as áreas. Relata, assim, sua experiência com o *applet*: "*[...] o de 30 ainda sobra espaço para preencher. O de 99 nem tanto. Quando eu estava animando, foi exatamente esses que experimentei. Era o triângulo e o quadrado. Eu vi a diferença*", essa declaração é bem significativa, pois demonstra a apropriação de um mecanismo de comparação pela diferença entre as áreas de vários polígonos com a área do círculo.

Resultado: O aluno apresenta uma noção de limite quando sugere que, se a área do polígono inscrito tende para a área do círculo, mas não cita a relação com l, mesmo estando implícito no fato do polígono estar inscrito. Outra noção é apresentada quando afirma que o comprimento do apótema tende para o comprimento do raio. Nos registros de resposta, há ocorrência da conceituação de função. Na entrevista, inicialmente, afirma não acreditar ser possível a estimação da área do círculo por meio de polígonos regulares, mas, depois de manipulações de n e deformações e posicionamentos das figuras, já diz ser possível estimar a área, compreende a relação estabelecida de entre n e l na aproximação das áreas entre o polígono e o círculo, e, nesse processo, contém uma noção de limite já descrita nos registros de respostas e, por fim, conceitua função.

5.1.7 Aluno M7

Registros Escritos de Respostas – O aluno M7 acredita ser possível estimar a área de um círculo a partir de polígonos regulares, segundo ele: "*[...] aumentando o número de lados do polígono, e diminuindo a distância entre os seus vértices, logo, o raio do polígono vai se igualar ao raio da circunferência*". Descreve, ainda, que, quanto maior o número de lados e menor a distância entre seus vértices, cada vez mais, o polígono tem sua área aproximada da área do círculo. Essa é uma noção de limite que o aluno demonstra conhecer, compreende como n e l se relacionam para que o limite da área do polígono inscrito seja a área do círculo.

Entrevista – Segundo o aluno, é possível estimar a área de um círculo a partir de polígonos regulares. Justifica que todo polígono pode ser inscrito numa circunferência. Faz ajustes do polígono no *applet*, aumenta n e diminui o comprimento de l. Questionado sobre até quanto poderia realizar as variações de *n*, o aluno responde assim: "*Eu aumentaria o número de lados e diminuiria a distância entre os lados [...]Até que fique o limite entre os pontos [a distância mínima entre os vértices] É o limite entre os pontos*". Acredita que: "*n poderia variar até infinitos valores [...] desde que os vértices do polígono não se encontrassem*". Do ponto de vista da Geometria Plana, não há um polígono "de infinitos lados". Sobre o referido limite entre os pontos, diz ele: "Seria um limite tão próximo que eu não poderia dizer quanto é". Essa última afirmação demonstra o conflito conceitual de limite com partes tão pequenas quanto se queira.

Resultado: O aluno apresentou uma noção de limite envolvendo a área do polígono inscrito e a área do círculo. Essa noção foi apresentada com a compreensão dos mecanismos reversos entre n e l. Foi possível identificar o conceito de função pois sempre que alterava n, ou seja obtinha um polígono P_n, logo em seguida alterava l, fazendo-o tender para valores menores. Concluindo por um valor de área limite visualmente próximo da forma da área do círculo, obtido com um $n \to \infty$ e um $l \to 0$.

5.1.8 Aluno M8

Registros Escritos de Respostas – O aluno acredita que um polígono inscrito pode oferecer uma boa aproximação, apresenta uma noção de limite quando faz o polígono ficar inscrito, diz o aluno: "*Quanto maior a quantidade de vértices do polígono mais se aproximará do raio do círculo como um limite, ou seja, tenderá a um determinado valor*", acredita que: "*Tal ideia me permitirá compreender na pratica o que é limite uma vez que, ao chegar a uma determinada quantidade de lados, estará tão próximo da área do círculo que faltarão infinitésimos*". Infinitésimos no registro do aluno está no contexto de uma parte muito pequena e tão pequena quanto se queira. Essa afirmação do aluno revela uma noção de infinito presente na comparação entre as áreas do polígono e do círculo. Nessas noções, o conceito de função não é apresentado, pois só relaciona a variação da área com o número de lados, o que pode ser confirmado quando diz: "*[...] ao aumentar a quantidade de lados do polígono, ele [a área do polígono] sempre se aproximará [da área do círculo]*". Observa-se, ainda, a intenção do aluno em relacionar o processo desenvolvido por ele, para a estimação, com o conceito de limite quando diz: "*O estudo do cálculo consiste em estudar as redondezas, ou seja, não aquele determinado valor, mas sim os números da vizinhança*".

Entrevista – O processo de estimação descrito pelo aluno é semelhante ao descrito nos registros escritos. Não utilizou o *applet* para explicar nem para demonstrar o processo desenvolvido para estimar a área do círculo a partir de um polígono regular. Apresenta a noção de limite e infinito na seguinte argumentação: "*Quando aumenta o número de lados, ele [refere-se à área do polígono] fica bem próximo da área do círculo, faltando pouquíssimo ... fica pelo infinitésimo*", e complementa: "*Aumentando a quantidade de lados e diminuindo o tamanho dos lados*", o que demonstra, diferentemente do registro escrito, a conceituação de função. Os conhecimentos construídos e internalizados decorrentes também da utilização do *applet* evidenciam a ocorrência de processos de abstração reflexionante, e, especificamente, processos de abstração refletida.

Resultado: O aluno demonstrou conhecer o mecanismo aproximação entre as áreas com a variação inversa de n e l. Nos registros escritos, o conceito de função foi apresentado, no entanto, a conceituação foi verificada na entrevista com a utilização do *applet*. Foram apresentadas as noções de limite, envolvendo área, e infinito, no processo de diferenciação entre áreas.

5.1.9 Aluno M9

Registros Escritos de Respostas – O aluno M9 relaciona o processo de comparação e estimação da área ao método da exaustão, o que configura um processo da abstração reflexionante. Descreve um processo que se tem uma sequência de polígonos cujo número de lados segue uma progressão geométrica de razão dois; esse processo envolve a noção de limite do apótema até a circunferência, o limite com o valor do raio. Outra noção apresentada é a de infinito no processo de exaustão, fazendo com que a diferença entre as áreas do polígono e do círculo tendam para zero. O aluno dá uma descrição do processo: "*[...] a área é a soma da área de* n *de triângulos isósceles, com os lados iguais ao raio da circunferência e a altura é o apótema do polígono, quanto maior for n, mais perto a área do polígono terá da área do círculo*".

Entrevista – O aluno acredita que a estimação pode ser feita por um polígono inscrito e circunscrito na circunferência. Vê o polígono como uma composição de outros. A comparação ocorreria pela diferenciação entre as formas. Para demonstrar o procedimento, o aluno coloca o polígono pol3 sobre a área do círculo, aumenta o número de lados e ajusta o comprimento dos lados. Perguntado se sabia por que estava realizando aquele procedimento, o aluno diz: "*Para caber. Se aumentar os lados [o número de lados], tem que diminuir [o comprimento do lado]*". Nessas palavras, evidencia-se uma noção de limite que envolve a área do polígono a partir das variações de $n \to \infty$ e $l \to 0$. Fica caracterizado o conceito de limite quando fixa um valor de n e altera o valor de l.

Resultado: O aluno apresentou duas noções de limite que envolvem área, uma vinculada à diminuição da diferença entre as áreas do polígono e do círculo, e a outra é a de infinito, que está diretamente vinculada com a noção de limite que envolve o comprimento do apótema de um polígono inscrito na circunferência. Ambos são conhecimentos resultantes de processos de abstração reflexionante.

5.1.10 Aluno M10

Registros Escritos de Respostas – O aluno M10 considera que o polígono é composto por triângulos. Utiliza o polígono inscrito. A estimação ocorre quando o polígono possui um determinado número de lados, e segundo o aluno: "*[...] podemos estimar a área do círculo usando os polígonos regulares inserindo a quantidade exata de lados no polígono, e transferindo para a área do círculo de tal forma que fiquem iguais, daí basta calcular a área do triângulo e multiplicar pelo número de triângulos, sendo assim, a área da circunferência será igual à área dos triângulos somados dentro da circunferência*". Quando o aluno afirma que a comparação ocorrerá com uma quantidade exata de lados, ele desconsidera os infinitos pontos na circunferência, mas, por outro lado, a fixação de um valor de n e o ajuste do polígono na circunferência exprimem o conceito de função, pois o ajuste será pelo comprimento de l. A noção de limite apresentada pelo aluno está fundamentada na aproximação do valor da área por um valor na vizinhança, não necessitando ser exatamente o valor da área do círculo. O aluno descreve uma comparação entre as formas com o polígono circunscrito, afirmando que: "*[...] quanto maior o número de lados do polígono, mais semelhante ao círculo o polígono vai ficando*". Conclui que a comparação ocorrerá entre as formas das figuras por sobreposição, assim, obterá uma estimativa à medida que a forma do polígono se assemelhar com a forma circular. O cálculo seria possível pela soma das áreas dos n triângulos idênticos que compõem o polígono.

Entrevista – O aluno acredita ser possível a estimação da área pela comparação entre as áreas das figuras com o polígono inscrito. O aluno reduz o comprimento do lado e aumenta o número de lados do polígono para valores cada vez maiores, diz ele: "*Estou tentando aproximar a área do polígono*", justificando ao ser questionado sobre o procedimento que estava realizando na comparação e na estimativa. Apresenta o conceito de função. Quando realiza as deformações da área do polígono e ajustes, justifica ser necessário para reduzir a área restante, ou seja, realiza diferenciação entre as áreas das figuras, e essa é uma noção de limite apresentada. Contrariamente ao conceito de função, a redução da área, segundo o aluno, é feita diminuindo o número de lados; o que não exclui a possibilidade de ajuste do comprimento do lado, já que diz: "*Diminui o comprimento do lado. Diminui o tamanho do lado e aumentei a quantidade da base, de lados*", referindo-se aos procedimentos adotados para comparar as áreas pela forma de cada figura, nesse procedimento, o aluno objetivou fazer a diferença entre as áreas tender para zero. O aluno descreve, assim, a noção de limite: "*Acredito que, se for para igualar a área do círculo, tem que ter um limite de lados do polígono que vai [...] um limite no polígono que é a área da circunferência*", no entanto, essa noção de um valor limite desconsidera os infinitos vértices que são pontos comuns à circunferência.

Resultado: O aluno utilizou os recursos do *applet* moderadamente. Explicou, sem o auxílio do *applet*, procedimentos adotados para comparar e estimar a área do círculo. Apresenta uma noção de limite fundamentada na aproximação do valor da área por um valor na vizinhança, com um determinado valor de n. Apresentou o conceito de função. Formulou um conhecimento com a forma reversa de C7. Apresentou uma noção de limite no processo de diferenciação entre as áreas do polígono e do círculo, no entanto, essa noção de um valor limite desconsidera os infinitos vértices que são pontos comuns à circunferência.

5.1.11 Aluno M11

Registros Escritos de Respostas – O aluno M11 realizou registros com respostas curtas. Declarou que a estimação da área do círculo ocorre com o aumento do número de lados do polígono, acreditando haver uma relação direta entre o número de lados e o aumento da área do polígono P_n. Quando afirma: "*que é uma proporção do número de lados pelo aumento da área*", essa afirmação mais se assemelha com uma relação de causa e efeito do que de uma relação de proporcionalidade.

Entrevista – O aluno faz a estimativa com um polígono inscrito. Aumenta o valor de n para deformar a área e realizar a comparação e a estimativa entre as áreas do polígono e do círculo, afirma que aumentaria o número de lados, e não o comprimento do lado. No entanto, ao manipular o *applet* para ajustar a sobreposição das figuras, o aluno altera n e l, nessa ordem. Promove a comparação entre as áreas por ações coordenadas de alterações desses dois parâmetros. Exemplificando o procedimento adotado, o aluno tenta aumentar o número de lados, mas extrapola a área. Em seguida, diminui o comprimento do lado. Essas descrições já evidenciam a presença do conceito de função, pois, ao ser questionado sobre como procederia para valores de n cada vez maiores, a resposta foi sempre a diminuição do comprimento de l. Apresenta uma noção de limite ao tentar realizar a equivalência das áreas do polígono e do círculo. Foi pedido ao aluno que tentasse generalizar o processo de estimação entre as áreas para um n tendendo para mais infinito, respondeu o aluno: "*Teria que diminuir o comprimento do lado*". Quando foi perguntado sobre até quanto diminuiria o comprimento de l, o aluno responde: "*Até quanto desse. O mínimo que pudesse. Infinitas partes [...] O mínimo possível de comprimento*", e, quando foi perguntado se podia ser zero ou próximo de zero, o aluno responde: "*Próximo. É [...] porque se é o mínimo é a menor distância*". Nessas últimas declarações, é possível destacar uma noção de limite quando o aluno se refere ao valor de l, uma noção de infinito quando determina que o comprimento pode ter "*infinitas partes*", e outra noção de limite contida no processo que a área do polígono tende para a área do círculo.

Resultados: O aluno utiliza com frequência o *applet* para construir ou fundamentar suas explicações. Apresenta fortemente o conceito de função quando fica o valor de n e altera o valor de l para fazer a área do polígono tender para a área do círculo. Nesse processo, é possível ainda destacar três noções: uma noção de infinito na divisão do comprimento de l; uma noção de limite no comprimento de l e outra com a área do polígono tendendo para a área do círculo.

5.1.12 Aluno M12

Registros Escritos de Respostas – O aluno M12 não faz referência sobre o método empregado para estimar a área do círculo, mas apresenta noções de infinito quando trata da composição do polígono quando afirma: "*A soma das áreas de todos os infinitos triângulos é igual à área desse polígono [...]*"; essa noção é importante no processo do cálculo de áreas regulares e irregulares, o que favorece também a conceituação da integral definida, e conclui: "*Logo, a área de um polígono que tende a ter infinitos lados tende à área de um círculo*". Nesses registros, é possível retirar uma noção de limite que se apresenta no processo que a área do polígono tende para a área do círculo, mas sem determinar uma relação entre n e l, conforme esta declaração: "*Percebe-se que, quanto mais o número de lados de um polígono cresce, mais* *se aproxima da forma de um círculo*", mas, nesse registro, é perceptível a inexistência do conceito de função, caracterizando apenas uma relação de causa e efeito ao alterar o valor de n no *applet*.

Entrevista – O aluno estima a área a partir de um polígono de 6 lados. Arrasta o polígono para o interior da circunferência, mas não coloca os vértices na circunferência, e justifica: "*É o que se assemelha mais com uma circunferência, um círculo*". Após algumas tentativas, alterando o valor de n e ajustando o polígono no círculo, ele ajusta um polígono com $n = 6$ alterando o comprimento do lado objetivando obter um polígono circunscrito. Foi perguntado como ele procederia para continuar realizando a estimação da área caso o polígono tivesse 5, 50, 100 lados, e ele respondeu: "*Dependendo do tamanho do lado caberiam n lados*". Com essas ações e declarações, é possível dizer que o aluno utiliza o conceito de função. Segundo ele, o comprimento do lado tende para zero, e essa é uma noção de limite. Apesar da utilização de um polígono inscrito em todas as manipulações durante a estimação, o aluno declara ser possível também realizar esse processo com um polígono circunscrito, no entanto, diz: "*[...] acho que para igualar seria mais difícil*", mas não tenta e não esclarece a dificuldade.

Resultado: O aluno apresenta noções de infinito quando trata da composição do polígono. Apresenta uma noção de limite no processo que faz a área do polígono tender para a área do círculo. No registro escrito, o aluno apresenta uma relação de causa e efeito do valor de n e a área do polígono, não apresentando o conceito de função. No entanto, durante a entrevista, foi possível ainda observar que o aluno utiliza o conceito de função. Apresenta uma noção de limite quando afirma que o comprimento do lado tende para zero.

5.1.13 Aluno M13

Registros Escritos de Respostas – O aluno M13 acredita que é possível realizar a estimativa da área do círculo a partir das áreas de uma sequência de polígonos conforme a seguinte descrição dada: "*A área do círculo é o valor extremo da sequência das áreas das regiões poligonais regulares inscritas no círculo quando o número de lados das poligonais aumenta arbitrariamente*". A sequência descrita pelo aluno é iniciada por um polígono de três lados, em seguida, a partir do centro da circunferência, que coincide com o centro do polígono, projeta pelo ponto médio de cada lado do polígono até a circunferência um novo vértice do polígono seguinte, e assim descreve o aluno: "*Podemos começar com um triângulo equilátero. A mediatriz de cada lado se encontra com a circunferência e estes pontos são os vértices adicionais para o polígono seguinte, ampliando o triângulo para um hexágono. O processo é repetido sucessivamente formado o valor do raio*". Nesse registro, é possível observar a noção de limite presente na sequência de polígonos, fazendo que, a cada polígono, a sequência de valores das áreas tenda para a área do círculo.

Entrevista – O aluno descreve o processo de estimação utilizando os polígonos externamente ao círculo, e vê, na forma do polígono, uma semelhança com a forma do círculo, diz ele: *"[...]são polígonos regulares e eles são capazes de regular os lados, e, quanto maior o número de lados, mais a circunferência vai aparecendo. Por exemplo, se eu colocar um número muito grande de lados, vai ficar, basicamente, um círculo*". A noção de limite apresentada está relacionada à área do polígono que tende para a área do círculo à medida que n aumenta. O aluno altera o número de lados objetivando a comparação entre as áreas das duas figuras, chega a afirmar que, independentemente do tamanho que tenha cada uma das figuras, o raio servirá de medida para que o polígono esteja inscrito na circunferência, e, após a regulação do comprimento do lado, o aluno diz: "*Porque aqui tem uma altura [referindo-se ao raio da circunferência]. Aí quando coloca essa altura [equivale ao lado do triângulo isósceles do polígono] É a altura que influencia e não o número de lados e a proximidade [comprimento do lado]. Se afastar, fica grande, mas com o mesmo tanto de lados. Se eu colocar o mesmo tanto de lados, mas com proximidades menores, ele vai ficar basicamente o círculo*". Essas afirmações foram verificadas quando foi posicionado um polígono de quatro lados, circunscrito na circunferência, com o valor do raio equivalente ao comprimento da altura; foi perguntado se o processo de estimação ocorreria com essa equivalência, e, prontamente, o aluno posiciona o polígono na forma inscrita, e justifica: "*Não preencheu. Porque tem que aumentar o número de lados*". Na sequência, foi perguntado o que poderia ser feito para aumentar o número de lados sem aumentar a área, e ele responde: "*Aproximando[...] um lado do outro [mostrando os vértices*]". O que significa que utiliza o conceito de função no processo descrito por ele.

Resultado: No registro escrito de resposta, o aluno apresenta uma noção de limite. Essa noção está associada à sequência de polígonos e seus valores de área; a sequência de valores das áreas tende para a área do círculo. No entanto, durante a entrevista, outra noção foi apresentada, uma que a área do polígono inscrito tende para a área do círculo à medida que n

aumenta. O aluno apresentou o conceito de função durante as argumentações e os procedimentos adotados.

5.1.14 Aluno M14

Registros Escritos de Respostas – O aluno M14 utiliza o polígono inscrito na circunferência durante o processo de estimação da área do círculo e descreve algumas de suas propriedades: "*No polígono inscrito, a distância entre o centro da circunferência e o vértice do polígono é igual ao raio da circunferência; e a distância entre o centro da circunferência e o meio [ponto médio do lado] é igual ao apótema do polígono*". Apresenta uma noção de limite relacionada ao comprimento do apótema quando fez o seguinte registro: "*Ao aumentarmos o número de lados do polígono, o raio permanecerá inalterado, mas o apótema estará aumentado, quanto maior for o número de lados do polígono, mais o apótema tenderá para o raio. Assim, a circunferência seria o limite externo de um polígono regular e o apótema seria igual ao raio*". Apresenta outra noção quando diz: *"A área do polígono é a soma da área de um número de triângulos isósceles, cujos lados são iguais ao raio da circunferência e cuja altura e o apótema do polígono*". Essa noção é a mesma que é necessária ao processo de conceituação da integral definida. Quando o aluno diz: "*Quanto maior o número [de lados], mais próxima a área do polígono será da área do círculo*", nesse registro, é possível observar uma noção de infinito relacionada ao número de lados, e uma noção de limite relacionada ao polígono inscrito na circunferência, cuja área tende para a área do círculo delimitada também pela circunferência. No registro escrito, não foi possível observar o conceito de função.

Entrevista – Acredita que é possível estimar a área de um círculo a partir de polígonos regulares. A princípio, o aluno iria utilizar um polígono para a estimação, no entanto, ao ser questionado se mais de um polígono seria viável para a estimativa, prontamente, respondeu que sim, mas, ao tentar alterar os polígonos e colocá-los no interior da circunferência, mas, logo em seguida, descarta essa possibilidade. Utiliza o triângulo, mas, logo em seguida, conclui: "*[...] se eu aumentar os lados, não vai ser todo preenchido [área do círculo]*". Compreende que, se dois polígonos com mesmo comprimento de lado tem áreas diferentes, a maior área é a que tem maior número de lados. Ajusta polígonos no interior da circunferência com os vértices sobre a circunferência, polígonos com 3, 4 e 5 lados são ajustados com seus vértices sobre a circunferência. Conclui que o polígono com 5 lados tem área maior que os demais polígonos, ao observar que havia partes área do polígono de 5 lados que não era comum à área de nenhum dos outros polígonos. Em seguida, sem auxílio do *applet*, conclui que um polígono de 6 lados tem uma área mais próxima da área do círculo que um polígono de 5 lados, e, em seguida, conclui que um polígono de 7 lados tem uma área mais próxima da área do círculo que um polígono de 6 lados. O aluno apresenta uma noção de limite quando diz: "*Acredito que, quanto maior for a área do polígono, vai preencher a área do círculo*", diferentemente do declarado, em que a área do polígono tende para a área do círculo, nessa noção de limite, a área do polígono poderia crescer indefinidamente, necessitaria estar inscrito para tender para a área do círculo quando n cresce. Quando foi questionado sobre essa possibilidade, o aluno disse: "*Ajustando. Se for maior, diminuindo o comprimento dos lados e, se for menor, aumentando*", apresentando, assim, o conceito de função, e reforçando a noção apresentada, com o limite da área do polígono tendendo para a área do círculo à medida que n aumenta e l diminui com o polígono inscrito.

Resultado: Apresenta uma noção de limite relacionada ao comprimento do apótema. Essa noção é a mesma que é necessária ao processo de conceituação da integral definida. Apresenta uma noção de infinito relacionada ao número de lados, e uma noção de limite relacionada ao polígono inscrito na circunferência, cuja área tende para a área do círculo delimitada também pela circunferência. No registro escrito, não foi possível observar o conceito de função. Realizou manipulações no *applet* até concluir que, se dois polígonos com mesmo comprimento de lado têm áreas diferentes, a maior área é a que tem maior número de lados. Em seguida, sem auxílio do *applet*, conclui também que o polígono inscrito na circunferência tem uma área mais próxima da área do círculo com um n cada vez maior. O aluno apresenta uma noção de limite que a área do polígono tende para a área do círculo. Diferentemente do registro escrito, na entrevista, o conceito de função foi utilizado, e reforçou a noção apresentada, com o limite da área do polígono inscrito tendendo para a área do círculo à medida que n aumenta e l diminui.

5.1.15 Aluno M15

Registros Escritos de Respostas – O aluno M15 utiliza um polígono escrito no processo de estimação. Descreve as propriedades que considera importante, afirmando: *"[...] a distância entre o centro da circunferência e o vértice do polígono é igual ao raio da circunferência e a distância entre o centro da circunferência e o meio lado igual ao apótema do polígono*", essas propriedades, destacadas pelo aluno, sustentam uma noção de limite apresentada quando afirma: "*Ao aumentar o número de lados do polígono, o raio permanecerá inalterado, mas o apótema estará aumentando*". Em seguida, a mesma noção de limite é apresentada: "*Quanto mais aumentar a distância da circunferência, o seu vértice se igualará ao raio*", estabelecendo uma relação entre o apótema e o raio. Destaca-se que essa noção não utilizou o conceito de função na variação da área do polígono utilizado.

Entrevista – O aluno altera o comprimento do lado de um polígono e coloca-o inscrito na circunferência. Relata que utilizou vídeos de ajuda do site para aprender sobre a inscrição de polígonos. Aparenta conhecer o conceito de função e aplica-o em seu processo de construção, pois, determina o valor de n e, em seguida, ajusta o comprimento do lado para torná-lo inscrito na circunferência. A variação de n para valores cada vez maiores ocorreu mediante questionamentos sobre a área de polígonos; em todas as respostas, a variação do comprimento do lado para inscrição do polígono na circunferência foi realizada. Quando foi perguntado se um n muito grande permitiria que o polígono fosse inscrito na circunferência, ele respondeu: "*Caberia, mas aí diminuiria bastante [o comprimento do lado]. Só que a área é sempre a mesma, ela nunca muda*". Nessa afirmação, é possível destacar uma noção de limite relacionada à área do polígono que tende para a área do círculo; uma noção de infinito relacionada ao número de n, e outra noção relacionada ao limite do comprimento do lado que tende para zero.

Resultado: Uma noção de limite foi apresentada quando afirmou que, ao aumentar o número de lados do polígono, o apótema aumenta. Nessa noção, o aluno não utilizou o conceito de função, mas, durante a entrevista, utilizou o conceito de função para tornar o polígono inscrito e fazer sua área tender para a área do círculo. Duas noções de limite foram apresentadas conjuntamente, uma noção foi relacionada à área do polígono que tende para a área do círculo, a outra noção está relacionada ao limite do comprimento do lado que tende para zero. Outra noção apresentada foi a de infinito quando previu o limite da área com valores de n cada vez maiores.

5.1.16 Aluno M22

Registros Escritos de Respostas – O aluno M22 acredita que é possível estimar a área com polígonos regulares, mas não esclarece se o polígono está inscrito ou não, segundo ele: "*Para calcular a área de um círculo de raio unitário, é necessário fazer o cálculo de um polígono regular de n lados*", não descrevendo ainda o comportamento de n. Considera o polígono como uma composição de vários triângulos isósceles semelhantes com um vértice comum no centro da circunferência. Uma noção de limite está presente no seguinte registro: "*Pode-se dizer que a área do círculo é o limite das áreas do polígono inscrito*". Nesse registro, fica evidente a utilização do polígono inscrito no processo de estimação da área do círculo. Considerando os registros anteriores, o aluno não utilizou o conceito de função no processo de construção do conhecimento sobre limites. Também não foi possível observar nem extrair nos registros escritos uma relação entre n e l.

Entrevista – O aluno M22 acredita ser possível estimar a área de um círculo a partir de polígonos regulares inscritos. Inicia a construção desse conhecimento com um polígono de três lados. Observa a área restante a ser preenchida e pega outro polígono de seis lados e ajusta-o deixando-o inscrito. O ajuste foi feito alterando o comprimento do lado, aparentemente de forma inconsciente, diz o aluno: "*Se eu colocar esse hexágono e aumentar a área, ele vai se aproximar da forma*", indicando a intenção de obter uma estimativa não só pela área a ser preenchida como também da forma circular que o polígono deve ter. Posteriormente, após tentar alterar a área do polígono de 6 lados e depois o de 7 lados, conclui que o de 8 lados é o que preenche melhor a área delimitada pela circunferência, diz o aluno: "*O de 8 lados se aproxima mais da área [...]Quanto maior o polígono, mais próximo vai ficar do círculo. Vou colocar o de 9*", mas, ao fazer $n = 9$, verifica que a área do polígono é maior que a área do círculo, conclui que o polígono com 8 lados é o que tem a forma e a área mais próximas das do círculo. Evidentemente, não utilizou o conceito de função, uma vez que se valeu fortemente do apelo visual da forma para obter uma estimativa da área.

Resultado: No registro escrito de respostas, uma noção de limite foi apresentada quando diz que a área do círculo é o limite das áreas do polígono inscrito. O aluno não utilizou, nem nos registros escritos nem na entrevista, o conceito de função no processo de construção do conhecimento sobre limites. Não foi possível observar nem extrair, nos registros escritos, uma relação entre n e l. Diferentemente do registro escrito de resposta, na entrevista o aluno demonstrou que acredita ser possível estimar a área de um círculo a partir de polígonos regulares inscritos. Valeu-se fortemente do apelo visual da forma de um polígono de 8 lados para obter uma estimativa da área do círculo.

5.1.17 Aluno M25

Registros Escritos de Respostas – O aluno M25 afirma ser possível a estimação da área do círculo a partir de polígonos regulares, e apresenta uma noção: "*Conforme vamos aumentando a área do polígono, mais se aproxima da área do círculo*", mas evidencia a falta de elementos que possibilitem esse limite, como, por exemplo, a necessidade de que o polígono esteja inscrito na circunferência. O aluno acredita que a área do polígono tende para a área do círculo, e, segundo ele, a diferença entre essas duas áreas é por um valor muito pequeno, essa noção de infinito ajuda a consolidar o conceito de limite, são partes tão pequenas quanto se possa calcular. Apresenta uma noção de infinito ao tratar das áreas cada vez menores a serem preenchidas. A utilização da forma dos polígonos nos processos de construção é evidente quando diz: "*[...] ao colocarmos 17 lados no polígono ou mais, ele tende a assumir a forma circular*". Nesse registro, outras duas noções são apresentadas: uma noção de infinito quando assume que n cresce; e outra noção de limite quando afirma que a estimativa da área do círculo é feita com um polígono que detém a forma circular, obtida pela variação de *n*. Não foi possível identificar o conceito de função nos processos relatados pelo aluno.

Entrevista – O aluno M25 afirma ser possível estimar a área de um círculo a partir de polígonos regulares. Coloca um polígono com dois de seus vértices sobre a circunferência e faz o $n = 10$ e diz: "*Cada vez que a área do polígono aumenta, mais se aproxima da área do círculo*". Aumenta a área desse polígono fazendo um $n = 60$, extrapolando a área do círculo. Reduziu para n = 10 dizendo: "*Se é um polígono regular, então tem os ângulos e lados iguais. Dá para ajustar aqui [mostrando o lado do polígono]*", mas, quando ajusta a área, não demonstra conhecer o mecanismo de ajuste, o que caracterizaria a área como uma função dos lados do polígono. No entanto, reconhece que, se há dois polígonos regulares de mesmo número de lados, o que diferencia a área é o tamanho do lado, diz ele: "*O lado é o diferencial. Do tamanho da área. Eu preenchi aumentando o número de lados*". Diz ainda: "*Eu iria diminuir. Se diminuir o comprimento dos lados, poderiam ser vários, mais caberia, mas completaria a área do círculo*", referindo-se à possibilidade de ter um polígono com 1000 lados, e essa é uma noção de limite. Outra noção apresentada foi a de infinito quando disse que caberiam infinitos lados desde que pudesse diminuir o comprimento dos lados. A partir dessas declarações, é possível concluir que o aluno aplicou o conceito de função. Outra noção de limite e infinito está presente quando diz que os lados diminuem até "*Zero vírgula alguma coisa*". Perguntado se podia ser zero, respondeu que sim, mas, em seguida, após breve pausa, cita o seguinte exemplo: "*Professor, eu levo na prática, se eu cortar um bolo, se eu cortar um bolo ao meio, vai continuar sendo o bolo, se eu cortar em 8 pedaços*", dando a entender que, por menor que seja o pedaço, ainda sim, seria pedaço de bolo, concluindo, em seguida, que não pode ser zero o comprimento do lado.

Resultado: O aluno apresenta uma noção de limite relacionada à *área do polígono que se aproxima da área do círculo,* mas explicita que o polígono, nesse caso, precisa estar inscrito na circunferência. Apresenta uma noção de infinito relacionando as áreas do polígono e do círculo, tratando das as áreas cada vez menores a serem preenchidas. Apresenta outras duas noções: uma noção de infinito quando assume que n cresce; e outra noção de limite quando afirma que a estimativa da área do círculo é feita com um polígono que detém a forma circular. Não apresentou o conceito de função. Na entrevista enquanto manipulava os polígonos, o aluno não demonstra conhecer o mecanismo de ajuste da área pelo valor do lado, mas, ainda durante a entrevista, utilizou e referiu-se corretamente ao ajuste do lado para modificar a área do polígono para estimação. Apresenta uma noção de limite e infinito quando faz n variar para valores cada vez maiores. Outra noção apresentada foi a de infinito quando disse que caberiam infinitos lados desde que pudesse diminuir o comprimento dos lados. O aluno aplicou o conceito de função. Outra noção de limite e infinito está presente quando diz que os lados diminuem o comprimento do lado até valores próximos de zero.

5.1.18 Aluno M32

Registros Escritos de Respostas – O aluno M32 reconhece o método da exaustão no processo de estimação da área do círculo com polígonos regulares, diz o aluno: "*Esse método é denominado 'método da exaustão', e foi utilizado pelos gregos para o cálculo da área do círculo e estimativa do número* π". Uma noção de limite está contida no seguinte registro: "*A mediatriz de cada lado encontra com a circunferência [É uma projeção do ponto no centro da circunferência e do círculo sobre a circunferência pelo ponto médio de cada lado] e estes pontos são os vértices adicionais para o polígono seguinte, ampliando o triângulo para um hexágono, o processo é repetido sucessivamente [...]*", considerando um polígono inicial com três lados, esse processo descrito pelo aluno configura um sequência geométrica de polígonos com razão dois, e, como consequência, uma sequência das áreas desses polígonos; uma noção de limite das áreas dos polígonos que convergem para a área do círculo. Nesse registro, também há uma noção de infinito considerando o processo de divisão dos lados ao meio. O aluno descreve outro limite: "*[...] e o apótema do novo polígono formado tenderá ao valor do raio*". No processo definido pelo aluno, não foi observado o conceito de função, pois não foi realizada nenhuma relação das áreas dos polígonos com seus lados. Conclui o aluno: "*Conforme aumenta [o número de lados], o apótema tende a* r *e o valor do limite da área acima [referindo-se ao applet] tende à área do círculo (*$A = \pi r^2$*). Como nosso raio é unitário, teremos uma área igual ao valor de* π", relacionando conhecimentos da situação-problema com estruturas já existentes. Mas esse tipo de raciocínio seria mais previsível na atividade A2.

Entrevista – O aluno afirma ser possível estimar a área de um círculo a partir de polígonos regulares, arrasta um polígono para o interior da circunferência, e, ao responder como procedeu, disse que alguns tiveram suas áreas aumentadas e outras diminuídas, dando a entender que utilizou mais de um polígono para elaboração de seus processos construtivos, mas afirma que só precisou de um. Demonstrando nervosismo com as perguntas, afirma que o ajuste do polígono na circunferência não ocorreu perfeitamente, ocupando o espaço, mas não na totalidade. Não soube explicar como esse processo ocorreria.

Resultado: Reconhece o método da exaustão no processo de estimação da área do círculo com polígonos regulares. Uma noção de limite está associada a uma sequência geométrica de polígonos com razão dois. Uma outra noção de limite é a das áreas dos polígonos que convergem para a área do círculo. Há uma noção de infinito considerando o processo de divisão dos lados ao meio. O aluno descreve outra noção de limite quando afirma que o apótema do novo polígono formado tenderá para o valor do raio. O aluno não apresentou o conceito de função. A entrevista divergiu das declarações contidas nos registros de respostas. Apresentou declarações divergentes também durante a entrevista, mas consciente de que o processo de estimação era possível e que deveria ser pelo aumento da área do polígono, preenchendo a área no interior da circunferência. Na entrevista, também não apresentou o conceito de função.

5.2 INVESTIGANDO NOÇÕES DE LIMITES EM UM PROBLEMA DE ÁREA – ATIVIDADE 2

Os registros escritos da atividade 2 foram coletados no final da unidade 1 (U2) conjuntamente com a atividade 1. As entrevistas relativas a essa atividade ocorreram também no final dessa unidade de forma continuada à atividade 1. Na sequência do texto, serão descritos os resultados por aluno, devidamente identificados com código.

5.2.1 Aluno M1

Registros Escritos de Respostas – O aluno M1 procede com a aproximação da área do polígono para a área do círculo aumentando o número de triângulos. Percebe a variação de valores: "*modificam também os valores da altura e da área do* Ti *e a área do polígono, quando aumentamos ou diminuímos o número de* Ti *do polígono*". Relaciona Ti com o valor de n da atividade 1. Conclui a atividade afirmando que "*[...] o limite de* $A(P_n)$ *quando* n *tende a infinito é* $A(C)$*, denotado por* $\lim_{n \to \infty} A(P_n) = A(C)$*, se e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que se* $n > n_0$*, então* $|A(P_n) - A(C)| < \varepsilon$ |". Nesse registro, o valor da área do círculo é o limite da área de um polígono de n lados, quando $n \to \infty$. No entanto, isso não é suficiente, é necessário, para tanto, o comprimento do lado tender para zero.

Entrevista – O aluno M1 realiza o processo de aproximação fazendo $n \to \infty$. Compreende que n não altera o círculo, e que suas ações sobre n alteram o polígono P_n, e isso fica explicito quando perguntado sobre o porquê da modificação de n: "*Modificar totalmente o polígono na circunferência que ainda falta*", "*Quanto maior o valor, maior será a aproximação*". Essa conclusão é devida às aproximações sucessivas realizadas coma variação de n para valores cada vez maiores; e, nesse registro, há duas noções, uma que o limite da área do polígono é a área do círculo, e outra que é a noção de infinito, quando faz n variar para valores cada vez maiores. Nesse processo, ocorre a identificação da diminuição da base, diminuição da área de cada triângulo, aumento da altura de cada triângulo e aumento da área do polígono no limite da área do círculo. No que se refere a limites, quando $n \to \infty$, o aluno afirma que o limite da base tende para zero e a altura tende para 1. Acredita que a base pode ser zero e a altura pode ter valor 1 (um) sem analisar as implicações para a existência dos triângulos e do próprio polígono P_n. Apesar dessas afirmações, afirma que a área de cada triângulo tende para zero, não podendo ser zero, como diz na frase: "*Porque é um valor próximo a zero, mas não é completamente zero*" e "*Quando aumenta o número de triângulos, a área aumenta*". Na fala: "*Para todo Ti maior que o zero, existe um épsilon [...] tem que ser pertencente aos números naturais e, nesse caso aqui, o módulo de $|A(P_n) - A(C)|$ tem que ser menor que o épsilon*", o aluno tenta formalizar o conceito, mas sem sucesso, o que deixa evidente que o processo de conceituação de limite ainda está em seu processo construtivo apresenta apenas algumas noções de limite.

Resultado: Para as conclusões, o aluno fez diversas modificações do valor de n e relaciona esse parâmetro com os valores da altura, da base e do número de triângulos. O aluno realiza aproximações da área do polígono para a área do círculo aumentando o número de triângulos. Faz $n \to \infty$ e compreende que suas ações sobre n alteram o polígono. Apresenta uma noção que o limite da área do polígono é a área do círculo. Apresenta, ainda, uma noção de infinito quando faz n variar para valores cada vez maiores. Apresenta, ainda, outra noção de limite quando identifica a diminuição da base, a diminuição da área de cada triângulo, o aumento da altura de cada triângulo e o aumento da área do polígono no limite da área do círculo. Afirma que o limite da base tende para zero e a altura tende para 1. Afirma que a área de cada triângulo tende para zero, não podendo ser zero. Tenta formalizar o conceito, mas sem sucesso, o que deixa evidente que o processo de conceituação de limite ainda está em seu processo construtivo apresenta apenas algumas noções de limite.

5.2.2 Aluno M2

Registros Escritos de Respostas – O aluno acredita ser possível obter a área do círculo a partir do polígono inscrito. Noções de limite estão descritas no seguinte registro: "*[...] com o crescimento do número de lados as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como seus perímetros se aproximam do perímetro do círculo [circunferência] e os apótemas se aproximam do raio do círculo*". Nesse registro, há uma noção de limite na aproximação área do polígono para o valor da área do círculo, dizendo, ainda: "*A área [do polígono inscrito], aproximando-se da área do círculo como um limite".* Foi apresentada também outra noção de limite, quando n cresce, segundo o aluno, o perímetro do polígono tende a ter o comprimento da circunferência e expressa como um limite quando diz: "*O perímetro, aproximando-se da circunferência do círculo como um limite".* Conforme descrição em registro anterior, o apótema do polígono regular tende a ter o comprimento do raio, afirmação esta, descrita como limite quando diz: "*Quando aumenta o número de lados do polígono inscrito, observamos que também aumenta o apótema, aproximando-se do raio do círculo como um limite".* O aluno construiu o conceito de função quando diz: "*Pois à medida que os lados aumentam, a base irá aumentar, a altura e a área também irão aumentar, assim acontece se caso se diminuam os lados do triângulo. Os três elementos também irão diminuir*". Conclui: *A ideia de limite nos permite aproximar o perímetro do polígono regular inscrito nessa circunferência, à medida que o número de lados do polígono aumenta*". Nessa conclusão, foi possível identificar que o aluno estabeleceu uma relação entre o número de lados e a área de um polígono que tende para a área de um círculo.

Entrevista – O aluno acredita ser possível o processo de estimação da área do círculo. Inicia demonstrando no *applet* a variação de n e o preenchimento da área, afirmando poderem ser infinitas as vezes que n aumenta. Observa que a área do triângulo diminui quando n aumenta, afirmando, ainda, que a base diminui até zero. Após ser questionado sobre essa afirmação, o aluno diz não ser possível a base diminuir até zero, e justifica: "*Não tem lado zero*". Essa resposta foi fundamentada em fundamentos da geometria, em conhecimentos já existentes, se valendo de suas estruturas cognitivas para justificar. Para o aluno, a altura aumenta; conseguindo compreender que isso ocorre quando n aumenta. Alterando o valor de

n, afirma que a altura tende para 1. Segundo ele, o valor de área não pode ser zero; essa é uma noção de limite. Compreende que, quando a área de cada triângulo T_i diminui, a área do polígono P_n se aproxima da área do círculo. Conclui assim: "*[...] A área do polígono irá tender para* π, *que é o limite. O limite do polígono [Área do polígono]*", esse valor da área é calculado considerando que, no *applet*, $r = 1$.

Resultado: O aluno utilizou, com frequência, o *applet* para fundamentar as explicações relativas às situações-problema que foram colocadas a cada pergunta. Quando varia o valor de n no *applet*, apresentam-se noções de limite: afirma que a área do polígono tende para a área do círculo; o perímetro do polígono tende a ter o comprimento da circunferência; o comprimento dos apótemas se aproximam do comprimento do raio da circunferência. Considera o conceito de função quando se refere ao comprimento dos lados. Conclui-se que o aluno estabeleceu uma relação entre o número de lados e a área de um polígono que tende para a área de um círculo. Na entrevista, o aluno inicia demonstrando, no *applet*, a variação de n e o preenchimento da área, afirmando poderem ser infinitas as vezes que n aumenta. Compreende a relação inversa entre n e a área do triângulo. Conclui que o limite da base e a área do triângulo T_i é zero. Vale-se de estruturas cognitivas preexistentes para justificar suas respostas. Compreende que a altura aumenta quando n aumenta. Afirma que a altura tende para 1. Segundo ele, o valor de área não pode ser zero. Compreende que, quando a área de cada triângulo T_i diminui, a área do polígono P_n se aproxima da área do círculo.

5.2.3 Aluno M3

Registros Escritos de Respostas – O aluno acredita que é possível obter o valor da área do círculo a partir de um polígono inscrito. Sobre o preenchimento da área, é apresentada uma noção de limite: "*[...] quando tu aumentas a quantidade de triângulos na área da circunferência, ele tende a se aproximar da área real do círculo*", assim, o limite da área do polígono inscrito é a área do círculo quando o número de triângulos aumenta. Outras noções de limites foram apresentadas nos registros: "*[...] quando tu aumentas o número de triângulos, sua base tende a 0*", relacionada ao comprimento da base, o lado que tende para zero; "*[...] sua altura tende a 1, a área do triangulo tende a 0 e a área do polígono tende a 4*", são noções de limites, construídas e relatadas quando a variação do número de triângulos é feita no *applet*. No entanto, o limite da área do polígono não é 4. Ao final, o aluno conclui: "*Cada vez que tu aumentas o número de triângulos, o polígono vai tender (se aproximar) do número x, já a do círculo, vai tender a outro x [...], para tanto, é necessário também o comprimento do lado tender para zero*"; é importante notar que o aluno apresenta uma noção de convergência entre os valores das áreas dos polígonos e os valores da área do círculo, de modo que o limite seja o valor da área do círculo.

Entrevista – O aluno afirma ser possível a estimação da área do círculo após a variação do valor de n, esse parâmetro equivale ao número de triângulos no polígono regular. Sobre o processo de estimação, ele diz: "*Vai preencher a área e dá a ideia de aproximação com a área do círculo*", essa é uma noção de limite da área do polígono e, segundo ele, à medida que aumenta o valor de n, "*A área do polígono vai se dividindo cada vez mais*", essa também é uma noção de infinito. Quando foi perguntado sobre o que acontece com a área do triângulo quando n foi modificado de 8 para 20, ele altera o *applet* e, em seguida, diz: "*A área desse triângulo aqui, se dividir [o polígono em outros menores] para 20 [n=20], a área [triângulo] fica menor, e a área do círculo tem uma maior aproximação dessa área internamente [mostrando a área do círculo]"*, e essa é uma noção de limite; o aluno exemplifica: *"Por exemplo, se a área do círculo for 20 e eu tiver um n de 8 para vinte, cada vez que tu aumentar o número de triângulos, ele vai subindo, vai subindo e vai se aproximando cada vez mais do valor certo da circunferência*", assim, o aluno descreve o processo total. O aluno aumenta e diminui o valor de n, compreende as relações de causa e efeito no *applet*, e, segundo ele, aumentando n, a base tende para zero e a consequência é a altura tender para 1 na circunferência, essas são noções de limite apresentadas sobre os elementos geométricos contidos no *applet*, diz o aluno: "*[aumentando n] A base vai diminuindo, e a altura vai aumentando [...] a base vai ficar próxima de zero. A altura vai se aproximando de 1 cada vez mais*". Ele nega a possibilidade de a área ser zero quando diz: "*Se a base fosse zero, seria tipo que uns riscos e não um triângulo*", essa é uma construção por abstração refletida. Foi perguntado ao aluno se ele acreditava que a altura de cada triângulo poderia ter um comprimento 2, ou, até mesmo, outro valor, disse ele: "*Vai depender da base. Cada vez mais, a base vai diminuindo e a altura vai aumentando*", essa é uma relação reversa entre os elementos. Declara acreditar que a altura poderia ser 2 se a base pudesse ter um valor muito próximo de zero, mas, após aumentar os valores de n para valores próximos de 1000, conclui que os valores estão cada vez mais próximos de 1, nesse processo, é possível dizer que processos de abstração pseudoempíricas, conduziram a processos de abstração refletida. Após essa conclusão, volta atrás, ele elabora uma hipótese: "*Na minha opinião, se for para 2 [altura], a base vai ser zero*", diferenciando o limite da altura, uma apresentada em que a altura tende para 1 se a base tender para zero, e outra que a altura é 2 se a base for zero. O aluno estabelece uma relação entre a altura e a base: "*Essa altura vai crescer, e ela [base] vai diminuindo aqui [posicionando os dois dedos sobre o vértice e fazendo um movimento de aproximação, de diminuição]*", vê-se, claramente, a apropriação das propriedades e relações entre base e altura de cada triângulo contido na circunferência, no entanto, as noções de limite divergem. Perguntado, novamente, sobre o valor máximo que a altura poderia ter com o polígono inscrito, ele afirma que a altura tende para 1. Essa resposta confronta com a declaração anterior, e, questionado sobre essa contradição, ele responde: "*Para ser 2, precisaria que a base fosse muito próxima de zero, tendendo para zero*", essa justificativa também diverge com a apresentada novamente. Foi colocada a seguinte situação-problema: Então, se tu aproximares os dois vértices da base fazendo ela tender para zero, tu terias a altura maior que os lados isósceles do triângulo? Imediatamente, a resposta é não. Colocando outra situação-problema: se a base tivesse um valor muito próximo de zero, que relação tu fazes entre os lados isósceles e a altura? E ele responde: "*Se chegasse a zero, chegando como se ficasse só uma coisa, e não seria mais um triângulo, seria uma linha*"; essa é uma construção por abstração refletida. Segundo ele, a altura e os lados isósceles de cada triângulo equilátero podem ter o mesmo comprimento: "*Os lados não vão mudar, eles vão se aproximar [lados e altura] [...] Se a base for zero e a altura for 1, não vai mais ser triângulo [...]Com a base igual a zero, a altura vai ser 1. Com a base chegando a zero, a altura tende para 1*", o que conflita, novamente, com a declaração dada que a altura poderia ter valor 2, mas, nessa declaração, há indícios de reorganização e construção do limite da altura. Compreende que, para ter um triângulo, a base precisa tender para zero, ter, pelo menos, um valor próximo, na vizinhança de zero. Para ele, a área de cada triângulo tende para zero. Quanto à área do polígono, ele acredita que tende para quatro, mesmo vendo os valores próximos de π no *applet*, afirma que os valores são aproximações do computador, e, aumentando ainda mais o número de triângulos, a área tenderia para 4. Deforma várias vezes o polígono com a variação de n, e mudanças de compreensão ocorrem. Após ser colocada outra situação-problema, conclui que o limite da área do polígono quando n tende para o infinito é π. A situação-problema foi a seguinte: poderia o polígono regular inscrito em uma circunferência de raio unitário ter área maior que a área do círculo? Ele respondeu: "*A área do polígono não pode passar de 3,14 que é pi*".

Resultado: Apresentada uma noção de limite quando aumenta a quantidade de triângulos na área do círculo, afirmando que a soma tende para a área do círculo. Outras noções de limites estão relacionadas ao comprimento da base, à altura e à área de cada triângulo, são noções de limites, construídas e relatadas quando a variação do número de triângulos é feita no *applet*. O aluno conclui com uma noção de convergência entre os valores das áreas dos polígonos e os valores da área do círculo, de modo que o limite seja o valor da área do círculo. Na entrevista, o aluno fez uso do *applet*, mas muito dos conhecimentos construídos ocorreram pelas abstrações pseudoempírica e refletida. Ao fazer a variação de n, apresenta noções no processo de estimação, nessas noções de limite, a área do polígono tende para a área do círculo, a altura tende para 1, a base tende para 0, a área do triângulo tende para 0 e a área do polígono é a soma resultante do n triângulos. Até concluir que, ao fazer n tender para infinito, a área do polígono inscrito tende para a área do círculo, o aluno apresentou contradições sobre o limite da área do polígono e o comprimento da altura do triângulo isósceles, mas, ao serem apresentadas novas situações-problema, o aluno iniciou outros processos de construção sobre esses limites.

5.2.4 Aluno M4

Registros Escritos de Respostas – O aluno M4 acredita ser possível estimar a área do círculo a partir de polígonos regulares inscritos, e, para isso: "*Bastaria aumentar o número de triângulos numa tentativa de fazer o apótema do polígono (segmento de reta que une o centro do polígono ao ponto central de um de seus lados) tender ao raio da circunferência"*, observe que, nesse registro de resposta, há uma noção do limite da altura do triângulo ou apótema do polígono que tende para o raio da circunferência e uma noção de infinito no aumento do número de triângulos. Segundo ele: "*[...] para calcular a área da circunferência através de um polígono regular, teríamos que calcular a área de cada um dos triângulos que o formam [...]*", compreendendo que a área do polígono é resultante da soma das áreas dos triângulos, essa é uma noção de limite que está presente na conceituação de integral definida. Conclui expressando em linguagem de limite: "*O limite da área do polígono é igual à área do círculo, quando o apótema do polígono tende ao raio da circunferência*". É perceptível a utilização do conceito de função no processo de conceituação de limite.

Entrevista – O aluno M4 acredita que o aumento do número de triângulos permite estimar a área do círculo com um polígono regular inscrito. Faz variações de n, fazendo-o aumentar. Após observações, afirma que a área do polígono inscrito está próxima de π. Afirma que a área do triângulo está diminuindo, tendendo para zero. Perguntado pela possibilidade de a área ser zero, ele responde que não. Para o aluno, a base tende para zero e a área do polígono tende para π, e justifica: "*Porque estou inscrevendo ele na circunferência. Porque eu quero relacionar o polígono com a circunferência. Colocar ele dentro para completar a circunferência [área do círculo]*". Nesse registro, foram apresentadas noções de limite referentes às áreas dos triângulos e do polígono inscrito, além dos limites da altura e base dos triângulos equiláteros do polígono. Uma noção de infinito é apresentada quando diz que o valor de n aumenta tanto quanto for necessário para que a área do polígono inscrito tenda para a área do círculo.

Resultado: Apresenta uma noção do limite da altura do triângulo ou apótema do polígono que tende para o raio da circunferência e uma noção de infinito quando sugere o aumento do número de triângulos como fator para a área do polígono se aproximar da área do círculo. Compreende que a área do polígono é resultante da soma das áreas dos triângulos. Apresenta uma noção de limite presente na conceituação de integral definida. Utiliza o conceito de função no processo de conceituação de limite. Durante a entrevista, faz variações de n e afirma que a área do polígono inscrito está próxima de π. Para o aluno, a área do triângulo tende para zero, a base tende para zero e a área do polígono tende para π como uma soma das áreas dos triângulos isósceles que o compõe. Apresenta uma noção de infinito quando considera que, para a área do polígono inscrito tender para a área do círculo, n precisa aumentar tanto quanto for necessário.

5.2.5 Aluno M5

Registros Escritos de Respostas – O aluno entende que o processo de estimação da área do círculo por polígonos regulares ocorre por uma soma das áreas dos triângulos isósceles que formam o polígono inscrito, esse processo é caracterizado assim: "*[...] se imaginarmos uma circunferência na área de um círculo, e dentro do círculo um polígono regular e assim os seguimentos de reta que partindo o centro da circunferência e que vão até* *o vértice do polígono regular são os raios do círculo. Assim, formando n triângulos no polígono regular, com base no cálculo da área de um hexágono regular, podemos, então, obter o valor da área do polígono*". Nessa descrição do processo, a aproximação é realizada com 6 triângulos, mas, no mesmo registro, tem-se o entendimento de que a estimação vale para qualquer n, e um $n = 6$ oferece uma aproximação. Não foi possível observar que a conclusão anterior foi realizada com a variação de n, pois o processo de criação do polígono no interior da circunferência sustenta-se nos triângulos formados, nesses triângulos, o raio é o lado isósceles, e, nesse sentido, o aluno não realizou registros sobre a construção de relações entre a variação de n, o comprimento da base, comprimento da altura do triângulo, área do triângulo isósceles e a área do polígono inscrito.

Entrevista – Segundo o aluno, com o aumento de n, criam-se inúmeros triângulos e pontos no interior da circunferência, a base diminui, a altura aumenta, e essas conclusões decorrem de variações sucessivas de n, claramente um processo de construção por abstração pseudoempírica. Para ele, a base não tem um valor limite, mas afirma que pode ser zero, no entanto, quando foi perguntado a ele se a base podia ter comprimento zero, a resposta foi não, o que demonstra a ausência de noções de limite e uma desvinculação das propriedades geométricas de alguns elementos com os seus valores numéricos. A altura tem limite 1, mas, ao ser questionado sobre a hipótese de a altura ter valor 2, ele responde: "*Porque chegou ao limite dela [...] A base não pode ser zero porque a altura fica 1 e a altura não fica um porque a base não fica zero*". Para o aluno, a área do triângulo tem limite e chega a zero, mas, contraditoriamente, a essa resposta, em seguida, ele afirma que a área de um polígono não pode ser zero. Alterando o valor de n e observando a área do polígono que aumenta, o aluno afirma que a área tem limite 3, não podendo apresentar outro valor, diz ele: "*[...] tanto a base quanto a área chegaram ao limite dele. Acho que a área do polígono não tem mais para onde ir*". O aluno não aplicou o conceito de função. Diferentemente do ocorrido no registro escrito, ele estabeleceu algumas relações entre o número de triângulos, a altura, a base, a área dos triângulos isósceles, e a área do polígono com o estudo de limites, mas de maneira superficial e incerta.

Resultado: O aluno apresentou uma noção de limite relacionada à área do polígono inscrito, em que o limite da soma das áreas dos triângulos é o valor da área do círculo. O aluno não realizou registros sobre a construção de relações entre a variação de n, o comprimento da base, comprimento da altura do triângulo, área do triângulo isósceles e a área do polígono inscrito. Durante a entrevista, ele realiza construção de conhecimento por abstração pseudoempírica. Demonstra a ausência de noções de limite e uma desvinculação das propriedades geométricas de elementos relacionados a comprimento e área, com seus respectivos valores numéricos. O aluno não aplicou o conceito de função. Diferentemente do ocorrido no registro escrito, ele estabeleceu algumas relações entre o número de triângulos, a altura, a base, a área dos triângulos isósceles, e a área do polígono com o estudo de limites, mas de maneira superficial e incerta.

5.2.6 Aluno M6

Registros Escritos de Respostas – O aluno M6 registra algumas noções quando explica o processo de estimação da área do círculo: *"[...] quando aumentamos o número de lados do polígono inscrito, observamos que também aumenta o apótema, o perímetro e a área [do polígono]*", e essas são relações de causa e efeito. Uma noção de limite é apresentada quando descreve o processo de estimação por ele construído: "*Para calcular a área de um círculo de raio unitário, é necessário fazer o cálculo de um polígono regular de n lados (no caso, o triângulo) podemos decompor em n triângulos isósceles congruentes, cada um deles com um vértice no centro da circunferência com o polígono inscrito. Pode-se dizer que a área do círculo é o limite das áreas do polígono inscrito*", é possível destacar, ainda, uma noção de infinito no que se refere ao aumento do número de lados ou triângulos para obter uma estimação da área do círculo. O aluno apresentou uma noção de limite relacionando o perímetro do polígono com a circunferência, relacionando-os da seguinte forma: "*A ideia de limites nos permite aproximar o perímetro da circunferência pelo perímetro do polígono regular inscrito nessa circunferência à medida que o número de lados do polígono aumentar".* Essa noção é consequência do aumento do número de lados, o que fundamenta a noção apresentada.

Entrevista – Para o processo de estimação da área do círculo, o aluno M6 afirma que aumentaria o número de triângulos. Em seguida, faz a variação do número de triângulos até 1000. Segundo ele, esse aumento tende para o infinito. Afirma que a altura aumenta e a altura diminui. Mas, após verificar no *applet*, ele afirma que a base diminui e a altura aumenta. Para ele, a base diminuiria "*até infinito*", mas referia-se à quantidade de vezes que poderia dividir o comprimento do lado, mas, posteriormente, após ser questionado sobre a resposta dada, ele elabora outro conhecimento, sobre os lados, ele diz: "*[...] Seria cada vez menor [...]*

Iria ficar pequeno. Ia diminuir cada vez mais [...] Próximo de zero". Para o aluno: "*A altura e a área do polígono tende a aumentar. O círculo permanece. O polígono e a área têm que aumentar*", mas considera que o polígono está inscrito, afirma que a área do polígono não pode exceder a área do círculo, mas, diferentemente do ocorrido no registro escrito, o aluno não conclui sobre o limite da área do polígono.

Resultado: No registro de respostas, foi possível identificar algumas noções: quando explica o processo de estimação da área do círculo, aumentando o número de lados do polígono inscrito, observa o apótema, o perímetro e a área do polígono aumentando. Uma noção de limite é apresentada quando descreve o processo de estimação por meio da soma de triângulos isósceles que compõem o polígono, e, quanto mais triângulos, melhor a aproximação. É possível destacar, ainda, uma noção de infinito no que se refere ao aumento do número de lados ou triângulos para obter uma estimação da área do círculo. O aluno apresentou uma noção de limite relacionando o perímetro do polígono com a circunferência. No decorrer da entrevista, o aluno apresenta algumas noções de limite relacionadas à área e ao perímetro. Afirma que a base diminui e a altura aumenta, mas não conclui sobre os limites. Não conclui também sobre o limite da área do polígono.

5.2.7 Aluno M7

Registros Escritos de Respostas – Para o aluno, é possível estimar a área do círculo a partir de polígonos inscritos, e, segundo ele, é necessário o aumento do número de triângulos na circunferência, o que é uma noção de infinito. Segundo ele: "*[...] isso vai chegar ao ponto que a área do polígono vai ser igual ao raio da circunferência*", o que não faz sentido, pois, ao comentar das relações e efeitos relativos ao aumento do número de n, ele diz: "*[...] a base se modifica logo quando aumentamos a base ela fica menor, e a área fica maior, observei também que, ao aumentar números de polígonos, a área a área do triângulo também diminui e a área dos polígonos aumenta*". Mas é perceptível a dificuldade na elaboração de justificativas para os processos realizados e nomes de elementos geométricos: "*Esses fenômenos mostram um feito de proporções, aumenta o número de triângulos a área da circunferência e do polígono*". No registro, o aluno quis estabelecer uma relação entre o número de triângulos e a área do polígono, há um erro conceitual, a circunferência não altera no *applet* e não tem área.

Essa relação foi melhor estabelecida, e ele na sequência diz: "*[...] quando aumentamos o número de polígonos em uma circunferência, chegará a um momento em que a área vai ser igual ao limite de π que é igual a 3.14, daí podemos relacionar com a área de circunferência [círculo]. Como também a área do polígono tende a ficar 3.14*". Essa noção de limite é caracterizada pelo aumento de n, aumento do número de triângulos ou lados no polígono inscrito, e a consequência é a convergência da área do polígono inscrito para o valor da área do círculo de raio unitário.

Entrevista – O aluno acredita ser possível a estimação da área do círculo por meio de polígonos regulares e, para tanto, ele aumenta o número de lados. Segundo ele, "*é para ficar menor*", e justifica: "*Para ser [área do polígono] igual à circunferência [círculo]*". Aumenta e diminui o valor de n até apresentar noções de limite e conclui que a altura do triângulo isósceles tende para 1 e a área desse triângulo fica muito pequena. Perguntado se é um problema a área do triângulo ser pequena, ele responde: "*Não, a tendência é ficar pequena para ter a área igual à circunferência [círculo]*", e ele faria isso "*Até o triângulo não existir mais*", complementa ele sem justificar essa declaração. Afirma que a base diminui até 0,00655. Esse número é visto no *applet* considerando um $n = 1000$, mas, considerando valores cada vez maiores, ele afirma sobre a base: "*Ia ser um número tão pequeno que iria tender a zero*". Acredita que pode ser zero, mas, quando foi perguntado a ele se é possível obter um triângulo com dois lados com medidas equivalentes ao raio e uma base zero, então ele reconsidera, e declara: *"[a base] É um número próximo de zero*", e justifica dizendo: "*Se não tiver base, não existe triângulo*". Percebe-se que esse processo de construção ocorre por abstrações pseudoempíricas, e, em seguida, levando a abstrações refletidas. No entanto, ele não soube organizar esse conhecimento e expressar em linguagem matemática de limite, e essa formalização demonstraria que houve um processo de construção e apropriação de conhecimento por ele. Quanto à altura, ele afirma que tende ao número 1. Questionado se podia ser o valor 1, ele diz que sim. Colocando-o diante de uma nova situação-problema em que um triângulo isósceles teria a altura e os lados isósceles com a mesma medida, ele não analisou o significado desse fato e, acreditando ser possível a altura ter o valor 1, afirmou que seria possível: "*Se eu aumentasse o número de triângulos*". Após pausa, ele afirma, em seguida: "*Tende a 1. Porque, quando aumentar o número de triângulos, ela vai chegar à base*", dando a entender que a altura tende a se aproximar de um ponto na circunferência. Utiliza o *applet*, aumenta e diminui o valor de n várias vezes e conclui que: "*[a área do triângulo] Diminui. Tende a zero, mas não chega a zero*", e justifica sua declaração dizendo: "*Porque se não o* *polígono não vai existir*", diferentemente do que havia dito anteriormente sobre a área nula de um triângulo. Conclui também que o polígono "*[...] vai aumentar. O limite dessa área, desse polígono, é 3,14*".

Resultado: O aluno compreende a estimação como um limite, para ele, o limite da área do polígono inscrito é a área do círculo à medida que o valor de n é aumentado. Apresenta certa dificuldade na identificação de termos e propriedades geométricas. No registro, o aluno estabelece uma relação entre o número de triângulos e a área do polígono, essa também é uma noção de limite. Apresenta noções de infinito, limite da base, da altura e área de cada triângulo. Na entrevista, afirma que o limite da área do polígono inscrito tende para a área do círculo, o limite da altura tende para 1, o limite da base tende para zero, e o limite da área de cada triângulo tende para zero. Essas noções de limite foram construídas após a apresentação de novas situações-problema, necessárias mediante respostas conflitantes.

5.2.8 Aluno M8

Registros Escritos de Respostas – O aluno acredita que é possível estimar a área do círculo a partir de um polígono regular inscrito pela alteração do valor de n, disse ele: "*[...] quando aumentamos a quantidade de triângulos inscritos nos aproximamos da área do mesmo [círculo]*". Relara noções de limite de alguns elementos do triângulo isósceles quando diz: "*[...] com o aumento do número de polígonos, diminui-se a base tendendo a zero e aumenta a altura tendendo a 1*". Como efeito da variação de n, apresenta uma noção de limite da área do polígono quando diz: "*[...] com o aumento de triângulos, a função tenderá à área do círculo chegando ao valor bem próximo [...] chegando próximo ao valor de π que é 3,14*", o valor aproximado da área do círculo com raio unitário.

Entrevista – Acredita que, amentando a quantidade de triângulos, é possível estimar a área do círculo pelo polígono inscrito, como efeito da variação de n, ele justifica: "*Ele vai diminuindo a base, porém a altura continua a mesma porque, à medida que a gente vai [aumentando n], chega até 1*". Questionado sobre o fato da altura não ser alterada, ele faz a variação de n e afirma que altera e tende para 1, e justifica: "*Porque é o raio unitário, tá tendendo para o raio unitário [...] fica bem próximo*". Após alterar o valor de n, afirma que a base tende para zero, e justifica: "*É mesma questão do limite, vai chegar próximo bem próximo, mas não será o a*", referindo-se à definição formal de limite. Afirma que a área do polígono tende para π, e descreve o cálculo assim: "*Acho que poderia calcular, tem uma fórmula que não lembro muito bem, mas tem a base do triângulo pela altura e, depois, divide por dois [faz referência à fórmula do cálculo da área de um triângulo por seus lados]. Aí poderia calcular de acordo com a quantidade de triângulos inscritos na circunferência, aí chegaríamos à área do polígono aproximadamente*", concebe a ideia que a área é resultante da soma das áreas dos triângulos isósceles. Sobre o limite da área do polígono, foi perguntado a ele se a área do polígono é π quando n tende para zero, imediatamente, ele responde que n tende para infinito, e isso demonstra que, na noção de limite apresentada, ele compreende as relações de implicação na área do polígono inscrito quando n aumenta.

Resultado: Relata noções de limite de alguns elementos do triângulo isósceles. Como efeito da variação de n, apresenta uma noção de limite da área do polígono com o valor aproximado da área do círculo igual a π. Para ele, com a variação de n, a base diminui, tende para zero, a altura aumenta, a área do polígono tende para π quando os infinitos triângulos têm sua área minimizada. Todas essas noções foram construídas e apresentadas utilizando o recurso da variação do *n* no *applet*. Foi necessário introduzir novas situações-problema para *s* construções que ainda não se apresentavam coerentes.

5.2.9 Aluno M9

Registros Escritos de Respostas – O aluno não apresentou noções de limite. Apresenta a ideia de que, quanto maior a área do polígono inscrito na circunferência, mais próxima está da área do círculo, mas não explica ou demonstra como esse processo ocorre, e que fatores o influenciam.

Entrevista – Para estimar a área do círculo, o aluno declara que é preciso aumentar a área do polígono para aproximá-la da área do círculo. Claramente, tem dificuldades com conhecimentos dos elementos de geometria plana contidos na situação-problema, o que dificulta o processo de assimilação pelo aluno. Sobre o aumento da área, ele diz: "*Aumenta o número de lados, o raio permanece o mesmo e aumenta o apótema*", o que configura uma relação de causa e efeito, mas não configura uma noção de limite, apenas descreve um comportamento do apótema após a alteração de parâmetros no *applet*. Inicialmente, não reconhece um limite até obter uma estimativa satisfatória, mas iniciando com um $n = 6$ e, em seguida, com variações maiores, conclui: "*Acho que, quanto maior o número de lados, melhor será a aproximação. Quanto maior o número de lados, maior o triângulo [polígono], mais triângulos*". Até aqui, há registros apenas de relações de causa e efeito relativos à variação do valor de n. Com alterações sucessivas do valor de n, ele constata, visualmente, que o polígono tem um aspecto cada vez mais circular, e, segundo ele: "*Vai fechando a figura*", referindo-se à diferença entre as áreas do polígono e do círculo. A base diminui até zero, mas, questionado sobre essa afirmação, ele recorre para o *applet* e visualiza os valores que a base assume, e conclui: "*Eu achava que podia. Aqui já passa de 0.0001. Já estou mudando a minha opinião, zero não. [...] Tende a zero, só se aproxima. Tem números próximos*". Essa é uma noção de limite, o limite da base. A condição para que ocorra o fato relatado é aumentar n, e complementa sobre o limite da área do polígono: "*E a área do polígono tende à área da circunferência [círculo]*". Para o aluno, a base tende a diminuir, e, para ele: "*Zero não é. Para infinitos números. Para números muito pequenos*", mas, depois, afirma que chega a zero, mas não soube explicar. Após variar n e observar o valor de h, afirma que a altura aumenta, mas afirma também que sem limite. Questionado se a altura poderia ser 2, ele responde: "Neste caso, nesta circunferência, não". A princípio, cogita a possibilidade do valor da base se aproximar da altura, mas, em seguida, após variar n e observar os valores numéricos na tela, conclui que uma aumenta e a outra diminui. Para ele, a altura tende a ter o valor do raio. Tentando explicar, pela teoria de limites, como ocorre a aproximação entre as áreas do polígono inscrito e o círculo, reconhece que a área de cada triângulo e, consequentemente, do polígono está variando em função da base e da altura. Para ele, a área do triângulo tende para zero, a altura tende para um e a base tende para zero. Para ele, o limite da área do polígono é 3, mas, em seguida, declara: "*[...] está crescendo, infinito, não tem limite [acreditando não saber precisar o valor]*". Mas, perguntado se a área poderia chegar ao valor 4, ele responde: "*Não pode ser. Seria maior que a área do círculo, e isso não pode*". Não consegue dizer o limite da área do polígono inscrito, mas afirma: "*É a área do círculo. É limitada pelo espaço*".

Resultado: O aluno não apresentou noções de limite no registro escrito de resposta. Durante a entrevista, assim como no registro escrito de respostas, ficou explícita a intenção de estimar a área do círculo, aumentando a área do polígono inscrito. Apesar de dificuldade com fundamentos da geometria e contradições apresentadas, foi possível observar noções de limite relacionadas à base que tende para zero, à altura que tende para o valor do raio, à área do triângulo que tende para zero, para ele, o limite da área do polígono é um número maior que três e menor que 4, no entanto, diz que o limite da área do polígono inscrito é a área do círculo e que está limitada pelo espaço. O aluno fez uso diversas vezes do *applet* variando n e observando os valores numéricos contidos na tela, recorrendo a eles sempre que as dúvidas ocorriam ou era contradito. Percebe-se um distanciamento muito grande entre as respostas dadas no registro escrito e durante a entrevista. A entrevista caracterizou um processo de construção de conhecimento, com estruturas sendo formadas e requisitadas, ficou latente a dificuldade na assimilação das situações-problema, fato este que reforça a hipótese de que o aluno estava em processo de construção do conhecimento.

5.2.10 Aluno M10

Registros Escritos de Respostas – O aluno compreende o mecanismo de aproximação entre as áreas do polígono inscrito e a área do círculo, apresentando uma noção de limite: "*[...] quando aumentamos o número de triângulos contidos no polígono, chegamos a um limite imposto pela circunferência do círculo*". Apresenta o cálculo da área do triângulo e o processo de estimação pelo produto do número de triângulos, descrito assim: *"[...] sendo assim, quando multiplicamos a base do triângulo pela altura do triângulo e dividimos por 2, obteremos a área do triângulo, depois, multiplicamos o resultado pelo número de triângulos e, enfim, chegaremos à área aproximada do polígono*", matematicamente, diz que a área do polígono pode ser calculada por n vezes a área do triângulo e complementa: "*É importante lembrar que, para conseguirmos a área do polígono inscrito na circunferência, temos que obter o número máximo de triângulos de uma forma bem aproximada a obter a área do círculo*". O aluno demonstra compreender o processo de estimação e as mudanças nos elementos, decorrentes da variação de n: "*Quando aumentamos o número de triângulos, a área de T_i decresce, enquanto a área do polígono tem uma crescente proporcional [cresce proporcionalmente] ao número de triângulos que tende a se assemelhar com o círculo, consequentemente se aproximando ao número pi (3,14157)*", apresentando, assim, uma noção de limite da área do polígono que tende para a área do círculo de raio unitário. Outra noção de limite ele descreve assim: "*Outra observação interessante é que, quando aumentamos o* *número de triângulos do polígono contidos na circunferência a altura $h_{T_i,}$ se aproxima do número 1*". O aluno tenta descrever o processo em linguagem matemática, tanto formalizar o que ocorre com a área do polígono à medida que o número de triângulos aumenta, descreve assim: "*Pela definição formal, temos limites $x \to a$, $f(x) = L$, em que podemos dizer que a $f(x)$ é a quantidade de triângulos compreendidos entre o primeiro triângulo ao milésimo triângulo dentro da circunferência. A pode ser qualquer ponto no eixo x que se corresponde a L no eixo y levando em consideração o Épsilon e o Delta, fazendo aproximações pela direita e pela esquerda do ponto*". Nessa descrição, o aluno faz uma relação do processo com elementos da definição, o que demonstra a intenção do aluno em relacionar o conhecimento tratado no *applet* com a definição formal de limite. Sobre esse processo, tem-se uma noção de limite descrita assim: "*Podemos dizer que a circunferência é o limite da área do polígono, polígono este que é preenchido com a quantidade de triângulos que também dão uma ideia de limites ao alcançar uma quantidade exata de triângulos*", nessa descrição, a noção de limite da área do polígono está relacionada à diferença entre as áreas que tende para zero, mas considera que n tem limite no processo de estimação, ou seja, como disse que cresce, então, não está explícito que tende para infinito, atende apenas ao processo de estimação. Novamente, o aluno tenta relacionar elementos da teoria de limites com o processo de estimação: "*Um detalhe que também pode ser citado no limite referente ao círculo e ao polígono é que, se pegarmos um valor estimado em 100 triângulos, notaremos que, se fizermos aproximações pela esquerda e pela direita, podemos observar que os valores da base, área e altura dos triângulos se alteram proporcionalmente*", dessa vez, introduzindo a condição de existência do limite no processo de estimação elaborado por ele. Note que, nesse registro, o aluno demonstra compreender a relação de causa e efeito relativa ao valor de n e aos elementos geométricos presentes no processo de estimação; e complementa com outras noções de limite: "*[...] levando em consideração a altura do triângulo que vai tender a 1 u.c e a área do polígono que tende ao número pi (3,14)*", essas noções são descritas por ele como efeitos do aumento de n, do número de triângulos.

Entrevista – O aluno M10 inicia o processo de estimação alterando o valor de n, observa, no *applet*, os valores da altura, da base, e áreas do triângulo e do polígono, descreve o processo da seguinte forma: "*[...] como o raio é unitário [...] para aproximar essa área, é necessário que eu aumente o número de triângulos. Quando eu aumentar essa base vai diminuir, a altura vai aumentar, mas ela tem um limite aqui*", o limite a que ele se refere é o raio da circunferência, "*Num determinado número de triângulos, a altura vai chegar a 1. Para aproximar, eu preciso que aumente ao máximo o número de triângulos [...] A base está* *diminuindo*". Assim como no registro escrito, o aluno cita um número máximo para o valor de n, e essa ideia permanece até ao final da entrevista. Afirma que o limite da base é 0,006 e que o valor diminuiria se o raio fosse maior, mas, após alterar o valor de n, ele afirma que se aproxima de zero. A noção de limite da altura é apresentada assim: "*Tendendo para 1 e tendendo para o raio*", afirma que pode ser o raio, o que permitiu confrontar com a seguinte situação-problema: "*Eu posso ter os lados isósceles do triângulo iguais à altura?*", reponde que não é exatamente 1. O aluno estabelece uma relação entre as áreas do triângulo e do polígono regular: "*A área do triângulo diminui e a área do polígono aumenta*", essa relação inversa é resultante do aumento do valor de n, explicado, assim, por ele: "*É porque a soma desses triangulozinhos pegando a base e multiplicando pela altura dividindo por 2 eu vou ter essa área do triângulo. Significa que, se eu pegar a área desse triângulo e multiplicar pela quantidade de números, eu vou ter a área do polígono e, como o polígono é unitário [a circunferência tem raio unitário], essa área está tendendo para pi*". O aluno não compreende a área com uma função por seus lados, afirma: "*A área está em função do número de lados*". Para ele, a área tende para π quando n tende para 1000, e, caso fosse maior, a área do polígono seria maior que π.

Resultado: O aluno compreende o mecanismo de aproximação entre as áreas do polígono inscrito e a área do círculo, apresentando uma noção de limite. Descreve o cálculo da área do triângulo e o processo de estimação pelo produto do número de triângulos, para ele, esse produto é a estimativa da área. O aluno demonstra compreender o processo de estimação e as mudanças nos elementos, todas decorrentes da variação de n. Acredita que a área do polígono tende para π, e a altura tende para 1. O aluno tenta formalizar o processo de estimação diversas vezes, afirma que a área do polígono é limitada pela circunferência. A noção de limite da área do polígono está relacionada à diferença entre as áreas que tende para zero considera que n tem limite no processo de estimação. Da mesma forma que no registro escrito o aluno inicia o processo de estimação alterando o valor de n, observa no *applet* os valores da altura, da base, e áreas do triângulo e do polígono, descreve o processo de estimação com diversas noções de limite, limite da área do polígono, limite da base, da altura e área do triângulo. Algumas noções de limite, como da altura e base, foram apresentadas de forma divergente de seus significados geométricos, o que permitiu a introdução de novas situações-problema, e assim outros processos de construção que conduziram a outras noções de limite. Assim como no registro escrito, o aluno entende que o valor de n aumenta, mas há um valor limite, necessário à estimação e a área é entendida como o produto de n vezes a área do triângulo isósceles que compõe o polígono.

5.2.11 Aluno M11

Registros Escritos de Respostas – O aluno apresenta uma relação de causa e efeito quando o diz: "*Aumentando-se o número de lados do polígono, maior será a área ocupada no círculo*", essa é uma noção do limite da área do polígono, que a área do círculo é preenchida pelo polígono à medida que n aumente; justifica: "*quanto maior o número de triângulos, as bases ficam menores e maior será a área ocupada pelo polígono [...] quando aumentamos os números de triângulos do polígono, a tendência é que fiquemos bem próximos da área total do círculo*". O aluno descreve os efeitos do aumento de n em relação ao polígono inscrito na circunferência, mas não especifica se n tende para o infinito ou não, diz apenas que aumenta.

Entrevista – O aluno acredita que é possível estimar a área do círculo a partir de um polígono regular inscrito. Aumenta o valor de n e conclui que a base diminui. Inicialmente, para ele, a altura não é modifica, mas, questionado sobre essa afirmação, o aluno aumenta e diminui o valor de n e observa os valores, concluindo que a base diminui e a altura aumenta. Após aumentar n até 1000, afirma que, se n for maior que 1000, a base vai se aproximar de zero, mas não pode ser zero. Aumenta n até 1000 e conclui que a altura tende para 1. Foi perguntado a ele: caso n fosse maior que 1000, a altura seria maior que 1? Ele afirma que sim, mas, ao ser informado que o raio da circunferência tem comprimento unitário, ele diz que não pode ser maior que 1, mas não sabe justificar. Não soube responder se a altura podia ser 1. Após, se mostra com dúvidas, foi feita uma revisão das questões abordadas, e ele conclui: "*Se aumentar, n diminui a área do triângulo e diminui a área branca",* que é a área a ser preenchida, é a diferença delimitada entre a base de cada triângulo e a circunferência. É uma noção de limite da área do polígono quando a base do triângulo diminui, tendendo para zero.

Resultado: O aluno apresenta uma noção do limite da área do polígono à medida que n aumenta. O aluno descreve os efeitos do aumento de n em relação ao polígono inscrito na circunferência, mas não especifica se n tende para o infinito ou não, diz apenas que aumenta. Na entrevista, se verifica o mesmo. Aumenta o valor de n e conclui que a base diminui.

Apresenta noções de limite para a altura e para a base. Para ele, a base vai se aproximar de zero, mas não pode ser zero. Conclui que a altura tende para 1. Não soube responder se a altura podia ser 1. Apresentou muitas dúvidas e recorreu ao *applet* sempre que foi contradito. Apresenta uma noção de limite quando diz que a área do polígono tende a preencher a área do círculo quando a base do triângulo tende para zero.

5.2.12 Aluno M12

Registros Escritos de Respostas – O aluno acredita ser possível estimar a área do círculo por meio da equação que representa o produto dos n triângulos idênticos que formam o polígono. Afirma que, quando modifica o valor de n, outro polígono é gerado, e isso caracteriza que, à medida que n aumenta, se tem uma série de polígonos regulares inscritos na circunferência. Tem-se, nesse registro, uma noção de limite da sequência de áreas. Como consequência, há, também, uma série do valor das áreas em que o enésimo elemento da série é um valor muito próximo da área do círculo. O aluno conclui se expressando em linguagem matemática o limite da área do polígono inscrito: "*Se o número de lados do polígono inscrito aumentar consideravelmente, a equação oferece uma boa estimativa para a área do círculo no qual o polígono está inscrito. Utilizando a definição formal de limite de uma sequência, podemos escrever o seguinte. Dizemos que o limite de $A(P_n)$ quando n tende a infinito é igual $A(C)$".* Essa é uma noção de limite da área do polígono inscrito na circunferência de raio unitário.

Entrevista – Para o aluno, o aumento do número de lados do polígono implica na aproximação do valor da área do polígono regular para a área do círculo. Ele altera o valor de n, conclui que a base e a altura diminuem. Foi perguntado como isso seria possível. Essa pergunta fez com que ele aumentasse e diminuísse o valor de n e concluísse que a altura aumenta, e justifica: "*Aumenta na mesma proporção que aumenta o número de lados do polígono*". Foi perguntado até quanto a base diminui, aumentando o valor de n, ele responde que até mais infinito; referindo-se à possibilidade de divisão do lado em partes cada vez menores. Quando questionado sobre essa afirmação, ele responde: "*É zero. Diminui o tamanho de lado tendendo a zero*", referindo-se à base do triângulo isósceles como lado do polígono. O aluno aumenta o valor de n e afirma que a base tende para zero, enquanto a altura ele não tem certeza se tem limite ou não; logo em seguida, diz que é infinito. Questionado sobre a resposta dada, ele retorna a utilizar o *applet* observa os valores, diz ele: "*Ela vai continuar a mesma [...] Não, é o raio que continua o mesmo. Se diminuir a distância entre os dois vértices, a altura diminui? [...] Não, ela [altura] não diminui [...] A altura aumenta*". Nessa fala, ele não estabeleceu a existência do limite da altura. Foi perguntado se a altura poderia ter valores 2, 3, 4, ou outros, ele responde: "*Não. O raio sempre vai ser um. Eu estou na dúvida é que se diminui o espaço entre um ponto e outro, [...] O raio sempre vai ser o mesmo, a altura é a distância entre o ponto [ponto médio do segmento da base do triângulo isósceles] e a origem [...]*", contradizendo a fala anterior que afirmava que a altura variava. Demonstrando dúvida, ele afirma que é 1 porque viu na tela do *applet* e explica: "*Também [viu na tela do applet], mas eu quase que entendi. Quanto mais aumenta o número de lados, ela [altura] se aproxima de 1. Porque o espaço entre um ponto e outro diminui a um nada tende para zero*", referindo-se à área entre o lado do polígono e a circunferência. Ainda com dúvida, afirma que a altura pode ser 1 (um), mas, quando foi questionado sobre a consequência da altura ter o valor do raio, ele afirma: "*Seria uma reta [segmento]*". Essa afirmação mostra que ele associou conceitos geométricos aos valores estabelecidos no *applet*. Prova disso é que, em seguida, ele apresenta uma noção de limite ao afirmar que a área do triângulo diminui até próximo de zero, e, segundo ele, isso ocorre quando os lados do polígono inscrito tendem para zero. Questionado sobre a resposta dada, ele afirma: "*Quando n tender ao infinito*", agora de forma correta. Do ponto de vista da área com uma função, afirmar que a área do triângulo isósceles diminui quando o lado do polígono diminui, não é errado, pois o lado do polígono é a base do triângulo. Mas, na relação de causa e efeito estabelecida no *applet*, sempre que aumenta o valor de n, automaticamente, o lado diminui e a área do polígono inscrito aumenta, tendendo para a área do círculo, pois, por hipótese, o polígono está inscrito na circunferência que delimita o círculo. Isso é o que ele conclui com a seguinte fala: "*A área do polígono tende a pi [...] Quando n tende para o infinito*", o que configura uma noção do limite da área do polígono inscrito na circunferência de raio unitário.

Resultado: Acredita ser possível estimar a área do círculo por meio do produto dos n triângulos idênticos que formam o polígono. Caracteriza uma série de áreas que convergem para a área do círculo quando n é variado, essa é uma noção do limite de uma sequência de áreas que converge para π. Apresenta uma noção de limite da área do polígono inscrito quando afirma que sua área tende para a área do círculo quando n aumenta consideravelmente, no final da entrevista, já apresenta essa mesma noção com o n tendendo para infinito. Para ele, o aumento do número de lados do polígono implica na aproximação do valor da área do polígono regular para a área do círculo, o que reforça ainda mais a noção já apresentada. As alterações do valor de n ocorreram com frequência sempre que foi colada uma informação contrária à resposta dada ou quando o aluno era colocado diante de uma nova situação-problema. Conclui que a base diminui enquanto a altura aumenta. Apresenta a noção de limite com a base tendendo para zero. Apresenta a noção de limite que a altura tende para 1. Apresenta uma noção de limite ao afirmar que a área do triângulo diminui até próximo de zero, e, segundo ele, isso ocorre quando os lados do polígono inscrito tendem para zero quando n tende para o infinito, apresentando também a noção de infinito.

5.2.13 Aluno M13

Registros Escritos de Respostas – O aluno M13 apresenta o seguinte relato sobre o processo de aproximação entre as áreas do polígono inscrito e o círculo: *"[...] o cálculo da área do círculo se dá à medida que o número de lados da região poligonal inscrita aumenta, as áreas dessas regiões se aproximam da área do círculo. Este também é um processo através de limites*". Nota-se que o aluno não utiliza a decomposição do polígono em triângulos isósceles para descrever o processo de estimação, faz referência a um único polígono, nele, a variação de n incide diretamente nos lados que compõem seu perímetro, nota-se, também, que essa é uma noção de limite da área do polígono inscrito. Sobre o processo de estimação da área, ele apresenta o método: "*A ideia é tomar um número n bastante grande para que cada segmento seja pequeno e as medidas dos arcos sejam, aproximadamente, iguais às medidas dos segmentos. São dados por arcos e linhas muito pequenas e muito próximas a uma circunferência completa que é de $2\pi r$*". Nesse registro, a aproximação entre as áreas ocorre por equivalência entre o perímetro do polígono inscrito e a circunferência. Essa aproximação ocorre quando os arcos e as bases tendem a diminuir e a ter o mesmo comprimento à medida n aumenta. Observa-se, nesse registro, uma noção de convergência dos valores dos arcos e dos lados para um limite. Apresenta uma noção de limite ao concluir que, com o aumento de n, a área do polígono terá um valor cada vez mais próximo da área do círculo, segundo ele: "*muito próximo a um número, sem nunca ser preciso chegar a ele mesmo*". Claramente, essa explicação remete à definição formal de limite.

Entrevista – O aluno M13 afirma que é possível estimar a área do círculo pelo polígono inscrito aumentando o valor de n. Para exemplificar, ele aumenta o valor de n e apresenta uma noção de limite relativa à área do polígono: "*A área do polígono é praticamente pi, 3,14, então, quanto maior o número de lados, vai chegando ao valor da área do polígono que é pi*.". Para ele, a área do triângulo se aproxima de zero à medida que n aumenta, ao ser questionado se pode ser zero o valor limite, ele responde: "*Não, pode ser um número muito pequeno*". Essa é uma noção de limite que foi elaborada adequadamente com fundamentos na definição formal de limite. Aumenta e diminui o valor de n e apresenta noções claras de limite quando afirma que a base do triângulo tende a diminuir para um número muito próximo de zero, mas não soube explicar por que a altura tende para 1. Na expectativa de obter respostas sobre essa questão, foram repassadas com o aluno as falas e respostas anteriores, e, mesmo assim, não soube explicar. Ele apresenta uma noção de limite da área do polígono relacionando a base e a altura de cada triângulo isósceles: "*[a área] Vai se aproximar de pi, quando a base se aproximar de zero, a altura se aproximar de 1*". Para o aluno, quando n tende para o infinito, a área do polígono tende a se aproximar de π, mas não vai ser π. Conclui que esse processo de estimação só é possível se puder aumentar o valor de n.

Resultado: O aluno não utiliza a decomposição do polígono em triângulos isósceles para descrever o processo de estimação, faz referência a um único polígono, nele, a variação de n incide diretamente nos lados que compõem seu perímetro, nota-se, também, que essa é uma noção de limite da área do polígono inscrito. A aproximação entre as áreas ocorre quando os arcos e as bases tendem a diminuir e a ter o mesmo comprimento à medida n aumenta. Esse relato esteve presente tanto no registro de resposta quanto durante a entrevista. Há uma noção de convergência dos valores dos arcos e dos lados para um limite. Apresenta uma noção de limite ao concluir que, com o aumento de n, a área do polígono terá um valor cada vez mais próximo da área do círculo, explicita a noção com elementos da definição formal de limite. Na entrevista, ele afirma que é possível estimar a área do círculo pelo polígono inscrito aumentando o valor de n. Recorre a essa ação para concluir sobre as situações-problema colocadas. Para ele, a área do triângulo se aproxima de zero à medida que n aumenta. Essa noção de limite foi elaborada adequadamente com fundamentos na definição formal de limite. Apresenta noções de limite quando afirma que a base do triângulo tende a diminuir para um número muito próximo de zero, mas não soube explicar porque a altura tende para 1. Ele apresenta uma noção de limite da área do polígono relacionando a base e a altura de cada triângulo isósceles, no entanto, não explicitou a relação entre o polígono inscrito e os triângulos isósceles. Para o aluno, quando n tende para o infinito, a área do polígono tende a se aproximar de π, mas não vai ser π.

5.2.14 Aluno M14

Registros Escritos de Respostas – O aluno M14 inicia o registro descrevendo noções de limite decorrentes da variação de n quando ele é aumentado: "*Quando aumenta o número de lados do polígono inscrito, observamos que também aumenta: o apótema, aproximando-se do raio do círculo como um limite; o perímetro, aproximando-se da circunferência do círculo como um limite; e a área, aproximando-se da área do círculo como um limite*". Este aluno apresenta uma noção de limite em que o perímetro tende a ter o comprimento da circunferência quando n cresce, diz ele: "*A ideia de limite nos permite aproximar o perímetro da circunferência pelo perímetro do polígono regular inscrito nessa circunferência, à medida que o número de lados do polígono aumenta*". Essa noção está presente nos registros do aluno M13. Conclui afirmando que a área do polígono inscrito tende para a área do círculo "*à medida que o número de lados da região poligonal inscrita aumenta*", descreve esse processo como um limite. Um limite que é a área máxima que pode ser preenchida pelo polígono no interior da circunferência. Corroborando com a noção de limite apresentada, ele afirma não ser possível obter o valor exato da área, apenas um valor muito próximo. Utilizando a noção de limite, o aluno realiza um processo de construção por abstração refletida ao afirmar: "*[a base] ficará tão próxima de zero que teremos a impressão de termos na figura um seguimento de reta*", nessa descrição, a altura tende a ter o mesmo comprimento dos lados do triângulo isósceles quando a base tende para zero.

Entrevista – Quando varia o valor de n, o aluno compreende que aumentando a quantidade de lados do polígono é possível estimar a área do círculo. Afirma que, no triângulo isósceles, enquanto a base diminui, a altura do triângulo aumenta e a área do triângulo diminui. Ao determinar o limite da base do triângulo, o aluno não demonstrou ter certeza quanto ao limite, pois confundiu o limite da base com a possibilidade de sua diminuição que poderiam ser tão pequenas quanto possível de acordo com a variação de n, configurando, então, nessa fala, uma noção de infinito. Afirmou que a base podia ser zero, questionado sobre essa afirmação, não soube responder como seria possível o triângulo ter um de seus lados com medida zero. O aluno aumenta e diminui o valor de n. E, observando os valores na tela do *applet*, afirma que a altura vai aumentar até 1, atribuindo como significado a esse valor o raio da circunferência. Aponta como consequência também que a área do triângulo isósceles está diminuindo, segundo ele, até 0,00314 para um $n = 1000$, mas, conforme ele, se n fosse maior que 1000, essa área iria para zero. Por fim, afirma que a área do polígono inscrito está aumentando. O aluno utiliza, com frequência, os recursos do *applet* para construir seus conhecimentos. Fica evidente que o aluno desvinculou os conceitos geométricos dos valores tidos como limites da altura, da base e da área do triângulo isósceles.

Resultado: O aluno M14 inicia o registro descrevendo uma noção de limite de área decorrente da variação de n. Apresenta uma noção de limite com o perímetro tendendo para a circunferência quando n cresce. Conclui afirmando que a área do polígono inscrito tende para a área do círculo, pois vai preenchendo e diminuindo a diferença, o polígono vai ocupando a área do círculo. A noção de limite apresentada ele afirma não ser possível obter o valor exato da área, apenas um valor muito próximo. Utilizando a noção de limite, o aluno realiza um processo de construção por abstração refletida em que a altura tende a ter o mesmo comprimento dos lados do triângulo isósceles quando a base tende para zero. Assim como no registro escrito, o aluno compreende que, aumentando a quantidade de lados do polígono, é possível estimar a área do círculo. Afirma que, no triângulo isósceles, enquanto a base diminui, a altura do triângulo aumenta e a área do triângulo diminui. O aluno não demonstrou ter certeza quanto ao limite, confundindo infinito e ínfimo nos infinitos lados cada vez menores. Afirmou que a base podia ser zero. Para ele, a altura vai aumentar até 1, a área do triângulo isósceles está tendendo para zero. O aluno não considerou os conceitos geométricos dos valores tidos como limites da altura, da base e da área do triângulo isósceles.

5.2.15 Aluno M15

Registros Escritos de Respostas – O aluno M15 apresentou um registro compacto do processo de aproximação reconhecido por ele. De modo geral: "*[...] quanto mais aumenta o número de triângulos, ele [o polígono inscrito] vai se igualar à área do círculo*", sendo essa noção de limite que ele apresenta, no entanto, omite ou desconhece os processos que decorrem da variação de n. Apresenta a mesma noção de limite da área do polígono inscrito quando diz:

“*O polígono regular inscrito à circunferência é formado por* n *triângulos, cuja área de cada um deles é dada pela equação (i). Se o número de lados do polígono inscrito aumentar consideravelmente, a equação (i) oferece uma boa estimativa para a área do círculo no qual o polígono está inscrito*”. Nesse registro, ele estrutura um modo e linguagem na matemática que condiciona a estimação da área do círculo pelo polígono inscrito. É possível também retirar desse registro uma ideia não explícita de soma quando diz “[...] *cuja área de cada um deles é dada pela equação (i)*”, nesse trecho, a soma das áreas é que será a estimativa, pois, conforme ele declara anteriormente, a área do polígono é formada pela área dos n triângulos. Tem-se, nesse registro, uma noção de infinito.

Entrevista – O aluno afirma ser possível estimar a área do círculo com o aumento de n no polígono inscrito. Mostra-se confuso sobre a dinâmica do *applet* e termos geométricos, trocando seus nomes. Inicialmente, fez variações no valor de *n* e concluiu que $n = 13$ oferecia uma boa estimativa da área do círculo, mas, questionado porque não $n = 14$, afirmou ser infinito o valor de n. Questionado sobre essa afirmação, respondeu que não era infinito o valor de n. Foi perguntado a ele se $n = 100$ oferecia uma boa estimativa, ele afirmou que sim, mas podia ser 200, 360, que, segundo ele, era o total, fazendo referência à totalidade de graus na circunferência. Mas, ao colocar $n = 400$, observou que o polígono ainda se aproximava, segundo ele, “cabia”. Foi perguntado se caberia colocar um $n = 10.000$, sem alterar n, respondeu que sim e destacou que a área do triângulo T_i diminuía, apontando para a tela de valores da área de T_i. O aluno se valeu do *applet* para realizar processos de abstrações pseudoempíricas, até operar por abstração refletida. Afirmou que a base tende para mais infinito, confundindo infinito com partes tão pequenas quanto se queira, as partes cada vez menores que a base do triângulo ou lado do polígono assumem quando n aumenta. Em seguida, afirma que a área do polígono aumenta quando n aumenta, mas não limitou a área, já que o polígono está inscrito. Ao variar o valor de n, conclui: “*A base diminui quando aumenta [valor de n], e a altura aumenta*”, mostrando que compreende a relação de causa e efeito no processo contido no *applet*. Afirmou que a base não tem limite, mas não pode ser medida negativa nem maior que 1. Após alterar o valor de n, diz que a base se aproxima de 1, depois de certo tempo, afirma que, na verdade, o valor da base diminui, mas não tem limite. Para ele, a altura não ultrapassaria a circunferência e o limite da altura é o raio da circunferência. Claramente, ocorre um processo de abstração refletida a partir de processos de abstração pseudoempírica. Por fim, declarou que não sabia como explicar, mas sentia que sabia como o processo contido no *applet* resultava na aproximação da área do polígono inscrito na área do círculo. Assim como no registro escrito, o aluno demonstrou incertezas, e dificuldades com conceitos geométricos, mas demostrou também que está em processo de desenvolvimento.

Resultado: Apresenta uma noção de limite da área do polígono inscrito. No entanto, omite ou desconhece os processos que decorrem da variação de n. Tenta formalizar o processo buscando linguagem matemática para sustentar os argumentos. Apresenta, também, uma noção de infinito quando explica a área do polígono. Na entrevista, afirma ser possível estimar a área do círculo com o aumento de n no polígono inscrito. Mostra-se confuso sobre a dinâmica do *applet* e termos geométricos, trocando seus nomes. Destacou que a área do triângulo T_i diminuía. O aluno se valeu do *applet* para realizar processos de abstrações pseudoempíricas, até operar por abstração refletida. Algumas noções de limite mostraram-se inconsistentes, ainda em formação. Afirmou que a base tende para mais infinito, confundindo infinito com partes tão pequenas quanto se queira, até concluir a base diminui, mas não tem limite. Afirma que a área do polígono aumenta quando n aumenta, mas não limita essa área. Mostra que compreende a relação de causa e efeito nos processos contidos no *applet*, no entanto, tem dificuldade nas noções de limite apresentadas. Para ele, a altura não ultrapassaria a circunferência, sendo o raio da circunferência o limite da altura. Assim como no registro escrito, o aluno demonstrou incertezas e dificuldades com conceitos geométricos.

5.2.16 Aluno M22

Registros Escritos de Respostas – O aluno inicia relacionando o aumento do número de lados com a variação de outros elementos geométricos, apresentando, assim, noções de limite da área e do apótema: "*[...] quando aumentamos o número de lados do polígono inscrito, observamos que também aumenta o apótema, o perímetro e a área do polígono*". Ele compreende que o aumento do valor de n implica no aumento da área do polígono sobre a área do círculo, ambos delimitados pela circunferência de raio unitário. Segundo ele: "*A ideia de limite nos permite aproximar o perímetro da circunferência pelo perímetro do polígono regular inscrito nessa circunferência à medida que o número de lados do polígono aumenta*". Essa é uma noção de limite em que a circunferência é o limite do perímetro do polígono. A implicação direta desse limite é a área do polígono inscrito tender para a área do círculo que é delimitado pela mesma circunferência.

Entrevista – O aluno acredita que é possível estimar a área do círculo pelo polígono inscrito aumentando o número de n que é o número de triângulos, segundo ele, o aumento do número de triângulos no polígono implica na diminuição da área do triângulo e uma diminuição da base, sem saber que é base o segmento que havia mostrado. Com auxílio do *applet*, mostra que $n = 33$ tem uma aproximação melhor que $n = 3$, afirmando que a área do triângulo diminui à medida que n aumenta. Foi perguntado sobre o limite da área do triângulo, ele respondeu: "*Infinito. Porque eu testei bastantes valores e todos deram*". Essa afirmação mostra o conflito conceitual entre infinito e partes tão pequenas quanto se queira, recorrente nesta pesquisa. Ele explica essa declaração da seguinte forma: "*Em casa eu fiz e, toda vez que eu aumentava o valor de n, a área ia ficando cada vez mais azul preenchendo o círculo e o triângulo ia ficando cada vez menor*". Nessa declaração, é possível observar a importância do recurso visual que o *applet* proporcionou para que, por um processo de indução, ele concluísse que a área do polígono que está inscrito na circunferência tende a cobrir de azul toda a área interna. Acredita que a área do triângulo tem um valor limite, mas não sabe especificar qual, no entanto, afirma que diminui. Compreende que, se aumenta o valor de n, a base diminui e a altura aumenta. Para a ele, a base pode ficar menor a cada aumento de n, mas não conclui o limite. Faz n variar de 3 até 761. A base fica em 0.00826 e a altura em 0.999999, e conclui: "*Por exemplo, se eu chegar até aqui, eu estou diminuindo a área dos triângulos e a base vai continuar sendo menor [...] À medida que eu desenho mais triângulos com n*". Afirma que a altura está diminuindo, mas, após observar a variação dos valores da altura, conclui: "*Não. A altura aumenta quando o número de triângulos é bem maior*". Afirma que a altura está em função do número de lados; essa é uma noção de função que é concebida de forma errada. Apresenta a noção de limite da altura, para ele, o limite da altura é 1 quando n tende para infinito. Justifica utilizando o *applet*, dizendo que por mais que aumente n, o valor da altura não passa de 1. Nesse sentido, faltou realizar processos de abstração refletida a partir dessa abstração pseudoempírica. Posiciona o cursor sobre n sobre a tela de valores da altura. Conclui, novamente, que, se aumentar n, a área do polígono inscrito aumenta até no limite da área do círculo. Foi perguntado se era possível estabelecer alguma relação entre a altura do triângulo e o raio, ele disse não, mas, após modificar valor de n no *applet*, ele conclui: "*Se eu for desenhar triângulos, ela [altura] vai chegar aqui no raio, no raio da circunferência*", mostrando que compreendeu por abstração refletida que, à medida que n tende para o infinito, o comprimento da altura tende para o comprimento do raio.

Resultado: O aluno relacionado o aumento do número de lados com a variação de outros elementos geométricos, apresentando, assim, noções de limite da área e do apótema. Ele compreende que o aumento do valor de n implica no aumento da área do polígono sobre a área do círculo, ambos delimitados pela circunferência de raio unitário. Apresenta uma noção de limite em que a circunferência é o limite do perímetro do polígono. Para ele, o aumento do número de triângulos no polígono implica na diminuição da área do triângulo e uma diminuição da base. Utiliza, com frequência, o recurso do *applet* para elaborar respostas. Afirma que a área do triângulo diminui à medida que n aumenta. Ao apresentar a noção de limite da área da base, ocorreu um conflito conceitual entre infinito e partes tão pequenas quanto se queira, que mais uma vez se mostra recorrente nesta pesquisa. Utiliza o recurso visual do *applet* para elaboração de respostas. Concluiu que a área do polígono inscrito na circunferência tende a cobrir de azul toda a área interna. Acredita que a área do triângulo tem um valor limite, mas não sabe especificar qual, no entanto, afirma que diminui. Compreende que, se aumenta o valor de n, a base diminui e a altura aumenta. Para a ele, a base pode ficar menor a cada aumento de n, mas não conclui o limite. Afirma que a altura está diminuindo, mas, após observar a variação dos valores da altura, conclui que aumenta e está em função do número de lados. Apresenta a noção de limite da altura, para ele, o limite da altura é 1 quando n tende para infinito. Realizou processos de abstração refletida a partir dessa abstração pseudoempírica. Conclui, novamente, que, se aumentar n, a área do polígono inscrito aumenta até no limite da área do círculo. Mostrou que compreendeu, por abstração refletida, que à medida que *n* tende para o infinito, o comprimento da altura tende para o comprimento do raio.

5.2.17 Aluno M25

Registros Escritos de Respostas – O aluno compreende a situação-problema e explica o processo de estimação da área do círculo pelo polígono inscrito da seguinte forma: "*Quando aumentamos a quantidade de triângulos, tende a preencher a área do círculo aproximando a área sem chegar ao valor real [...]*". Nesse registro, é apresentada uma noção do limite da área do polígono por preenchimento da área do círculo. O aluno ainda apresenta outras duas noções ao aumentar a quantidade de lados ou triângulos, e, segundo ele: *"a base* *estreitará tendendo a 0 e a altura aumentará tendendo a 1*”. Mas não cita nem considera o significado geométrico dessas medidas na análise dos limites.

Entrevista – O aluno M25 afirma que o aumento do número de lados faz com que a base tenda a zero. Essa é uma noção de limite da base do triângulo. Esse processo é inverso e necessário para que o polígono esteja inscrito na circunferência. Afirma que a base pode ser o próprio zero, mas, em seguida, foi colocada a seguinte questão como uma situação-problema: Um triângulo pode ter um de seus lados com medida zero? Ele reconheceu que, nesse caso, não existe triângulo, e concluiu que a base não pode ser zero. Sem utilizar o *applet*, afirma, também, que a altura aumenta e tende para 1. Afirma que a área do triângulo aumenta, mas, questionado sobre as respostas dadas, o aluno recorre ao *applet*, modifica o valor de n e conclui que a área do triângulo está se aproximando de zero. Segundo ele, a área do polígono tende para π. Conclui sobre o processo de estimação da área do círculo: “*Quando n aumenta, o polígono tende a completar a área do círculo*”, uma noção de limite da área como consequência do aumento de n. Conforme pode ser verificado, o aluno apresentou noções de limite dos comprimentos da base, da altura, e das áreas do triângulo isósceles e do polígono inscrito.

Resultado: Apresenta uma noção do limite da área do polígono por preenchimento da área do círculo. O aluno ainda apresenta outras duas noções ao aumentar a quantidade de lados ou triângulos, são as noções de limite da base e da altura de triângulos isósceles que compõem a área de um polígono inscrito na circunferência de raio $r = 1$. Não cita nem considera o significado geométrico de medidas de comprimento e área na análise dos limites. Na entrevista, o aluno M25 afirma que o aumento do número de lados faz com que a base tenda a zero. Essa é uma noção de limite da base do triângulo. Esse processo é inverso e necessário para que o polígono esteja inscrito na circunferência. Afirma que a base tende para zero. Conclui, diante de uma situação-problema, que a base não pode ser zero. Sem utilizar o *applet*, afirma, também, que a altura aumenta e tende para 1. Afirma que a área do triângulo tende para zero. Segundo ele, a área do polígono tende para π. Conclui sobre o processo de estimação da área do círculo, que, quando n aumenta, a área do polígono tende para a área do círculo. Conforme pode ser verificado, o aluno apresentou noções de limite dos comprimentos da base, da altura, e das áreas do triângulo isósceles e do polígono inscrito.

5.2.18 Aluno M32

Registros Escritos de Respostas – No registro escrito, o aluno apresentou poucas informações sobre os processos realizados para resolver a situação-problema. Afirmou que “[...] à medida que se tem o aumento da base, a altura não diminui [...]”, essa relação de causa e efeito não está correta, apesar disso, é uma noção de limite. O aumento da base implica, necessariamente, na diminuição da altura. A variação da altura e da base está limitada pelo fato do polígono estar inscrito. Mas apresenta uma noção de limite relativa à altura ao afirmar: “*[...] no momento em que aumento o valor de (n) fica bem próximo a 1 e chegando até mesmo a 1*”. Nesse registro, o aluno não relacionou o valor com o conceito geométrico.

Entrevista – Demonstrando conhecer a relação de causa e efeito de n na área do polígono, o aluno, ao modificar o valor de n, afirma que o aumento desse valor implica na aproximação da área do círculo pela área do polígono inscrito. Compreende que n tende para infinito. Fazendo $n = 1000$, limite máximo de variação de n no *applet*, afirma que a altura diminui. Justifica que n tende para o infinito porque sempre caberão pontos na circunferência e a distância entre dois desses pontos ficam cada vez menores. Afirma que a base vai diminuindo para números muito próximos de zero, mas diferente de zero, e justifica: “*Não vai existir a base*”, associando o valor ao conceito geométrico. Perguntado novamente sobre a altura, agora, ele afirma que aumenta até 1. Para ele, a altura passaria de 1 caso ele colocasse n maior que mil. Para contradizer a resposta, foi colocada a seguinte situação-problema: Em um triângulo isósceles, com os dois lados congruentes, a altura poderia ter valor igual a 1? Testando valores de n, ele responde que não pode haver esse caso hipotético, e justifica: “*[...]Eu posso dizer que os lados [isósceles do triângulo isósceles] se encontram*”. O aluno demonstra incerteza quanto aos resultados, afirma que a base tem medida máxima 1 apontando para altura. Mas, após observar a figura, ele diz que os vértices tendem a se encontrar e, segundo ele, isso não pode ocorrer. Foi colocada outra situação-problema, em que ele deveria pensar na possibilidade de um triângulo ter uma de suas medidas nula, respondendo não ser possível essa hipótese. Fez essa observação variando o valor de n no *applet*. Responde sim quando foi perguntado se a área do polígono inscrito tende para a área do círculo, que é delimitado pela mesma circunferência quando n aumenta, mas, quando foi perguntado o que acontece com a área do polígono quando n é alterado, ele não soube responder. Na equivalência, ele não soube responder, isso demonstra que não tem certeza sobre o processo que trata a principal situação-problema desta atividade. O aluno demonstra incerteza quanto ao processo de estimação da área do círculo e de seus fundamentos. Apresenta dificuldades com conceitos geométricos.

Resultado: Demonstra conhecer a relação de causa e efeito da variação de n sobre a área. Apresenta uma noção de limite da altura, mas o limite está errado, mas, em seguida, apresentou o valor do limite correto. O aluno não relacionou o valor com o conceito geométrico. Afirma que o aumento de n implica na aproximação da área do círculo pela área do polígono inscrito. Compreende que n tende para infinito. Afirma que a base vai diminuindo para números muito próximos de zero, mas diferente de zero, associando o valor ao conceito geométrico. Para ele, a altura tende para 1, até ultrapassaria esse valor caso colocasse um n maior que mil, mais, em seguida, mudou a opinião após agir em outra situação-problema. Afirma que a base tem medida máxima 1 apontando para altura. Mas, após observar a figura, ele diz que os vértices tendem a se encontrar e, segundo ele, isso não pode ocorrer. Foi colocada outra situação-problema, em que ele deveria pensar na possibilidade de um triângulo ter uma de suas medidas nula, respondendo não ser possível essa hipótese. Responde sim quando foi perguntado se a área do polígono inscrito tende para a área do círculo, que é delimitado pela mesma circunferência quando n aumenta, mas, quando foi perguntado o mesmo de forma equivalente, disse não saber responder.

5.3 INVESTIGANDO NOÇÕES DE LIMITES NO ESTUDO DE DERIVADAS – ATIVIDADE 3

A atividade 3 foi aplicada em dois momentos distintos, incialmente, no término da unidade 1 (U1), e, posteriormente, no final da unidade 2 (U2). A aplicação nessas circunstâncias objetivou conhecer as relações possíveis de serem realizadas com variação e limite, e, posteriormente, verificar como ocorre a conceituação de derivada de funções sob o enfoque de limite de funções. Na sequência do texto, serão descritos os resultados por aluno, devidamente identificados com código. A análise será realizada pelas comparações entre os dois registros escritos de respostas, ambos enviados pela $A3$ no $P1$.

5.3.1 Aluno M1

Unidade 1 – Limite – As observações realizadas pelo aluno referem-se apenas àquilo que é visualmente perceptível. Quando faz Q_1 se aproximar de Q_2, relata apenas as modificações em x e $f(x)$ decorrentes dessa aproximação, o que não configura a conceituação de função. O aluno observa apenas que ocorre uma aproximação entre as retas e os valores de x, o que, segundo ele, causa a variação das inclinações em Q_1 e Q_2.

Unidade 2 – Derivada – O aluno observou que, quando Q_1tende para Q_2, as inclinações se modificam, mas não verificou se uma inclinação tende para a outra, do mesmo modo que observou que x_1 tende para x_2. Observou, ainda, que Q_1 e Q_2 estão na mesma reta, e, segundo ele, irão se aproximar ao máximo, até próximo de zero, ou seja, fazer um $\Delta x \to 0$. O conceito de função não foi explicitado. Segundo o aluno, Q_1 e Q_2 estão em uma mesma reta secante. Se $\Delta x \to 0$, a reta secante tende a ficar tangente.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual, da U1 para a U2. Na U1, a noção de limite foi apresentada na análise da aproximação entre Q_1 e Q_2 e, como consequência, ocasionaram variações na inclinação entre as retas que contém esses pontos. Na U2, a linguagem foi adequada aos conhecimentos tratados na unidade. Apresentou noções de limite ao relatar que: para $Q_1 \to Q_2$, $\Delta x \to 0$. Reconhece uma reta apenas que contém os pontos Q_1 e Q_2, e, no limite da aproximação entre esses pontos, quando $\Delta x \to 0$, a reta secante tende para uma reta tangente.

5.3.2 Aluno M2

Unidade 1 – Limite – O aluno se ateve às descrições visuais, mas declarou que, quando $Q_1 \to Q_2$, os valores de x se aproximam, fazendo $x_1 \to x_2$, essa é uma noção de limite. Referre-se à inclinação como triângulo retângulo, e afirma que, se $Q_1 \to Q_2$, então os lados desse triângulo aumentam, o que não é verdade. Observa-se ausente o conceito de função, pois vê a variação de x uma consequência de da aproximação entre os pontos Q_1 e Q_2, para ele, o limite de Q_1 é Q_2.

Unidade 2 – Derivada – O aluno faz alusão ao recurso de animação do *applet*, cita o conceito de função de forma errada, pois afirma que, em Q_1, a função é igual a $x_1 = -3$, e, em seguida, afirma o mesmo que já havia afirmado na U1, que, quando $Q_1 \to Q_2$, os valores de x se aproximam, fazendo $x_1 \to x_2$. Quando mostra conhecimentos apresentados na U2, relata o comportamento da função pela derivada, não realizando nenhuma relação entre a situação-problema e a conceituação de derivada.

Comparação entre unidades – Não houve evolução conceitual da U1 para a U2. Tanto na U1 quanto na U2, a noção de limite apresentada não está fundamentada no conceito de função. Ateve-se apenas à dinâmica de animação sem realizar processos construtivos por abstração refletida relevantes ao conceito de derivada. Realizou processos construtivos por abstração pseudoempírica.

5.3.3 Aluno M3

Unidade 1 – Limite – No registro escrito, o aluno descreve o processo de aproximação entre os pontos afirmando que, se $Q_1 \to Q_2$, então $x_1 \to x_2$, e afirma que é assim que vê o limite.

Unidade 2 – Derivada – O aluno introduz novos elementos conceituais tratados na U2, mas continua na noção de limite, afirmando que $Q_1 \to Q_2$, mas essa afirmação é decorrente da observação do gráfico, segundo afirma o próprio aluno. Referindo-se às inclinações nos pontos Q_1 e Q_2, diz que as derivadas nesses pontos irão se aproximar, assim ele descreve o processo: "*Quando Q_1 se aproxima de Q_2, acontece a mesma coisa com x_1 e x_2 no eixo x no gráfico e assim vai tendo modificações no valor das inclinações da reta*".

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual, da U1 para a U2. Na U2, foi empregada a mesma noção de limite apresentada na U1. O aluno realizou na U2 uma adequação de termos utilizados na U1. Na U1, a noção de limite foi apresentada na análise da aproximação dos pontos Q_1 e Q_2 no gráfico, já na U2, essa análise foi acompanhada não só na aproximação entre os pontos como também suas inclinações.

5.3.4 Aluno M4

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que $Q_1 \rightarrow Q_2$, e, nessa aproximação, Q_1 não assume necessariamente o valor em Q_2, apenas se aproxima por pontos na vizinhança. Afirma que a inclinação da reta i em Q_1 tende para a inclinação da reta p em Q_2. O aluno construiu o conceito de função quando afirma: "*Para cada valor de $x_{1,}$ há uma correspondência no eixo y, tal que, quando o ponto Q_1 caminha para Q_2 [$Q_1 \rightarrow Q_2$], no eixo x, vai ocorrendo uma aproximação entre eles [$\Delta x \rightarrow 0$] onde, quando $x = 2.99$, a inclinação $Q_1 - Q_2$ é igual a 2.3. Quando Q_1 parte de -3, ele vai se aproximando de Q_2 por valores cada vez maiores pela esquerda até chegar próximo de 3 [$I_{Q_1} \rightarrow I_{Q_2}$]*". Nesse registro, o aluno expressa, de forma clara, várias noções de limite e como elas se relacionam.

Unidade 2 – Derivada – Apresenta as mesmas noções com evolução da forma de apresentação, resultante da introdução de novos elementos conceituais da U2. Afirma que, pelos pontos Q_1 e $Q_{2,}$ passa uma reta secante na curva, na função $f(x)$. Segundo o entendimento do aluno, o objetivo da atividade é fazer $Q_1 \rightarrow Q_2$, para que a inclinação dessa reta secante em Q_1 e Q_2 tenda para a inclinação da reta tangente que passa por Q_2. Para o aluno, fazer $Q_1 \rightarrow Q_2$ significa: "*[...] no eixo x, a distância entre eles se reduz, então a $f(x_1)$ vai se aproximando da $f(x_2)$ no eixo y resultando em várias inclinações ao longo desse caminho e o limite de Q_1 será o valor que Q_2 ocupa na curva; esse valor será o resultado da função derivada, aquela que é a forma de uma função preexistente, ou seja, inclinação da reta tangente*". Nessa descrição, há várias noções de limite, em específico, destaca-se a noção de limite de uma função *f(x)*. Destaca-se, ainda, a caracterização dada à função derivada pelo valor limite da inclinação da reta tangente no ponto Q_2.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual, da U1 para a U2. Na U2, foi apresentada a mesma noção de limite utilizada para descrever a situação-problema tratada na atividade e questão, no entanto, o aluno adequou a linguagem e os conceitos tratados na U2 para descrever a situação-problema, e o conhecimento sobre limite e derivadas. Houve a conceituação de derivada. Foram apresentados vários argumentos não explícitos no *applet*, o que é um indício de que o aluno realizou processos de abstração pseudoempírica e refletida.

5.3.5 Aluno M5

Unidade 1 – Limite – O aluno refere-se no registro à animação do *applet*, nesse registro, ele relata que, se $Q_1 \to Q_2$, então $x_1 \to x_2$. Refere-se à inclinação como um triângulo retângulo quando diz: "*[...] observando a reta secante em Q_1 e Q_2, nota-se a formação de um triângulo retângulo, e seus lados aumentam à proporção que Q_1 se aproxima de Q_2*". Nesse registro, a informação visual foi operada em nível de abstração pseudoempírica. Demonstra e reconhece a intenção de estudar a situação-problema pela teoria de limites, no entanto, afirma apenas que Q_2 é o limite de Q_1 ou melhor: $Q_1 \to Q_2$.

Unidade 2 – Derivada – Pela animação, o aluno conclui que $Q_1 \to Q_2$, afirma também que: "*Q_2 torna-se o limite de Q_1, sendo assim, Q_2 é a derivada de Q_1*". Nesse registro, o aluno apresenta uma noção de limite e uma noção de derivada, no entanto, no que se refere à afirmação sobre a derivada, ela está equivocada. O aluno utilizou outros recursos do *applet*, explorou as retas secante e tangentes. Observa que a inclinação da reta tangente em Q_1 tende a se aproximar do valor da inclinação da reta tangente em Q_2. Segundo ele, do mesmo modo que $x_1 \to x_2$, e, segundo ele, x_2 é o limite de x_1. Para ele, quando $Q_1 \to Q_2$, significa que, não necessariamente, Q_1 torna-se Q_2, o que demonstra que aplicou o conceito de limite.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U2. Apresentou na U2 a mesma noção de limite que apresentou na U1. Na U2, houve, por parte do aluno, a exploração dos recursos do *applet*. No registro escrito, apresentou elementos conceituais tratados na U2 ao descrever a situação-problema que o *applet* trata. Utilizou como recurso as retas e suas inclinações nos pontos de Q_1 e Q_2 para relacionar com a noção de limite apresentada. Em seguida, conceituou limite e apresentou uma noção de derivada.

5.3.6 Aluno M6

Unidade 1 – Limite – Apresenta uma noção de limite que, na curva, $Q_1 \to Q_2$ enquanto que $x_1 \to x_2$. Apresenta a noção de limite ao analisar a aproximação entre as inclinações quando $Q_1 \to Q_2$.

Unidade 2 – Derivada – O aluno não apresentou uma noção de limite ao tratar a situação-problema, mas cita que ocorre uma variação na inclinação, e, essa, segundo ele, não ocorre em função de x. Apresentou conflito conceitual ao afirmar: "*A inclinação não varia em função de x, pois é constante por todo o gráfico (em retas, a derivação é constante). Em funções que não retas, a derivação depende do valor x*". Ao afirmar que a inclinação não varia em função de x, se refere às retas secante por Q_1 e Q_2 e tangente nos pontos Q_1 e Q_2. Não tratou de uma resposta para a situação-problema. Percebe-se que tenta desenvolver os conhecimentos tratados na situação-problema, e, para isso, ele utiliza os novos conceitos e não utiliza noções de limite.

Comparação entre unidades – Houve evolução na utilização de conceitos tratados na U2. Na U1, tratou a situação-problema com uma noção de limite. Na U2, não tratou a situação-problema com a teoria de limites, investigou e tentou explicar as observações com os novos conceitos sobre derivadas.

5.3.7 Aluno M7

Unidade 1 – Limite – O aluno compreende que $Q_1 \rightarrow Q_2$, no entanto, ao dizer que Q_1 se aproxima de 2,99, mostra que não compreende a representação gráfica da função, pois Q_1 é a representação gráfica de um ponto $(x, f(x))$ da função. O aluno apresenta uma noção de limite quando $Q_1 \rightarrow Q_2$, chegando a 2,9999..., e, quando isso acontece, $I_{Q_1} \rightarrow I_{Q_2}$, chegando ao valor 2,33... O aluno não utilizou o conceito de função.

Unidade 2 – Derivada – O aluno inicia estabelecendo uma relação entre os pontos Q_1 e Q_2 da função, e x_1 e x_2 da abscissa. O aluno apresenta uma noção de limite para descrever a situação-problema. Segundo ele, quando $Q_1 \rightarrow Q_2$ e $x_1 \rightarrow x_2$, então $I_{Q_1} \rightarrow I_{Q_2}$. Ao tentar relacionar a situação-problema com os novos conceitos de derivadas, o aluno apresenta uma noção de limite e utiliza o conceito de função quando diz que, aproximando x_1 de x_2, implica em $Q_1 \rightarrow Q_2$. Segundo ele, essa aproximação descreverá uma função derivada a partir da função $f(x)$ quando as inclinações se aproximarem fazendo $I_{Q_1} \rightarrow I_{Q_2}$.

Comparação entre unidades – Na U2, foi apresentada uma noção de limite melhor fundamentada na teoria de limites, pois esta se apoia no conceito de função. Enquanto na U1 os argumentos das noções de limites se fundamentaram em valores numéricos, na U2, o aluno elaborou argumentos para explicar a situação-problema fundamentados não só na teoria de limites quanto na teoria das funções derivadas, apresentando, assim, uma noção de função derivada. As argumentações da U2 constituem-se como resultados de processos por abstração pseudoempírica e abstração refletida, já que opera na matemática pura, enquanto que, na U1, as argumentações estão apoiadas em resultados numéricos ou comportamentos advindos da utilização e observação do *applet*.

5.3.8 Aluno M8

Unidade 1 – Limite – O aluno não realizou esta atividade.

Unidade 2 – Derivada – O aluno apresenta a noção de limite quando afirma que $Q_1 \to Q_2$ e $\Delta x \to 0$. Para ele, quando isso acontece, a reta secante tende a ser tangente, no entanto, não faz referência nenhuma às inclinações como limite.

Comparação entre unidades – Não foi possível realizar comparação entre as unidades U1 e U2.

5.3.9 Aluno M9

Unidade 1 – Limite – O aluno construiu o conceito de limite quando afirma que, fazendo $x_1 \to x_2$, ou seja, $\Delta x \to 0$, os pontos Q_1 e Q_2, que definem a reta secante, se aproximam, ou seja, $Q_1 \to Q_2$. Segundo o aluno, o limite existe na situação-problema que foi proposta. É o coeficiente angular no ponto de tangência. Afirma, ainda, que a reta secante tende a ficar tangente quando $Q_1 \to Q_2$.

Unidade 2 – Derivada – Afirma que $Q_1 \rightarrow Q_2$ por uma velocidade que pode ser instantânea nas proximidades de $\Delta x \rightarrow 0$. Afirma que as inclinações da reta secante em Q_1 e Q_2 se aproximam da inclinação da reta tangente em Q_2, e, nessa posição, esse é o limite.

Comparação entre unidades – Na U2, o aluno deu ênfase na relação das inclinações das retas com a aproximação entre Q_1 e Q_2, o que facilita o processo até a conceituação de derivadas. Compreende a relação entre os pontos Q da função e os pontos x na abscissa, mas não relaciona com os valores de $f(x)$. Na U1, ao analisar $Q_1 \rightarrow Q_2$, a ênfase foi na variação de x, enquanto que, na U2, foi na variação das inclinações das retas. Houve evolução conceitual, da U1 para a U2. Apresenta uma noção de limite e uma noção de derivada ao considerar que o valor da inclinação na posição entre os pontos próximos à tangente é um limite, esse limite é a derivada.

5.3.10 Aluno M10

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que, quando $Q_1 \rightarrow Q_2$, ocorre uma variação na inclinação de reta secante. Afirma que Q_2 pode ser considerado o limite de Q_1, e isso limita a inclinação, ou seja, segundo ele, a variação ocorre até as proximidades de Q_2. Afirma, ainda, que a variação da inclinação ocorre no intervalo de variação de x. Segundo ele, é possível encontrar o limite da inclinação em quaisquer pontos nesse intervalo. Nessas explicações, há a intenção clara de explicar a situação-problema com noções de limite. Cita a animação do *applet*, nessa animação, ele nota as retas c, i e p que se aproximam de um mesmo valor em Q_2 quando $\Delta x \rightarrow 0$. Afirma que o limite da $f(x)$ é Q_2 quando $Q_1 \rightarrow 3$. Essa noção de limite apresenta erros conceituais, pois afirma que $f(x)$ é um ponto. Essa afirmação poderia ser mais bem entendida se estivesse escrita assim: o limite da $f(x)$ é o valor que $f(x)$ assume em Q_2 quando $x_1 \rightarrow 3$. Segundo ele: *"[...] como a derivada indica a inclinação da reta num ponto dentro da função, e que a situação se encaixa no conceito de limites, podemos usar essa relação para calcular os limites desta função*". Nesse registro, o aluno tenta relacionar a teoria de limites com o processo de derivação de funções. É importante lembrar que, na U1, os conceitos relacionados à derivada são abordados de forma introdutória, logo, o aluno utiliza conceitos e noções que preexistem em suas estruturas.

Unidade 2 – Derivada – Ao descrever e tratar a situação-problema, o aluno formaliza a situação e o processo contido nela, utilizando notação e linguagem matemática apropriada. Reconhece o intervalo entre -3 e 3. Nesse intervalo, ele reconhece que fazer $Q_1 \to Q_2$, é porque se $\Delta x \to 0$, $x_1 \to x_2$, então $f(x_1) \to f(x_2)$. Como consequência, ele afirma que $I_{Q_1} \to I_{Q_2}$ que, segundo ele, é 2,3. O aluno diz: "*[...] considerando que os dois pontos juntos formam uma reta secante, notamos que, durante a aproximação desses dois pontos, essa reta secante se aproxima tão perto de Q_2 quase se igualando à inclinação de Q_2, durante esse processo, notamos, também, que a variação do espaço entre os dois pontos diminui se aproximando de zero, se tornando quase que desprezível, quando chega em um limite de variação próximo de zero, sendo assim, posso considerar que a inclinação da reta secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite próximo do valor de Q_2*". Nesse registro, o aluno apresenta uma noção de derivada com o conceito de limite, e, para ele, $I_{Q_1-Q_2} \to I_{Q_2}$ quando $\Delta x \to 0$. O aluno representa assim a derivada: "*[...] podemos representar esse processo pela definição de derivadas utilizando limites. O limite será a menor taxa de variação entre Q_1 e Q_2, com Q_1 tão próximo de Q_2. A derivada será a inclinação da reta no ponto limite da aproximação de Q_1 para Q_2. Dessa forma, podemos representar assim: $f'(x) = lim\ [f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)$, com h tendendo a zero, onde a variação será representada por h. Considerando essa estrutura, podemos encontrar a inclinação de qualquer ponto nesse intervalo de -3, e 3, relacionando essas retas*". Para realizar essa formalização, o aluno utilizou o conceito de limite.

Comparação entre unidades – O aluno apresenta elementos conceituais de derivadas desde a U1. Na U2, foi feita a análise da situação-problema, e, para isso, utilizou a definição de derivada. Utilizou também noções de limite quando relaciona a inclinação, e os pontos da função em sua representação gráfica. Na U1, foi apresentada uma noção de limite e derivada, mas com erros conceituais sobre função, mas, na U2, o tratamento dado à situação-problema foi feito com o conceito de limite e noções até a representação com elementos da definição de derivada.

5.3.11 Aluno M11

Unidade 1 – Limite – Na situação-problema, o aluno apresenta uma noção de limite quando afirma que, se $Q_1 \rightarrow Q_{2,}$ o mesmo ocorre com x, e $x_1 \rightarrow x_2$. Afirma que as inclinações das retas se aproximarão, mas não explicita qual, afirmando apenas que o limite na aproximação entre essas inclinações é 2,31. No entanto, é uma noção de limite.

Unidade 2 – Derivada – O aluno afirma que $Q_1 \rightarrow Q_2$ e $x_1 \rightarrow x_2$. Nessa noção de limite, tem-se uma representação geral da situação-problema, no entanto, os elementos listados não foram relacionados entre si. O conceito de função não foi construído. Ele constrói a noção de limite quando afirma que, se $Q_1 \rightarrow Q_2$, pela definição de limite, Q_1 não precisa se igualar a Q_2, mas não explicita se essa igualdade é pela natureza do ponto com seus valores coordenados (x, y) ou se pelas inclinações das retas tangente ou secante.

Comparação entre unidades – Não houve evolução conceitual da noção apresentada na U1 para a U2. Na U1, a noção de limite apresentada utilizou a inclinação das retas, fato este desconsiderado na U2.

5.3.12 Aluno M12

Unidade 1 – Limite – Apresenta a aproximação entre os pontos Q_1 e Q_2, nessa representação, a aproximação entre x_1 e x_2 é tida como um fato concomitante, pois ele afirma: *"[...] quando o ponto Q_1 se aproxima de Q_2 da esquerda para direita, a mesma trajetória vai acontecer com o valor de x_1 que tenderá a x_1, passando pelos valores negativos, e passando pelo ponto zero e chegando a x_2 no lado positivo do eixo x*". Segundo ele, a inclinação da reta que passa por Q_1 tende a se aproximar da inclinação da reta que passa por Q_2, $I_{Q_1} \rightarrow I_{Q_2}$. Nessa aproximação, ele afirma que o limite é 2,31.

Unidade 2 – Derivada – O aluno observa que $Q_1 \rightarrow Q_2$, e, nessa noção de limite, há uma variação na reta secante que passa por Q_1 e Q_2, e o valor de sua inclinação tende a se aproximar da inclinação da reta tangente que passa por Q_2, $I_{Q_1 - Q_2} \rightarrow I_{Q_2}$. O aluno elabora explicações sobre procedimentos que ocorrem no *applet* utilizando conhecimentos e termos tratados na U2. Quando afirma: "*A função apresenta a taxa de variação de y em relação a x no ponto [...]*", entende-se que é apresentada uma noção de derivada, pois tenta estabelecer uma relação entre essas duas grandezas. Quando diz: "*A derivada no ponto Q_1 tendendo a Q_2 representa a inclinação da reta tangente ao gráfico desta função no ponto Q_2 [...]*", apresenta essa noção de derivada de forma confusa, pois deveria ser "*A derivada [inclinação] no ponto Q_1 tendendo a [à inclinação no ponto] Q_2 representa [geometricamente]a [...] [derivada da] [...] função no ponto Q_2 [...]*". O aluno quis expressar a derivação como um limite "*[...] A função que a cada ponto x associa a derivada no ponto y é chamada de função derivada de* $f(x)$". Percebe-se que o conceito de função foi evocado na explicação. Em seguida, explica: "*[...] partindo de Q_1 em direção a Q_2, a derivada assume valor negativo até ficar paralela ao eixo x quando o valor será nulo ou igual a 0, partindo desse ponto zero, a derivada assume valor positivo até se aproximar no limite de Q_2 [...]*", relacionando o comportamento da derivada e o sinal da inclinação.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual, da U1 para a U2. Na U1, a noção de limite foi apresentada na análise da aproximação entre as inclinações das retas tangentes nos pontos Q_1 e Q_2. Na U2, a noção de limite foi apresentada na análise da aproximação entre as inclinações da reta secante em Q_1 e Q_2, e da reta tangente em Q_2. Na U2, há a utilização do conceito de limite e noção de derivadas quando analisa a variação entre as grandezas x e y.

5.3.13 Aluno M13

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que, à medida que $Q_1 \to Q_2$, $x_1 \to x_2$. Dessa noção de limite, ele afirma: "*Aproximação de um ponto, tendendo a outro ponto, tão próximo dele, mas nunca igual a ele*". Nessa citação, ele descreve observações sobre a situação-problema contida no *applet*. Não utiliza o conceito de função nem faz referência às retas e inclinações.

Unidade 2 – Derivada – O aluno afirma que $Q_1 \to Q_2$, assim como os seus valores na abscissa. Os pontos Q_1 e Q_2 pertencem a uma reta secante na função $f(x)$. Segundo o registro feito, a implicação de $Q_1 \to Q_2$ é a reta secante p tender para a reta i, ou seja, $p \to i$. Não fez referência a elementos conceituais tratados na U2.

Comparação entre unidades – A evolução conceitual da U1 para a U2 ocorreu ao analisar a natureza das retas secante e tangente quando $Q_1 \to Q_2$. Na U1, a noção de limite foi apresentada na análise da aproximação entre Q_1 e Q_2. Para ele, a reta secante em Q_1 e Q_2 tende a ter a natureza da reta tangente em Q_1. Tanto na U1 quanto na U2 o conceito de função não foi utilizado nos registros.

5.3.14 Aluno M14

Unidade 1 – Limite – O aluno considera que se $Q_1 \to Q_2$, a reta que é secante em Q_1 e Q_2, tende a ser tangente em Q_1, e, segundo ele: *"[...] unindo os pontos ao limite de se observar um só ponto na reta*", o que não configura uma necessidade, e o que justifica esse fato é a própria teoria de limites.

Unidade 2 – Derivada – O aluno utiliza a mesma noção de limite apresentada na U1, no entanto, afirma que, se $Q_1 \to Q_2$, então $x_1 \to x_2$, e, quando isso acontece, as inclinações se alteram. E, assim como na U1, afirma que a reta secante em Q_1 e Q_2 da função tende a ser uma tangente em Q_2, justifica assim: "*quando um ponto se aproximar ao máximo do outro, seu valor será tão próximo do valor 0 (zero), dando origem a uma reta tangente no gráfico de função*". Note que, nesse registro, a distância que tende para zero não foi explicitada pelo aluno. Caso ocorresse essa explicitação com os valores x_1 e x_2, configuraria uma construção do conceito de função ao tentar explicar o processo de derivação utilizando a teoria de limites.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U2. A introdução de novos conceitos na U2 fez com que o aluno incluísse, nas suas observações sobre a situação-problema, os novos conhecimentos tratados na U2. A mesma noção de limite apresentada na U1 foi apresentada também na U2. Tanto na U1 quanto na U2, ele afirma que uma reta secante na função, pelos pontos Q_1 e Q_2, tende a ser uma reta tangente em Q_2. Na U2, relacionou o processo citado anteriormente com a variação da inclinação entre as retas. Não foi possível verificar uma noção de derivadas.

5.3.15 Aluno M15

Unidade 1 – Limite – O aluno não apresentou noções de limite, referiu-se apenas ao deslocamento dos pontos Q_1 e Q_2. Sem fazer relação desses pontos com os valores x do eixo Ox, observou que Q_1 se deslocava da esquerda para direita no eixo Ox. Sem informar a função, afirmou que o limite com x tendendo para a tem como resultado mais ou menos infinito. Esse registro do aluno apresenta termos da teoria de limites, mas sem conexão com seus significados ou com o tema central da situação-problema.

Unidade 2 – Derivada – O aluno afirma que a derivada de uma função é definida por um processo de limite. Relaciona as inclinações da reta secante à função pelos pontos Q_1 e Q_2, e tangente em Q_2, com a teoria de limites. O objetivo é realizar uma abordagem à situação-problema, disse ele: "*Considerando a inclinação da secante, quando os dois pontos do gráfico convergem para um mesmo ponto. No limite, a inclinação da secante é igual à da tangente*". Afirma ainda que: "*No limite, a inclinação da secante é igual à da tangente, e, na derivada, [...] o ponto tenderá a se aproximar o máximo possível, um ponto do outro originando uma reta tangente no gráfico de* $f(x)$". Nesse registro, a noção de derivada utiliza a noção de limite.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U2. Na U1, não foi apresentada uma noção de limite, enquanto que, na U2, foi apresentada uma noção de derivada com noção de limite num processo que, segundo ele, a reta secante tende para uma reta tangente quando os dois pontos da função que definem a reta secante se aproximam tendendo para uma tangente em um dos pontos. Na noção de derivadas apresentada pelo aluno na noção de limite, fundamenta-se a aproximação entre as inclinações da reta.

5.3.16 Aluno M22

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que, se $Q_1 \to Q_2$, o mesmo ocorre com x, $x_1 \to x_2$ e $f(x)$ é alterada com variação cada vez menor.

Unidade 2 – Derivada – O aluno diz que, ao aproximar Q_1 de Q_2, reconhece que a inclinação da reta secante que passa por Q_1 de Q_2 se aproxima da reta tangente que passa por Q_2, e $x_1 \rightarrow x_2$.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U2. Na U2, foi apresentada a mesma noção de limite que foi apresentada na U1. No entanto, na U2, a noção de derivada foi apresentada utilizando o limite da inclinação da reta tangente no ponto Q_2. O conceito de função foi utilizado. Noções de limite foram utilizadas na apresentação da noção de derivação.

5.3.17 Aluno M25

Unidade 1 – Limite – O aluno não realizou registros nesta atividade.

Unidade 2 – Derivada – Para o aluno, $Q_1 \rightarrow Q_2$. Em seguida, caracteriza uma reta tangente. Segundo ele, conforme $Q_1 \rightarrow Q_2$, a reta que passa por esses pontos continua secante por menor que seja a proximidade entre esses pontos.

Comparação entre unidades – Não foi possível estabelecer uma comparação entre os registros.

5.3.18 Aluno M32

Unidade 1 – Limite – O aluno utiliza a animação e afirma que, ao aproximar os pontos Q_1 e Q_2, com $Q_1 \rightarrow Q_2$, a inclinação da reta secante p, que passa por Q_1 e Q_2, vai variando. Esse registro apresenta uma noção de limite, mas não explicita como os pontos se aproximam. Fala da inclinação, mas não relaciona com a noção de limite apresentada.

Unidade 2 – Derivada – Para o aluno, se $Q_1 \rightarrow Q_2$, a distância diminui, mas, novamente, assim como na U1, mas, inicialmente, ele não explicita como ocorre a variação da distância entre os pontos Q_1 e Q_2. A distância, nesse caso, é a menor possível, declara ele.

Afirma que: "*[...] quando o ponto Q_1 tende a Q_2, acontece o mesmo com os pontos x_1 e x_2, isso pelo eixo x*". Essa noção de limite apoia-se no conceito de função. Continua a explicação: "*[...] isso leva à alteração nos valores da inclinação da reta. Os Pontos Q_1 e Q_2 que estão inscritos na reta secante em $f(x)$, logo, o ponto Q_1 tenderá para Q_2, eles vão se aproximando tão próximo de 0 (zero) dando originalidade a uma reta tangente do gráfico*". Nesse registro, a inclinação da reta secante que passa por Q_1 e Q_2, tende a se aproximar da inclinação de uma reta tangente que passa por Q_2 quando $x_1 \to x_2$, fazendo $Q_1 \to Q_2$. Esse registro configura uma noção de limite, utilizada na elaboração de uma noção de derivada.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U2. Na U1, a noção de limite foi apresentada apenas pela aproximação dos pontos Q_1 e Q_2 sem estabelecer uma relação com os valores da abscissa, o que só viria a fazer na U2 quando apresentou a mesma noção de limite quando tentou conceituar derivada. Nessa mesma unidade, ele utilizou o conceito de função em seu processo de representação da noção de derivada. Apresentou uma noção de limite da inclinação ao tentar conceituar a derivada. Para ele, no limite da inclinação entre uma reta secante e um reta tangente, se os pontos se aproximam, a tendência é que essa reta secante tenha um comportamento de reta tangente.

5.4 INVESTIGANDO NOÇÕES DE LIMITES NO ESTUDO DA INTEGRAL DEFINIDA – ATIVIDADE 4

A atividade 4 foi aplicada em dois momentos distintos, incialmente, no término da unidade 1 (U1) e, posteriormente, no final da unidade 3 (U3). A aplicação nessas circunstâncias objetivou conhecer as relações possíveis de serem realizadas com cálculo de áreas e limites de funções, e, posteriormente, verificar como ocorria a conceituação de integral definida sob o enfoque de limites de funções. Na sequência do texto, serão descritos os resultados por aluno, devidamente identificados com código. A análise será realizada pelas comparações entre os dois registros escritos de respostas enviados no OA.

5.4.1 Aluno M1

Unidade 1 – Limite – O aluno observa que há uma relação direta entre n e a quantidade de partições em $[a, b]$. Observa a correspondência de cada ponto no intervalo $[a, b]$ com pontos na representação gráfica da função $f(x)$. Afirma que, quanto maior o valor de n, a soma S das áreas "*tende para um valor maior dentro da área definida pela função*". Nesse registro, o aluno não faz referência ao limite de n, tampouco apresenta a área, delimitada pela função com o eixo x no intervalo $[a, b]$, como o limite da soma dos retângulos quando $n \to \infty$.

Unidade 3 – Integração – O aluno considera a área delimitada pela função como resultante da soma das áreas dos retângulos. Quanto maior o valor de n, menor será o comprimento de cada partição, menor será a área de cada retângulo, mas não explicita se existe o limite. Relaciona os pontos na partição a pontos na representação gráfica da função. Quando diz: *"[...] sua área vai depender sempre do número de partições n. Existe também a relação dos pontos tenderem um para o outro, isso tudo relaciona o conceito de limites e integrais*", apresenta uma noção de limite. Nessa noção de limite, o limite da área da soma dos retângulos depende do valor de n, e, quanto maior o valor de n, maior é a aproximação da soma das áreas dos retângulos com a área de $f(x)$ delimitado pelo eixo Ox em $[a, b]$, ou seja, $S \to A$ sempre que $n \to \infty$. Apresenta uma noção de limite quando estabelece uma relação de limite na aproximação entre dois pontos em $[a, b]$ sempre que n aumenta. Nessa noção, enquanto o valor de $n \to \infty$, então o comprimento de cada partição tende para zero, $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$ e o limite da soma é a área delimitada por $f(x)$ e Ox em $[a, b]$, ou seja, $S \to A$, e essa é uma noção de integral definida.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. Na U1, a descrição foi mais sobre as informações visuais e como expressavam noções de limite. Não fez referência nenhuma aos retângulos formados no interior da área compreendida entre $f(x)$ e Ox. Já na U3, os registros foram mais bem fundamentados na teoria de limites e integrais, sendo apresentadas noções de limite e integral definida. $S \to A$ sempre que $n \to \infty$. Se o valor de $n \to \infty$, então o comprimento de cada partição tende para zero, $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$ e o limite da soma dos retângulos é a área delimitada por $f(x)$ e Ox em $[a, b]$, ou seja, $S \to A$.

5.4.2 Aluno M2

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que, se $n \to \infty$, então a quantidade de partições em $[a, b]$ aumenta, e os retângulos têm sua área diminuída, $A_R \to 0$. Essa é uma noção de limite e estabelece relação de implicação direta do aumento do valor de n. Afirma, ainda, que: "*[...] com o aumento de n, irá existir infinitos pontos, ligando* $[a, b]$", referindo-se às muitas partições possíveis nesse intervalo. Conclui que, se $n \to \infty$, então a área de cada um dos n retângulos tende para zero ($A_R \to 0$) e a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área delimitada por $f(x)$ e Ox, $S \to A$.

Unidade 3 – Integração – O aluno afirma que n influencia no valor da área de cada retângulo, segundo ele, se n aumenta, então a área do retângulo diminui, tendendo para zero, $A_R \to 0$. Para ele, quando isso acontece, a área estimada cresce até o limite que é a região delimitada por $f(x)$ e Ox. Para ele: "*[...] o objetivo de uma integração é obter um número ou uma relação explícita entre variáveis. E o cálculo da área do gráfico de uma função entre os dois números dados*". Nesse registro, o aluno apresenta uma noção de integral definida, sobretudo a sua interpretação a partir de suas ações.

Comparação entre unidades – Não houve grande evolução conceitual evolução conceitual da U1 para a U3. Um diferencial foi a tentativa de definição do objetivo da integral definida, este, com fortes elementos da U2. A situação-problema foi entendida por ele como um processo de limite da soma, e disse que, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, $A_R \to 0$ e, por fim, $S \to A$.

5.4.3 Aluno M3

Unidade 1 – Limite – O aluno não realizou a atividade 4 na unidade 1.

Unidade 3 – Integração – O aluno apresenta, assim, a sua visão do processo contido no *applet*: "*O que se vê, é que, quando n for muito grande ou ir para o infinito, o valor da soma acima se aproxime do valor da área abaixo da curva e, portanto, da integral*", ou seja, se $n \to \infty$, então $S \to A$. O aluno faz referência também às somas de Riemann superior e inferior, pois, para um número muito grande de partições, essas duas somas convergem para a área que a função $f(x)$ delimita com Ox no intervalo $[a, b]$. Reconhece que: "*os pontos a e b são os limites (inferior e superior, respectivamente) de integração*", referindo-se ao intervalo de integração. O aluno aplica os conceito e termos da teoria de integrais objetivando descrever os processos contidos na situação-problema. Nota-se que noções de limite são utilizadas do desenvolvimento de noções de integral definida.

Comparação entre unidades – Não foi possível estabelecer uma comparação entre as unidades U1 e U3.

5.4.4 Aluno M4

Unidade 1 – Limite – O aluno observa que, se $n \to \infty$, as somas tendem a ter um limite, que, segundo ele, é 9,65 u.a., calculado pela integral. Segundo ele, "*[...] o intuito é preencher o intervalo $[a, b]$, como se fossemos inscrever os retângulos e trapézios, nesse intervalo*", referindo-se ao aumento do número de pontos e partições como consequência do aumento de n. A noção apresentada é que, se $n \to \infty$, então $S \to A$.

Unidade 3 – Integração – O aluno afirma que o aumento do número de partições, $n \to \infty$, está relacionado com o comprimento do lado de cada retângulo. O aluno afirma que: "*[...] o espaço vai se tornando muito pequeno, e que as áreas das figuras tendem a obedecer a esse decrescimento*". Nesse registro, ao falar de espaço, o aluno refere-se ao comprimento de cada partição que tende a diminuir, $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, e, como essas partições são as bases de cada retângulo, a área de cada retângulo diminuirá. Afirma que a área de cada retângulo tende para zero, $A_R \to 0$, preenchendo a região entre $f(x)$ e Ox pela soma das áreas A_R dos retângulos sempre que $n \to \infty$. Essa noção foi uma descrição realizada por observação no *applet*, segundo relatou o aluno. Sobre as somas de Riemann superior e inferior, o aluno explica como essas somas convergem para um mesmo valor limite quando $n \to \infty$: "*Em se tratando de Riemann superior, que tem um valor maior, e da inferior com valor menor que a área do intervalo, à medida que vamos aumentando o número de partições, o $\Delta x \to 0$, um lado se aproximando do outro. O comprimento do lado se aproximando de zero, o que resolve o problema de espaços* *que saltam a curva ou que ficam abaixo dela*". Apresenta uma noção de limite quando diz: "*[...] a integral é nada mais do que uma soma de pequenos intervalos*". A integral não se relaciona diretamente com o comprimento da partição, mas sim com as áreas, e pode-se entender como uma soma muito grande de pequenas áreas. O aluno apresenta uma descrição do processo que observa no *applet*: "*Aumentando o número de partições há a necessidade de Δx dos polígonos regulares serem reduzidos, os lados vão se aproximando ao ponto que Δx , que é a área dos retângulos [não é, faz parte do cálculo da área], seja próximo de zero. Adicionando cada uma dessas pequenas partes, resultará na área da curva em determinado intervalo*". Nesse registro, há incorreções quanto a alguns termos, mas a ideia central, a de limite de uma soma, prevalece quando analisamos o registro. Podemos escrevê-la da seguinte forma: Se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, $A_R \to 0$, o que implica no limite da soma $S \to A$, A é o valor da área de uma região delimitada pela função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. Na U1, a noção de integral definida foi dada com uma noção de limite cuja ideia central era uma soma que sofria efeitos da variação do comprimento das n partições. Ideia essa mais bem elaborada na U3, quando foi dado enfoque nas áreas dos retângulos e no limite da soma. As descrições da situação-problema que foram apresentadas tanto na U1 quanto na U3 foram fundamentadas em noções de limite. Apresentaram incorreções quanto a termos e significados, mas a noção do processo de integração foi possível reconhecer nos registros. Diferentemente do ocorrido na U1, na U3, as noções de integral definida foram formuladas com base no limite da soma das áreas de infinitos retângulos, sendo representadas da seguinte forma: Se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, $A_R \to 0$, o que implica no limite da soma $S \to A$, A é o valor da área de uma região delimitada pela função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$.

5.4.5 Aluno M5

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$. Afirma que a área delimitada por $f(x)$ e Ox em $[a, b]$ é a soma das áreas dos retângulos. No registro, o aluno falou de área quando se tratava de comprimento da partição, mas não prejudicou o entendimento do registro. O aluno não explicou como a soma das áreas dos retângulos tem limite na área entre $f(x)$ e Ox.

Unidade 3 – Integração – O aluno inicia o registro afirmando que o aumento de n não altera a área delimitada por $f(x)$ e Ox, dizendo: "*Observei que as partições por mais que aumentem não mudarão a área entre $f(x)$ e Ox, sendo que as partes do retângulo estarão relacionadas com os valores inscritos em n e da função*". Um indício de que talvez não tenha compreendido a relação entre a área a ser calculada e o limite da soma das áreas dos retângulos quando $n \to \infty$. Nesse registro, ele estabelece uma relação entre os lados dos retângulos com os valores de n e $f(x)$. Segue o registro apresentando conhecimentos tratados na U3, ele diz: "*Se a integral entre b e a $f\ (x)\ dx$ existir, dizemos que f é integrável entre o intervalo a e b, portanto, $f(x)\ dx$ é chamada de integral definida no intervalo a e b*". Afirma que a soma das áreas dos retângulos é limitada por $f(x)$ e Ox no intervalo $[a, b]$.

Comparação entre unidades – Não houve evolução conceitual da U1 para a U3. Houve o acréscimo de novos conceitos e conhecimentos, mas a noção de limite utilizada para descrever o processo que trata a situação-problema foi a mesma, uma implicação direta sem observar os limites das áreas dos retângulos ou das partições em $[a, b]$. Podemos escrevê-la da seguinte forma: se $n \to \infty$, então $S \to A$.

5.4.6 Aluno M6

Unidade 1 – Limite – O aluno compreende o mecanismo de causa e efeito de n no *applet*. Compreende que cada partição em $[a, b]$ tem pontos e correspondência com pontos na representação gráfica de $f(x)$, o que demonstra que não utiliza o conceito de função em seus argumentos e construções. Afirma que, alterando o valor n, é alterado a quantidade de partições também é alterada por uma relação direta. Sobre as áreas dos retângulos, ele afirma: "*A soma das áreas vai tendendo para um valor maior, o menor dependendo dos valores inscritos, sendo que a área definida pela integral formação inalterada. Soma dos triângulos [retângulos] $=$ 9,2 $u.a.$ Área entre $f\ (x)\ =\ 9{,}6533\ u, a$*". Note que o limite da soma não foi explicitado adequadamente. A soma não cresce ou diminui de forma indefinida, a soma é limitada pela função, e não pelo valor de n.

Unidade 3 – Integração – O aluno reconhece que a linha poligonal se aproxima do comprimento da função em $[a, b]$, ou seja, se $n \to \infty$, então o comprimento da poligonal tende ao comprimento da $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Afirma também que, se $n \to \infty$, então a área dos retângulos tende a diminuir, $A_R \to 0$.

Comparação entre unidades – Não houve evolução conceitual significativa do aluno entre a U1 e a U3. A diversidade de abordagens foi marcante nos registros. Na U1, foi apresentada uma descrição de alguns fatos que levam à soma das áreas. Não utilizou o conceito de função. O limite da soma foi abordado, mas não como uma noção de limite. A conclusão para o valor da área ocorreu em função de valores numéricos observados no *applet*. Na U3, a noção de limite da soma foi construída para o cálculo do comprimento de uma curva e não para o cálculo da área. Compreende que, se $n \to \infty$, então a área dos retângulos tende a diminuir, $A_R \to 0$.

5.4.7 Aluno M7

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que, se aumentar o número de partições no intervalo [a,b], a área cresce até o limite com o valor da área a ser calculada pela integral. Ele explica: "*[...] quanto mais dividido [a, b] em número de partes, mais as somas das áreas irão se igualar à área da integral, ou seja, a uma proporção. O limite da área da função é dada pela integral da mesma*". Nesse registro, temos a seguinte noção de integral: Se $n \to \infty$, então $S \to A$, mas sem observar, nessa noção, o comportamento das partições e dos retângulos e a relação n.

Unidade 3 – Integração – O aluno estabelece uma relação que, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$. Observa também que as somas de Riemann superior e inferior tendem a se igualar com a área delimitada por $f(x)$ e pelo eixo Ox no intervalo $[a, b]$, e esta última noção foi analisada de forma reversa, pois observou a convergência das somas de Riemann para a área A, se $n \to \infty$. Ele conclui da seguinte forma: *"[...] quando aumentamos o número de partes, a área da integral vai ser a soma de todas as partes que foram divididas. Logo, quanto mais divisões, mais vai se igualar à área da integral*", sendo essa a noção de integral. Analisa a soma como um limite e analisa a relação das áreas dos retângulos com a variação de n.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. Na U1, foi apresentada a seguinte noção: Se $n \to \infty$, então $S \to A$, mas sem observar nessa noção o comportamento das partições e dos retângulos, assim como também a relação desses elementos com a variação de n. Já na U3, a mesma noção foi apresentada, mas considerando que as partições diminuem com o aumento de n, tendendo para zero, $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$. Outra noção de limite foi apresentada quando ele observou que as somas de Riemann superior e inferior tendem para o valor da área A se $n \to \infty$, e esta noção é uma análise da forma reversa da implicação contida na primeira noção apresentada.

5.4.8 Aluno M8

Unidade 1 – Limite – O aluno não fez registro de resposta na U1.

Unidade 3 – Integração – O aluno demonstra compreender que a variação de n implica no cálculo da área A, delimitada por $f(x)$ e Ox no intervalo $[a, b]$. Segundo ele: "*[...] quanto mais retângulos tiverem inseridos mais próximo do valor vai estar [da área A] [...] A área no intervalo* $[a, b]$ *pode ser dividida em infinitas partes de forma que, quanto mais retângulos tiverem inseridos, mais próximo da área real [A] vai estar [...]*". A noção pode ser representada da seguinte forma: se $n \to \infty$, então o número de retângulos aumenta e a soma $S \to A$. No entanto, essa noção não considera o comportamento da partição e suas implicações no processo de limite da soma das áreas dos retângulos. Houve uma tentativa de formalização do processo contido na situação-problema, apresentando elementos e conceitos tratados na U3: "*[...] a função é definida no intervalo* $[a, b]$ *tal que* $a = xo < x1 < x2$ *... Para cada valor de* c*, terei um valor de* ci*, como ela, existe no intervalo* $[a, b]$ *ela é integral [...]*". Nesse registro, o valor c_i da função foi declarado, mas não foram analisados os critérios que levam à escolha desse ponto no processo de integração.

Comparação entre unidades – Não foi possível estabelecer algum tipo de comparação, pois só houve registro de resposta na U3.

5.4.9 Aluno M9

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que, se $n \to \infty$, então o comprimento da partição diminui, $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, o que implica no limite da soma $S \to A$.

Unidade 3 – Integração – O aluno afirma que é possível encontrar a área delimitada por $f(x)$ e Ox a partir da soma das áreas dos retângulos. Segundo ele, subdividir o intervalo após a variação de n implica em subdividir essa área em n partes iguais. Justifica ser possível o cálculo da área: "*Seja f: $[a, b] \to R$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. É possível determinar a área da região delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo Ox e pelas retas $x = a$ e $x = b$*", mas não formaliza o cálculo da área. Afirma que o processo de integração consiste em obter uma relação entre as variáveis envolvidas, mas não diz quais.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. A noção de integral apresentada foi a mesma que a apresentada na U1, mas, na U3, houve a introdução de termos e conceitos relativos à unidade. Tanto na U1 quanto na U3 o aluno não analisou o limite da soma das áreas com $A_R \to 0$ como implicação direta de $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$.

5.4.10 Aluno M10

Unidade 1 – Limite – O aluno considera que o aumento do valor de n implica no aumento de partições no intervalo. Para ele: "*[...] o espaço dos retângulos se ajustam nas curvas se alinhando dentro do intervalo*", mas firma também que "*[...] o valor de n determinará o limite em cada ponto dentro do intervalo*", referindo-se ao fato de que as partições se ajustam e o comprimento delas diminui, $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$. Sobre a área o limite da soma ele afirma: "*[...] a soma [da área] desses retângulos se aproximam da área [entre $f(x)$ e Ox] do intervalo [$[a, b]$]. [...] após a soma das áreas dos retângulos, teremos o limite de toda área*". No registro, o aluno descreve a soma como um limite. Sobre a situação-problema, o aluno apresenta a sua descrição e noção: "*[...] quando dividimos o intervalo $[a, b]$, buscamos compor a área ocupada pela função fazendo subdivisões nos retângulos e assim aproximar a área da curva, após fazer* *a divisão basta somar a área dos retângulos integrando toda a área máxima dentro do intervalo*". No registro, o aluno afirma que o particionamento do intervalo implica no preenchimento, no alcance dos retângulos sobre a curva, mas, mesmo afirmando que as partições diminuem, nada afirma sobre o comportamento da área do retângulo e sua importância no limite da soma. A noção apresentada tanto na U1 quanto na U3 diz que, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, e o número de retângulos tende para o infinito, ocupando a área entre $f(x)$ e Ox no intervalo $[a, b]$, o que implica no limite da soma (S) das áreas dos retângulos que é a área (A), e, assim, $S \to A$. O aluno, em seus registros, utiliza os valores numéricos para argumentações e exemplificações.

Unidade 3 – Integração – O aluno afirma que a inserção de retângulos sobre a área A permite o cálculo da área máxima no intervalo $[a, b]$, o que já configura uma noção de limite. Segundo ele: "*[...] na função apresentada, percebo que o intervalo dividido em 5, 6, 10, ou 20 partes eu não consigo ter a área mais próxima possível, pois o intervalo dividido em poucas partes fica sobrando área dos retângulos fora da função apresentada*", sendo assim, considera $n \to \infty$. Em seguida, cita um exemplo em que a área é obtida de forma aproximada com $n = 999$, segundo ele: "*[...] o valor de n em 999 obtemos a área aproximada ocupada no intervalo $[a, b]$, onde os espaços dos retângulos se ajustam na área ocupada*", mas não explicita se considera que $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$. Sobre a situação-problema ele relata: "*[...] à medida que o intervalo é subdividido em retângulos, e depois somamos as áreas desses retângulos percebemos uma aproximação do valor da área definida pela integral. Dessa forma, basta fazer subdivisões até os retângulos se ajustarem no espaço da função esse ajuste vai ser o limite dessas subdivisões e vai nos dar o valor aproximado da integral definida*". O entendimento da noção apresentada é o mesmo que na U1.

Comparação entre unidades – Não houve evolução conceitual da U1 para a U3. A noção apresentada tanto na U1 quanto na U3 diz que, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, e o número de retângulos tende para o infinito, ocupando a área entre $f(x)$ e Ox no intervalo $[a, b]$, o que implica no limite da soma (S) das áreas dos retângulos que é a área (A), e, assim, $S \to A$.

5.4.11 Aluno M11

Unidade 1 – Limite – O afirmou apenas que o aumento de n implica na diminuição da área do retângulo até obter, aproximadamente, o valor da área compreendida entre $f(x)$ e Ox no intervalo $[a, b]$, ou seja, se $n \to \infty$, então $A_R \to 0$, o que implica no limite da soma $S \to A$.

Unidade 3 – Integração – Sobre a relação de n e a área a ser preenchida ele afirma: "*quanto mais se aumentam as subdivisões [partições do intervalo $[a, b]$], maior o espaço a ser ocupado*". Segundo ele: "*Quando o número de partes (n tende a 0 [$n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$]) for a maior possível assim a área estará também quase em sua totalidade preenchida. A área que ficará sem preencher é mínima que se torna imperceptível*". Nesse registro, há uma contradição, mas compreende-se que houve um conflito com os conceitos de infinito e partes muito pequenas quando afirma: "*Quando o número de partes [...] for a maior possível*", a consequência é que cada parte seja a menor possível, e, por isso, ele afirma que n tende a zero, quando, na verdade, quis afirmar que, com o aumento do número de partições, a tendência é que as partições tendam a ter o comprimento próximo de zero. Para explicar o processo, o aluno utiliza noções de limite do comprimento e da área. O entendimento que o aluno tem da situação-problema é que: *"[...] a área total da integral será a soma das partes ali contidas num determinado intervalo. Quanto maior o número dessas subdivisões, maior a área a ser ocupada*". Pode-se escrever da seguinte forma a noção apresentada: Se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, o que implica no limite da soma (S) das áreas dos retângulos tender para o valor da área (A) entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$, $S \to A$.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3, mas a noção apresentada na U3 foi a mesma da U1: Se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, o que implica no limite da soma (S) das áreas dos retângulos tender para o valor da área (A) entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$, $S \to A$. No entanto, a evolução deu-se pela capacidade argumentativa demonstrada na explicitação da situação-problema e de suas observações sobre o processo contido no $applet$. Mas, tanto na U1 quanto na U3, houve conflito entre o conceito de infinito e partes tão pequenas quanto se queira.

5.4.12 Aluno M12

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que o valor de n está diretamente relacionado à quantidade de retângulos no interior da área A. Faz uma correspondência entre os pontos no intervalo $[a, b]$ e pontos na representação gráfica de $f(x)$. Descrevendo, assim, a noção de limite da soma: "*[...] quando modificamos os números das partes* $[a, b]$*, e quando alteramos o número da parte* n*, a soma das áreas vai tendendo para o valor maior ou menor dependendo dos valores inscritos, sendo que a área definida pela integral permanecerá inalterada*". Nesse registro, a relação direta entre n e a área (S) resultante da soma das áreas dos retângulos está bem explícita. O que significa que $S \to A$ sempre que $n \to \infty$. É interessante notar que, por considerar uma variação de área, ele constata que a área A é constante nas condições já especificadas.

Unidade 3 – Integração – O aluno inicia o registro afirmando novamente que a área A é constante enquanto a área S é variável em função de n. Segundo ele: "*[...] quando "n" for uma quantidade muito grande, o valor da soma se aproxime do valor da área abaixo da curva e, portanto, da integral de* $f(x)$ *no intervalo [*$[a, b]$*]. Ou seja, que o limite esteja definido. A definição de integral aqui apresentada é chamada de soma de Riemann*", e, assim como na U1, a noção apresentada foi a que, se $S \to A$, é porque $n \to \infty$. O aluno tentou uma formulação matemática para suas observações a partir da teoria da integração.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. Na U3, o aluno tentou formalizar matematicamente o processo por ele observado. Notadamente, na U3, o aluno argumentou e apresentou noções de limite e integral a partir de conhecimentos tratados na U3. Como nas duas unidades o aluno estabeleceu uma relação direta entre a soma das áreas (S), a noção apresentada foi: se $S \to A$, é porque $n \to \infty$. Nas análises resultantes da U1 ou U3, não foi feita uma relação entre o limite da soma das áreas e o limite da área de cada retângulo.

5.4.13 Aluno M13

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que há uma relação entre n e pontos no intervalo [a,b]. Segundo ele, quando n aumenta a soma (S) dos retângulos, aumenta e vai tender à área (A) que a função $f(x)$ delimita com o eixo Ox no intervalo $[a, b]$. A noção apresentada pode ser representada assim: se $n \to \infty$, então $S \to A$.

Unidade 3 – Integração – Sobre o valor de n e a área A o aluno afirma: "*Se aumentarmos o número de subdivisões dos intervalos, dentro das condições estabelecidas, obteremos uma melhor aproximação para o valor da área*". Esse registro apresenta a mesma noção de integral apresentada na U1. O processo contido no *applet* da situação-problema foi descrito por ele da seguinte forma: "*Aumentando o número de subdivisões (n), a diferença entre a soma da área será menor. Vai obter aproximação cada vez melhor para os intervalos. Continuando a fazer n tender ao infinito, encontraremos a área procurada, sendo que a área entre $f(x)$ e Ox $[a, b]$ será igual a $9{,}6\, u.a.$ (unidade de área)*". Nesse registro, o aluno apresenta processo semelhante ao contido na atividade A1.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. Na U3, houve a introdução de conceitos e conhecimentos tratados na U3. A noção de integral apresentada foi a mesma que a apresentada na U1. Segundo o aluno, se $n \to \infty$, então a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$, $S \to A$.

5.4.14 Aluno M14

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que há uma relação entre n e a quantidade de partições em $[a, b]$. "*[...] quando modificamos o número das partes nos intervalos de $[a, b]$, quando é alterado o número de partes em $[n]$, a soma das áreas vai tendendo para um valor maior ou menor dependendo dos valores inscritos, sendo que a área definida pela integral permanecerá a mesma*". Nesse registro, o aluno apresenta uma noção de integral da seguinte forma: se $n \to \infty$, então a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$, $S \to A$. No registro, o aluno não realizou análises sobre a área de cada retângulo e a relação da variação dessa área com o limite da soma.

Unidade 3 – Integração – O aluno afirma que, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, e a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$, $S \to A$. O aluno apresenta um valor limite para a soma (S) das áreas: "*A soma do limite de subdivisões deste intervalo se aproximará do valor (*9,6*), o que é entendido como integral.".* Segundo ele, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$, $S \to A$.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. Na U3, foram introduzidos novos termos nos registros de respostas. A noção de integral apresentada na U3 foi a mesma apresentada na U1 acrescida do limite do comprimento de cada partição com a variação de n. Para ele: se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$, $S \to A$.

5.4.15 Aluno M15

Unidade 1 – Limite – O aluno afirma que o valor de n implica diretamente na quantidade de retângulos. Afirma que a soma tem um valor maior à medida que n aumenta. A noção de integral apresentada é, se $n \to \infty$, a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$, $S \to A$, é a situação-problema e o processo desenvolvido por ele com os elementos conceituais contidos *applet*.

Unidade 3 – Integração – Diferentemente do ocorrido na U1, o aluno inicia apresentando uma noção de limite e afirmando que a soma de todas as áreas dos retângulos resulta na área entre $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$. Afirma que o limite da soma é a integral. Afirma ainda que: "*[...] quando n for muito grande, o valor da soma acima se aproxima do valor da área abaixo da curva e, portanto, da integral de $f(x)$ no intervalo. Ou seja, que o limite esteja definido*". Ou seja, a noção de integral apresentada é que, se $n \to \infty$, a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$, $S \to A$, é a situação-problema e o processo desenvolvido por ele, com os elementos conceituais contidos *applet*.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. Nas duas unidades, o aluno apresentou a mesma noção de integral afirmando que, se $n \to \infty$, a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$, $S \to A$. Na U1, a soma das áreas dos retângulos apareceu nos registros de forma natural, e intuitiva, sem a devida análise. Fato esse que só ocorreu na U3 logo no início do registro, como uma conclusão sem antes mesmo falar da variação da quantidade de partições. Nas duas unidades, o aluno tentou explicar o processo por ele construído para agir sobre a situação-problema; na U1, se valeu dos recursos da teoria de limites e, na U3, utilizou a teoria da integral definida com atenção ao limite da soma.

5.4.16 Aluno M22

Unidade 1 – Limite – Sobre a variação de n e o número de retângulos, o aluno afirma: "*Quando se altera o número de subdivisões pelo número [n], podemos observar que seus retângulos na curva do gráfico também se alteram conforme a quantidade de valores, ou seja, os retângulos se dividem em partes iguais de acordo com os números inscritos*", estabelecendo, assim, uma relação direta entre n e a quantidade de retângulos. Relaciona, ainda, o valor de n com o número de partições, mas sem relacionar a partição como base do retângulo. Apresenta a noção de integral da seguinte forma: se $n \to \infty$, a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$, $S \to A$. O aluno não buscou na teoria de limites os elementos conceituais para formalizar o processo.

Unidade 3 – Integração – Assim como na U1, o aluno inicia o relato dando ênfase à soma das áreas como limite, mas somente na U3 ele relaciona o limite da soma com a variação de n. O aluno afirma: "*A função analisada é considerada contínua positiva em* $[a, b]$. *Para calcular a área sob a curva entre* a *e* b, *foi usado retângulos inscritos na área da curva. O processo se inicia pela subdivisão do intervalo* $[a, b]$, *em n partes não necessariamente iguais*". Percebe-se no registro a intenção de utilizar elementos da teoria de integrais e limites para fundamentar a descrição do processo desenvolvido por ele. Apresenta um argumento presente na teoria da integral definida: "*Podemos usar limites para calcular a área sob a curva entre a e b. Para que sejam mais fáceis os cálculos podemos considerar na subdivisão dos intervalos de mesmo comprimento*", fato este que facilita na representação da soma como um produto. Segundo ele: "*[...] a soma das áreas dos retângulos inscritos nos dá uma aproximação da área sob a curva entre $[a,b]$, dentro das condições estabelecidas, obteremos uma melhor aproximação para o valor da área sob a curva analisada*". Pode-se afirmar que a noção presentada diz que, se $n \to \infty$, a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$, $S \to A$.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. A abordagem nas unidades foi adequada aos conhecimentos tratados em cada uma delas. A noção de integral apresentada foi a mesma, tanto na U1 quanto na U3. Deu ênfase à soma (S) como um limite, mas somente na U3 esse limite foi relacionado com a variação de n. No entanto, em ambas as unidades, foram omitidas as análises das áreas dos retângulos, elementos indispensáveis à conceituação do limite da soma e da integral definida.

5.4.17 Aluno M25

Unidade 1 – Limite – O aluno não realizou registros sobre a atividade A4 na U1.

Unidade 3 – Integração – O aluno inicia o registro tentando caracterizar uma função integrável pela variação do número de partições: "*Quanto mais aumenta a quantidade de n, mais próximo do valor da função fica. Sendo assim, podemos dizer que é integrável no intervalo de $[a,b]$*", fato este que não procede. Em seguida, apresenta no registro o nome das partes de uma notação de integral definida, mas sem justificar o propósito. Por fim, apresenta a sua noção de integral: "*[...] a soma da área do gráfico de uma função, curva ou gráfico formada por vários retângulos cuja as bases são formadas por a e b, a área é uma aproximação da área delimitada por uma função*". Assim, pode-se dizer que a noção apresentada diz que, se $n \to \infty$, a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a,b]$, $S \to A$.

Comparação entre unidades – Não foi possível estabelecer uma relação comparativa entre as unidades U1 e U3.

5.4.18 Aluno M32

Unidade 1 – Limite – O aluno inicia estabelecendo uma relação entre a variação do valor de n, o número de partições e o comprimento delas: "*Quanto mais aumenta o valor de n, [mais] aumenta a divisão de partes, e [mais] diminuirá a numeração das unidades de comprimento*", ou seja, se $n \to \infty$, o número de partições aumenta e o comprimento da partição diminui,$|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$. Por fim, afirma que a soma das áreas dos retângulos tende a ter o valor da área que $f(x)$ delimita com Ox em $[a, b]$, ou seja, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, o que implica também o limite da soma (S) dos retângulos, $S \to A$; A é o valor da área de uma região delimitada pela função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$.

Unidade 3 – Integração – O apresenta uma noção geral do processo contido no *applet*: "*Quando alteramos o valor de (n), as somas [a soma S das áreas dos retângulos] vão tender para o valor da área total do intervalo [a área A], ou seja, quando (delta x) tende a 0 (zero), pois, quanto mais aumentamos o número de retângulos, os lados ficam mais próximos, porque a base vai tendendo pra 0 [...] quando o número de retângulos aumenta, vai se aproximando de um determinado valor, esse valor nesse caso é o da área [A] do intervalo, à medida que (n) vai tendendo para um valor muito próximo de 1.000, as somas tendem a um valor total do intervalo*". Nesse registro, o aluno não considera explicitamente a possibilidade de $n \to \infty$, apenas que n cresce, mas podemos intuir que n tende para infinito, pois, no registro, diz que o valor de n já próximo de 1000 se obtém um valor da área com uma aproximação satisfatória. Pode-se escrever a noção apresentada pelo aluno da seguinte forma: se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, o que implica também o aumento do número de retângulos na mesma proporção que n, obtendo, assim, o limite da soma (S) dos retângulos, $S \to A$; e A é o valor da área de uma região delimitada pela função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$.

Comparação entre unidades – Houve evolução conceitual da U1 para a U3. Na U1, a noção de integral apresentada considerou o limite de cada partição; no entanto, não analisou as implicações desse limite na variação do número e área dos retângulos. Na U3, a noção apresentada considerou não só a variação do comprimento da partição como um limite, como também o número de retângulo obtidos pela variação de n, omitindo a análise da variação da área desses retângulos e a influência desse comportamento no cálculo do limite da soma, da integral definida. A noção apresentada diz que, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, o que implica, o aumento do número de retângulos na mesma proporção que n, obtendo, assim, o limite da soma (S) dos retângulos, $S \to A$; e A é o valor da área de uma região delimitada pela função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$.

5.5 RELAÇÕES DE CONHECIMENTOS

A seguir, serão apresentados os resultados obtidos a partir da análise das informações coletadas ao longo da pesquisa. Os resultados obtidos correspondem à tentativa desta pesquisa, de responder ao problema ou questão de pesquisa, e atender aos objetivos propostos na mesma. As atividades A1 e A2 se relacionam diretamente com a parte principal da questão de pesquisa. Nessas atividades foi possível realizar entrevistas para melhor compreender os processos de construção, o que possibilitou estabelecer relações de conhecimento. Já as atividades A3 e A4, relacionam-se com a questão complementar dentro da questão de pesquisa. Em Silva e Becker (2016b) foi realizado um estudo sobre noções de limite. Nesse estudo, os conhecimentos matemáticos, as noções de limite, foram relacionadas entre si, caracterizando grupos de desenvolvimento. Foi possível destacar três grupos de desenvolvimento, caracterizados pelas relações de conhecimento. Nessa pesquisa os OA continham uma situação-problema. As tecnologias do Geogebra e Google foram utilizadas para compor o OA. Esse objeto de aprendizagem foi disponibilizado online em domínio próprio com acesso livre.

5.5.1 Atividade A1

Na atividade A1, foram destacados onze conhecimentos a serem mobilizados no *applet*. Desses conhecimentos havia os que se relacionavam a processos de estimação, são os conhecimentos C1, C2, C3, C4, C5. Desses conhecimentos, C1 indica a possibilidade do processo de estimação com a sobreposição de figuras e o estabelecimento de um mecanismo de diferenciação entre elas. Os conhecimentos C2 e C3 indicam a possibilidade de estimar a área do círculo com um polígono inscrito e/ou circunscrito, respectivamente. Os conhecimentos C4 e C5 indicam como e se os alunos realizam a decomposição da área de P_n. Os conhecimentos C6 e C7 revelam o comportamento da área do polígono P_n quando analisados n e l independentes um do outro, sem observar a natureza inversa entre eles no processo de aproximação da área do polígono para a área do círculo delimitado pela circunferência de raio unitário. Os conhecimentos que revelam a conclusão do processo de estimação, e não somente a possibilidade de estimação, são: C8, C9, C10 e C11. Após a análise dos dados coletados, foi possível, dentro do grupo de participantes, determinar grupos de desenvolvimento a partir dos conhecimentos apresentados e a relação (R) estabelecida com esses conhecimentos. Foram identificados 6 (seis) grupos de desenvolvimentos, identificados pelos códigos R1, R2, R3, R4, R5 e R6.

Quadro 1: Relações de conhecimento - A1

ID	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	R
M1	X	X	X	X		X		X				R3
M2	X	X	X					X				R2
M3	X	X							X			R2
M4	X	X		X				X				R4
M5	X	X	X	X				X				R4
M6	X	X		X		X		X	X			R1
M7	X	X						X				R2
M8	X	X						X				R2
M9	X	X		X				X				R4
M10	X	X		X			X					R5
M11	X	X						X				R2
M12	X	X		X			X	X				R3
M13	X	X						X				R2
M14	X	X		X				X				R4
M15	X	X		X				X				R4
M22	X	X		X		X						R5
M25	X	X		X		X		X	X			R1
M32	X	X		X								R6

O Quadro 1 permite observar os conhecimentos apresentados por alunos e as relações estabelecidas por eles. Todos os alunos afirmaram ser possível a estimativa da área de um círculo a partir de polígonos regulares. Não houve processos relativos ao conhecimento C5. Não houve conclusões com os conhecimentos C10 ou C11. Houve também alunos que, apesar de afirmar ser possível a estimação, não apresentaram elementos que levassem à conclusão do processo de estimação da área do círculo a partir da área de polígonos regulares. Seguem as relações, a lógica estabelecida com os conhecimentos apresentados e os grupos de desenvolvimento.

Relação 1 – R1: $\big((C2 \wedge C4) \rightarrow (C6)\big) \rightarrow \big((C8 \wedge C9) \leftrightarrow C1\big)$. Nesta relação, os alunos concluíram o processo de estimação com noções de limite, afirmando que, se $n \rightarrow \infty$ e $l \rightarrow 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \rightarrow 0$, se e somente se, P_n estiver inscrito na circunferência, o que equivale concluir que, se $S_i \rightarrow 0$, então $A(P_n) \rightarrow A(C)$. Foi necessária a decomposição em triângulos da figura inscrita. Fazendo n aumentar no $applet$, conclui que a área aumenta, sendo necessária a construção do conceito de função para determinar que o ajuste ocorre pelo comprimento do lado do polígono, o que é necessário para mantê-lo inscrito. Neste grupo, estão os alunos M6 e M25.

Relação 2 – R2: $(C2 \vee C3) \rightarrow \big((C8 \vee C9) \leftrightarrow C1\big)$. Nesta relação, os alunos concluíram o processo de estimação com noções de limite, afirmando que, se $n \rightarrow \infty$ e $l \rightarrow 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \rightarrow 0$, se e somente se, P_n estiver inscrito na circunferência, o que equivale concluir que, se $S_i \rightarrow 0$, então $A(P_n) \rightarrow A(C)$. Não realizou a decomposição da figura inscrita em triângulos, a conclusão foi direta, sem uma análise explícita das relações inversas entre n e l e seus limites. Neste grupo, estão os alunos M2, M3, M7, M8, M11 e M13.

Relação 3 – R3: $\Big(\big((C2 \vee C3) \wedge C4\big) \rightarrow (C6 \vee C7)\Big) \rightarrow (C8 \leftrightarrow C1)$. Nesta relação, os alunos concluíram o processo de estimação com noções de limite, afirmando que, se $n \rightarrow \infty$ e $l \rightarrow 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \rightarrow 0$, se e somente se, P_n estiver inscrito na circunferência, mas realizaram tentativas com o polígono circunscrito. Foi necessária a decomposição em triângulos da figura inscrita. Observaram que, fazendo n ou l aumentar no $applet$, a área aumenta, ou seja, a conclusão ocorre com C6 ou C7, mas, necessariamente, com C4. Neste grupo, estão os alunos M1 e M12.

Relação 4 – R4: $\big((C2 \vee C3) \wedge C4\big) \rightarrow \big((C8 \vee C9) \leftrightarrow C1\big)$. Nesta relação, os alunos concluíram o processo de estimação com noções de limite, afirmando que, se $n \rightarrow \infty$ e $l \rightarrow 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \rightarrow 0$, se e somente se, P_n estiver inscrito na circunferência, o que equivale concluir que, se $S_i \rightarrow 0$, então $A(P_n) \rightarrow A(C)$. Realizou a decomposição da figura inscrita em triângulos, a conclusão foi direta, sem uma análise explícita das relações inversas entre n e l e seus limites. Neste grupo, estão os alunos M4, M5, M9, M14 e M15.

Relação 5 – R5: $C1 \wedge \big((C2 \wedge C4) \rightarrow (C6 \vee C7)\big)$. Nesta relação, os alunos não concluíram o processo de estimação, mas apresentaram noções de limite e do infinito. Diz que se $l \rightarrow \infty$, então $A(P_n) \rightarrow \infty$ ou se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) \rightarrow \infty$. Reconhecem a possibilidade de estimação da área do círculo a partir da sobreposição da área do círculo com um polígono regular inscrito e decomposto em triângulos. Reconhece que a área aumenta com n ou l. Neste grupo, estão os alunos M10 e M22.

Relação 6 – R6: $C1 \wedge (C2 \wedge C4)$. Nesta relação, o aluno não concluiu o processo de estimação, mas apresentou noções de limite da área e da altura, mesmo não sendo explícita essa última situação. Reconhecem a possibilidade de estimação da área do círculo a partir da sobreposição da área do círculo com um polígono regular inscrito e decomposto em triângulos. Neste grupo, está o aluno M32.

5.5.2 Atividade A2

Na atividade A2, foram destacados 6 (seis) conhecimentos a serem mobilizados no *applet*. Desses conhecimentos havia o conhecimento C1 que se relaciona ao processo de estimação e reconhecimento visual das áreas por comparação. Os conhecimentos C2, C3 e C4 tratam de limites que fundamentam a análise da situação-problema. O conhecimento C5 é uma conclusão que trata da composição da área. O conhecimento C6 é a conclusão da situação-problema, e esse conhecimento trata também da formalização desse conhecimento em linguagem de limites. Após a análise dos dados coletados, foi possível, dentro do grupo de participantes, determinar grupos de desenvolvimento a partir dos conhecimentos apresentados e a relação (R) estabelecida com esses conhecimentos. Foram observados 7 (sete) grupos de desenvolvimentos identificados pelos códigos R1, R2, R3, R4, R5, R6 e R7.

Quadro 2: Relações de conhecimento - A2

ID	C1	C2	C3	C4	C5	C6	R
M1	X	X	X	X	X	X	R1
M2	X	X	X	X	X		R2
M3	X	X	X	X	X		R2
M4	X	X	X	X	X	X	R1
M5		X	X	X	X		R3
M6	X	X			X		R4
M7	X	X	X	X	X		R2
M8	X	X	X	X	X		R2
M9	X	X	X	X			R5
M10	X	X	X	X	X		R2
M11	X	X	X	X			R5
M12		X	X	X	X		R3
M13	X	X	X	X			R5
M14	X	X	X	X			R5
M15		X	X	X			R7
M22	X		X	X			R6
M25	X	X	X	X			R5
M32	X	X	X				R6

O Quadro 2 permite observar os conhecimentos apresentados por alunos e as relações de conhecimentos estabelecidas por eles. Destaca-se a diversidade de relações estabelecidas. Houve alunos que apresentaram as noções de limite e as conclusões possíveis no *applet*, assim como houve alunos que apresentaram apenas as noções de limite, sem realizar conclusão nenhuma sobre a situação-problema. Seguem as relações, a lógica estabelecida com os conhecimentos apresentados e os grupos de desenvolvimento.

Relação 1 – R1: $C1 \wedge \Big(\big((C2 \wedge C3 \wedge C4) \rightarrow C5\big) \rightarrow C6\Big)$. Conceitua a área como $\lim_{n\to\infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$. Esta relação apresenta todos os conhecimentos descritos na situação-problema. Trata dos processos e das noções de limite que fundamentam as conclusões do problema proposto. Os alunos apresentam noções de limite da base, da altura e das áreas. Apresentam a área como o limite de uma soma infinita. Neste grupo, estão os alunos M1 e M4.

Relação 2 – R2: $C1 \wedge \big((C2 \wedge C3 \wedge C4) \rightarrow C5\big)$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$. Esta relação se assemelha à relação R1, exceto pela ausência de C6, não ocorrendo a formalização do processo de aproximação entre as áreas do polígono inscrito e do círculo. Trata dos processos e das noções de limite que fundamentam as conclusões do problema proposto. Os alunos apresentam noções de limite da base, da altura e das áreas. Neste grupo, estão os alunos M2, M3, M7, M8 e M10.

Relação 3 – R3: $(C2 \wedge C3 \wedge C4) \rightarrow C5$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$. Esta relação trata do processo de composição da área do polígono inscrito e das noções de limite que fundamentam as conclusões do problema proposto. Os alunos apresentam noções de limite da base, da altura e das áreas. Conclui que a área do polígono inscrito pode ser representada por uma soma de n áreas iguais. Neste grupo, estão os alunos M5 e M12.

Relação 4 – R4: $C1 \wedge (C2 \rightarrow C5)$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$. Nesta relação, ocorre a conclusão pela decomposição da área do polígono inscrito em n triângulos. O aluno considera visualmente a sobreposição das figuras como processo que possibilita obter visualmente uma estimativa da área do círculo. O aluno apresenta uma noção de limite da base. Neste grupo, está o aluno M6

Relação 5 – R5: $C1 \wedge (C2 \wedge C3 \wedge C4)$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) \rightarrow A(C)$ com $l \rightarrow 0$ ($B_{T_i} \rightarrow 0$), $h_{T_i} \rightarrow r = 1$ e $A_{T_i} \rightarrow 0$. Nesta relação, o aluno considera, visualmente, a sobreposição das figuras como processo que possibilita obter visualmente uma estimativa da área do círculo. Os alunos apresentam noções de limite da base, da altura e das áreas dos triângulos. Neste grupo, estão os alunos M9, M11, M13, M14 e M25.

Relação 6 – R6: $C1 \wedge \big(C3 \wedge (C2 \vee C4)\big)$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) \rightarrow A(C)$ com $l \rightarrow 0$ ($B_{T_i} \rightarrow 0$), $h_{T_i} \rightarrow r = 1$ e $A_{T_i} \rightarrow 0$. Nesta relação, o aluno considera, visualmente, a sobreposição das figuras como processo que possibilita obter visualmente uma estimativa da área do círculo. O aluno apresenta noções de limite da base, da altura e das áreas dos triângulos. Neste grupo, estão os alunos M22 e M32.

Relação 7 – R7: $C2 \wedge C3 \wedge C4$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $l \rightarrow 0$ ($B_{T_i} \rightarrow 0$), $h_{T_i} \rightarrow r = 1$ e $A_{T_i} \rightarrow 0$. Nesta relação, o aluno apresenta noções de limite da base, da altura e das áreas dos triângulos. Neste grupo, está o aluno M15.

6 CONCLUSÕES

Esta pesquisa parte de uma questão problema: saber qual a noção de limite de funções que alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, do Curso de Licenciatura em Ciências Naturais, apresentam em interação com objetos de aprendizagem do Geogebra em ambiente virtual. Essa é a questão mais geral. A partir dela, a pesquisa quer responder a outra questão não menos importante, embora secundária: como os alunos relacionam as noções apresentadas com a construção de conhecimentos sobre funções derivadas e integração definida (ver seção 1.2). Os objetivos visam a atender as expectativas geradas pelo problema. De modo geral, esta pesquisa se propõe a analisar, pela ótica da EG, a noção de limite de funções que alunos apresentam na interação com objetos de aprendizagem do Geogebra, em ambiente virtual. Especificamente, investigar a noção de limite de funções resultante da interação entre alunos e OA no ambiente virtual; investigar processos de abstração reflexionante, realizados por eles ao tentar conceituar "limite de funções" e as relações que fazem da noção de limite de funções, com os problemas da derivada e da integral de funções reais de uma variável (ver seção 1.3).

Os dezoito alunos que concluíram a pesquisa, participaram de forma voluntária das atividades propostas em sala de aula durante a implementação de uma disciplina de Cálculo Diferencia e Integral. Foram necessárias três aplicações até a obtenção de dados consistentes que viabilizassem a pesquisa. Os registros de respostas e as entrevistas revelaram um número considerável de informações relevantes do ponto de vista didático e do desenvolvimento intelectual desses alunos. Vale ressaltar que os alunos tiveram contato prévio com todas as atividades A1, A2, A3 e A4, antes de realizar os registros ou participar das entrevistas, ou seja, realizaram processos de assimilação e acomodação relativos às situações-problema postas a eles, que aconteceram antes, durante e após os procedimentos de coleta.

O procedimento adotado para as atividades A1 e A2, de coletar o registro de resposta e, em seguida, realizar entrevista exploratória, mostrou-se eficiente para identificar diferentes abordagens sobre um mesmo tema, além de ser um modo de estabelecer diferenças. Já o procedimento adotado nas atividades A3 e A4 mostrou-se como um importante instrumento avaliativo, uma vez que os registros são expressões e percepções que cada aluno faz de si e do processo de construção do conhecimento desenvolvido por ele. Como nessas atividades os alunos agiam sobre uma mesma situação-problema, foi possível verificar como a inserção de novos conhecimentos afetavam os registros iniciais de limites na construção dos conceitos de derivada e integrais. Como essas atividades foram previamente analisadas pelos alunos, decorre dessa experiência vários processos de construção de conhecimento por abstração reflexionante. Nos registros escritos, houve um contato inicial com as atividades A1, A2, A3 e A4, sendo que os registros de respostas objetivavam coletar informações sobre os processos realizados na interação entre aluno e OA de cada atividade.

Nas entrevistas, houve uma reprodução exploratória dos processos realizados por eles. A partir dos registros, das falas e das ações, foi possível conhecer as noções de limite que alunos apresentavam diante das situações-problema contidas nos OA.

6.1 NOÇÕES DE LIMITE, DERIVAÇÃO E INTEGRAL DEFINIDA

É possível concluir que noções de limite foram apresentadas com o conceito de função e sem a utilização desse conceito; porém, nota-se que, nos casos em que a noção de limite é apresentada com o conceito de função, ela é mais consistente e a expressão de limite se estende a vários elementos e não somente à área. Nesta pesquisa, noções de limite foram apresentadas por alunos; essas noções envolveram temas como infinito, área e comprimento. A conclusão pela possibilidade de estimar a área do círculo a partir de polígonos regulares é resultante de processos de abstração reflexionante, decorrentes da interação com as situações-problema. As noções de limite serão apresentadas por atividade.

6.1.1 Atividade A1

A alteração do parâmetro n propiciou processos construtivos por abstração reflexionante em decorrência da apropriação da coordenação de ações sobre n e a deformação da área do polígono inscrito, mas sem a apropriação do conceito de função e de limite em muitos casos. Conclui-se que fazer alterações do valor do parâmetro n, observar as deformações sofridas por P_n, e posicionar as figuras, facilita a compreensão da relação que se estabelece entre n e l na aproximação entre as áreas do polígono e do círculo. Os registros escritos de respostas e a entrevista permitiram constatar divergências nos procedimentos e resultados na estimação. Diversos processos de construção de conhecimento se originam a partir de abstrações pseudoempíricas quando o aluno altera o valor do número de lados de cada polígono. Conclui-se que a coordenação das ações do aumento do número de lados e diminuição do comprimento do lado desse polígono permite o ajuste para a aproximação entre as áreas.

Uma noção de limite da área está associada à sequência de polígono e a seus valores de área, pois a sequência de valores das áreas tende ou converge para a área do círculo. Essa noção de limite está associada a uma sequência geométrica de polígonos inscritos com razão dois em relação ao número de lados, ou seja, se $n \to \infty$, então $A(P_n) \to A(C)$. A grande maioria dos alunos estimou a área do círculo pela diferença entre a área do círculo e a área de cada polígono P_n e, desse modo, seria possível observar que a diferença entre as áreas diminuía a cada deformação que a área sofria quando n crescia, ou seja, $|A(P_n) - A(C)| \to 0$ enquanto $n \to \infty$. Em algumas ocasiões, os alunos se valem das relações entre n e l com o polígono regular inscrito para realizar ajustes e permitir a comparação com a área do círculo. Esse processo inicialmente ocorre por abstração pseudoempírica e, em seguida, por abstração refletida.

Alguns alunos estimaram a área do círculo com recurso exclusivamente visual, pois, apesar de colocarem os polígonos, inscrito ou circunscrito, não souberam explicitar o processo de aproximação que ocorria entre as áreas. Uma noção de limite que foi apresentada está fundamentada na aproximação do valor da área de um polígono P_n por um valor na vizinhança, com um determinado valor de n por mais que $n \to \infty$, ou seja, para todo n, será possível obter uma estimativa desde que a área da figura não exceda a área do círculo. Para outros alunos, esse processo ocorre pela relação conjunta entre n e l com variação inversa. Quanto maior o valor de n e menor o valor de l, melhor é a aproximação da área do círculo pela área do polígono. Esse processo pode ser denotado pela seguinte relação: se $n \to \infty$, $l \to 0$, então $A(P_n) \to A(C)$ se, e somente se, P_n estiver inscrito na circunferência que delimita a área do círculo; essa mesma relação pode ser entendida afirmando que mantendo a variação inversa entre n e l, e mantendo P_n inscrito em C, o limite da $A(P_n)$ é $A(C)$. Essa mesma noção foi apresentada quando disse que caberiam infinitos lados, desde que pudesse diminuir o comprimento dos lados. Uma noção de limite e infinito está presente quando diz que os lados diminuem o comprimento do lado até valores próximos de zero.

Houve alunos que apresentaram o processo de diferenciação entre as áreas do polígono e do círculo, no entanto, essa noção de um valor limite desconsidera os infinitos vértices que são pontos comuns à circunferência, acreditando que o valor resultante da aproximação é exato. Houve afirmações de que a área do polígono inscrito tende para a área do círculo, mas sem estabelecer a relação entre a área de P_n e o lado l, o que demonstra a ausência do conceito de função. Apresenta fortemente o conceito de função quando fixa o valor de n e altera o valor de l para fazer a área do polígono tender para a área do círculo.

Muitos alunos coordenaram ações que resultaram em processos de abstração refletida sobre o limite da área. Essas coordenações de ações, resultam não só da alteração de n, mas também da alteração do valor do comprimento do lado l. Nesse relato os alunos não reconheciam a área do polígono como uma função em relação ao lado l. A conceituação foi verificada na entrevista feita com alunos devido à utilização explícita do *applet*

Foram apresentadas noções de limite, vinculadas com noções de infinito, observadas nos processos de diminuição da diferença entre as áreas do polígono e do círculo. Outra noção de limite está vinculada à noção de infinito, relacionada diretamente com o comprimento do apótema de um polígono inscrito na circunferência. Podem ser destacadas, ainda, outras duas noções: uma noção de infinito na redução do comprimento de l em infinitas vezes e uma noção de limite ao passo que cada lado tende a ter diminuído o seu valor numérico, ou seja, se $n \to \infty$, então $l \to 0$. Nessa noção, os lados diminuem infinitas vezes com o comprimento diferente de zero por partes muito pequenas.

Foi apresentada uma noção de limite na aproximação entre os comprimentos dos lados isósceles do triângulo isósceles e o raio da circunferência, quando o aluno faz o apótema tender para o raio da circunferência, ou seja, o comprimento do apótema tende para o comprimento do raio.

6.1.2 Atividade A2

Apesar da dificuldade com fundamentos da geometria e contradições apresentadas, os registros de resposta e a entrevista permitiu observar noções de limite relacionadas aos comprimentos e às áreas. As noções de limite apresentadas foram as que resultaram da variação de n. As noções de limite sobre comprimentos são as da base ou lado que tendem para zero e altura ou apótema que tendem para o comprimento de medida 1, que é a medida do raio, ou seja, se $n \to \infty$, então a altura $h_{T_i} \to r = 1$ e $l \to 0$ ($B_{T_i} \to 0$). As noções de limites de área dizem respeito às áreas de cada triângulo T_i e à área do polígono P_n, ou seja, se $n \to \infty$, $A_{T_i} \to 0$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$. Por abstração refletida, com os alunos utilizando a noção de limite, e fazendo a base tender para zero, compreendem que a altura tende a ter o mesmo comprimento dos lados do triângulo isósceles. Ocorreu, em alguns casos, a conceituação de limite quando os alunos afirmaram que, nas noções apresentadas, os valores, para os quais eles tendem, não necessariamente precisavam ser exatos no ponto. Essas afirmações foram fundamentadas em seus significados geométricos e não somente na definição de limite. Foi apresentada a noção de limite que: se $n \to \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$. Essa noção de limite está presente na conceituação de integral definida como o limite da soma das áreas. Esse produto é caracterizado por uma série de áreas que somadas, convergem para a área do círculo quando n aumenta. Essa também é uma noção do limite de uma sequência de áreas que converge para π.

Foi apresentada pelos alunos uma noção de limite relacionando o perímetro do polígono com a circunferência. No transcorrer das entrevistas, alguns deles apresentaram essa noção de limite relacionando-a da seguinte forma: se $n \to \infty$, então $2P \to C$, e $2P$ é o perímetro de P_n. Outra noção de área afirma que, se $n \to \infty$ e $S_i = |A(P_n) - A(C)|$, então $S_i \to 0$, ou seja, a área do polígono P_n, inscrito na circunferência, tende para o valor da área do círculo à medida que n tende para infinito. Conclui-se que uma noção de limite da área de P_n equivale a dizer que a circunferência é o limite do perímetro do polígono se $A(P_n) \to A(C)$.

Um erro comum, nas atividades A1 e A2, é o conflito conceitual entre infinito e partes tão pequenas quanto se queira, nesse conflito, os sujeitos afirmam que ao variar n tendendo para infinito, a base tende para mais infinito. Nessa afirmação, os alunos confundiram a possibilidade de diminuição de um lado infinitas vezes com os valores cada vez menores de seus comprimentos.

Uma outra noção de limite da área do polígono P_n pôde ser identificada quando os arcos e as bases tendem a diminuir e ter o mesmo comprimento à medida que n aumenta. Nessa noção, há a convergência dos valores dos arcos e dos lados para um limite, e esses comprimentos tendem para zero.

As noções de limites, construídas e relatadas, surgem a partir da variação do número de triângulos, ou seja, pela variação de n no *applet*. Algumas noções foram relatadas pelos alunos após a apresentação de novas situações problema durante a entrevista, que se tornaram necessárias mediante respostas conflitantes. A relação de causa e efeito da variação de n sobre a área de P_n está presente na totalidade dos registros realizados pelos alunos.

Algumas noções de limite mostraram-se inconsistentes, ainda em formação, e muitas dessas inconsistências são devidas a conceitos de elementos geométricos, próprios da situação-problema na atividade, ainda não construídos. Vários processos de construção de conhecimento ocorreram por abstração refletida; é por abstração refletida que se supera uma noção, atingindo o conceito. À medida que n teve seu valor alterado, os alunos compreenderam que, fazendo o valor de n tender para o infinito, o comprimento da altura tende para o comprimento do raio, mesmo sem essa medida estar visualmente perceptível. O *applet* foi usado, frequentemente, para elaborar e fundamentar as respostas relativas às situações-problema que foram colocadas aos alunos.

Em geral, os alunos apresentaram mais conhecimentos sobre a situação-problema no registro escrito do que na entrevista. A entrevista mostrou ser esclarecedora, exploratória com grande parte dos alunos. Alguns registros foram concisos e outros foram vagos. As entrevistas foram esclarecedoras, algumas apresentaram registros com itens contraditórios ou não revelavam os bons registros escritos, previamente elaborados por eles.

6.1.3 Atividade A3

Nesta atividade, não foi possível observar indícios de que houve modificação de valores no *applet* para variação de Q_1 ou Q_2. Analisando sob o enfoque avaliativo, a aplicação da atividade A3, em dois momentos distintos permitiu que fossem observadas evoluções tanto de noções quanto dos conceitos construídos ao explicar a situação-problema.

O conceito de função foi utilizado em alguns registros. Não foi explicitado como função, mas, quando o aluno relata que, se $x_1 \to x_2$ ou $\Delta x \to 0$, então $Q_1 \to Q_2$, esse conceito aparece nas explicações sobre variação. A propósito da variação de Q_1 e Q_2 em função de x, esses dois pontos definem uma reta secante em $f(x)$ e, se $x_1 \to x_2 = \Delta x \to 0$, a reta secante tende a ficar tangente em um ponto de $f(x)$. Observa-se, ainda, que a inclinação da reta tangente em Q_1 tende a se aproximar do valor da inclinação da reta tangente em Q_2. Uma outra noção utilizada no processo de construção do conceito de derivada ocorre quando os sujeitos afirmam que $x_1 \to x_2$, o que implica dizer que x_2 é o limite de x_1. Quando afirmam que $Q_1 \to Q_2$, significa que, não necessariamente, Q_1 torna-se Q_2, e isso demonstra que o conceito de limite foi aplicado. O aluno utilizou outros recursos do *applet*, e explorou as retas secante e tangentes.

Outra noção de limite que está associada ao processo de derivação pôde ser verificada quando afirmaram que, ao fazer $Q_1 \to Q_2$, significa que, se $\Delta x \to 0$, $x_1 \to x_2$, então $f(x_1) \to f(x_2)$, o que é uma construção do conceito de função e uma noção de limites que permite relacionar a variação entre os valores de x e $f(x)$ em um ponto Q. Como consequência, tem-se a seguinte noção de limite: $I_{Q_1} \to I_{Q_2}$. Nessa noção de derivada, temos representações com noções de limite que permitem afirmar que $I_{Q_1-Q_2} \to I_{Q_2}$ quando $\Delta x \to 0$. Nesse caso, o limite será a menor taxa de variação entre Q_1 e Q_2, com Q_1 tão próximo de Q_2 sem, necessariamente, ser Q_2.

Alguns alunos conceituaram a derivada como a inclinação da reta, no ponto limite da aproximação de $Q_1 \to Q_2$. Representaram da seguinte forma a relação da derivada: $f'(x) = \lim\limits_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

6.1.4 Atividade A4

A análise também sob o enfoque avaliativo, da aplicação da atividade A4 em dois momentos distintos permitiu, assim como na atividade A3, que fossem observadas evoluções tanto de noções quanto dos conceitos construídos ao explicar a situação-problema.

Os registros de resposta dos alunos mostram que, quanto maior o valor de n, menor será o comprimento de cada partição, menor será a área de cada retângulo, e a área é o limite da soma quando $n \to \infty$. Uma noção de limite foi apresentada no processo de conceituação de integral definida. Nessa noção, o comprimento de cada partição tende a diminuir, $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$, e, como essas partições são as bases de cada retângulo, a área de cada retângulo diminui. A área de cada retângulo tende para zero, $A_R \to 0$, preenchendo a região entre $f(x)$ e Ox pela soma das áreas A_R dos retângulos sempre que $n \to \infty$. Uma outra forma de apresentar essa noção é dizer que, se $n \to \infty$, então $|[x_{i-1}, x_i]| \to 0$; daí que a soma (S) das áreas dos retângulos tende para a área (A) da região entre a função $f(x)$ e o eixo Ox no intervalo $[a, b]$, $S \to A$. Grande parte dos alunos considera a área delimitada pela função como resultante da soma das áreas dos n retângulos. Foi relatado, mais de uma vez, que as somas de Riemann superior e inferior tendem a se igualar com a área delimitada por $f(x)$ e pelo eixo Ox no intervalo $[a, b]$. Observou-se a convergência das somas de Riemann para a área A, se $n \to \infty$.

Houve, por parte dos alunos, uma apropriação do mecanismo de ação relativo à variação de n. Várias foram as tentativas de explicação da situação problema em linguagem mais formal; no entanto, foi, na maioria das vezes, sem sucesso. Foi possível constatar nos registros e entrevistas, a utilização de valores numéricos e elementos gráficos do *applet* para argumentações e exemplificações.

6.1.5 Relações de conhecimento em A1

Na atividade A1, foram identificados 6 (seis) grupos de desenvolvimento. Como característica geral, esses grupos tem as relações de conhecimentos, e as noções de limite. A própria expressão, dita pelos alunos, de que n tende para o infinito, revela uma noção de limite e também uma noção de infinito. As noções que caracterizam as relações R1, R2, R3, R4, R5 e R6 são: a) se $n \to \infty$ e $l \to 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \to 0$, se e somente se, P_n estiver inscrito na circunferência; b) se $S_i \to 0$, então $A(P_n) \to A(C)$; c) se $l \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$; d) se $n \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$.

Na atividade A2, foram observados 7 (sete) grupos de desenvolvimentos identificados pelos códigos R1, R2, R3, R4, R5, R6 e R7. As relações estabelecidas, com os conhecimentos apresentados, são caracterizadas pelas noções de limite na forma de implicação: a) se $n \to \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$; b) se $n \to \infty$, então $A(P_n) \to A(C)$ com $l \to 0$ ($B_{T_i} \to 0$), $h_{T_i} \to r = 1$ e $A_{T_i} \to 0$; c) se $n \to \infty$, então $l \to 0$ ($B_{T_i} \to 0$), $h_{T_i} \to r = 1$ e $A_{T_i} \to 0$. O grupo da relação R1 conceituou a área como $\lim_{n \to \infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$.

Observar as relações estabelecidas por cada aluno ao longo das atividades A1 e A2, permitiu concluir que os alunos M1 e M4 não só apresentaram evolução das noções de limite de uma atividade para outra, como também demonstraram que construíram conhecimentos com as situações-problema, chegando à conceituação de limite de funções e sua formalização.

Os alunos M2, M3, M5, M6, M7 e M8 demonstraram evolução das noções de limite apresentadas nas atividades A1 e A2. Eles descrevem o processo de aproximação entre as áreas do polígono e do círculo. Esse processo é representado pela soma das áreas dos n triângulos; também pelo produto de n, que tende para o infinito, com a área de um dos n triângulos idênticos T_i. A concepção dessa ideia ocorre à medida que n tende para infinito, e com o polígono inscrito, a área do triângulo T_i tende para zero. Essa noção de limite implica a diferença entre a área de P_n e a área do círculo tender para zero. Essa diferença não foi construída pelos alunos M10 e M12, mas estes apresentaram uma noção de limite semelhante à do grupo anterior (M1 e M4). Assim como M1 e M4, os alunos (M10 e M12) demonstraram apropriação dos mecanismos de ação que relacionam n e l do polígono P_n, inscrito na circunferência. Os alunos M1 e M4 diferem dos demais até aqui apresentados, por terem formalizado o conceito de limite a partir das situações-problema.

Os alunos M9, M11, M13, M14 e M25, apresentaram pouca evolução na construção de conceitos do cálculo ao realizar os registros na A2. Mas, a noção de limite da área de P_n, apresentada por eles, foi formada pela noção de limite de outros elementos geométricos: a base do triângulo isósceles (lado do polígono P_n), a altura do triângulo isósceles (o apótema do polígono P_n) e a própria área de cada triângulo Ti.

6.1.6 Relações de conhecimento em A2

Após a análise dos registros escritos e transcrições, é possível concluir que os alunos M22 e M32 apresentaram as mesmas noções de limite de área na A2. Demonstraram evolução das noções de limite, concluindo que a área do polígono tende para a área do círculo, mas sem necessariamente utilizar as noções de limite de elementos do triângulo; essas noções são: o limite da base, da altura e da área de cada triângulo. Apresentaram na atividade A2, noções de limite semelhantes às do grupo anterior (M9, M11, M13, M14 e M25). Os dois grupos apresentaram noções de limite das questões centrais que tratam as situações-problema contidas no *applet*, no entanto, o grupo (M9, M11, M13, M14 e M25) concluiu que $A(P_n) \to A(C)$ com as três outras noções de limite, limite da base, limite da altura e limite da área, todas noções de elementos do triângulo isósceles. O grupo M22 e M32 concluiu que $A(P_n) \to A(C)$ sem apresentar todas essas noções de limite.

Ao serem analisadas as atividades A1 e A2 do aluno M15, foi possível observar que diferente do ocorrido na A1, a noção de limite da área de P_n, que trata as situações-problema, não foi apresentada na A2. Nessa atividade, foram constatadas apenas, noções de limite da base (lado de P_n), da altura de T_i (apótema de P_n) e limite da área do triângulo T_i.

6.2 PROCESSOS DE CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS

Foram identificados 11 conhecimentos ou processos de construção durante a elaboração da atividade A1. Desse total, oito foram identificados após serem realizadas as análises dos registros escritos e transcritos dos alunos. Serão relatados os processos de construção de conhecimento dando ênfase aos tipos de abstração, empírica e reflexionante. O ato de considerar n tender para infinito é um processo que ocorre por abstração refletida, assim como fazer l tender para zero. Pode-se dizer também, que fazer l tender para zero ou fazer n tender para infinito, são construções do conceito de limite.

6.2.1 Construção de conhecimentos em A1

O conhecimento C1 (Estimar a área do círculo pela diferença entre sua área e a área do polígono P_n em razão de comparações visuais) foi construído a partir de abstrações pseudoempíricas. Esse processo aconteceu quando polígonos foram introduzidos no interior da circunferência. A partir do ajuste de uma posição inicial, ocorreram deformações do polígono devido à alteração de n e l pelos alunos. A construção de C1 é devida não somente à deformação da área de P_n por meio de n e l, mas também da coordenação de ações que permitiu ao aluno ajustar o polígono no interior da circunferência e observar a circunferência como um limitador do preenchimento da área do círculo.

Como as figuras postas na A1, tem suas áreas menores que a área do círculo, e em geral a primeira ação dos alunos é alterar o número de lados, foi possível observar dois processos comuns, processos por abstração pseudoempírica. Nesses processos, os alunos aumentam n e a área de P_n fica maior que a área do círculo; alguns diminuem n até aproximar a área de P_n da área de da área do círculo, outros alteram o comprimento do lado deixando o polígono inscrito ou circunscrito, mas sempre tentando assemelhar as formas do polígono à do círculo pela circunferência.

Grande parte dos alunos posicionaram um polígono regular no interior da circunferência. Em seguida foram realizadas transformações no polígono tentando estabelecer uma relação entre a forma do círculo com cada polígono gerado. Esse processo descrito, ocorre por abstração pseudoempírica ao modificar o número de lados do polígono. As comparações entre as áreas ocorreram por processos de abstração pseudoempírica, pois a partir da alteração de n, e do posicionamento do polígono de forma inscrita, concluíram que, aumentando a área de P_n, preenchiam a área do círculo. Em seguida por abstração refletida compreendem a aproximação entre as áreas ao realizar seguidas diferenciações entre elas. Por abstração refletida o aluno compreende que ao aumentar o valor de $n \to \infty$, a forma do polígono inscrito aumenta dentro da circunferência, ocorrendo um preenchimento da área do círculo pelo polígono regular inscrito. Ao sobrepor as figuras, os alunos estabelecem uma aproximação por diferenciação das formas das figuras. Por abstração refletida, à medida que altera o valor de n, os alunos constroem um mecanismo de diferenciação entre as áreas por diminuição da área a ser preenchida no círculo. Importante destacar que alguns alunos não colocam o polígono com posição fixa inicialmente, mas pós algumas tentativas, descobrem uma posição em que o polígono e a circunferência compartilham o mesmo centro, e esse processo é por abstração pseudoempírica. Outro processo realizado também por abstração pseudoempírica, ocorre quando os alunos colocam o polígono em posição não necessariamente inscrita no interior da circunferência, mas, quando alteram n, observam que a área aumenta e as formas das duas figuras se assemelham; concluem que a melhor posição é na forma inscrita. Outros alunos estabeleceram um processo de aproximação entre as áreas antes mesmo de sobrepor a área do círculo pela área do polígono regular. A deformação do polígono regular, pela variação de n, favorece processos de abstração pseudoempírica e refletida. A coordenação de ações pela variação de n e l conduzem a processos de abstração refletida sobre outros conhecimentos, em especial C6, C7 e C8.

Sobre o conhecimento C2 (Realizar a estimativa com um polígono inscrito), pode-se dizer que os alunos estimam a área do círculo com um polígono inscrito e realizam processos de abstração pseudoempírica quando posicionam o polígono na circunferência. O processo de construção de C2 é resultante do processo do C1. Os alunos observam as modificações importas à forma do polígono, extraem informações sobre a área deformada, recolocam-nas tentando assemelhar à forma do círculo. A estimativa ocorre quando diminuem o comprimento dos lados e aumentam o valor de n, tentando tornar os vértices comuns à circunferência. Em seguida, quando descobrem a relação entre o número de lados de polígonos, e o comprimento do lado no processo de aproximação, constroem C2 por abstração refletida. Realizam esse processo objetivando aproximar a área do polígono com a área do círculo. Inicialmente realizam o processo com abstrações pseudoempíricas extraindo os mecanismos que permitem o aumento da área do polígono que está limitado pela circunferência. A abstração refletida nesse processo, ocorre na formação do conhecimento sobre o limite da área do polígono em relação à área do círculo. Alguns alunos apresentaram uma noção de limite quando inscreveram o polígono na circunferência, e por abstrações refletidas, fizeram a equivalência dos lados de triângulos isósceles com o comprimento do raio; claramente uma relação estabelecida entre a A1 com a A2. Os alunos realizaram a estimativa com o polígono inscrito, processo esse criado por abstração refletida, mas, somente após diversas tentativas de ajuste, tanto da posição quanto do número e comprimento de lados em processos por abstração pseudoempírica.

O conhecimento C3 (Realizar a estimativa com um polígono circunscrito) é um conhecimento derivado de processos da construção de C1. É construído inicialmente por abstração pseudoempírica quando posicionam o polígono na circunferência, aumentando o valor de n e diminuindo o comprimento dos lados, nessa ordem. Em seguida, por abstração refletida, descobrem a relação entre o número de lados de polígonos e o comprimento do lado no processo de aproximação, compreendendo que para realizar a estimativa com o polígono circunscrito, devem aumentar n, e diminuir o comprimento l do lado.

O conhecimento C4 (Realizar a estimativa com um polígono, mas decomposto em triângulos) ocorre por processos de abstração refletida, muito em decorrência da interação entre os alunos e a atividade A2. Por um processo que inicia por abstrações pseudoempíricas e seguidas vezes por reflexionamento e reflexão, os alunos fazem relações entre n e a base dos triângulos, observam equivalência. Compreendem que o comprimento dos lados isósceles dos triângulos se aproximam do comprimento do raio; que a área do triângulo e do polígono P_n tem uma relação de proporção direta com n ou l dissociados um do outro. Por fim após diversos processos de reflexionamento e reflexão concluem que mesmo alterando n, é preciso alterar l, nessa ordem, para aproximar a forma da área de P_n à área do círculo. Este conhecimento ocorre a partir de abstrações refletidas pois, conclui sem o auxílio visual de triângulos, em processos cognitivos de reflexionamento e reflexão. Esse conhecimento fica evidente quando apresenta a noção do limite do apótema e a noção do limite da área.

O conhecimento C6 (Compreender que dado um l qualquer, se $n \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$) ocorreu por abstração refletida antecedida por diversas abstrações pseudoempíricas realizadas ao aumentar o número de lados do polígono para valores cada vez maiores, implicando na deformação da área do polígono regular. Este conhecimento resultante de abstração refletida geradas pelas comparações decorrentes de processos de abstração pseudoempírica durante a deformação e posicionamento das figuras. Este conhecimento é construído a partir de processos do C1.

O conhecimento C7 (Compreender que dado um n qualquer, se $l \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$) foi construído por sucessivas abstrações pseudoempíricas após a modificação de n e l ainda durante o processo de construção do C1. Por abstração refletida compreendem a relação direta entre l e a área de P_n.

O conhecimento C8 (Concluir que se $n \to \infty$ e $l \to 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \to 0$, se e somente se, P_n estiver inscrito na circunferência) ocorre por abstração reflexionante quando admite que o polígono regular inscrito na circunferência é um método para medir a aproximação entre as áreas, partindo incialmente por abstração pseudoempírica relaciona as formas como métrica de aproximação e em seguida por abstrações refletidas resultantes da coordenação de ações formadas com a variações de n e l, mas inicialmente só com n, em seguida por l. Por meio de abstrações pseudoempíricas, coordena as relações inversas entre n e l, no entanto, estabelece essa relação sem considerar a necessidade do polígono estar inscrito ou circunscrito na circunferência. A conclusão do conhecimento C8 foi possível devido a construções dos conhecimentos C1, C2 e C3. O conhecimento C8 é decorrente de processos de abstração refletida após posicionar o polígono circunscrito e modificar n e l. O entendimento das relações entre n e l ocorre inicialmente por processos de abstrações pseudoempíricas; essas abstrações conduzem à abstração refletida, alimentando processos de reflexionamento e reflexão seguidas vezes.

O conhecimento C9 (Concluir que se $S_i \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$) é resultado de processos de abstração pseudoempírica e em seguida por abstração refletida iniciadas ainda na construção do conhecimento C1. Por abstração refletida, os alunos compreendem que, à medida que n é aumentado, o polígono P_n mantem-se inscrito diminuindo-se o valor de l. A diferença entre a área do círculo e a área de P_n é construída por abstração refletida, decorrente de vários processos por abstração pseudoempírica ao variar n e l. A variação de n e l, na relação descrita anteriormente, promove variação da área do polígono na circunferência, fazendo que a diferença entre as áreas de P_n e do círculo tenda para zero.

Processos de abstração pseudoempírica ocorrem quando os alunos variam n e l com valores pequenos. Mantendo fixo o valor de n muito pequeno, e fazendo l aumentar, a área do polígono P_n se aproxima da área do círculo, e por abstração refletida, compreende que $A(P_n) \to A(C)$, fazendo no polígono inscrito, $n \to \infty$ e $l \to 0$.

Uma conclusão é feita a partir da observação dos processos de abstração pseudoempírica. Quando o aluno aumenta n, mas em seguida diminui l para deformar a área de P_n, a coordenação dessas ações conduz a processos de abstração refletida sobre o limite da área de P_n. Nesses processos, mantem-se o polígono inscrito até obter uma área próxima da área do círculo, ou seja, a variação de l tem por finalidade aproximar a área de P_n da área do círculo, utilizando como limite a circunferência; ao fazer isso, o aluno utiliza o conceito de função no processo de conceituação de limite, pois a área está em função do lado l, e por essa razão, obtém o limite com a variação de P_n com a variação de l. Quando o aluno fixa o valor de l, a variação de n produz a aproximação da área de um P_n inscrito, com a área do círculo. Essa variação de n produz uma sequência de polígonos P_n, com a suas respectivas áreas tendendo para a área do círculo.

A atividade A1 favorece as construções por abstrações pseudo-empírca e refletida. Essa afirmação justifica-se pelas inúmeras possibilidades de construção de soluções da situação-problema, esta, fortemente estabelecida na geometria. Outro fator que justifica a firmação feita, é a diversidade de respostas que objetivam estabelecer soluções para a situação problema contida no applet da atividade A1.

6.2.2 Construção de Conhecimentos em A2

Na A2, foram identificados 6 conhecimentos e/ou processos durante sua elaboração. Todos foram identificados após serem realizadas as análises dos registros escritos e transcritos dos alunos. Serão relatados os processos de construção de conhecimento dando ênfase aos tipos de abstração, empírica e reflexionante.

O conhecimento C1 (Reconhecer que se $n \to \infty$, a implicação direta é que $A(P_n) \to A(C)$ por diferença de áreas em que $S_i \to 0$) foi construído por abstrações pseudoempíricas ao serem realizadas alterações no número de triângulos do polígono P_n. Posteriormente por abstração refletida, decorrente de várias comparações entre as áreas, compreende o mecanismo de aproximação pela diferença entre as áreas. Houve alunos que ao variar o número de triângulos, não reconheceram a diferença entre as áreas, e sim uma convergência do valor das áreas do polígono para a área do círculo a cada variação de n.

O conhecimento C2 (Compreender que se $n \to \infty$, então $l \to 0$ ($B_{T_i} \to 0$)) foi construído por repetidas abstrações pseudoempíricas, ocorridas pela alteração do número de triângulos e observações de valores no *applet*. Concluíram muitas vezes que a base tende para zero observando os valores na tela. Por abstração refletida compreenderam que os valores ficam próximos de zero e a afirmação que tende para zero ocorre sem a base ter o valor zero, o que demonstra que houve a conceituação de limite para o valor da base. Alguns alunos admitiram a possibilidade da base de um triângulo ou lado do polígono, ter medida zero sem observar as implicações para a existência dessas figuras geométricas. Outros alunos construíram o conceito de limite e consideraram a base tender para zero sem necessariamente ser zero o valor da base.

O conhecimento C3 (Compreender que se $n \to \infty$, então a altura $h_{T_i} \to r = 1$) foi construído por processos de abstração pseudoempírica mediante variações de n repetidas vezes. Fazendo $n \to \infty$, por abstração refletida, foi possível construir o conceito de limite da altura de cada triângulo Ti. Assim como em C2 com a base, alguns alunos consideram que o valor da altura pode ser 1 sem considerar as implicações de seu significado geométrico. No entanto, outros alunos construíram o conceito de limite e consideraram a altura tender para zero sem necessariamente ter a medida zero. Os processos de abstração reflexionante ocorridos em C3 são iniciados a partir da variação de n, ocasionando a alteração do número de triângulos contido no polígono P_n. Os alunos utilizam com frequência os valores na tela do applet. A análise da variação dos valores na tela ajuda a fundamentar as respostas e os processos.

O conhecimento C4 (Compreender que se $n \to \infty$, $A_{T_i} \to 0$) foi sendo construído a princípio por abstrações pseudoempíricas com a variação de n, mas posteriormente por abstração refletida, esse conhecimento foi construído após observações dos valores na tela à medida que n foi alterado. O conceitos de área e limite foram construídos quando os alunos afirmaram que a área tende para zero, mas devido ao seu significado, a área não pode ser zero, apenas tende para zero se n tende para o infinito. Houve alunos admitindo a possibilidade da base assumir o valor zero, ao afirmar que a base tende para zero, e essa afirmação ocorreu após verificar os valores na tela do *applet* à medida que n foi alterado.

O conhecimento C5 (Concluir que se $n \to \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$) foi construído por abstração refletida a partir do entendimento dos mecanismos que tornam $A_{T_i} \to 0$ sempre que $n \to \infty$ em C4. Quando ocorre o aumento do valor de n, ou seja, quando aumenta o número de triângulos, a área de cada um deles tende para zero. Nota-se que alguns alunos compreendem esse processo sem o auxílio de valores numéricos, outros só com o auxílio dos valores.

O conhecimento C6 (Concluir que $\lim_{n\to\infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$) foi construído por abstração refletida a partir dos conhecimentos construídos anteriormente, em especial é uma abstração refletida de C5. A área do círculo como a soma das áreas de cada triângulo é calculada como um limite. Esse limite pode ser escrito sob a forma de produto de n áreas do triângulo quando $n \to \infty$. Esses processos, que permitem a conceituação de limite da área, são construídos por abstração refletida dos conhecimentos C1, C2, C3, C4 e C5.

A atividade A2 foverece as construções de conhecimento do conceito e com o conceito de limite. A proposta de construir o conceito de limite com uma situação problema na geometria, é devida à possibilidade de perceber melhor esse conceito com casos de comprimento e área e seus significados geométricos. Esses casos aceitam a teoria de limite para explicar os casos que não admite os valores limite, como é o caso da base do triângulo isósceles tender para zero, a altura do triângulo isósceles tender para um, a área do triângulo isósceles tender para zero, e a área do polígono P_n tender para a área do círculo quando n tende para infinito, isso sem necessariamente que esses elementos cheguem ter esses valores no limite.

Especificamente o *applet* trouxe na situação-problema uma questão central que no limite da variação de n, teremos uma área, a de P_n, que tem outra, a do círculo, como limite. A situação-problema, contida na A2, permite iniciar processos de construção de conhecimentos sobre limite. Viabiliza a construção do conceito de limite da base, limite da altura, limite da área do triângulo T_i; todos esses construídos com o limite da área de P_n, todos por abstração refletida, abstração refletida sobre abstração refletida, a meta-reflexão. A2 permite também, por abstração refletida, construir o processo de aproximação entre a área de um polígono P_n e a área do círculo como uma sequência de valores de P_n que converge para o valor da área do círculo com um n que tende para infinito.

6.3 CONCLUSÕES GERAIS

Conclui-se que as atividades serviram ao propósito estabelecido para a pesquisa. Diversos foram os processos construtivos utilizados pelos alunos a partir de cada uma das situações-problema. Os *applets* foram utilizados para a construção e a exemplificação de argumentos para dar resposta à situação problema proposta ao aluno, demonstrando sua eficiência como recurso didático e metodológico para docentes e alunos em seus respectivos processos de abstração reflexionante. Foram apresentados vários argumentos não contidos diretamente no *applet*, o que é um indício de que os alunos realizaram diversos processos de abstração pseudoempírica e refletida. Diversas noções de limite foram registradas tanto nos processos de construção conceitual de limites quanto nos de derivadas e integral definida. Construíram o conceito de limite para a elaboração e construção de outras noções e conceitos matemáticos. A ausência da construção do conceito de função nas atividades dificultou a construção de noções de limite, e, por conseguinte, a construção de noções de derivada e integral, dificultou inclusive a construção dos conceitos dessas instâncias matemáticas.

Dentre as dificuldades encontradas ao longo da pesquisa, é possível destacar, nos alunos, a ausência de conhecimentos sobre conceitos matemáticos relativos à geometria. Tal ausência de estrutura cognitiva impossibilitou, em muitos casos, a construção de conceitos matemáticos pois dificultava a assimilação dos mesmos. Este estudo apresentou vários grupos de desenvolvimento cognitivo, contudo, é possível inferir que todos os alunos estavam em processos de desenvolvimento e, neste caso, também de aprendizagem.

Uma dificuldade referente ao local, foi o acesso à internet para participação das atividades. Muitas vezes não foi possível estabelecer conexão. Do ponto de vista da utilização dos *applets*, é possível afirmar que houve relativa facilidade de acesso e uso.

Ainda na aplicação inicial foi possível constatar, segundo registro dos alunos, o desconforto com a adoção do Moodle. Após investigação, foi possível constatar que os alunos não gostavam de acessar duas vezes dois ambientes para realização das atividades. Para sanar essa dificuldade, foi necessária a adoção do SIGAA, que é o ambiente virtual de aprendizagem institucional, para direcionamento das atividades em um site aberto.

Na etapa de finalização da tese foi surgindo a expectativa de continuidade da pesquisa no que concerne ao estudo de processos cognitivos que caracterizam o conflito conceitual entre o infinito e as partes muito pequenas em processos de particionamento de segmentos, muito comuns na investigação. Compreendeu-se, pela riqueza de resultados obtidos nas entrevistas, que é recomendável a aplicação da metodologia inspirada no MC piagetiano para a investigação das relações, que os alunos fazem, entre limite, derivada e integral nos applets das atividades A3 e A4.

A abstração pseudoempírica mostrou-se como um importante recurso para a educação. Por ela é possível valorizar o processo empírico realizado pelos alunos em sua vida escolar. Permite conhecer a qualidade das interações entre sujeito e objeto que levam à construção da novidade por processos da abstração refletida.

A associação de tecnologias da Google e do Geogebra, em um único objeto de aprendizagem, permitiu observar as variações de respostas e, consequentemente, elaborar avaliações dos dados coletados, configurando essa metodologia de coleta não só como um importante instrumento metodológico, mas também um poderoso instrumento didático e avaliativo.

REFERÊNCIAS

AEBLI, Hanss. **Didática Psicológica: aplicação á didática da psicologia de Jean Piaget**. 3. ed. Atualidades pedagógicas. v.103. São Paulo: Editora nacional, 1978, 196 p.

ALBERTO, Abaporanga Paes Lemes; COSTA, Leonardo Silva; CARVALHO, Tânia Maria Machado de. Software e o ensino de Matemática: a utilização do software Geogebra no ensino da Matemática. In: OLIVEIRA, Cristiane Coppe de; MARIM, Vlademir (Org.). **Educação Matemática:** Contextos e Práticas Docentes. Campinas: Alínea, 2010. Cap. 10. p. 251-259.

ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. Cap. 1. p. 27-47. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999

BECKER, F. Abstração Pseudoempírica : significado epistemológico e impacto metodológico. **Educação & Realidade**, v. 42, n. 1, p. 371–393, 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/edreal/v42n1/2175-6236-edreal-42-01-00371.pdf>. . Acesso em: 02 dez. 2016.

BECKER, F. Aprendizagem e conhecimento. **A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar**. p. 12–23, 2003. Porto Alegre: Artmed. Disponível em: <http://srvd.grupoa.com.br/uploads/imagensExtra/legado/B/BECKER_Fernando/A_Origem_Do_Conhecimento_E_A_Aprendizagem_Escolar/Liberado/Cap_01.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2016.

BECKER, F. Educação e Construção do Conhecimento: o processo de abstração reflexionante. **Educação & Realidade**, v. 18, n. 1, p. 15–32, 1993.

BECKER, F. Sujeito do Conhecimento e Ensino de Matemática. **Schème - Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, v. 5, p. 65–86, 2013. Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/3222/2517>. . Acesso em: 12 jun. 2015.

BECKER, F.; FERREIRA, R. DOS R. Discussão Virtual sobre “Interação em Epistemologia Genética”. **Schème - Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, v. 4, p. 190–235, 2012. Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/3182/2495>. . Acesso em: 02 dez. 2016.

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento.** 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012. 200 p.

BECKER, Fernando. **Epistemologia do professor de matemática.** Petrópolis: Vozes, 2012. 496 p. (b)

BECKER, Fernando. **O caminho da aprendizagem em Jean Piaget e Paulo Freire:** da ação à operação. Petrópolis: Editora Vozes, 2010. 296 p.

BECKER, Fernando; MARQUES, Tânia Beatriz Iwaszko (Org.). **Ser professor é ser pesquisador.** 3. ed. Porto Alegre: Mediação, 2012. 136 p.

BETTIO, R.W., MARTINS, A. **Objetos de aprendizado - Um novo modelo direcionado ao Ensino a Distância.** Trabalho apresentado no IX Congresso Internacional de Educação a Distância da ABED – Setembro de 2002 – São Paulo - Disponível em http://www.abed.org.br/congresso2002/trabalhos/texto42.htm - Acesso em 23 mar. 2016.

BIZELLI, Maria Helena Sebastiana Sahão; FISCARELLI, Silvio Henrique; BARROZO, Sidineia. Tecnologia digital aplicada no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. In: Congresso de inovação, tecnologia e sustentabilidade, 1., 2010, Brusque. **Anais... .** Brusque: Unifebe, 2010. p. 1 - 10. Disponível em: <http://sites.unifebe.edu.br/~congressoits2010/artigos/artigos/013_-_TECNOLOGIA_DIGITAL_APLICADA_NO_ENSINO_E_APRENDIZAGEM_DO_CALCULO_DIFERENCIAL_E_INTEGRAL.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2014.

BLUNTER, C. New **Directions of ICT-Use in education, learning without frontiers**, UNESCO, 1999.

BONA, A. S. DE; BASSO, M. V. D. A. Abstração Refletida presente na Aprendizagem Cooperativa medida pelo Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 22, n. 3, p. 35, 2014. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/view/2457>. . Acesso em: 02 dez. 2016.

BONA, A. S. DE; BASSO, M. V. DE A.; FAGUNDES, L. D. C. Cooperar e Abstrair: uma forma de analisar o processo de aprendizagem de Matemática por meio das Tecnologias Digitais Online. **Schème-Revista Eletrônica …**, v. 5, p. 81–102, 2014. Disponível em: <http://200.145.171.5/revistas/index.php/scheme/article/view/3573>. . Acesso em: 02 dez. 2016.

BONA, A. S. DE; COELHO, M. T. C.; BASSO, M. V. DE A. A investigação e a representação digital no processo de abstração na construção dos conceitos de Matemática. **Nuevas Ideas en Informática Educativa TISE 2013**, 2013. Disponível em: <http://www.tise.cl/volumen9/TISE2013/695-698.pdf>. . Acesso em: 10 dez. 2016.

BONA, A. S. DE; SOUZA, M. T. C. C. DE. Aulas investigativas e a construção de conceitos de matemática: um estudo a partir da teoria de Piaget. **Psicologia USP**, v. 26(2), p. 240–248, 2015.

BORBA, M.C. MALHEIROS, A.P.S. ZULATTO, R.B.A. **Educação a distância online.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 118 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. 504 p.

BRANDÃO, Edemilson Jorge Ramos. **Informática e educação:** uma difícil aliança. Passo Fundo: Editora da UFPF, 1993. 43 p.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira Censo Escolar. Ministério da Educação. **Censo Escolar.** 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/basica-censo>. Acesso em: 05 mar. 2015.

BRINGUIER, Jean - Claude. **Conversando com Jean Piaget.** Rio de Janeiro: DIFEL, 1978. 210 p. Tradução: Maria José Guedes.

CARNEIRO, Mára Lúcia Fernandes. SILVEIRA, Milene Selbach. Objetos de Aprendizagem como elementos facilitadores na Educação a Distância. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 4, 2014, p. 235-260. Editora UFPR. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nspe4/0101-4358-er-esp-04-00235.pdf>. Acesso em: 10 de julho de 2016.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico:** usando os exames de Piaget. São Paulo: Cortez Editora, 1989. 161 p. (1 - Escola). Volume 10.

COLLARES, Darli. **Epistemologia Genética e pesquisa docente:** estudo das ações no contexto escolar. Lisboa: Instituto Piaget, 2003. 226 p. (Horizontes Pedagógicos).

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico:** descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artmed, 2002. 267 p. Tradução de Fátima Murad.

DOLLE, Jean-marie. **Para compreender Jean Piaget.** 2. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 2005. 327 p. (Horizontes Pedagógicos).

DOLLE, Jean-marie. **Princípios para uma pedagogia científica.** Porto Alegre: Penso, 2011. 199 p. Tradução: Sandra Loguércio.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2004. 844 p. Tradução: Higyno H. Domingues.

FAGUNDES, Léa da Cruz; SATO, Luciane Sayuri; MAÇADA, Débora Laurino. **Aprendizes do futuro:** as inovações começaram. Brasília: Mec/seed/proinfo, 1999. 95 p. (Coleção Informática para a mudança na Educação). Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003153.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2015.

FERNANDES, Flávia Gonçalves. et. al. Sistema para Cálculo Diferencial e Integral – SCDI. In: Anais dos Workshops do CBIE 2012. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wcbie/article/view/1663/1426>. Acesso em: 01 de junho de 2016.

FERREIRA, Luis de França G.; TAROUCO, Liane Rockenbach; BECKER, Fernando. Fazer e compreender na Realidade Virtual: em busca de alternativas para o sujeito da aprendizagem. **Renote: novas tecnologias na educação,** Porto Alegre, v. 1, n. 1, p.1-11, fev. 2003. Semestral. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/13619/7686>. Acesso em: 11 nov. 2014.

FLEMMING, Diva MarÍlia; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2007. 464 p.

FOGAÇA, Mônica. Imagens mentais e compreensão de conceitos científicos. In: MACHADO, Nilson José; CUNHA, Marisa O. (Org.). **Linguagem, conhecimento, ação:** ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras Editora, 2003. Cap. 11. p. 187-199. (Coleção Ensaios Transversais).

FRANCO, Sérgio Roberto Kieling. **O construtivismo e a educação.** 8. ed. Porto Alegre: Mediação, 1998. 100 p. Revista e Ampliada.

G1, Portal. **Ideb fica abaixo da meta no ensino médio e no ciclo final do fundamental:** Educação. 2014. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/09/ideb-fica-abaixo-de-meta-no-ciclo-final-do-ensino-fundamental-e-no-medio.html>. Acesso em: 05 mar. 2015.

GONÇALVES, Daniele Cristina. REIS, Frederico da Silva. Atividades investigativas de aplicações das derivadas utilizando o Geogebra. *Bolema* [online]. 2013, vol.27, n.46, pp. 417-432. ISSN 0103-636X. http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300006.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: Congresso Ibero-americano de Informática na Educação, 4., 1998, Brasília. **Anais...** Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf. Acesso em: 25 mar. 2015.

KESSLER, Maria Cristina. Introduzindo objetos de aprendizagem no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral. **Renote: novas tecnologias na educação,** Porto Alegre, v. 6, n. 1, p.1-10, mar. 2008. Semestral. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/14687/8595>. Acesso em: 12 set. 2014.

KONRATH, Mary Lúcia Pedroso; CARNEIRO, Mara Lúcia Fernandes; TAROUCO, Liane Margarida R.. Estratégias pedagógicas, planejamento e construção de Objetos de Aprendizagem para uso pedagógico. **Renote: novas tecnologias na educação,** Porto Alegre, v. 1, n. 7, p.1-10, jul. 2009. Semestral. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/14079/7941>. Acesso em: 11 nov. 2014.

LAFUENTE, Ángel Contreras de; ARMENTEROS, Manuel García; MOLL, Vicenç Font. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. **Bolema,** Rio Claro, v. 26, n. 42, p.667 - 669, abr. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42b/13.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2015.

LIRA, Antonio da Fonseca de. **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com ut ilização de objetos digitais.** 2008. 184 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Cinted, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/14666/000666894.pdf?sequence=1>. Acesso em: 05 jun. 2014.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993. 169 p.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade:** análise dos pressupostos que fundamentam o ensino de matemática. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2009. 103 p.

MAOR, Eli. ***e*:** A História de um número. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. 291 p. Tradução: Jorge Calife.

MARANHÃO. UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO. . **Manual do SIGAA para os alunos.** 2017. Disponível em: <http://musica.ufma.br/arq/manual_sigaa_normal.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2017.

MARIN, Douglas. Professores universitários que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino de matemática: quem são eles?. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática,** Florianópolis, v. 7, n. 1, p.62-77, mar. 2012. Semestral. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/25076>. Acesso em: 10 mar. 2015.

MARTINS JÚNIOR, José Cerqueira. Ensino de derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do Geogebra. In: Encontro Nacional de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, 17., 2013, Vitória. **Anais... .** Vitória: IFES, 2013. p. 1 - 12. Disponível em: <http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebrapem/xvii_ebrapem/paper/view/693>. Acesso em: 23 jan. 2015.

MENDES, Iran Abreu. Matemática **e Investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 214 p. (Contextos da Ciência).

MENEGAIS, D. A. F. N.; FAGUNDES, L. DA C.; SAUER, L. Z.; MORAIS, V. DA S. C. DE. Uma Abordagem sobre Abstração Reflexionante no Processo de Inversão das Operações Aritméticas. **Schème - Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, v. 7, n. 2, p. 121–134, 2015. Acesso em: 02 dez. 2016.

MONTANGERO, Jacques; MAURICE-NAVILLE, Danielle. **Piaget ou a Inteligência em evolução:** sinopse cronológica e vocabulário. Porto Alegre: Artmed, 1998. 242 p. Tradução: Tânia Beatriz Iwaszko Marques e Fernando Becker.

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. DE A. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o Caminho do Fazer ao Compreender. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educaçao**, v. 10, n. 3, p. 1–11, 2012. Disponível em: < http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/36459 >. Acesso em: 14 out. 2016.

PALANGANA, Isilda Campanen. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky:** a relevância do social. 3. ed. São Paulo: Summus Editorial, 2001. 171 p.

PARÁ. UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ. . **Manual do SIGAA.** 2017. Disponível em: < http://portal.ufpa.br/sigufpa/manuais/sigaa/Manual%20SIGAA%20-%20Graduacao%20-%20Maio%20-%202014.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2017.

PARAÍBA. UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA. . **Manual da Turma Virtual do SIGAA.** 2017. Disponível em: < https://sti.ufpb.br/sistemas/manual/Manual%20Turma%20Virtual%20SIGAA.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2017.

PIAGET, Jean et al. **A Tomada de Consciência.** São Paulo: Edições Melhoramentos, 1977. 211 p. Tradução: Edson Braga de Souza.

PIAGET, Jean. **A equilibração das estruturas cognitivas:** problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976. 175 p. Tradução: Marion Merlone dos Santos Penna.

PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

PIAGET, Jean. **Biologia e conhecimento:** ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognosscitivos. Petrópolis: Vozes, 1973. 424 p. (Psicologia da Inteligência). Tradução: Francisco M. Guimarães.

PIAGET, Jean. Desenvolvimento e aprendizagem. In: LAVATELLY, C. S.; STENDLER, F.. **Reading in child behavior and development.** New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972. p. 7-19. Tradução: Paulo Francisco Slomp. Disponível em: <https://ead.ufrgs.br/rooda/biblioteca/abrirArquivo.php/turmas/9277/materiais/10976.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2015.

PIAGET, Jean. **Fazer e compreender.** São Paulo: Edições Melhoramentos, 1978. 186 p. Tradução: Christina Larroudé de Paula Leite. Revisão Técnica: Lysandre Maria Castelo Branco.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a educação?** 5. ed. Rio de Janeiro: José Olympio Editora, 1977. 96 p. Tradução: Ivete Braga. (b)

PIAGET, Jean. **Psicologia e Pedagogia:** a resposta do grande psicólogo aos problemas do ensino. Rio de Janeiro: Forense, 1970. 182 p.

PIAGET, Jean; BETH, W e; MAYS, W. **Epistemologia Genética e pesquisa psicológica.** Rio de Janeiro: Freitas Bastos S.A., 1974. 153 p. Tradução: Equipe da Livraria Freitas Bastos.

PIVA JÚNIOR, Dilermando et al. **EAD na prática:** planejamento, métodos e ambientes de educação online. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011. 194 p.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. DE. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book Metodologia do Trabalho Cientifico.pdf . Acesso em 06 de mar de 2017.

RAMOS, Edla Maria Faust. **Informática aplicada à aprendizagem matemática.** Florianópolis: Ufsc/ead/ced/cfm, 2008. 254 p. (Curso de L).

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, Nilson José; CUNHA, Marisa O. (Org.). **Linguagem, conheciemento, ação:** ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2003. Cap. 19. p. 313-336. (Coleção Ensaios Transversais).

RICALDONI, Márcio Augusto Gama. Atividades de construção e interpretação de gráficos com o uso do Geogebra no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I. In: Encontro Nacional de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, 17., 2013, Votória. **Anais... .** Vitória: Ifes, 2013. p. 1 - 12. Disponível em: <ftp://ftp.ifes.edu.br/cursos/Matematica/EBRAPEM/GDs/GD04/Sessao2/Sala_D5/1240-1883-1-PB.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2014.

SERGIPE. UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE. . **Manual de Turma Virtual para Docentes.** 2017. Disponível em: < http://manuais.ufs.br/uploads/page_attach/path/629/manual_turma_virtual_direcionado_para_o_docente..pdf>. Acesso em: 08 abr. 2017.

SILVA, Antonio José da; BECKER, Fernando. Área Máxima: construindo o conceito de limites de funções com Geogebra. In: XXI CONGRESSO INTERNACIONAL DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 21., 2016, Santiago - Chile. **Anais... .** Santiago: Universidad de Chile, 2016. p. 266 - 271. Disponível em: <http://www.tise.cl/2016/img/Actas TISE 2016.pdf>. Acesso em: 07 dez. 2016. (b)

SILVA, Antonio José da; BECKER, Fernando. Cálculo NasNuvens: um ambiente de apoio à prática docente. In: XXIV CICLO DE PALESTRAS SOBRE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO, 24., 2016, Porto Alegre. **Anais... .** Porto Alegre: UFRGS, 2016. p. 137 - 146. Disponível em: <http://cinted.ufrgs.br/ciclos/ciclo24/Anais CINTED 2016.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2016

SILVA, Antonio José da; BECKER, Fernando. Das Experiências Docentes à Ação: elaboração de objetos virtuais para aprendizagem do conceito de limite de funções. **Revista Tecnologias na Educação,** Viçosa, v. 18, n. 1, p.1-15, fev. 2017. Semestral. Disponível em: <http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2017/02/Art5-vol18-edição-tematica-III-I-SNTDE-2016.pdf>. Acesso em: 06 fev. 2017.

SOUZA JÚNIOR, Arlindo José de; MOURA, Éliton Meireles de. Educação Matemática Digital: constituição de um ambiente virtual de aprendizagem com objetos de aprendizagem. In: OLIVEIRA, Cristiane Coppe de; MARIM, Vlademir (Org.). **Educação Matemática:** contextos e práticas docentes. Campinas: Alínea, 2010. Cap. 6. p. 179-190.

TAJRA, Sanmya Feitosa. **Informática na Educação:** novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade. 9. ed. São Paulo: Érica, 2012. 224 p.

TALL, David. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: Annual Conference of the International Group for the Psicology of Mathematics Education, 19., 1995, Recife. **Proccedings.** Recife: Editora Universitária da Ufpe, 1995. v. 1, p. 61 - 75. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.203.5010&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 02 mar. 2015.

TALL, David. Students'Difficulties in Calculus. In: Plenary presentatiton in working group. in: International Congress Mathematical Education, 3., 1992, Quebec. **Proccedings.** Quebec: University Of Warwick - Mathematics Education Research Centre, 1992. p. 1 - 8. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf>. Acesso em: 02 mar. 2015.

TORRES, Terezinha Ione Martins; GIRAFFA, Lucia M. M.; CLAUDIO, Dalcidio Moraes. Laboratório virtual para suporte ao ensino de Cálculo: uma experiência no Moodle. In: Congresso Internacional de Educação a Distância, 14., 2008, Santos. **Anais... .** São Paulo: ABED, 2008. p. 1 - 9. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2008/tc/511200883631PM.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2014.

VALENTE, José Armando. Espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, Maria Cristina Rodrigues Azevedo (Org.). **A tecnologia no ensino:** implicações para a aprendizagem. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002. Cap. 1. p. 15-37. (b)

VALENTE, José Armando. Repensando as situações de aprendizagem: o fazer e o compreender. In: BRASIL. Secretaria de Educação a Distância. Ministério da Educação e Cultura (Org.). **Tecnologia e educação:** novos tempos, outros rumos. Brasília: Mec/seed, 2002. Cap. 4. p. 28-35. (Boletim Salto para o Futuro - setembro/2002). Programa TV Escola. Disponível em: <http://cdnbi.tvescola.org.br/resources/VMSResources/contents/document/publicationsSeries/1426096028139.pdf>. Acesso em: 04 abr. 2015. (a)

VIEIRA, J. C. David. Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite. **Millenium: Revista do Instituto Politécnico de Viseu,** Viseu, n. 16, p.1-4, out. 1999. Semestral. 2º MAT Viseu On Line. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/16_ect3.htm>. Acesso em: 10 nov. 2014.

VINNER, Solomon; TALL, David. Concept image and concept definition in Mathematics whit particular reference to limits and continuity. **Educational studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 12, n. 2, p.151-169, jul. 1981. Semestral. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.3805&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 02 mar. 2015.

VOGADO, Gilberto Emanoel Reis; JUCÁ, Rosineide Sousa; MOTA, Thamires de Brito. Limite e derivada: uma análise da produção escrita dos alunos. **Revista Web-mat,** Belém, v. 1, n. 1, p.61-75, jul. 2014. Semestral. Disponível em: <http://paginas.uepa.br/seer/index.php/web-mat/article/view/266/230>. Acesso em: 25 jul. 2014.

WILEY, David A.. Connecting learning objects to instructional design theory:: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In: WILEY, David A. (Org.). **The instructional use of learning objects.** Utah: Agency For Instructional Technology, 2002. Cap. 1. p. 1-35. Disponível em: <http://www.reusability.org/read/chapters/wiley.doc>. Acesso em: 08 abr. 2017

ANEXO

ANEXO I – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Estamos realizando uma pesquisa com o objetivo de conhecer a noção de limite que alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral apresentam ao utilizar *applets* do software geogebra. Assim, você está sendo convidado (a) para realizar as atividades desse processo, em um formato a distância e presencial. A sua colaboração poderá contribuir para a construção do conhecimento científico e beneficiar perspectivas de intervenções educacionais futuras. A participação na pesquisa é totalmente voluntária. Esta pesquisa é coordenada pelo Professor Dr. Fernando Becker e pelo Doutorando Antonio José da Silva, do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) com quem podem ser obtidas maiores informações (Av. Paulo Gama, 110 - prédio 12105 - 3º andar sala 332 CEP: 90040-060 - Porto Alegre – RS – Brasil; antoniojsilva@ufma.br).

Se você tiver dúvidas em relação à pesquisa ou quiser comentar algum aspecto relacionado à mesma pode contatar as Pesquisadoras responsáveis. A participação na pesquisa é voluntária. Portanto, caso não queira participar, você não precisa assinar este termo nem participar da pesquisa. O fato de não querer participar da pesquisa não lhe trará nenhum prejuízo.

Após o encerramento do processo, você pode solicitar uma devolutiva individual de seus dados. Os resultados globais da pesquisa serão publicados posteriormente em algum periódico ou evento científico da área de psicologia e/ou informática na educação, sem identificação da identidade dos participantes. Na apresentação dos resultados desse trabalho, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo (a).

Este documento foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (número CAAE 20469713.0.0000.5347).

Pelo presente Termo de Consentimento, eu, ____ declaro que sou maior de 18 anos e que fui informado dos objetivos e da justificativa da presente pesquisa, e estou de acordo em participar da mesma. Fui igualmente informado: a) da liberdade de participar ou não da pesquisa, bem como do meu direito de retirar meu consentimento, a qualquer momento, e deixar de participar do estudo, sem que isso me traga qualquer prejuízo; b) da garantia de receber resposta a qualquer dúvida acerca dos procedimentos e outros assuntos relacionados com a pesquisa; c) da segurança de que não serei identificado e de que se manterá o caráter confidencial das informações registradas; d) que as informações obtidas serão arquivadas sem identificação pessoal junto ao banco de dados do pesquisador responsável; e) que os dados da pesquisa serão arquivados sob a guarda do pesquisador responsável por cinco anos e depois destruídos.

Data ___/____/____ Assinatura do participante: ____

Assinatura do pesquisador responsável: ____

ANEXO II – Autorização do CCHNST/UFMA para realização da pesquisa

UFMA
Universidade Federal do Maranhão

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Fundação Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1966 – São Luís - Maranhão.

CCHNST - Pinheiro

DECLARAÇÃO

A direção do Centro de Ciências Humanas Naturais da Saúde e Tecnologias está ciente das atividades de pesquisa de Antonio José da Silva, pesquisa de título NOÇÃO DE LIMITE DE FUNÇÕES REAIS E GEOGEBRA: Um estudo em Epistemologia Genética. Entendemos a importância da pesquisa de doutorado do docente e apoiamos toda a logística de execução com liberação de espaço e autorização do colegiado de Ciências Naturais para a execução da pesquisa em sala de aula. Informamos ainda que o professor da disciplina Cálculo Diferencial e Integral já disponibilizou o espaço necessário durante as aulas para o desenvolvimento da pesquisa sem que haja danos à carga horária ou conteúdos, assim garantindo o livre consentimento e esclarecido dos alunos em participar da pesquisa ou não.

Pinheiro (MA), 15 de março de 2016.

Rickley L. Marques

Rickley Leandro Marques
Diretor do CCHNST

Profº. Drº. Ricley Leandro Marques
Diretor do Campus Pinheiro
Matrícula SIAPE 1525392
Portaria: 388/2011 GR

Campus Universitário de Pinheiro
Estrada Pinheiro - Pacas, s/n, Km 10, Bairro Enseada. Pinheiro – MA - CEP 65200-000
campuspinheiro@gmail.com
Fone: (98) 3272-9781 / (98) 3381-3839

ANEXO III – Autorização para modificar e utilizar arquivo “.ggb” na aatividade 2

Zimbra **antonio.silva@ufma.br**

Re: Permissão

De : Antonio José da Silva <antoniojsilva@ufma.br> Sex, 17 de Out de 2014 15:02

Assunto : Re: Permissão

Para : Thales Vieira <thalesv@gmail.com>

Responder para : Antonio José da Silva <antoniojsilva@ufma.br>

É no PGIE / UFRGS (Informática na Educação)

Ainda estou em fase de qualificação.

Provisório: A aprendizagem do conceito do limite de funções de uma variável real: um estudo de epistemologia genética.

Irei fazer um estudo um estudo sobre a aprendizagem e o desenvolvimento desse conceito inspirada no método clínico a partir de registros em um ambiente virtual.

Antonio José da Silva
Universidade Federal do Maranhão
Área de Conhecimento: Matemática
Ciências Naturais - Campus de Pinheiro
http://www.antoniojsilva.mat.br/

De: "Thales Vieira" <thalesv@gmail.com>
Para: "Antonio José da Silva" <antoniojsilva@ufma.br>
Enviadas: Sexta-feira, 17 de outubro de 2014 14:45:30
Assunto: Re: Permissão

Olá Antônio,

Pode ficar a vontade para usar os applets. Só por curiosidade: qual o tema da sua tese?

Um abraço,
Prof. Thales Vieira

On 17/10/2014, at 14:24, Antonio José da Silva <antoniojsilva@ufma.br> wrote:

Professor, boa tarde.

Anexo IV – Solicitação de dados ao DEOAC em 2014

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURAS EM CIENCIAS NATURAIS PINHEIRO

MEMORANDO ELETRÔNICO Nº 42/2014 - CCCNP (50.02) (Identificador: 201420196)

São Luís-MA, 05 de Novembro de 2014.

Assunto: Solicitação de Dados Acadêmicos para Tese de Doutorado.

Senhor Diretor,

Sou Antonio José da Silva, servidor público, lotado no Campus de Pinheiro. Estou elaborando o texto de minha Tese que aborda questões relacionadas à aprendizagem do conceito de limite de funções reais de uma variável.
Necessito comprovar e caracterizar o problema de pesquisa no local de sua execução. São as disciplinas de matemática que abordam o conceito de Limite de funções reais de uma variável nos cursos de graduação da Universidade Federal do Maranhão que serão utilizadas para essa caracterização. Para tanto solicito, se possível, informações sobre as disciplinas com as seguintes denominações: Cálculo 1, Cálculo I, Cálculo, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Diferencial e Integral 1, Cálculo Diferencial e Integral I. Matemática II (ciências econômicas). Essas componentes curriculares podem estar presentes nos seguintes cursos: Licenciaturas em Matemática, Física, Química, Biologia, e Ciências Naturais. Engenharia Química, Química Industrial, Bacharelado em Química, Engenharia Elétrica, Ciências da Computação, Bacharelado em Ciência e Tecnologia, Ciências Econômicas, Oceanografia.
As informações solicitadas preenchem os seguintes requisitos conforme descrição abaixo:

Nome da Disciplina	Curso	Número de Matriculados	Número de Aprovados	Período

Necessito dessas informações nos períodos letivos, regulares e especiais, descritos assim: 2012.2, 2013 (Férias janeiro), 2013.1, 2013 (Férias julho), 2013.2, 2014 (Férias janeiro), 2014.1, 2014 (Férias julho).
Desde já agradeço a colaboração e empenho em atender esta solicitação.
Atenciosamente,
Antonio José da Silva (SIAPE: 2776352)

(Não Autenticado)
HILTON COSTA LOUZEIRO
COORDENADOR DE CURSO
Matrícula: 2886661

(Autenticado em 05/11/2014 17:06)
RICKLEY LEANDRO MARQUES
DIRETOR
Matrícula: 1525392

Fechar

Anexo V – Solicitação de dados ao DEOAC em 2016 (Página 1)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURAS EM CIENCIAS NATURAIS PINHEIRO/CCHNST

MEMORANDO ELETRÔNICO Nº 53/2016 - CCCNP (27.05) **São Luís-MA, 26 de Junho de 2016.**
(Identificador: 201656830)

DEPARTAMENTO DE DESENVOLVIMENTO E ORGANIZAÇÃO ACADÊMICA

Assunto: Solicitação de dados sobre disciplinas

Senhora diretora, Sou Antonio José da Silva, servidor público, lotado no Campus de Pinheiro. Estou elaborando o texto de minha Tese que aborda questões relacionadas à aprendizagem do conceito de limite de funções reais de uma variável. Necessito comprovar e caracterizar o problema de pesquisa no local de sua execução. Solicito, se possível, informações sobre o número de matriculados, aprovados e reprovados entre os períodos de 2014.2 até 2015.2. Esta já é a segunda solicitação que faço. Fiz a primeira solicitação em 05 de novembro de 2014 pelo MEMORANDO ELETRÔNICO Nº 42/2014 - CCCNP (50.02). Fui atendido plenamente. Informo que me responsabilizo pelos dados recebidos de forma que não haja identificação de pessoas. Dessa ocasião do contato com o DEOAC e o NTI foi possível estabelecer uma planilha que pode ajudar na obtenção dos dados junto ao serviço de informática.
Lista de disciplinas:

Código da disciplina	Nome da disciplina	Curso
DEMA0171	MATEMÁTICA APLICADA À ADMINISTRAÇÃO	Administração
CCAD0022	MATEMÁTICA APLICADA À ADMINISTRAÇÃO	Administração EAD
DEMA0032	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1	Ciências da computação (1990)
DEMA0164	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	Ciências da computação (2007)
COBI0050	MATEMÁTICA*	Biologia Chapadinha Licenciatura e bacharelado (2007
COBI0118	MATEMÁTICA*	Biologia Chapadinha Licenciatura plena (2008)
DEMA0073	CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	Ciências Biológicas São Luis 1996
DEMA0177	MATEMÁTICA PARA CIÊNCIAS BIOLÓGICAS*	Ciências Biológicas São Luis 2007
DEMA0136	MATEMÁTICA*	Ciências Biológicas São Luis 2011
DEMA0073	CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	Ciências Biológicas São Luis 1996 (Plena e Bacharelad
COBI0050	MATEMÁTICA*	Biologia Chapadinha 2007
COBI0118	MATEMÁTICA*	Biologia Chapadinha 2008
DEMA0198	MATEMÁTICA*	Ciências contábeis São Luis
DEMA0131	MATEMATICA I	Ciências econômicas
DEMA0131	MATEMATICA I	Ciências imobiliárias
DEMA0117	MATEMATICA*	Ciências imobiliárias (1988)
DEMA0129	MATEMÁTICA	Desenho industrial (designer)
DEMA0153	CÁLCULO I	Engenharia elétrica
DEMA0104	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	Farmácia
DEFI0192	CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Física Governador Nunes Freire
DEMA0032	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1	Física São Luis
DEMA0031	CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	Física São Luis 1969
DEMA0077	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	Matemática São Luis
COMA0038	CÁLCULO DIFERENCIAL e INTEGRAL I	Matemática São Luis EAD
DEMA0190	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Oceanografia
DEMA0032	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1	Química bacharelado
DEMA0032	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1	Química industrial
DEMA0032	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1	Química licenciatura
CCTB0001	CÁLCULO DIFERENCIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA	BCT Balsas
CCCT0001	CÁLCULO DIFERENCIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA	BCT São Luis
COEA0005	CÁLCULO I	Engenharia de alimentos
CNIM0039	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Ciências Naturais Imperatriz
CNGR0037	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Ciências Naturais Grajaú
CNCO0037	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Ciências Naturais Codó
CNPI0029	CÁLCULO DIFERENCIA E INTEGRAL	Ciências Naturais Pinheiro
CNSB0030	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Ciências Naturais São Bernardo
CNBA0014	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Ciências Naturais Bacabal
COZO0100	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Zootecnia
COAG0018	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	Agronomia

Solicito deferimento

Anexo V – Solicitação de dados ao DEOAC em 2016 (Página 2)

(Autenticado em 27/06/2016 17:19)	*(Autenticado em 28/06/2016 10:42)*
HILTON COSTA LOUZEIRO	RICKLEY LEANDRO MARQUES
COORDENADOR DE CURSO	*DIRETOR DE CENTRO ACADEMICO*
Matrícula: 2886661	*Matrícula: 1525392*

Fechar