UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

RODRIGO SABADIN FERREIRA

A LÓGICA DO *TRACTATUS* E O OPERADOR N:
Decidibilidade e Capacidade Expressiva

PORTO ALEGRE
2017

RODRIGO SABADIN FERREIRA

A LÓGICA DO *TRACTATUS* E O OPERADOR N:

Decidibilidade e Capacidade Expressiva

Dissertação submetida ao Programa de Pós- Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Orientador(a): Silvia Altmann

Co-orientador(a): Gisele Dalva Secco.

PORTO ALEGRE

2017

CIP - Catalogação na Publicação

Ferreira, Rodrigo Sabadin
A Lógica do Tractatus e o Operador N: Decidibilidade e Capacidade Expressiva / Rodrigo Sabadin Ferreira. -- 2017.
84 f.

Orientadora: Sílvia Altmann.
Coorientadora: Gisele Dalva Secco.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Porto Alegre, BR-RS, 2017.

1. História da Filosofia Analítica. 2. Lógica Matemática. 3. Wittgenstein. 4. Tractatus. 5. Operador N. I. Altmann, Sílvia , orient. II. Secco, Gisele Dalva, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Agradecimentos:

À minha orientadora Sílvia Altmann, por sua orientação, por seus comentários e críticas e, principalmente, pelo incentivo.

À minha co-orientadora Gisele Secco, por seus comentários, pelo aprendizado e pelas oportunidades de discutir temas deste trabalho em suas aulas.

Ao professor Eros com quem tive a primeira oportunidade de trabalhar com pesquisa e com quem muito aprendi.

Ao professor Paulo Faria, pelo privilégio de ter aprendido o valor das ideias de Russell em suas aulas.

Aos meus colegas de pós graduação Cássio Vinicius e Rafael Ribeiro que contribuíram no progresso deste trabalho através de conversas, comentrários e discussões.

Aos meus amigos Alexandre, Pedro, Lucas e Carlos pelo companheirismo e pelos bons momentos durante o período de realização deste trabalho.

À minha tia, Lizane, por todo apoio e carinho.

Aos meus pais, Antônio e Liane a quem dedico esta dissertação, e minha irmã Bruna, por todo suporte e incentivo ao longo dos anos.

À minha companheira Danielle por estar ao meu lado nos melhores momentos e nas piores dificuldades.

Aos membros da banca João Vergílio Gallerani Cuter, Jônadas Techio e Paulo Francisco Estrella Faria.

Ao CnPq pela bolsa de estudos sem a qual a realização este trabalho não seria possível.

Epígrafes:

"[...] *nunca* pode haver surpresas na lógica" (*Tractatus* 6.1251)

"[...] Whence this determining of what is not yet there? This despotic demand? ("The hardness of the logical must".)"
(*Investigações Filosóficas,* §437)

"[…] the White Knight said: 'Everybody that hears me sing it – either it brings the *tears* into their eyes or else -'. 'Or else what?', said Alice, for the knight had made a sudden pause. 'Or else it doesn't, you know'."
(Alice Through The Looking Glass)

Resumo:

O presente trabalho tem como objeto de estudo o primeiro e único livro publicado por Wittgensein, seu *Tractatus Logico-Philosophicus.* Nosso tópico consiste nas dificuldades envolvidas em uma de suas teses mais centrais: a tese segundo a qual toda e qualquer proposição pode ser expressa em termos da aplicação de um operador de verdade primitivo de negação conjunta a proposições elementares. Dentre os problemas exegéticos envolvidos com o aforismo 6 e seu lugar na lógica do *Tractatus,* nos interessa tratar de dois grupos de questões sucitados na literatura secundária. O primeiro diz respeito à capacidade expressiva da notação do *Tractatus,* isto é, se podemos expressar, como afirma Wittgenstein, através da forma geral $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, toda função de verdade de proposições elementares apenas com "aplicações sucessivas do operador *N*" (5.32). O segundo grupo de questões diz respeito à possibilidade de conciliar a tese de 6 e 5.32 com o famoso resultado de que não pode haver um procediemento de decisão para todo o cálculo de predicados.

No primeiro capítulo argumentaremos que a lógica do *Tractatus* é, em princípio, capaz de expressar qualquer proposição do cálculo de predicados de primeira ordem que contém quantificação (simples e múltipla) como resultado de um número finito de aplicações sucessivas do operador N. Defenderemos essa posição com base em uma sugestão de complemento notacional de Peter Geach que será defendida a partir de uma leitura da noção de generalidade do *Tractatus*, levando em conta dificuldades sucitadas contra essa posição por alguns comentadores, especialmente Robert Fogelin.

No segundo capítulo argumentaremos, em um primeiro momento, que apesar de Wittgenstein estar comprometido com a decidibilidade da lógica no *Tractatus,* a tese de 6 e 5.32 é independente do cálculo de predicados ser decidível ou não.Em um segundo momento será argumentado (seguindo ideias sugeridas por Roger White e Michael Potter) que é uma possibilidade bastante plausível que o compromisso de Wittgenstein com a decidibilidade da lógica se fundamenta nas seguintes teses tractarianas: a)A proposição mostra seu sentido. b) O sentido de uma proposição consiste em suas condições de verdade. c) A proposição descreve a realidade completamente. Assim, mostraremos que a tese tractariana de que deve haver um procedimento de decisão para toda lógica pode estar fundamentada na concepção tractariana da compreensão do sentido proposicional.

Sumário:

Nota sobre abreviações, citações e traduções:

- Referências ao *Tractatus* serão feitas indicando apenas o número do aforismo. Todas as citações do *Tractatus* serão da edição brasileira traduzida por Luiz Henrique Lopes dos Santos.

- Referências aos textos contidos nos *Notebooks 1914-1918* serão abreviadas por NB acompanhadas de data e página, NL acompanhadas da página e NM acompanhadas da página, correspondendo, respectivamente às*, Notes on Logic 1913,* e às *Notas Ditadas a Moore na Noruega 1913-14.* A tradução para o ingês desses textos que será utilizada se deve a G.E.M Anscombe

- Citações de cartas serão todas à obra "*Wittgenstein in Cambridge: Letters and Documents 1911-1951*" editada por Brian McGuinness. As citações de cartas serão acompanhadas por data e destinatário e a abreviatura "LT" seguida da página. As traduções para o inglês dessas cartas se devem a McGuinness.

- Todas as citações em inglês foram deixadas sem tradução, exceto quando estas ocorrem no corpo do texto, sendo nesse caso de responsabilidade do presente autor.

Glossário de Símbolos e Notação:

Símbolos lógicos:

"~" ….. Negação clássica.

".", ":", ":."..Conjunção.

"v"...Disjunção Inclusiva.

"⊃"...Implicação Material.

"N"...Operador N.

"(x)", "(y)", etc..Quantificador Universal.

"($\exists x$)", "($\exists y$)", etc..Quantificador Existencial.

Variáveis, letras esquemáticas, etc.:

Letras maiúsculas em negrito **"A", "B", "C", "$\mathbf{A_1}$", "$\mathbf{B_1}$"**,etc são (meta) variáveis para fórmulas bem formadas.

Letras minúsculas "*p*", "*q*", "*r*" são letras esquemáticas para proposições.

Letras minúsculas gregas "α", "β", "γ" são (meta) variáveis para variáveis da linguagem objeto.

Letras minúsculas em itálico "*x*", "*y*", "*z*" são variáveis individuais da linguagem objeto.

Letras gregas maiúsculas "Φ", "Ψ" são funções proposicionais.

Legras minúsculas em itálico "*f*", "*g*", são funções proposicionais.

Letra minúsculas "*a*", "*b*", "*c*" são nomes próprios de objetos simples.

Outros:

A letra grega "ζ" é sempre uma variável proposicional, isto é, uma variável cujos valores são proposições ou classes de proposições.

Introdução:
O Pensamento Fundamental do *Tractatus* e a Forma Geral da Proposição

Um dos temas recorrentes nos textos pré-tractarianos de Wittgenstein é sua insatisfação com as caracterizações da natureza da Lógica – ou das assim chamadas 'Leis Lógicas' – presentes nas obras de Frege e Russell. Wittgenstein rejeitou a concepção de Lógica - que ele chamava de “velha lógica” (NL, p.108) – de Frege e Russell enquanto leis maximamente gerais. Para Wittgenstein, a ideia fregeana e russelliana de que a lógica se distingue das ciências especiais apenas por não tratar de um grupo específico de verdades como as da Física ou da Química, mas de leis que regem toda e qualquer verdade enquanto verdade não era sustentável – é preciso mostrar o que torna as proposições (ou leis) da Lógica proposições cuja verdade se deve a algo radicalmente distinto das ciências particulares.

O diagnóstico de Wittgenstein foi, no caso de Frege, que a ausência de um critério preciso para distinguir o lógico do não lógico permitiu a intrusão de contradições em seu sistema, resultando no fracasso de seu projeto. No caso de Whitehead e Russell, a presença de axiomas de caráter não lógico em seu sistema exposto em sua forma completa em *Principia Mathematica,* como o axioma do infinito[1] e o axioma da redutibilidade[2] tornaram essa obra monumental carente de uma fundação legítima.

Assim, Wittgensein diagnosticou a ausência de um critério claro para distinguir o lógico do não lógico como o mais grave problema herdado por ele de Frege e Russell. Como foi dito acima, Russell explicitamente distinguia a Lógica de outras ciências apenas em função de seu maior grau de generalidade. Essa aproximação ou analogia com as ciências particulares era absolutamente inaceitável para Wittgenstein que em 1912, enquanto aluno de Russell manifestava sua insatisfação, naquela que seria sua primeira observação filosófica preservada: “A Lógica deve resultar uma ciência de um tipo *totalmente* diferente de qualquer outra” (Carta a Russell 22.6.1912).

Justamente a questão sobre *o que* torna a lógica uma ciência com estatuto totalmente diferente das outras ciências ou, de maneira mais adequada, a questão de *como* explicar esse

1 Axioma que afirma que o número de indivíduos não é finito, ou, em outras palavras, que não há um número finito de cardinais finitos (WHITEHEAD & RUSSELL, 1910-13, vol, p.200-1)

2 Axioma que afirma que, para toda função proposicional de tipo e ordem arbitrária, existe uma função co-extensiva, isto é, verdadeira e falsa dos mesmos argumentos, porém predicativa, isto é, cuja ordem é a menor possível acima de seus argumentos.

estatuto peculiar da lógica foi um dos temas fundamentais que preocuparam Wittgenstein desde sua chegada em Cambridge até (pelo menos) a publicação do *Tractatus.*

Em 1913 Wittgenstein encontrou uma resposta: o que caracteriza as assim chamadas leis lógicas ou proposições lógicas é que estas são *tautologias*. No *Tractatus* essa tese é encapsulada na ideia de que as proposições da lógica não dizem nada – não têm sentido[3]. Ao contrário de proposições com sentido que descrevem estados de coisas e, portanto, podem ou bem ser verdadeiras ou bem ser falsas em virtude de como as coisas são, a tautologia é verdadeira apenas em virtude de sua forma lógica[4] *e* não da existência ou inexistência de estados de coisas. Em particular, as proposições da Lógica não são verdadeiras em função da existência de qualquer espécie de objetos lógicos – como Wittgenstein deixa claro em 4.0312: "As constantes lógicas não substituem"[5].

Essa explicação da natureza da verdade lógica vem atrelada a uma explicação do que constitui o sentido e a verdade de proposições em geral, assim como da descoberta de Wittgenstein dessa explicação. Entre 1913 e 1914 dois textos de enorme importância para a compreensão das ideias do *Tractatus* foram produzidos. Em 1913 o manuscrito conhecido como "*Notes on Logic"* e em 1914 um conjunto de notas que Wittgenstein ditou para Moore na Noruega. Ambos esses textos contém versões preliminares de ideias que tomariam sua forma definitiva no *Tractatus* ou ideias tractarianas já em sua forma final. Nas *Notes on Logic* vemos o surgimento da assim chamada teoria pictórica da representação segundo a qual proposições são figuras da realidade. Segundo a teoria pictórica, elementos da figura estão por ou substituem elementos da realidade, de modo que a questão sobre *qual* a situação

3 No *Tractatus* Wittgenstein distingue proposições [Sä*tze*] sem sentido [*sinnlos*] de contrasensos [*unsinnig*]. Tautologias e contradições são sem sentido por serem um caso limite de construções gramaticais corretas – embora elas não afirmem a existência ou inexistência de estados de coisas e não possam ser falsas no caso das tautologiaas ou verdadeiras no caso das contradições, elas são sentenças bem construídas. Contrassensos, por sua vez são sentenças mal formadas, ou seja, são produto de violações das regras sintáticas de construção de proposições.

4 Esse 'ser verdadeiro em virtude da forma lógica' é o que é *mostrado,* por exemplo quando calculamos a tabela de verdade de uma tautologia do cálculo proposicional e vemos que qualquer combinação de valores das partes resulta na verdade do todo. Dizer que uma proposição é verdadeira em virtude de sua forma lógica, portanto, não tem como consequência atribuir qualquer estatuto ontológico a formas lógicas, mas é apenas dizer que há construções sintáticas que, dadas nossas convenções de como significar com os sinais, não podem ser falsas ou verdadeiras por não dizerem nada.

5 Para uma discussão detalhada desse aforismo consultar McGUINESS, 1979.

representada pela figura possa ser respondida apenas por meio da figura, isto é, toda informação necessária para julgar o que deve ser o caso *se* a figura for verdadeira deve poder ser encontrada *na figura em questão,* ou seja, que a questão sobre qual a situação representada pela figura deve poder ser respondida sem a necessidade de *outra figura*,[6] uma vez garantida a condição de que a cada parte da figura tenha sido determinada uma designação de um elemento da realidade. Mas a verdade (ou falsidade) de uma figura – de uma proposição – não pode ser extraída ou inferida apenas da figura, mas somente através da comparação da figura com a realidade. Figuras ou proposições são fatos cujos constituintes são correlacionados com os constituintes da situação que ela representa na realidade. Essas ideias estão presentes nos aforismos do *Tractatus* como:

> 3.1431 Fica muito clara a essência do sinal proposicional quando o concebemos composto não de sinais escritos, mas de objetos espaciais (digamos, mesas, cadeiras, livros).
> A posição relativa dessas coisas exprime, nesse caso, o sentido da proposição.
> 3.1432 Não: "O sinal complexo 'aRb" diz que a mantém a relação R com b", mas que "a" mantém uma certa relação com "b" diz que aRb.
> 3.2 Na proposição, o pensamento pode ser expresso de modo que aos objetos do pensamento correspondam elementos do sinal proposicional.

Já estão presentes em sua forma definitva nas *Notes on Logic:*

> In "aRb" it is not the complex that symbolizes but the fact that the symbol "a" stands in a certain relation to the symbol "b". Thus facts are symbolized by facts, or more correctly: that a certain thing is the case in the symbol says that a certain thing is the case in the world. (NB, p.96)

Justamente o que Wittgenstein pensava estar de posse era algo que (segundo ele), tanto Frege quanto Russell jamais tiveram em uma forma satisfatória[7]: uma explicação acerca do modo como um sinal proposicional exprime seu sentido, suas condições de verdade. A proposição ou sinal proposicional que é um fato – o fato de que tais e tais símbolos estão articulados de tal e tal modo – representa que tais e tais elementos da realidade estão articulados de um determinado modo. Caso os elementos da realidade estejam articulados

---

6 Outro modo de colocar essa qualificação é que uma proposição contém todo seu sentido ou que aquilo que ela figura ou representa não depende da verdade de qualquer outra representação para ser uma representação daquilo que representa.

7 Assim, temos, por exemplo: "Frege said, "propositions are names"; Russell said "propositions correspond to complexes". Both are false." (NL, p.97).

como a proposição *diz* que eles estão, a proposição é verdadeira, caso não estejam a proposição é falsa. É assim que Wittgenstein, nas *Notes on Logic* conclui que a marca característica das proposições com sentido é sua *bipolaridade,* ou seja que a marca *essencial* de proposições com sentido é que elas possam tanto ser verdadeiras quanto falsas:

> To understand a proposition p it is not enough to know that p implies " "p" is true" , but we must also know that ~p implies " "p" is false". This shows the bi-polarity of the proposition. (NL, p.94)
>
> Every proposition is essentially true-false: to understand it, we must know both what must be the case if it is true, and what must be the case if it is false. Thus a proposition has two *poles,* corresponding to the case of its truth and the case of its falsehood. We call this the *sense* of the proposition. (NL, p.99) [8]

A proposição é, assim, um modelo ou figura da realidade na medida em que possui dois polos – o verdadeiro e o falso – e ela possui dois pólos na medida em que afirma a existência de um estado de coisas na realidade por meio da correlação de objetos com sinais. O que é condição de sentido para um sinal proposicional – para que esse possa ser verdadeiro ou falso – é que os termos simples (nomes) que nela ocorrem tenham seus significados estabelecidos de antemão:

> 4.031 Na proposição, uma situação é como que montada para teste.
> Pode-se dizer sem rodeios: esta proposição representa tal e tal situação – ao invés de: esta proposição tem tal e tal sentido.
> 4.0311 Um nome toma o lugar de uma coisa, um outro de uma outra coisa, e estão ligadas entre si, e assim o todo representa – como um quadro vivo – o estado de coisas.
> 4.0312 A possibilidade da proposição repousa sobre o princípio da substituição de objetos por sinais[9].

A mera correlação de objetos com sinais entretanto, não é suficiente para oferecer uma explicação da possibillidade do sentido proposicional. É preciso explicar como a proposição

8 No *Tractatus* encontramos aforismos muito similares: A realidade deve, por meio da proposição, ficar restrita a um sim ou não. […] A proposição é a descrição de um estado de coisas. […] Entender uma proposição significa saber o que é o caso se ela for verdadeira. (Pode-se, pois, entendê-la, sem saber se é verdadeira.). (4.021)

9 Nos *Notebooks* encontramos: "How does a proposition determine the logical space? How does the picture present a situation? It is after all itself not the situation, which need not be the case at all. One name is representative one thing, another of another thing, and they themselves are connected; in this way the whole images the situation – like a *tableau vivant*." (NB, p.26)

pode refletir a multiplicidade lógica da realidade, isto é, como a proposição pode representar todas as possibilidades de combinação de elementos da realidade. Assim encontramos nos *Notebooks* as seguintes afirmações:

> It must be possible to distinguish just as much in the real propositional sign as can be distinguished in the situation. This is what their identity consists in.
>
> The possibility of the proposition is, of course, founded on the principle of signs as *going proxy* for objects.
> Thus in the proposition something has *something eles* as its proxy.
> But there is also the *common cement*. (NB, p.37)

Esse 'cimento comum', Wittgenstein conclui, é a *forma lógica* das proposições elementares. Cada nome que ocorre em uma proposição elementar representa um objeto que, como Wittgenstein afirma em 2.014, possui uma forma, que não consiste em nada mais do que suas possibilidades de combinação com outros objetos. Este conjunto de possibilidades de combinação com outros objetos será espelhado na linguagem nas possibilidades combinatórias dos nomes simples que ocorrem nas proposições elementares – cada nome terá possibilidades de combinação com outros nomes na medida em que o objeto que o nome em questão representa pode se combinar com outros objetos representados por outros nomes. Essa é a tese tractariana de que há um isomorfismo entre a linguagem e o mundo: haverá, para cada proposição elementar (que pode ser verdadeira ou falsa) um estado de coisas que existe caso a proposição seja verdadeira e que não existe caso ela seja falsa e que partilha com a proposição a mesma multiplicidade lógica.

Essa concepção de proposições enquanto modelos ou figuras isomórficas com a realidade (e por isso capaz de representá-la) tornou possível resolver dois problemas fundamentais:

1. Explicar a natureza das assim chamadas constantes lógicas.
2. Explicar a noção de verdade lógica.

Quanto a 1, a noção fundamental que conecta a teoria pictórica com a explicação da natureza das constantes lógicas é a de forma lógica. A forma lógica da figura, da representação, não pode ser representada em nenhum dos dois sentidos em que Wittgenstein fala de representação. A forma lógica não pode ser representada nem no sentido em que um nome representa, isto é, que está por ou substitui um objeto e tampouco do modo como uma proposição representa, isto é, articula e afirma a existência de uma situação. A razão para isso é que a forma lógica é condição de possibilidade da representação – e, esta, segundo Wittgenstein*,* a proposição apenas *exibe* ou *mostra*, sendo sua descrição impossível:

> 4.12 A proposição pode representar toda a realidade, mas não pode representar o que deve ter em comum com a realidade para poder representa-la – a forma lógica.
> Para podermos representar a forma lógica, deveríamos poder-nos instalar, com a proposição, fora da lógica, quer dizer, fora do mundo.
> 4.121 A proposição não pode representar a forma lógica, esta forma se espelha na proposição.
> O que se espelha na linguagem, esta não pode representar.
> O que *se* exprime na linguagem, *nós* não podemos exprimir por meio dela.
> A proposição *mostra* sua forma lógica da realidade.
> Ela a exibe.

De maneira similar, a forma lógica de proposições complexas que são função de verdade de proposições elementares não consiste em um constituinte adicional que essas proposições contém – não há *objetos* que conectivos lógicas representam. Como diz Wittgensein em 4.0312, sua ideia fundamental é que “as constantes lógicas não substituem”, que “a lógica”, ou seja, *a forma* “dos fatos não se deixa substituir”[10]. Para que se veja que as constantes lógicas não representam objetos, defende Wittgenstein, basta notar que a suposição de conectivos lógicas como entidades levaria à conclusão absurda de que proposições como “~~*p*” e “*p*” não consistem apenas em sínais diferentes, mas em diferentes símbolos:

> 5.44 […] E se houvesse um objeto chamado “~”, “~~~*p*” deveria dizer algo diferente do que “*p*” diz. Pois, nesse caso, uma das proposições trataria precisamente de ~, a outra não[11].

Isso leva Wittgenstein a encontrar um modo de compreender a contribuição semântica dos assim chamados conectivos lógicos segundo a qual estes não ocorrem como constituintes do sentido das proposições em que ocorrem, mas como marcas de algo que *fazemos* com a

10 Novamente, temos uma versão preliminar desse aforismo nos *Notebooks:* “The possibility of the proposition is, of course, founded on the principle of signs as going proxy for objects. Thus in the proposition something has something else as its proxy. But there is also the common cement. My fundamental thought is that the logical constants are not proxies. That the logic of the facts cannot have anything as its proxy.” (NB 25-12-14)

11 Também nos *Notebooks* encontramos afirmações similares: como “The signs of the ab-functions are not material, otherwise they could not vanish. (NB, p.37)”; e “If there were mathematical objects – logical constants – the proposition “I am eating five plums” would be a proposition of mathematics. And it is not even a proposition of applied mathematics.” (NB, p.40)

proposição: *no Tractatus, constantes lógicas não representam objetos, mas são marca da aplicação de uma operação.* O papel das assim chamadas constantes lógicas é marcar a *estrutura* que certas proposições têm, ou seja, elas dizem respeito às possibilidades de configuração da realidade. A ideia fundamental do *Tractatus* é que as relações *internas* que proposições mantêm entre si podem ser exibidas através da representação de proposições "como resultado de operações [que são geradas] a partir de outras proposições (as bases da operação)" (5.21), de modo que uma operação é "expressão de uma relação entre as estruturas de seu resultado e de suas bases" (5.22). No entanto, o sinal de uma operação não 'representa' nada em qualquer sentido legítimo, mas marca "o que deve *acontecer* com uma proposição para dela se faça outra" (5.23). Se *p* for uma proposião elementar, o sinal "~" em "~*p*" não significa um constituinte que ocorre na proposição ~*p* e não ocorre em *p,* mas sim que, nós, de acordo com uma convenção simbólica representamos com "~*p*" o mesmo que representamos com "*p*", mas com a polaridade invertida. Em outras palavras, "~" em "~*p*" 'representa' a inversão do sentido de *p,* isto é, que *nós expressamos "~p*" o sentido *oposto* daquilo que expressamos com "*p*". Ao passo que proposições elementares tratam de objetos representados pelos nomes que nelas ocorrem, proposições moleculares como "~*p*", "*p* v *q*" não tratam de uma entidade representada por "~" ou "v" – a proposição "*p* v *q*" não possuem um constituinte além daqueles já presentes nas proposições "*p*" e "*q*".

Essa explicação da natureza, das constantes lógicas, por sua vez, abriu caminho para uma explicação das verdades lógicas. Proposições elementares – que contém apenas nomes, sempre afirmam algo sobre os objetos representados pelos nomes que nelas ocorrem, a saber, que eles se encontram na realidade em uma determinada configuração – algo que pode ou não ser o caso. Todas as funções de verdade geradas a partir de aplicações de operações de verdade (simbolizadas por "~", "v", etc.) a proposições elementares resultam em proposições moleculares cuja verdade sempre depende apenas do valor de verdade das proposições elementares (que por sua vez, depende da existência de estados de coisas). Como um caso limite dessa construção de proposições complexas a partir de operações sobre proposições elementares temos as proposições da lógica, a que Wittgenstein chama de tautologias, como "*p* v ~*p*" o valor de verdade *desta* proposição não pode depender da maneira como a realidade está configurada dado que toda e qualquer combinação de estados de coisas a torna verdadeira.

No *Tractatus,* no entanto, Wittgensein não mostra apenas que todas as constantes da “velha” lógica não são sinais que denotam o quer que seja, mas que todos são redutíveis a uma única constante lógica primitiva, o operador N. Wittgensein procura estabelecer, assim, a tese segundo a qual toda função de verdade pode ser gerada por meio da aplicação reiterada de uma única operação de verdade primitiva. Tal ideia é resumida no aforismo 6 que trata da “forma geral da proposição”:

> 6 A forma geral da função de verdade é: [$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)]
> Isso é a forma geral da proposição.
> 6.001 Isso nada diz senão que toda proposição é um resultado da aplicação sucessiva da operação N($\bar{\xi}$) às proposições elementares.

O que esses aforismos afirmam é que dadas as proposições elementares e a operação de negação conjunta de todos os valores de uma variável proposicional ξ, todas (e apenas) as funções de verdade de proposições elementares podem ser geradas. Tal tese é central para os propósitos do *Tractatus* de elucidação do que é para uma proposição possuir sentido e para os argumentos de Wittgenstein contra aquilo que ele compreendia ser a concepção de lógica de Frege e Russell.

Quanto à elucidação do sentido proposicional, o papel da tese de 6 consiste em mostrar que o sentido de uma proposição complexa não consiste em nada mais do que a afirmação da verdade ou falsidade de grupos de proposições elementares – isso é o que cumpre a forma geral da função de verdade “[$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)]”: exibir a estrutura sintática que toda e qualquer construção linguística bem formada deve respeitar.

Quanto à rejeição de Wittgenstein daquilo que ele tomava como a concepção de Lógica de Frege e Russell, “a velha lógica”, o papel que a tese de 6 cumpre é o de mostrar que não há tal coisa como conteúdo lógico ou proposições lógicas: que a lógica não *trata de nada*. Isso é cumprido pela tese de 6 mostrando que todas as proposições da lógica, a saber, as assim chamadas 'tautologias' são apenas resultado de combinações *vácuas* de classes de proposições elementares a partir de operações de verdade que resultam em funções de verdade de proposições elementares. O que isso mostra é que as proposições da lógica são casos limite permitidos pela forma [$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)]: no caso das tautologias, a estrutura interna da 'proposição' resultante de aplicações da operador N torna sua verdade indepente da verdade ou falsidade da classe de proposições das quais ela é função de verdade.

No entanto, apesar de suas posições centrais para os propósitos mais fundamentais de do *Tractatus*, os aforismos 5.32 e 6 (e outros relacionados) suscitam sérios problemas interpretativos, seja pelo modo oracular de expressão de Wittgenstein, seja por reais dificuldades com as teses por eles expressas. Dentre os tipos de dificuldades geralmente suscitadas na literatura secundária, dois serão de nosso interesse no presente trabalho: as que dizem respeito à capacidade expressiva do operador N e as que dizem respeito à possibilidade de conciliar a tese de 6 e 5.32 com o resultado de que não pode haver um procedimento de decisão para todo o cálculo de predicados. Os capítulos que seguem tratam destas questões. No primeiro capítulo trataremos dos problemas envolvidos com a capacidade expressiva do operador N. No segundo e terceiro trataremos dos problemas envolvidos com a não-decidibilidade da lógica.

Capítulo1:
A Capacidade Expressiva do Operador N

> Se a introdução de um novo expediente [...] se revelou necessária numa certa situação, devemos logo nos perguntar: onde esse expediente deve, agora, ser *sempre* empregado? Sua posição na lógica deve ser explicada. (*Tractatus,* 5.453)

§1. Introdução

A única 'constante' primitiva do sistema formal que poderia ser construído a partir das observações do *Tractatus* é o operador de negação conjunta simbolizado por "N". A maneira como o operador N funciona é explicada nos aforismos 5.5's de maneira bastante clara (para os padrões do *Tractatus*):

> 5.5 Toda função de verdade é um resultado da aplicação sucessiva da operação (-----V)(ξ,.....) a proposições elementares.
> Essa operação nega todas as proposições entre os parênteses da direita e chamo-a a negação dessas proposições.
> [...]
> 5.502 Escrevo, portanto, "N($\bar{\xi}$)", ao invés de (-----V)(ξ,.....). N($\bar{\xi}$) é a negação de todos os valores da variável proposicional ξ. (WITTGENSTEIN, L, 1993, p.247)

O que esses aforismos afirmam é que o operador N se aplica aos valores de uma *variável proposicional,* isto é, a proposições ou classes de proposições; ao tomar como base um conjunto de proposições que são valores de uma variável proposicional, a aplicação do operador N resulta em uma *única proposição* que é a negação conjunta de cada proposição que compõe o conjunto de proposições sobre o qual N foi aplicado; os parênteses da esquerda "(-----V)" representam a combinatória de valores de verdade introduzidas em 4.442 e 5.101 que funcionam de modo análogo às tabelas de verdade nos casos finitos. Claramente o operador N é adequado para expressar toda função do cálculo proposicional clássico, dado que, assim como a barra de Sheffer[12], ele é capaz de expressar qualquer um dos conectivos

12 Vide, por exemplo, QUINE, W.V., 1940, p.45-46.

"⊃", "." , "v" e "~":

(1) $\sim p =df\ \mathrm{N}(p)$.

(2) $p \lor q =df\ \mathrm{N}(\mathrm{N}(p, q)$.

(3) $p.q = \sim(\sim p \lor \sim q) =df\ \mathrm{N}(\mathrm{N}(p), \mathrm{N}(q)))$

(4) $p \supset q = \sim p \lor q =df\, \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(p, q), p))$

Generalizando, no caso de uma classe finita de proposições, o operador N funciona de maneira análoga à barra de Sheffer. Aqui, no entanto, devemos tomar a precaução, como adverte Peter Geach (GEACH, 1981, p.168) de não confundir o operador N com a barra de Sheffer. A barra de Sheffer é um operador proposicional binário caracterizado por sua tabela "(p,q)(FFFV)". O operador N é muito mais do que isso: é um operador que nega conjuntamente qualquer classe (que, como veremos, pode ser de tamanho arbitrário) de proposições e resulta na proposição que afirma que *todas* as proposições dessa classe são falsas[13]. Podemos expressar isso do senguinte modo:

(5) Onde **A** é qualquer sentença, $\ulcorner \mathrm{N}(\mathbf{A}) \urcorner$[14] é verdadeira sse **A** for falsa.

(6) Onde $\mathbf{A_1},....\mathbf{A_n}$ são quaisquer sentenças e $\{\mathbf{A_1},....\mathbf{A_n}\}$ é uma classe contendo apenas $\mathbf{A_1},....\mathbf{A_n}$, então $\ulcorner \mathrm{N}(\mathbf{A_1},....\mathbf{A_n}) \urcorner$ é verdadeira, sse, para cada $\ulcorner \mathbf{A_i} \urcorner$ que pertence a $\{\mathbf{A_1},....\mathbf{A_n}\}$, $\ulcorner \mathrm{N}(\mathbf{A_i}) \urcorner$ é verdadeiro.[15]

13 É claro que em certo sentido, podemos dizer que o operador N é uma generalização da barra de Sheffer, embora isso necessite da qualificação de que ela seja uma generalização radical, dado que o operador N foi concebido para tomar como base um número possívelmente infinito de operandos para dar conta de proposições contendo generalidade.

14 Estamos utilizando as *Quine-corners* da maneira tradicional, ou seja, como um dispositivo abreviatório para a concatenação dos símbolos "N"^ "(" ^ **A** ^ ")" - e essa expressão denota outra expressão relativamente a uma atribuição de um valor à variável **A.** Utilizaremos o dispositivo apenas em ocasiões em que deve ficar claro onde estamos utilizando (para fins de exposição) metavariáveis que denotam outras expressões e onde estamos tratando de expressões que denotam ou signifcam objetos, predicados, etc.

15 Cabe notar aqui que toda reformulação metalinguística (que envolve, por exemplo, o uso de metavariáveis para fórmulas e/ou sentenças) é ilegítima de acordo com as restrições do *Tractatus* em relação àquilo que não pode ser dito, mas apenas mostrado. Justificamos o uso dessas formulações contrassensuais como *tentativas* de *elucidar* as próprias formulações também contrassensuais e consideravelmente mais obscuras do próprio *Tractatus.* No entanto, enquanto *soluções* genuínas de problemas interpretativos elas jamais devem ser admitidas.

É claro, no entanto, que isso é insuficiente como uma definição recursiva de *todas* as possibilidades de aplicação do operador N, dado que isso não nos permite dar conta de proposições que contêm generalidade, como proposições em que aplicamos o operador N aos valores de uma função proposicional *fx*. A razão disso é que no *Tractatus* não podemos assumir o *tamanho* dos domínios de quantificação: se há (ou não) infinitos objetos e, assim, infinitos nomes e, portanto, infinitas proposições da forma "*fx*" é uma questão que não pode ser respondida *a priori*, mas apenas após análise completa da linguagem ter sido realizada[16]. Isso significa que, pelo menos em princípio, devemos assumir que o operador N deve poder ser aplicado a classes infinitas de proposições em casos em que ele é aplicado a uma função proposicional *fx*. De fato, no aforismo 5.501 Wittgenstein enumera duas maneiras possíveis de determinar os valores de uma variável proposicional ξ além da enumeração de um número finito de proposições:

> *Podemos* distinguir três espécies de descrição: 1. A enumeração direta. Nesse caso podemos simplesmente colocar, no lugar da variável, seus valores constantes. 2. A especificação de uma função *fx,* cujos valores para todos os valores de *x* sejam as proposições a serem descritas. 3. A especificação de uma lei formal segundo a qual tais proposições sejam constituídas. Nesse caso, os termos da expressão entre parênteses são todos os termos de uma série formal. (WITTGENSTEIN, L, 1993, p.227)

O caso relevante para o problema de expressão de proposições contendo generalidade é o segundo[17], i.e especificando uma função proposicional[18]. Sobre a forma como essa descrição é feita o que Wittgenstein afirma (em 5.52) é o seguinte: "Se os valores de ξ são

16 No *Tractatus,* qualquer tentativa de restringir *a priori* o espaço lógico é ilegítima. Esse é o núcleo da crítica de Wittgenstein à adoção de Russell em *Principia Mathematica* do infame axioma do infinito (WHITEHEAD e RUSSELL, 1910-1913 vol2, p.203): "O que cumpriria ao Axiom of Infinity dizer emprimir-se-ia na linguagem por haver uma infinidade de nomes com significados diferentes" (*TLP* 5.535). Qualquer tentativa de *dizer* que há infinitos objetos deve resultar em contrassenso. Desse modo, há a possibilidade de que haja infinitos nomes na linguagem, e portanto, a possibilidade de domínios infinitos de quantificação. Portanto, devemos assumir que o operador N seja capaz de dar conta de quantificação em domínios infinitos. .

17 Embora mais adiante (seção §5) veremos que certas considerações acerca do terceiro modo, i.e, através de uma lei formal, também são relevantes para compreender a noção de generalidade.

18 Como foi mostrado em HYLTON, 2005,p.122-152, Wittgenstein segue a terminologia de Russell: "By a "propositional function" we mean something which contains a variable *x,* and expresses *proposition* as soon as a value is assigned to *x."* (WHITEHEAD e RUSSELL, 1910-1913 vol1, p.41)

todos os valores de uma função *fx* para todos valores de *x,* então N($\overline{\xi}$) = ~(∃*x*).*fx*"(WITTGENSTEIN, L, 1993, p.227). A ideia exposta aqui é que se aplicarmos o operador N a uma função proposicional *fx* o resultado consistirá na negação de *todos* os valores da função proposicional em questão, isto é, na negação de toda proposição que resulta da substituição da variável *x* por um nome. Dado que, segundo o *Tractatus,* em uma linguagem logicamente perspícua cada nome designaria um objeto e todo objeto seria designado por um nome[19], o que temos, colocado de maneira um tanto mais rigorosa é algo como:

(7) Seja $\ulcorner\Phi(\alpha)\urcorner$ uma fórmula contendo a (e apenas a) variável α livre. Então $\ulcorner N(\Phi(\alpha))\urcorner$ é verdadeira sse, para cada nome *n,* a sentença resultante da substituição de cada ocorrência de α por *n* em $\ulcorner\Phi(\alpha)\urcorner$ é falsa.

Identificamos, portanto, uma explicação substitucional dos quantificadores no *Tractatus.* Sobre isso, *cabem duas considerações.* Em primeiro lugar, o fato de que a explicação dos quantificadores no *Tractatus* é substitucional é irrelevante dado que todo mundo possível é composto dos mesmos objetos e que, como vimos, todo objeto terá um nome e todo nome designará um objeto. Em segundo lugar que isso pode, à primeira vista, parecer extremamente problemático uma vez assumido o modo como nós, contemporaneamente compreendemos domínios de quantificação enumeráveis ou não enumeráveis e linguagens sendo sempre compostas de um alfabeto enumerável; uma vez assumida a concepção de que domínios de quantificação consistem em um conjunto de objetos, assumir que cada objeto deve possuir um nome *parece* entrar em conflito direto com a própria tese tractariana de que qualquer espécie de consideração sobre o tamanho do domínio de quantificação é ilegítima: só há a possibilidade de haver um nome para cada objeto se esse domínio for enuméravel e pressupor isso é assumir algo sobre o tamanho do domínio de quantificação. Essa é a leitura adotada por Soames e, segundo ele esse é um problema que não parece possuir uma solução satisfatória no interior do *Tractatus* (SOAMES, 1983, p.574-575). Mas essa conclusão é equivocada, pois, estritamente, não podemos falar em um domínio de quantificação e seu tamanho no *Tractatus* sem importantes qualificações. Em primeiro lugar, falar do "domínio" como fazemos em teoria dos modelos contemporânea

19 "Exprimo a igualdade de objeto por meio da igualdade do sinal e não com a ajuda de um sinal de igualdade. A diferença dos objetos, por meio da diferença dos sinais" (5.53).

sugere que este possa ser mudado e/ou arbitrariamente escolhido, algo que, de acordo com o *Tractatus* é absurdo. Em segundo lugar, é bastante difícil avaliar a posição de Wittgenstein sobre esses temas que dizem respeito a enumerabilidade de um domínio de quantificação e do 'tamanho' da classe de símbolos primitivos de uma linguagem de maneira satisfatória, dada sua rejeição da teoria das classes (6.031) e o fato de o *Tractatus* ter sido publicado anteriormente à publicação de resultados fundamentais de teoria dos modelos – e, dada essa recusa, afirmar que existem relações de equinumericidade entre classes de nomes e objetos é certamente inadequado. O fato é que a concepção de Lógica presente no *Tractatus* é radicalmente distinta de nossa concepção contemporânea pós Gödel, Tarski, Skolem,etc., e talvez seja o caso, como frequentemente ocorre na prática da História da Ciência e da Filosofia que estejamos diante de um embate kuhniano entre paradigmas incomensuráveis em que o conflito de ideias não se dá em termos diretos de contradição, mas em termos do modo como certos conceitos fundamentais como “domínio”, “verdade”, “validade” são (primitivamente) compreendidos. Seja isso como for, o que podemos, afirmar, dada a evidência textual do *Tractatus,* é que no, caso em que há apenas um número finito de nomes substituíveis por “*x*”, aplicar N a todos os valores de uma função proposicional é o mesmo que negar uma lista finita de proposições e, nesse caso, $\ulcorner N(fx) \urcorner$ é materialmente equivalente à proposição que afirma que não existe nenhum *x* tal que *x* é um *f.* Caso houvesse três objetos, por exemplo, cujos nomes são “*a*”, “*b*” e “*c*” que são substituíveis por “*x*”*,* então os valores de “ξ” consistem na classe $\{fa, fb, fc\}$ e assim “$N(\bar{\xi})$” é equivalente a “$\sim fa.\sim fb.\sim fc$”, que, por sua vez é materialmente equivalente a “$\sim(\exists x).fx$”.

Antes de entrarmos na discussão acerca de como o operador N deve funcionar nos casos em que temos um número possivelmente infinito de proposições que podem ser valores da variável proposicional ξ, ou seja, antes de abordarmos como Wittgenstein compreende a generalidade lógica no *Tractatus,* discutiremos como a notação do operador N deve ser compreendida a partir de uma crítica feita por Robert Fogelin à capacidade expressiva do operador N.

§2 O problema de Fogelin e a forma geral da proposição

Robert Fogelin (FOGELIN, 1979, p.78-82) notou que tal como exposto no *Tractatus,* o procedimento para expressar proposições que contêm generalidade é incompleto. Segundo ele, tomando como a base ξ uma função proposicional com mais de uma variável livre como *fxy* é impossível expressar proposições que contêm generalidade múltipla como:

(8) $(x)(\exists y).fxy$

com aplicações sucessivas do operador N.

Segundo Fogelin, ao aplicarmos N a *fxy*, negamos a classe de proposições obtidas pela substituição de "*x*" e "*y*" por nomes e assim obtemos a proposição que afirma que *fxy* não é verdadeira em nenhuma instância da função proposicional para qualquer valor *x e y*:

> To construct such multiply-general propositions we let ξ have as its values the values of the function *fxy* for all values of *x* and *y,* i.e., *faa*[20]*, fab, fba, fac,* etc. Since *N(fxy)* gives the joint denial of all those propositions that are the values of the propositional function *fxy,* it is evident we have produced a proposition equivalent to "~(Ex) (Ey) fxy." Driving the negation sign inward brings us to the canonical proposition 5: "(x)(y)~fxy." We can next bring this resulting proposition under the operator *N,* i.e., just deny it, and this gives us a result equivalent to proposition 2: "(Ex) (Ey)fxy." (FOGELIN, 1987, p.78-9)

Ao aplicarmos novamente N a "N(*fxy*)", estaremos negando a proposição que afirma que *fxy* é falsa para todos os valores de *x* e *y,* isto é, que para algum valor de *x* e algum valor de *y* a função proposicional é verdadeira. Vejamos como Fogelin trabalha seu exemplo. Começamos com:

(9) fxy

e negamos a totalidade dos valores dessa função aplicando N a essa totalidade, obtendo:

(10) $N(fxy) = N(fab, fba) = \sim fab\ .\ \sim fba$[21]

ou seja

20 Esse é um equívoco de Fogelin: *faa* não é uma instância da função *fx*. Isso decorre da convenção tractariana de que variáveis devem ser lidas exlcusivamente em função da eliminação do sinal de identidade do cálculo de predicados.

21 Como veremos, o uso desses pontos "..." de reticência não consiste na indicação de uma enumeração que não fazemos por falta de tempo ou boa vontade (Anscombe, 1971, p.145-6) mas sim um uso ineliminável da indicação de generalidade. Discutiremos isso adiante na seção §5.

(11) $\sim(\exists x)(\exists y).fxy$ ou $(x)(y).\sim fxy$

Aqui, segundo Fogelin, devemos estar negando todos os valores de "*fxy*" simultaneamente, isto é, (11) consiste na negação conjunta da classe de proposições {*fab, fba*} para cada nome *n* que possa ser subsituído por "*x*" e "*y*" em *fxy.* Se aplicarmos N novamente, temos:

(12) N(N(*fxy*)

que segundo Fogelin resulta no equivalente a

(13) $N(\sim(\exists x)(\exists y).fxy))$ ou seja:

(14) $(\exists x)(\exists y).\ fxy$

Segundo Fogelin, então, o procedimento tractariano de gerar proposições gerais através de valores de uma função proposicional *n-ária* deve (em função da falta de outros exemplos apresentados no *Tractatus*) ser algo análogo ao que tínhamos em (7), ou seja, algo como:

(15) Seja $\ulcorner\Phi(\alpha_1,...,\alpha_n)\urcorner$ uma função proposicional contendo as variáveis $\ulcorner\alpha_1,...,\alpha_n\urcorner$ livres. Seja $\ulcorner n_1,...,n_n\urcorner$ uma sequência de nomes subsituíveis por $\ulcorner\alpha_1,...,\alpha_n\urcorner$ em $\ulcorner\Phi(\alpha_1,...,\alpha_n)\urcorner$ e seja $\ulcorner\Phi(\alpha_1/n_1,...,\alpha_n/n_n)\urcorner$ o resultado de substituir os nomes $\ulcorner n_1,...,n_n\urcorner$ pelas variáveis $\ulcorner\alpha_1,...,\alpha_n\urcorner$ em cada ocorrência respectiva de $\ulcorner\alpha_1,...,\alpha_n\urcorner$ em $\ulcorner\Phi(\alpha_1,...,\alpha_n)\urcorner$. Então $\ulcorner N(\Phi(\alpha_1,...,\alpha_n))\urcorner$ é verdadeira, sse, para *toda* sequência de nomes $\ulcorner n_1,...,n_n\urcorner$, $\ulcorner\Phi(n_1,...,n_n)\urcorner$ é falsa.

O resultado extraído por Fogelin dessa maneira de proceder é que não é possível gerar proposições contendo generalidade múltipla por aplicações do operador N posteriores à segunda:

> This road now becomes sterile, since any further applications of the operator *N* generate results that flip-flop back and forth between propositions equivalent to propositions 2 [(Ex) (Ey) fxy] and 5[(x) (y)~fxy]. A parallel result emerges if we employ the propositional function *~fxy.* Here we can generate propositions 1[(x) (y) fxy] and 6[(Ex) (Ey)~fxy], but the application of the operator *N* becomes sterile

> beyond this. (FOGELIN, 1987, p.78-9)

Essa dificuldade surge, segundo ele, porque negamos os valores da função proposicional "de uma e da mesma maneira" (Fogelin, 1987, p.79-80), ou seja, negandos os valores da função *fxy* para toda substituição de *x* e *y* *simultaneamente*:

> When we apply the operator *N* to the propositions that are the values of the function *fxy,* both argument places under the function are handled at once in the same way, i.e., both variables are captured. So whatever kind of quantifier must emerge governing one of the variables, that same kind of quantifier must emerge governing the other. It is for this reason that we are able to construct the *homogeneous* multiply-general propositions 1, 2, 5 and 6 [(x) (y) fxy; (Ex) (Ey) fxy; (x) (y)~fxy; (Ex) (Ey)~fxy respectivamente] , but we cannot constuct the *mixed* multiply-general propositions 3, 4, 7 and 8. (FOGELIN, 1987, p.79-80)

Como o próprio Fogelin nota, o que isto estabelece é *apenas* que *tal como explicitamente apresentado no Tractatus*[22] o operador N é expressivamente incompleto: simplesmente com "N(*fxy*)" não é possível ligar as diferentes variáveis "*x*" e "*y*" a diferentes quantificadores para expressar proposições como "$(x)(\exists y).fxy$" ou "$(\exists y)(x).fxy$", etc. No entanto, duas questões mais fundamentais emergem desse ponto: a primeira é se a notação do *Tractatus* pode ser complementada; a segunda é se isso é possível sem violar outras teses tractarianas.

Antes de levarmos em consideração aquela que será a solução definitiva para nosso problema que se deve a Peter Geach, devemos levar em conta duas soluções bastante intuitivas, uma delas sugerida (e descartada) por Scott Soames (SOAMES, 1983, p.578-9) e outra por Roger White (WHITE, 2006, p.102-3). Nosso intuito é deixar claro que espécies de solução são adequadas ou inadequadas em se tratando de remediar a notação do *Tractatus* e descartar certas leituras inadequadas de antemão.

A primeira alternativa, sugerida por Soames, consiste em introduzir meta-variáveis para representar classes arbitrárias de proposições que contém certas expressões de um tipo

22 Que haja lacunas nas explicações de Wittgenstein no *Tractatus* não é algo que deve causar espanto ao leitor familiarizado com a obra. Como o próprio Wittgenstein avisa no prefácio, o *Tractatus* não é um manual. Particularmente sobre como especificar os valores de N a variável proposcional qualquer, Wittgenstein é explicito sobre seu desinteresse sobre como a descrição da variável "ξ" é feita: "Como se descrevem os termos da expressão entre parênteses não é essencial" (5.501). Como em diversos outros aforismos o que o leitor recebe são diretrizes e pistas de como levar a cabo o que está sendo dito e não uma explicação exaustiva.

específico t, como:

(16) $[\, p \mid p = \ulcorner ...\ \alpha\ ... \urcorner$, para alguma expressão α de tipo $t\,]$

Toda essa expressão consiste em uma metavariável que seleciona uma certa classe de expressões que podem ser seus valores possíveis. Como afirma Soames (SOAMES, 1983, p. 579), utilizando essas variáveis metalinguísticas, podemos expressar proposições contendo quantificação múltipla como "$(x)(\exists y).fxy$" em duas etapas. Em primeiro lugar expressamos a negação conjunta de todas as expressões da forma "$\sim(\exists y).fxy$", a saber, toda proposição "$\sim(\exists y).fay$", "$\sim(\exists y).fby$", "$\sim(\exists y).fcy$", etc, através das expressões metalinguísticas:

(17) $N([\, p \mid p = \ulcorner fan \urcorner$, para algum nome $n])$

$N([\, p \mid p = \ulcorner fbn \urcorner$, para algum nome $n])$

$N([\, p \mid p = \ulcorner fcn \urcorner$, para algum nome $n])$

…

E assim por diante, para cada nome n da linguagem. O segundo passo consiste em negar todas essas expressões, o que corresponderia a quantificação múltipla "$(x)(\exists y).fxy$":

(18) $N([\, q \mid q = \ulcorner N([\, p \mid p = \ulcorner fmn \urcorner$, para algum nome $n])]) \urcorner$, para algum nome $m])$,

ou seja, a negação conjunta (19) de cada instância de (18) (SOAMES, 1983, p.579):

(19) $N([\, q \mid q = \ulcorner Nfma \urcorner$, para algum nome $m])$

$N([\, q \mid q = \ulcorner Nfmb \urcorner$, para algum nome $m])$

$N([\, q \mid q = \ulcorner Nfmc \urcorner$, para algum nome $m])$

...

$N(\ulcorner Nfaa \urcorner)$

$N(\ulcorner Nfba \urcorner)$

$N(\ulcorner Nfca \urcorner)$

…

$N(\ulcorner Nfab \urcorner)$

N(⌈N*fbb*⌉)

…

Essa solução, no entanto, não é legítima. Ela introduz de maneira essencial o uso de noções semânticas como "ser uma expressão de tipo adequado *t"* onde deveríamos ter apenas a descrição da sintaxe da linguagem em questão. Como nota Soames, afirmar de uma expressão que ela é um nome ou símbolo funcional não consiste apenas em estabelecer as condições de 'boa formação' de expressões dessa linguagem, mas em uma tentativa de *dizer* ou expressar a relação que essa expressão mantém com a realidade (SOAMES, 1983, p.579), algo que é expressamente vetado pelo *Tractatus:* "Na sintaxe lógica, o significado de um sinal nunca pode desempenhar papel algum; ela deve poder estabelecer-se sem que se fale do *significado* de qualquer sinal, ela pode pressupor *apenas* a descrição das expressões" (3.33).

A segunda alternativa é oferecer uma definição recursiva da noção de 'proposição' a partir do que Wittgenstein afirma nos aforismos 6 e 6.001:

> 6 A forma geral da função de verdade é: $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$
> Isso é a forma geral da proposição.
> 6.001 Isso nada diz senão que toda proposição é um resultado da aplicação sucessiva da operação $N(\bar{\xi})$ às proposições elementares.

Essa leitura é adotada, por exemplo, por Roger White[23], como a única que pode realizar o papel pretendido por Wittgenstein para a proposição 6. De acordo com White, há um equívoco grave na formulação desta tal como ela se encontra no *Tractatus* (WHITE, 2006, p.102). O problema se deve ao fato de que a notação para a forma geral da proposição "$[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$" sugere um paralelo com a forma de geral de uma série formal [*a, x, O'x*] apresentada por Wittgenstein em 5.2522 (ibid.), o que indica que a forma geral da proposição pode ser compreendida como um caso particular da noção mais geral do termo geral de uma série formal. O termo geral para uma série formal "[*a, x, O'x*]" representa uma série gerada a partir de um termo base *a* especificado a partir de uma operação (não necessariamente veri-funcional) especificada *O'.* Assim, qualquer termo "*x*" da série pode ser representado como o resultado de aplicações finitas e sucessivas da operação *O'* à base *a.* Há, no entanto, como White corretamente nota , uma diferença crucial entre $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ e [*a, x, O'x*]. No caso

23 SOAMES também considera essa alternativa. SUNDHOLM, 1993, p.69 oferece uma definição similar.

da forma geral da proposição, ao contrário de séries como a dos números naturais, não temos um único termo na base, mas um número arbitrário (e possivelmente infinito) e isso é fundamental para os propósitos do *Tractatus*, dado que, para que o operador N possa expressar generalidade, ele deve poder ser aplicado a classes de proposições de tamanho arbitrário. De acordo com White, no entanto, isso gera um problema. Segundo ele, em função do operador N dever poder ser aplicado a classes possivelmente infinitas de proposições, ele deve ser aplicado "a uma variável proposicional" (WHITE, 2006, p.103) para resultar em uma proposição[24]. Assim, teríamos, de acordo com ele o seguinte problema:

> Since the notation is meant to explain to us an iterable process, it ought to give us a rule for moving from one proposition to the next proposition in the series, where the same rule can be applied to the resulting proposition to yield a third term. But Wittgenstein's notation does not do that: instead it gives us a rule to move from a propositional variable to a proposition. Hence, once applied the rule, we cannot simply apply the same rule to the result , but have to proceed in a step-wise manner: specify a propositional variable ranging over some set of the propositions you already know about ; apply the N-operator to it, yielding a new proposition; specify a new propositional variable, ranging over a set of propositions you *now* know about, and so on. There is simply no straightforward way to reduce that process to the simple series of forms that Wittgenstein presumably envisagted in proposition 6." (WHITE, 2006, p.103)

O argumento de White consiste no seguinte: uma vez a que forma geral da proposição [$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)] deve gerar uma série de proposições, devemos poder, de acordo com uma regra, passar de uma variável proposicional para uma proposição e de volta a uma proposição,etc., sucessivamente; como a forma geral da proposição não oferece tal regra, ela é inadequada. Essa mesma leitura e esse mesmo 'problema' foram detectados por Elizabeth Anscombe em sua introdução ao *Tractatus.* De acordo com Anscombe a expressão "[$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)]" deve ser compreendida como "o termo geral de uma série de funções de verdade" (ANSCOMBE, 1959, p.132-3), de maneira análoga ao termo geral de uma série formal [*a, x, O'x*]. A motivação para essa leitura certamente se dá pelas afirmações de Wittgenstein, em 5.1 de que "as funções de verdade podem ser ordenadas em séries" e em 5.501 que "as funções de verdade de um número qualquer de proposições elementares podem ser inscritas num esquema da seguinte espécie", sendo o esquema em questão um arranjo das 16 funções de

24 […] the whole point of his N-operator is that it is not applied to a single proposition but to a whole range of propositions, even if that range is infinite in size. *That is why Wittgenstein has to define the N-operator that is applied to a single proposition to yeld a further proposition, but as applied to a propositional variable to yield a further proposition* (WHITE, 2006, p.103). Grifos nossos.

verdade binárias. Se aceitamos essa leitura da forma geral [$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)], tratando esta como uma série de funções de verdade cuja base é a totalidade possivelmente infinita de proposições elementares em que aplicamos sucessivamente o operador N a essas para gerar a totalidade das funções de verdade das proposições do conjunto base, de fato a proposição 6 não oferece *nenhuma* pista de como essa progressão de termo a termo na série deve proceder. White assume exatamente essa leitura da forma geral da proposição e conclui que devemos encontrar um modo alternativo de realizar o papel que a proposição 6 deveria cumprir, a saber, o de caracterizar todas as proposições como o resultado do operador N a qualquer variável proposicional. Para isso White oferece a seguinte definição recursiva (WHITE, 2006, p.103):

(W1) Se *p* é uma proposição elementar, então *p* é uma proposição.

(W2) Se ξ é uma variável proposicional (uma variável cujos valores são proposições), então N($\bar{\xi}$) é uma proposição.

(W3) Nada mais é uma proposição.

De acordo com White, essas três cláusulas cumprem esse papel de caracterizar a totalidade das funções de verdade, sem a necessidade de tomar essa totalidade como formando uma série para qual temos um termo geral como aquele apresentado no aforismo 6. Antes de avaliarmos se uma definição recursiva da noção de proposição é necessária (e legítima) devemos notar que há um equívoco grave aqui: o operador N não é aplicado a uma variável proposicional, mas sim aos seus valores, que são classes de proposições[25]. Portanto a diferença entre a base e resultado da aplicação do operador N não é que a primeira é uma variável proposicional e a segunda uma proposição, mas que a primeira pode consistir em *diversos* termos e a segunda é sempre *um* termo. Wittgenstein é inequívoco: "N($\bar{\xi}$) é a negação de *todos os valores* da variável proposicional ξ" (5.502)[26]. Nesse caso, o que seria mais adequado (no que se refere à caraceterização do funcionamento do operador N[27]) é a

25 Mesmo no caso em que a base é uma única proposição; trata-se da classe com essa única proposição.

26 Como veremos adiante (§5), o papel da variável proposicional é meramente descrever ou determinar uma classe de proposições.

27 Há um aspecto radicalmente anti tracariano além daquele discutido abaixo. Afirmar que uma sentença consiste em um predicado *n*-ário seguido de *n* nomes no *Tractatus* é um grave equívoco dado que não se pode pressupor que haja relações de uma aridade *n* quaquer: isso é algo que a análise lógica da linguagem

uma definição recursiva como a sugerida por Scott Soames:

(S1) Tudo que é expresso por um predicado n-ário seguido de n nomes é uma proposição elementar.

(S2) Se ξ é uma classe de proposições, então $\ulcorner N(\bar{\xi}) \urcorner$ é uma proposição.

(S3) Nada mais é uma proposição.

Essa definição corrige o equívoco de White, mas não resolve o suposto problema que ele detecta na proposição 6. Como veremos adiante, White está correto ao afirmar que "devemos proceder sempre passo a passo" (WHITE, 2006, p.103) no processo de gerar proposições complexas a partir de proposições elementares mesmo passando de *classes* de proposições para proposições singulares. No entanto, as mesmas razões que nos levam a *essa* conclusão mostram que é incorreto esperar que a forma geral da proposição tal como apresentada por Wittgenstein em 6 deva resultar em uma série que gera a totalidade das proposições assim como séries formais do tipo [*a, x, O'x*]. Veremos na seção §5 que a demanda de White por uma regra que permita passar *em uma série* de uma variável proposicional (ou de uma classe de proposições) para uma proposição e de volta para uma variável (ou classe) em estágios sucessivos não é necessária para os propóstios de 6 pois a forma geral da proposição não fornece a totalidade das proposições em uma série como uma série formal como [*a, x, O'x*] faz. Também veremos que a solução tractariana para essa questão dispensa uma definição recursiva *explícita* da noção de proposição que, de qualquer modo, é ilegítima. A noção de 'proposição' (seja complexa ou elementar) é, no *Tractatus,* o que Wittgenstein chama de um conceito formal, ou seja, algo cuja 'representação' enquanto tal só é possível mediante o uso de um tipo de variável e não de uma descrição de suas propriedades. O que definições recursivas como a apresentada por Soames e White tentam *dizer* é algo que deve ser mostrado por meio de variáveis que *exibam* que seus valores são apenas proposições, e pelo modo como essas expressões são utilizadas. Assim como no caso em que introduzimos meta-variáveis para tipos de expressões que fazem uso essencial de noções semânticas como nomes e predicados, remediar a capacidade expressiva do *Tractatus* através de uma definição recursiva explícita do que conta ou não como proposição exige que a

---

deve mostrar - não algo que deve ser pressuposto na caracterização sintática geral das formas possíveis de proposições quaisquer.

relação representativa que uma certa expressão mantém com a realidade seja *dita,* enquanto uma solução adequada, isto é, um expediente notacional a ser introduzido deve *apenas mostrar;* por meio do uso de variáveis, quais expressões são sintaticamente bem construídas ou não. Uma definição recursiva explícita da noção de proposição não satisfaz esse requisito[28].

§3 A solução de Geach

Peter Geach (GEACH, 1981, p.169) propôs um complemento notacional para o *Tractatus* que torna possível simbolizar de maneira perspícua classes de proposições que servem de base para a operador N de maneira que é possível determinar o escopo das aplicações do operador N. Ao invés de escrevermos simplesmente $\ulcorner N(fx) \urcorner$, Geach propõe a utilização de expressões como "... *x* : ..." para determinar o escopo dos valores de uma função proposicional que estão sendo negados por N determinando o escopo da variável. Teríamos então (ibid.):

(20) $\ulcorner N(\alpha : \Phi(\alpha)) \urcorner$ ao invés de $\ulcorner N(\Phi(\alpha)) \urcorner$

Com $\ulcorner \alpha : \Phi(\alpha) \urcorner$ servindo como uma abreviação para os valores resultantes da substituição da variável α por nomes. Supondo que haja três objetos *a*, *b* e *c*[29] :que podem ser argumentos possíveis de uma função proposicional *fx*, então:

(21) N(*x* : *fx*)

é equivalente a

28 Cabe notar, no entanto, que enquanto expediente auxiliar para a compreensão do que é afirmado pelo aforismo 6 uma definição recursiva como a oferecida por Soames é perfeitamente aceitável e, de fato, tudo que ela 'classifica' como 'proposição' irá corresponder a uma expressão que pode ser gerada através da forma geral $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Mas como já tivemos a ocasião de notar, uma solução genuinamente tractariana não pode empregar noções semânticas como 'nome' ou 'proposição' para remediar problemas de capacidade expressiva, mas apenas oferecer expedientes *sintáticos* para essa finalidade. Isso, claramente não torna uma definição como a de Soames ou White completamente descabida, mas faz com que elas sejam expedientes auxiliares para compreendermos o papel de soluções exigidas pelo *Tractatus.*

29 Nessa seção, apenas para fins de exposição, iremos nos concentrar em casos finitos.

(22) N(fa, fb, fc) e

(23) N(x : N(fx)) é equivalente a

(24) N(N(fa), N(fb), N(fc)).

Segundo Geach, com tal expediente podemos expressar qualquer fórmula do cálculo de predicados contendo generalidade (simples e múltipla):

(25) N(x : fx) = N(fa, fb, fc)) = ~fa.~fb.~fc = ~(∃x).fx ou (x)~fx

(26) N(N(x : fx)) = N(N(fa, fb, fc)) = N(~fa.~fb.~fc)) = ~(~fa.~fb.~fc) = (∃x).fx ou ~(x).~fx

(27) N(x : N(fx)) = N(x : N(fa, fb, fc)) = N(N(fa),N(fb),N(fc)) = (fa.fb.fc) = (x)(fx) ou ~(∃x).~fx;

(28) N(N(x : (N(fx))) = N(N(x : N(fa, fb, fc))) = N(N(N(fa),N(fb),N(fc)))) = N(fa.fb.fc) = ~(fa.fb.fc) = ~(x)(fx) ou (∃x).~fx

No caso da generalidade múltipla, com a notação de Geach podemos determinar o escopo da variável sobre a qual estamos quantificando, escrevendo

(29) N(y : fxy) ou N(x : fxy).

Geach mostrou que com um dispositivo que permite deixar variáveis livres o problema apontado por Fogelin é resolvido gerando proposições com quantificadores múltiplos em duas etapas. Podemos expressar "(∃x)(y).fxy" como:

(30) N(N(x : (N(y : N(fxy)))))

Escrevendo primeiro

(31) N(y : N(fxy))

que é "N(N(fxa), N(fxb), N(fxc))", deixando

(32) $N(N(x : (\ldots)))$

operar sobre (31). Resultando em:

(33) $N(N(x : (N(y : N(fxy))))) = N(N(N(N(N(fab), N(fac)), N(N(fba), N(fbc)), N(N(fca), N(fcb)))) = (\exists x)(y)fxy$

Geach claramente mostra que o erro de Fogelin foi tentar gerar proposições com generalidade múltipla ligando ambas as variáveis simultaneamente[30]. Delimitando o escopo das variáveis em etapas, Geach mostrou que é possível expressar quantificação múltipla com o operador N. Mais importante do que isso, no entanto, é o caráter da solução de Geach[31] - a descrição de como classes de proposições podem ser espeficadas e do que conta ou não como uma expressão bem formada é tratada apenas em termos sintáticos: dada uma variável α que ocorre em uma expressão qualquer ⌈... α …⌉ que contém essa variável, podemos obter uma expressão ⌈α : ... α …⌉ para representar uma classe de expressões que contêm essa variável, sem precisarmos especificar qualquer relação representativa dessa expressão com a realidade para além do fato de que ela é uma variável que especifica formalmente uma classe de expressões.

§4 A objeção de Fogelin e as Restrições de 5.32

30 Isso foi notado em WHITE, 2006, p.151.

31 Soames também propôs como solução adequada um dispositivo notacional idêntico ao de Geach em SOAMES, 1983 de maneira independente. Geach, no entanto, apresentou sua solução em 1981 e, assim, tem prioridade histórica no que se refere ao método da solução. Outro exemplo é Juliet Floyd (2001), embora Floyd tenha reservas quanto ao comprometimento do *Tractatus* com classes de proposições (FLOYD, 2001, p.341-2). No entanto, o fato de Wittgenstein mencionar em 3.315 a possibilidade de obter uma classe de proposições variando partes de uma proposição (para obter uma função proposicional, p.ex) parece permitir o procedimento de Geach. Além disso, notamos dois pontos: (1) o *Tractatus* não está comprometido com uma ontologia de classes de proposições em qualquer sentido substancial que vá além de uma 'ontologia' de proposições – como nota Geach (GEACH, 1981, p.170) não há classes de classes de proposições, não há uma classe vazia e tampouco quantificação sobre classes na linguagem oficial do *Tractatus;* (2) como notou Thomas Ricketts (RICKETTS, 2013, p.132) todo discurso sobre classes de proposições pode ser reduzido a afirmações sobre os valores de uma variável proposicional que é mais fundamental – ver seção §5.

Fogelin procura demonstrar que o simbolismo de Geach vai contra o aforismo 5.32: "Todas as funções de verdade são resultados da aplicação sucessiva de um número finito de operações de verdade às proposições elementares". Esse aforismo estabelece duas restrições para a geração de funções de verdade: elas devem ser geradas por:

i) Aplicações sucessivas de operações de verdade
ii) Um número de finito de *operações* de verdade.

Segundo Fogelin, a notação de Geach viola ambas essas restrições, e, portanto, não remedia legitimamente as deficiências da capacidade expressiva do simbolismo do *Tractatus.* Fogelin afirma que "a notação de Geach não apenas disfarça a ocorrência de infinitas aplicações da operação N, como também viola a demanda por sucessividade" (FOGELIN, 1981, p.80-1), dado que "se o conjunto base de proposições é infinito, então nada contará como predecessor imediato da última aplicação da operação N na construção de uma proposição quantificada universalmente" (idem.).

Cabe, em primeiro lugar, notar que o problema encontrado por Fogelin em 5.32 é diferente do que o texto, de fato, suscita: Wittgenstein afirma que *o número de operações* deve ser finito e essa condição é satisfeita pela notação de Geach. Com N aplicado a um conjunto finito ou não de proposições, há *uma* operação sendo aplicada, a saber N. Fogelin confunde, portanto, a restrição da finitude de operações com a finitude de aplicações dessa operação[32]. De qualquer modo, a objeção de Fogelin é relevante para compreender o funcionamento do operador N. Fogelin afirma que em um domínio inifinito a proposição "N(*x* : N(*fx*))", que é "N(N(*fa*), N(*fb*), N(*fc*)...)" ou "(*x*).*fx*" só poderia ser gerada por um *número infinito de aplicações do operador* N. Segundo ele, isso envolveria "completar uma tarefa envolvendo infinitos passos" (FOGELIN, 1987, p.80-1).

De acordo com Fogelin, ao aplicar N a um conjunto infinito de proposições da forma *fx,* devemos percorrer todos os valores de *fx,* negando cada um deles sucessivamente *e depois* negar o resultado conjuntamente. Isso é sugerido pelo modo como ele apresenta e comenta a diferença entre o procedimento explicitado pelo *Tractatus* e o de Geach (FOGELIN, 1982,

32 Como notado em (ROGERS & WEHMEIER, 2012, p.561-2). Não entraremos na discussão acerca da possibilidade de o texto ser ambíguo e, assim, de a restrição ser de fato acerca do número de *aplicações* de uma operação, pois, como veremos adiante (seção §4), essa restrição também não é violada pela notação de Geach.

p.126):

> Wittgenstein: N(N(fx) = N(fa, fb, fc, ...)) = (∃x).fx
> Geach: N(x : N(fx)) = N(N(fa), N(fb), N(fc), ...)) = (x).fx

Segundo ele, embora em ambos os casos o que temos é um conjunto infinito de proposições, a notação de Geach permite um número infinito de aplicações do operador *N*, enquanto o procedimento do *Tractatus* (no exemplo de Fogelin) permite apenas duas (idem.). De acordo com Fogelin a demanda por sucessividade também é violada, pois, para completar essa “tarefa envolvendo infinitos passos” (FOGELIN, 1987, p.80-1) seria necesssário que N fosse aplicado a todos os valores de um conjunto infinito simultaneamente (idem.).

Apresentamos abaixo, para fins de ilustração, como o processo gera proposições quantificadas com o operador N, seguindo a exposição de McGray (idem.) passo a passo[33].

McGray - Quantificação existencial com a notação de Geach:

1. N(N(*x* : Φ(*x*)))	Expressão tractariana para (∃*x*).Φ*x*.
2. N(N(Φ(*a*), Φ(*b*), Φ(*c*),...))	Resultado da subsituição da classe de proposições elementares da forma Φ*x* por “*x : Φx*”.
3. N(~Φ(*a*) . ~Φ(*b*) . ~Φ(*c*),...)	Resultado da aplicação 'interna' de N.
4. Φ(*a*) v Φ(*b*) v Φ(*c*) …	Resultado da aplicação 'externa' de N.

McGray - Quantificação Universal com a notação de Geach:

1. N(*x* : N(Φ(*x*))	Expressão Tractariana para (*x*).Φ*x*.
2. N(N(Φ(*a*)), N(Φ(*b*)), N(Φ(*c*)),...))	Resultado de subsituir a classe de proposições da forma N(Φ(*x*)) por “*x* : N(Φ(*x*)”.
3.N(~Φ(*a*) , ~Φ(*b*) , ~Φ(*c*),...)	Resultado d subsituir negações russellianas pelas as ocorrências internas de “N”.
4. ~~Φ(*a*) . ~~Φ(*b*) . ~~Φ(*c*) …	Aplicação externa de N a “~Φ(*a*) , ~Φ(*b*) , ~Φ(*c*),...”.
5. Φ(*a*) . Φ(*b*) . Φ(*c*) …	Eliminação das duplas negações.

McGray - Quantificação Múltipla com a notação de Geach:

33 Exceto por modificações de notação e alguns passos que optamos por tornar explícitos como a eliminação de de duplas negações, a exposição de como McGray gera proposições quantificadas com o operador N é idêntica a apresentação em McGRAY, 2006, p.150-152.

1. $N(N(x : N(y : N(\Phi(x,y)))))$	Expressão tractariana estilo Geach.
2. $N(N(a : N(y : N(\Phi(a,y)))))$	Resultado da subsituição do nome "*a*" pela variável "*x*" em 1.
3. $N(N(a : N(N(\Phi(a,a)), N(\Phi(a,b)),\ldots))$	Resultado de substituir todas as proposiçoes da forma "$N(\Phi(a,y))$" pela expressão "$y : N(\Phi(a,y))$"
4. $N(N(a : N({\sim}\Phi(a,a), {\sim}\Phi(a,b),...)))$	Resultado da aplicação das ocorrências interiores de N.
5. $N(N(a : N({\sim}{\sim}\Phi(a,a) \,.\, {\sim}{\sim}\Phi(a,b)...)))$	Resultado da aplicação do interior de N.
6. $N(N(a : N(\Phi(a,a) \,.\, \Phi(a,b)...)))$	Eliminação de duplas negações.
7. $N(N(b : N(\Phi(b,a) \,.\, \Phi(b,b)...)))$	Repetição do processo feito com "*a"* no lugar de *x* com todos os outros valores de *x* (*b,c,d...).*
8. $N({\sim}(\Phi(a,a) \,.\, \Phi(a,b) \,.\, ...) \,.$ ${\sim}(\Phi(b,a) \,.\, \Phi(b,b) \,.\, \ldots) \,.\, \ldots))$	Resultado da aplicação do operador N interno que nega conjuntamente cada proposição do conjunto obtido pela repetição do processo de 7.
9. ${\sim}{\sim}\Phi(a,a) \,.\, \Phi(a,b) \,.\, \ldots) \lor$ ${\sim}{\sim}\Phi(b,a) \,.\, \Phi(b,b) \,.\, \ldots) \lor \ldots$	Resultado da aplicação do N externo de 8.
10. $\Phi(a,a) \,.\, \Phi(a,b) \,.\, \ldots) \lor$ $\Phi(b,a) \,.\, \Phi(b,b) \,.\, \ldots) \lor \ldots$[34].	Eliminação das duplas negações.

34 McGray adota a leitura de acordo com a qual quantificações universais e existenciais são abreviações de somas e produtos lógicos de proposições elementares. Assim, de acordo com ele, assim como para Fogelin, " 'N(x : Mx)' é quivalente a 'N(Ma, Mb, Mc, Md,...)'." (McGray, 2006, p.150), ou seja, expressões da forma "$x : \Phi(x)$" são um mero exprediente abreviatório. Suas afirmações são inequívocas: "To apply the N operator to a set of propositions is to apply it to each member of the set. Hence, the former applies the N operator to every value of the propositional function 'Mx' conjunctively to generate a proposition. The latter applies the N operator to each value of the propositional function 'Mx' discretely to produce a class of compound propositions. The number of N operator applications is the same, and thus each constitutes a stage in breaking down an N operator proposition into a proposition in Russellian notation. In order to build up or break down propositions in N operator symbolism, there will always be a finite number of successive stages. At each stage, the N operator is applied either to one or more elementary propositions or to one or more compound propositions to which the N operator has already been applied, perhaps an infinite number of times". (McGRAY, 2006, p.153)

Seguindo a leitura de Fogelin, uma vez aceita essa leitura de "*x : fx*", não é possível, como o próprio McGray admite (McGray, p.150), gerar proposições quantificadas em um número finito e sucessivo de aplicações do operador N: Na sequência de passos 1-5 em que geramos a quantificação unviversal "[...] no passo 3 o operador N é aplicado um número desconhecido de vezes, e possivelmente um número infinito de vezes" (McGray, 2006, p.152). Segundo McGray, isso é essencial dado que "a menos que o passo 3 seja permitido, o operador N não pode expressar quantificação universal afirmativa sem uma função híbrida *ad hoc* como '~Mx'." (McGray, 2006, p.153).

Foi notado por Gregory Landini (LANDINI, 2007, p.139-140)[35] que o argumento de Fogelin supõe a impossibilidade, no *Tractatus,* de gerar classes de proposições a partir de funções proposicionais complexas, o que é requerido para que funções de verdade de proposições elementares possam ser geradas a partir de expressões como "*x* : N(*fx*)" em casos em que *fx* tem infinitos valores. Fogelin é claro quanto a isso:

> The expression *"(x:N(fx))"* specifies (or is shorthand for) a set of propositions that is the result of possibly infinitely many (unordered) applications of the operator *N* to a possibly infinite set of propositions. This stands in contrast with Geach's representation of *"(Ex)fx",* which has the following form: *"N(N(x:fx))".* Here we do have two successive applications of the operator *N* on sets of (possibly) infinitely many propositions. I think that it is easy to become confused concerning the semantic difference between these two methods of representing sets because of a natural tendency to treat the operator *N* as equivalent to the standard negation sign "~". Thus the expression *N(~fx)* will generate propositions from a set of (possibly) infinitely many propositions through a single application of the operation *N.* Here the symbol for negation is treated as a constituent of the propositional function used to generate the set of propositions. By way of contrast, the inner-most *"N"* in Geach's *N(x:N(fx))* is not a constituent of a propositional function at all, and to think otherwise is to misunderstand its role entirely. In sum, Geach's notation tends to disguise the difference between "the performance of *one* operation on a (possibly) infinite class of operands with the performance of an infinite number of operations. (Fogelin, 1987, p.80)

Fogelin assume que a expressão "*x* : N(*fx*)" em "N(*x*:N(*fx*))" não pode gerar classes de proposições – segundo ele, ao contrário da negação "~", "N" não pode ser um constituinte de uma função proposicional. Mas qual razão Fogelin pode oferecer para isso? A suposição do argumento de Fogelin parece ser que o operador "N" só pode ser aplicado diretamente a classes *de proposições elementares* geradas por funções proposicionais simples como "*fx*", "*fxy*", "*fxyz*", etc. No entanto, dado que Fogelin permite que a negação "~" *seja* um constituinte de funções proposicionais, ele *deve* admitir que classes de proposições

35 A mesma observação é feita em ROGERS & WEHMEIER, 2012, p.561-2.

moleculares sirvam de base para "N". Nesse caso, Fogelin está sendo inconsistente *ou* arbitrário[36].

De qualquer modo, excluir a possibilidade de que funções proposicionais complexas como "N(*fx*)" possam servir de base para o operador N é algo que vai contra o aforismo 3.315 (que como veremos na próxima seção é fundamental para compreender a noção de generalidade):

> Se transformarmos em variável uma parte constituinte de uma proposição, há uma classe de proposições que são todos os valores da proposição variável assim originada. Em geral essa classe depende ainda do que nós, segundo uma convenção arbitrária, queremos significar com partes daquela proposição. (3.315)

Wittgentein não se restringe, nesse aforismo, apenas a proposições elementares. Qualquer proposição pode ter uma parte variada para gerar uma classe de proposições cujos valores resultam da substituição da parte variada por constantes – e *o modo* como isso é feito é irrelevante, "depende apenas de uma convenção arbitrária" (3.315)[37]. Contra a afirmação de Fogelin de que sua "notação disfarça a ocorrência de infinitas aplicações da operação N" (FOGELIN, 1987, p.80), Geach se defendeu afirmando que em "N(*x* : N(*fx*))" o que temos é a aplicação de *uma operação* a um conjunto potencialmente infinito de proposições, e não um número infinito de operações (ou mesmo aplicação de operações): "Fogelin [...] confunde a realização de uma operação em um conjunto possivelmente infinito de operandos com um número possivelmente infinito de operações". (GEACH, 1982, p.128). Como notou Gregory Landini, a razão dessa confusão é justamente a escolha arbitrária de Fogelin de excluir a possibilidade de gerar conjuntos de proposições moleculares sobre as quais N poderia operar a partir de funções proposicionais complexas contendo N como "N(*fx*)":

> Geach rightly pointed out that Fogelin misreads his class notation x: N(fx). It does not require infinitely many applications of the N-operation. But Fogelin is unrepentant. His criticism of Geach is based on an interpretation of the role fx plays in x:N(fx). He rejects Geach's reading of x: N(fx) because he maintains that N(fx) in x:N(fx) cannot be used to pick out formulas N(fa), N(fb), and so on. In Fogelin's view, innermost N

36 Para fazer justiça a Fogelin, ele sugere a possibilidade de admitir negações de proposições elementares como proposições elementares (FOGELIN, 1979, p.82-3). No entanto, como o próprio Fogelin reconhece isso é radicalmente anti-tractariano – é fundamental, no *Tractatus,* que valor de verdade de qualquer proposição elementar seja independente do valor de verdade de qualquer outra proposição elementar – vide aforismo 1.21: "Algo pode ser o caso ou não e tudo o mais permanecer na mesma".

37 É evidente, no entanto, que *dada* essa convenção arbitrária, o que se segue da convenção *não é* arbitrário.

> in Geach's x:N(fx) is not a constituent of the propositional function N(fx) but must operate on each of the propositions picked out by fx. He concludes that Geach has not found a way to enhance the Tractarian N-operator notation that would secure its expressive adequacy for quantification theory. Fogelin holds that only fx, fxy, and so on, where f is a primitive predicate letter of the language, can pick out formulas. Geach rejects this view. This is the crux of the dispute between them. (Landini, 2007, p.139)

Uma vez que o aforismo 3.315 claramente não se restringe a proposições elementares, Geach estava justificado em recusar a suposição de Fogelin.

Quanto à afirmação de Fogelin de que a notação de Geach viola a exigência de sucessividade, Geach argumenta que dado um conjunto infinito de proposições não é necessário 'percorrer' todos os valores de *fx* negando cada um deles:

> Fogelin thinks there is a difficulty about e.g. negating each proposition in an infinite set and then jointly negating the results: this would involve, before the final negation, 'completing a task involving infinitely many discrete steps'. *Whose* task, one might ask, is this one? *Nobody* has to run through an infinite series of propositions, negating them one by one, and *then* perform a further task of joint denial; if A specifies the truth conditions of a proposition by reference to an infinite class of propositions, each of which is the negation of some propositions, this specification does not impose upon A the task of *himself* contstructing all the negations in 'infinitely many discrete steps. (GEACH, 1981, p.170)

Novamente, como o próprio Fogelin afirma (FOGELIN, 1982, 125-6), se o "N" de dentro em "N(*x* : N(*fx*))" for um constituinte da função proposicional (como era "~" no seu exemplo) o problema suscitado por Fogelin não existe. No entanto, alguém poderia insistir que em "N(x:N(fx))", caso o conjunto de proposições "N(*fa*)", "N(*fb*)", "N(*fc*)", etc. fosse infinito, aplicar "N" a esse conjunto ainda consistiria em completar uma tarefa que consiste em infinitos passos em casos em que os valores de *fx* são infinitos. Mas isso não é o caso.

Uma breve comparação de séries (não necessariamente ordenadas) geradas pelo operador N com séries formais será útil para ilustrar o ponto de Geach e o que *é* exigido por 5.32. No *Tractatus,* em séries formais em geral (em que os termos da série não precisam ser proposições, como a dos números naturais) cada termo de uma série é gerado a partir de termos anteriores por meio de operações e todos os termos da série mantêm entre si relações internas (5.2). O mesmo vale para séries de proposições geradas por operações veri funcionais. A diferença entre séries formais em geral é que elas não são necessariamente geradas por *operações de verdade*, mas por operações de qualquer espécie (p.ex "+1"). Wittgenstein estava claramente comprometido com a possibilidade de séries formais infinitas, sem que isso comprometesse a demanda por sucessividade (ao contrário do que pensa Fogelin):

> 5.2521 A aplicação continuada de uma operação a seu próprio resultado, chamo de sua aplicação sucessiva ("*O'O'O'a*" é o resultado da tripla aplicação sucessiva de *"O'ξ"* a "*a"*). Em sentido análogo, falo da aplicação sucessiva de *várias* operações a um certo número de proposições.
> 5.2522 Escrevo, por isso, o termo geral de uma série formal *a, O'a, O'O'a,...* assim "[*a, x, O'x*]". Essa expressão entre colchetes é uma variável. O primeiro termo da expressão é o início da série formal,o segundo é a forma de um termo qualquer *x* da série, e o terceiro é a forma do termo da série que se segue imediatamente a *x.*
> 5.2523 O conceito da aplicação sucessiva de uma operação equivale ao conceito "e assim por diante".

O fato de que Wittgenstein pretendeu que sua forma geral de uma série formal simbolizada por "[*a, x, O'x*]" desse conta, por exemplo, da série dos números naturais (cuja forma, no *Tractatus,* seria [0, ξ, ξ +1] (TLP 6.03)) é suficiente para admitirmos, no *Tractatus,* séries formais infinitas. Como notou Cuter (CUTER, 2005, p.65-6), se a quantificação no *Tractatus* fosse restrita apenas a domínios finitos o único método necessário para descrever os valores de uma variável proposicional ξ dentre aqueles dados em 5.501 seria por enumeração direta (idem.). Há, portanto, essa semelhança entre os modos de descrição 2 e 3 de uma variável proposicional mencionados por Wittgenstein em 5.501: ambas admitem que o domínio pode ser infinito. O que 5.2522 afirma é que uma série como:

*a*R*b*
(∃*x*): *a*R*x* . *x*R*b*
(∃*x*)(∃*y*): *a*R*x* . *x*Ry . *y*R*b*
(∃*x*)(∃*y*)(∃*z*): *a*R*x* . *x*R*y* . *y*R*z* . *z*R*b*
…

pode ser dada *como um todo* por meio da estipulação de uma base e de uma operação que gera novos termos a partir de outros (Nesse caso, é a série dos *R-ancestrais* de um termo na série gerada pela relação *R*) mencionada no *Tractatus* em 4.1252 e 4.1273[38].

Ao ser estipulada a base e a operação a ser reiterada ficam estabelecidos *todos* os resultados possíveis da série – no entanto, isso não significa que ao estabelecer a base e a operação seja neccessário (ou mesmo possível) calcular *efetivamente* cada resultado um após

38 Uma discussão detalhada da relação dessa série formal com a forma geral da proposição se encontra e CUTER, 2005.

o outro (ou lista-los um a um). Cuter assimila a dificuldade de aplicar uma operação à totalidade dos valores de uma função proposicional "*fx"* àquela envolvida na geração dos termos de uma série formal como a de 4.1252:

> Operations within the series *cannot* be performed one after another if what we want is the series given *as a whole*. And that is what [*aRb*, *x*, *Oi'x*] is supposed to do. It must give the series as a *totality*, as ready to be the object of a simultaneous denial as the totality of values of a propositional function. The difficulties with [*aRb*, *x*, *Oi'x*] are exactly analogous to those related to a function like "~*fx*", which *also* involves an infinity of *molecular* propositions, that is to say, an infinity of logical constructions. Why do we admit that "(∃x)~*fx*" was obtained through a *finite* number of applications of *N* to elementary propositions? Because it involved only a double application of *N* over a formal selection, and within the selection we find only propositions that can be traced back to elementary propositions. For exactly the same reason, and in the same sense, we can say that "*NN*($\bar{\xi}$)" involves only *two* (indirect) applications of *N* over elementary propositions. (CUTER, 2005, p.68)

Ao contrário do que pensa Fogelin, de acordo com o *Tractatus* não é preciso (e, novamente, sequer possível) listar os valores de uma série formal *ou* os valores de uma função proposicional um de cada vez. Cuter observa que n*ão* é isso que está sendo afirmado em 5.32:

> All the *Tractatus* is demanding at 5.32 is *definiteness of sense*. If I say that *N* was applied "an infinite number of times" to a proposition "*p*", I have no way of deciding if the result is equivalent to "*p*" or to "~*p*". That is why
> etc …. *NNNp*.
> is not a proposition. But if I say that it was applied to the infinite formal series
> *p*, *N*p, *NN*p, . . . etc.
> the result is unambiguously equivalent to "*p*.~*p*". (Cuter, 2005, p. 68)

A exigência de 5.32 é que cada termo de uma série seja *construtível,* e não que toda série (ou cada termo) seja efetivamente *construída.* A aplicação por um número infinito de vezes da operação N a uma proposição não torna possível determinar *qual* função de verdade resulta. Como toda proposição de uma série gerada por "N" será da forma "N(...)", sem um número definido de aplicações da operação a uma proposição não é possível determinar suas condições de verdade. No caso de uma *série* infinita de proposições, no entanto, cada *termo* da série pode ser gerado por um número *finito* de aplicações da operação. O mesmo vale para aplicação de "N" aos valores de uma função proposicional "*fx"* cujos valores são infinitos. Em "N(*x* : *fx*)", apesar de os valores de *fx* serem serem infinitamente muitos, cada um deles terá suas condições de verdade determinadas em um número finito de passos – ao aplicar "N" a "(*x*: *fx*)", sabemos que o resultado é verdadeiro se, e somente se, *todas* as instâncias de "*fx"* forem falsas, isto é sabemos que cada "N(*fx*)" para "*a*", "*b*", "*c*",... é verdadeira se, e somente se, "N(*fa*)" é falsa, "N(*fb*)" é falsa *e assim por diante*. É esse "e assim por diante" que requer esclarecimento.

Em 5.502 Wittgenstein afirma: Escrevo, portanto, "N($\bar{\xi}$)", ao invés de (-----V)(ξ,.....). N($\bar{\xi}$) é a negação de *todos* os valores da variável proposicional ξ (WITTGENSTEIN, 1993, p.229)[39]. Wittgenstein define o operador N em termos de negação e da noção de generalidade, isto é, como a negação *de todos os valores* da variável proposicional ξ. Nossa posição é que, seja no caso finito ou infinito, podemos aplicar o operador N *a totalidade* dos valores dos valores da variável ξ e esse resultado será determinado *desde que* cada um dos valores da variável ξ seja *determinável*. Para sustentar isso (e dissolver complemente as objeções de Fogelin baseadas em 5.32) devemos investigar de maneira mais detalhada como a noção de generalidade lógica é introduzida e explicada no *Tractatus.*

§5 Generalidade e Variáveis Proposicionais

O núcelo da teoria da generalidade do *Tractatus* é apresentado na sequência 5.521-5.523:

> 5.521 Separo o conceito *todo* de função de verdade.
> Frege e Russell introduziram a generalidade em conexão com o produto lógico ou a soma lógica. Assim, tornou-se difícil entender as proposições "(∃*x*).*fx*" e (*x*).*fx*", em que estão encerradas ambas as ideias.
> 5.522 O que é peculiar à designação da generalidade é, em primeiro lugar, que ela aponta para um protótipo lógico de figuração e, em segundo lugar, que ela dá realce às constantes.
> 5.523 A designação da generalidade intervém como argumento.

Para esclarecer o conteúdo desses aforismos devemos levar em consideração o modo como variáveis são compreendidas no *Tractatus.* Em 3.31 Wittgenstein chama cada "parte da proposição que caracteriza seu sentido" de "expressão". Uma expressão é "tudo que, sendo essencial para o sentido da proposição, podem as proposições ter em comum umas com as outras" (idem.). Wittgenstein caracteriza *classes* de proposições em termos da *forma* que essas proposições compartilham (idem.). Essa forma, por sua vez, é algo que certas expressões compartilham: "a expressão assinala uma forma e um conteúdo" (idem.). Uma classe de proposições consiste no conjunto de proposições que são valores uma variável proposicional e essa variável proposicional é o que obtemos quando substituímos uma constante em uma

39 Ênfase nossa.

proposição por uma variável. Dada qualquer expressão, podemos caracterizar uma classe de proposições em que a expressão ocorre:

> 3.311 A expressão pressupõe as formas de todas as proposições em que pode aparecer. É a marca característica comum de uma classe de proposições.
> 3.312 Ela é, pois, representada pela forma geral das proposições que caracteriza.
> E nessa forma, com efeito, a expressão será *constante* e tudo o mais, *variável.*
> 3.313 A expressão é, pois, representada por uma variável cujos valores são as proposições que contém a expressão. (No caso limite, a variável torna-se constante, a expressão torna-se proposição)
> Chamo uma tal variável de "variável proposicional"(WITTGENSTEIN, L, 1993, p.155).

Se tomarmos como exemplo uma proposição determinada como "*aRb*", podemos isolar o nome "*a*" e determinar formalmente a classe das proposições em que esse nome pode aparecer como expressão constituinte de seu sentido. De maneira similar, podemos realizar o movimento inverso: dada a proposição determinada "*aRb*" podemos substituir "*a*" por uma variável "*x*", obtendo a expressão "*xRb*", que é fórmula aberta[40] a partir da qual podemos obter a classe de proposições que são os valores da substituição de *x* por um por nome *n* qualquer. Wittgenstein é bastante explícito sobre esse ponto e sua generalidade: toda e qualquer expressão pode ser, por assim dizer, 'variada', isto é, substituída por uma variável em uma proposição para obtermos uma fórmula aberta, de tal modo que, sempre podemos compreendê-la como uma variável proposicional a partir da qual podemos obter uma classe de proposições:

> 3.314 A expressão só tem significado na proposição. Toda variável pode ser concebida como variável proposicional.
> 3.315 Se transformarmos em variável uma parte constituinte de uma proposição, há uma classe de proposições que são *todos* os valores da proposição variável assim originada. Em geral, essa classe depende ainda do que nós, segundo uma convenção arbitrária, queremos significar com partes daquela proposição. Se transformarmos em variáveis, porém, todos os sinais cujo significado foi arbitrariamente determinado, ainda assim continua a haver uma tal classe. Esta, porém, não depende de qualquer convenção, mas apenas da natureza da proposição. Ela corresponde a uma forma lógica – a um protótipo de figuração.

Toda variável, no *Tractatus* é uma variável proposicional. Como um caso limite, poderíamos variar todas as expressões da proposição "*aRb*", obtendo a proposição variável "*x*Φ*y*" - e isso Wittgenstein chama de "protótipo de figuração". Nesse caso limite, tudo que

40 Nos termos do *Tractatus,* chamaríamos "*xRb"* de proposição variável, mas evitaremos essa terminologia na medida do possível para não causar confusão com a noção de variável proposicional.

temos é a indicação de uma forma: em proposições variáveis como "*x*Rb" ou "*a*Φ*b*" não temos apenas a indicação de uma forma, mas também de um conteúdo assinalado pelas constantes "*R"* e "*b*". Aqui temos a explicação de Wittgenstein para a ideia de que a notação para generalidade "dá realce às constantes". Uma proposição variável como "*xRb*" especifica a classe de proposições da forma "*x*Φ*y*" em que a constante "*R"* é substituida pela variável "Φ" e *"b"* pela variável *y* – todas as proposições dessa classe especificada por "*xRb*" contém as expressões "*b*" e "*R*"; esse é o "realce" mencionado por Wittgensein em 5.522.

Quanto à afirmação de que a "designação de generalidade intervém como argumento, isso signfica que a generalidade é vinculada com a noção de *variável* e não com os quantificadores. O que caracteriza o aspecto *geral* de uma proposição em que ocorrem palavras que marcam quantificação como "todo" e "qualquer" é que nessas proposições estamos *especificando uma totalidade de valores de uma variável proposicional*, por meio da espeficicação de uma determinação formal de uma classe de proposições através de uma proposição variável cujos valores estamos afirmando ou negando em sua totalidade:

> 3.316 Os valores que a variável pode assumir são fixados.
> A fixação dos valores *é* a variável.
> 3.317 A fixação dos valores da variável proposicional é a *especificação das proposições* cuja marca comum é a variável.
> A fixação e uma descrição dessas proposições.
> A fixação tratará, pois, apenas de símbolos, não do significado deles.
> E *apenas* isso é essencial para a fixação, *que ela seja apenas uma descrição de símbolos e nada enuncie sobre o que é designado.*

A designação de generalidade intervém como argumento dado que constitui a especificação da *totalidade* de valores de uma variável proposicional que são os operandos de operadores de verdade como o operador N. No *Tractatus,* proposições quantificadas são resultado dessa seleção formal *de uma totalidade de valores* de uma variável proposicional combinada com operações de verdade sobre essa totalidade selecionada. Para tornar claro como isso pode ser feito, precisamos tornar explícita duas maneiras como uma operação pode ser aplicada: enquanto esse recorte formal que *seleciona* uma classe de proposições sobre as quais a operação será realizada e enquanto uma aplicação *veri-funcional* dessa operação[41]. Qualquer proposição pode ter uma parte variada para gerar uma classe de proposições cujos valores resultam da substituição da parte 'variada' por constantes: dada uma proposição elementar como "*aRb*" podemos obter a proposição variável "*xRb*" e a partir dela a classe *s* de

41 Essa ditinção (e essa terminologia) entre aplicações seletivas e veri-funcionais do operador N se deve a CUTER, 2005, p.69-70 e CUTER, 2002, p.98.

proposições que resultariam da substituição da variável "*x*" por nomes em "*xRb*". Em proposições como "N(*x* : N(*fx*))", a ocorrência mais interna de "N" seleciona formalmente a classe de todas as proposições da forma "N(*fx*)" e a segunda *nega* todos esses valores. Assim, toda proposição quantificada é o resultado desse duplo processo de seleção e negação das proposições selecionadas[42].

Antes de detalharmos como essa distinção entre operações seletivas e veri-funcionais dissolve as objeções de Fogelin baseadas em 5.32, cabe notar que ao afirmar que está separando o "conceito *todo* de função de verdade", Wittgenstein *não* está afirmando que proposições contendo generalidade não são funções de verdade de proposições elementares. Justamente o propósito de toda a teoria da generalidade do *Tractatus* é mostrar que proposições como "(*x*).*fx*" ou "(∃*x*).*fx*" são, mesmo que haja infinitos valores da função proposicional *fx,* função de verdade de proposições elementares, para assim explicar a relação inferencial necessária entre quantificações universais e suas instâncias e particulares e entre instâncias particulares e afirmações existenciais. A separação "do conceito de todo de função de verdade" é a separação do componente veri-funcional, ou seja, a aplicação de operações de verdade e a generalidade cuja marca constitutiva é a *seleção da totalidade* de valores de uma variável proposicional à qual operações de verdade são aplicadas.

De fato, Wittgenstein está aqui recusando uma leitura da teoria da generalidade do *Tractatus* como aquela oferecida por Russell em sua *Introdução.* Segundo Russell, Wittgenstein "através de uma análise muito interessante" conseguiu estender o tratamento veri funcional para proposições contendo generalidade, isto é, "para casos em que proposições que são argumentos para nossa função de verdade não são dadas por enumeração mas são dadas como todas satisfazendo alguma condição" (RUSSELL, 1922, p.xv), como no caso em que o conjunto de proposições negadas ou afirmadas consiste na totalidade dos valores de uma função proposicional *fx*. De acordo com Russell, o que Wittgenstein oferece no *Tractatus* é uma "derivação de proposições gerais a partir de conjunções e disjunções" (RUSSELL, 1922, p.xvi). Tal leitura, no entanto, foi repudiada por Wittgenstein em correspondência com Russell. Em 13 de agosto de 1919, após ter lido o *Tractatus,* Russell enviou a Wittgenstein

42 Nossa leitura é largamente baseada na leitura de CUTER, 2002, p.98. Tal leitura também é defendida por Thomas Ricketts: "As Wittgenstein views matters, a Frege-Russell generalization expresses the result of applying a truth operation to its instances. There are two facets to this expression: the collection together of instances of the generalization – the concept *all* – and the indication of a particular truth operation". (RICKETTS, 2013 p.132)

diversas perguntas e comentários acerca da obra – dentre essas perguntas encontramos a seguinte:

> 6. “General truth-function $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$”
> Yes, this is *one* way. But could one not do equally well by making $N(\bar{\xi})$ mean “at least one value of ξ is false”, just as one can do equally well with *~p* v *~q* and *~p.~q* as fundamental? I feel as if the duality of generality and existence persisted covertly in your system. (Carta de Russell para Wittgenstein, 13-8-1919, LT, p.96)

A isso Wittgenstein responde:

> I suppose you didn't understand the way how I separate in the old notation of generality what is in it truth-function and what is purely generality. A general proposition is a truth-function of *all propositions* of a certain form.
>
> You are quite right in saying that “$N(\bar{\xi})$” may also be made to mean ~pv~q~v~rv... *But this doesn't matter!* I suppose you don't understand the notation “ξ”. It does not mean “for all values of ξ...”. (Carta a Russell, 19-8-1919, LT, p.99)

O questionamento de Russell tem dois pontos, um dos quais é concedido por Wittgenstein. Em primeiro lugar, Russell questiona se ao invés de utilizarmos um operador que nega conjuntamente todos os valores de uma variável proposicional, não poderíamos utilizar um operador que afirma que *pelo menos um* dos valores da variável – sobre esse ponto Wittgenstein não apresenta reservas. O que é problemático é o segundo aspecto da questão de Russell que está envolvido no modo como ele compreende a introdução da generalidade: Russell toma a generalidade como introduzida em termos da negação de cada instância particular *fa, fb, fc...* - ou seja, como se a proposição geral fosse *derivada ou definida* em termos da totalidade de suas instâncias particulares - quando Wittgenstein simplesmente *não define* a generalidade: a totalidade de valores de uma variável proposicional é uma noção primitiva que se reduz à mera descrição sintática de uma classe de *expressões*.

Podemos agora retornar ao problema de Fogelin. Como vimos na discussão acerca do modo como a notação “*x* : *fx*” de Geach deve ser lida, ao aplicarmos o operador N à classe de proposições representada pela expressão “*x* : *fx*”, não podemos depender da possibilidade de *listar* os valores possíveis de uma função proposicional *fx* para nega-los conjuntamente, mas devemos poder falar *na totalidade* de valores da função sem precisarmos especificar *cada* valor[43]. Isso é possível mediante uma seleção formal que consiste na especificação de uma

43 Uma vez aceita essa leitura, de fato, não deveríamos mais falar do operador N como um operador de negação '*conjunta*' mas como um operador de negação *total* ou *geral,* dado que essa terminologia não sugere o paralelo com conjunções infinitas e torna claro que se trata da negação de uma certa classe de proposições

classe de proposições por meio de uma proposição variável obtida pela substituição de uma constante por uma variável em uma proposição determinada. Essa seleção e subsequente negação ou afirmação, como vimos, sempre envolve um número finito de passos.

Também podemos, agora, dar conta das afirmações de White acerca da incoerência da forma geral da proposição $[\ \bar{p},\ \bar{\xi},\ N(\ \bar{\xi}\ )\ ]$. Como vimos, White pensa que essa notação é inadequada, uma vez que seu funcionamento deve ser análogo ao de séries formais em geral, da forma [*a, x, O'x*]. No entanto, tudo que dissemos até agora acerca do modo como proposições complexas são geradas a partir de proposições elementares sugere que isso não pode ser o caso. De fato, dada nossa discussão acerca de como variáveis proposicionais devem ser compreendidas no *Tractatus,* podemos, seguindo uma leitura sugerida por Thomas Rickets[44] compreender a forma geral da proposição como um *esquema,* isto é, apenas como um 'esqueleto' que corresponde à estrutura de cada estágio do processo de gerar proposições complexas. De acordo com White, necessitamos de uma regra que permita, a cada estágio de gerar proposições a partir de proposições elementares, passar de uma variável proposicional para uma proposição. Como afirma Ricketts, a forma geral da proposição não oferece qualquer regra desse tipo – fica a cargo do leitor encontrar um modo como isso pode ser feito sem violar as restrições acerca de noções semânticas a partir do que Wittgenstein afirma em 3.315-3.317 (tal como Geach o faz):

> The ways in which elementary sentences may be specified, apart from lists of individual sentences, depends on their forms, the forms of their constituting names, and the number of names of each form. Hence, the general form is properly silent here (see 5.55–5.551). The general form is also silent as to how a later specification of the bases for an application of the N-operation must depend on sentences constructed earlier. The bases are specified by stipulating the values of a sentence-variable. The only requirement here is that the stipulation of the values of the variable 'is a description of the symbols and states nothing about what is signified' (3.317). (RICKETTS, 2013, p.140).

Como vimos na seção §2 White procura resolver o 'problema' do aforismo 6 introduzindo uma definição recursiva da noção de proposição, para preencher essa lacuna. Segundo White:

> The basic idea is that we start out with the elementary propositions; we then form a new set of propositions by applying the N-operator to sets of the propositions; add this

como um todo e não cada membro da classa separadamente.

44 Ricketts atribui essa ideia a um texto não publicado de Juliet Floyd (RICKETTS, 2013, p.140).

> set to the original set of elementary propositions, and repeat the process until we have generated all the truth-functions of elementary propositions. This, as Wittgenstein indicates at 5.32, can be done in a finite number of steps. (WHITE, 2006, p.103-4)

O que White afirma aqui é certamente correto: de fato, essa construção de proposições em estágios é o que a notação de Geach possibilita e o que *Tractatus* pretende. No entanto, a definição recursiva da noção de proposição é desnecessária uma vez que a forma geral da proposição seja compreendida de maneira esquemática, isto é, uma vez que a forma geral seja compreendida como a estrutura correspondente a *cada estágio* do processo de gerar proposições complexas a partir de proposições elementares e não como a forma geral de uma série que deve conter a totalidade de proposições geradas a partir da totalidade de proposições elementares. Como corretamente apontou Gregory Landini, "Wittgenstein não afirma que $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ é o *termo geral* de séries de funções de verdade. Ele afirma que é *forma* geral da função de verdade" (LANDINI, 2007, p.141), embora devamos evitar aqui possíveis mal-entendidos[45]. Devemos notar que sso não significa que jamais podemos ter séries de proposições. Podemos, em diversos casos tomar uma expressão "$[\bar{s}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$" onde *s* é uma classe de proposições base determinada; a questão é que para essa expressão servir como termo de uma *sérié,* certas condições devem ser imostas a *s*; se *s* for um par de proposições, por exemplo, podemos obter a totalidade das 16 funções de verdade binárias enquanto uma série formal (uma explicação detalhada desse exemplo é dada em ANSCOMBE, 1959, p.132-133), dado que, nesse caso, temos um número finito na base e trivialmente podemos ter os termos dados em série. Isso é claro, não significa que podemos ter apenas séries finitas de proposições: uma vez provida uma regra que permita a passagem de termo a termo dada uma base *s* infinita, podemos ter $[\bar{s}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ enquanto um termo geral de uma *série* de funções de verdade (vimos um exemplo anteriormente: a série de funções de verdade "*p, ~p, ~~p, ...*" é infinita"; um exemplo menos trivial consiste em séries em que as proposições são atribuições de cardinalidade (CUTER, 2005, p.67-70) como:

Não há livros sobre a mesa.

Há um livro sobre a mesa.

45 Para discussões mais detalhadas acerca da relação entre a forma geral da proposição e séries formais no Tractatus, consultar ANSCOMBE, 1959, SUNDHOLM 1993, CUTER, 2002. Por razões de espaço e de escopo do trabalho, não pudemos tratrar de todas as questões envolvidas na teoria de operações e séries formais do *Tractatus,* em particular como estas têm relevância para sua Filosofia da Matemática.

Há dois livros sobre a mesa.

Há três livros sobre a mesa.

…

Há *n* livros sobre a mesa.

...

Evidentemente, séries como essa não precisam[46] 'terminar' e o que temos é uma série de proposições. Mas nesse caso de atribuições de números cardinais, temos uma regra que permite a passagem de termo a termo na série de proposições. Os casos recalcitrantes à tentativa de compreender a forma geral da proposicição como sempre podendo ser compreendida como um termo geral de uma série são aqueles em que essa regra pode não estar disponível ou pode simplesmente não existir. No caso em que temos a totalidade das proposições elementares na base, temos, em princípio a determinação sintática da forma que qualquer função de verdade de um grupo *qualquer* de proposições elementares da base irá ter, mas não temos (ou podemos não ter) uma regra que torne possível tomar essas formas como uma série e a expressão "[$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)]" como o termo geral dessa série, como afirma Cuter: "a operação N é suficiente para nos dizer como obter uma nova proposição quando uma coleção de outras antigas é dada, mas não é suficiente para nos dizer como obter uma coleção de proposições formalmente determinadas" (CUTER, 2005, p.70)[47]. A leitura "esquemática" que estamos oferecendo é uma que procura acomodar esse fato, compreendendo a forma geral

46 Isso, novamente, depende do número de objetos. Se este for finito, teremos um último termo.

47 Como mostra Cuter (CUTER, 2005, p.69-70) isso também permite evitar possíveis mal entendidos relacionados à proposição 6.01. Wittgenstein chega à forma geral da proposição [$\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)]'($\bar{\eta}$) (ou [$\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)]) através do que ele chama de forma geral da operação 'Ω($\bar{\eta}$)' e afirma que essa é "a forma mais geral da passagem de uma proposição a outra" (6.001). Isso pode sucitar dois equívocos. Em primeiro lugar que a forma mais 'geral' de passar de uma proposição a outra ou de um termo a outro em *qualquer* caso é através de uma operação de verdade; o que não é o caso, pois temos operações não vero-funcionais. Em segundo lugar, isso pode sugerir uma leitura equivocada da noção de *transição* ou *passagem;* se a forma geral da operação 'Ω($\bar{\eta}$)' é o que é comum em todo caso em que temos a passagem de uma proposição a outra, poderíamos concluir que no caso de [$\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)] temos uma transição de termo a termo no mesmo sentido em que temos em séries da forma [*a, x, O'x*] ou em séries de atribuições numéricas. Ambos esses equívocos são eliminados uma vez que, compreendemos que em 6.01 Wittgenstein está afirmando que o caso mais geral da passagem de uma proposição a outra *em que a passagem se dá através de uma operação de verdade* é quando temos o duplo processo de seleção de uma totalidade formalmente determinada e a negação dessa totalidade.

da proposição como uma caracterização sintática geral da forma que qualquer função de verdade de proposições elementares tem e que *mostra* que qualquer uma dessas funções de verdade pode ser obtida em um número finito de aplicações do operador N sobre uma classe formalmente determinada de proposições elementares, sem compreender essa formal geral como nos dando, necessariamente, uma série dessas funções de verdade. Tal leitura foi até mesmo oferecida por Russell em sua *Introdução*:

> O símbolo [$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)], como um todo significa que o que quer que se possa obter tomando-se uma seleção qualquer de proposições atômicas, negando-se todas elas, tomando-se então uma seleção qualquer do conjunto de proposições assim obtido, juntamente com quaisquer das proposições originais – e assim por diante, indefinidamente. Essa é, diz ele, a função de verdade geral, e também a forma geral da proposição. (*Introdução,* p.120)[48]

Como afirma Ricketts, com essa leitura podemos tomar a forma geral [$\bar{p}$, $\bar{\xi}$, N($\bar{\xi}$)] da função de verdade "não como um exemplo [...] das limitações de Wittgenstein como um criador de notações" (RICKETTS, 2013, p.141), mas, ao contrário, como a completa realização do elegante sistema tractariano em que temos apenas um operador de verdade primitivo, o operador N.

§6 Conclusão

O saldo final deste capítulo é o seguinte:

Não devemos aceitar a leitura de Fogelin tanto do aforismo 5.32 quanto da notação de Geach. Fogelin confunde a aplicação de uma operação a um conjunto infinito de operandos com um número infinito de aplicações de uma operação. A razão dessa confusão é que Fogelin não diferencia aplicações seletivas e veri-funcionais de operações como N e pressupõe uma leitura inadequada da noção de generalidade no *Tractatus.*

A notação de Geach não só não viola as restrições de 5.32 como realiza completamente o que é afirmado pelos aforismos 3.315-3.317 acerca do modo como variáveis proposicionais e classes de proposições devem ser especificadas, isto é, apenas por meio da descrição da *sintaxe* das expressões em questão, ou seja, respeitando as restrições tractarianas acerca daquilo que pode ser *dito* e aquilo que pode apenas ser mostrado.

48 Ironicamente, Anscombe afirma que a "a explicação dada por Russell em sua introdução é inútil e deve ser desconsiderada" (ANSCOMBE, 1959, p.133).

Por fim, a leitura oferecida acerca do funcionamento do operador N torna possível uma leitura esquemática da forma geral da proposição em que essa não consiste em um simbolismo radicalmente incoerente como defendem White e Fogelin.

Apêndice: Exemplos de construção de proposições quantificadas com o operador N:

Quantificação universal:

-	Notação Russelliana:	Notação Tractariana Estilo Geach:	Notação Tractariana Estilo Floyd:	**Descrição dos Passos:**
1.	$P(a)$	$P(a)$	$P(a)$	Proposição Elementar
2.	$\sim P(a)$	$N(P(a))$	$N(P(a))$	Aplicação de *N* a "*P*(*a*)".
3.	$\sim P(x)$	$N(P(x))$	$N(P(x))$	Proposição variável obtida a partir de "*P*(*a*)".
4.	$\sim(\exists x).\sim P(x)/(x).P(x)$	$N(\ x : N(P(x)))$	$N_x(\mathrm{N}(\mathrm{P}(x)))$	Proposição quantificada.

Quantificação existencial

-	**Notação Russelliana:**	**Notação Tractariana Estilo Geach:**	**Notação Tractaruana Estlo Floyd:**	**Descrição dos Passos:**
1.	$P(a)$	$P(a)$	$P(a)$	Proposição Elementar
2.	$\sim P(a)$	$N(P(a))$	$N(P(a))$	Aplicação de *N* a "*P*(*a*)".
3.	$\sim P(x)$	$N(P(x))$	$N(P(x))$	Proposição variável obtida a partir de "*P*(*a*)".
4.	$\sim(\exists x).\sim P(x)/(x).P(x)$	$N(\ x : N(P(x)))$	$N_x(\mathrm{N}(\mathrm{P}(x)))$	Proposição quantificada.

Quantificação Múltipla:

-	**Notação Russelliana:**	**Notação Tractariana Estilo Geach:**	**Notação Tractaruana Estlo Floyd:**	**Descrição dos Passos:**
1.	aRb	aRb	aRb	Proposição elementar
2.	$\sim aRb$	$N(aRb)$	$N(aRb)$	Aplicação de *N* "*aRb*"
3.	$\sim aRy$	$N(aRy)$	$N(aRy)$	Proposição variável obtida a partir de "*aRb*"
4.	$\sim(\exists x).\sim aRy/(x).\ aRy$	$N(\mathrm{y} : N(aRy))$	$N_{\mathrm{y}}(N(aRy))$	Proposição quantificada.
5.	$\sim(\exists x).\sim xRy/(x).\ xRy$	$N(\mathrm{y} : N(xRy))$	$N_{\mathrm{y}}(N(xRy))$	Proposição variável a partir de "(*x*). *xRy*"
6.	$\sim(\exists x)(y).\ \sim xRy$ $(x)(y).\ \sim xRy$	$N(x{:}N(\mathrm{y}{:}N(xRy))$	$N_{\mathrm{x}}(N_{\mathrm{y}}(N(xRy)))$	Proposição quantificada.
7.	$(\exists x)(y).\ \sim xRy$ $\sim(x)(y).\ \sim xRy$	$NN(x{:}N(\mathrm{y}{:}N(xRy)))$	$NN_x(\mathrm{N}_{\mathrm{y}}(\mathrm{N}(xRy)))$	Aplicação de N a 7.

Capítulo 2:
Tautologias, Capacidade Expressiva e Decidibilidade

> "A explicação correta das proposições lógicas deve conferir-lhes uma posição peculiar entre todas as proposições." (*Tractatus* 6.112)

§1. Introdução

O que fizemos até agora foi levar em consideração algumas questões envolvidas na tese encapsulada no aforismo 6 de acordo com a qual toda função de verdade pode ser esquematicamente representada como sendo da forma $[\, \bar{p},\ \bar{\xi},\ N(\bar{\xi})\,]$, isto é, como o resultado de um número finito de aplicações sucessivas do operador N. No capítulo 1 vimos que o modo como Wittgenstein compreendia o funcionamento do operador N e a noção de generalidade no *Tractatus* tornam a leitura de Fogelin do aforismo 5.32 insustentável e, assim, bastante implausível sua afirmação de que a lógica do *Tractatus* [49] seja expressivamente

---

49 Utilizaremos a noção de "lógica do *Tractatus*" compreendendo isso como equivalente à expressão "notação *Tractariana*", embora isso exija uma justificativa e certas qualificações. Justificamos esse uso pelo fato de que o próprio Wittgenstein caracterizava a "velha *lógica*" de Frege e Russell (NL, p.96, por exemplo) em termos notacionais, diferenciando esta de sua teoria lógica em termos notacionais (de fato, em algumas ocasiões Wittgenstein fala em "velha notação", vide NL, p.93); além disso, como veremos ao longo deste capítulo, tomamos esse uso como justificado dada a insistência de Wittgenstein de que, no caso de uma 'verdade' lógica, podemos reconhecer a verdade "no símbolo tão somente" (6.113); isso, como veremos, deve ser refletido em uma notação adequada, que, de acordo com o *Tractatus* consiste em uma notação decidível, que dispensaria mecanismos de prova como os de Frege e Russell. Essa insistência deixa claro que o contraste que Wittgenstein encontrava entre 'sua lógica' e a 'velha lógica' era uma diferença notacional. Assim, utilizaremos a expressão "lógica do *Tractatus"* e "notação do *Tractatus"* como equivalentes, dadas certas qualificações. A primeira qualificação que isso exige é que não devemos confundir esse sentido específico lógica como notação, em que podemos, adequadamente, falar na 'lógica do *Tractatus'* e na 'lógica de *Principia Mathematica'*, por exemplo, e o sentido fundamental de 'lógica da linguagem' que aparece no *Tractatus* que não pode de qualquer maneira ser relativizado. No caso da expressão "lógica da linguagem" o sentido que estamos captando (ou tentando captar) é aquele que diz respeito à estrutura que a linguagem, o mundo e o pensamento possuem e que, justamente, uma notação adequada deve refletir ou exibir de maneira perspícua; essa estrutura, no entanto, não pode ser descrita por proposições, ela se *mostra* no uso correto da linguagem. A segunda qualificação é que também não devemos confundir o sentido plural de lógicas enquanto uma pluralidade de notações que procuram captar uma e a a mesma 'lógica da linguagem' com o

incompleta – em especial no que se refere à possibilidade de expressar quantificação múltipla mista, i.e., expressões da forma $\ulcorner(\exists\alpha)(\beta)(...)\urcorner$.

Neste capítulo levaremos em consideração as dificuldades envolvidas em uma segunda possibilidade de deslegitimar tentativas de complementar a capacidade expressiva da notação N suscitada por diversos comentadores. Essa segunda defesa de que a lógica do *Tractatus* deve ser expressivamente incompleta se baseia no suposto comprometimento de Wittgensein com a existência de um procedimento de decisão para toda a lógica – o que foi demonstrado por Alonzo Church e Alan Turing como uma impossibilidade na década de trinta[50]. Assim, diversos comentadores argumentaram[51] que dado que:

a) o *Tractatus* exige a decidibilidade de toda lógica *e*

b) não há um procedimento de decisão para todo o cálculo de predicados, devemos concluir

c) a lógica do *Tractatus* deve ser expressivamente incompleta caso o *Tractatus* seja consistente - ou seja, a lógica do *Tractatus* não pode ter um poder expressivo forte o suficiente para expressar proposições que não admitem um procedimento de decisão. Segundo Fogelin, por exemplo, a inexistência de um procedimento de decisão para o cálculo de predicados é uma razão para rejeitar complementos notacionais para o *Tractatus* como o de Geach:

> At 6.126 Wittgenstein tells us that 'one can calculate whether a proposition belongs to

---

sentido em que hoje falamos em diferentes lógicas, por exemplo, tratando de diferentes sistemas dedutivos cuja classe de teoremas é diferente (o caso de sistemas clássicos e intuicionistas seria um exemplo); no *Tractatus*, *a lógica*, no sentido de 'lógica da linguagem' está de acordo com (ou consiste nos) princípios do que hoje compreendemos como a lógica clássica, a saber, a bivalência, não contradição e terceiro excluído, monotonicidade, etc. Aquilo de que podemos ter uma pluralidade são as notações com as quais expressamos de uma maneira mais ou menos perspícua as proposições que respeitam esses princípios.

50 A apresentação original desses resultados se encontra em CHURCH, 1936 e TURING, 1936. Para um tratamento canônico desses resultados consultar KLEENE,1952 e 1967.

51 Robert Fogelin afirma isso em FOGELIN, 1982, p.127. A mesma conclusão foi extraída por Max Black em BLACK, 1964, p.319. Anscombe também defende em ANSCOMBE, 1959, p.137 que o resultado de Church demonstra que a notação de Wittgenstein para a forma geral da função de verdade é inadequada. Textos mais recentes que de uma forma ou de outra defendem uma leitura de acordo com a qual a completude da capacidade expressiva da notação *Tractariana* é prejudicada pelo resultado de Church-Turing incluem LANDINI, 2007, capítulo 4 e MARION, 2012, p.97.

> logic, by calculating the logical properties of the symbol.' This remark, together with many others (including the sequence 5.2 through 5.4), plainly indicates that Wittgenstein is committed to a decision procedure for propositions of logic. This is how Wittgenstein has generally been read and, indeed, this seems to be one of the fundamental features of his position. Since one can decide whether a proposition belongs to logic by calculating the logical properties of the symbol, the truth of a proposition of logic will not depend upon the disposition of independent logical objects. It is in this way that Wittgenstein's commitment to a decision procedure goes hand in hand with his 'fundamental idea' that 'the "logical constants" are not representatives'(4.0312). Although Wittgenstein could not have been expected to anticipate this result, it has been shown by Alonzo Church that a decision procedure is not possible for all the propositions of first order quantification theory. In particular, no decision procedure exists for certain mixed multiply general propositions. Now Geach has produced a notation for constructing propositions which, given Church's Theorem, will not carry a decision procedure with it. So Geach must hold at least one of the following theses:
> I. Despite apparent texts to the contrary, Wittgenstein did not hold that the propositions of logic admit of a decision procedure.
> II. Church's Theorem is false. (Fogelin, 1981, p.126-7)

Antes de mais nada, devemos notar que apesar das diversas dificuldades que esse argumento enfrenta e que discutiremos ao longo do texto, há um ponto indisputável na argumentação de Fogelin: dado o resultado do teorema de Church-Turing não é possível atribuir a completude da capacidade expressiva do operador N *e* a decidibilidade da Lógica ao *Tractatus* sem torna-lo inconsistente *e isso* é independente *Tractatus* ser anterior à descoberta da indecidibilidade ou de qual é a leitura mais caridosa ou adequada. No entanto, há diversos pontos que requerem esclarecimento: (1) Wittgenstein estava realmente comprometido com a decidibilidade da lógica? (2) Dado esse comprometimento, devemos concluir que a notação do *Tractatus* deve ser expressivamente incompleta? (3) Quais razões levaram Wittgenstein à tese de que a lógica deve ser decidível?

Nesse capítulo, argumentaremos que apesar de o *Tractatus* estar comprometido com a possibilidade de existência de um procedimento de decisão para toda a lógica não devemos concluir daí que a lógica tractariana deve ser expressivamente incompleta. Na seção §1 defendemos que o *Tractatus* está comprometido com a decidibilidade da Lógica, mostrando que a afirmação de Wittgenstein de que “podemos reconhecer a verdade apenas no símbolo” (6.113) consiste no comprometimento com a existência de um procedimento de decisão para toda a lógica. Na seção §3 oferecemos razões para recusar a conclusão e as razões de Fogelin para afirmar que a notação do *Tractatus* deve ser expressivamente incompleta e discutiremos a leitura de Gregory Landini do operador N, de acordo com a qual a tese de que toda função de verdade pode ser gerada com um número finito de de aplicações sucessivas do operador N e a tese de que a lógica deve ser decidível não podem ser separadas; na seção §3 argumentaremos, contra Landini e Fogelin que essas teses são independentes. Na seção §4 oferecemos uma explicação do que pode ter levado Wittgenstein a se comprometer com a decidibilidade da lógica.

§2. Tautologias e a busca por uma Notação ideal

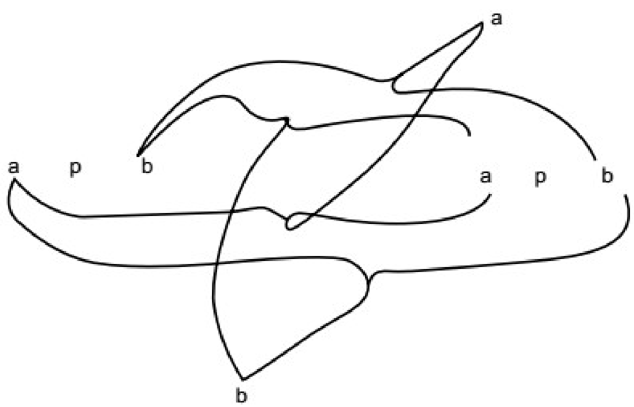
Wittgenstein chegou à conclusão de que as proposições da lógica são tautologias enquanto trabalhava isolado na Noruega no período entre 1913 e 1914. Como vimos na Introdução, o que foi instrumental para chegar a essa conclusão foi uma explicação do sentido proposicional em geral, bem como uma explicação da noção de *verdade* em geral. Como vimos, essa explicação estava baseada na noção da “*bipolaridade”* da proposição. O sentido de uma proposição consiste em suas condições de verdade: ela diz como as coisas estão se for verdadeira e é verdadeira se as coisas estão como ela diz – a propriedade de ser bipolar consiste na capacidade *essencial* da proposição de ser verdadeira *ou* falsa, isto é, de concordar ou discordar da realidade. Tautologias são, essencialmente, não-bipolares: a possibilidade de falsidade é excluída dado que suas condições de verdade são satisfeitas por toda possibilidade de configuração da realidade. Não há qualquer necessidade de examinar o mundo para sabermos se uma tautologia (ou contradição) é verdadeira (ou falsa), pois, diferentemente de proposições bipolares, no caso das proposições da lógica, o sinal proposicional ele mesmo é suficiente para checarmos sua verdade.

Apesar de Wittgenstein ter expressado, em correspondência com Russell, dúvidas acerca do que a natureza das tautologias realmente consiste, afirmando que “não podia ainda dizer claramente o que tautologias realmente são” (Carta a Russell, 193b, NB, p.128), ele ofereceu a seguinte “explicação bruta”, que, de fato, aparece praticamente inalterada no *Tractatus* (6.113):

> As to what tautologies really are, however, I myself am not yet able to say quite clearly but I will try to give a rough explanation. It is the peculiar (and most important) mark of non-logical propositions that one is not able to recognize their truth from the propositional sign alone. If I say, for example, ‘Meier is stupid’, you cannot tell by looking at this proposition whether it is true or false. But the propositions of logic – and only they – have the property that their truth or falsity, as the case may be, finds its expression in the very sign for the proposition. (Carta a

Russell, Novembro/Dezembro de 1913, LT, p.58)

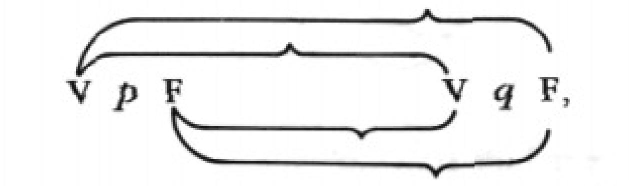
O problema fundamental[52] que surgiu para Wittgenstein, nesse período, dada essa natureza peculiar das proposições da lógica, foi o de encontrar uma notação perspícua que tornasse possível reconhecer uma tautologia, como tal "de uma e da mesma maneira em qualquer caso" - que, como veremos, era para Wittgenstein o problema de encontrar um procedimento de decisão para toda a lógica. No período dessa carta citada acima, Wittgenstein já tinha um candidato de notação ideal: a notação ab. A primeira explicação minimamente detalhada desse procedimento de decisão, que é bastante similar às tabelas de verdade, embora *consideravelmente* mais complicado e menos elegante, foi dada por Wittgenstein na mesma carta citada acima. Wittgenstein afirma:

> The diagram:
>
> 
>
>
> is the sign for p ≡ p; it is tautological because b is connected only with those pairs of poles that consist of opposite poles of a single proposition (namely p). Apply this to propositions with more than two arguments and you will obtain the general rule for the construction of tautologies. (Carta a Russell, Novembro/Dezembro de 1913, LT p.56-7)

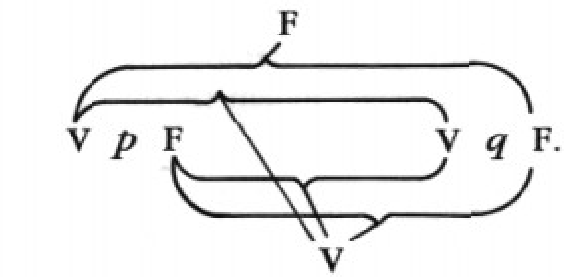
No *Tractatus,* temos uma explicação mais completa do funcionamento da notação:

> 6.1203 […] Exprimo as condições de verdade por meio das chaves:

52 Na mesma carta temos: *The great question* is now: How should a notation be constructed which will make every tautology recognizable as a tautology *in one and the same way? This is the fundamental problem of logic.* (Carta a Russell 1913b,NB, p.128,)



e por meio dos traços a coordenação da verdade ou falsidade da proposição como um todo às combinações de verdade dos argumentos de verdade, assim:



Portanto, este sinal representaria, p.ex., a proposição $p \supset q$.

A ideia básica da notação é, assim como no caso das tabelas de verdade, representar as condições de verdade da proposição através das possibilidades combinatórias dos valores de verdade – cada "chave" representa uma combinação e cada proposição *"p", q",etc* introduz duas possibilidades V ou F; diferentes definições de valores resultantes de cada combinação possível de pares, trios, etc de V's e F's resultam em diferentes funções de verdade. O que é de importância fundamental nessa notação é que, desde sua descoberta, Wittgenstein tinha clareza de que se tratava de um procedimento de decisão, compreendido como algo que através de uma regra permite checar a validade de uma proposição em um número finito de passos. Como evidência para isso, notamos que na seguinte carta a Russell, Wittgenstein concebe a notação ab exatamente desse modo:

> I will first talk about those logical prop[osition]s which are or might be contained in the first 8 Chapters of Princ[ipia] Math[ematica]. That they all follow from one Pp is clear enough because one symbolic rule is sufficient to recognize each of them as true or false. And this is the one symbolic rule: write the prop[osition] down in the ab-Notation, trace all Connections (of Poles) from the outside to the inside Poles: Then if the b-Pole is connected to such groups of inside Poles only as contain opposite poles of one prop[osition], then the whole prop[osition] is a true, logical prop[osition]. If on the other hand this is the case with the a-Pole the prop[osition] is false and logical. If finally neither is the case the prop[osition] may be true or false but is in no case logical. (Carta a Russell, Novembro de 1913, LT, p.53)

Assim, que Wittgenstein concebia sua notação ab como um procedimento de decisão é algo que colocamos como fora de questão. No entanto, a atitude de Wittgenstein sobre a possibilidade de estender esse procedimento a toda a lógica era ambivalente. Na mesma carta da citação acima Wittgenstein, no mesmo parágrafo, afirma que a notação ab só se aplica a proposições que não contêm generalidade[53] e que não contêm o sinal de identidade *e* expressa convicção sobre a possibilidade de aplicar a notação ab à teoria da quantificação de *Principia Mathematica *9:*

> Of course the rule I have given applies first of all only for what you called elementary prop[osition]s. But it is easy to see that it must also apply to all others. For consider your two Pps in the Theory of app[arent] var[iable]s *9.1 and *9.11[54]. Put there instead of ϕx, $(\exists y).\phi y.y = x$ and it becomes obvious that the special cases of these two Pps like those of all the previous ones becomes tautologous if you apply the ab-Notation. The ab-Notation for Identity is not yet clear enough to show this clearly but it is obvious that such a Notation can be made up. I can sum up by saying that a logical prop[osition] is one the special cases of which are either tautologous – and then the prop[osition] is true – or "self-contradictory" (as I shall call it) and then it is false. And the ab-Notation simply shows directly which of those two it is (if any) That means that there is one Method of proving or disproving all logical prop[osition]s and this is: writing them down in the ab-Notation and looking at the connections and applying the above rule. But if one symbolic rule will do, there must also be one P.p. that will do. There is much that follows from all this and much that I could only explain vaguely but if you really think it over you will find that I am right. (Carta a Russell, Novembro de 1913, LT, p.53-4)

Nas *Notes on Logic,* Wittgenstein chega a conjecturar como essa extensão poderia ser realizada:

> The application of the ab notation to apparent variable propositions becomes clear if we consider that, for instance, the proposition "for all *x,* φx" is to be true when φx is true for all *x*'s and false when φx is false for some *x*'s. We see that some and all occur simultaneously in the proper apparent variable notation. The notation is:
>
> for $(x).\varphi x$: a – (x) – a φx b - $(\exists x)$ – b and
> for $(\exists x).\varphi x$: a – $(\exists x)$ – a φx b (x) – b
> Old definitions now become tautologous. (NL, p.96)[55]

---

53 Que em *Principia Mathematica* são chamadas de "*elementary propositions*".

54 Isto é:

$*9.1 \vdash : \varphi x \,.\!\supset\!.\, (\exists z).\, \varphi z$ Pp e

$*9.11 \vdash : \varphi x \vee \varphi y \,.\!\supset\!.\, (\exists z).\, \varphi z$ Pp

55 Como notou, corretamente, Gregory Landini (LANDINI, 2007, p.116-17), as "antigas definições" que supostamente se tornam tautológicas são as definições *9.01-*9.08 de *Principia *9*:

*9.01	$\sim(x).\varphi x \,.\!=\!.\, (\exists x).\sim \varphi x$ Df.
*9.02	$\sim(\exists x).\, \varphi x \,.\!=\!.\, (x).\sim \varphi x$ Df.
*9.03	$(x).\varphi x \vee p = (x)(\varphi x \vee p)$ Df.
*9.04	$p \vee (x).\varphi x \,.\!=\!.\, (x)(p \vee \varphi x)$ Df.
*9.05	$(\exists x).\varphi x \vee p \,.\!=\!.\, (9x)(\varphi x \vee p)$ Df.
*9.06	$p \vee (\exists x).\varphi x \,.\!=\!.\, (\exists x).p \vee \varphi x$ Df.

No entanto, nas *Notas Ditadas a Moore na Noruega* em abril de 1914, Wittgenstein afirma:

> Logical so-called propositions *shew* [the] logical properties of language and therefore of [the] Universe, but *say* nothing. This means that by merely looking at them you can *see* these properties; whereas, in a proposition proper, you cannot see what is true by looking at it. (NM, p.108)

Nessa observação temos uma mudança de terminologia. Aqui, diferentemente das *Notes on Logic* e da correspondência com Russell, Wittgenstein utiliza os termos "*ver*" e "*mostrar*". A questão fundamental envolvida em determinar se no *Tractatus* Wittgensein

---

*9.07 (*x*).φ*x* v (9*y*)ψ*y* .=. (*x*)(∃*y*).φ*x* v ψ*y* Df.

*9.08 (∃*y*).φ*y* .v. (*x*).ψ*x* .=. (*x*)(∃*y*).φ*y* v ψ*x* Df.

Entretanto, como notam Potter (POTTER, 2009), não é muito claro como o exemplo de Wittgenstein mostra que essas "velhas definições se tornam tautológicas" através do uso da notação *ab.* Potter chega a afirmar que o exemplo em questão "[...] is plainly so half-baked that one suspects he had not really thought about the matter at all and simply made something up on the spot when Russell asked him about it" (POTTER, 2009,M p.181); Landini faz uma leitura similar (LANDINI, 2007, p.117-8). Contra Potter e Landini argumentamos que podemos ler o exemplo de maneira caridosa através de uma explicação bastante simples do que Wittgenstein afirma. Para isso devemos levar em consideração as duas primeiras definições de *9, a saber: "~(*x*).φ*x*.=.(∃*x*).~φ*x*" e "~(∃*x*).φ*x*.=.(*x*).~φ*x*"; essas afirmações introduzem a negação de uma quantificação universal em termos da quantificação existencial sobre ~φ*x* e um existencial negativo em termos da quantificação universal sobre ~φ*x*, o que consiste em nada mais do que a definição usual dos quantificadores. No exemplo de Wittgenstein das *Notes on Logic*, ele procura elucidar quando uma quantificação universal 'aponta' para o pólo *a* (verdadeiro) e quando ela aponta para o polo *b* (falso). No caso universal, Wittgenstein utiliza "(x).φx : a – (x) – a φx b - (∃x) – b". No texto que antecede essa notação obscura ele afirma que " "para todo x, φx" é verdadeiro quando φx é verdadeiro para todo x e falso quando φx for falso para *algum* x" (NL, p.96). O que Wittgenstein afirma é que no polo *a* de "(x).φx" temos a situação de que "φx" é *verdadeira* para todo *x* e no polo *b* temos que "φx" é *falsa* para algum x. O que isso sugere é que Wittgenstein compreendia a bipolaridade de proposições contendo generalidade em termos do fato de que uma quantificação universal 'positiva' é verdadeira se, e somente se, sua contrapartida, uma quantificação existencial negativa for falsa e vice-versa. É por isso que Wittgenstein afirma que em proposições contendo generalidade "todo e algum ocorrem simultaneamente" (ibid.). Provavelmente Wittgenstein pensava que, dada essa dualidade dos quantificadores, alguma expressão notacional análoga aos seus diagramas para os casos do cálculo proposicional pudesse ser encontrada. O fato de que no *Tractatus* ele toma a precaução de restringir o uso da notação *ab* a proposições que não contêm generalidade sugere que ele tenha se dado conta que a exibição dessa dualidade em termos dos polos da proposição não é suficiente para obtermos um procedimento de decisão para proposições contendo generalidade.

estava comprometido com a decibilidade da lógica consiste em determinar se essa mudança de terminologia de

(a) "Tautologias são proposições que, se expressas em uma notação adequada podem ser reconhecidas como tal de uma e da mesma maneira em qualquer caso"

para

(b) "Tautologias *mostram* que são tautologias" e "Nas tautologias *vemos* que elas são tautologias"

marca uma mudança de posição.

De acordo com Dreben e Floyd "agora há uma mudança fundamental de ênfase; não há mais a insistência em um procedimento de decisão geral para *ver* (i.e., reconhecer) uma proposição lógica verdadeira" (DREBEN & FLOYD, 1991, p.34-5). De acordo com eles, nas *Notas a Moore* e no *Tractatus* a noção de tautologia "não é mais definida ou especificada em termos de "*um* método de provar ou refutar todas as proposições lógicas"". Como evidência para essa leitura, Dreben e Floyd citam a seguinte passagem das *Notas a Moore*:

> We want to s a y [...], what properties a symbol must have, in order to be a tautology.
>
> Many ways of saying this are possible:
>
> One way is to give *certain symbols;* then to give a set of rules for combining them; and then to say: any symbol formed from those symbols, by combining them according to one of the given rules, is a tautology. This obviously says something about the kind of symbol you can get in this way.
>
> This is the actual procedure of [the] *old* Logic: it gives so-called primitive propositions; so-called rules of deduction; and then says that what you get by applying the rules to the propositions is a *logical* proposition that you have *proved.* The truth is, it tells you something *about* the kind of proposition you have got, viz. that it can be derived from the first symbols by these rules of combination (= is a tautology).
>
> Therefore, if we say one *logical* proposition *follows* logically from another, this means something quite different from saying that a *real* proposition follows logically from *another.* For so-called *proof* of a logical proposition does not prove its *truth* (logical propositions are neither true nor false) but proves *that* it is a logical proposition = is a tautology. [Cf. 6.1263.]. (NM, p.109)

Dreben e Floyd certamente estão corretos em afirmar, com base nessas observações, que Wittgenstein não pensava mais que deve haver *um* (e apenas um) modo de mostrar uma tautologia enquanto tal; também estão corretos ao afirmar que Wittgenstein não pensava estar de posse de um procedimento geral de decisão (DREBEN & FLOYD, 1991, p.35); no entanto, eles vão longe demais, dado que disso não se segue que, no *Tractatus*, Wittgenstein não esteja comprometido com a tese de que *possa* ou mesmo que *deva* haver uma notação que torne possível o reconhecimento de uma tautologia enquanto tal por meio de uma notação que permita isso por “mera inspeção” (6.122). Para mostrar isso, devemos mostrar que a mudança terminológica das *Notas a Moore* não consiste em uma mudança de posição.

No *Tractatus,* o aforismo 6.12 conecta a ideia de uma notação perspícua para as condições de verdade de uma proposição com a ideia expressa em 6.113 de que as proposições da lógica têm como característica essencial o fato de que “sua verdade se possa reconhecer no símbolo tão-somente” (6.113) que ocorre exatamente no contexto de discussão de procedimentos de decisão na correspondência com Russell.

Vimos que no período das *Notes on Logic* Wittgenstein estava atrás de uma notação que deixasse claro - perfeitamente claro - se uma proposição é uma proposição com sentido, uma contradição ou uma tautologia. O que ele buscava era uma notação que refletisse de maneira exata e perspícua as propriedades (lógicas) de qualquer proposição e, como vimos, ele não só manifestava a mais absoluta confiança de que tal notação devesse poder ser descoberta como pensava que a propriedade mais fundamental das proposições da lógica consiste no fato de que a mera expressão da proposição nessa notação deve deixar claro que ela é uma tautologia.

A sequência de aforismos 6.12-6.127 deixa claro que a conexão entre tautologias e decidibilidade é mantida no *Tractatus*. Mencionamos anteriormente que o aforismo 6.12 fazia a conexão entre uma notação adequada e a demonstração de propriedades estruturais de proposições. A apresentação do procedimento ab em 6.1201-6.1204 é o desenvolvimento do aforismo 6.12, que inteiramente citado afirma:

> 6.12 Que as proposições da lógica sejam tautologias, isso *mostra* as propriedades formais – lógicas – da linguagem, do mundo.
>
> Que suas partes constituintes, *assim* enlaçadas, resultem numa tautologia, isso caracteriza a lógica de suas partes constituintes.
>
> Para que proposições, enlaçadas de determinada maneira, resultem numa tautologia, elas devem ter determinadas propriedades estrututrais. Que *assim* ligadas resultem numa tautologia, portanto, mostra que possuem essas propriedades estruturais.

Esta é uma descrição geral da maneira como as proposições estão conectadas nos exemplos de 6.103. As estruturas das proposições moleculares são "mostradas" pela "maneira particular" como proposições atômicas são articuladas de acordo com as regras do método ab - uma vez que essas regras para construção são compreendidas e seguidas, a mera expressão de uma proposição na notação ab "mostra" se a proposição em questão é uma tautologia, uma contradição ou uma proposição com sentido, uma vez que, nessa notação, as propriedades estruturais da proposição molecular são espelhadas na notação. O que segue 6.12, a saber, 6.121-6.122, deixa claro que a expressão perspícua das propriedades formais das proposições é uma questão que diz respeito a uma notação adequada e que uma "notação adequada" é, de fato, algo como a notação ab, isto é, um procedimento de decisão:

> 6.121 As proposições da lógica demonstram as propriedades lógicas das proposições, ao ligá-las em proposições que não dizem nada.
>
> Esse método poderia também chamar-se método zero. Na proposição lógica, proposições são postas em equilíbrio umas com as outras, e o estado de equilíbrio indica então como estas proposições devem estar logicamente constituídas.
>
> 6.122 Resulta daí que também podemos passar sem as proposições lógicas, já que podemos muito bem, numa notação conveniente, reconhecer as propriedades formais da proposições mediante a mera inspeção dessas proposições.

Embora o "ver" não apareça no *Tractatus*, existe a noção de "reconhecimento por mera inspeção". "Reconhecer [uma proposição como uma tautologia] por mera inspeção" deve ser lido aqui como algo envolvido por um procedimento de decisão como a notação ab - caso contrário seríamos incapazes de explicar a diferença entre uma notação perfeitamente perspícua que era o que Wittgenstein buscava e, digamos, a notação de *Principia Mathematica* que ele tinha, achava insatisfatória. Isso não quer dizer que haja uma diferença radical entre a notação de Russell e qualquer outra possível. Sabemos hoje que nenhuma notação pode fazer o que Wittgenstein esperava, dada a indecidibilidade da lógica de primeira ordem - mas não só ele não sabia disso, mas pensava ter boas razões para pensar o contrário, como veremos na próxima seção.

No entanto, poder-se-ia dizer, contra a leitura que estamos oferecendo, que, *dado que*, no *Tractatus* Wittgenstein não conjectura que a notação ab possa ser estendida à teoria da quantificação como nas cartas citadas anteriormente, podemos concluir que ele não estava comprometido com a existência de um procedimento geral de decisão. De fato, no *Tractatus* Wittgenstein afirma com clareza que os procedimentos de decisão como a notação ab e as tabelas de verdade se aplicam apenas para tautologias do cálculo proposicionais. No entanto, assim como nos *Notebooks* e na correspondência com Russell, ele ainda sustenta que *toda* a lógica consiste em tautologias, extrapolando as conclusões para o caso para o qual ele tinha um procedimento de decisão (lógica proposicional) para o caso em que ele não tinha (teoria da quantificação):

> 6.126 Pode-se calcular se uma proposição pertence à lógica calculando-se as propriedades lógicas do *símbolo*.
>
> É isso que fazemos quando "demonstramos"uma proposição lógica. Pois, sem nos preocuparmos com um sentido e um significado, construímos a proposição lógica a partir de outras segundo meras *regras notacionais.*
>
> [...]
>
> 6.1261 Na lógica, processo e resultado são equivalentes. (Por isso, nenhuma surpresa.)
>
> 6.1262 A demonstração na lógica é apenas um expediente mecânico para facilitar o reconhecimento da tautologia, quando ela é complicada.

Uma vez que aceitamos que Wittgenstein está falando sobre *todas* as proposições da Lógica - e não pode haver dúvida de que ele está - a exigência de decidibilidade torna-se inegável. De que outra forma[56] poderíamos entender a idéia de que "as provas são meramente um expediente mecânico para facilitar o reconhecimento de tautologias em casos complicados"? Aqui até a idéia de um procedimento *mecânico* aparece. Poderíamos, é claro, negar isso como uma demanda por um procedimento de decisão (geral) lendo essas observações como *não* dizendo respeito a *todas* as proposições da lógica. Mas não só isso vai contra a generalidade que essas observações contêm, como vai contra idéias tractarianas centrais:

56 Há outras formas que *hoje* estão disponíveis de compreender a noção de um procedimento mecânico, mas que não são adequadas para compreendermos o que Wittgenstein afirma. Podemos fazer a seguinte distinção: mesmo no cálculo de predicados, em que não possuímos um procedimento efetivo para verificar se uma fórmula arbitrária **A** é válida ou não, podemos verificar mecanicamente, dada uma linguagem L, um sistema dedutivo S e uma sequência de fórmulas $\mathbf{B}_1,...,\mathbf{B}_m$ cuja última fórmula é **A,** se essa sequência é uma *prova* de **A** ou não. Dado isso, poderíamos afirmar que o que reconhecemos "apenas no símbolo", mecanicamente, é que uma sequência de fórmulas consiste em uma prova. Do mesmo modo, como nota Quine (QUINE, 1950, p.213-15), possuímos um procedimento efetivo (trivial) para encontrar uma prova de uma fórmula **A** *se ela for válida*, dado que toda prova é uma sequência finita de símbolos e, portanto, com tempo suficiente encontraremos uma sequência que constitui uma prova (embora o processo possa demorar horas, semanas ou mesmo anos para ser concluído) – dizemos que, nesse sentido, o cálculo de predicados de primeira ordem é 'positivamente' decidível. Essas alternativas mais fracas, entretanto, não são leituras adequadas da noção de um procedimento mecânico no *Tractatus*, como notou METHVEN, pp.211-12, por duas razões. Em primeiro lugar, pois o resultado de que o cálculo de predicados é completo e o tipo de tratamento da sintaxe e semântica da lógica de primeira ordem pressupostas por esse tipo de resultado só foram formulados de maneira precisa oito anos após a publicação do *Tractatus,* e, assim, Wittgenstein não podia sequer ter conhecimento da decidibilidade positiva do cálculo de predicados de primeira ordem. Em segundo, lugar as afirmações de Wittgenstein sugerem algo muito mais forte: Wittgenstein afirma que "na lógica processo e resultado são equivalentes" e que a verdade é "reconhecida no símbolo". O que essas afirmações implicam é que procedimentos de prova são supérfluos e que a própria representação das condições de verdade em uma notação adequada é suficiente para o reconhecimento da verdade no símbolo.

> 6.127 Todas as proposições da lógica têm os mesmos direitos. Não há, entre elas, o que seja essencialmente lei básica ou proposição derivada. *Toda tautologia mostra, ela própria, que é uma tautologia.*

Não pode haver algum tipo de diferença essencial entre proposições lógicas. Se uma "prova em lógica é meramente um expediente mecânico para facilitar o reconhecimento" da tautologia para *uma* proposição da lógica, isso deve ser assim para *toda* proposição da lógica. A questão que isso sucita é se a capacidade expressiva da lógica do *Tractatus* é comprometida em função disso.

§3. Decidibilidade e o Operador N

Como vimos (§1 deste capítulo), Fogelin, supõe que segundo o *Tractatus* a Lógica deve ser decidível e conclui que a capacidade expressiva do operador N deve ser incompleta. A opção interpretativa de Fogelin é atribuir a Wittgenstein um erro lógico elementar, a saber, de que no *Tractatus* não é possível expressar generalidade múltipla, para torna-lo consistente. Tal escolha interpretativa, no entanto, vai contra uma grande quantidade de evidência interna e externa de que o *Tractatus* deve ser expressivamente completo. Também vimos (seção §2) que o *Tractatus,* de fato, contém o comprometimento com um procedimento de decisão. Isso sugere que Fogelin está correto ao concluir que a lógica do *Tractatus* não deve ser capaz de expressar proposições que não admitem um procedimento de decisão. Há, no entanto, pelo menos três razões para rejeitar a conclusão de Fogelin.

Em primeiro lugar, o resultado de Church-Turing simplesmente não estava disponível para Wittgenstein à época do *Tractatus*. Portanto, Wittgenstein não tinha qualquer razão para considerar que a capacidade do operador N de expressar proposições contendo generalidade múltipla (inclusive aquelas para as quais não há um procedimento de decisão) fosse incompatível com a decidabilidade da Lógica. Apresentar essas duas coisas como incompatíveis só é possível retrospectivamente. Assim, é de extrema importância levar em consideração o fato de que o aparato lógico-matemático utilizado para provar o resultado de Church-Turing foi desenvolvido mais de uma década e meia depois da *publicação* do *Tractatus,* de modo que projetar, no *Tractatus,* as noções de procedimento de decisão, computabilidade ou algoritmo que se tornaram bem sedimentadas *após* os trabalhos de Church e Turing é bastante problemático. Parte da argumentação de Fogelin resulta em um equívoco por não dar a devida atenção a esse fato: uma vez que ele é levado em consideração, a alternativa de que o *Tractatus* é simplesmente inconsistente no que se refere a esse ponto se torna muito plausível.

Em segundo lugar, como notou Geach[57] é *extremamente improvável* que, caso o operador N, de fato, não fosse capaz de expressar generalidade múltipla, tanto Frank Ramsey quanto Bertrand Russell não tenham detectado o erro.

Em terceiro lugar, como foi mostrado no capítulo 1, complementar a notação do operador N de modo que ela possa expressar generalidade múltipla não só é permitido pelo texto, dada a leitura que foi feita de 5.32 como a tentativa de Fogelin de defender que isso não é possível é refutada por 3.315 e uma leitura mais adequada de 5.32.

Dessas três razões segue-se apenas o seguinte: mesmo *se,* no *Tractatus,* Wittgenstein estava comprometido com um procedimento de decisão para o cálculo de predicados, não é razoável, em função de um resultado que não estava disponível a ele, atribuir-lhe o erro lógico elementar de não se dar conta que o operador N não pode expressar fórmulas tão básicas quanto "$(\exists x)(y).fxy$" – o fato de que Wittgenstein estava bastante familiarizado (para dizer o mínimo) com os sistemas de Frege e de Russell por si só já torna isso implausível. Assim, mesmo que o *Tractatus* esteja comprometido com a existência de um procedimento (como vimos na seção anterior) de decisão para toda a lógica, a opção interpretativa de Fogelin é um dos poucos casos em que tentar tornar um texto consistente não é a escolha mais interessante. No entanto, parecem haver outras razões para relacionar a tese de 5.32 com a decidibilidade da lógica.

Uma razão que poderia ser dada para a dependência da tese de construtibilidade e decibilidade é que Wittgenstein pensava estar *de posse* de uma notação que permitisse decidir em qualquer caso se uma proposição gerada por aplicações do operador N é uma tautologia ou não – a saber, as tabelas de verdade. No entanto, isso é equivocado.

No caso de tautologias da lógica proposicional Wittgenstein estava, sem margem para dúvida, comprometido com as tabelas de verdade como um procedimento de decisão. No entanto, ele também é *explícito* ao deixar claro que as tabelas de verdade (assim como a notação ab) não servem como procedimento de decisão para proposições contendo generalidade:

> 6.1203 Para se reconhecer uma tautologia como tal, pode-se, *nos casos em que não*

57 GEACH, 1981, p. 170.

> *ocorre na tautologia nenhuma designação de generalidade*, fazer uso do seguinte método intuitivo: [...].[58]

Assim, dado que vimos no primeiro capítulo que o operador N foi pensado como sendo capaz de expressar generalidade, não é correto associar a tese de que toda função de verdade é gerada por sucessivas aplicações do operador N com a tese de que toda função de verdade gerada pelo operador N pode ser reconhecida como tautologia ou não por meio de uma tabela de verdade ou algo equivalente.

Há outra razão, no entanto, que poderia ser oferecida para defender a interconexão entre a decidibilidade e construtibilidade. Poder-se ia pensar que a tese de construtibilidade implica decibilidade tomando a própria notação do operador N como um método de representar funções de verdade de uma maneira que permita "inspeção imediata" (lendo essa expressão como conotando decidibilidade, é claro). Isso é sugerido por Gregory Landini:

> Wittgenstein intended the N-operator notation to provide an apparatus that represents all and only logical equivalents in one and the same way. This forges a connection between expressive adequacy and decidablity. If the N-operator notation succeeds in expressing every logical equivalent in exactly one and the same way, then it has to fail to be expressively adequate, for polyadic predicate logic is not decidable. (Landini, 2007, p. 144)

De acordo com Landini, o operador N foi projetado para funcionar de maneira análoga a representações pictóricas (como diagaramas de Venn e tabelas de verdade) das condições de verdade de fórmulas cujo intuito é exibir equivalentes lógicos de uma e da mesma maneira (LANDINI, 2007, p.129). A motivação geral dessa leitura é bastante forte. Como afirma Landini (idem, p.123; e como vimos na seção anterior), Wittgenstein rejeita um aspecto fundamental da "velha lógica" de Frege e Russell, a saber, o aspecto *axiomático* de seus sistemas. A razão de Wittgenstein é que a escolha dos axiomas, das proposições primitivas é arbitrária e sugere que há certas proposições da lógica mais fundamentais do que outras, além de um paralelo com as ciências naturais, nas quais certas hipóteses são assumidas a fim de serem testadas a partir dos enunciados que delas podem ser derivados. Como vimos, de acordo com Wittgenstein as relações dedutivas que proposições mantêm entre si devem ser

58 Grifos meus. O método intuitivo referido é reminiscente da notação ab dos *Notebooks.* No *Tractatus,* a notação *ab* será quase completamente substituída pela mais conhecida (e intuitiva) notação das tabelas de verdade, embora no aforismo 6.1203 Wittgenstein ofereça um método de reconhecer tautologias praticamente idêntico a notação *ab* dos *Notebooks*. Para uma discussão dessa mudança consultar POTTER, 2009, p.157-164..

exibidas através de uma notação que torne transparente a estrutura sintática dessas expressões e nessa notação não haveria necessidade de proposições lógicas primitivas pois toda proposição da lógica mostraria ela mesma que é uma proposição lógica. . De acordo com Wittgenstein um 'sistema dedutivo' é dispensável dada uma notação adequada. Isso somado ao fato de que todas as noções semânticas como consequência lógica são, de acordo com o *Tractatus* "pseudo-conceitos" que devem ser exibidos através da sintaxe e não definidos com proposições genuínas[59]; leva Landini a concluir que o problema mais fundamental da lógica de acordo com Wittgenstein era encontrar uma tal notação na qual equivalentes lógicos têm "uma e a mesma expressão":

> If logical notions are pseudo-concepts, the science of deduction must be supplanted. Wittgenstein hoped to do this by finding a form of representation in which all and only logical equivalents have exactly one and the same expression. (LANDINI, 2007, p.112)
>
> If all logical (and semantic) notions are pseudo-concepts, a system of formal deduction must be eliminated in favor of the view that a formula's status as a logical truth, a contingent truth, or a contradiction should be shown by the syntax of its very expression in the ideal language for empirical science. (idem. p.112)

Em linhas gerais, o ponto de Landini é indisputável: Wittgenstein certamente toma como a característica mais fundamental das proposições da lógica o fato de que essas *mostram* que são proposições lógicas e isso é possível mediante o uso de uma notação correta. Do mesmo modo, relações dedutivas são exibidas através de uma notação que torne "manifesta" a sintaxe das expressões envolvidas e isso torna "sistemas dedutivos" como os de Frege e Russell dispensáveis; quanto a isso Wittgenstein é claro, como vemos em 5.13-5.132:

> 5.13 Que a verdade de uma proposição se siga da verdade de outras*, vê-se* pela estrutura das proposições.
> 5.131 Se a verdade de uma proposição se segue da verdade de outras, isso se exprime por meio de relações que as formas dessas proposições mantêm entre si; e na verdade, não precisamos colocá-las em tais relações, ligando-as numa proposição mas essas relações são internas e existem desde que, e porque essas proposições existem.
> 5.1311 Se concluímos q de $p \vee q$ e $\sim p$, a relação entre as formas das proposições "$p \vee q$" e "$\sim p$" é velada por esse modo de designação. No entanto, se escrevemos, p.ex, "$p|q.|.p|q$" ao invés de "$p \vee q$" e "$p|p$" ao invés de "$\sim p$"($p|q$ = nem p nem q), o vínculo interno torna-se *manifesto.*

59 O mesmo vale para regras de inferência: que q se segue de p e $p \supset q$ é algo que é exibido pela sintaxe lógica e não expresso em uma regra que *justifica* a inferência (5.132). Cabe notar que essa é a leitura *de Wittgenstein* do modo como Frege e Russell compreendiam regras de inferência e que não estamos endossando essa leitura como a mais (nem menos) adequada.

(Que se possa concluir *fa* de $(x).fx$ mostra que a generalidade está presente no próprio símbolo "$(x).fx$"."

5.132 Se *p* se segue de *q,* posso inferir *p* de *q;* deduzir *p* de *q*.

O modo de inferência há de ser derivado das duas proposições por elas mesmas.

Só elas próprias podem justificar a inferência.

"Leis da inferência" as quais – como em Frege e Russell – cumpra justificar as inferências não têm sentido[60] e seriam supérfulas.

Em 5.31, está Wittgenstein está afirmando que dentre as duas expressões notacionais *D* e *D'* abaixo de uma mesma dedução, *D'* é a que representa da maneira mais manifesta a relação interna que existe entre as premissas e a conclusão:

	D		*D'*
(1).	$p \vee q$	(1').	$p \mid q . \mid . p \mid q$
(2).	$\sim p$	(2').	$p \mid p$
(3).	$\therefore q$	(3').	$\therefore q$

Isto serve como evidência para leitura de Landini, dada a insistência de Wittgenstein de que *há* uma diferença entre as duas expressões notacionais. Além disso, em 5.2-5.22 temos:

5.2 As estruturas das proposições mantêm entre si relações internas

5.21 Podemos realçar essas relações internas em nossa notação representando uma proposição como o resultado de uma operação que a gera a partir de outras proposições (as bases da operação).

Dadas essas afirmações, a introdução do operador N nos 5.5's como *o* operador da Lógica do *Tractatus* e o comprometimento com a decidibilidade da lógica, a conclusão de Landini de que Wittgenstein toma a notação do operdaor N como um procedimento de decisão se torna bastante plausível. No entanto, a leitura tem suposições bastante problemáticas. Para ilustrar seu ponto, Landini oferece 5 regras de "de operação" (LANDINI, 2007, p.129-130) do operador N que, segundo ele, formariam algo análogo ao tipo de sistema notacional que o *Tractatus* permite e que Wittgenstein pretendia:

(R1) $\mathrm{N}(\zeta_1,..., \zeta_n) = \mathrm{N}(\zeta_i,..., \zeta_j)$, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

60 Essa passagem é certamente um deslise da parte de Wittgenstein: ele fala de regras de inferência como "*sinnlos"* (5.132)*,* quando essas devem claramente ser contrassensos de acordo com as restrições do que só pode ser dito e do que só pode ser mostrado.

(R2) $N(....,\zeta,..., \zeta,\ldots) = N(..., \zeta,...)$.

(R3) $N(...NN(\zeta_1,..., \zeta_n)...) = N(... \zeta_1,..., \zeta_n,...)$.

(R4) $N(...N(... \zeta,...,N\zeta,...)...) = N(...)$.

(R5) $NN(\gamma, N(\zeta_1,..., \zeta_n)) = N(N(\gamma, N\zeta_1),...., N(\gamma, N\zeta_n))$

Aqui (R1) garante a permutabilidade dos argumentos de N, isto é, cada ζ_k dentre os argumentos $\zeta_1,..., \zeta_n$ pode mudar da posição ζ_k em $\zeta_1,..., \zeta_n$ com $1\leq k \leq n$ para a posição i com $1 \leq i \leq j$ em $\zeta_i,..., \zeta_j$, sem alterar o valor de verdade da expressão, garantida é claro, a condição de que em $\zeta_1,..., \zeta_n$ e $\zeta_1,..., \zeta_n$ temos ocorrências dos mesmos, e apenas dos mesmos argumentosζ; (R2) torna repetição de argumentos ociosa; (R3) garante que, se $NN(\zeta_1,..., \zeta_n)$ está entre os argumentos de N, então podemos eliminar esse argumento e introduzir $\zeta_1,..., \zeta_n$ como argumentos; (R4) afirma que expressões da forma $N(... \zeta,...,N\zeta,...)$ podem sempre ser introduzidas ou eliminadas; (R5) afirma a distributividade das ocorrências do operador N. No caso de fórmulas do cálculo proposicional, essas regras garantem que toda tautologia da lógica proposicional terá uma e a mesma expressão de maneira análoga aos diagramas de Venn e tabelas de verdade (LANDINI, 2007, p.130). Estritamente isso seria garantido dada uma prova por indução na complexidade das fórmulas de que toda fórmula do cálculo proposicional terá apenas uma expressão na notação do operador N uma vez que R1-R5 sejam observadas em sua construção. Landini não oferece uma prova do resultado, mas exibe diversos exemplos[61] (LANDINI, p.131-3). O que é de nosso interesse aqui, no entanto, não é se, de fato, essas regras garantem esse resultado, mas o que elas mostram sobre as pressuposições da leitura de Landini. O problema é que, claramente, essas regras só são adequadas para o cálculo proposicional, dado que os argumentos do operador N estão sempre fixados para um número n qualquer. Assim, se o que Wittgenstein tinha em mente para consolidar a notação do operador N como um procedimento de decisão fosse algo como R1-R5, ele teria de aceitar quantificação apenas sobre domínios finitos. Como o próprio Landini afirma, nesse caso, para expressarmos quantificação (simples e múltipla) com a notação do operador N teríamos que tratar proposições contendo generalidade como conjunções no caso universal e disjunções no existencial, o que é equivocado (idem, p.144).

Assim, Landini argumenta que o operador N é expressivamente completo apenas se nosso domínio é finito, dado que, uma vez que admitimos um domínio infinito, deixamos de

61 Landini oferece um esboço de prova , no entanto, de que toda tautologia terá suas condições de verdade capturadas por (R5), o que certamente parece correto (idem, p.135).

empregar as regras de inferência para o operador N com um número fixo *n* de objetos do domínio e de proposições da forma *fx*, a notação do operador N não irá mais servir como um procedimento de decisão:

> [...] careful reflection reveals that in polyadic predicate logic we shall not be able to apply our rules governing the N-operator effectively unless the finite number n is fixed. As we have presented it, the N-operator notation employs a schematic use of the letter "n." But this undermines our ability to apply the rules governing the use of N-operator notation. In short, if we cannot apply the rules when "n" is employed schematically, then it is no longer the case that all and only logical equivalents have the same expression in N-operator notation. Expression in the N-operator notation will not be a decision procedure even for monadic predicate logic. (idem, p.146)

Segundo ele, no *Tractatus,* Wittgenstein simplesmente postula a decibilidade da Lógica e supõe que o operador N pode representar de maneira transparente quais proposições são tautologias e quais não são em qualquer caso, sem levar em consideração a radical diferença que temos no caso finito e no infinito:

> The Tractarian N-operator notation postulates the existence of a construction to fit a research paradigm, and presents itself as reaching that goal. But it is little more than bravado based on a belief that logic must be decidable. Wittgenstein seems never to have pursued the matter further. He was content to leave the considerable toil of investigating the *Entscheidungsproblem* to Ramsey. (LANDINI, 2007, p.146)

Na leitura de Landini, a tese de que toda função de verdade pode ser expressa como o resultado de aplicações finitas e sucessivas do operador N é a tese de que toda proposição da lógica pode ser expressa de uma e da mesma maneira de tal modo que "podemos reconhecer a verdade no símbolo tão somente" (6.113). Essa leitura, no entanto, é bastante insatisfatória por duas razões. Em primeiro lugar, ela assume que a própria introdução do operador N é motivada pela demanda de que a lógica deve ser decidível e faz com que a tese de construtibilidade *seja* a tese de decibilidade. No entanto podemos justamente colocar em questão aqui *se é possível* separá-las, e simplesmente sustentar que elas são a mesma coisa nesse caso é pressupor o que está em questão. Em segundo lugar, *se* a notação do operador N fosse realmente projetada para funcionar como um procedimento de decisão *é extraordinariamente surpreendente* que nenhum exemplo de como isso devesse funcionar tenha sobrevivido das notas de Wittgensein e mais ainda, que nenhum deles tenha acabado no *Tractatus* – ao contrário do que é o caso com as tabelas de verdade e a notação *ab* em que temos na correspondência com Russell e nos *Notebooks* exemplos de como isso deveria ser feito. Devemos ainda notar que, *mesmo que* a leitura de Landini seja correta e Wittgenstein, de fato, tomasse a notação do operador N como um procedimento de decisão, ele ainda podia ter razões independentes para sua introdução[62] De fato, o operador N aparece no *Tractatus* em 5.5, ao longo da discussão das constantes lógicas e na defesa de Wittgenstein de que estas não representam objetos, mas marcam a aplicação de *operações,* isto é, algo que é *feito* com as proposições. Essa motivação para a introdução de N pode, em princípio, ser separada da decidibilidade da lógica, mesmo que Wittgenstein não tivesse feito essa separação. No caso da tese de que as constantes lógicas não representam nada, podemos separar o fato de que elas não tem conteúdo do fato de que elas devam ser decidíveis, dado que o que é fundamental, de acordo com Wittgensein, para mostrar que as constantes não representam é o fato de que elas "podem desaparecer" (5.254) e que elas "admitem definição cruzada"(5.42), ou seja, que nenhum dos sinais "⊃", "." , "v" e "~" cumpre o papel de representar tampouco um objeto quanto uma relação, ou seja, constitui um elemento *pictórico* em uma proposição, e isso *pode* ser aceito inedependente da lógica ser decidível ou não.

Assim, a questão fundamental que a leitura de Landini sucita é a seguinte: é possível compreender o operador N e a tese de construtibilidade independentemente da decibilidade? Ou seja, podemos separar, no *Tractatus* a tese de que toda função de verdade pode ser gerada por um número finito de aplicações sucessivas do operador N da tese de que a lógica deve ser decidível? Veremos na próxima seção que sim, dadas certas pressuposições.

§4. Decidibilidade e 5.32

Para recusar a leitura de Landini, podemos tomar a tese de construtibilidade como afirmando que toda função de verdade pode ser gerada a partir de um número finito de aplicações sucessivas do operador N a proposições elementares e *apenas isso.* De fato, isso *é tudo* que é dito por Wittgenstein em 5.32: "Todas as funções de verdade são resultados da aplicação sucessiva de um número finito de operações de verdade às proposições elementares". Argumentamos no capítulo 1, seguindo a leitura de Geach, que proposições contendo generalidade múltipla podem ser geradas com o operador N em estágios, variando partes de uma fórmula como "*fxa*" e deixando N ser um constituinte de funções

62 Também devemos notar, novamente que, dado que Wittgenstein não tinha conhecimento do resultado de Church-Turing, novamente não é razoável negar a capacidade expressiva do operador N com base na não decidibilidade da lógica.

proposicionais, mesmo em domínios infinitos. Com essa leitura do operador N, poderíamos, seguindo Scott Soames (SOAMES, S. 1983, p.587), separar a tese de construtibilidade da decidibilidade no *Tractatus*. Soames afirma:

> [..] the constructibility thesis has nothing to do with decision procedures. The construction given by *Tractatus* 6 is one that characterizes propositions in stages. A proposition at a given stage is constructed prefixing 'N' to an expression representing a set of propositions characterized at earlier stages. Elementary propositions constitute stage zero. Applications of 'N' to expressions representing sets of elementary propositions constitute propositions of stage 1, and so on. To say that every proposition results from successive applications of 'N' to elementary propositions is to say that for every proposition P there is a finite number m, such that P is constructed at the mth stage of this process. (SOAMES, 1983, p.587)

No entanto, continua Soames (ibid.), isso não implica que deva haver um procedimento de decisão para toda a lógica. Caso houvesse a possibilidade de *listar* todas as proposições que servem de base para o operador N em um dado estágio *m,* então poderíamos apenas calcular uma tabela de verdade da proposição resultante no estágio *m+1.* No entanto, a possibilidade de aplicar o operador N a conjuntos potencialmente infinitos não garante que esse método sempre esteja disponível (ibid.). Segundo essa leitura, a tese de construtibilidade afirma que podemos gerar funções de verdade de conjuntos infinitos de proposições elementares – e que podemos fazer isso em um número finito de passos admitindo aplicações seletivas *e* vero-funcionais do operador N. Segue-se também que toda proposição gerada a partir de classes de proposições elementares, mesmo que infinitas, ainda é função de verdade de proposições elementares. O que *não* se segue*,* dado que admitimos funções de verdade de conjuntos infinitos de proposições, é que a cada estágio do processo de gerar proposições quantificadas tenhamos uma *lista* das proposições que são fundamento de verdade das proposições do estágio posterior. No entanto, isso não é incompatível com o fato de que ainda assim, toda função de verdade pode ser gerada a partir da aplicação de N a proposições elementares em um número finito de passos.

Tudo que é afirmado por 5.32 de acordo com nossa leitura é que toda proposição quantificada pode ser *expressa* como o resultado de um número finito de aplicações do operador N. Não há qualquer demanda acerca de procedimentos de decisão em qualquer estágio inicial ou posterior do processo de gerar proposições quantificadas – embora haja a possibilidade de que algum procedimento de decisão seja aplicavel em *alguns* casos – por exemplo, em casos em que a proposição em questão for função de verdade de um número finito de proposições elementares. *Mas isso não precisa ser satisfeito em todos os casos*:

quando a base do operador N for uma função proposicional cujos valores são infinitamente muitos, por exemplo, não temos a garantia de um procedimento de decisão. *Mas isso não significa há proposições que não podem ser expressas como resultado de um número finito de aplicações sucessivas do operador N*, mas apenas que há proposições geradas por aplicações finitas e sucessivas do operador N que não admitem um teste efetivo para sua validade[63].

Essa leitura, porém, carrega um ônus signficativo. Devemos nos comprometer com o seguinte: a inexistência de um método mecânico para verificar se funções de verdade geradas a partir de aplicações do operador N são válidas ou não se mantém em uma linguagem em que temos apenas o operador N como símbolo lógico primitivo; como vimos, no entanto, o comprometimento de Wittgenstein com a decidibilidade da lógica e o fato de que ele adota o operador N como operador primitivo do *Tractatus* torna essa posição possivelmente anti tractariana. Assim, devemos nos comprometer com a seguinte separação, que não é trivial: *se* Wittgenstein pensava ou não que a notação do operador N é um procedimento de decisão diz respeito ao que ele *esperava* do operador N e não do que ele efetivamente mostra, no *Tractatus,* que o operador N pode realizar[64.] Portanto, devemos concluir ele estava equivocado quanto às capacidades de sua notação. A demonstração efetiva disso demandaria a construção de uma linguagem em que temos: (1) apenas o operador N como constante lógica; (2) temos um nome para cada objeto e todo objeto tem um nome; (3) não temos o sinal de identidade[65]; e, finalmente, (4) o resultado de Church vale para essa linguagem em questão. Porém, o fato de que podemos, como mostrou Geach, expressar quantificação múltipla com o operador N assumindo a generalidade como primitiva, mostra que o resultado terá que se aplicar a essa linguagem, uma vez que ela conterá proposições indecidíveis. Aceito isso, podemos conciliar as dificuldades de Landini com nossa leitura, concluindo que o problema com o operador N não está em sua capacidade expressiva, mas na expectativa de Wittgenstein de que sua notação pudesse funcionar como um procedimento de decisão. Isso, entretanto, ainda deixa

63 Justamente em casos como "N(N(x : (N(y : N(fxy)))))" será um exemplo quando admitimos quantificação sobre domínios infinitos.

64 Michael Morris conclui o mesmo, a saber, que, no que se refere a tese de construtibilidade, a não decibilidade da lógica não é um problema para o *Tractatus:* "For his larger philosophical purposes, all that matters is that every possible sentence is expressible as being the result of sucessive applications of the *N*-operator to elementary sentences – or collections of elementary sentences. And the truth of that is quite independent of how we happen to come to *understand* the N-operator."(MORRIS, 2006, p.225)

65 Isso demandaria uma leitura exclusiva das váriáveis do cálculo. Sobre diferentes leituras da eliminação da identidade referimos a ROGERS & WEHMEIER, 2014.

uma questão importante sem resposta: porque Wittgenstein se comprometeu com a decidibilidade da lógica? É a essa questão que passamos agora.

§5 Lógica, Sentido e Decidibilidade

Uma vez que defendemos que a tese de 5.32 é independente da decidibilidade da lógica, nossa tarefa agora é determinar quais as razões de Wittgenstein para se comprometer com a existência de um procedimento geral de decisão para toda a lógica expressa em sua afirmação. Como vimos na seção §2, as afirmações de Wittgenstein de que “É a marca característica particular das proposições lógicas que sua verdade se possa reconhecer no símbolo tão somente, e esse fato contém em si toda a filosofia da lógica”(6.113) mostram que ele identificou o problema de explicar a verdade lógica com o problema de encontrar uma notação que torne possível reconhecer uma tautologia enquanto tal como em todos os casos possíveis de uma e da mesma forma. Isso revela um passo equivocado na argumentação de Wittgenstein. Afirmar que uma proposição da lógica é independente do que é o caso no mundo é uma coisa. Afirmar que deve haver um meio de expressar uma proposição lógica de uma única e mesma forma que permita inspeção imediata é outra bem diferente. Parece (como é certamente o caso) que uma coisa *pode* ser verdade, enquanto a outra é, demonstravelmente, algo impossível. Uma vez que esta distinção é aceita, parece haver um 'salto' dado por Wittgenstein – e como, vimos na seção anterior, Fogelin e Landini, de maneira equivocada, localizam esse passo equivocado na tese de construbilidade.

Qual poderia ser, então, uma possível motivação de Wittgenstein para afirmar que a lógica deve ser decídível? Defendemos, seguindo Roger White e Michael Potter, que o erro de Wittgenstein está no modo como ele entende a *compreensão* de proposições e o que é para uma proposição *ter sentido*. Segundo White, a indecidibilidade da lógica de primeira ordem não é inconsistente com toda a concepção Tractariana da natureza das proposições lógicas, mas apenas certos aspectos da tese de que a proposição *mostra* seu sentido. Segundo White, a o teorema de Church-Turing “não afeta a ideia básica de que no caso de uma verdade lógica [...] a proposição ela mesma contém toda a informação necessária para estabelecer sua verdade” (WHITE, R., 2006, p.107.). O que o teorema de Church-Turing revela como insustentável é, dada a admissibilidade de quantificação sobre domínios infinitos, e, portanto, que possa haver infinitas proposições elementares, que a validade de uma fórmula possa ser reconhecida “apenas no símbolo”. Como afirma White, uma vez admitido um domínio infinito de quantificação “[...] mesmo a notação mais perspícua não será capaz de *exibir* a informação de que uma dada proposição seja uma tautologia de um modo que possa ser inspecionável [*surveyable*] por nós”(ibid.).

Michael Potter complementa essa leitura, notando que o conflito da concepção das proposições da lógica defendida no *Tractatus* com a indecidibilidade da lógica revela “uma característica curiosa da concepção de proposições de Wittgenstein enquanto símbolos que revelam completamente o que eles expressam”(POTTER, M, 2009, p.182), o que é insustentável, dado que:

> It is perfectly possible to be confronted with a logically valid sentence in some logical notation (Russell’s, for instance) whose validity we have not yet grasped. Until we do grasp this, we have not yet recognized the symbolizing fact that is being presented to us, and hence do not understand the proposition being expressed. I take it, for instance, that most of us cannot instantly spot whether $(x)(fx \supset gx) \supset (\exists x)(fx . \sim gx)$ is logically valid. Yet if we were asked whether we understand it, we would be inclined to treat that as a question only about our grasp of Russell’s symbolism. On Wittgenstein’s account that is incorrect: in order to understand the proposition we have to understand what it says, and that includes understanding whether it is logically valid or not. (POTTER, M, 2009, p.182.)

A partir dessa leitura sugerida por Roger White(WHITE, R., 2006, p.108) e Michael Potter argumentamos, contra Fogelin, que o equívoco de Wittgenstein é uma consequência do seguinte conjunto de teses do *Tractatus:* a) A proposição mostra seu sentido; b) O sentido de uma proposição consiste em suas condições de verdade; c) A proposição descreve a realidade completamente. Tais teses estão expressas na sequência de aforismos 4.021-4.024

> 4.021 A proposição é uma figuraçao da realidade: pois sei qual é a situação por ela representada, se entendo a proposição. E entendo a proposição sem que seu sentido me tenha sido explicado
> 4.022 A proposição *mostra* seu sentido.
> A proposição *mostra* como estão as coisas *se* for verdadeira. E *diz que* estão assim.
> 4.023 A realidade deve, por meio da proposição, ficar restrita a um sim ou não.
> Para isso, deve ser completamente descrita por ela.
> A proposição é a descrição de um estado de coisas. [...]
> 4.024 Entender uma proposição significa saber o que é o caso se ela for verdadeira.
> (Pode-se, pois, entendê-la e não saber se é verdadeira)
> Entende-se a proposição caso se entendem suas partes constituintes.

É importante notar como estes aforismos desvelam afirmações gradualmente mais fortes. 4.01 nos diz apenas que “a proposição é uma figura da realidade”, enquanto 4.02 diz que isso decorre do fato de que “podemos compreender o sentido de uma proposição sem que seu sentido nos seja explicado”, assim como 4.021. As conclusões fortes são:

C1) A proposição deve restringir a realidade a duas alternativas (ou seja, ser bipolar no sentido forte de poder *essencialmente* ser verdadeira *ou* falsa);

e

C2) A proposição deve descrever a realidade completamente.

Ambas essas teses são afirmadas depois que a noção de mostrar é introduzida - isto é, essas afirmações elucidam o que é para uma proposição mostrar seu sentido. Isso, então, nos deixa com a questão de como devemos entender essas noções de uma “descrição completa” e de “compreender esta descrição”? Certamente não pode ser em qualquer sentido psicológico (como em termos de uma imagem mental associada às proposições ou algo do gênero). O caráter “completo” da descrição, de acordo com Wittgenstein, é um aspecto lógico, bem como as condições para sua compreensão. Assim, a maneira mais adequada de compreender as teses C1 e C2 é tendo em mente a noção de determinação do sentido explicada nos aforismos 3.23-3.24:

> 3.23 O postulado da possibilidade dos sinais simples é o postulado do caráter determinado do sentido.
>
> 3.24 A proposição que trata do complexo está em relação interna com a proposição que trata da parte do constituinte desse complexo.
> O complexo só pode ser dado por meio de sua descrição e ela será ou não conforme. A proposição em que se fala de um complexo será, caso ele não exista, não um contra-senso, mas simplesmente falsa.
>
> 3.25 Há uma e apenas uma análise completa da proposição.

Esta é a reformulação da teoria de descrições de Russell, que no *Tractatus* torna-se a tese de que o sentido de uma proposição não deve depender da verdade de qualquer proposição (incluindo ela própria) e que a possibilidade de compreender uma proposição não pode depender da verdade de qualquer proposição. Novamente temos a questão acerca de como essa 'dependência' deve ser compreendida. Como dito anteriormente essa 'dependência' não pode ter qualquer conotação psicológica (digamos, relativa às condições psicológicas ou de conhecimento do falante para asserir a proposição). Não deve ser possível, *logicamente* possível, que uma proposição possa 'perder' ou 'ganhar' seu sentido em função da verdade ou falsidade de qualquer proposição: ou seja, o sentido é independente da verdade ou falsidade de qualquer proposição. Como vimos, em 3.23 a explicação do caráter determinado do sentido se dá em termos da existência de "sinais simples". Esses são os nomes para os objetos tractarianos que, de acordo com 2.02-2.0271, formam a "substância do mundo". Nesses aforismos encontramos a negação explícita da possibilidade de que o sentido de uma proposição "dependa" da verdade de outra. A possibilidade desta "dependência" é negada com base na ideia de que que o mundo deve ter substância, isto é, deve haver sinais simples cujo significado são objetos *não complexos* que não poderiam não existir:

> 2.0201 Todo enunciado sobre complexos pode-se decompor em um enunciado sobre as partes constituintes desses complexos e nas proposições que os descrevem completamente.
> 2.021 Os objetos constituem a substância do mundo. Por isso não podem ser compostos.
> 2.0211 Se o mundo não tivesse substância, ter ou não sentido uma proposição dependeria de ser ou não verdadeira uma outra proposição.
> 2.0212 Seria então impossível traçar uma figuração do mundo (verdadeira ou falsa).

De acordo com Wittgenstein a ideia de que uma proposição 'mostra seu sentido' está relacionada com uma concepção do sentido proposicional como uma descrição completa da situação que existe caso a proposição seja verdadeira. Esta 'completude da descrição' consiste na possibilidade de analisar completamente a proposição em seus constituintes mais simples.

Mas o que tudo isso tem a ver com a decidibilidade da lógica? O que acontece é que essa concepção do sentido proposicional compromete Wittgenstein com uma concepção bastante radical (e insustentável) de análise. Seguindo a sugestão de Potter e White de que a demanda pela decidíbilidade da lógica é fundamentada em 4.024, ou seja, na ideia de que a proposição *exibe* de maneira exaustiva suas condições de verdade, concluímos que essa concepção radical de análise é a origem da idéia de que deve haver uma notação perspícua que permita "reconhecer a verdade apenas no símbolo".

No aforismo 3.25, Wittgenstein afirma que "Há uma e apenas uma análise completa da proposição."; na sequência, em 3.251, ele afirma que "A proposição exprime de uma maneira determinada, *claramente especificável*, o que ela exprime". É uma consequência dessa concepção de análise que uma proposição completamente analisada expressa em uma notação perspícua irá admitir inspeção imediata, isto é: uma vez que entendemos a proposição e a tenhamos analisado, *devemos* saber se a proposição é uma tautologia, uma contradição ou uma proposição com sentido. Caso contrário, teríamos de aceitar o seguinte conjunto inconsistente de teses:

1. A proposição expressa o que ela expressa de uma forma determinada e
2. Isto pode ser especificado claramente, e
3. Podemos entender claramente o que a proposição expressa, ou seja, podemos compreender claramente as suas condições de verdade, mas, apesar disso, podemos não entender se a proposição é uma tautologia, uma contradição ou uma proposição com sentido.

Podemos tomar como evidência adicional para a alegação de que Wittgenstein fez esta conexão entre analisabilidade e decidibilidade a seguinte observação da *Gramática Filosófica*:

> If you want to use the appellation "elementary proposition" as I did in the *Tractatus,* and as Russell used "atomic proposition," you may call the sentence "Here there is a red rose" an elementary proposition. That is to say, it doesn't contain a truth-function and it isn't defined by an expression which contains one. But if we're to say that a proposition isn't an elementary proposition unless its complete logical analysis shows that it isn't built out of other propositions by truth functions, we are presupposing that we have an idea of what such an "analysis" would be. Formerly, I myself spoke of a "complete analysis," and *I used to believe that philosophy had to give a definitive dissection of propositions so as to set out clearly all their connections and remove all possibilities of misunderstanding. I spoke as if there was a calculus in which such a dissection would be possible.* I vaguely had in mind something like the definition that Russell had given for the definite article, and I used to think that in a similar way one would be able to use visual impressions etc. to define the concept say of a sphere, and thus exhibit once for all the connections between the concepts and lay bare the source of all misunderstandings, etc. At the root of all this was a false and idealized picture of the use of language. (WITTGENTEIN, L, 1974, p.211. Nossos itálicos.)

Aqui temos a conexão entre a decidibilidade da lógica e a concepção de análise do *Tractatus.* Wittgenstein afirma que a expressão de proposições na notação do cálculo deve evitar "*todas as* possibilidades de mal-entendidos". É razoável presumir que dentre as condições que devem ser satisfeitas para que "mal entendidos" sejam impossíveis é que nesse cálculo *não haja margem de ambiguidade* para a expressão das condições de verdade de qualquer proposição. Wittgenstein expressa isso afirmando que segundo o *Tractatus* deve haver uma "dissecação" de proposições que "especifica claramente todas as suas conexões". Wittgenstein está afirmando aqui que um dos requisitos para o "cálculo" em que a análise tractariana deveria ser levada a cabo é que este cálculo seja decidível. No caso de proposições que não contêm quantificadores isso é concedido, pois existem vários procedimentos de decisão para a lógica proposicional - o que Wittgenstein não poderia ter previsto é que, no caso de quantificação sobre domínios infinitos, isso não é possível.

Uma vez que admitimos a possibilidade de operar sobre conjuntos infinitos de proposições elementares não temos mais a garantia de que poderemos reconhecer a "verdade apenas no símbolo"(6.113) no sentido forte em que Wittgenstein gostaria. Isso, no entanto, não mostra que a tese de construbilidade é falsa, mas sim que ao admitirmos quantificação sobre domínios infinitos devemos negar a tese segundo a qual ao compreendermos uma proposição completamente analisada expressa em uma notação perspícua deveremos saber imediatamente se essa proposição é uma tautologia, contradição ou uma proposição com sentido. A não decibilidade do cálculo de predicados mostra que a concepção tractariana, da, digamos, 'pureza cristalina' do sentido proposicional não pode ser completamente generalizada.

§6 Conclusão do Capítulo

Nesse capítulo procuramos estabelecer o seguinte:

A correspondência de Wittgensein com Russell acerca da definição adequada da noção de tautologia, bem como a evidência textual presente nas *Notes on Logic* deixa claro que no período de 1913 Wittgensein estava comprometido com a decibilidade como uma característica fundamental das proposições da Lógica.

Contra Burton Dreben e Juliet Floyd, a mudança terminlógica marcada pelos termos "mostrar" e "ver" presente nas *Notas a Moore* de abril de 1914 não marcam uma mudança de posição, mas apenas um refinamento das ideias presentes nas cartas e *Notes on Logic.*

No *Tractatus,* a decibilidade da lógica (*toda a lógica*) é postulada.

O modo como Fogelin apresenta o problema sobre a relação entre a capacidade expressiva do operador N e a decibilidade da lógica, a saber, em termos de um dilema é equivocado, dado que, *uma vez admitido que a lógica do Tractatus deve ser decidível*, a leitura correta (e mais interessante) é concluir que Wittgensein adotou posições inconsistentes.

A tese de que toda função de verdade pode ser gerada a partir de proposições elementares com um número finito de aplicações sucessivas do operador N é independente de a lógica ser decidível ou não, embora seja possível que Wittgenstein não se tenha dado conta dessa independência ou ainda tenha tido razões para supor que elas não sejam independentes.

A razão para o comprometimento de Wittgenstein com a decidibilidade da lógica pode ser encontrada na radical concepção de análise do *Tractatus* segundo a qual a proposição descreve a realidade completamente, *mostra* suas condições de verdade e que, em certo sentido, estas devem ser transparentes[66].

66 O uso da expressão "transparência" do sinal proposicional nesse sentido e nesse contexto se deve a METHVEN, 2015, pp.212-13.

Referências:

ALTMANN, S. *A Lógica e Sua Aplicação.* Dissertação de Mestrado não publicada, 1998.

ANSCOMBE, G.E.M. *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus.* Oxford: Thoemmes Press, 1971.

BEANEY, M (ed.). *The Frege Reader.* Oxford: Blackwell, 1997.

CARROLL, L. *Alice in Wonderland & Alice Through The Look Glass.* New York, Barnes & Noble, 2015.

CHURCH, A. *A Note on the Entscheidungsproblem.* In: DAVIS, M. (ed.) *The Undecidable*: *Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* Nova York: Dover Publications, 1993, pp.108-114.

CUTER, J.V.G. *Operations and Truth-Operations in the Tractatus. Philosophical Investigations,* Oxford, volume 1, nº28, 2005, pp.63-75.

CUTER, J.V.G. *A Lógica do Tractatus.* In: *Manuscrito,* volume 1, nº25, pp.87-120.

DAVIS, M. (ed.) *The Undecidable*: *Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* Nova York: Dover Publications, 1993.

DREBEN, B. e FLOYD, J. *Tautology: How Not to Use a Word.* In: *Synthese* nº87,1991, pp.23-49

FLOYD, J. *Numbers and Ascriptions of Number in the Tractatus.* In: RECK, R. (ed). *From Frege to Wittgenstein: Perspectives on Early Analytic Philosophy.* Oxford: Oxford University Press, 2002, pp.308-352.

FOGELIN, R. *Wittgenstein.* Segunda edição. Londres: Routledge, 1987.

FOGELIN, R. *Wittgenstein's N Operator. Analysis,* Oxford, volume 4, nº42, 1982, pp.124-7.

GEACH, P.T. *Wittgenstein's N Operator. Analysis,* Oxford, volume 4, nº41, 1981, pp.168-171.

GEACH, P.T. *More Wittgenstein's N Operator. Analysis,* Oxford, volume 4, nº42, 1982, pp.127-8.

HYLTON, P. *Functions, Operations and Sense in Wittgenstein's Tractatus.* In: HYLTON, P. *Propositions, Functions, and Analysis. Selected Essays on Russell's Philosophy.* Oxford: Clarendon Press, 2004, pp.138-152.

KLEENE, S. *Mathematical Logic.* Nova York: Dover Publications, 1967.

KLEENE, S. *Introduction to Metamathematics.* Princeton: van Nostrand, 1952.

LANDINI, G. *Wittgenstein's Apprenticeship With Russell.*Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

MARION, M. *Wittgenstein, Finitism and The Foundations of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 1998.

MARION, M. *Introdução ao Tractatus.* Tradução de Bendo Prado Neto. São Paulo: Annablume, 2012.

McGRAY, J. *The Power and Limits of Wittgenstein's N operator.* In:*History and Philosophy of Logic,* volume volume 2, nº27, 2006, pp.143-169.

McGUINNESS, B. *Approaches to Wittgenstein: Collected Papers.* Londres: Routledge, 2002.

McGUINNESS, B. *The Grundgedanke of the Tractatus.* In: McGUINNESS, B. *Approaches to Wittgenstein: Collected Papers.* Londres: Routledge, 2002, pp.103-115.

McGUINNESS, B. *Wittgenstein in Cambridge: Letters and Documents 1911-1951.* Oxford: Blacwell, 2008.

METHVEN, S.J. *Frank Ramsey and theRealistic Spirit*. New York: Palgrave Macmillan, 2015.

MILLER, H. *Tractarian Semantics for Predicate Logic.* In: *History and Philosophy of Logic,* volume volume 2, nº16, 1995, pp.197-215.

MORRIS, M. *Routledge Guidebook to Wittgenstein's Tractatus.* Nova York: Routledge, 2008.

POTTER, M. *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic From Kant to Carnap.*Oxford: Oxford University Press, 1999.

POTTER, M. *Wittgenstein's Notes on Logic.* Oxford: Oxford University Press, 2009.

POTTER, M. & SULLIVAN, P.(eds). *Wittgenstein's Tractatus: History and Interpretaion.* Oxford: Oxford University Press, 2013.

QUINE, W.V.O. *Mathematical Logic.* Londres: Harvard University Press, 1940.

QUINE, W.V.O. *Methods of Logic.* Londres: Harvard University Press, 1950.

RICKETTS, T. "Logical Segmentation and Generality in Wittgenstein's *Tractatus".* In: POTTER, M. & SULLIVAN, P.(eds). *Wittgenstein's Tractatus: History and Interpretaion.* Oxford: Oxford University Press, 2013.

ROGERS, B. & WEHMEIER, K. *Tractarian First Order Logic: Identity and the N-Operator.*

In: *The Review of Symbolic Logic,* volume V, nº4, 2012, pp.538-573.

RUSSELL, B. *"On Denoting".* In: D. Lackey (ed). *Essays in Analysis by Bertrand Russell.* New York: Braziller, 1973, pp. 103-119.

RUSSELL, B. E WHITEHEAD, A.N. *Principia Mathematica.* Volumes 1,2,3. Cambridge: Cambridge University Press, 1910, 1912,1913.

SHEFFER, H. *A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras With Application to Logical Constants.* In: *Transactions of The American Mathematical Society,* nº14, 1913, pp.448-481.

SOAMES, S. *Generality, Truth Functions and Expressive Capacity in the Tractatus. The Philosophical Review,* volume XCII, nº4, 1983, pp.573-89.

SUNDHOLM, G. *The General Form of an Operation in Wittgenstein's Tractatus.*In: Grazer Philsophische Studien, nº42, 1992, pp.57-76.

SULLIVAN, P. *The General Form of a Proposition is a Variable (Tractatus 4.53).* In: *Mind,* volume 113, nº449, 2005, pp.43-56.

TURING, A. On Computable Functions With an Application to the *Entscheidungsproblem*. In: DAVIS, M. (ed.) *The Undecidable*: *Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* Nova York: Dover Publications, 1993, pp.115-153.

van HEIJENOORT, J (ed.). *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Cambridge: Harvard University Press, 1967.

WHITE, R. *Wittgenstein's Tractatus: A Reader's Guide.* Londres: Continuum.

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus.* Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1993.

WITTGENSTEIN, L. *Philosophical Grammar.* Editado por Rhees, R. Tradução de Kenny, A. Berkeley: University of California Press, 1974.

WITTGENSTEIN, L. *Notebooks 1914-1916*. Editado por G.H. Von Wright e G.E.M. Anscombe. Tradução de G.E.M. Anscombe. 2ª edição. Oxford: Chicago University Press, 1979.