

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DA LIGAÇÃO LAJE-PILAR  
INTERNO SOB PUNÇÃO DE ACORDO COM A NBR-  
6118:2014**

**GUSTAVO RIBEIRO DA SILVA**

PORTO ALEGRE  
2017

GUSTAVO RIBEIRO DA SILVA

**ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DA LIGAÇÃO LAJE-PILAR  
INTERNO SOB PUNÇÃO DE ACORDO COM A NBR-  
6118:2014**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

PORTO ALEGRE  
2017

### CIP - Catalogação na Publicação

Silva, Gustavo Ribeiro da  
ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DA LIGAÇÃO LAJE-PILAR  
INTERNO SOB PUNÇÃO DE ACORDO COM A NBR 6118:2014 /  
Gustavo Ribeiro da Silva. -- 2017.  
174 f.

Orientador: Américo Campos Filho.  
Coorientador: Mauro de Vasconcellos Real.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-  
RS, 2017.

1. Confiabilidade estrutural. 2. Punção em lajes.  
3. Lajes lisas. 4. NBR 6118:2014. 5. ANSYS. I.  
Campos Filho, Américo, orient. II. Real, Mauro de  
Vasconcellos, coorient. III. Título.

**GUSTAVO RIBEIRO DA SILVA**

**ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DA LIGAÇÃO LAJE-PILAR  
INTERNO SOB PUNÇÃO DE ACORDO COM A NBR-  
6118:2014**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 31 de março de 2017

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade  
de São Paulo  
orientador

Prof. Mauro de Vasconcellos Real  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul  
coorientador

Prof. Carlos Torres Formoso  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Charlei Marcelo Paliga (UFPel)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Ruy Carlos Ramos de Menezes (UFRGS)**  
Dr. techn pela Universität Innsbruck

**Prof.<sup>a</sup> Virgínia Maria Rosito d'Avila Bessa (UFRGS)**  
Dr.<sup>a</sup> pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho aos meus pais, Zélio e Iria (*in memoriam*), e a duas pessoas especiais em minha vida, Rozimari e Ana, pelo amor e compreensão durante o período de seu desenvolvimento.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Prof. Américo Campos Filho, pela experiência transmitida e pela orientação ao longo deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Mauro de Vasconcellos Real, pela orientação, disponibilidade e por ser um exemplo de profissional.

Agradeço a toda minha família, principalmente aos meus pais Zélio e Iria (*in memoriam*) e aos meus irmãos Rozimari e Roselir, pela constante motivação, orientação, amor e apoio durante todos os momentos da minha vida.

Agradeço a família Mosená pelo carinho e apoio desde o primeiro momento que os conheci.

Agradeço a Ana Cristina pelo amor, amizade, companheirismo e dedicação em todos os momentos que passamos juntos.

Agradeço também aos meus colegas de mestrado pelos constantes compartilhamento de conhecimentos e aos meus amigos pela força, motivação e por proporcionarem momentos únicos na minha vida.

Agradeço ao PPGE e a Escola de Engenharia da UFRGS, por fornecer estrutura e os recursos necessários para minha formação.

Agradeço à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo suporte financeiro que permitiu a realização deste trabalho.

Nossos verdadeiros desejos sempre se transformam em  
realidade.

*Paulo Coelho*

## RESUMO

SILVA, G. R. **Análise da confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob punção de acordo com a NBR-6118:2014**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

As demandas do mercado da construção civil têm exigido vãos cada vez maiores e ao mesmo tempo alturas cada vez menores das vigas. Isto tem levado muitos projetistas à adoção da solução do pavimento em laje lisa em concreto armado ou protendido. No entanto, a ausência das vigas torna possível a ruptura das lajes por puncionamento junto aos pilares. A norma NBR-6118:2014 prescreve as disposições para o projeto de lajes sob punção. O trabalho proposto teve como objetivo principal a análise da confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob o efeito da punção em lajes que se apoiam diretamente sobre pilares de acordo com a NBR-6118:2014. Primeiramente, com o intuito de se entender melhor o fenômeno da punção, realizou-se uma breve revisão bibliográfica, identificando os principais parâmetros que influenciam na resistência da ligação, assim como os principais métodos de análise e trabalhos realizados na área. Em seguida, estudou-se o software de análise em elementos finitos ANSYS (*Analysis Systems Incorporated*), especificamente a ferramenta UPF (*User Programmable Features*), que foi utilizada para adoção de um modelo constitutivo para o concreto. Utilizando o software, foram modeladas lajes estudadas por outros autores, visando a validação do modelo numérico. Para o estudo da confiabilidade foi dimensionado um conjunto de lajes lisas seguindo as prescrições da NBR 6118:2014. A análise da confiabilidade foi realizada utilizando a ferramenta PDS (*Probabilistic Design System*), empregando o método de simulação numérica de Monte Carlo com amostragem por Latin Hypercube. Por fim, determinou-se o índice de confiabilidade em cada projeto e realizaram-se análises paramétricas com as variáveis adotadas no trabalho. Os resultados obtidos mostraram que as lajes lisas sem armadura de cisalhamento projetadas segundo a NBR 6118:2014 obtiveram, em sua maioria, índices de confiabilidade adequados. Porém, para as lajes lisas com armadura de cisalhamento, o índice de confiabilidade foi, em grande parte, menor que o índice de confiabilidade alvo adotado.

**Palavras-chave:** ANSYS, confiabilidade estrutural, lajes lisas, punção.



## ABSTRACT

SILVA, G. R. **Reliability analysis of the slab-column intersection under punching according to NBR 6118:2014**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The demands of the construction market have required increasingly large spans while diminishing of the beam heights. This has led many designers to adopt the pavement solution of reinforced or prestressed concrete flat slab. However, the absence of the beams makes it possible to slabs failure by punching shear. The Standard NBR-6118: 2014 prescribes the requirements for the design of slabs under punching. The aim of this work was to analyze the reliability of the internal slab-column intersection under punching in slabs supported directly on columns according to NBR-6118: 2014. Firstly, in order to better understand the punching phenomenon, a brief bibliographic review was carried out, identifying the main parameters that influence the connection strength, as well as the main methods of analysis and published in the area. Then, the finite element analysis software ANSYS (Analysis Systems Incorporated), specifically the UPF (User Programmable Features) tool, was used to adopt a concrete constitutive model. Using the software, slabs studied by other authors were modeled, aiming at the validation of the numerical model. For the reliability study, a set of flat slabs was designed following the requirements of NBR 6118: 2014. The reliability analysis was performed using the PDS (Probabilistic Design System) tool, using the Monte Carlo numerical simulation method with Latin Hypercube sampling. Finally, the reliability index was determined in each project and parametric analyzes were performed with the variables adopted in the study. The results from this study show that the flat slabs without shear reinforcement designed according to NBR Standards obtained appropriate reliability index. However, for the flat slabs with shear reinforcement, the reliability index, in most cases, did not achieve the target reliability index.

**Key-words:** ANSYS, structural reliability, flat slabs, punching.

## LISTA DE SIGLAS

ANSYS – *Analysis Systems Incorporated*  
APDL – *ANSYS Parametric Design language*  
BISO – *Bilinear Isotropic Hardening*  
FDA – Função Distribuição Acumulada  
FDP – Função Densidade de Probabilidade  
*fib* – *Fédération Internationale du Béton*  
MEF – Método dos Elementos Finitos  
PDS – *Probabilistic Design System*  
PEA – Processo Elástico Aproximado  
PPGEC - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
UPF – *User Programmable Features*

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$A_s$  : área da seção transversal das armaduras de flexão tracionadas  
 $A_{sw}$  : área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a  $C'$   
 $C$  : superfície crítica do pilar  
 $C'$  : superfície crítica afastada de  $2d$  do pilar  
 $C''$  : superfície crítica analisada quando há armadura de cisalhamento  
 $C1'$  : dimensão do pilar paralela à excentricidade da força  
 $C2'$  : dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força  
 $D$  : diâmetro do pilar  
 $E_c$  : módulo de elasticidade do concreto  
 $E_s$  : módulo de elasticidade do aço

$E_t$	: módulo de endurecimento
$E[X]$	: valor esperado
$F_a$	: vetor de carga aplicada
$F_i^{nr}$	: vetor correspondente às cargas internas de elementos
$F_{Sd}$	: força ou a reação concentrada de cálculo
$K$	: coeficiente que fornece a parcela de $M_{Sd}$ transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação C1/C2;
$K_i^T$	: matriz de rigidez tangente
$M_{Sd}$	: momento de cálculo transmitido da laje para o pilar
$P_f$	: probabilidade de falha
$R_{pilar}$	: reação do pilar na região estudada da laje obtida por análise linear via simulação
$R$	: resistência máxima do sistema
$S$	: solitação devido às ações do carregamento
$Var[X]$	: variância
$V_h$	: coeficiente de variação da altura da laje
$V_{fc}$	: coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto
$V_{fy}$	: coeficiente de variação da resistência ao escoamento do aço
$V_q$	: coeficiente de variação da carga variável
$W_p$	: módulo de resistência plástica do perímetro crítico em questão.

#### LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$d$	: altura útil da laje
$dl$	: comprimento infinitesimal no perímetro crítico $u$ ;
$e$	: distância de $dl$ ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento fletor $M_{Sd}$ .
$f_c$	: resistência à compressão do concreto

$f_{cd}$	: resistência à compressão de cálculo do concreto
$f_{ck}$	: resistência característica à compressão do concreto, em MPa
$f_{ct}$	: resistência do concreto à tração
$f_{ctm}$	: resistência média do concreto à tração
$f_{rupt}$	: carga de ruptura da laje obtida por análise não linear via simulação
$f_{yk}$	: resistência característica ao escoamento da armadura
$f_y$	: tensão de escoamento do aço
$f_{ywd}$	: resistência de cálculo da armadura de punção
$g_k$	: valor característico das ações permanentes
$h$	: altura da laje
$q_k$	: valor característico das ações variáveis
$s_r$	: espaçamento radial entre linhas de armadura de punção
$u^*$	: perímetro crítico reduzido
$u_0$	: perímetro do pilar
$u_1$	: perímetro de controle básico

## LETRAS GREGAS

$\alpha$	: ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje
$\alpha_c$	: fator de fragilidade do concreto
$\alpha_e$	: parâmetro que depende do tipo de agregado utilizado
$\beta$	: índice de confiabilidade
$\mu_{fy}$	: valor esperado da resistência ao escoamento do aço
$\mu_h$	: valor esperado da altura da laje
$\mu_g$	: valor esperado do carregamento permanente
$\mu_M$	: valor esperado da margem de segurança
$\mu_q$	: valor esperado do carregamento variável

$\mu_R$	: valor esperado da função de variável aleatória da resistência
$\mu_S$	: valor esperado da função de variável aleatória da solicitação
$\rho$	: taxa média de armadura de flexão tracionada
$\rho_{cct}$	: coeficiente de correlação entre a resistência à compressão do concreto e a resistência à tração do concreto
$\rho_{ce}$	: coeficiente de correlação entre a resistência à compressão do concreto e o módulo de elasticidade do concreto
$\rho_{cte}$	: coeficiente de correlação entre a resistência à tração do concreto e o módulo de elasticidade
$\sigma_0$	: tensão de escoamento inicial
$\sigma_1$	: tensão principal de tração
$\sigma_{cp}$	: tensão inicial no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devida à protensão simultânea de n cabos
$\sigma_M$	: desvio padrão da margem de segurança
$\sigma_R$	: desvio padrão da resistência
$\sigma_S$	: desvio padrão da solicitação
$\tau_{sd}$	: tensão de cisalhamento solicitante de cálculo

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - a) Desenho esquemático de uma laje cogumelo; b) Desenho esquemático de uma laje lisa .....	24
Figura 2.1 - Modelo do fenômeno da punção em lajes lisa (Adaptado de HALVONIK e FILLO,2013).....	28
Figura 2.2 – Ruína por punção em laje lisa .....	28
Figura 2.3 – Regiões de ruptura em lajes lisas com armadura de cisalhamento (adaptado de Ferreira, 2010) .....	29
Figura 2.4 – Modelo de Alexander e Simmonds (PINTO, 1993) .....	31
Figura 2.5 – Modelo mecânico de Kinnunen e Nylander (CORDOVIL, 1997) .....	32
Figura 2.6 - Rotação do elemento rígido (CORDOVIL, 1997).....	33
Figura 2.7 - Tipos de armadura de cisalhamento para lajes lisas (FERREIRA, 2010) .....	36
Figura 2.8 – Perímetro crítico em pilares internos .....	40
Figura 2.9 – Perímetro crítico em pilares de borda .....	41
Figura 2.10 – Perímetro crítico em pilares de canto.....	41
Figura 2.11 – Perímetros críticos em lajes cogumelo. $d$ é a altura útil da laje no contorno $C'_{2}$ ; $d_c$ é a altura útil da laje na face do pilar; $d_a$ é a altura útil da laje no contorno $C'_{1}$ ; $l_c$ é a distância entre a borda do capitel e a face do pilar. ....	42
Figura 2.12-Perímetro crítico junto à abertura na laje.....	43
Figura 3.1 – Elemento SOLID186 ( Adaptado de ANSYS, 2013a).....	51
Figura 3.2 – Elemento REINF264 utilizado com SOLID186 (Adaptado de ANSYS,2013a) .	52
Figura 3.3 – Seções transversais da superfície de ruptura nos planos desviadores (LAZZARI, 2016) .....	53
Figura 3.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido (Adaptado de fib 2010, 2012) .....	54
Figura 3.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (LAZZARI, 2016).....	55
Figura 3.6 – Modelo elastoplástico perfeito (LAZZARI,2016) .....	56
Figura 3.7 – Modelo elastoplástico com endurecimento linear (LAZZARI, 2016) .....	56
Figura 4.1 – Diagrama carga deslocamento no centro da laje 1 .....	58

Figura 4.2 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje L1 .....	59
Figura 4.3 – Diagrama carga deslocamento laje M1 .....	60
Figura 4.4 – Diagrama carga deslocamento da laje L1 .....	61
Figura 4.5 – Diagrama carga deslocamento da laje LS05 .....	62
Figura 4.6 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje L0-01 .....	63
Figura 4.7 – Razão entre as cargas de ruptura experimental e numérica das lajes lisas sem armadura de cisalhamento .....	64
Figura 4.8 – Esquema de distribuição radial da armadura de cisalhamento da lajes 1,4 e 9 (TRAUTWEIN, 2001) .....	65
Figura 4.9 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje 1 .....	65
Figura 4.10 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje 4 .....	66
Figura 4.11 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje 9 .....	66
Figura 4.12 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje E1 .....	67
Figura 4.13 – Distribuição dos studs da laje LS01 (FERREIRA, 2010) .....	68
Figura 4.14 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje LS01 .....	68
Figura 4.15 – Razão entre as cargas de ruptura experimental e numérica das lajes lisas com armadura de cisalhamento .....	69
Figura 5.1 – Função de densidade de probabilidade de R e S (PALIGA, 2008).....	74
Figura 5.2 - Fluxograma do funcionamento do método de Monte Carlo (REAL, 2000).....	76
Figura 5.3 – Distribuição da margem de segurança (PALIGA, 2008) .....	77
Figura 5.4 – Fluxograma do funcionamento da ferramenta PDS (Adaptado de ANSYS, 2013b) .....	79
Figura 5.5 – Arquivo de comando resumido utilizado em uma análise de probabilidade .....	80
Figura 5.6 – Método da transformada inversa (adaptado de HALDAR, 2000) .....	81
Figura 5.7 – Divisão da função distribuição acumulada .....	82
Figura 6.1 - Perspectiva e planta baixa da laje lisa sem armadura de cisalhamento estudada .	84
Figura 6.2 – Planta baixa da laje lisa com armadura de cisalhamento .....	84
Figura 6.3 - Região da laje modelada .....	85
Figura 6.4 – Definição dos pórticos para o cálculo pelo PEA.....	86

Figura 6.5 – Definição das faixas externas e internas das lajes (Adaptado de NBR-6118,2014)	87
Figura 6.6 – Pórtico utilizado para obtenção dos esforços pelo PEA para laje L030224	88
Figura 6.7 – Linhas para o cálculo do momento fletor pelo MEF	89
Figura 6.8 – Diagrama dos momentos fletores referente às linhas analisadas pelo MEF	89
Figura 6.9 – Diagrama da média dos momentos fletores	90
Figura 6.10 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por quatro camadas de studs	91
Figura 6.11 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por cinco camadas de studs	92
Figura 6.12 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por seis camadas de studs	92
Figura 6.13 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por sete camadas de studs	93
Figura 6.14 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por oito camadas de studs	93
Figura 6.15 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por nove camadas de studs	94
Figura 6.16 – FDP Lognormal obtida para representar a FDP Gumbel	98
Figura 6.17 – Convergência estatística do valor esperado da carga de ruptura	100
Figura 6.18 – Convergência estatística do desvio padrão da carga de ruptura	100
Figura 6.19 – Convergência estatística do valor esperado da solicitação	101
Figura 6.20 – Convergência estatística do desvio padrão da solicitação	101
Figura 6.21 – Distribuição de probabilidade de Burr para a carga de ruptura da laje L030620	102
Figura 6.22 – Distribuição de probabilidade Gumbel máximo para a solicitação na laje L030620	103
Figura 6.23 – FDP da resistência e da solicitação da laje L030620	103
Figura 7.1 - Análise do índice de confiabilidade para lajes com carregamento acidental de 2 kN/m <sup>2</sup>	108
Figura 7.2 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 4 kN/m <sup>2</sup>	109



Figura 7.3 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 6 kN/m <sup>2</sup> .....	109
Figura 7.4 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 16 cm.....	110
Figura 7.5 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 20 cm.....	111
Figura 7.6 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 24 cm.....	111
Figura 7.7 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 2 kN/m <sup>2</sup> .....	112
Figura 7.8 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 4 kN/m <sup>2</sup> .....	113
Figura 7.9 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 6 kN/m <sup>2</sup> .....	113
Figura 7.10 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=30 MPa.....	114
Figura 7.11 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=60 MPa.....	115
Figura 7.12 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=90 MPa.....	115
Figura 7.13 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 16 cm .....	116
Figura 7.14 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 20 cm.....	117
Figura 7.15 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 24 cm.....	117
Figura 7.16 Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=30 MPa.....	118
Figura 7.17 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=60 MPa.....	119
Figura 7.18 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=90 MPa.....	119
Figura 8.1 - Análise do índice de confiabilidade para lajes com carregamento acidental de 2 kN/m <sup>2</sup> .....	120
Figura 8.2 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 4 kN/m <sup>2</sup> .....	121
Figura 8.3 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 6 kN/m <sup>2</sup> .....	121
Figura 8.4 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 16 cm.....	122
Figura 8.5 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 20 cm.....	123
Figura 8.6 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 24 cm.....	123
Figura 8.7 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 2 kN/m <sup>2</sup> .....	124

Figura 8.8 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 4 kN/m <sup>2</sup> .....	125
Figura 8.9 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 6 kN/m <sup>2</sup> .....	125
Figura 8.10 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=30 MPa.....	126
Figura 8.11 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=60 MPa.....	127
Figura 8.12 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=90 MPa.....	127
Figura 8.13 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 16 cm .....	128
Figura 8.14 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 20 cm.....	129
Figura 8.15 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 24 cm.....	129
Figura 8.16 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=30 MPa.....	130
Figura 8.17 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=60 MPa.....	131
Figura 8.18 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com fck=90 MPa.....	131
Figura 9.1 – FDP da solicitação composta pela carga variável de 2 kN/m <sup>2</sup> e 4 kN/m <sup>2</sup> .....	133
Figura 9.2 – Região ampliada da FDP da solicitação para a carga variável de 4 kN/m <sup>2</sup> .....	133

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 2.1- Valores de K (NBR 6118:2014).....	44
Tabela 6.1 - Índice de confiabilidade das lajes lisas sem armadura de cisalhamento .....	105
Tabela 6.2 – Índice de confiabilidade das lajes lisas com armadura de cisalhamento .....	106
Tabela 6.3 – Índice de confiabilidade alvo.....	107

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>24</b>
1.1 OBJETIVOS.....	26
1.2 METODOLOGIA .....	26
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>27</b>
2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	27
2.2 PUNÇÃO .....	27
2.3 MODELOS DE DIMENSIONAMENTO .....	29
2.3.1 Método da superfície de controle.....	29
2.3.2 Método das bielas e tirantes .....	30
2.3.3 Modelos mecânicos .....	31
2.4 PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM NA RESISTÊNCIA AO PUNÇONAMENTO .....	33
Resistência do concreto à tração .....	33
2.4.1 Taxa de armadura de flexão .....	34
2.4.2 Dimensões, formato e posição do pilar.....	34
2.4.3 Size effect – efeito escala.....	34
2.4.4 Altura útil da laje.....	35
2.4.5 Armaduras de cisalhamento .....	35
2.4.6 Furos e descontinuidades da laje.....	37
2.5 TRABALHOS E PESQUISAS REALIZADOS.....	37
2.5.1 Pesquisas internacionais.....	37
2.5.2 Pesquisas nacionais .....	38
2.6 PRESCRIÇÕES NORMATIVAS.....	39
2.6.1 Critérios da Norma brasileira NBR 6118:2014 .....	39
2.6.2 Superfícies críticas .....	40

2.6.3 Definição da tensão solicitante nas superfícies críticas C e C' .....	43
2.6.4 Definição da tensão resistente nas superfícies críticas C, C' e C'' .....	47
<b>3 MODELAGEM COMPUTACIONAL .....</b>	<b>50</b>
3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	50
3.2 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS .....	50
3.2.1 SOLID186 .....	50
3.2.2 REINF264 .....	51
3.3 MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO .....	52
3.3.1 Modelo para o concreto comprimido .....	53
3.3.2 Modelo para o concreto tracionado .....	54
3.4 MODELO CONSTITUTIVO DO AÇO .....	55
3.5 ANÁLISE NÃO-LINEAR .....	57
<b>4 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO .....</b>	<b>58</b>
4.1 LAJES SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO .....	58
4.1.1 Lajes de Gomes (1991) .....	58
4.1.2 Lajes de Coelho (1999) .....	59
4.1.3 Lajes de Melges (2001) .....	60
4.1.4 Lajes de Musse (2004) .....	60
4.1.5 Lajes de Ferreira (2010) .....	61
4.1.6 Lajes de Lima (2012) .....	62
4.1.7 Cargas de ruptura .....	63
4.2 LAJES COM ARMADURA DE CISALHAMENTO .....	64
4.2.1 Lajes de Trautwein (2001) .....	64
4.2.2 Laje de Trautwein (2006) .....	66
4.2.3 Lajes de Ferreira (2010) .....	67
4.2.4 Cargas de ruptura .....	69
<b>5 ANÁLISE DA CONFIABILIDADE .....</b>	<b>70</b>

5.1 PROBLEMA BÁSICO DA CONFIABILIDADE .....	70
5.2 MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE.....	73
5.2.1 Método da integração numérica .....	73
5.2.2 Métodos de aproximação numérica .....	74
5.2.3 Métodos de simulação – Método de Monte Carlo .....	75
5.3 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE $\beta$ .....	77
5.4 FERRAMENTA DE ANÁLISE DE PROBABILIDADE DO ANSYS .....	78
5.4.1 Funcionamento da ferramenta PDS .....	79
5.4.2 Distribuições de probabilidade.....	81
5.4.3 Monte Carlo e o Método da transformada inversa.....	81
5.4.4 Método de Monte Carlo com amostragem de Latin Hypercube.....	82
<b>6 ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DO MÉTODO DE PROJETO DE LAJES SOB PUNÇÃO DE ACORDO COM A NBR-6118:2014.....</b>	<b>83</b>
6.1 CARACTERÍSTICAS DAS LAJES.....	83
6.2 DIMENSIONAMENTO CONFORME A NBR 6118:2014 .....	85
6.2.1 Cálculo dos esforços pelo Processo elástico aproximado (PEA) .....	86
6.2.2 Cálculo dos esforços pelo Método dos Elemento Finitos (MEF) .....	88
6.2.3 Armadura de flexão, colapso progressivo e cisalhamento.....	90
6.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONSIDERADAS .....	94
6.3.1 Propriedades mecânicas do concreto .....	95
6.3.2 Resistência ao escoamento da armadura ( $f_y$ ) .....	96
6.3.3 Altura da laje (h) .....	96
6.3.4 Distância do centro da armadura superior até a borda superior da seção ( $d'$ ) .....	96
6.3.5 Carregamento permanente (g).....	96
6.3.6 Carregamento variável (q).....	97
6.4 FUNÇÃO ESTADO LIMITE.....	98
6.5 ANÁLISE PROBABILÍSTICA .....	99

6.6 CÁLCULO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE $\beta$ .....	104
6.7 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE ALVO .....	107
<b>7 ANÁLISE PARAMÉTRICA DAS LAJES LISAS SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO .....</b>	<b>108</b>
7.1 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO .....	108
7.1.1 Análise em relação à altura da laje.....	108
7.1.2 Análise em relação ao carregamento acidental .....	110
7.2 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DA ALTURA DA LAJE .....	112
7.2.1 Análise em relação à resistência à compressão do concreto.....	112
7.2.2 Análise em relação ao carregamento acidental .....	114
7.3 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DO CARREGAMENTO ACIDENTAL .....	116
7.3.1 Análise em relação à resistência à compressão do concreto.....	116
7.3.2 Análise em relação à altura da laje.....	118
<b>8 ANÁLISE PARAMÉTRICA DAS LAJES LISAS COM ARMADURA DE CISALHAMENTO .....</b>	<b>120</b>
8.1 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO .....	120
8.1.1 Análise em relação à altura da laje.....	120
8.1.2 Análise em relação ao carregamento acidental .....	122
8.2 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DA ALTURA DA LAJE .....	124
8.2.1 Análise em relação à resistência à compressão do concreto.....	124
8.2.2 Análise em relação ao carregamento acidental .....	126
8.3 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DO CARREGAMENTO ACIDENTAL .....	128

8.3.1	Análise em relação à resistência à compressão do concreto.....	128
8.3.2	Análise em relação à altura da laje.....	130
<b>9</b>	<b>DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>132</b>
<b>10</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>136</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>138</b>
	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>142</b>
	<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>152</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A construção de lajes que se apoiam diretamente sobre pilares é uma prática muito utilizada na construção civil quando se quer dispor de vantagens como: redução do pé direito, economia de formas e concreto, facilidades nos projetos complementares, facilidade de armação e concretagem, maior ventilação e iluminação, menores prazos de execução e maior liberdade arquitetônica (SOUZA; CUNHA, 1994).

Entre as lajes que se apoiam diretamente sobre os pilares, as mais comuns são as lajes lisas e as lajes cogumelos. A Norma Brasileira NBR 6118-2014 define a laje cogumelo como sendo diretamente apoiada em pilares com capitéis; já a laje lisa é definida como apoiada diretamente sobre os pilares com ausência de capitéis (Figura 1.1).

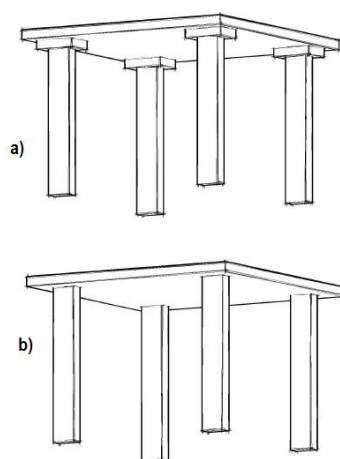


Figura 1.1 - a) Desenho esquemático de uma laje cogumelo; b) Desenho esquemático de uma laje lisa

De acordo com Araújo (2010), nos últimos anos tem-se evitado o emprego de lajes com capitéis devido às dificuldades de execução das formas. Desse modo, empregam-se com mais frequência lajes lisas, as quais são projetadas com uma espessura suficiente para garantir a sua resistência à punção e à flexão.

O uso de lajes lisas apresenta algumas desvantagens, como maiores deslocamentos verticais para um mesmo vão, aumento na espessura da laje e diminuição da estabilidade global da

estrutura. Outra dificuldade encontrada na utilização de lajes diretamente apoiadas sobre pilares diz respeito ao dimensionamento à punção.

A punção em lajes ocorre devido às reações localizadas dos pilares diretamente em uma pequena área da laje, fazendo com que as tensões sejam elevadas nessas regiões. A principal consequência dessas tensões de cisalhamento elevadas é a ruptura caracterizada pela ausência de escoamento da armadura, gerando uma ruptura frágil, sem aviso prévio. Devido a essa característica, deve-se dimensionar a estrutura para que, caso a ruína ocorra, ela não se dê por punção, mas sim por flexão (RABELLO, 2010). O dimensionamento inadequado de uma laje lisa pode causar graves acidentes como o colapso da laje ou mesmo a ruína total da estrutura.

Dessa forma, a análise da confiabilidade de projetos que apresentam o fenômeno da punção é de fundamental importância para a verificação da segurança que os atuais métodos de dimensionamento utilizados pelas Normas atingem. A teoria atual de segurança é a chamada Teoria Semi-Probabilística de Segurança (Método dos Estados Limites), que é um meio termo entre o ideal da Teoria Probabilística Pura e o já ultrapassado Método das Tensões Admissíveis. A NBR 6118:2014 utiliza esse método, onde os conceitos probabilísticos são introduzidos através dos valores característicos inferiores e dos coeficientes de minoração das resistências dos materiais utilizados, e também através dos valores característicos superiores e dos coeficientes da majoração das solicitações (PALIGA, 2008).

Apesar disso, a Teoria Semi-Probabilística de Segurança não é suficiente para que se tenha uma ideia clara a respeito do nível de segurança obtido nos projetos, visto que a segurança da estrutura depende de seu comportamento frente às ações, o que envolve uma interdependência de variáveis aleatórias (ARAÚJO, 2010). Assim, a resposta da estrutura a uma determinada configuração de carregamento é, na realidade, uma função de diversas variáveis aleatórias que afetam seu desempenho. Portanto, a própria resposta da estrutura será também uma variável aleatória. Dessa forma, deslocamentos, deformações, tensões e esforços solicitantes são variáveis aleatórias (REAL, 2000). Sendo assim, as estruturas devem ser projetadas para atender sua função com uma pequena probabilidade de falha. A probabilidade da ocorrência de falha nas estruturas é quantificada pelo estudo da confiabilidade que tem como base as teorias da probabilidade e estatística.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho apresenta como objetivo principal a avaliação da confiabilidade do método de dimensionamento da NBR-6118:2014 para lajes lisas sujeitas ao fenômeno da punção. Além disso, o mesmo apresenta como objetivo específico, a verificação da eficácia do modelo numérico adotado através da comparação entre resultados experimentais e numéricos.

## 1.2 METODOLOGIA

A análise de lajes apoiadas diretamente sobre pilares foi feita por simulação numérica usando o método dos elementos finitos a partir do software ANSYS. A mesma foi realizada utilizando um modelo 3D, não linear, implementado por Lazzari (2016) e modificado neste estudo. A validação do modelo é feita comparando os resultados de ensaios experimentais de Gomes (1991), Coelho (1999), Melges (2001), Trautwein (2001), Musse (2004), Ferreira (2010) e Lima (2012), com os resultados numéricos obtidos.

O estudo estatístico da resposta do modelo é realizado através do método de Monte Carlo. Esse método possui grande aplicação e possibilita o trabalho com funções bastante complexas. O mesmo é aplicado para algumas situações, como resolver problemas complexos e verificar resultados de outras técnicas de solução. A partir desse método é obtido um conjunto de dados da resistência e da solicitação nas lajes.

A avaliação do desempenho da estrutura foi realizada a partir dos dados obtidos nas simulações de Monte Carlo, tendo como objetivo o cálculo dos índices de confiabilidade por elas alcançados. Os resultados esperados com o trabalho são a verificação do atendimento à segurança por parte da norma NBR 6118:2014, a obtenção do nível de segurança alcançado com a metodologia empregada, além de contribuir para o uso mais eficiente e seguro desse tipo de estrutura.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo serão apresentados os conceitos sobre punção, modelos de dimensionamento, fatores que afetam o dimensionamento, pesquisas realizadas no Brasil e no exterior e as recomendações da Norma NBR 6118-2014.

### 2.2 PUNÇÃO

Punção é o estado limite último por cisalhamento no entorno de forças concentradas. Esse fenômeno pode ser caracterizado como um modo de ruptura que ocorre por cisalhamento em elementos submetidos à carga ou reação aplicada transversalmente, gerando elevadas tensões cisalhantes na região próxima ao ponto de aplicação, podendo causar a ruptura de forma abrupta e sem aviso prévio do elemento. A análise da punção é diferente daquela realizada para o estado limite último por força cortante, sendo de fundamental importância no caso de lajes que se apoiam diretamente sobre pilares (ARAÚJO, 2010).

Nas lajes lisas e cogumelo, a região típica da ruptura é na ligação laje-pilar, devido à ausência de vigas. Dessa forma, na prática, procura-se minimizar as tensões atuantes na região onde ocorrem os maiores esforços cisalhantes com o uso de capitéis, engrossamento da laje como um todo ou na região da aplicação da força, aumentando a capacidade resistente da laje através do uso de concreto de alta resistência e do uso de armaduras de punção (BARBOSA, 2012).

Segundo Halvonik e Fillo (2013), há duas possíveis formas de falha da estrutura devido à punção. A primeira é o esmagamento do concreto no perímetro de controle da coluna  $u_0$ , e a segunda é a falha por tração do concreto ou por falha do reforço transversal na área ao redor do perímetro básico de controle  $u_1$ , conforme mostra a Figura 2.1.

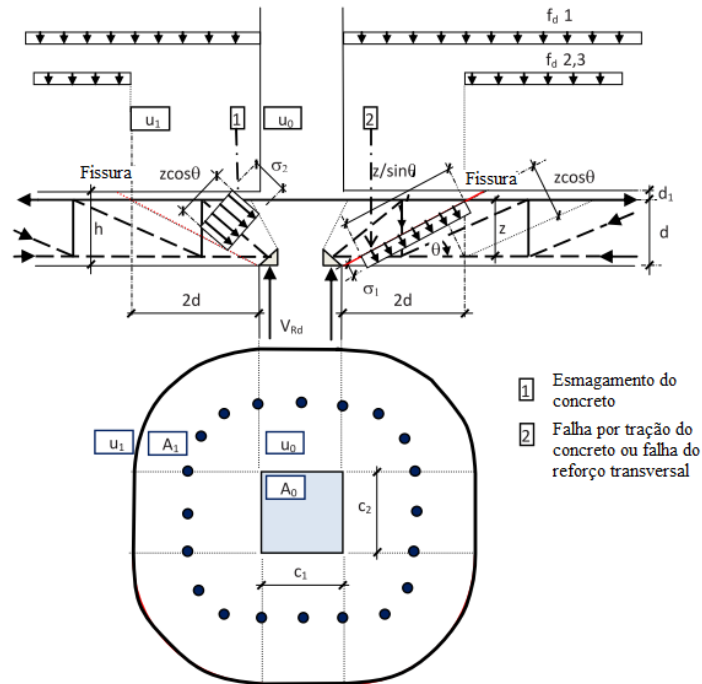


Figura 2.1 - Modelo do fenômeno da punção em lajes lisa (Adaptado de HALVONIK e FILLO,2013)

A ruptura por punção tem formato tronco-cônico e se desenvolve com a propagação de fissuras inclinadas através da espessura da laje, com uma inclinação entre 25° e 30°, conforme ilustra a Figura 2.2.

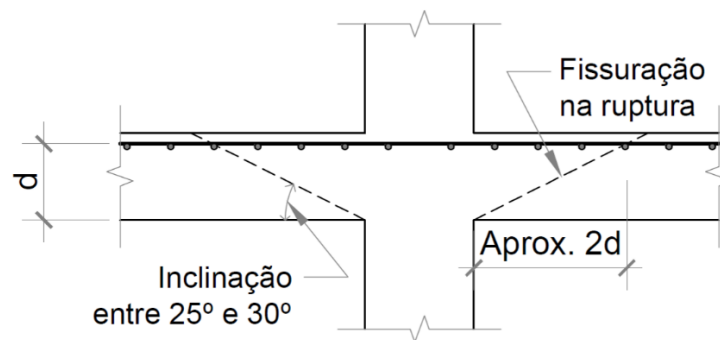


Figura 2.2 – Ruína por punção em laje lisa

Para as lajes com armadura de cisalhamento a superfície de ruptura pode ocorrer em três posições distintas. A primeira posição é na região entre o pilar e a primeira camada de armadura de cisalhamento, com ruptura somente do concreto adjacente ao pilar; a segunda acontece na região com armadura de cisalhamento, com ruptura do concreto e da armadura; a terceira situação ocorre na região situada além da armadura de cisalhamento, com ruptura do concreto

(CORDOVIL, 1997). A Figura 2.3 mostra as regiões de ruptura em lajes com armadura de cisalhamento.

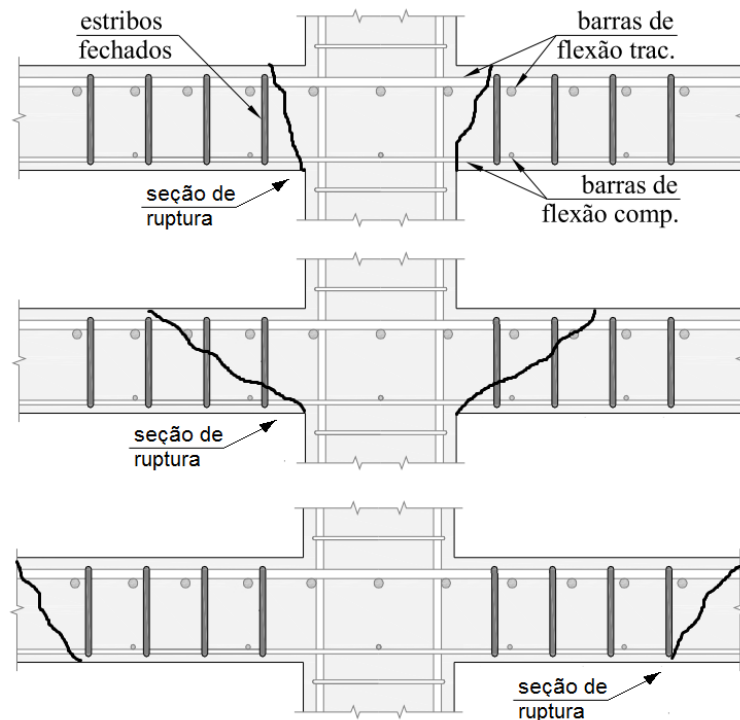


Figura 2.3 – Regiões de ruptura em lajes lisas com armadura de cisalhamento (adaptado de Ferreira, 2010)

## 2.3 MODELOS DE DIMENSIONAMENTO

São apresentados nos itens a seguir os métodos mais conhecidos para verificar a resistência de uma ligação laje-pilar com relação à punção.

### 2.3.1 Método da superfície de controle

Esse método consiste no cálculo de uma tensão uniforme solicitante de punção em uma determinada superfície de controle, perpendicular ao plano médio da laje, e localizada a uma determinada distância da face do pilar ou da área carregada. Essa tensão é comparada com um parâmetro de resistência do concreto para a mesma superfície. Quando a tensão solicitante na superfície de controle for maior que o parâmetro de resistência do concreto, faz-se necessário o uso de armadura de punção; caso contrário, a peça de concreto dimensionada é adequada para resistir aos esforços solicitantes.

A tensão solicitante é geralmente calculada em função de alguns parâmetros, como a posição do pilar, da força concentrada e da presença ou não de momentos fletores. Já a tensão resistente é calculada em função da resistência do concreto, da taxa de armadura de flexão e da presença ou não de armadura de punção (RABELLO, 2010).

Apesar de não representar o fenômeno físico do problema da punção, o método objetiva determinar de maneira prática a segurança da estrutura. Dessa forma, o mesmo é utilizado como base de algumas Normas e Códigos como a NBR 6118:2014, EUROCODE 2/04 e o ACI 318-2014.

### 2.3.2 Método das bielas e tirantes

O modelo de bielas e tirantes é uma representação discreta de campos de tensões nos elementos estruturais de concreto armado. O fluxo de forças internas nas regiões é idealizado com a consideração de uma treliça que transfere o carregamento imposto no contorno para seus apoios. Esta treliça é composta por uma estrutura de barras comprimidas (bielas) e tracionadas (tirantes) interconectadas por nós (MUNHOZ, 2004).

Segundo McGregor (1997 apud RABELLO, 2010), o modelo mais conhecido utilizando o método das bielas e tirantes é de Alexander e Simmonds, sendo considerado o primeiro modelo de bielas e tirantes usado para tentar explicar a punção sem efeito de momento.

O modelo proposto por Alexander e Simmonds consiste em uma treliça espacial composta de bielas de concreto e tirantes de aço, conforme mostra Figura 2.4.

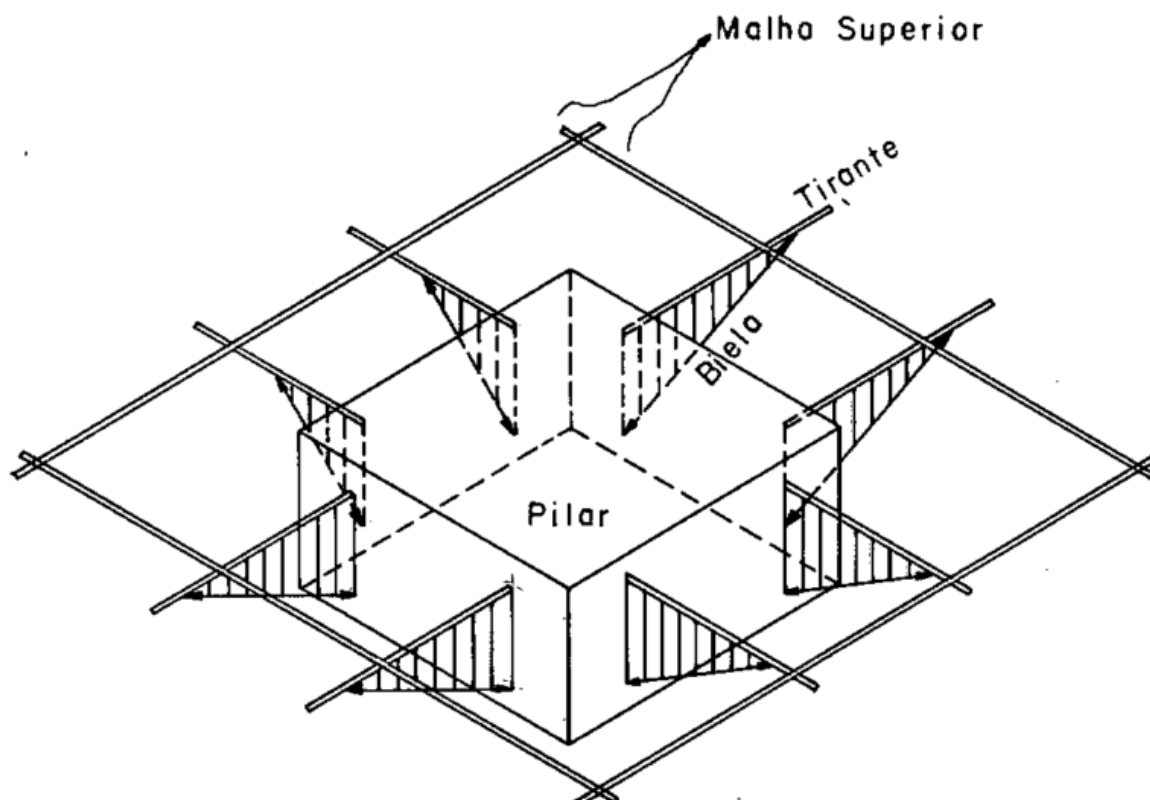


Figura 2.4 – Modelo de Alexander e Simmonds (PINTO, 1993)

No modelo apresentado, o cisalhamento é resistido pelas componentes verticais das bielas inclinadas, chamadas de bielas de cisalhamento. O modelo adotado por Alexander e Simmonds assume que o modo de ruptura é dado pelo escoamento da armação, devido à observação de resultados de ensaios existentes. Esta formulação, embora não represente o comportamento real da estrutura, apresenta resultados com valores próximos aos reais (PINTO, 1993).

### 2.3.3 Modelos mecânicos

Conforme Rabello (2010), os modelos mecânicos são fundamentados pelos modelos constitutivos do concreto e do aço e se baseiam no comportamento da ligação, observado em ensaios.

Os pesquisadores suecos Kinnunen e Nylander apresentaram em 1960 uma hipótese para o equacionamento do problema de laje circular solicitada por pilar central com seção também circular. O modelo é baseado em 61 testes com lajes circulares. As observações desses testes, especialmente a formação de fissuras, deformação dos elementos e a expansão do concreto e do aço, são fundamentos importantes da teoria do modelo. No modelo, a ruptura da laje ocorre



a partir do pilar, com o deslocamento de um sólido interno com forma de um tronco cone, com superfície inclinada entre  $25^\circ$  e  $30^\circ$  em relação ao plano da laje, conforme Figura 2.5.

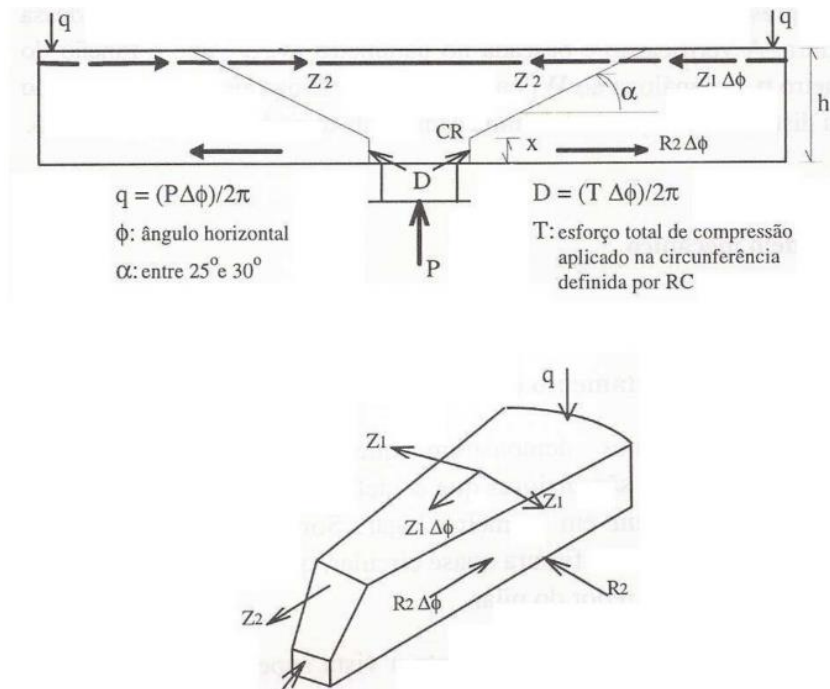


Figura 2.5 – Modelo mecânico de Kinnunen e Nylander (CORDOVIL, 1997)

A ideia básica é criar um equilíbrio de forças agindo em um elemento sólido. Cada elemento rígido produz um trabalho decorrente da rotação em torno de um ponto chamado “centro de rotação” (CR). O centro de rotação representa dois estágios de fissuração: o primeiro seria o das fissuras radiais e inclinadas, formadas antes da ruptura da laje; o segundo seria as fissuras localizadas entre a periferia do pilar e o CR, formada apenas no instante da ruptura da laje. Com essas hipóteses de funcionamento pode-se estabelecer as condições de equilíbrio entre os esforços internos e externos, e assim se estabelece uma teoria próxima da realidade, bastando, para isso, aplicar o princípio dos trabalhos virtuais, supondo a rotação do elemento em CR como mostra a Figura 2.6 (CORDOVIL, 1997).

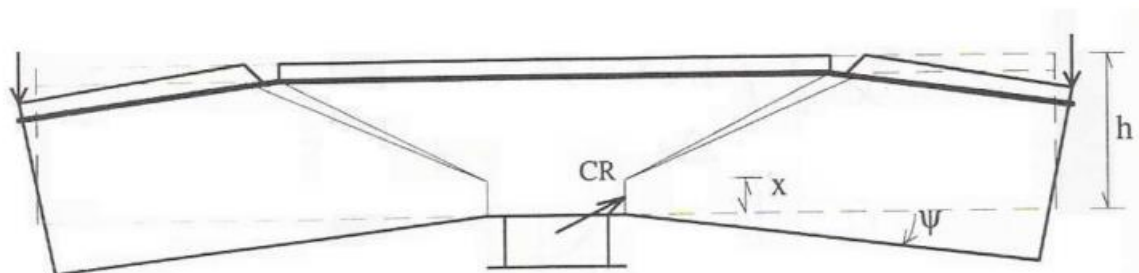


Figura 2.6 - Rotação do elemento rígido (CORDOVIL, 1997)

## 2.4 PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM NA RESISTÊNCIA AO PUNÇONAMENTO

Devido à complexidade do fenômeno, há diversos parâmetros que influenciam na resistência à punção. Os principais fatores analisados são: resistência à tração do concreto; taxa de armadura de flexão tracionada; dimensão, formato e posição do pilar; espessura da laje; efeito de escala (*size effect*); uso de armadura de cisalhamento; furos e descontinuidades (MELGES, 2001). Esses parâmetros mencionados são detalhados nos itens a seguir.

### 2.4.1 Resistência do concreto à tração

A resistência do concreto à tração é normalmente correlacionada com a resistência do concreto à compressão, e por isso as prescrições normativas e pesquisas realizadas costumam relacionar a resistência à compressão com a resistência ao cisalhamento em lajes.

Segundo Lima (2012), um dos primeiros a tentar avaliar a influência do concreto na resistência à punção foi Graf (1993), quando o mesmo concluiu que havia uma relação não linear entre o aumento da capacidade da ligação laje-pilar e o aumento da resistência do concreto. Em outro estudo, Moe (1961 apud LIMA, 2012) propôs que essa relação poderia ser expressa como uma função proporcional à raiz quadrada da resistência do concreto. Hallgreen (1996 apud LIMA, 2012) concluiu que em concretos de altas resistências a função proposta por Moe (1961) tende a superestimar a influência da resistência à compressão do concreto na resistência ao cisalhamento do mesmo.

### 2.4.2 Taxa de armadura de flexão

A taxa de armadura de flexão tracionada ( $\rho$ ) é definida com a razão entre a área de armadura de flexão tracionada ( $A_s$ ) pela área de concreto, que é expressa pelo produto da altura útil da laje ( $d$ ) por uma largura a ser considerada.

Fusco (1984 apud MELGES, 2001) observou que taxas até 2% aumentam a resistência da laje ao cisalhamento. Segundo o autor, esse aumento decorre da influência que a taxa de armadura tem sobre o efeito de pino da armadura longitudinal de tração, após a fissuração da borda tracionada da peça, e de sua influência sobre a manutenção do engrenamento dos agregados.

Segundo Regan (1981), o aumento na taxa de armadura de flexão tem como efeito o aumento da zona comprimida, reduzindo a fissuração na ligação laje-pilar. Além disso, a espessura das fissuras de flexão é reduzida, o que facilita a transferência de forças através do engrenamento de agregados, podendo ainda aumentar o efeito de pino.

### 2.4.3 Dimensões, formato e posição do pilar

O aumento das dimensões do pilar conduz a um acréscimo na capacidade resistente da laje devido à punção (MAMEDE; RAMOS; FARIA, 2013). Além disso, é importante observar que, para uma mesma dimensão de pilar, a resistência à punção é maior em pilares que se encontram afastados das bordas da laje.

Segundo Braestrup e Regan (1985), o aumento de resistência à punção está relacionado também ao formato dos pilares. Os autores observaram que a resistência em pilares circulares foi cerca de 15% maior comparado a pilares quadrados com área equivalente. A menor resistência em pilares quadrados é explicada pelo fato desses pilares apresentarem uma concentração de tensões nos cantos.

Costa et al. (2012) analisou oito lajes quadradas com o objetivo de investigar a influência do índice de retangularidade dos pilares na resistência à punção das lajes. Os autores concluíram que a medida que os índices de retangularidade aumentavam, a resistência ao punçãoamento e a resistência à flexão diminuía.

### 2.4.4 *Size effect* – efeito escala

A influência do efeito de escala geralmente é dada em função da altura útil da laje. Este efeito refere-se ao fato de que, em igualdade de outras condições, as lajes de menor altura útil são

mais resistentes que as lajes mais espessas. Esse fato pode ser justificado devido à possibilidade de maior heterogeneidade do concreto nas lajes mais espessas, e a perda da capacidade de controle de fissuras pela armadura de tração ao longo de toda altura da seção fissurada (FUSCO, 1984 apud MELGES, 2001).

#### 2.4.5 Altura útil da laje

No estudo de Braestrup e Regan (1985), foi demonstrado que o aumento da altura efetiva da laje produz um aumento da resistência à punção. As mesmas conclusões são encontradas por Mamede, Ramos e Faria (2013). No entanto, ao se aumentar a espessura da laje aumenta-se também as solicitações permanentes, e conseqüentemente as tensões atuantes.

#### 2.4.6 Armaduras de cisalhamento

As armaduras de cisalhamento têm significativa influência na resistência ao puncionamento. Além de aumentar a resistência na ligação, algumas armaduras apresentam maior capacidade da ligação de se deformar, contribuindo assim, com uma maior ductilidade à ligação.

A ancoragem e a praticidade de instalação são critérios de extrema importância para que as armaduras de cisalhamento sejam consideradas eficientes do ponto de vista técnico. Para que as armaduras possam atingir a tensão de escoamento é necessário que a haja aderência perfeita entre o aço e o concreto. Muitas vezes isso não é fácil de ser alcançado, uma vez que as lajes são normalmente elementos delgados. Outra dificuldade encontrada é a concentração de barras de flexão na região da ligação laje-pilar, devido a elevados esforços de flexão, dificultando a distribuição das armaduras de cisalhamento (FERREIRA, 2010).

Encontram-se na literatura diversos tipos de armadura de cisalhamento, sempre procurando avaliar sua eficiência técnica, construtiva e econômica. A Figura 2.7 apresenta algumas armaduras utilizadas para combater a punção.

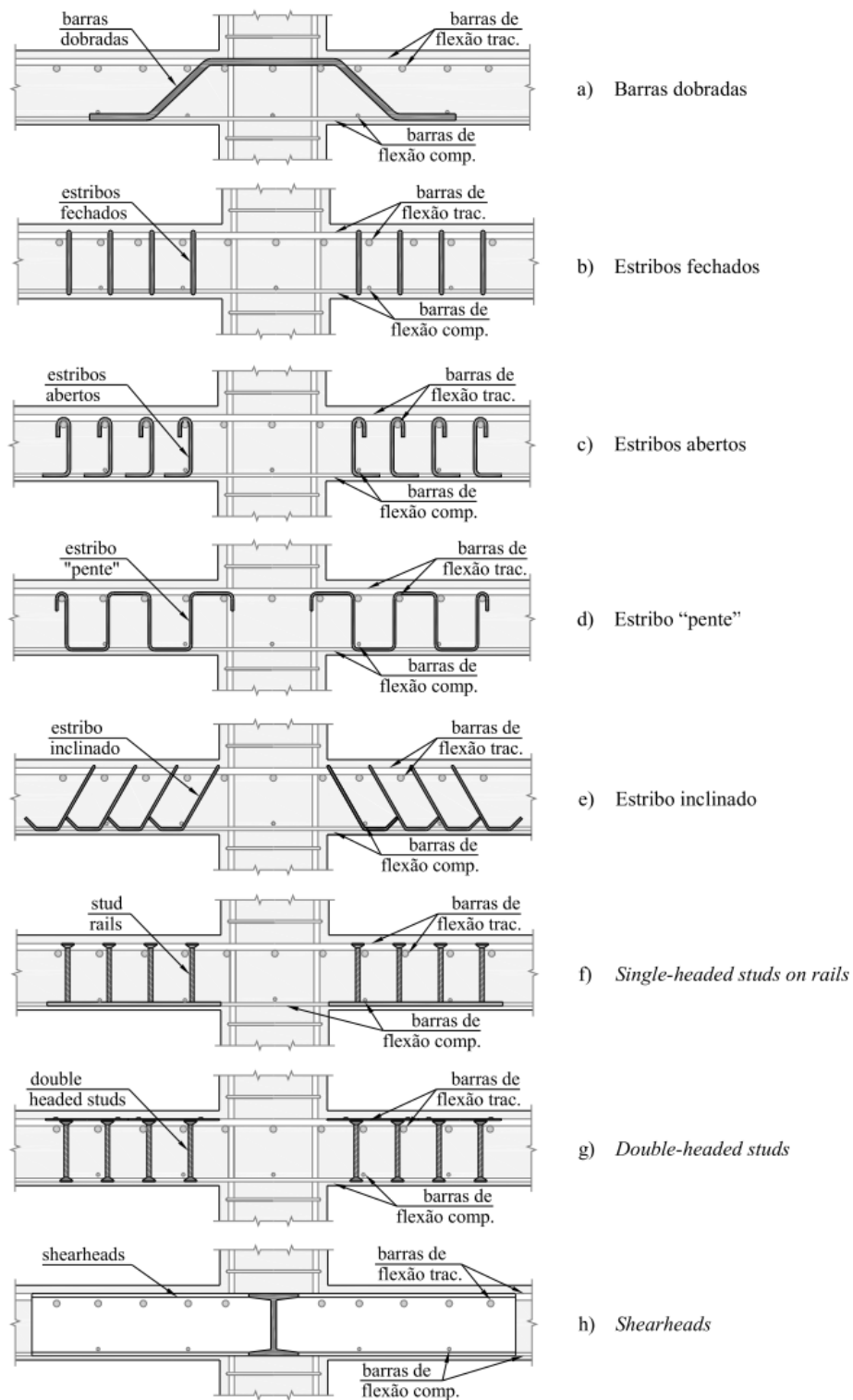


Figura 2.7 - Tipos de armadura de cisalhamento para lajes lisas (FERREIRA, 2010)

### 2.4.7 Furos e descontinuidades da laje

Os furos em lajes são frequentemente utilizados para a passagem de tubulações de água, esgoto, eletricidade, interfonia, alarmes e outros. Segundo Souza (2008), a presença de furos agrava o problema de punção devido à diminuição da resistência ao cisalhamento, provocado pela retirada de concreto e de armadura no furo, reduzindo o perímetro crítico.

## 2.5 TRABALHOS E PESQUISAS REALIZADOS

### 2.5.1 Pesquisas internacionais

Dentre os principais estudos e pesquisas realizados sobre punção em lajes destacam-se as pesquisas realizadas por Talbot (1913 apud RABELLO, 2010), considerado o responsável pelo primeiro estudo sobre punção. O autor fez ensaio em 197 sapatas sem o uso de armadura de cisalhamento e observou a ruína por punção em vinte delas.

Regan (1985) observou que, para uma laje sem armadura de cisalhamento, a superfície de ruptura forma um ângulo de aproximadamente  $25^\circ$  com o plano da laje, com origem na face do pilar, para situação de carregamento simétrico. Analisando essa observação, o autor concluiu que, adicionando uma armadura de cisalhamento de tal forma que haja mudança na inclinação da superfície de ruptura, haverá um acréscimo para contribuição do concreto na carga de ruptura. Esse acréscimo é pequeno para inclinações até  $45^\circ$ , e a partir dessa, o acréscimo de resistência é significativo.

Gomes (1991), em seu estudo sobre o efeito da armadura de cisalhamento, ensaiou doze lajes cogumelo e concluiu que as lajes de concreto armado com armadura de cisalhamento podem ser duas vezes mais resistentes à punção do que lajes similares sem armadura de cisalhamento. Outro fator importante observado pelo autor é a forma de distribuição da armadura de cisalhamento, que pode limitar a resistência à punção de uma laje. Para os ensaios realizados pelo autor, a distribuição radial da armadura de cisalhamento foi a que mostrou melhores resultados. Mello (1994 apud MELGES, 2001) apresentou um estudo sobre a importância do uso de uma armadura junto à armadura de flexão inferior da laje, de modo a evitar o colapso progressivo, caso ocorra a ruptura da ligação laje-pilar.

Hallgren (1996 apud TRAUTWEIN, 2006) ensaiou dez lajes circulares moldadas com concreto de alta resistência e armaduras de cisalhamento. As lajes possuíam diâmetro de 2540 mm e

espessura nominal de 240 mm com um pilar centralizado de 250 mm de diâmetro. A armadura de cisalhamento possuía uma inclinação de 33°. O rompimento de todas as lajes se deu por punção e foi observado que as lajes com baixas taxas de armadura de flexão e com armadura de cisalhamento tiveram um comportamento mais dúctil antes de alcançar a ruptura. O acréscimo de resistência com a utilização de barras dobradas chegou a 69%. Com o intuito de otimizar a estrutura, uma das lajes foi moldada com concreto de alta resistência apenas no contorno do pilar, porém o autor observou que esta laje apresentou o mesmo comportamento que as outras ensaiadas.

Regan e Samadian (2001) ensaiaram dez lajes de concreto armado usando diversos tipos de armadura de cisalhamento e concluíram que as armaduras testadas podem aumentar a resistência à punção de uma laje cogumelo de concreto em 75% comparando com uma laje similar sem armadura de cisalhamento.

Regan (2004) investigou a resistência à punção de sete lajes de concreto armado submetidas a cargas altamente concentradas, e concluiu que a abordagem adotada pelo Código Modelo CEB-FIP-1990 e por outras normas apresentavam potenciais problemas na verificação da resistência à punção para carregamentos demasiadamente concentrados.

### 2.5.2 Pesquisas nacionais

As principais pesquisas realizadas no Brasil começaram em São Carlos, em 1972, junto com um amplo projeto de pesquisa sugerido pelo Prof. Telemaco van Langendonck, que tinha como objetivo o estudo experimental da resistência de ligações laje-pilar em cantos e em bordas de lajes cogumelo. Nesse projeto de pesquisa, destaca-se a tese de Martinelli (1974) (MELGES, 2001).

Seguindo essa linha de pesquisa, Fusco (1985 apud MELGES, 2001) verificou, em ensaios experimentais de lajes armadas com conectores tipo pino, que a resistência ao cisalhamento tem como fatores essenciais o entrosamento dos agregados ao longo da superfície de ruptura e o efeito de pino da armadura de flexão.

Cordovil e Fusco (1995) ensaiaram quatro lajes quadradas com 1540 mm de lado e espessura igual a 120 mm e uma área carregada de 150 x 250 mm. As lajes possuíam armadura de cisalhamento constituídas por elementos tipo pino com chapas de ancoragem soldadas na extremidade. Observou-se um aumento da resistência à punção de aproximadamente 17% para

as lajes submetidas a carregamento simétrico e de 54% para lajes com carregamento excêntrico, em relação a lajes sem armadura de cisalhamento.

Melges (1995) analisou o método da superfície de controle, utilizado por diversas normas, para a verificação da resistência à punção, e concluiu que os resultados fornecidos foram satisfatórios. O autor observou, também, que a utilização da armadura de punção elevou substancialmente a resistência da ligação laje-pilar.

Oliveira (1998) realizou vários ensaios de punção em lajes de concreto armado utilizando valores de resistência à compressão do concreto entre 60 MPa e 69 MPa, e demonstrou uma grande eficiência no uso de estribos inclinados em ligações do tipo laje-pilar interno.

Trautwein (2001) investigou a eficiência de dois tipos de armadura de cisalhamento no combate à punção, uma tipo *stud* e outra constituída de estribos inclinados em 60°. O autor observou que a utilização da armadura tipo *stud* aumentou em 75% a resistência à punção e que o uso de estribos inclinados pode apresentar um acréscimo da resistência de até 94%.

Lima (2012) apresentou um estudo experimental e analítico de lajes lisas de concreto armado reforçadas ao puncionamento com a utilização de Polímeros Reforçados com Fibra de Carbono (PRFC) como armadura de cisalhamento. O autor observou que o reforço aplicado apresentou ganhos na resistência ao cisalhamento de até 56% em relação à carga obtida pelo modelo sem reforço.

## 2.6 PRESCRIÇÕES NORMATIVAS

### 2.6.1 Critérios da Norma brasileira NBR 6118:2014

A NBR 6118:2014 utiliza como modelo de cálculo a verificação da tensão de cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno das forças concentradas. Na primeira superfície crítica, denominada de contorno C, do pilar ou da carga concentrada, verifica-se indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto, através da tensão de cisalhamento. Na segunda superfície crítica, denominada de contorno C', afastada 2d do pilar ou carga concentrada, verifica-se a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal. Essa verificação também é feita através de uma tensão de cisalhamento, no contorno C'. Pode-se fazer necessária a verificação de uma terceira superfície crítica, denominada de



contorno  $C''$ . Essa verificação só será necessária em caso da existência de armadura transversal para reforço da ligação.

### 2.6.2 Superfícies críticas

A Norma apresenta diferentes superfícies críticas que levam em consideração a posição dos pilares. A superfície crítica  $C'$  é determinada a partir de um polígono convexo circunscrito ao contorno da região carregada, afastado a uma distância de  $2d$  e sendo construído de forma a minimizar o seu perímetro.

Para pilares internos as superfícies críticas  $C$  e  $C'$  são mostradas na Figura 2.8. Já para os pilares de borda e de extremidade, as superfícies são mostradas nas Figuras 2.9 e 2.10, respectivamente.

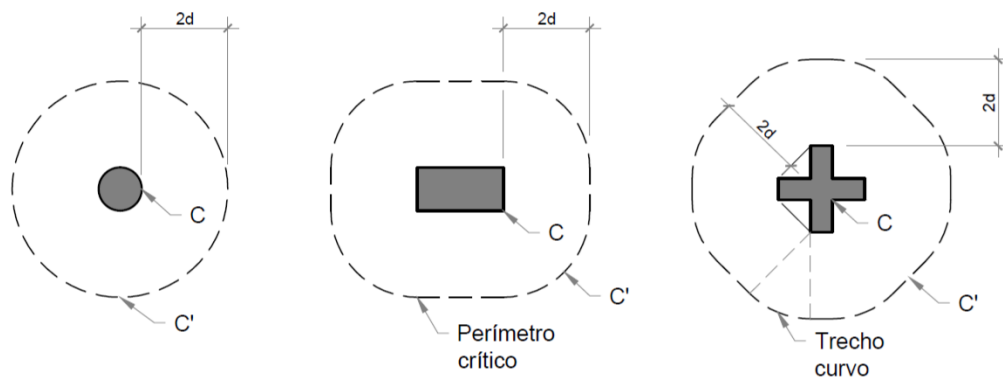


Figura 2.8 – Perímetro crítico em pilares internos

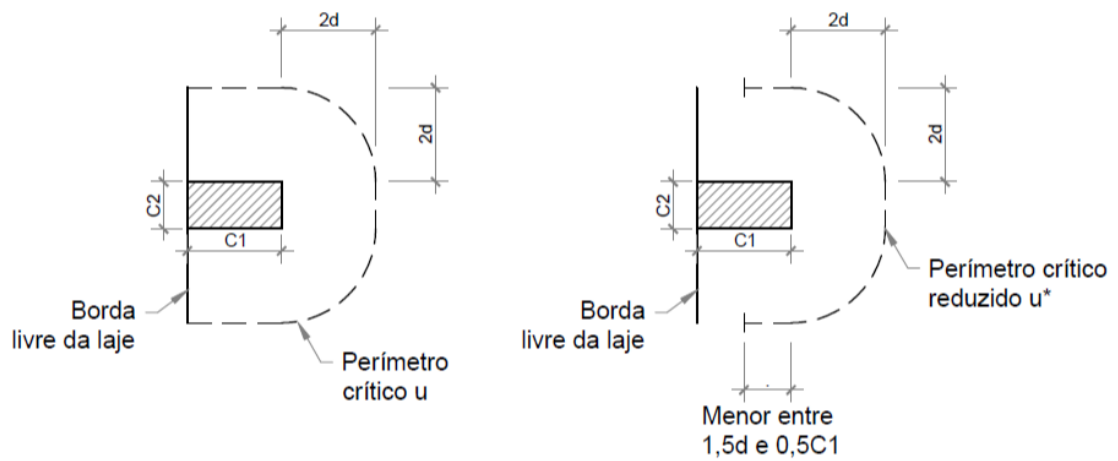


Figura 2.9 – Perímetro crítico em pilares de borda

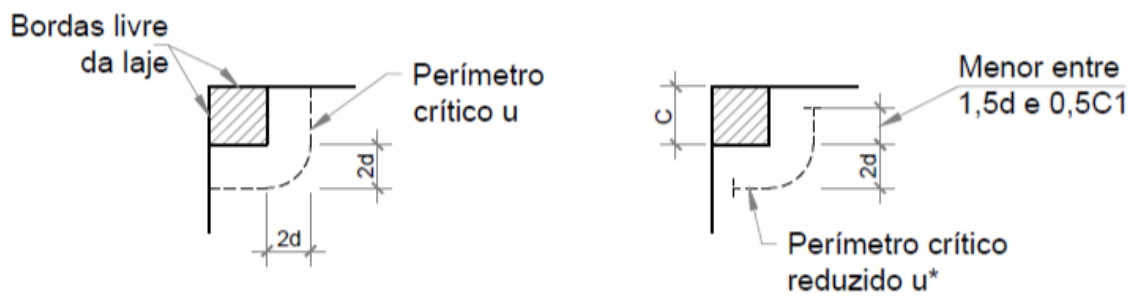


Figura 2.10 – Perímetro crítico em pilares de canto

Quando houver capitéis, devem ser feitas duas verificações nos contornos críticos  $C1'$  e  $C2'$ , como mostrado na Figura 2.11.

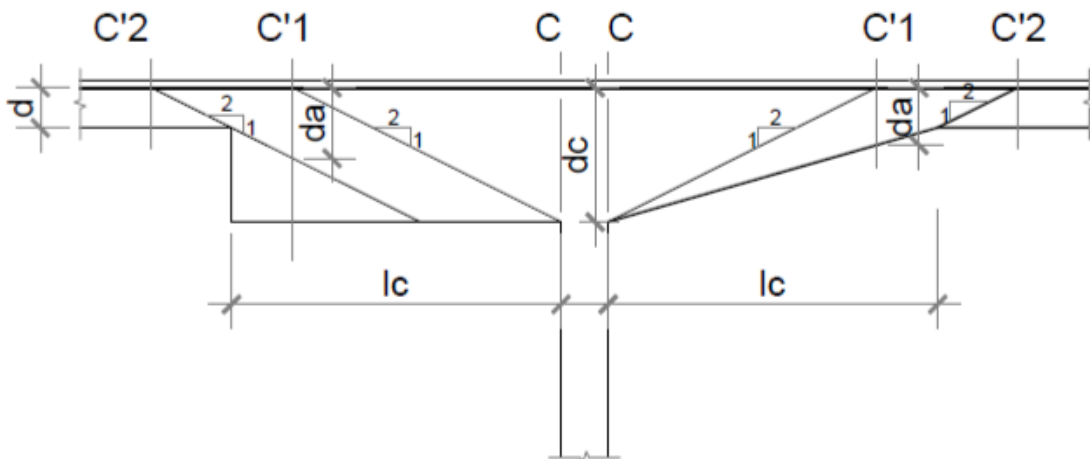


Figura 2.11 – Perímetros críticos em lajes cogumelo.  $d$  é a altura útil da laje no contorno  $C'2$ ;  $dc$  é a altura útil da laje na face do pilar;  $da$  é a altura útil da laje no contorno  $C'1$ ;  $lc$  é a distância entre a borda do capitel e a face do pilar.

Quando  $lc \leq 2(dc - d)$  pode-se verificar apenas o contorno  $C'2$ . Para  $2(dc - d) < lc \leq 2dc$ , verifica-se apenas o contorno  $C'1$ , e para  $lc > 2dc$  é necessário verificar os dois perímetros críticos,  $C'1$  e  $C'2$ .

A Norma também apresenta casos especiais de definição do contorno crítico, como quando a laje apresentar abertura situada a menos de  $8d$  do contorno  $C$ . Neste caso, não se pode considerar o trecho do contorno crítico  $C'$  entre as duas retas que passam pelo centro de gravidade da área de aplicação da força e que tangenciam o contorno da abertura, conforme mostra a Figura 2.12.

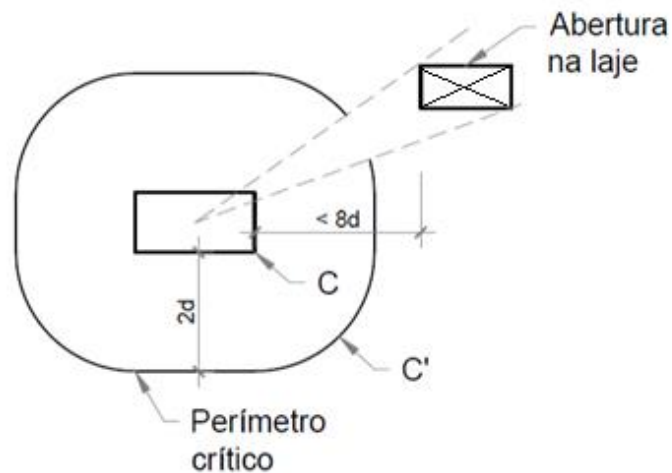


Figura 2.12-Perímetro crítico junto à abertura na laje

### 2.6.3 Definição da tensão solicitante nas superfícies críticas C e C'

Para pilares internos com carregamento simétrico a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} \quad (2.1)$$

$$d = \frac{dx + dy}{2} \quad (2.2)$$

Onde:

$d$  - é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico C';

$dx, dy$  - são as alturas úteis nas duas direções ortogonais;

$u$  - é o perímetro do contorno crítico C';

$u \cdot d$  - é a área da superfície crítica;

$F_{sd}$  - é a força ou a reação concentrada de cálculo.

Para pilares internos, com efeito de momento, a tensão de cisalhamento que leva em consideração a assimetria do carregamento é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K \cdot M_{sd}}{W_p \cdot d} \quad (2.3)$$

Onde:

$M_{sd}$  – momento de cálculo transmitido da laje para o pilar;

$K$  - é o coeficiente que fornece a parcela de  $M_{sd}$  transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação  $C_1/C_2$ ;

$W_p$  - é o módulo de resistência plástica do perímetro crítico em questão.

O coeficiente  $K$  é dado na Tabela 2.1, em função da relação entre as dimensões da seção do pilar.

Tabela 2.1- Valores de K (NBR 6118:2014)

$C_1/C_2$	0,5	1,0	2,0	3,0
$K$	0,45	0,60	0,70	0,80

(fonte:NBR 6118:2014)

Ao utilizar a Tabela 2.1 deve-se observar o seguinte:

- $C_1$  é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;
- $C_2$  é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força;
- para pilares circulares internos, deve ser adotado o valor  $K = 0,6$ .

Os valores de  $W_p$  são calculados pelas expressões a seguir:

- para pilar retangular:

$$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 + 4C_2 d + 16d^2 + 2\pi d C_1 \quad (2.4)$$

b) para pilar circular:

$$W_p = (D + 4d)^2 \quad (2.5)$$

Onde:

D é o diâmetro do pilar;

Pode-se calcular o  $W_p$  desprezando a curvatura dos cantos do perímetro crítico, através da expressão:

$$W_p = \int_0^u |e| dl \quad (2.6)$$

Onde:

$dl$  - é o comprimento infinitesimal no perímetro crítico  $u$ ;

$e$  - é a distância de  $dl$  ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento fletor  $M_{Sd}$ .

Já para pilares de borda a tensão de cisalhamento é dividida em:

a) sem momento no plano paralelo a borda livre:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K1 \cdot M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} \quad (2.7)$$

Sendo:

$$M_{Sd1} = (M_{Sd} - M_{Sd}^*) \geq 0 \quad (2.8)$$

Onde:

$F_{Sd}$  - é a reação de apoio;

$u^*$  - é o perímetro crítico reduzido;

$M_{Sd}$  - é o momento de cálculo no plano perpendicular à borda livre;

$M_{Sd}^*$  - é o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido  $u^*$  em relação ao centro do pilar;

$W_{p1}$  - é o módulo de resistência plástica perpendicular à borda livre, calculado para o perímetro  $u$ ;

O coeficiente  $K1$  assume os valores estabelecidos para  $K$  na Tabela 2.1, com  $C1$  e  $C2$  de acordo com a Figura 2.9.

b) com momento no plano paralelo à borda livre:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K1 \cdot M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d} \quad (2.9)$$

onde:

$M_{Sd2}$  - é o momento de cálculo no plano paralelo à borda livre;

$W_{p2}$  - é o módulo de resistência plástica na direção paralela à borda livre, calculado pelo perímetro  $u$ ;

O coeficiente  $K2$  assume os valores estabelecidos para  $K$  na Tabela 2.1, substituindo-se  $C1/C2$  por  $C2/2C1$  (sendo  $C1$  e  $C2$  estabelecidos na Figura 2.9).

Para os pilares de canto adota-se o mesmo procedimento disposto para o pilar de borda, quando não age momento no plano paralelo à borda, fazendo-se a verificação, separadamente, para cada uma das bordas livres. O valor de K deve ser calculado em função da proporção C1/C2, sendo C1 e C2, respectivamente, os lados do pilar perpendicular e paralelo à borda livre adotada.

#### 2.6.4 Definição da tensão resistente nas superfícies críticas C, C' e C''

A resistência à compressão diagonal do concreto na superfície crítica C, em lajes submetidas a punção, com ou sem armadura, é dada por:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27\alpha_c f_{cd} \quad (2.10)$$

Onde:

$\alpha_c$  - é o fator de fragilidade do concreto;

$f_{cd}$  - é a resistência à compressão de cálculo do concreto.

Quando os vãos que chegam a um pilar interno não diferirem mais de 50 %, e caso não exista aberturas junto ao pilar, o valor de  $\tau_{Rd2}$  pode ser ampliado em 20 % por efeito de estado múltiplo de tensões.

A tensão resistente na superfície crítica C' é calculada levando em consideração a presença ou não de armadura de punção:

- a) Tensão resistente na superfície crítica C' em elementos estruturais ou trechos sem armadura de punção:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,10\sigma_{cp} \quad (2.11)$$



Sendo:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \quad (2.12)$$

$$d = (d_x + d_y)/2 \quad (2.13)$$

Onde:

$d$  - é a altura útil média da laje ao longo do contorno crítico C, em centímetros;

$\rho$  - é a taxa geométrica de armadura de flexão aderente;

$\sigma_{cp}$  - é a tensão inicial no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devida à protensão simultânea de  $n$  cabos. Quando não há proteção  $\sigma_{cp} = 0$ ;

$f_{ck}$  - é a resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$\rho_x$  e  $\rho_y$  - são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais, assim calculadas:

- na largura igual à dimensão ou área carregada do pilar, acrescida de  $3d$  para cada um dos lados;
- no caso de proximidade da borda, prevalece a distância até a borda, quando menor que  $3d$ .

b) Tensão resistente na superfície crítica C' em elementos estruturais ou trechos com armadura de punção:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,10\sigma_{cp} + 1,5 \frac{d}{S_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{u d} \quad (2.14)$$

Onde:

$s_r$  é o espaçamento radial entre linhas de armadura de punção, sempre com  $a \leq 0,75d$ ;

$A_{sw}$  é a área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a  $C'$ ;

$\alpha$  é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;

$u$  é o valor numérico do perímetro crítico;

$f_{ywd}$  é a resistência de cálculo da armadura de punção, não maior que 300 MPa para conectores, ou 250 MPa para estribos (CA-50 ou CA-60). Para lajes com espessura maior que 15cm, pode assumir os seguintes valores:

$$f_{ywd} = 250 + \frac{185}{20}(h - 15) \text{ MPa, para } 15 \leq h \leq 35 \text{ cm};$$

$$f_{ywd} = 435 \text{ MPa, para } h > 35 \text{ cm}$$
(2.15)

## 3 MODELAGEM COMPUTACIONAL

### 3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

As análises das ligações laje-pilar sob punção, realizadas nesse trabalho, são feitas através do método dos elementos finitos, utilizando o *software* ANSYS (*Analysis Systems Incorporated*) versão 17.2. O programa utilizado apresenta duas interfaces básicas: o sistema APDL (*ANSYS Parametric Design Language*), sendo este o sistema usado neste trabalho devido ao maior controle do usuário sobre a simulação numérica, e o sistema WORKBENCH, que possui uma interface gráfica mais intuitiva e de fácil simulação. O software apresenta também uma ferramenta de customização que permite a implementação de novos elementos finitos e modelos constitutivos. Essa ferramenta de customização UPF (*User Programmable Features*) foi utilizada neste trabalho para implementação de um modelo constitutivo elastoplástico para o concreto, que será detalhado no item 3.3.

### 3.2 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

Para a escolha dos elementos finitos, levou-se em consideração aspectos relacionados ao tipo de análise, tempo de processamento computacional, número de graus de liberdade e a possibilidade do uso de armaduras incorporadas. Esses aspectos são necessários para melhorar a eficiência da programação do modelo numérico e ter maior liberdade na utilização da malha de elementos finitos, necessitando assim, um esforço computacional menos oneroso.

O tempo de processamento é relevante devido ao fato de que as simulações terão inúmeras repetições na utilização do método de Monte Carlo. Dessa forma, um menor tempo de processamento em uma análise representa uma grande vantagem na análise da confiabilidade das lajes estudadas. Nos itens a seguir são apresentados os elementos utilizados para representação do concreto e da armadura nas análises numéricas.

#### 3.2.1 SOLID186

Esse elemento foi adotado para modelar o concreto das lajes, sendo um elemento quadrático tridimensional com três graus de liberdade por nó (translação segundo os eixos X, Y e Z). O SOLID186 é composto por 20 nós distribuídos conforme a Figura 3.1. Esse elemento pode apresentar, além da configuração hexaédrica, configurações piramidal, prismática ou

tetraédrica, conforme mostrado na Figura 3.1. Isto permite que a malha se adapte à geometria do modelo. Como o estudo de lajes apresenta um modelo geométrico simples, utilizou-se a configuração com base hexaédrica do elemento.

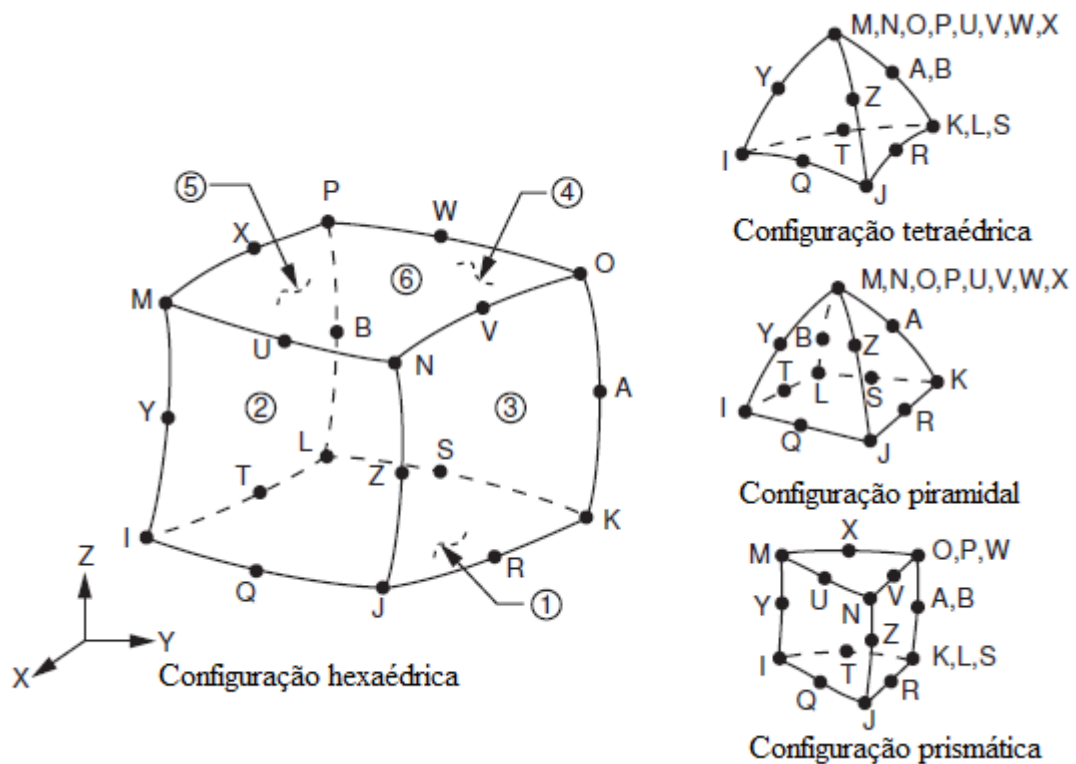


Figura 3.1 – Elemento SOLID186 ( Adaptado de ANSYS, 2013a)

A escolha desse elemento foi baseada na possibilidade da formulação de materiais com plasticidade, uso de armadura incorporada e necessidade de pequena discretização para se obter bons resultados. Esses fatores reduzem de forma significativa o tempo de processamento da análise.

### 3.2.2 REINF264

Esse elemento é utilizado para modelagem da armadura das lajes, de forma incorporada e apresentando apenas rigidez uniaxial. O elemento REINF264 é utilizado junto com elementos de barra, de placa, de casca ou elementos sólidos para fornecer reforço extra a esses elementos. Este é adequado para simulação de fibras de reforço com direções arbitrárias. As coordenadas nodais, graus de liberdade e conectividade do elemento são a mesmas que a do elemento base. O elemento permite modelos com plasticidade, fluência, tensão inicial, grandes deflexões e

grande capacidade de deformação. A Figura 3.2 mostra a geometria do elemento quando utilizado juntamente com o elemento SOLID186.

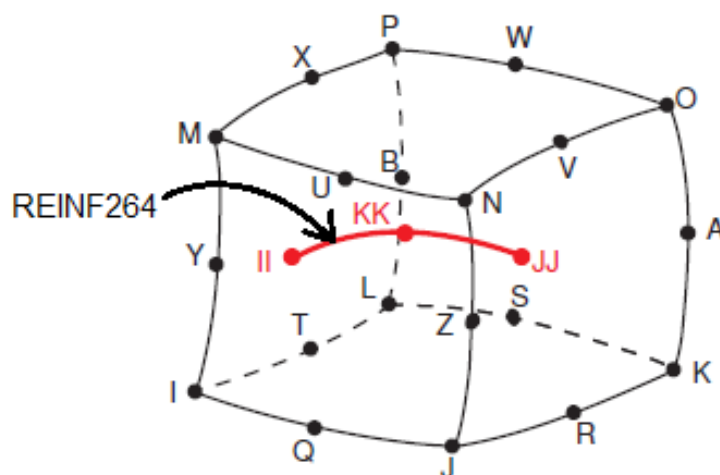


Figura 3.2 – Elemento REINF264 utilizado com SOLID186  
(Adaptado de ANSYS,2013a)

### 3.3 MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO

O modelo constitutivo disponibilizado pelo ANSYS para representação do comportamento do concreto é o modelo *concrete*, baseado no modelo de Willam e Warnke (1975), que possui cinco parâmetros que controlam a superfície de ruptura. Esse modelo representa de forma satisfatória o comportamento do concreto, porém, o uso dele no programa limita-se ao uso do elemento SOLID65.

O elemento SOLID65 não permite a utilização de armadura incorporada, dessa forma, em um primeiro estudo utilizou-se o elemento BEAM188 para simular as armaduras das lajes. Os resultados encontrados utilizando o elemento SOLID65 juntamente com o elemento BEAM188 foram adequados, porém a quantidade de elementos utilizados para representação real do modelo tornou a simulação lenta. Além disso, o modelo constitutivo *concrete* apresentou instabilidades numéricas durante a sua utilização. Deste modo, o uso da armadura incorporada e de um modelo constitutivo que não apresente muitas instabilidades numéricas é extremamente importante para viabilidade do estudo.

À vista de se utilizar um elemento que permita o uso de armaduras incorporadas, optou-se pelo emprego da ferramenta de customização UPF (*User Programmable Features*). Com essa ferramenta foi possível a utilização de um material elastoplástico compatível com o elemento SOLID186. Esse modelo foi implementado por Lazzari (2016) e modificado neste estudo para o uso em análises probabilísticas no ANSYS. Esse modelo é explicado de forma concisa nos itens a seguir. O detalhamento completo do modelo constitutivo utilizado pode ser encontrado em Lazzari (2016).

### 3.3.1 Modelo para o concreto comprimido

O modelo implementado por Lazzari (2016) é formado por um critério de ruptura, um critério de plastificação e por uma regra de endurecimento.

O critério de ruptura adotado é o de Ottosen (1977), o qual é adotado pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012). Essa superfície de ruptura é representada por suas seções transversais nos planos desviadores, conforme Figura 3.3.

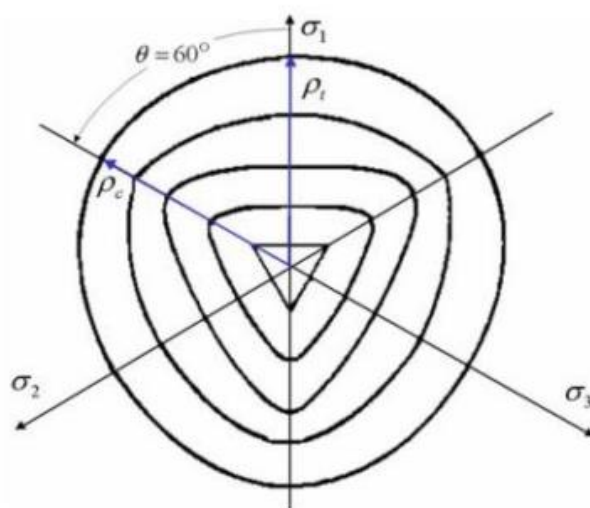


Figura 3.3 – Seções transversais da superfície de ruptura nos planos desviadores (LAZZARI, 2016)

Para o critério de plastificação, considerou-se que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura.

A movimentação da superfície de plastificação durante a deformação plástica é definida por uma regra de endurecimento, que é determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, sendo possível extrapolar os resultados de um ensaio uniaxial para uma situação multiaxial. Foi utilizado o diagrama tensão-deformação proposto pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012) para representar o concreto comprimido, conforme mostra a Figura 3.4.

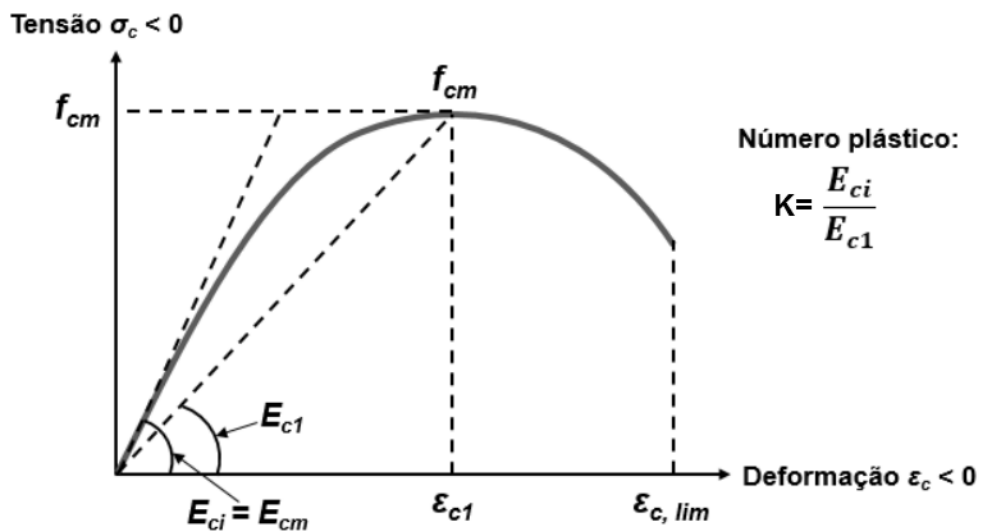


Figura 3.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido  
 (Adaptado de *fib* 2010, 2012)

### 3.3.2 Modelo para o concreto tracionado

O concreto tracionado é modelado como sendo um material elástico com amolecimento. Antes de fissurar, o concreto comporta-se como um material elástico linear, e após a fissuração, utiliza-se o modelo de fissuras distribuídas.

O modelo de fissuras distribuídas avalia o dano da fissuração modificando as propriedades do material e atualizando a relação tensão-deformação. É adotado o critério proposto pelo boletim nº 156 do CEB (1983) para definir se ocorreu fissuração do concreto em um ponto de integração que atingiu a superfície de ruptura. De acordo com esse critério, tem-se que:

- a) Se  $\sigma_1 \geq f_{tm}/2$ , o ponto de integração fissurou;
- b) Se  $\sigma_1 < f_{tm}/2$ , o ponto de integração esmagou.

Onde:

$\sigma_1$  é a tensão principal de tração;

$f_{tm}$  é a resistência média à tração do concreto.

Para a consideração da contribuição do concreto entre fissuras (*tension stiffening*), Lazzari (2016) adotou a metodologia proposta por Hinton (1988), que considera a degradação da aderência. Esta ocasiona perda na resistência à tração pós-fissuração, através da introdução de um ramo descendente na curva tensão-deformação, conforme mostrado na Figura 3.5.

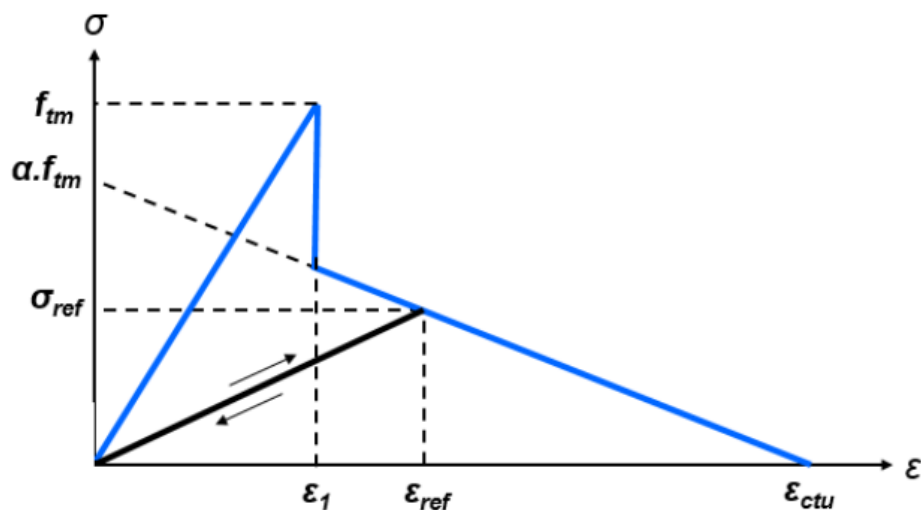


Figura 3.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (LAZZARI, 2016)

### 3.4 MODELO CONSTITUTIVO DO AÇO

Adotaram-se dois modelos constitutivos para a representação do comportamento do aço: o modelo elastoplástico perfeito e o modelo elastoplástico com endurecimento linear. A determinação do modelo adotada para cada aço depende do processo fabricação. Os dois modelos podem ser representados pelo modelo interno do ANSYS, denominado BISO (*Bilinear Isotropic Hardening*), sendo utilizados dois parâmetros de entrada, a tensão de escoamento inicial ( $\sigma_0$ ) e o módulo de endurecimento ( $E_t$ ).

Para aços obtidos por laminação a quente com patamar de escoamento bem definidos adotou-se o modelo elastoplástico perfeito (Figura 3.6).



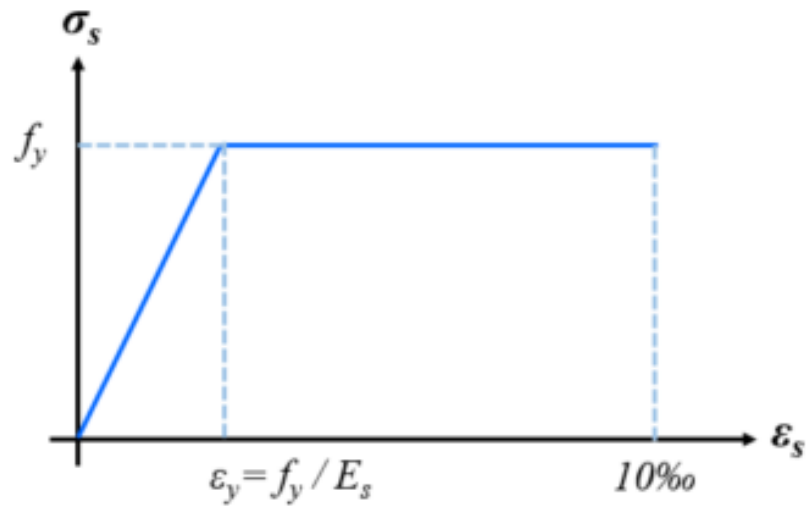


Figura 3.6 – Modelo elastoplástico perfeito (LAZZARI,2016)

Para os aços encruados a frio adotou-se o modelo elastoplástico com endurecimento linear (Figura 3.7), sendo os parâmetros do modelo dados pela Equação (3.1) e (3.2) .

$$\sigma_0 = 0,85 \cdot f_y \quad (3.1)$$

$$E_t = \frac{0,15 \cdot f_y}{0,01 - \frac{f_y}{E_s}} \quad (3.2)$$

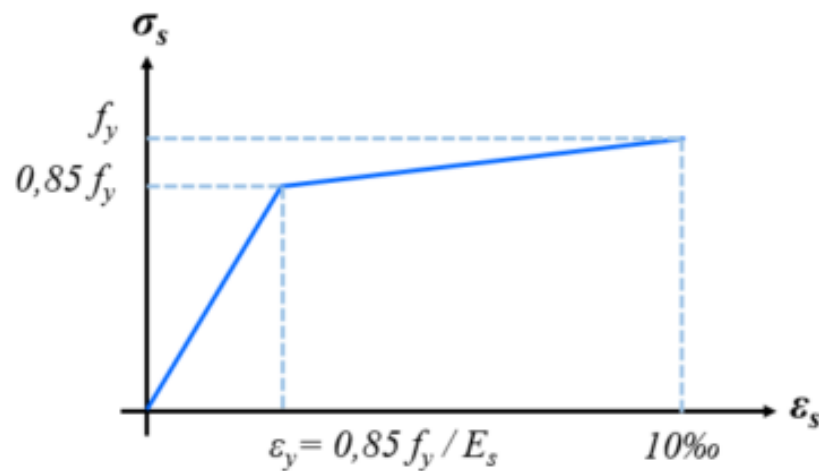


Figura 3.7 – Modelo elastoplástico com endurecimento linear (LAZZARI, 2016)

### 3.5 ANÁLISE NÃO-LINEAR

A análise utilizando elementos finitos implica o uso de métodos numéricos para a solução de sistemas de equações. No caso de análise envolvendo a não-linearidade física e ou geométrica, o uso de métodos eficazes é de extrema importância para a solução de sistema de equações não-lineares. Um método numérico de convergência bastante eficaz é o método de *Newton-Raphson*, utilizado internamente pelo *software* ANSYS. Sua formulação, baseada em Bathe (1996), consiste em um processo iterativo para resolução de sistema de equações não-lineares, conforme as expressões (3.3) e (3.4). O detalhamento do algoritmo de solução pode ser encontrado em Bathe (1996), assim como em ANSYS (2013).

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F_a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (3.3)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \quad (3.4)$$

Onde:

$K_i^T$ : matriz de rigidez tangente

$F_a$ : vetor de carga aplicada

$F_i^{nr}$ : vetor correspondente às cargas internas de elementos

Neste trabalho foi utilizado o método de *Newton-Raphson*, com incremento de deslocamentos, que se mostrou um método de melhor convergência. O critério de convergência foi estabelecido no vetor de resíduo de deslocamento  $\{R\}$ , sendo satisfeito quando a norma deste vetor,  $\|\{R\}\|$ , atinge valores menores ou iguais à tolerância estabelecida para a norma do vetor de deslocamento aplicado. Essa tolerância foi de 0,1% para as lajes sem armadura de cisalhamento e de 1% para as lajes com armadura de cisalhamento. Essa diferença é justificada pela sensibilidade do modelo numérico adotado e foi definida com base na validação do modelo. A norma euclidiana foi utilizada e é representada pela expressão (3.5).

$$\|R\|_2 = \left( \sum_i^n R_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

## 4 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

### 4.1 LAJES SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO

#### 4.1.1 Lajes de Gomes (1991)

Um conjunto de doze lajes foram ensaiadas por Gomes (1991) em sua tese. Essas lajes possuíam 20 cm de espessura e 300 cm de comprimento, com um pilar central quadrado de 20 cm de lado. A armadura de flexão foi similar para todas as lajes ensaiadas, sendo composta por 31 barras de 16 mm de diâmetro em cada direção para a armadura superior, e 21 barras de 8 mm em cada direção para a armadura inferior.

Duas das doze lajes ensaiadas não possuíam armadura para o combate à punção, e essas lajes foram denominadas laje 1 e laje 1A. Assim, para efeito de validação, adotou-se a laje 1 dentro do conjunto de lajes ensaiadas por Gomes (1991). Para validação do modelo numérico, adotaram-se, como características dos materiais, os valores encontrados nos ensaios experimentais realizados por Gomes (1991).

A Figura 4.1 apresenta o diagrama carga x deslocamento obtidos no centro da laje juntamente com os valores obtidos experimentalmente por Gomes (1991).

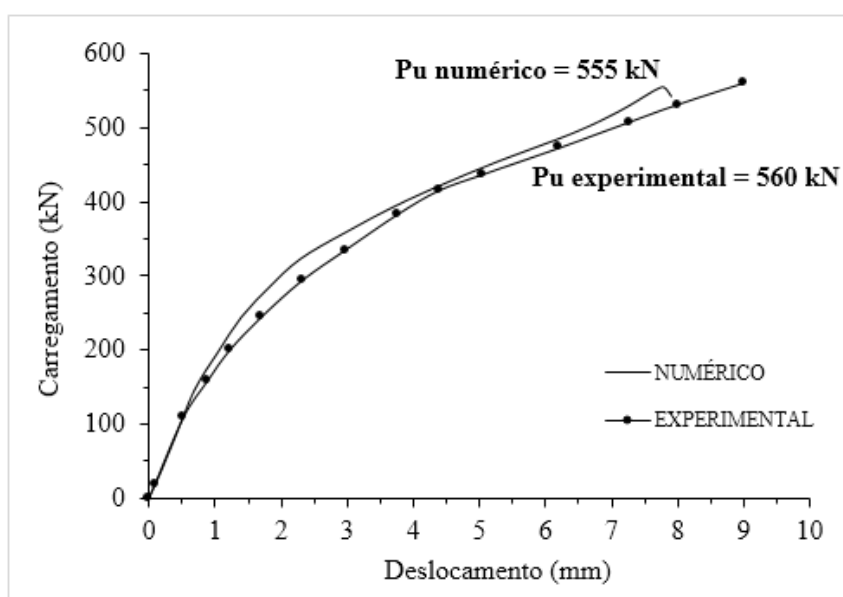


Figura 4.1 – Diagrama carga deslocamento no centro da laje 1

#### 4.1.2 Lajes de Coelho (1999)

O trabalho de Coelho (1999) apresenta os resultados de ensaios de dez lajes de concreto armado realizados no Laboratório de Estruturas da Universidade de Brasília. Conforme dados dos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999), utilizou-se uma armadura de flexão superior na laje constituída por 20 barras de diâmetro de 12,5 mm em cada direção, espaçadas por 94 mm, enquanto 12 barras de diâmetro de 6,3 mm em cada direção, com espaçamento de 163 mm, compuseram a armadura de flexão inferior. O cobrimento adotado foi de 2 cm. A laje de lado  $L=180$  cm e espessura  $t=13$  cm apresenta uma área central de  $12 \times 12$  cm carregada com uma força de 316 kN, correspondente à carga última encontrada nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999). Para validação do modelo numérico, adotaram-se, como características dos materiais, os valores encontrados nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999).

A Figura 4.2 apresenta os deslocamentos obtidos para o centro da laje, juntamente com valores de ensaios experimentais da laje L1 realizados por Coelho (1999). Observando os resultados, nota-se que o programa apresenta uma boa aproximação com os resultados experimentais.

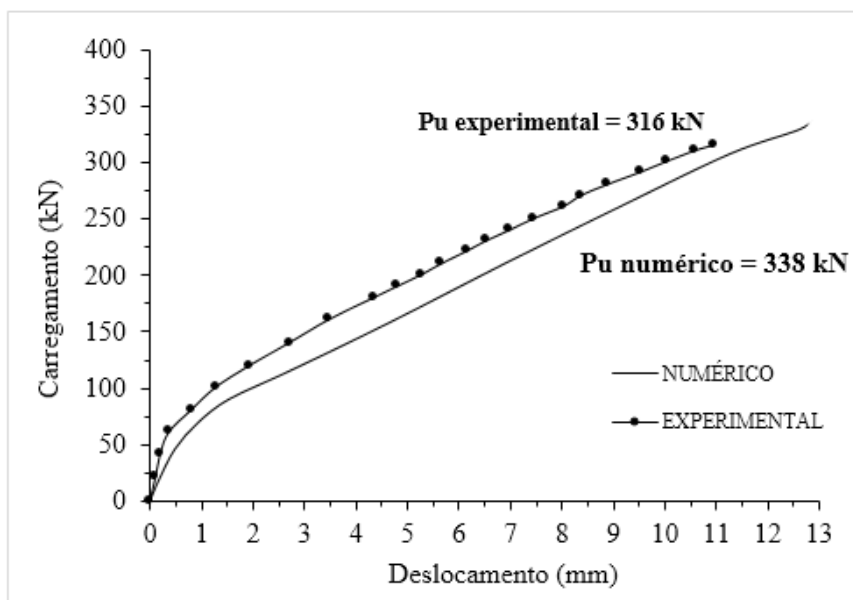


Figura 4.2 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje L1

#### 4.1.3 Lajes de Melges (2001)

Melges (2001) ensaiou lajes de concreto armado e protendido, com e sem armadura de punção. As lajes ensaiadas foram lajes quadradas de 16 cm de espessura e 250 cm de lado. O carregamento na laje foi realizado através de uma chapa de aço de 18 cm de lado e 12 cm de espessura.

As armaduras de flexão das lajes de concreto armado foram compostas por barras de 16 mm e 8 mm de diâmetro. Para a armadura superior foram adotadas 25 barras de 16 mm em cada direção e para armadura inferior 25 barras de 8 mm. O cobrimento do concreto foi de 1,5 cm.

As propriedades dos materiais utilizados na análise numérica foram iguais as propriedades adotadas por Melges (2001) e a laje escolhida para validação do modelo foi a laje M1. A Figura 4.3 apresenta os deslocamentos obtidos para o centro da laje, juntamente com valores de ensaios experimentais da laje M1 realizados por Melges (2001).

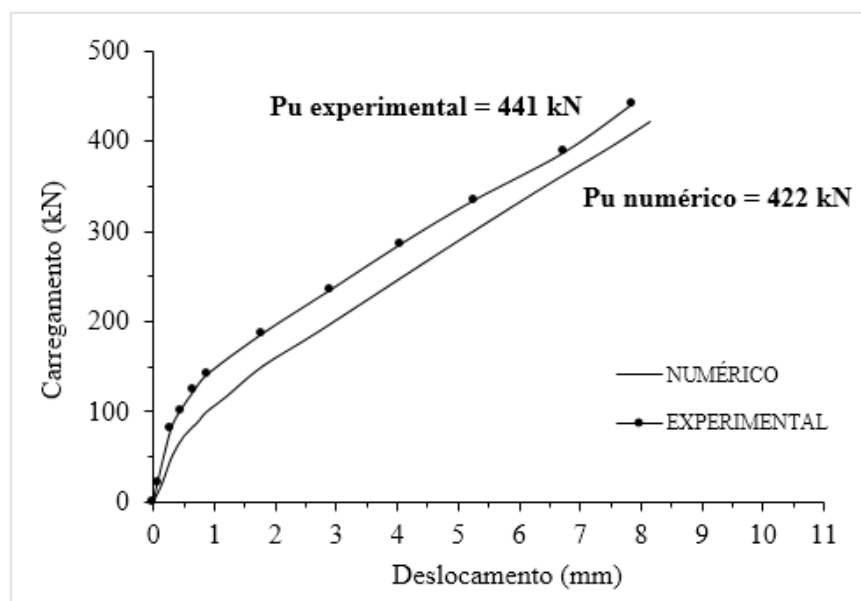


Figura 4.3 – Diagrama carga deslocamento laje M1

#### 4.1.4 Lajes de Musse (2004)

Foram ensaiadas quatro lajes cogumelo de concreto armado, sendo o conjunto composto por três lajes com armadura de cisalhamento e uma laje sem, denominada L1. Essa laje foi adotada para realização do modelo numérico nesse trabalho.

A laje escolhida é uma laje quadrada de 180 cm de lado e 13 cm de espessura. O carregamento era aplicado por uma chapa metálica de 15 cm de lado. A armadura de flexão foi composta por duas malhas, sendo no bordo superior 19 barras de 12,5 mm de diâmetro em cada direção e no bordo inferior 11 barras de 6,3 mm de diâmetro em cada direção. As características dos materiais foram adotadas iguais as apresentadas por Musse (2004).

A Figura 4.4 apresenta os deslocamentos obtidos para o centro da laje, juntamente com valores de ensaios experimentais da laje M1 realizados por Musse (2004).

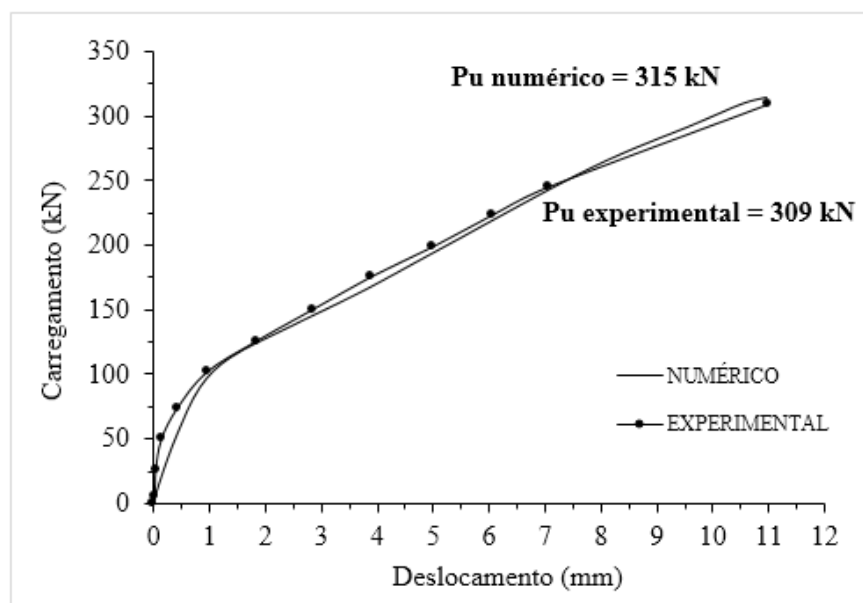


Figura 4.4 – Diagrama carga deslocamento da laje L1

#### 4.1.5 Lajes de Ferreira (2010)

Para estudar o comportamento de ligações laje-pilar interno com armadura de cisalhamento, Ferreira (2010) ensaiou um conjunto de 16 lajes, sendo composto por lajes com e sem armadura de cisalhamento.

As lajes ensaiadas foram lajes quadradas com lados de 250 cm e espessura de 18 cm. As armaduras de flexão foram compostas por 26 barras de 16 mm de diâmetro em cada direção para a malha superior, e de 13 barras de 8 mm de diâmetro em cada direção para a malha inferior. O cobrimento adotado foi de 2 cm para as barras superiores e de 1 cm para as barras inferiores.

Para a comparação do modelo numérico com o experimental foi adotado a laje denominada LS05. A Figura 4.5 apresenta os deslocamentos obtidos na região central da laje, juntamente com valores médios do ensaio experimental da laje LS05 realizado por Ferreira (2010).

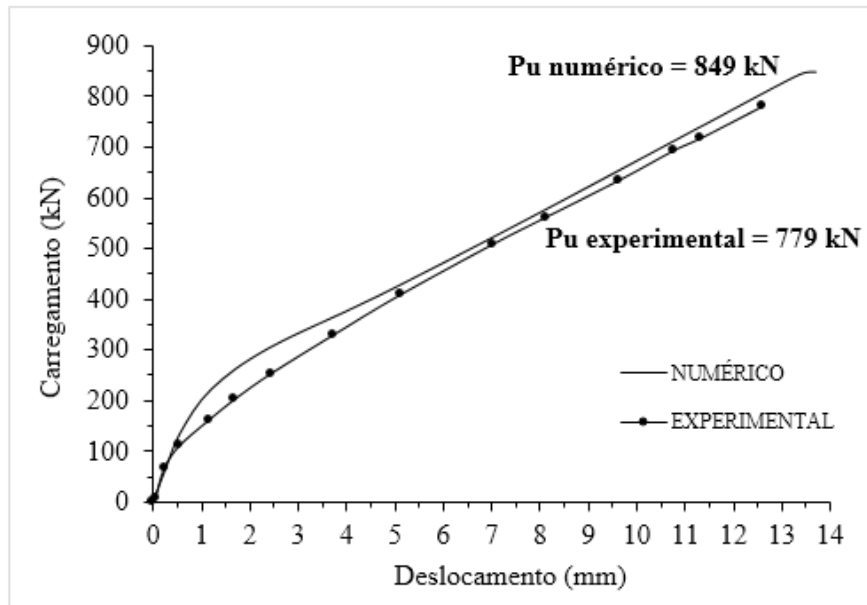


Figura 4.5 – Diagrama carga deslocamento da laje LS05

#### 4.1.6 Lajes de Lima (2012)

Foram ensaiadas no laboratório de estruturas da Universidade de Brasília lajes lisas para análise da resistência ao cisalhamento e do comportamento de ligações laje-pilar, em lajes apoiadas em pilares internos quadrados com e sem armadura de cisalhamento para um carregamento centrado. As lajes ensaiadas apresentaram dimensões de 250 cm de lado e de 18 cm de altura.

Todos os modelos de lajes tinham pilares quadrados com dimensões de face de 30 cm. A laje escolhida para comparação com o modelo numérico adotado foi a laje denominada L0-01.

As armaduras de flexão superior e inferior dos modelos ensaiados foram do tipo CA 50. As armaduras superiores foram compostas por barras com diâmetro de 16 mm, e espaçamentos de 90 mm em uma direção e 100 mm na outra. As armaduras de flexão inferiores foram compostas por barras de 8 mm dispostas uniformemente nas duas direções, com a função de evitar a formação de fissuras durante transporte e manter a ligação laje-pilar após a ruptura por cisalhamento. As propriedades dos materiais adotadas foram iguais as propriedades encontradas nos ensaios de Lima (2012).

A Figura 4.6 apresenta os deslocamentos obtidos no centro da laje pelo método experimental e numérico.

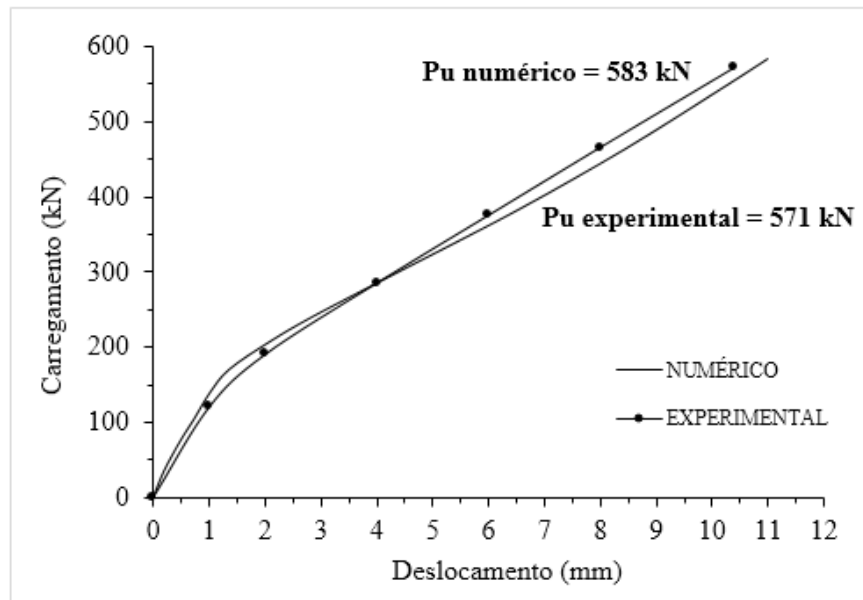


Figura 4.6 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje L0-01

#### 4.1.7 Cargas de ruptura

As cargas de ruptura encontradas nos modelos numéricos apresentaram uma aproximação muito boa em relação as cargas de ruptura reais. Essa constatação pode ser observada na Figura 4.7, que mostra a razão entre a carga de ruptura experimental e a numérica, sendo a média das razões igual a 0,98. Dessa forma, o modelo numérico adotado para simular o comportamento de lajes lisas sem armadura de cisalhamento se mostrou satisfatório.



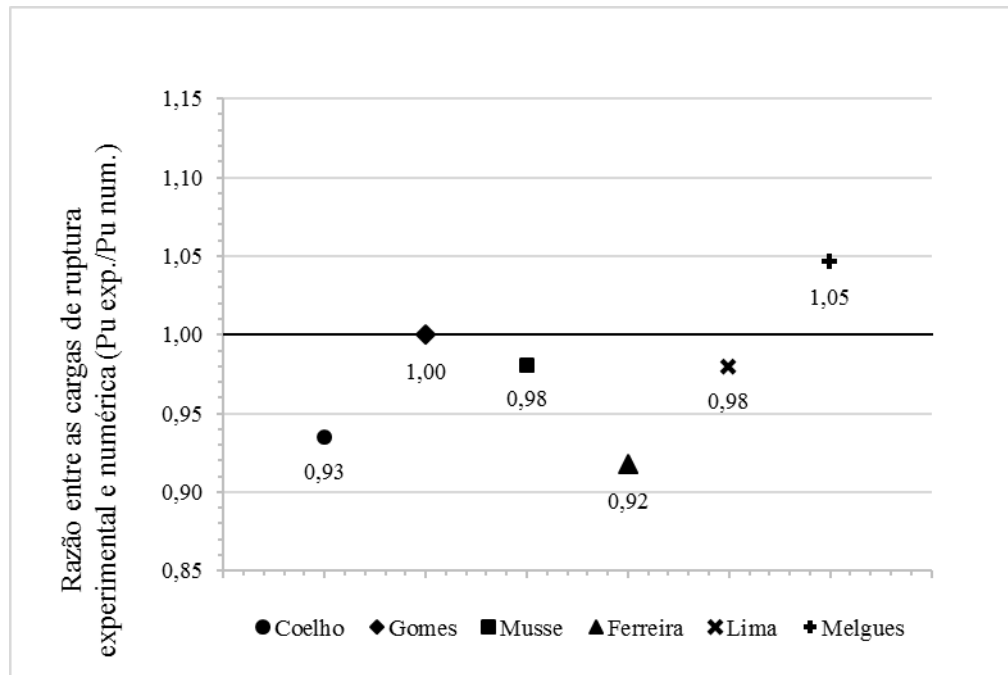


Figura 4.7 – Razão entre as cargas de ruptura experimental e numérica das lajes lisas sem armadura de cisalhamento

## 4.2 LAJES COM ARMADURA DE CISALHAMENTO

### 4.2.1 Lajes de Trautwein (2001)

O trabalho de Trautwein (2001) apresenta os resultados de ensaios de nove lajes de concreto armado realizados no Laboratório de Estruturas da Universidade de Brasília com o objetivo de investigar a eficiência de dois tipos de armadura de cisalhamento. As lajes são quadradas, com 300 cm de lado e 20 cm de espessura, carregada por um pilar central quadrado de 20 cm de lado. Utilizou-se uma armadura de flexão superior na laje constituída por 31 barras de diâmetro de 16 mm em cada direção, espaçadas de 10 cm, e 21 barras de 8 mm de diâmetro em cada direção, com espaçamento de 15 cm para a armadura de flexão inferior. Os modelos adotados fazem parte do Grupo 1 ensaiado por Trautwein (2001), sendo composto pelas lajes 1, 4 e 9. Para essas lajes a armadura de punção adotada é composta por *studs*, possuindo a configuração conforme Figura 4.8. A diferença entre as lajes é o diâmetro dos *studs* utilizados na armadura de punção, sendo de 12,5 mm para laje 1, 16 mm para laje 4 e 10 mm para laje 9. Para validação do modelo numérico, adotaram-se, como características dos materiais, os valores encontrados nos ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001).

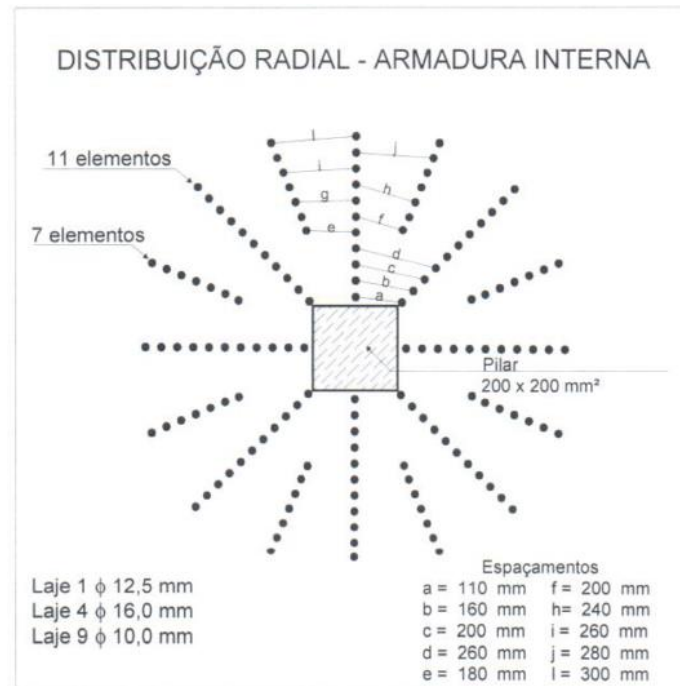


Figura 4.8 – Esquema de distribuição radial da armadura de cisalhamento da lajes 1,4 e 9 (TRAUTWEIN, 2001)

As Figuras 4.9 a 4.11 apresentam os deslocamentos obtidos para o centro da laje, juntamente com valores de ensaios experimentais das lajes 1, 4 e 9, sendo que, nos ensaios experimentais, os deslocamentos não foram medidos até a ruptura. Observando os resultados, nota-se que o programa apresenta uma boa aproximação com os resultados experimentais.

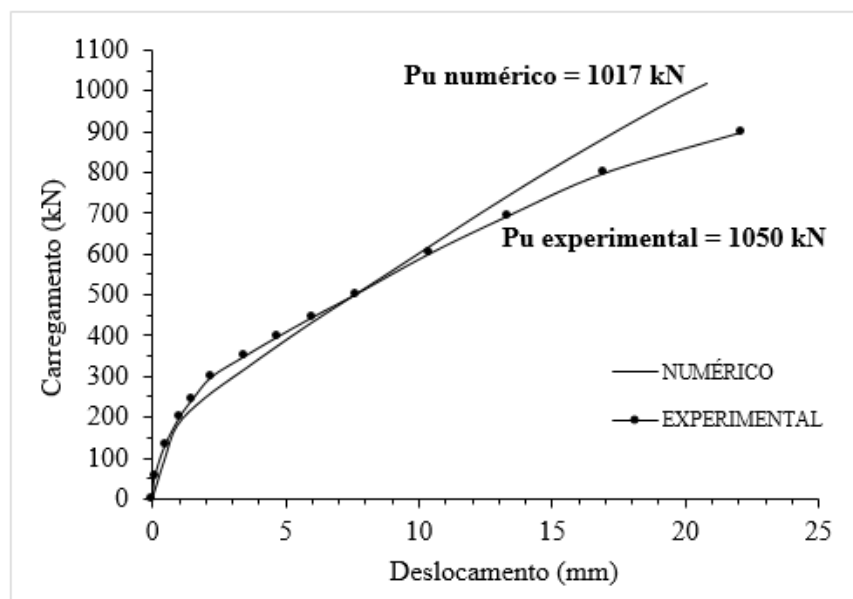


Figura 4.9 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje 1

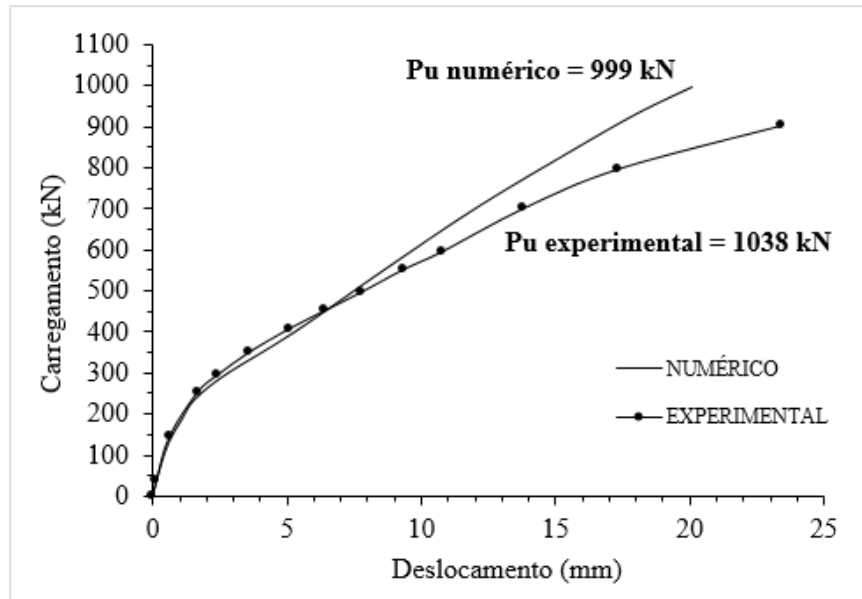


Figura 4.10 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje 4

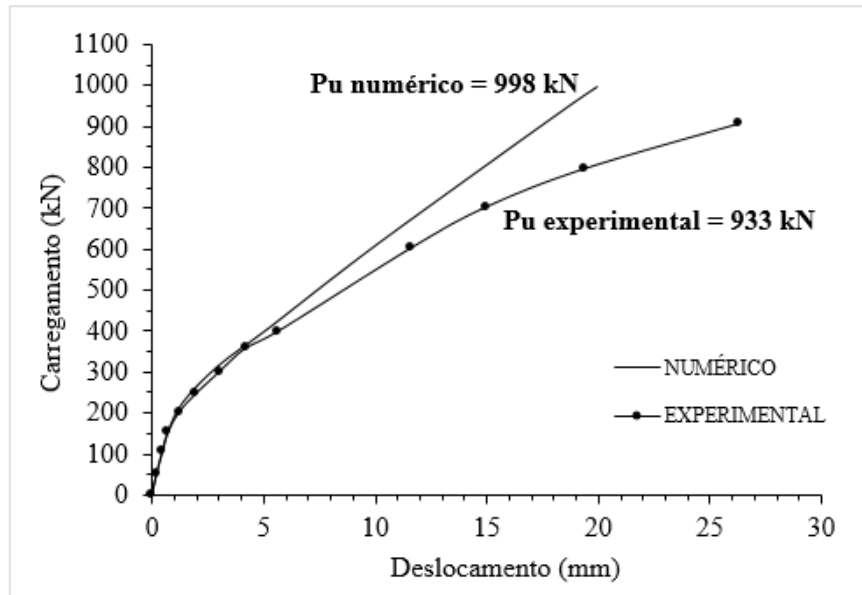


Figura 4.11 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje 9

#### 4.2.2 Laje de Trautwein (2006)

Em sua tese, Trautwein (2006) ensaiou onze lajes quadradas de concreto com 300 cm de lado e 20 cm de espessura, com pilar central quadrado de 20 cm de lado. A armadura de flexão foi composta por 31 barras de 16 mm de diâmetro no bordo superior em cada direção, espaçadas a

cada 10 cm. Para o bordo inferior, utilizaram-se 21 barras de 8 mm de diâmetro em cada direção, espaçadas a cada 15 cm. A laje escolhida para validar o modelo numérico foi a laje denominada E1. Essa laje possui uma armadura de cisalhamento composta por doze linhas com onze camadas de *studs* de 10 mm de diâmetro, espaçados a cada 6 cm. As propriedades dos materiais foram as mesmas adotadas por Trautwein (2006).

A Figura 4.12 apresenta os deslocamentos obtidos no centro da laje juntamente com os valores dos resultados experimentais da laje E1. É possível observar na Figura 4.12 o bom comportamento do modelo numérico para representar o comportamento de lajes sob punção.

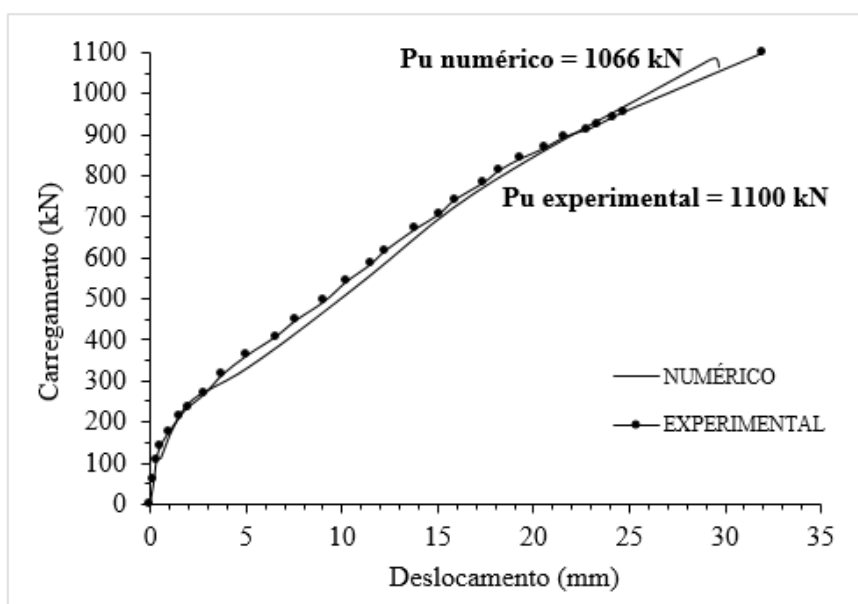


Figura 4.12 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje E1

#### 4.2.3 Lajes de Ferreira (2010)

As lajes ensaiadas foram lajes quadradas com lados de 250 cm e espessura de 18 cm. As armaduras de flexão eram compostas por 26 barras de 16 mm de diâmetro em cada direção, para a malha superior, e de 13 barras de 8 mm de diâmetro em cada direção, para a malha inferior. A laje modelada nesse trabalho é denominada por Ferreira (2010) de LS01. Essa laje possui armadura de cisalhamento composta por *studs*, conforme mostra a Figura 4.13.

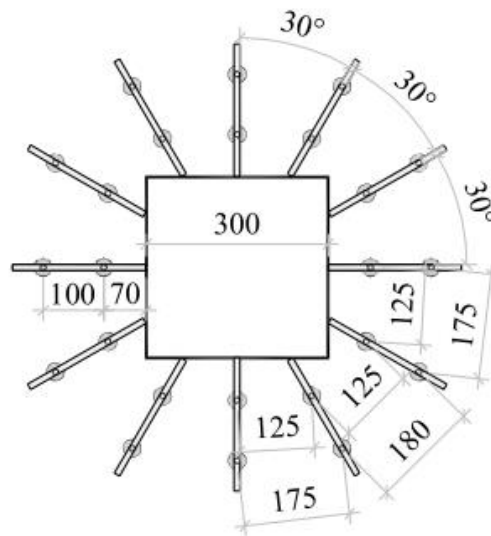


Figura 4.13 – Distribuição dos *studs* da laje LS01 (FERREIRA, 2010)

Para a armadura de cisalhamento da laje LS01 utilizaram-se doze linhas com duas camadas de 10 mm de diâmetro por linha. As propriedades dos materiais foram adotadas conforme Ferreira (2010). A Figura 4.14 apresenta os deslocamentos obtidos para o centro da laje, juntamente com valores de ensaios experimentais da laje LS01.

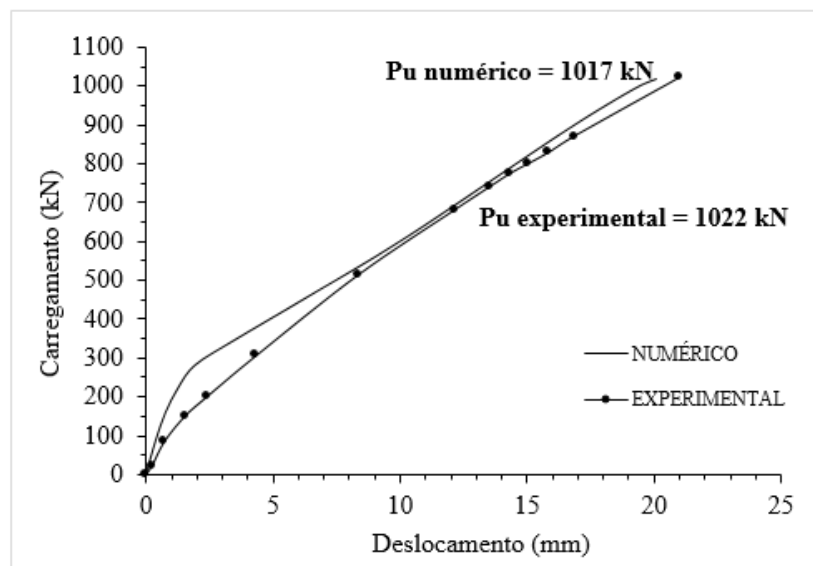


Figura 4.14 – Diagrama carga-deslocamento no centro da laje LS01

#### 4.2.4 Cargas de ruptura

As cargas de ruptura encontradas nos modelos numéricos apresentaram uma boa aproximação em relação as cargas de ruptura reais. Essa constatação pode ser observada na Figura 4.15, que mostra a razão entre a carga de ruptura experimental e a numérica, sendo a média das razões igual a 1,01. Assim, o modelo numérico adotado para simular o comportamento de lajes lisas com armadura de cisalhamento mostrou-se um modelo satisfatório.

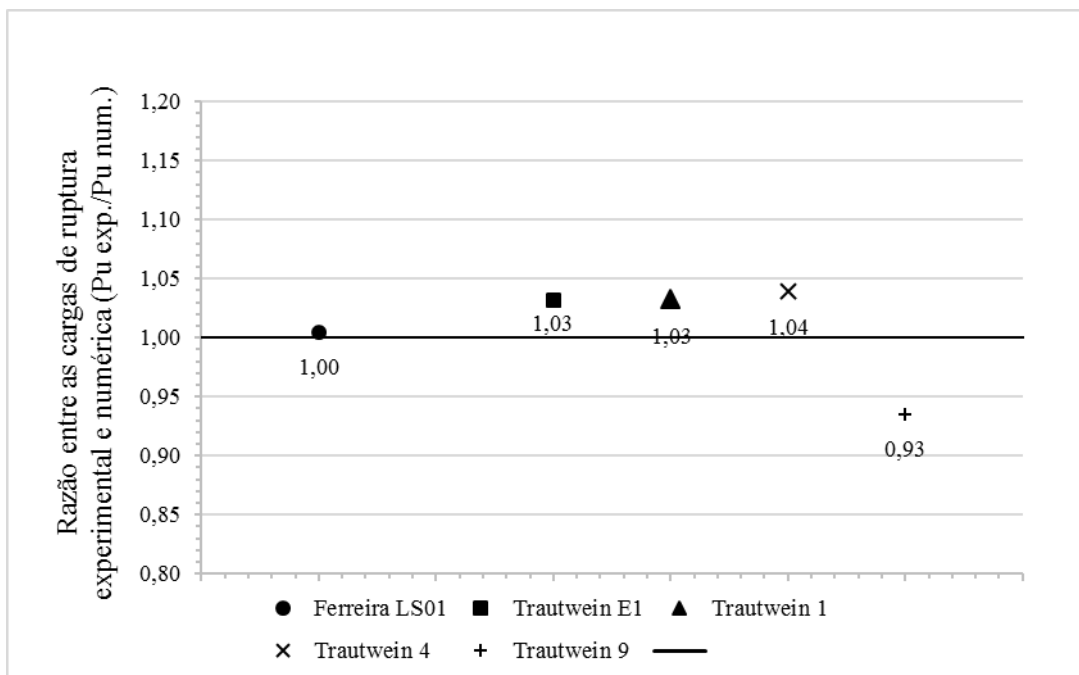


Figura 4.15 – Razão entre as cargas de ruptura experimental e numérica das lajes lisas com armadura de cisalhamento

## 5 ANÁLISE DA CONFIABILIDADE

A maioria dos fenômenos observados no mundo contém uma certa incerteza na previsão da resposta esperada. Isso pode ser comprovado ao se observar, por exemplo, um ensaio de compressão do concreto, onde as respostas obtidas para a tensão de ruptura em diversos ensaios raramente são as mesmas.

O dimensionamento de sistemas estruturais é baseado, fundamentalmente, pela comparação da resistência do sistema com a solicitação a ele imposta. Como a resistência é uma resposta obtida a partir de variáveis aleatórias, assim como a solicitação, o comportamento da estrutura também é um fenômeno aleatório. Assim, uma análise probabilística do comportamento das estruturas é essencial para se entender e projetar estruturas com níveis de segurança adequados.

Devido ao grande esforço de diversas áreas da engenharia durante as últimas décadas, normas e códigos modelos vêm sendo modificados para incorporar o conceito de análise e dimensionamento baseados em análises de risco e confiabilidade.

Atualmente, os modelos de dimensionamento são baseados na teoria da plasticidade, e consideram que o material apresenta deformação imediata e irreversível (ATAÍDE e CORRÊA, 2006). Anteriormente, a teoria de segurança utilizada nas estruturas era o Método das Tensões Admissíveis, onde as cargas máximas eram admitidas determinísticas, e onde as máximas tensões que poderiam ocorrer na estrutura não deveriam ultrapassar o valor das correspondentes tensões de ruptura dos materiais, divididas por um coeficiente de segurança.

### 5.1 PROBLEMA BÁSICO DA CONFIABILIDADE

Segundo Ang e Tang (1984), o problema básico da confiabilidade pode ser explicado como o modo de garantir que a capacidade seja maior que a demanda ao longo da vida útil dos sistemas. Na análise da confiabilidade estrutural, a demanda pode ser entendida como a solicitação devido às ações do carregamento ( $S$ ), e a capacidade como a resistência máxima que o sistema alcança para uma determinada finalidade ( $R$ ). Dessa forma, a segurança é garantida em termos probabilísticos, onde a probabilidade da resistência ser maior ou igual à solicitação indica a confiabilidade do sistema.

Para melhor entendimento da metodologia que será utilizada nesse trabalho, é pertinente rever alguns conceitos básicos relacionados a Teoria da Probabilidade e da Estatística antes de se ingressar na análise da confiabilidade.

A probabilidade é uma medida numérica da possibilidade de ocorrência de um evento relativo dentro do conjunto de todos eventos possíveis. Denomina-se evento a cada resultado possível de um fenômeno aleatório. O conjunto de todos os eventos possíveis chama-se espaço amostral.

Uma variável aleatória é uma função que associa um número real a cada resultado possível de um fenômeno aleatório, ou seja, atribui um valor numérico para cada elemento de um determinado espaço amostral (ANG e TANG, 2007). Ao contrário de uma variável determinística, que é representada por um único valor, uma variável aleatória pode assumir um valor para cada evento possível. Como uma variável aleatória representa um evento, ela somente pode assumir um valor numérico associado a uma probabilidade de ocorrência deste evento, e a lei que descreve a medida de probabilidade associada a cada um dos valores possíveis de uma variável aleatória é chamada de distribuição de probabilidade (REAL, 2000). A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  pode ser descrita através de sua função distribuição de probabilidade acumulada (FDA), conforme expressão (5.1).

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (5.1)$$

Na expressão (5.1) a variável aleatória genérica é designada por uma letra maiúscula, enquanto que a realização dessa variável será designada por uma letra minúscula.

Uma variável aleatória  $X$  é dita contínua se existe uma medida de probabilidade definida para qualquer valor de  $x$ . Sendo a variável aleatória  $X$  contínua, as probabilidades somente poderão estar associadas a intervalos definidos sobre a reta dos números reais. Assim, a probabilidade da variável aleatória  $X$  estar contida no intervalo  $x \leq X \leq x+dx$ , é definida pela expressão (5.2), onde a função  $f_X(x)$  é denominada função de densidade de probabilidade (FDP) da variável  $X$ .

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f_X(x)dx \quad (5.2)$$

A função distribuição acumulada (FDA) de uma variável aleatória contínua é dada pela expressão (5.3).



$$\mathbf{F}_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (5.3)$$

Por consequência da expressão (5.3), pode-se dizer que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  é igual à derivada da função de distribuição acumulada de probabilidade em relação à  $x$ , conforme mostra a expressão (5.4).

$$f_X(x) = \frac{d \mathbf{F}_X(x)}{dx} \quad (5.4)$$

O momento de primeira ordem de uma distribuição de probabilidade que representa a medida de tendência central, também denominada média ou valor esperado, é dada pela expressão (5.5).

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (5.5)$$

A medida de dispersão de uma distribuição de probabilidade, que é o cálculo do momento de segunda ordem em relação ao eixo central, é denominada de variância e é dada pela expressão (5.6).

$$Var[X] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (5.6)$$

A grande maioria das funções de distribuição de probabilidade tem seus parâmetros determinados pelo primeiro e segundo momento de uma distribuição de probabilidade.

As distribuições de probabilidade usualmente empregadas são: a distribuição Normal ou Gaussiana, Lognormal, Gumbel, Poisson, Exponencial, Gamma, Beta, entre outras. Essas distribuições são detalhadas em Ang e Tang (2007).

Tendo conhecimento das distribuições de probabilidade das funções das variáveis aleatórias  $R$  e  $S$ , ou adotando determinadas distribuições de probabilidade para as mesmas, podem-se utilizar diversas técnicas para se obter a probabilidade de falha e conseqüentemente a confiabilidade do sistema.

Neste trabalho é apresentada uma abordagem geral dos principais métodos para a avaliação da confiabilidade, sendo que, para uma análise detalhada, sugere-se consultar a bibliografia especializada no assunto, como Ang e Tang (1984), Haldar (2000) e Nowak e Collins (2000).

## 5.2 MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE

### 5.2.1 Método da integração numérica

Supondo que as funções de distribuição de probabilidade da resistência (R) e da solicitação (S) sejam conhecidas, a probabilidade de falha  $P_f$  do sistema é dada pela expressão (5.7).

$$P_f = P(R < S) = \sum_{\forall S} P(R < S | S = s) \cdot P(S = s) \quad (5.7)$$

Considerando a resistência e a solicitação como variáveis aleatórias estatisticamente independentes, a expressão (5.7) pode ser escrita conforme a seguinte expressão:

$$P_f = P(R < S) = \sum_{\forall S} P(R < S) \cdot P(S = s) \quad (5.8)$$

Para variáveis aleatórias contínuas:

$$P(R < S) = \mathbf{F}_R(s) \quad (5.9)$$

$$P(s \leq S \leq s + ds) = f_S(s)ds \quad (5.10)$$

Por consequência a expressão (5.8) fica igual a:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_R(s) f_S(s) ds \quad (5.11)$$

Dessa forma, a probabilidade de falha para variáveis aleatórias contínuas e estatisticamente independentes pode ser calculada pela chamada integral de convolução, dada pela expressão (5.11).

A resistência R e a solicitação S, contínuas e estatisticamente independentes, são representadas por suas funções densidade de probabilidade na Figura 5.1. A região sombreada da Figura 5.1 representa uma medida qualitativa da probabilidade de falha. Essa região depende da posição relativa de  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  e do grau de dispersão das variáveis aleatórias.

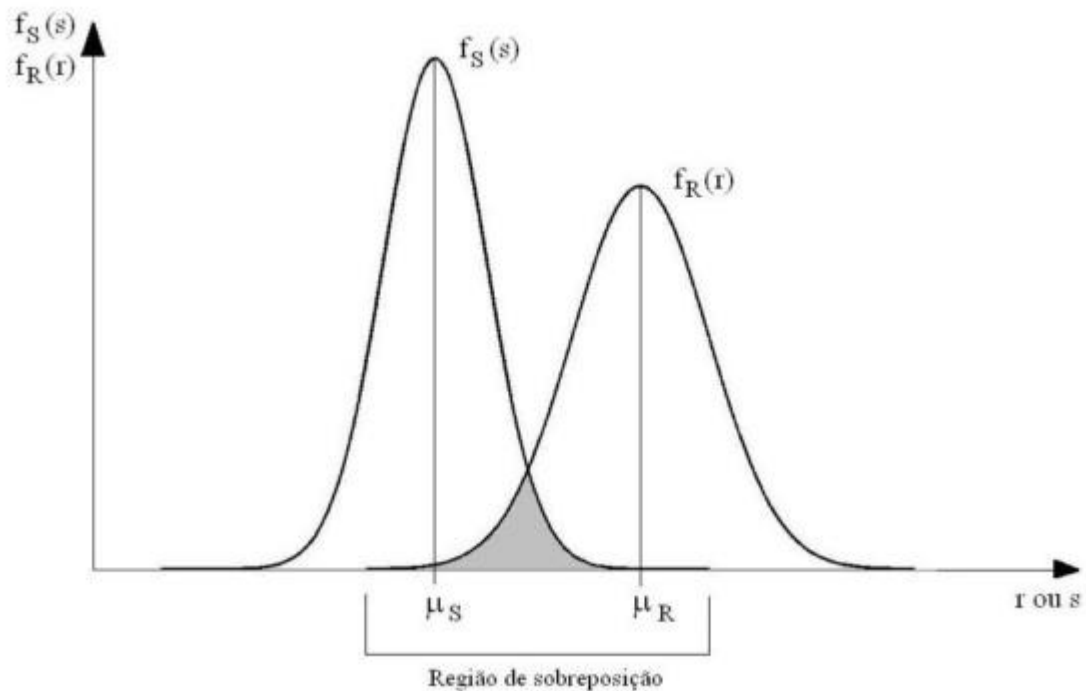


Figura 5.1 – Função de densidade de probabilidade de R e S  
(PALIGA, 2008)

As funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias normalmente utilizadas são funções complexas e dessa forma não apresentam solução analítica para a integral de convolução. A utilização desse método requer o conhecimento prévio das distribuições de probabilidade das funções de variáveis aleatórias da resistência e da solicitação, assim como o uso de métodos numéricos para se obter a probabilidade de falha do sistema.

### 5.2.2 Métodos de aproximação numérica

Muitas vezes as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias não são conhecidas ou apresentam funções muito complexas. Uma maneira de contornar esse problema é utilizando os métodos de aproximação numérica.

O método de segundo momento de primeira ordem (FOSM), o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM) e o método de confiabilidade de segunda ordem são alguns dos métodos mais utilizados para a solução desse tipo de problema. O detalhamento desses métodos pode ser encontrado na bibliografia especializada no assunto, como Haldar (2000) e Nowak (2000).

### 5.2.3 Métodos de simulação – Método de Monte Carlo

Os métodos de simulação são utilizados na análise da confiabilidade sem exigir um conhecimento avançado do usuário em probabilidade e estatística. As vantagens desses métodos são notórias quando se trabalha com funções de variáveis aleatórias complexas ou quando não se tem conhecimento do comportamento das funções da resistência ou solicitação. Nesses casos a utilização dos métodos citados anteriormente torna-se complexa e de difícil resolução.

Um dos métodos mais conhecidos para análise de confiabilidade é o método de Monte Carlo, que surgiu oficialmente no ano de 1949 com o artigo *The Monte Carlo Method*, de autoria dos matemáticos John Von Neumann e Stanislaw Ulam. Esse método depende de um processo repetitivo, simulando a resposta de funções de variáveis aleatórias, utilizando valores determinísticos das variáveis em cada ciclo de simulação. Os valores determinísticos são estipulados baseados nas distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias.

A repetição do processo gera uma amostra de soluções, cada uma correspondendo a um conjunto diferente de valores das variáveis aleatórias. Uma amostra obtida via simulação de Monte Carlo é similar a uma amostra de observações experimentais. Dessa forma, os resultados podem ser tratados estatisticamente e apresentados na forma de histogramas (SAN MARTINS, 2014). A Figura 5.2 mostra o processo básico de funcionamento do método de Monte Carlo.

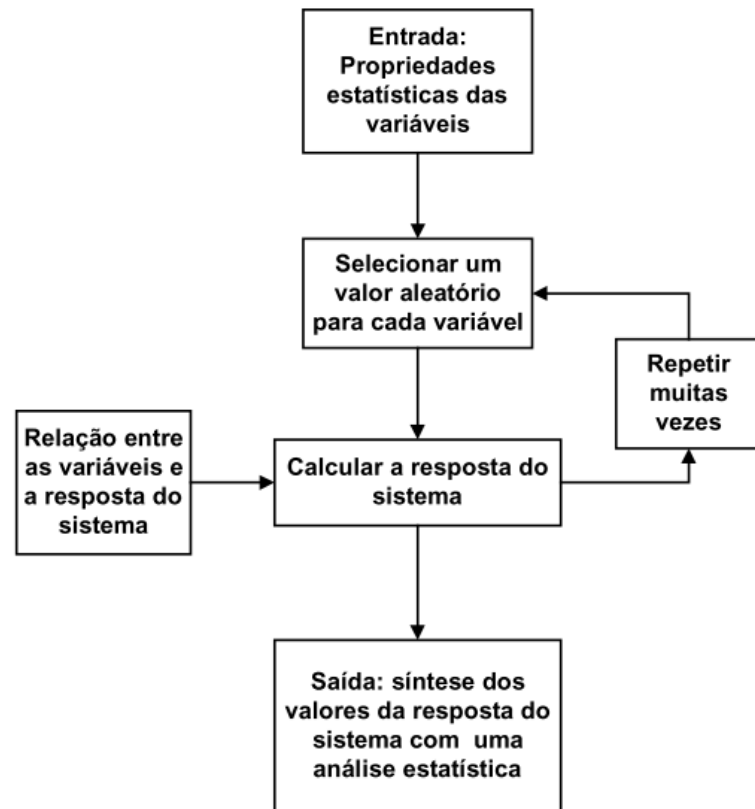


Figura 5.2 - Fluxograma do funcionamento do método de Monte Carlo (REAL, 2000)

Quando se utiliza a simulação de Monte Carlo direto para o cálculo de probabilidade de falha, uma função de desempenho ou de estado limite é preestabelecida e são computados os resultados insatisfatórios dentre o número de simulações realizadas. Com isso, a razão entre resultados de falha e número de simulações expressa a probabilidade do sistema falhar frente às restrições impostas (SAN MARTINS, 2014).

Este método apresenta boa precisão, porém a convergência do método exige que seja gerado um grande número de simulações, e dessa forma o método requer um grande esforço computacional para a realização de análises complexas.

Nesse trabalho, utilizou-se o método de Monte Carlo para obter-se resultados da resposta da função da resistência e da solicitação. Assim, trabalha-se estatisticamente com o conjunto de dados obtidos para se fazer a análise de confiabilidade das lajes. O método utilizado é justificado pela impossibilidade de simulações suficientes para se obter a confiabilidade diretamente pelo método de Monte Carlo.

### 5.3 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE $\beta$

O nível de segurança associado às estruturas pode ser representado por um índice de confiabilidade  $\beta$ . Quanto maior o valor desse índice, menor é a probabilidade de falha do sistema. O índice de confiabilidade a ser atingido por uma determinada estrutura em um determinado período é estipulado por normas e códigos.

Utilizaram-se neste trabalho duas metodologias para o cálculo do índice de confiabilidade. A primeira metodologia é empregada por diversos outros autores e consiste em formular o problema em termos de margem de segurança,  $M=R-S$ . Sendo  $R$  e  $S$  variáveis aleatórias,  $M$  também será uma variável aleatória com função densidade de probabilidade  $f_M(m)$ . Sendo assim, a probabilidade de falha é dada pela área sob a curva  $f_M(m)$  para valores de  $M$  inferiores a zero, conforme mostra a Figura 5.3.

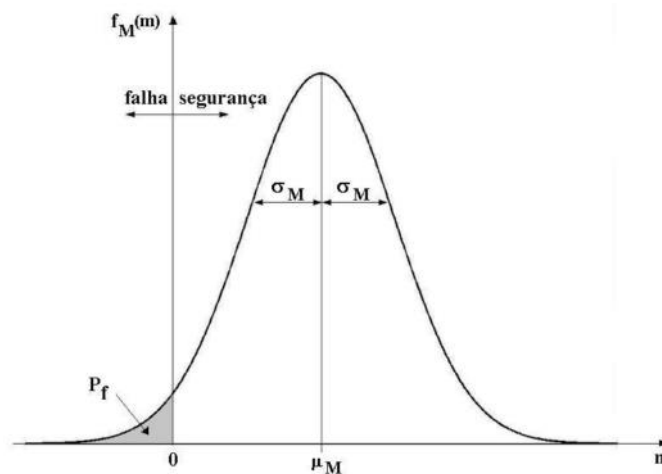


Figura 5.3 – Distribuição da margem de segurança (PALIGA, 2008)

Considerando as variáveis  $R$  e  $S$  como sendo estatisticamente independentes e apresentando distribuição normal de probabilidade, conseqüentemente a margem de segurança  $M$  também será uma variável aleatória normal, com média e desvio padrão dado pelas Equações (5.12) e (5.13), respectivamente.

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (5.12)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (5.13)$$

Dessa forma, a probabilidade de falha pode ser obtida pela expressão (5.14).

$$P_f = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (5.14)$$

Onde  $\Phi$  é a função de distribuição acumulada da variável normal padrão.

Pela expressão (5.14) pode ser observado que a confiabilidade é função da razão  $\frac{\mu_M}{\sigma_M}$ , conhecida na literatura como índice de confiabilidade, dado pela expressão (5.15).

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (5.15)$$

A segunda metodologia adotada é o cálculo do índice de confiabilidade, dado pela expressão (5.16).

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad (5.16)$$

A probabilidade de falha foi calculada pela integral de convolução, conforme expressão (5.11). As distribuições de probabilidade utilizadas na integral de convolução são adotadas a partir do estudo estatístico do conjunto de dados obtidos juntos às simulações numéricas.

Nas duas metodologias, o método de Monte Carlo é utilizado para se obter o primeiro e o segundo momento da função da variável aleatória da resistência, assim como um conjunto de dados suficientes para a análise estatística da resposta da estrutura.

## 5.4 FERRAMENTA DE ANÁLISE DE PROBABILIDADE DO ANSYS

Para trabalhar com as incertezas das variáveis que alimentam a entrada de dados para a solução de uma determinada simulação no ANSYS, o *software* utiliza uma ferramenta intitulada PDS (*Probabilistic Design System*). Com isso, é possível determinar o efeito de uma ou mais variáveis nos resultados da análise. Além disso, é possível estudar o comportamento de diversos parâmetros de forma não determinística.

Neste estudo, essa ferramenta foi utilizada para se obter dados sobre a carga de ruptura das lajes lisas. Assim, determinando-se um conjunto de parâmetros de entrada como variáveis aleatórias, obtém-se, como saída, um conjunto de valores da carga de ruptura e da solicitação na laje. Por fim, com essa amostra pode-se fazer uma análise estatística para determinar os principais momentos e o tipo de distribuição de probabilidade.

#### 5.4.1 Funcionamento da ferramenta PDS

O fluxograma do funcionamento da ferramenta PDS é mostrado na Figura 5.4. O arquivo de análise é feito em duas partes separadas, uma com os dados do modelo e outra com os dados da análise probabilística.

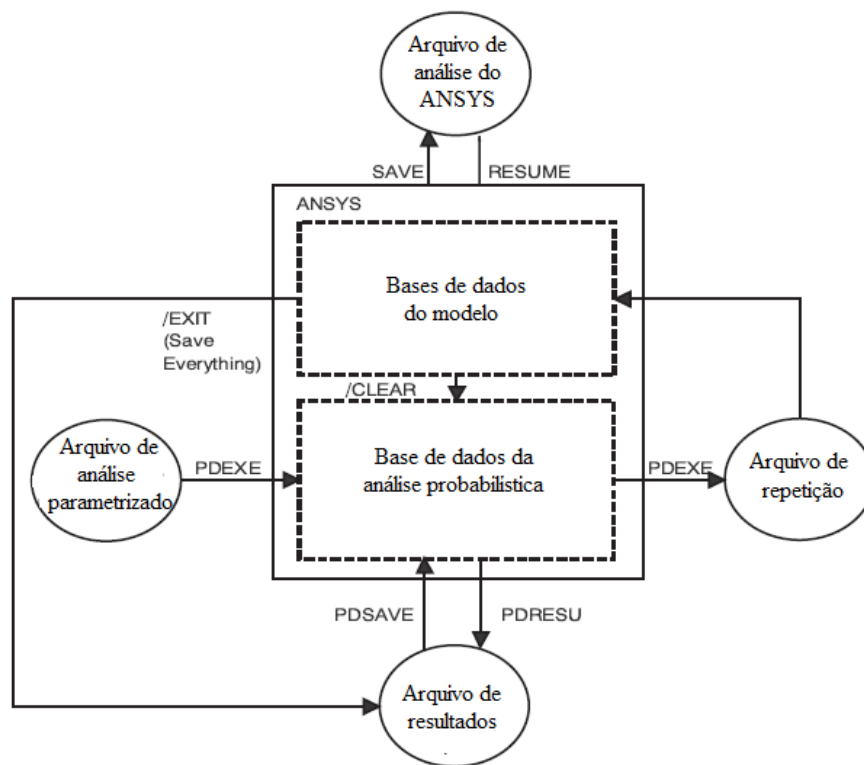


Figura 5.4 – Fluxograma do funcionamento da ferramenta PDS  
(Adaptado de ANSYS, 2013b)

Para se trabalhar com a ferramenta PDS é possível utilizar a interface gráfica do ANSYS ou criar um arquivo de entrada de comandos através da programação em APDL, sendo este o segundo método mais eficaz para análises mais complexas e utilizado neste trabalho.



O arquivo de análise é feito em duas etapas: primeiro se elabora uma macro contendo os passos de criação da geometria e malha de elementos finitos do modelo, definição dos materiais utilizados, condições de contorno, tipo de análise e parâmetros da solução. Além disso, devem ser definidos os parâmetros de saída, como por exemplo tensões e deslocamentos. Essa macro será utilizada na base de dados do modelo. Em segundo lugar, é definida a base de dados para a análise probabilística, sendo necessário definir os parâmetros que serão variados, assim como suas distribuições de probabilidade e seus momentos principais. É necessário definir também as correlações existentes entre as variáveis. Além disso, são definidas as variáveis de resposta e o método de análise probabilística. A Figura 5.5 mostra de forma resumida os comandos utilizados para realizar uma análise probabilística.

```
*create,reliability,pdan          ! Cria uma macro para ser usada durante
!                               ! o looping
!-----
! Entrada de dados do modelo
!-----
/PREP7                          ! Primeiro comando de uma sequência de comandos para
!                               ! definir o modelo de elementos finitos
...
/SOLU                           ! Comando inicial para definição de parâmetros da análise
!                               ! e solução
...
/POST26                         ! Comando inicial para definição da resposta da análise
...
!
*end                             ! Fecha a macro criada para usar no arquivo de
!                               ! repetição
!-----
! ANÁLISE DE PROBABILIDADE
!-----
!
/inp,Reliability,pdan           ! Abre a macro criada
/PDS                             ! Entra na ferramenta de análise de probabilidade
pdan1,Reliability,pdan         ! Define o arquivo de análise a ser usado
!                               ! no looping
!-----
! Declaração das variáveis aleatórias
!-----
PDVAR,Eci,GAUS,Eci,dsvect      ! Define o tipo de distribuição de probabilidade e seus
!                               ! parâmetros
!
PDCOR,fc,ft,roct              ! Define a correlação entre duas variáveis aleatórias
!
PDVAR,fr,resp                  ! Define o parâmetro de resposta
!-----
! Definição do método utilizado e os critério de convergência
!-----
PDMETH,MCS,LHS                 ! Especifica o método de Monte Carlo com amostragem de Latin
!                               ! Hypercube|
PDLHS,150,5,RAND,,AUTO,0.01,0.02,50,INIT ! 150 simulações, 5 ciclos de rep.
PDEXE,Reliability_result      ! Roda a análise e grava as resposta no arq.
!                               ! Reliability_result
fini
```

Figura 5.5 – Arquivo de comando resumido utilizado em uma análise de probabilidade

### 5.4.2 Distribuições de probabilidade

As distribuições de probabilidade que são encontradas na biblioteca interna do ANSYS são as distribuições normal, lognormal, triangular, uniforme, exponencial, Beta, Gamma e Weibull.

Ao se trabalhar com distribuições de probabilidades que não são encontradas na biblioteca do ANSYS, é necessário ajustar os parâmetros de uma das distribuições citadas acima de forma a melhor representar a distribuição de probabilidade desejada.

### 5.4.3 Monte Carlo e o Método da transformada inversa

A geração de valores aleatórios de acordo com as características de uma distribuição de probabilidade específica é a essência do método de simulação de Monte Carlo. De um modo geral, a geração de números uniformemente distribuídos entre zero e um pode ser facilmente obtida a partir do uso de computadores e tabelas. Dessa forma, basta apenas fazer a transformação do valor gerado pela distribuição uniforme em um valor com características específicas da distribuição de probabilidade adotada. Uma maneira de se fazer essa transformação é igualar o valor aleatório uniforme entre zero e um com a FDA da distribuição de probabilidade da variável em estudo. Assim, fazendo-se a transformada inversa da FDA, obtêm-se o valor da variável aleatória de acordo com a distribuição a ela definida. A Figura 5.6 mostra de forma gráfica o processo descrito acima.

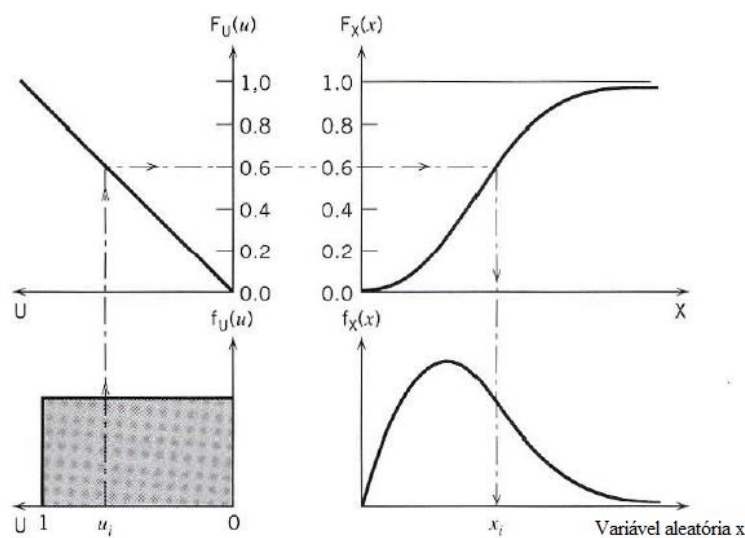


Figura 5.6 – Método da transformada inversa (adaptado de HALDAR, 2000)

#### 5.4.4 Método de Monte Carlo com amostragem de Latin Hypercube

Muitas vezes a utilização do método de Monte Carlo exige um grande número de simulações para se obter a convergência dos parâmetros de resposta. Uma forma de se contornar esse problema é se adotando uma técnica de redução de variância. A técnica adotada e disponível no ANSYS é a amostragem por *Latin Hypercube*. Nessa técnica, o intervalo de possíveis valores de cada variável é dividido em faixas, e um valor representativo é extraído de cada faixa. Esses valores são combinados de forma que cada valor representativo seja considerado apenas uma vez no processo de simulação, conforme mostra a Figura 5.7.

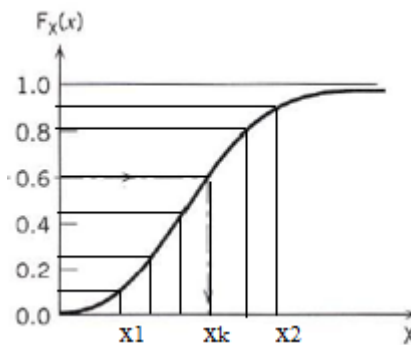


Figura 5.7 – Divisão da função distribuição acumulada

## **6 ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DO MÉTODO DE PROJETO DE LAJES SOB PUNÇÃO DE ACORDO COM A NBR-6118:2014.**

Para verificar a confiabilidade de lajes lisas sob punção, projetadas de acordo com a NBR 6118:2014, foram analisadas lajes sem armadura de cisalhamento e lajes com armadura de cisalhamento. Os parâmetros avaliados nesse estudo foram a resistência característica à compressão do concreto, a altura da laje e o carregamento acidental. Foram escolhidas três resistências características à compressão, 30, 60 e 90 MPa, três valores para a altura, 16, 20 e 24 cm, e três valores de cargas acidentais, 2, 4 e 6,0 kN/m<sup>2</sup>, formando uma combinação de 27 lajes. Além disso, as lajes sem armadura de cisalhamento tiveram seus esforços calculados, para o dimensionamento da armadura de flexão, pelo PEA e pelo MEF, formando assim um conjunto de 54 lajes sem armadura de cisalhamento. Já para as lajes com armadura de cisalhamento, calcularam-se apenas os esforços pelo PEA. Dessa forma, analisou-se no total um conjunto de 81 lajes.

### **6.1 CARACTERÍSTICAS DAS LAJES**

As lajes são denominadas pela letra L e mais 6 números, exemplificado pela laje L030216. O primeiro algarismo pode assumir o valor de zero ou um, sendo que zero significa a ausência de armadura de cisalhamento e um a presença da mesma. O segundo e o terceiro algarismo representam a resistência característica à compressão do concreto, em MPa. O quarto representa o carregamento acidental, em kN/m<sup>2</sup>, e o quinto e o sexto a altura da laje, em cm.

Para verificar a confiabilidade das lajes lisas sem armadura de cisalhamento, foi analisada uma laje de 11 x 11 m, apoiada sobre pilares de 40 x 40 cm, espaçados em 4,5 m, reproduzindo a situação de um pavimento com pilares distribuídos ortogonalmente e uniformemente espaçados, esquematizado na Figura 6.1.

No caso das lajes lisas com armadura de cisalhamento, estudou-se uma laje de 16 x 16 m, apoiada sobre pilares de 40 x 40 cm, espaçados em 7,0 m, reproduzindo a situação de um pavimento com pilares distribuídos ortogonalmente e uniformemente espaçados, esquematizado na Figura 6.2.

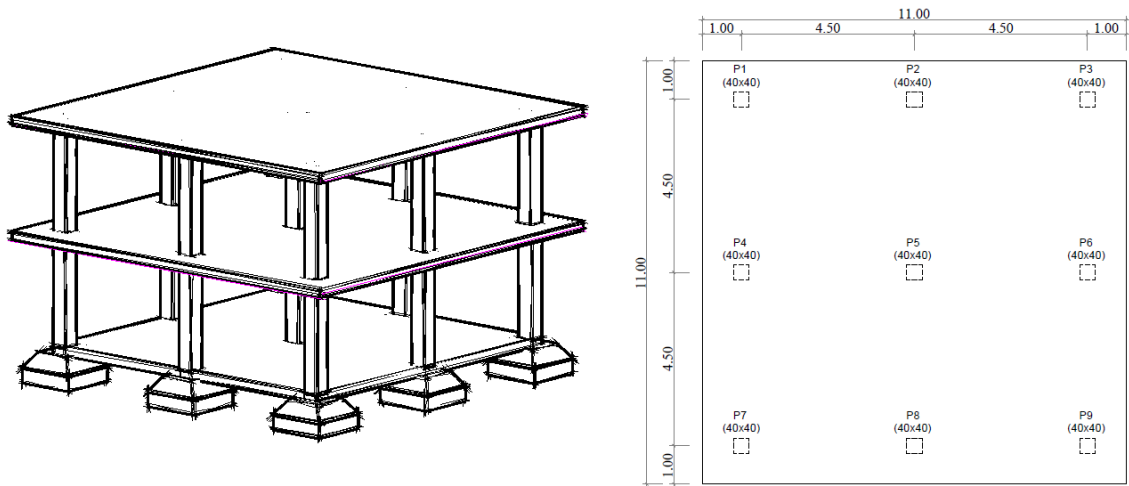


Figura 6.1 - Perspectiva e planta baixa da laje lisa sem armadura de cisalhamento estudada

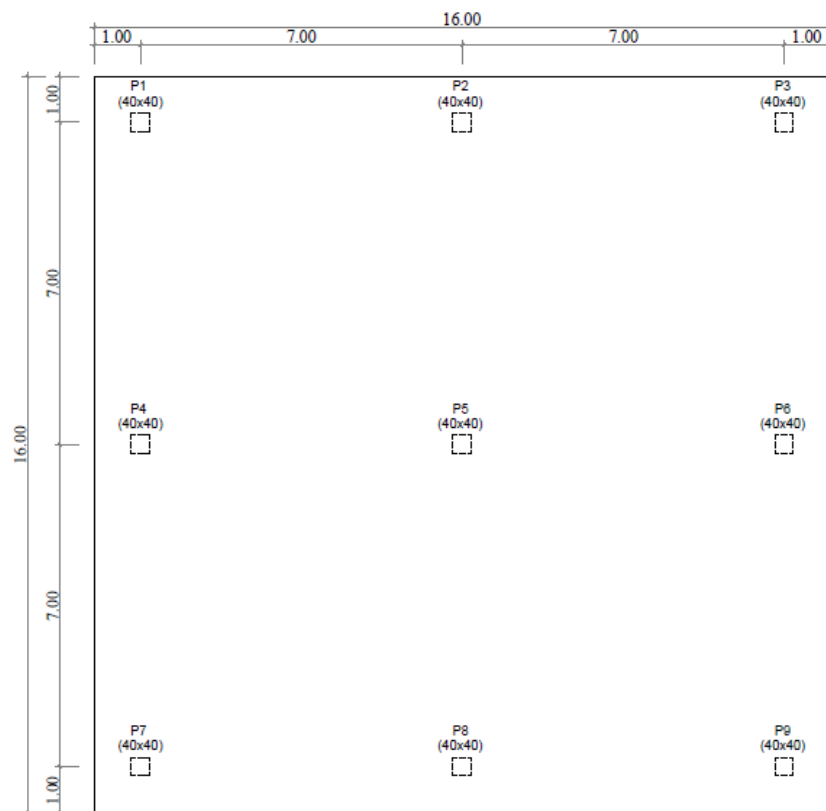


Figura 6.2 – Planta baixa da laje lisa com armadura de cisalhamento

A região estudada foi na ligação laje-pilar interno. Para reduzir o tempo computacional, estudou-se a região cujo momento fletor na laje é praticamente nulo, conforme Figura 6.3, e simulou-se um quarto da laje devido à simetria.

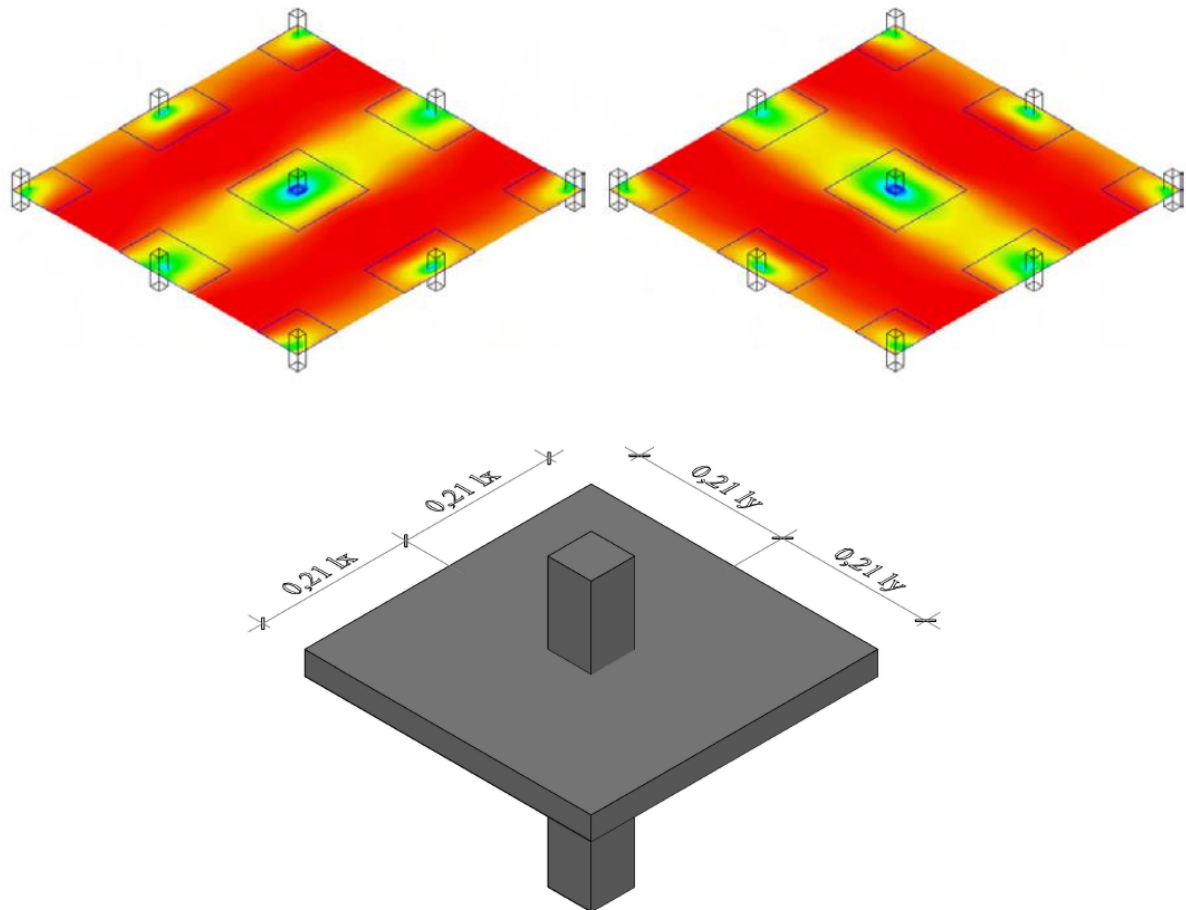


Figura 6.3 - Região da laje modelada

## 6.2 DIMENSIONAMENTO CONFORME A NBR 6118:2014

As lajes foram dimensionadas seguindo as prescrições da NBR 6118:2014. O carregamento permanente foi composto pelo peso próprio da estrutura e uma carga de  $1 \text{ kN/m}^2$ , devido ao revestimento. Para a carga acidental, consideraram-se três tipos de carregamento: 2, 4 e  $6,0 \text{ kN/m}^2$ . O cobrimento do concreto adotado foi de 2 cm.

Para o cálculo dos esforços utilizou-se dois métodos, o método dos elementos finitos e o processo elástico aproximado, sendo este último possível devido à consideração dos pilares dispostos em filas ortogonais, de maneira regular e com vãos aproximados.

A seguir serão apresentados os dois métodos utilizados, tomando como exemplo o cálculo dos esforços para a laje L030224.

### 6.2.1 Cálculo dos esforços pelo Processo elástico aproximado (PEA)

O cálculo dos esforços através do processo elástico aproximado consiste em modelar a estrutura em pórticos planos em cada direção, como mostra a Figura 6.4.

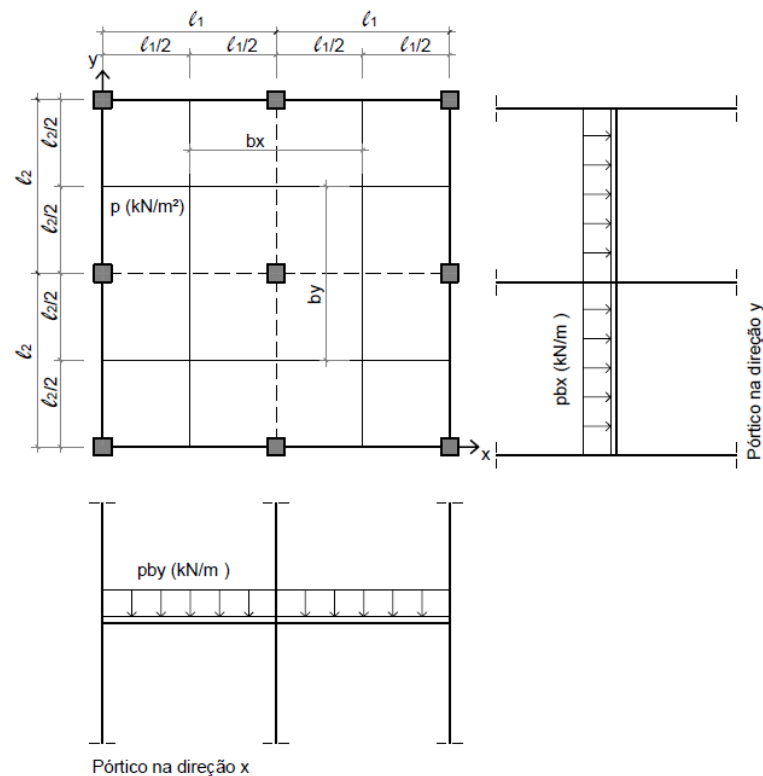


Figura 6.4 – Definição dos pórticos para o cálculo pelo PEA

Para esse pórtico considera-se a carga total. A inércia das barras horizontais é calculada considerando-se a largura da faixa limitada pela metade da distância entre duas linhas de pilares, e a altura é considerada igual à espessura da laje. Com isso, foi calculado os momentos atuantes no pórtico e foi feita a redistribuição dos momentos em faixas da laje conforme a Figura 6.5.

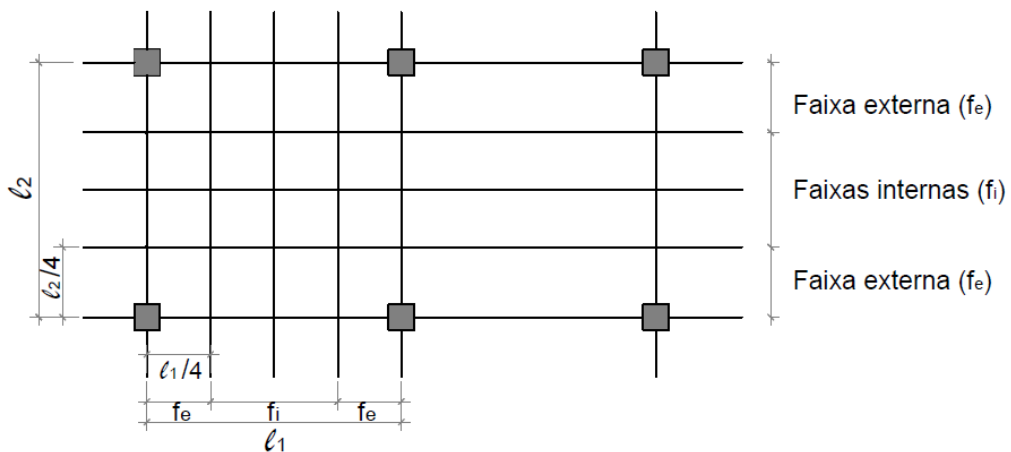


Figura 6.5 – Definição das faixas externas e internas das lajes  
(Adaptado de NBR-6118,2014)

De acordo com a NBR-6118:2014, a distribuição dos momentos é dada por:

- 45 % dos momentos positivos máximos para as faixas internas;
- 27,5 % dos momentos positivos máximos para as faixas externas;
- 25 % dos momentos negativos máximos para as faixas internas;
- 37,5 % dos momentos negativos máximos para as faixas externas.

A laje L030224, que não possui armadura de punção, apresenta resistência característica à compressão do concreto igual a 30 MPa, espessura de 24 cm e carregamento composto pelo peso próprio, carga de revestimento de 1 kN/m<sup>2</sup> e uma carga acidental de 2 kN/m<sup>2</sup>. O pórtico considerado é mostrado na Figura 6.6.



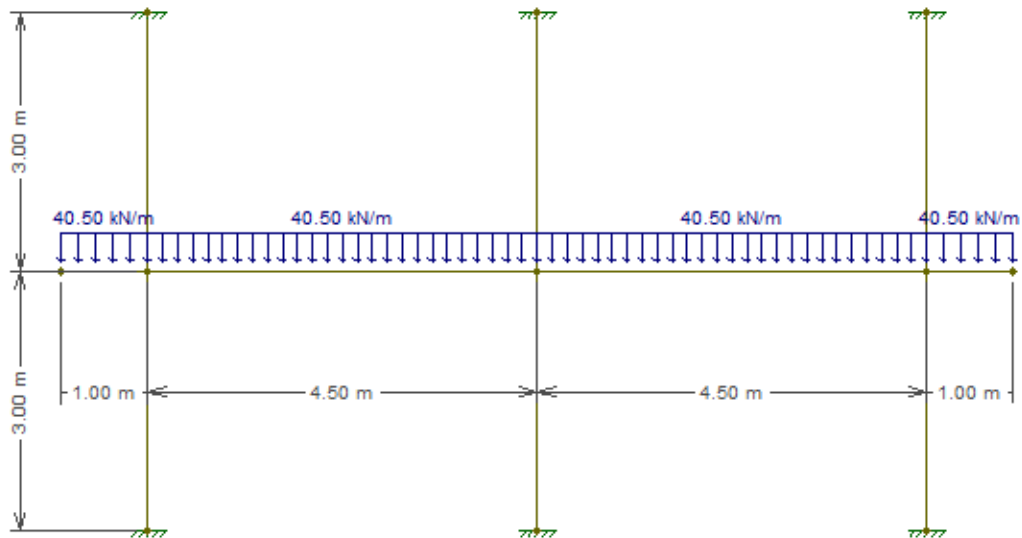


Figura 6.6 – Pórtico utilizado para obtenção dos esforços pelo PEA para laje L030224

Com o auxílio do software *Ftool*, foram calculados os momentos fletores atuantes na estrutura. Com esses valores calculou-se a distribuição dos esforços nas faixas internas e externas da laje. Assim, o valor encontrado do momento negativo usado para o dimensionamento da região do pilar interno foi de 26,10 kN.m/m.

### 6.2.2 Cálculo dos esforços pelo Método dos Elemento Finitos (MEF)

Para o cálculo dos esforços pelo MEF, foi feita uma análise linear utilizando o *software* SAP2000, sendo a estrutura modelada com as mesmas cargas e as mesmas características dos materiais utilizados no PEA.

O elemento utilizado para representar a laje foi o elemento tipo *shell* e para a modelagem do pilar foi utilizado o elemento *frame*. O diagrama dos momentos fletores foi calculado para cada linha da malha, do eixo central do pilar até a distância igual à largura da faixa externa, espaçados pela dimensão do elemento transversal à linha analisada, conforme Figura 6.7.

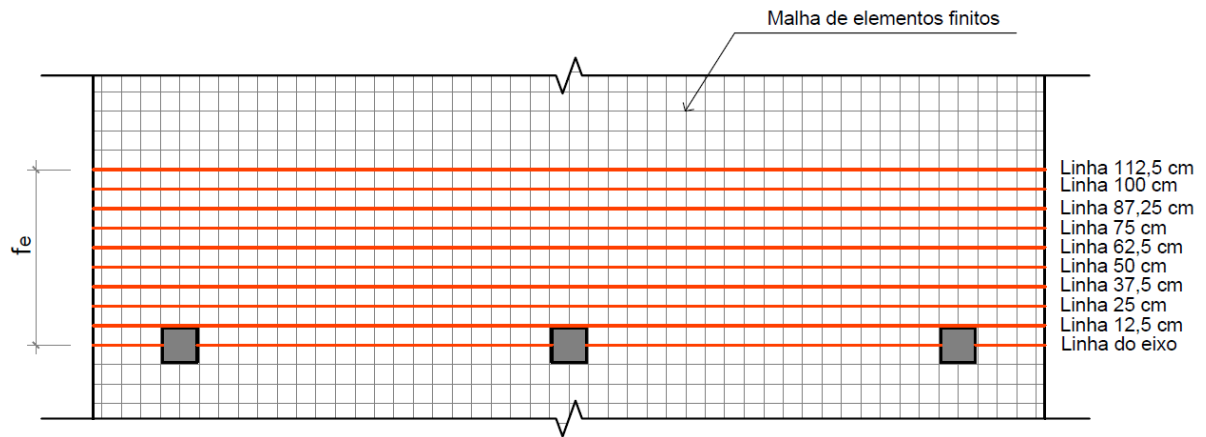


Figura 6.7 – Linhas para o cálculo do momento fletor pelo MEF

O momento fletor adotado foi obtido pela média aritmética dos momentos encontrados em cada linha. Para o dimensionamento da região de ligação laje-pilar pelo MEF foi utilizado o momento negativo de 34,65 kN.m/m. A Figura 6.8 mostra o diagrama de momento fletor da laje L030224 encontrado em cada linha, e a Figura 6.9 mostra a média desses diagramas.

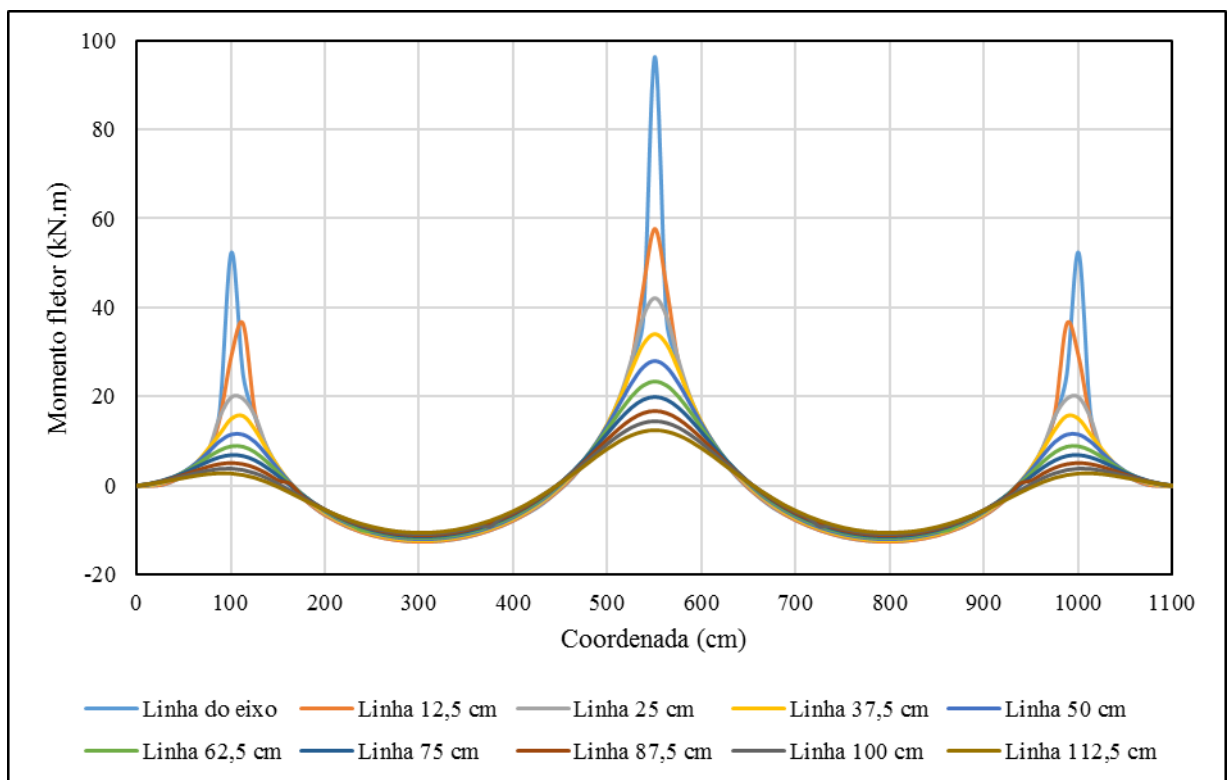


Figura 6.8 – Diagrama dos momentos fletores referente às linhas analisadas pelo MEF

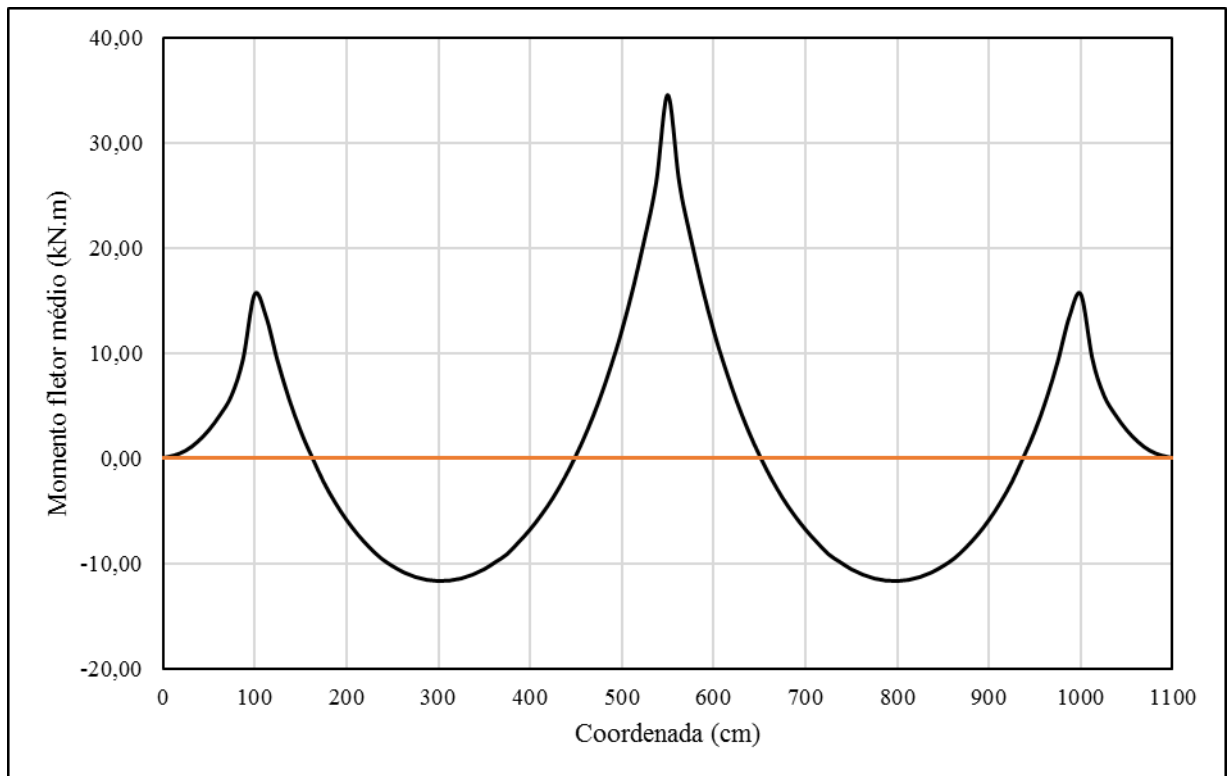


Figura 6.9 – Diagrama da média dos momentos fletores

Para todas as lajes analisadas, o momento fletor calculado pelo MEF foi superior na região das faixas externas, porém, notou-se que na região das faixas internas o PEA apresentou valores superiores aos encontrados pelo MEF. Os valores dos momentos fletores pelo MEF adotados para os dimensionamentos à flexão das lajes foram em média 31,64 % maiores que os encontrados pelo PEA.

### 6.2.3 Armadura de flexão, colapso progressivo e cisalhamento

As armaduras de flexão foram obtidas a partir dos momentos encontrados nas análises dos esforços pelo PEA e MEF. Por se tratar de uma análise numérica, optou-se por utilizar diâmetros não comerciais para as barras da armadura, com isso se conseguiu que todas as lajes tivessem a mesma relação de área de aço calculado e existente. O Apêndice A.1 apresenta a armadura de flexão de cada laje analisada.

Para garantir a ductilidade local e a consequente proteção contra o colapso progressivo, a área de aço da armadura de flexão inferior que atravessa o pilar deve ser maior ou igual a 1,5 vezes

a força solicitante de cálculo dividida pela tensão de cálculo do escoamento do aço. O Apêndice A.2 mostra as armaduras de colapso progressivo das lajes analisadas.

A armadura de cisalhamento é composta por armaduras tipo *studs* distribuídas de forma radial. As disposições dessas armaduras para as lajes analisadas são mostradas nas Figuras 6.10 a 6.15, e a descrição dessas são apresentadas no Apêndice A.3. Para as lajes sem armadura de cisalhamento, o Apêndice A.4 apresenta a verificação dos perímetros de controle.

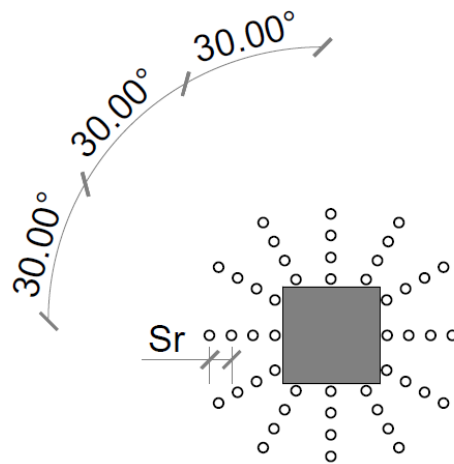


Figura 6.10 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por quatro camadas de *studs*

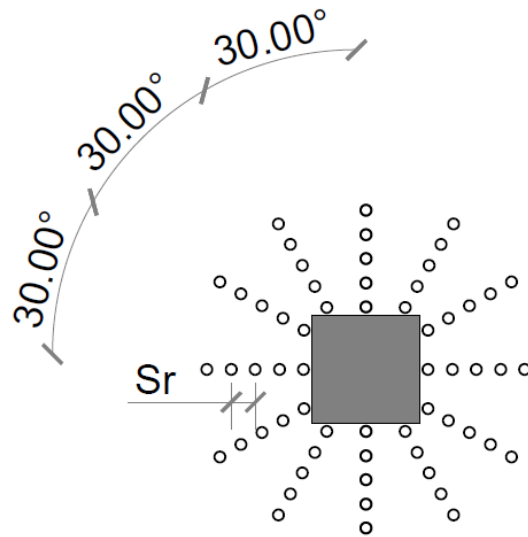


Figura 6.11 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por cinco camadas de *studs*

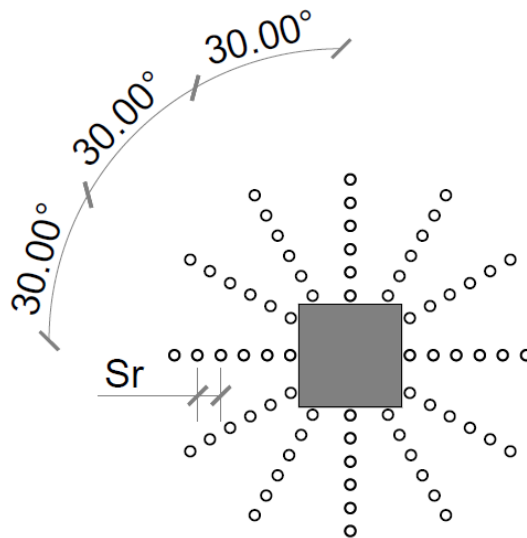


Figura 6.12 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por seis camadas de *studs*

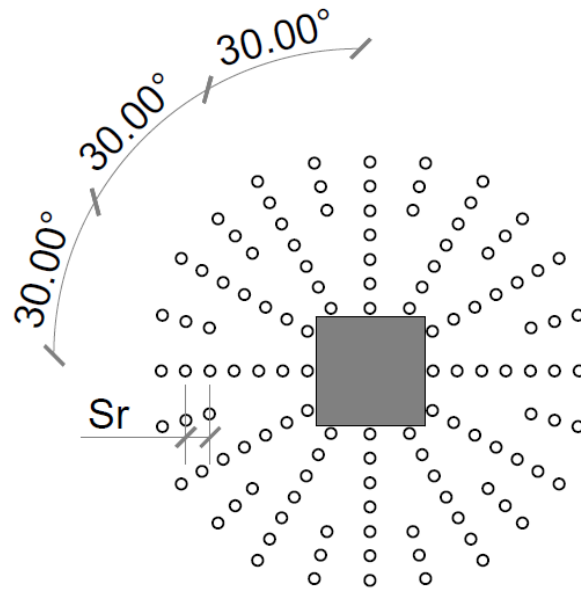


Figura 6.13 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por sete camadas de *studs*

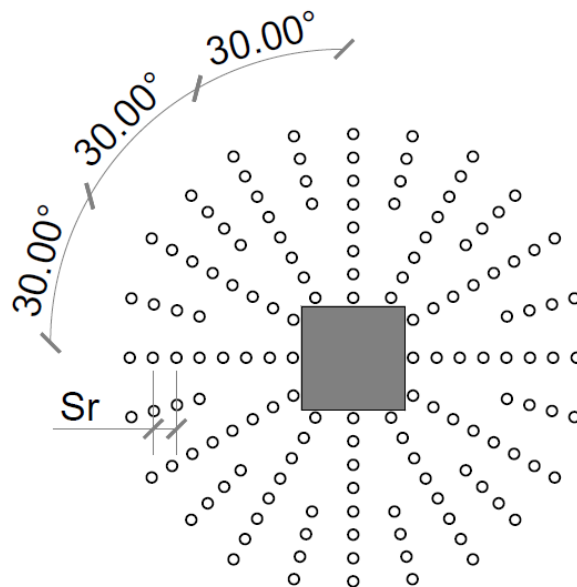


Figura 6.14 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por oito camadas de *studs*

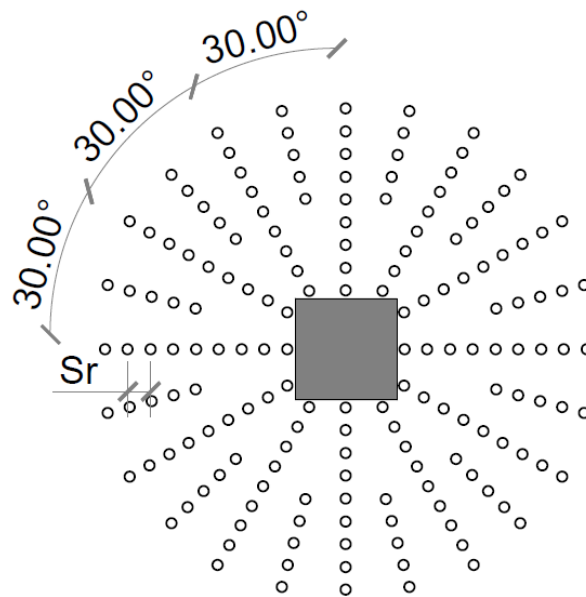


Figura 6.15 – Detalhe da armadura de cisalhamento das lajes compostas por nove camadas de *studs*

### 6.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONSIDERADAS

Para que as estruturas possam desempenhar seu papel de forma satisfatória, elas dependem que um conjunto de variáveis atenda aos seus requisitos mínimos dentro da função que determina o seu estado limite. Como existem dispersões dos valores em torno da média dessas variáveis, existe sempre a possibilidade desse estado limite não ser satisfeito, inviabilizando o uso da estrutura. Em análises de estruturas complexas, o conjunto de variáveis que determinam o comportamento da estrutura é de difícil mensuração. Assim, busca-se sempre trabalhar com as variáveis que possuem maior influência na determinação do comportamento estrutural. Em geral, essas variáveis são relacionadas às propriedades dos materiais, configurações de geometria e carregamentos, sendo suas dispersões justificadas pela variabilidade física dos componentes dos materiais, variabilidade no controle da fabricação, variabilidade na execução, erros nos processos de fabricação e construção, variabilidade de solicitações, entre outros.

Assim, para o estudo da punção, as variáveis adotadas foram escolhidas de forma a representar a variação do comportamento da estrutura de forma satisfatória sem tornar a análise numérica muito complexa e lenta.

As variáveis consideradas aleatórias para o modelo em estudo foram: a resistência à compressão, resistência à tração e o módulo de elasticidade do concreto, resistência ao

escoamento do aço, altura da laje, distância entre o centro da armadura superior e a face superior da laje, carregamento permanente e o carregamento variável.

As variáveis aleatórias descritas acima são apresentadas e detalhadas nos itens a seguir. As demais variáveis do modelo são assumidas como sendo determinísticas.

### 6.3.1 Propriedades mecânicas do concreto

Neste trabalho adotou-se uma distribuição normal de probabilidade para a resistência à compressão do concreto a partir de Galambos et al (1982) e Stucchi, Santos e Franco (2011), apresentando um coeficiente de variação  $V_{fc} = 0,15$  e média dada pela Equação (6.1).

$$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{(1 - 1,645 V_{fc})} \quad (6.1)$$

Determinada a resistência à compressão do concreto, pode-se estimar a resistência à tração e o módulo de elasticidade pelas expressões (6.2) e (6.3), respectivamente, dadas pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012).

$$\begin{aligned} f_{ctm} &= 0,3 \cdot (f_{ck})^{\frac{2}{3}} && \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ f_{ctm} &= 2,12 \cdot \ln(1 + 0,1 \cdot (f_{cm})) && \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$E_c = 21500 \cdot \alpha_e \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.3)$$

Onde:

$\alpha_e$  é um parâmetro que depende do tipo de agregado utilizado.

Adotou-se neste estudo, para o coeficiente de variação do módulo de elasticidade do concreto, o mesmo valor adotado para a resistência à compressão. Para levar em consideração a maior variabilidade da resistência à tração em relação à resistência à compressão do concreto, adotou-se o valor igual a  $1,2V_{fc}$ .



As propriedades mecânicas do concreto  $f_c$ ,  $f_{ct}$  e  $E_c$ , são três variáveis aleatórias correlacionadas entre si. Desse modo, deve-se levar em consideração a correlação entre elas através dos coeficientes de correlação. Neste trabalho, consideraram-se os valores dos coeficientes de correlação adotados por Real (2000), sendo eles: correlação entre a resistência à compressão do concreto e a resistência à tração,  $\rho_{cct} = 0,80$ ; a resistência à tração do concreto e o módulo de elasticidade do mesmo,  $\rho_{cte} = 0,70$ ; e a resistência à compressão do concreto e o módulo de elasticidade,  $\rho_{ce} = 0,90$ .

### 6.3.2 Resistência ao escoamento da armadura ( $f_y$ )

A distribuição normal de probabilidade é utilizada para a resistência ao escoamento do aço da armadura passiva  $f_y$ . A média é dada pela Equação (6.4) e o coeficiente de variação  $V_{f_y} = 0,05$  foi adotado a partir de Galambos et al (1982) e Stucchi, Santos e Franco (2011).

$$\mu_{f_y} = \frac{f_{yk}}{(1 - 1,645 V_{f_y})} \quad (6.4)$$

### 6.3.3 Altura da laje ( $h$ )

No presente trabalho foi considerada a variação aleatória da altura da laje sendo representada por uma distribuição normal de probabilidade (STUCCHI; SANTOS; FRANCO, 2011), com média igual à altura de projeto da laje,  $\mu_h = h$ , e coeficiente de variação de  $V_h = 0,04$ .

### 6.3.4 Distância do centro da armadura superior até a borda superior da seção ( $d'$ )

Para essa variável aleatória adotou-se a distribuição normal de probabilidade, média de  $d'$  igual ao valor de  $d'$  estipulado no projeto e o coeficiente de variação igual a 0,125, conforme Stucchi, Santos e Franco (2011).

### 6.3.5 Carregamento permanente ( $g$ )

Foi adotada a distribuição normal de probabilidade para carga permanente. As especificações para esse carregamento foram obtidas de acordo com as recomendações de Galambos et al (1982) e Stucchi, Santos e Franco (2011). O coeficiente de variação é igual a 0,10 e a média é representada pela Equação (6.5).

$$\mu_g = 1,05g_k \quad (6.5)$$

Onde:

$g_k$ : é o valor do carregamento permanente sem as ponderações de cálculo

### 6.3.6 Carregamento variável (q)

Segundo a NBR 8681 os valores característicos das ações variáveis são definidos por consenso e correspondem a valores que têm de 25% a 35% de probabilidade de serem ultrapassados em um período de 50 anos. Dessa forma, adotando uma probabilidade 30% para o valor característico ser ultrapassado em 50 anos e uma distribuição de valores extremos do Tipo I, conforme Galambos et al (1982) e Stucchi, Santos e Franco (2011), o valor da média é dado pela Equação (6.6) e o coeficiente de variação adotado é igual a  $V_q = 0,25$ , conforme Galambos et al (1982).

$$\mu_q = \frac{q_k}{1 + 0,35 V_q} \quad (6.6)$$

Notou-se ao longo do estudo que não há um consenso sobre os parâmetros estatísticos da carga acidental na literatura técnica. Dessa forma, foram realizadas simulações em um conjunto de nove lajes para verificar a influência dos parâmetros estatísticos da carga acidental no índice de confiabilidade da estrutura. Adotaram-se quatro configurações de carregamento variável, duas baseadas nos parâmetros estatísticos de Galambos et al (1982) e Stucchi, Santos e Franco (2011) e duas baseadas na definição de carregamento acidental dada pela norma NBR 8681:2003.

Na primeira configuração, utilizaram-se os parâmetros estatísticos de Galambos et al (1982), onde a média da carga variável é igual ao valor característico da mesma e o coeficiente de variação é igual a 0,25. Para a segunda configuração, adotando os parâmetros de Stucchi, Santos e Franco (2011), a carga variável média é igual a 93,4% da carga acidental característica e o coeficiente de variação é de 0,2. A terceira e quarta configurações têm média dada pela expressão (6.6), assim, adotando um coeficiente de variação igual a 0,25 e 0,4. As médias da terceira e quarta configurações são iguais a  $0,92q_k$  e  $0,88q_k$ , respectivamente.

Analisando os resultados obtidos, observou-se que, quando a razão entre o carregamento variável e o carregamento permanente é pequena, as quatro configurações apresentam valores muito próximos do índice de confiabilidade. À medida que essa razão cresce, o índice de

confiabilidade diminui com o aumento do coeficiente de variação. Dessa forma, os maiores índices de confiabilidade são obtidos utilizando os parâmetros de Stucchi, Santos e Franco (2011), e os menores são obtidos pela quarta configuração adotada, mesmo sendo a configuração de menor média. Além disso, a terceira configuração, que foi a adotada neste trabalho, apresentou resultados com valores entre os dados pelas configurações de Galambos et al (1982) e Stucchi, Santos e Franco (2011).

Como a utilização da ferramenta PDS no ANSYS limita o uso das distribuições de probabilidade, sendo possível utilizar apenas as distribuições da biblioteca interna do programa, foi necessário ajustar os parâmetros de uma distribuição lognormal para a utilização de uma distribuição semelhante a distribuição Gumbel. Assim, utilizou-se a distribuição de probabilidade lognormal com parâmetros ajustados. A Figura 6.16 mostra a função densidade de probabilidade obtida com o ajuste dos parâmetros.

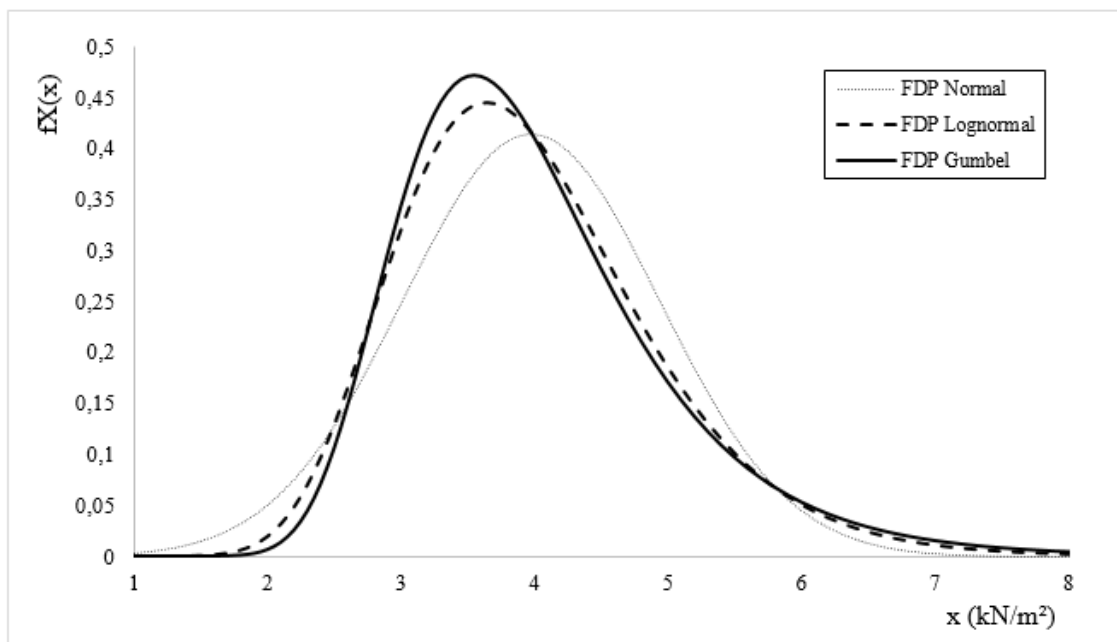


Figura 6.16 – FDP Lognormal obtida para representar a FDP Gumbel

#### 6.4 FUNÇÃO ESTADO LIMITE

A relação determinística utilizada neste trabalho para descrever o desempenho da estrutura, também denominada função estado limite, é dada conforme a Equação (6.7).

$$g(x) = R - S = frupt - R_{pilar} \quad (6.7)$$

Onde:

- $x$  é o vetor das variáveis básicas do problema (carga de ruptura e carregamentos);
- $frupt$  é a carga de ruptura da laje obtida por análise não linear via simulação;
- $R_{pilar}$  é a reação do pilar na região estudada da laje obtida por análise linear via simulação.

## 6.5 ANÁLISE PROBABILÍSTICA

A análise probabilística foi realizada através do estudo estatístico dos valores das variáveis aleatórias de entrada e de resposta, obtidos pelas simulações do método de Monte Carlo. Dessa forma, foram analisados os resultados obtidos para cada laje modelada. Os Apêndices B.1 e B.2 apresentam os scripts utilizados nas análises numéricas para se obter as cargas de ruptura e as reações dos pilares, respectivamente.

Para a convergência estatística da solicitação e da resistência foi adotada uma verificação da média e do desvio padrão a cada 50 simulações, sendo necessário, para a convergência, um erro menor que 0,5% na média e 1% no desvio padrão, conforme mostra a expressões (6.8) e (6.9). As Figuras 6.17 a 6.20 mostram a convergência dos dados da laje L030620.

$$\frac{|\mu(i) - \mu(i - 50)|}{\mu(i)} \leq 0,5\% \quad i = 100, 150, 200, \dots \quad (6.8)$$

$$\frac{|\sigma(i) - \sigma(i - 50)|}{\sigma(i)} \leq 1,0\% \quad i = 100, 150, 200, \dots \quad (6.9)$$

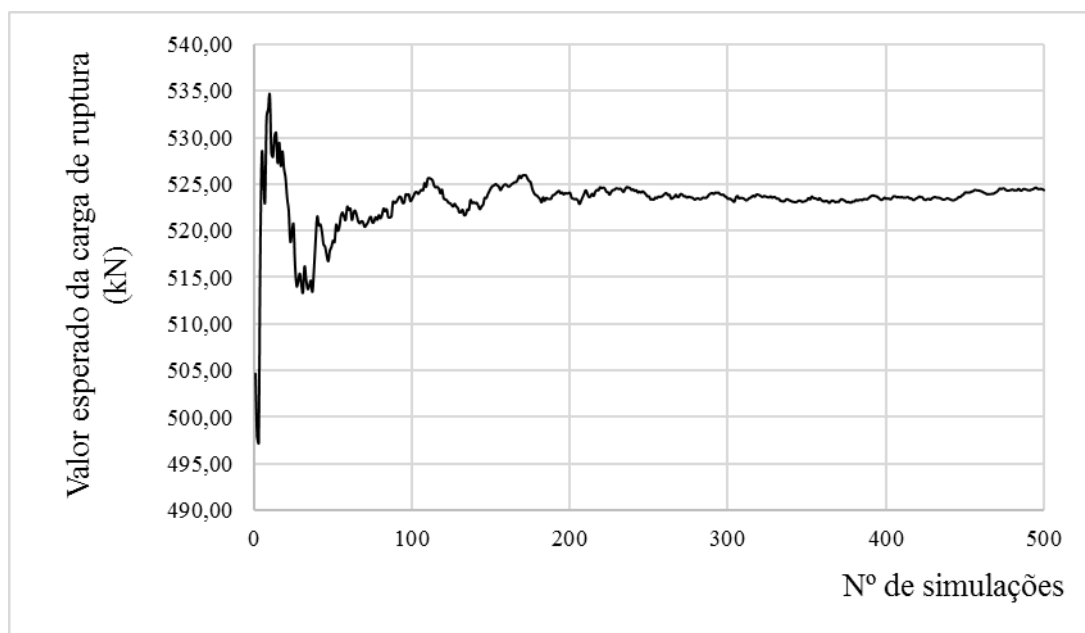


Figura 6.17 – Convergência estatística do valor esperado da carga de ruptura

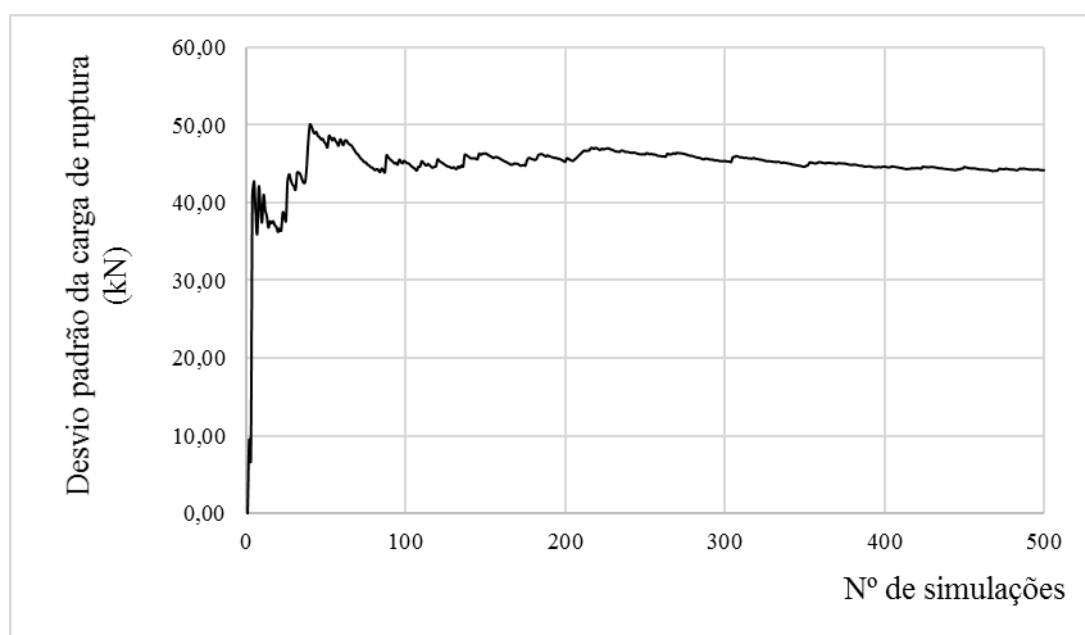


Figura 6.18 – Convergência estatística do desvio padrão da carga de ruptura

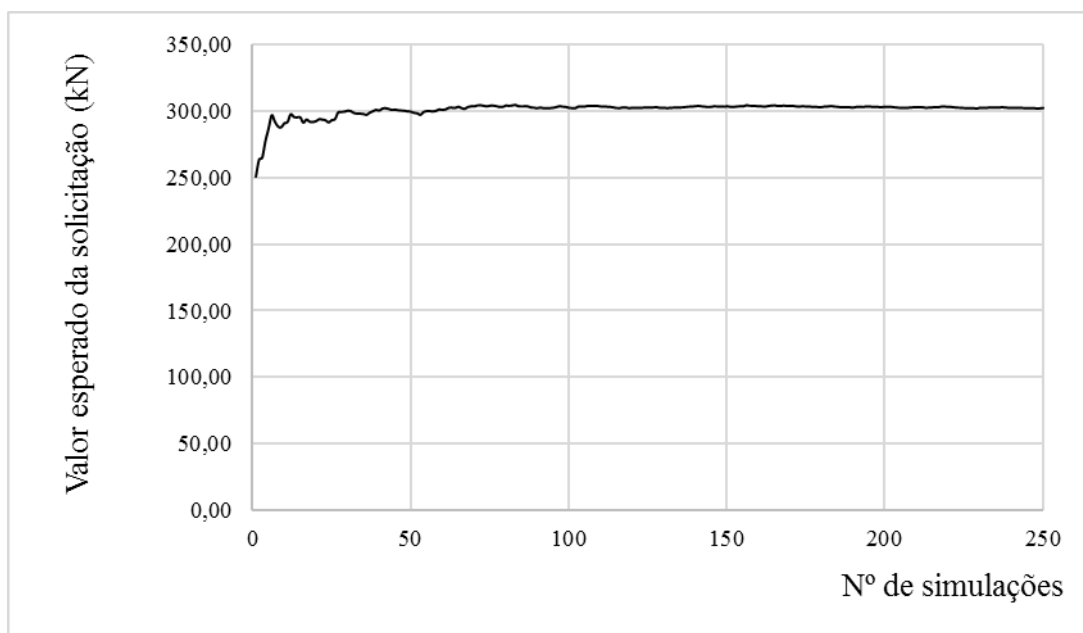


Figura 6.19 – Convergência estatística do valor esperado da solicitação

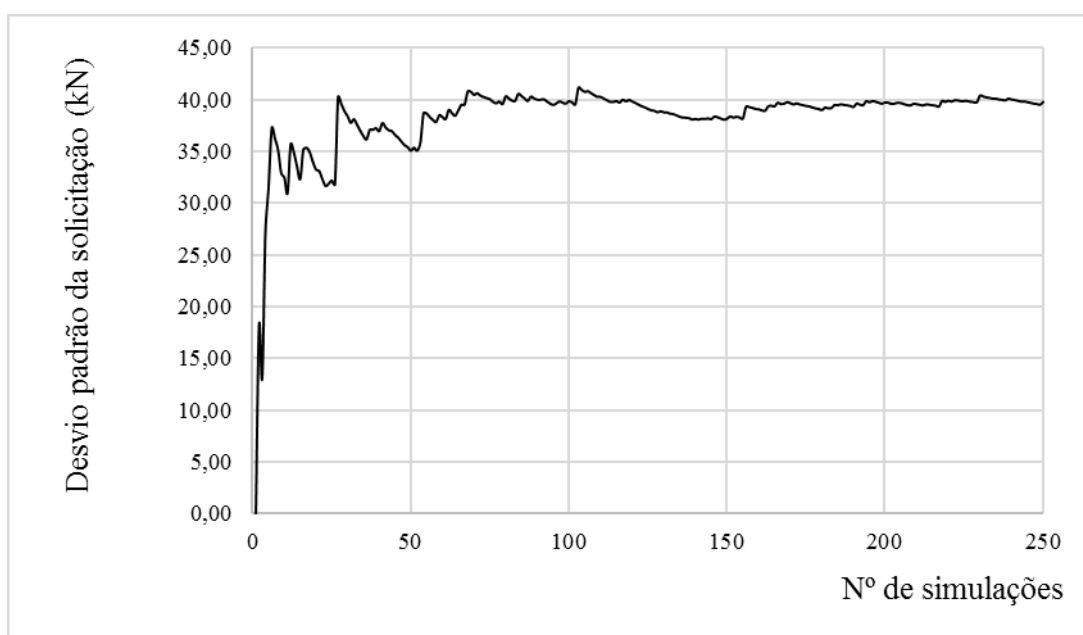


Figura 6.20 – Convergência estatística do desvio padrão da solicitação

Com os dados obtidos nas simulações de Monte Carlo foram calculados os índices de confiabilidade. Adotando a distribuição normal de probabilidade para as funções de variáveis aleatórias da resistência e solicitação, os índices de confiabilidade são dados diretamente pela expressão (5.15). Porém, para o cálculo pelo método da integração numérica foi necessário

conhecer as distribuições de probabilidade que melhor representassem os dados obtidos. Dessa forma, observando os histogramas das variáveis aleatórias da função de estado limite e realizando testes de aderência como de Kolmogorov-Smirnov, foram obtidas as distribuições de probabilidade da solicitação e da resistência. Com o auxílio do *software easyfit* foi escolhido a distribuição de probabilidade que melhor representasse os dados obtidos pela simulação de Monte Carlo. As Figuras 6.21 e 6.22 mostram os histogramas obtidos para solicitação e a resistência da laje L030620 juntamente com a distribuição de probabilidade adotada.

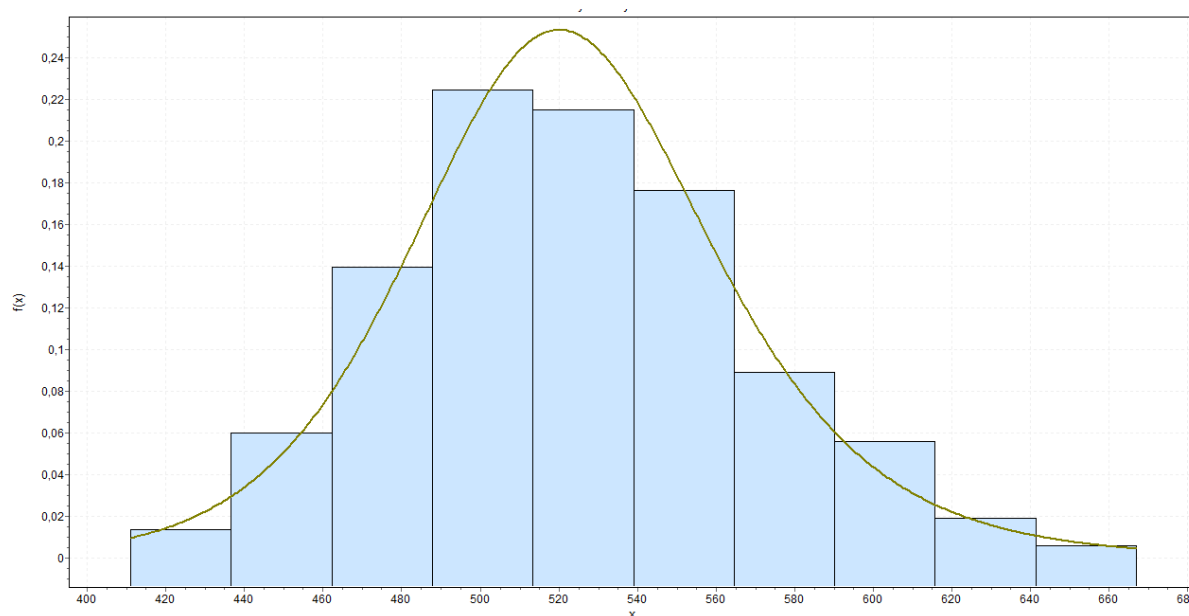


Figura 6.21 – Distribuição de probabilidade de Burr para a carga de ruptura da laje L030620

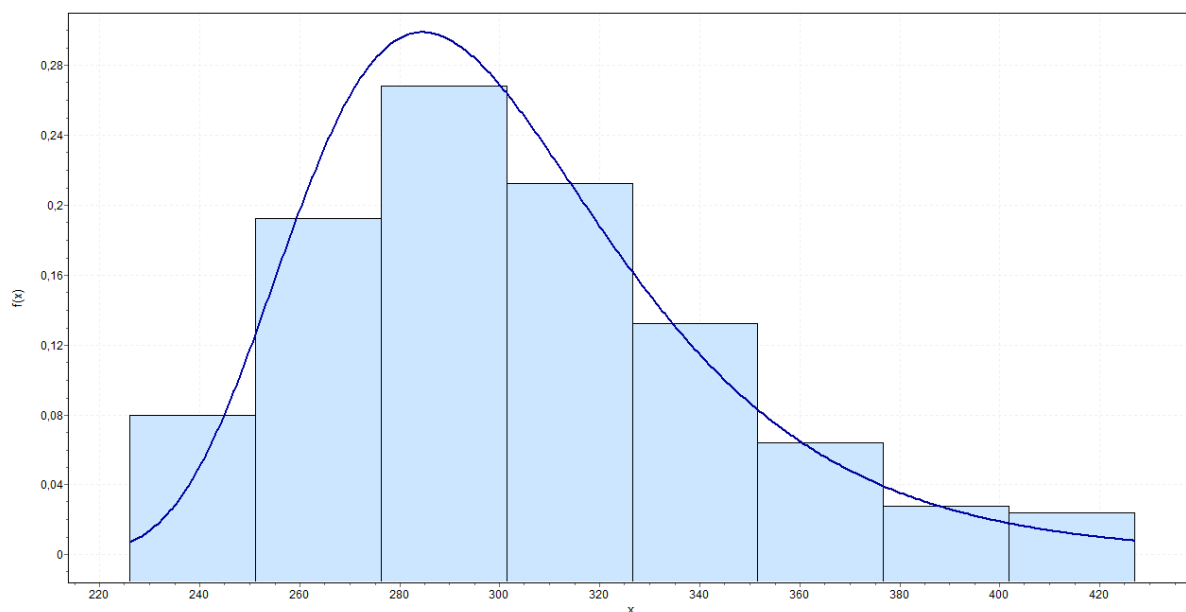


Figura 6.22 – Distribuição de probabilidade Gumbel máximo para a solicitação na laje L030620

Na Figura 6.23 é apresentado a FDP da resistência e a FDP da solicitação. Nota-se que a região de sobreposição das duas curvas representa uma medida qualitativa da probabilidade de falha da laje. Assim, a posição, a dispersão e a forma das curvas adotadas influenciam a probabilidade de falha da estrutura.

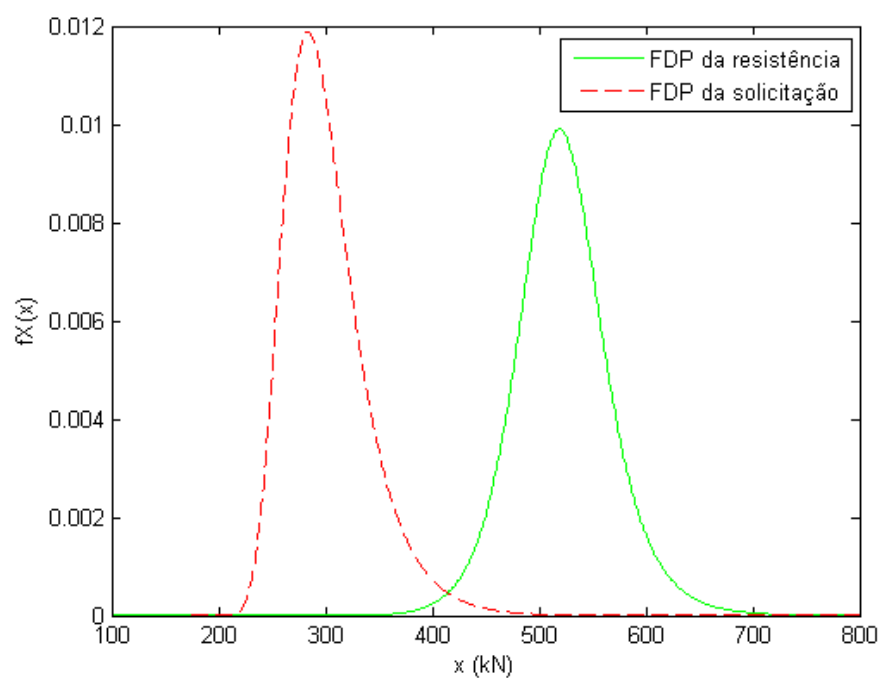


Figura 6.23 – FDP da resistência e da solicitação da laje L030620



## 6.6 CÁLCULO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE $\beta$

O índice de confiabilidade foi calculado conforme as expressões (5.15) e (5.16). A Tabela 6.1 e Tabela 6.2 apresentam o índice de confiabilidade para as lajes lisas sem armadura de cisalhamento e com armadura de cisalhamento, respectivamente.

Tabela 6.1 - Índice de confiabilidade das lajes lisas sem armadura de cisalhamento

Laje	$\beta$ obtido pela margem de segurança		$\beta$ obtido por integração numérica	
	$\beta$ (MEF)	$\beta$ (PEA)	$\beta$ (MEF)	$\beta$ (PEA)
L030216	3,80	3,40	3,60	3,00
L030416	3,20	2,51	3,02	2,25
L030616	2,70	2,40	2,44	2,00
L030220	4,14	3,50	4,00	3,20
L030420	3,86	3,00	3,57	2,76
L030620	3,50	2,90	3,00	2,62
L030224	4,20	3,70	4,21	3,97
L030424	3,90	3,34	3,90	3,43
L030624	3,60	3,27	3,31	2,99
L060216	4,50	4,30	4,36	4,21
L060416	3,80	3,60	3,42	3,41
L060616	3,40	3,30	3,10	3,03
L060220	4,80	4,60	4,70	4,25
L060420	4,30	3,94	4,07	3,62
L060620	3,86	3,70	3,36	3,35
L060224	5,00	4,80	4,74	4,53
L060424	4,50	4,00	4,08	3,86
L060624	4,01	3,80	3,79	3,57
L090216	4,80	4,50	4,86	4,56
L090416	4,30	3,99	3,83	3,85
L090616	3,93	3,93	3,52	3,55
L090220	5,00	4,84	4,95	4,80
L090420	4,50	4,27	4,30	4,07
L090620	4,20	4,05	3,89	3,75
L090224	5,50	5,20	5,56	5,27
L090424	5,00	4,80	5,09	4,85
L090624	4,62	4,55	4,62	4,44

Tabela 6.2 – Índice de confiabilidade das lajes lisas com armadura de cisalhamento

Laje	$\beta$ obtido pela margem de segurança	$\beta$ obtido por integração numérica
	$\beta$ (PEA)	$\beta$ (PEA)
L130216	3,82	3,78
L130416	3,35	3,03
L130616	3,22	2,83
L130220	3,90	3,62
L130420	3,50	2,70
L130620	3,30	2,30
L130224	3,98	3,88
L130424	3,68	3,51
L130624	3,40	2,38
L160216	3,81	3,89
L160416	2,80	2,68
L160616	2,17	2,18
L160220	3,84	3,80
L160420	3,31	2,93
L160620	2,59	2,40
L160224	3,96	3,94
L160424	3,58	3,60
L160624	2,90	2,70
L190216	3,75	3,98
L190416	3,29	3,08
L190616	2,75	2,60
L190220	3,80	3,93
L190420	3,51	3,22
L190620	2,90	2,67
L190224	4,38	4,33
L190424	4,30	4,20
L190624	3,54	3,15

## 6.7 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE ALVO

De uma forma geral, a escolha do índice de confiabilidade alvo deve refletir a importância do componente para integridade da estrutura, as consequências da falha, o modo da falha, o tipo de material e as combinações de cargas (NOGUEIRA, 2003). Dessa forma, normas e códigos definem índices de confiabilidade alvo que variam conforme o comportamento da estrutura e suas funções, levando em consideração os fatores acima mencionados.

Neste estudo adotou-se o índice de confiabilidade alvo apresentado no Código Modelo *fib* 2010 (2012). Esse índice de confiabilidade a ser atingido por uma determinada estrutura em um período de 50 anos leva em consideração a consequência da falha da estrutura e o custo relativo da medida de segurança. A Tabela 6.3 mostra os índices de confiabilidade alvos adotados pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012).

Tabela 6.3 – Índice de confiabilidade alvo

Custo relativo da medida de segurança	Consequência da falha			
	Pequena	Reduzida	Moderada	Elevada
Alto	0,0	1,5	2,3	3,1
Normal	1,3	2,3	3,1	3,8
Pequeno	2,3	3,1	3,8	4,3

(fonte: *fib* 2010 (2012))

Tendo em vista que a consequência de falha de uma laje por punção é elevada e adotando o custo relativo da medida de segurança como normal, o índice de confiabilidade alvo para lajes sob punção adotado foi de 3,8, associado a uma probabilidade de falha de  $7,23 \times 10^{-5}$ .

## 7 ANÁLISE PARAMÉTRICA DAS LAJES LISAS SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO

As análises paramétricas das lajes lisas são feitas com os valores dos índices de confiabilidade obtidos pelo método da integração numérica com base nos dados adquiridos por simulação de Monte Carlo. Como são feitos testes de aderência com os dados obtidos através dessa metodologia, esses valores representam de forma mais precisa os índices de confiabilidade calculados. Além disso, a análise paramétrica é feita com os valores dos índices de confiabilidade das lajes analisadas pelo PEA e pelo MEF.

### 7.1 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

#### 7.1.1 Análise em relação à altura da laje

A influência da resistência à compressão do concreto em relação à altura da laje sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 7.1 a 7.3. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times f_{ck}$ , onde a altura da laje é analisada. As Figuras 7.1, 7.2 e 7.3 apresentam as configurações de carregamento de 2, 4, e 6 kN/m<sup>2</sup>, respectivamente.

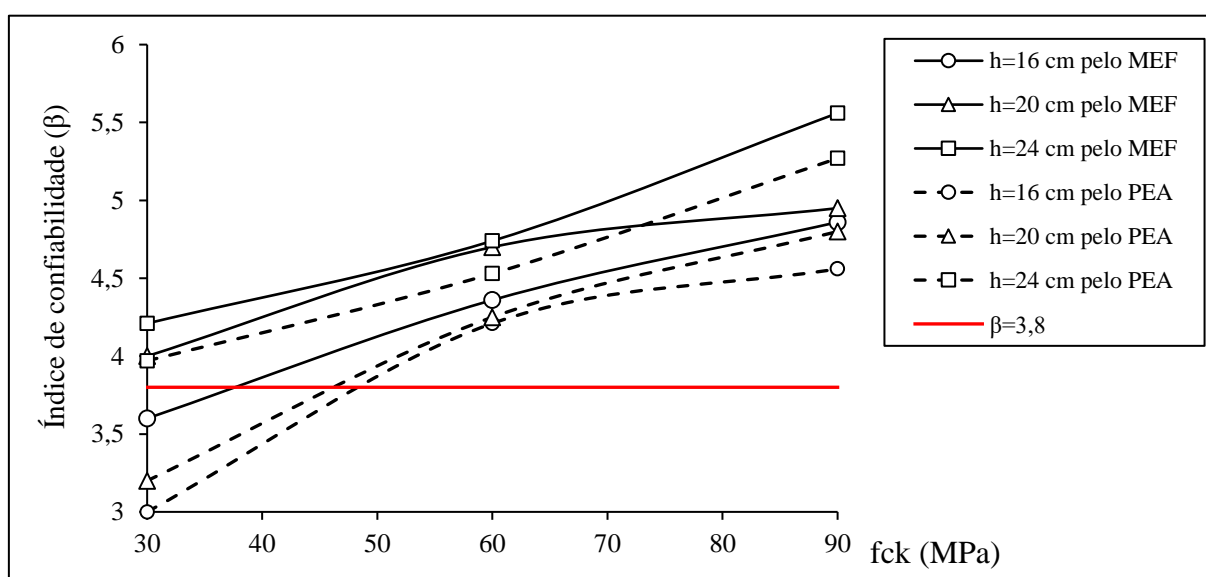


Figura 7.1 - Análise do índice de confiabilidade para lajes com carregamento acidental de 2 kN/m<sup>2</sup>

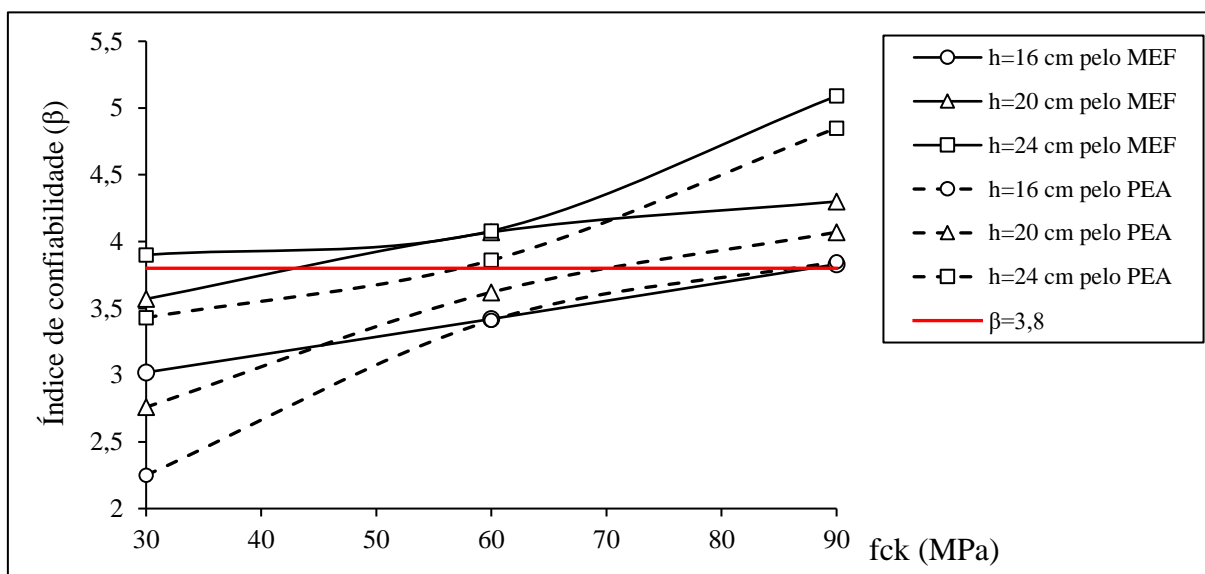


Figura 7.2 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 4 kN/m<sup>2</sup>

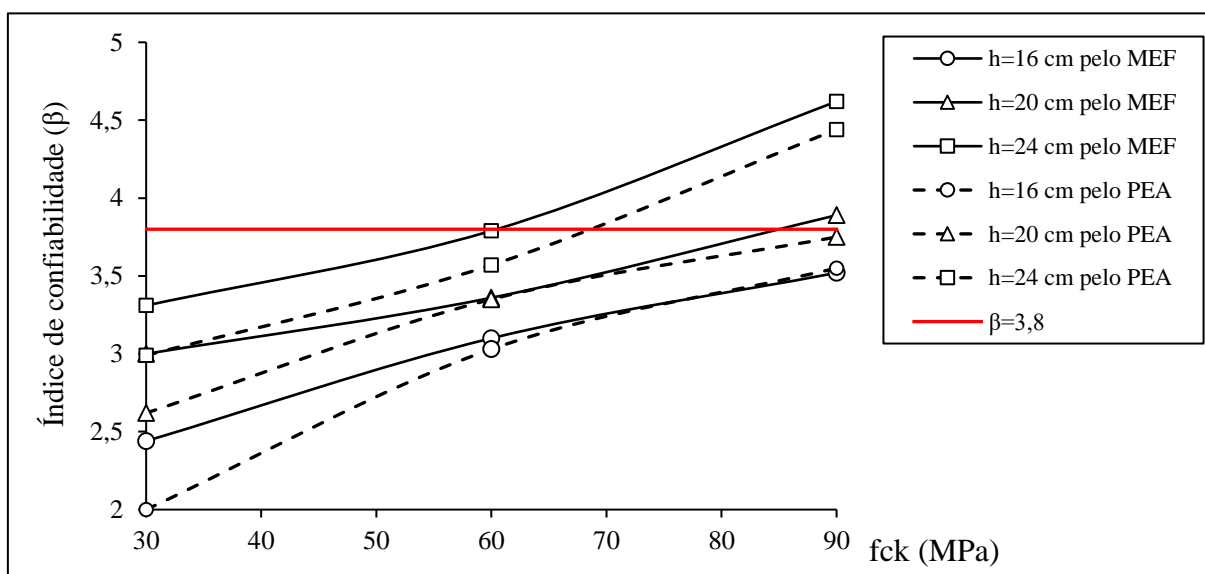


Figura 7.3 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 6 kN/m<sup>2</sup>

Por meio dos resultados obtidos, nota-se que o índice de confiabilidade tende a apresentar valores mais elevados com o aumento da resistência à compressão do concreto. Além disso, os índices de confiabilidade das lajes dimensionadas pelo PEA apresentam tendência semelhante à das lajes dimensionados pelo MEF, porém, com valores inferiores. Os gráficos mostram também que para uma mesma resistência à compressão do concreto as lajes com maiores alturas apresentam um índice de confiabilidade mais elevado.

### 7.1.2 Análise em relação ao carregamento acidental

A influência da resistência à compressão do concreto em relação ao carregamento acidental na laje sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 7.4 a 7.6, onde as mesmas apresentam lajes com altura de 16, 20 e 24 cm, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times f_{ck}$ , onde o carregamento acidental na laje é analisado.

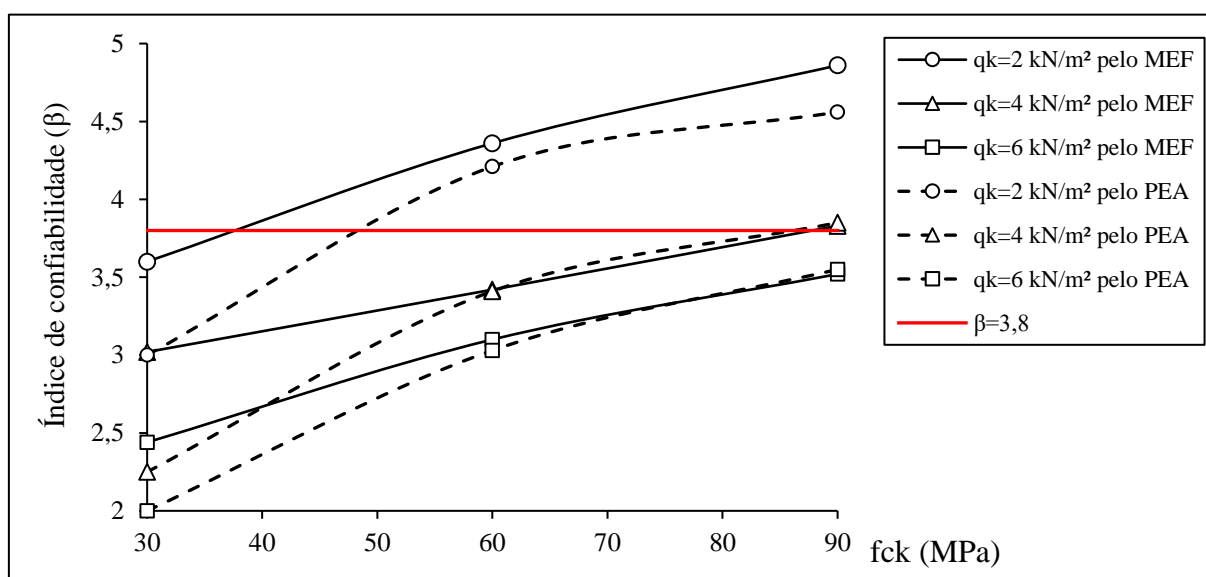


Figura 7.4 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 16 cm

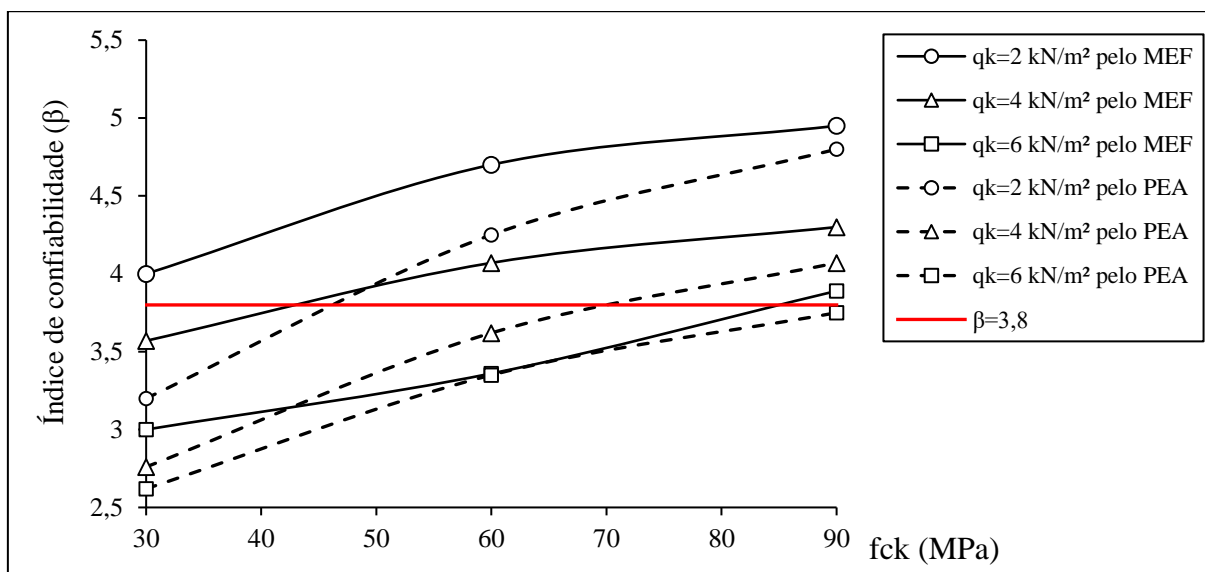


Figura 7.5 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 20 cm

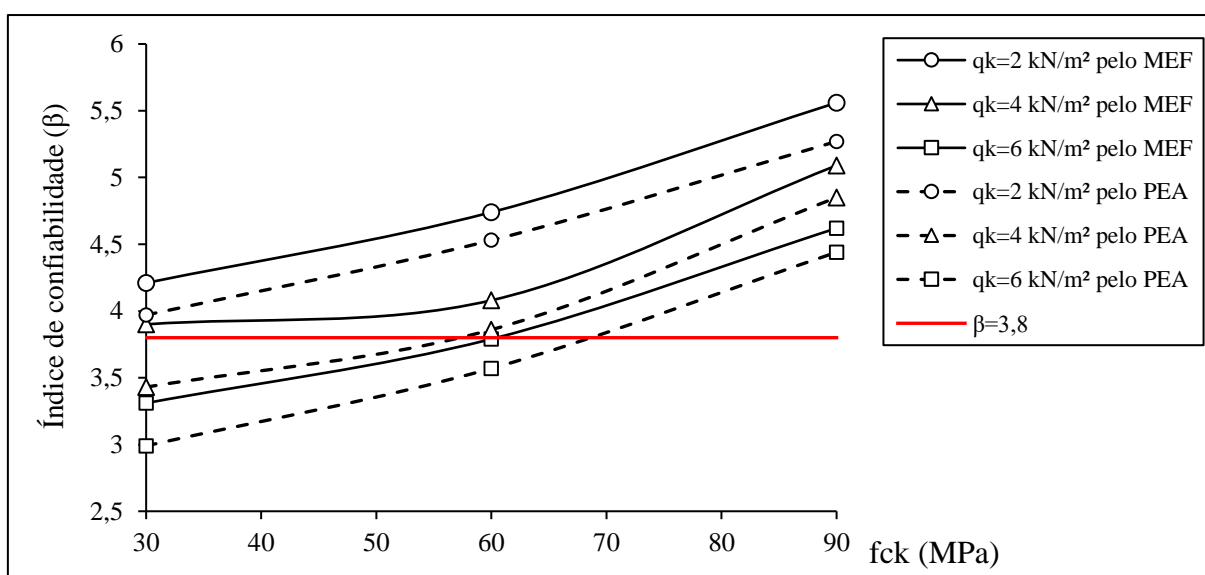


Figura 7.6 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 24 cm

Observa-se que o aumento da resistência à compressão do concreto faz com que o índice de confiabilidade também aumente. Observa-se, também, que para uma mesma resistência à compressão o índice de confiabilidade diminui com o aumento da carga acidental. Além disso, os resultados encontrados para as lajes dimensionadas pelo MEF tendem a serem maiores que os obtidos nas lajes dimensionadas pelo PEA.



Analisando os dados obtidos percebe-se que o índice de confiabilidade foi maior nas lajes de maior altura. Nota-se, também, que o comportamento das curvas das lajes de 16 e 20 cm são diferentes do comportamento das curvas das lajes com 24 cm de altura, sendo que nas lajes de menor altura o índice de confiabilidade tende a ter uma pequena variação entre as resistências de 60 e 90 MPa.

## 7.2 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DA ALTURA DA LAJE

### 7.2.1 Análise em relação à resistência à compressão do concreto

A influência da altura da laje em relação a resistência à compressão do concreto sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 7.7 a 7.9, onde as mesmas apresentam lajes com carregamento de 2, 4 e 6 kN/m<sup>2</sup>, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times altura$ , onde a resistência à compressão do concreto é analisada.

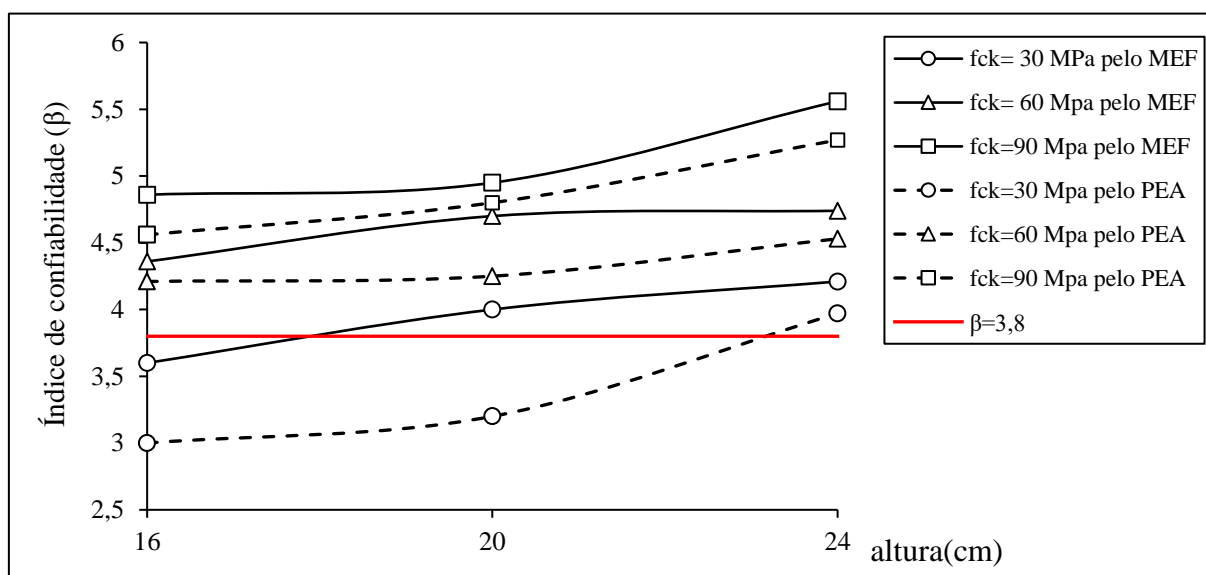


Figura 7.7 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 2 kN/m<sup>2</sup>

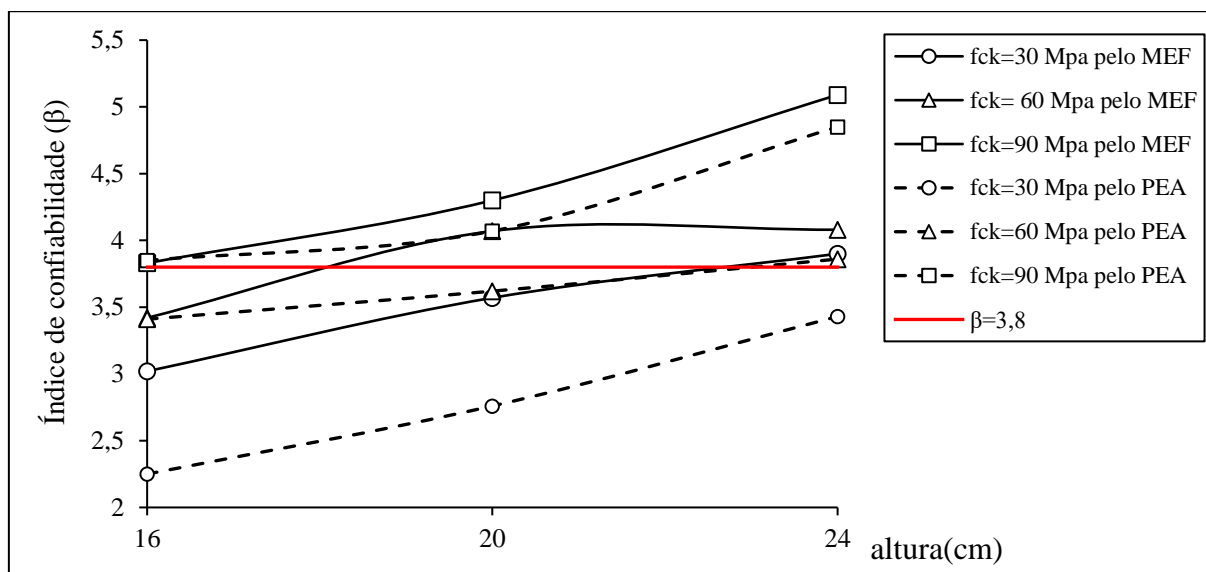


Figura 7.8 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 4 kN/m<sup>2</sup>

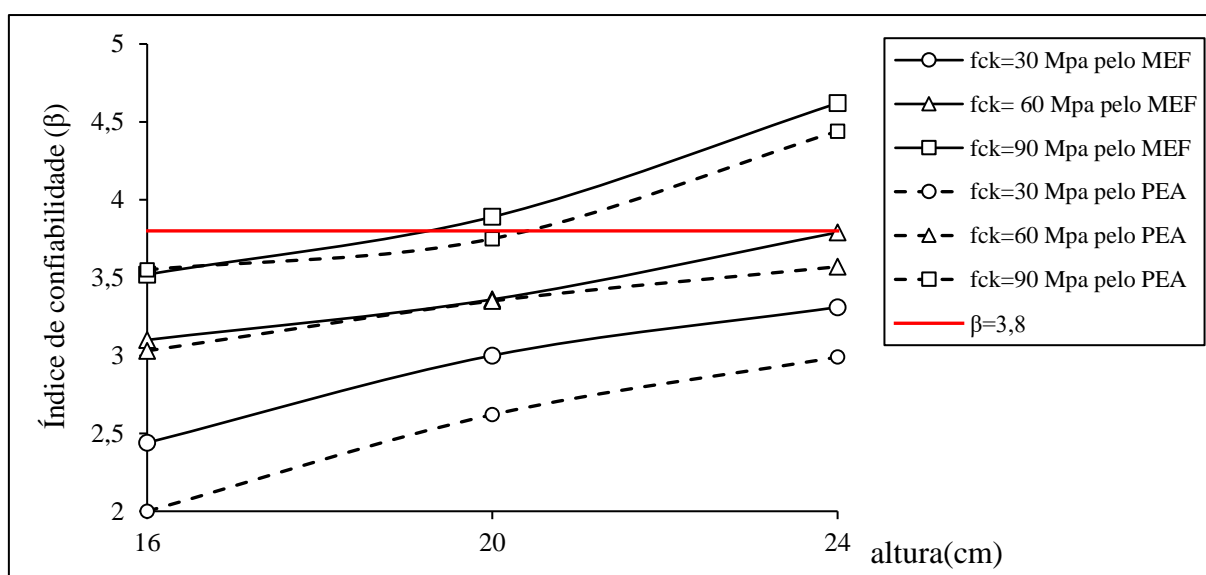


Figura 7.9 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 6 kN/m<sup>2</sup>

O aumento da altura tem como tendência um aumento do índice de confiabilidade. Nota-se também que o uso de concreto de resistência à compressão mais elevados proporciona melhores índices de confiabilidade. Além disso, observa-se que para a carga acidental de 2 kN/m<sup>2</sup> o índice de confiabilidade das lajes de 16 e 20 cm tiveram pouca variação.

De um modo geral o comportamento das curvas das lajes dimensionadas pelo MEF é semelhante ao das curvas das lajes dimensionadas pelo PEA, sendo que apresentam índices de confiabilidade maiores em relação as lajes dimensionadas pelo PEA.

### 7.2.2 Análise em relação ao carregamento acidental

A influência da altura da laje em relação ao carregamento acidental sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 7.10 a 7.12, onde as mesmas apresentam lajes com resistência característica à compressão do concreto de 30, 60 e 90 MPa, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times altura$ , onde o carregamento acidental é analisado.

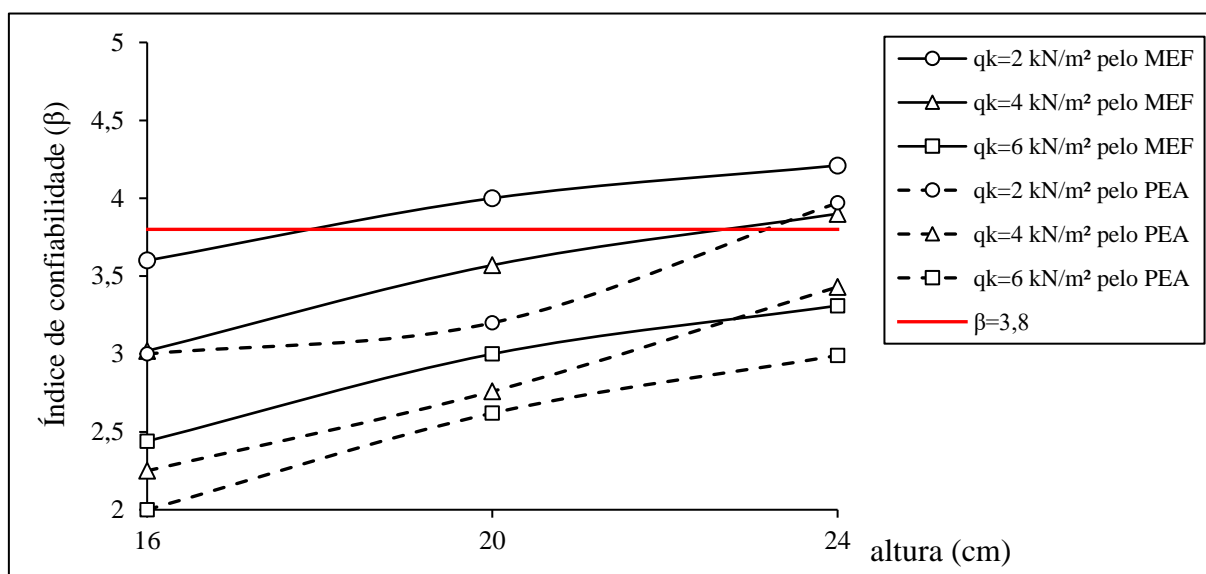


Figura 7.10 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=30$  MPa

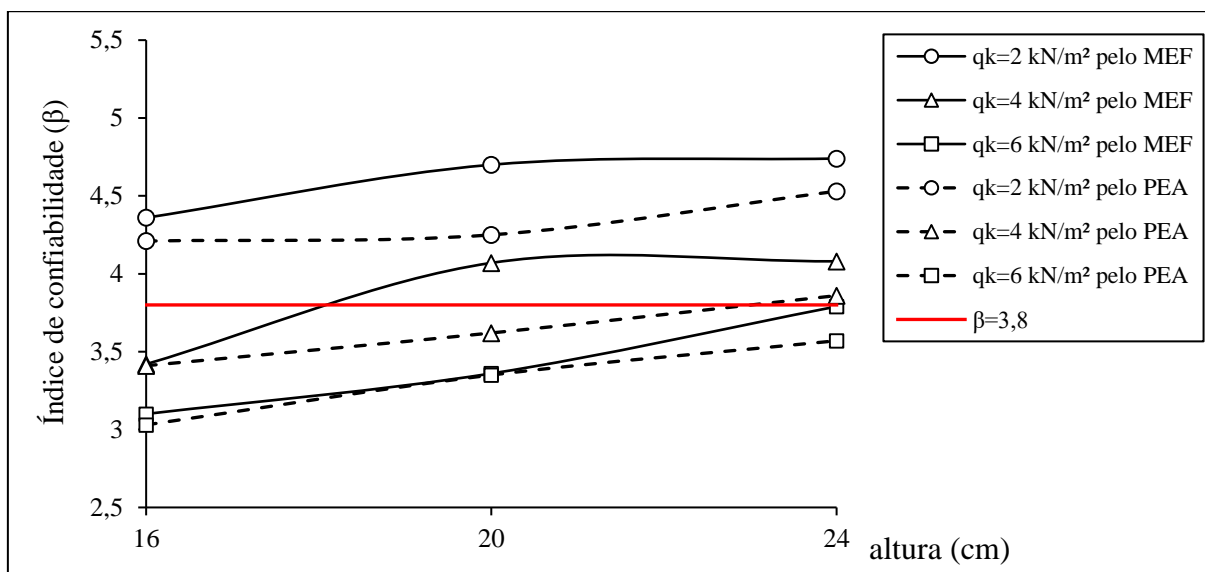


Figura 7.11 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=60$  MPa

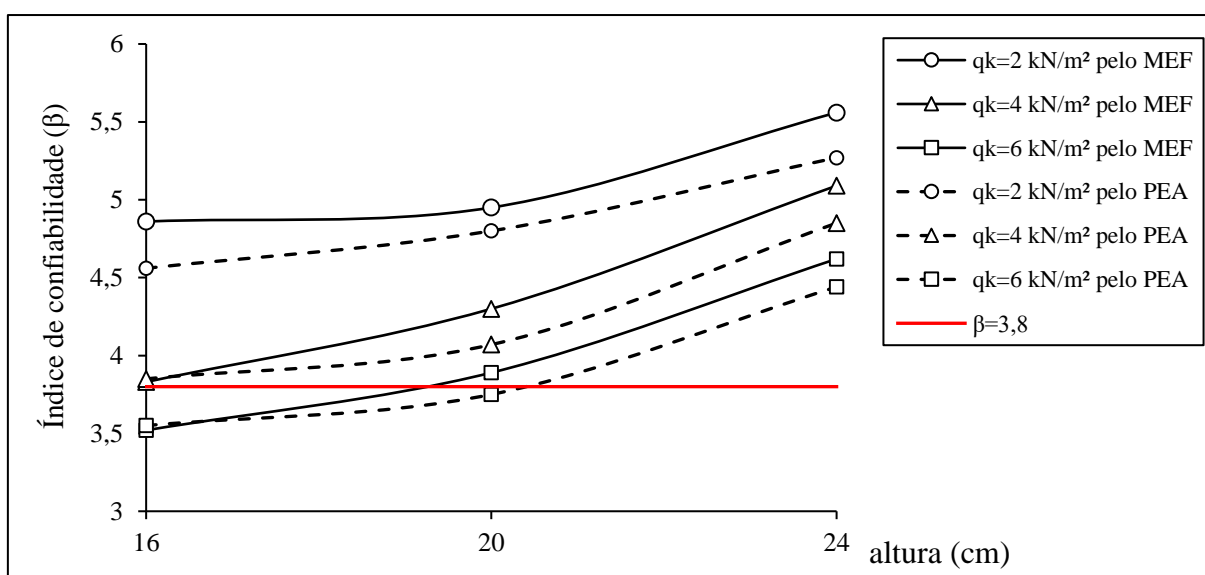


Figura 7.12 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=90$  MPa

Observa-se que o aumento da altura da laje proporciona um aumento no índice de confiabilidade. Nota-se, também, que quanto maior o carregamento acidental menor é o índice de confiabilidade alcançado. Além disso, os índices de confiabilidade obtidos para as lajes dimensionadas pelo MEF são superiores aos índices das lajes dimensionadas pelo PEA.

## 7.3 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DO CARREGAMENTO ACIDENTAL

### 7.3.1 Análise em relação à resistência à compressão do concreto

A influência do carregamento acidental em relação a resistência à compressão do concreto sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 7.13 a 7.15, onde as mesmas apresentam lajes com altura de 16, 20 e 24 cm, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times q_k$ , onde a resistência à compressão do concreto é analisada.

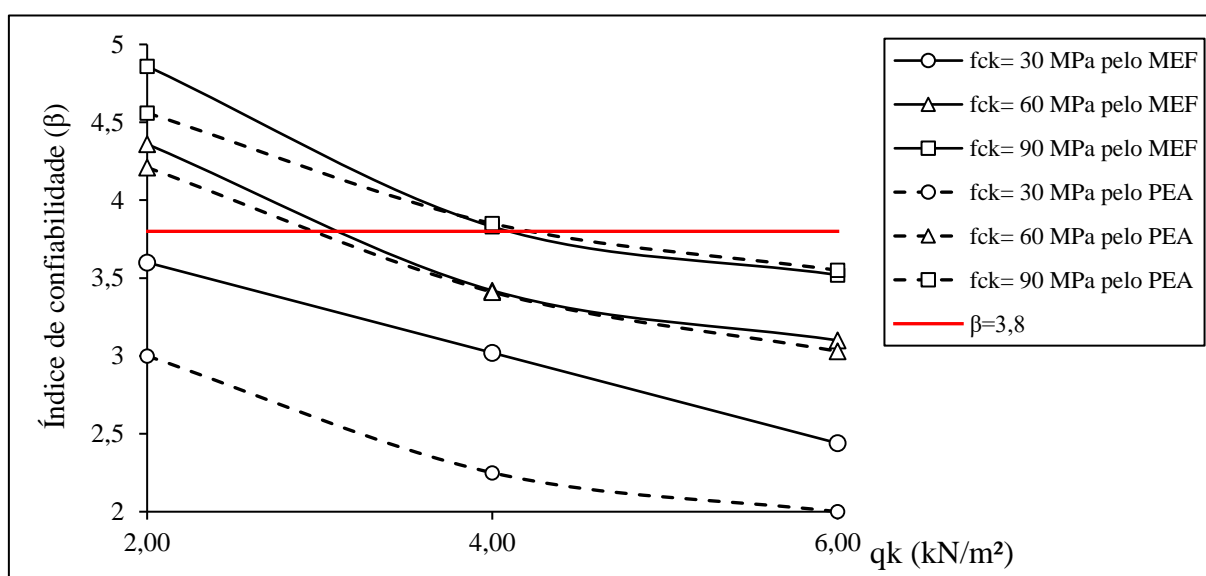


Figura 7.13 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 16 cm

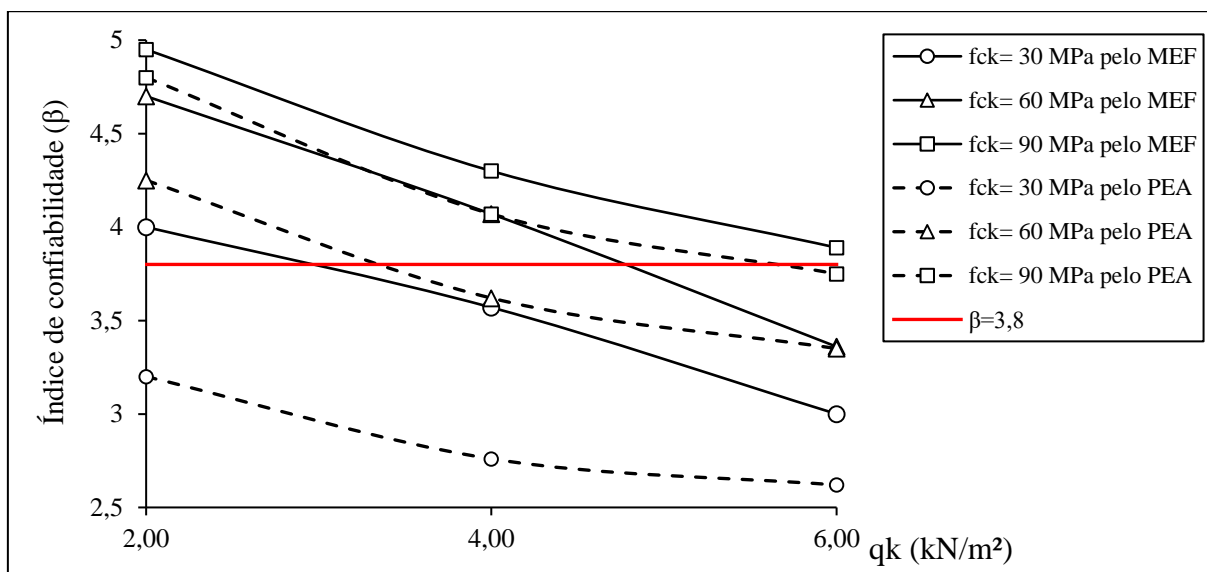


Figura 7.14 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 20 cm

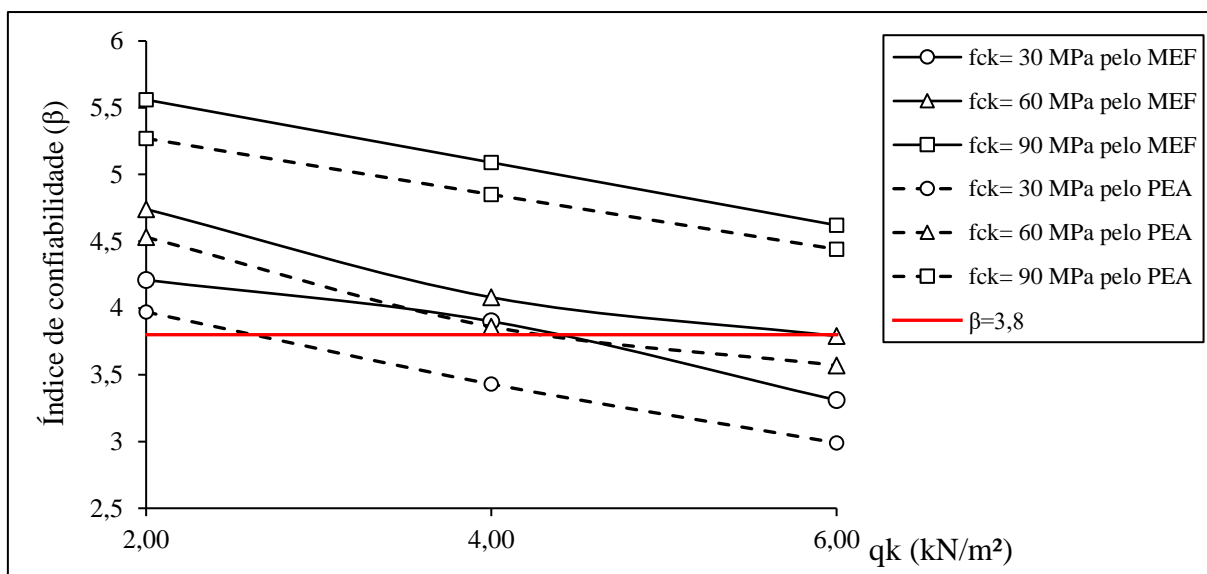


Figura 7.15 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 24 cm

Em todos os casos houve uma diminuição do índice de confiabilidade com o aumento da carga acidental. Ademais, para um mesmo carregamento acidental nota-se que as lajes com maiores resistências à compressão do concreto atingem valores de confiabilidade maiores em relação as lajes de menor resistência à compressão do concreto.

### 7.3.2 Análise em relação à altura da laje

A influência do carregamento acidental em relação à altura da laje sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 7.16 a 7.18, onde as mesmas apresentam lajes com resistência característica à compressão do concreto de 30, 60 e 90 MPa, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times q_k$ , onde a altura da laje é analisada.

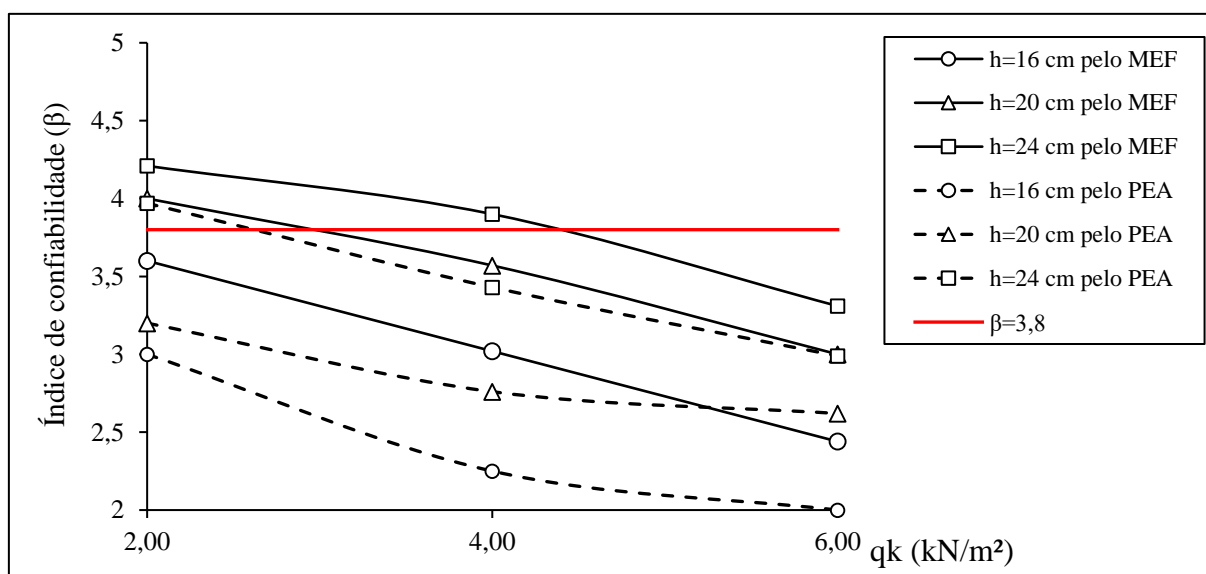


Figura 7.16 Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=30$  MPa

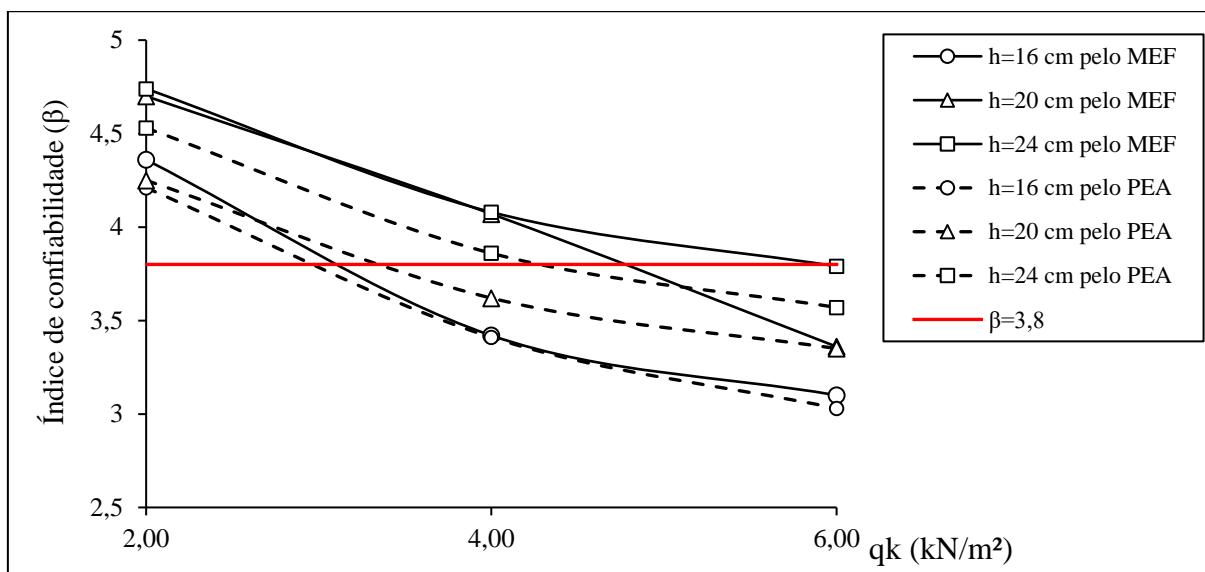


Figura 7.17 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=60$  MPa

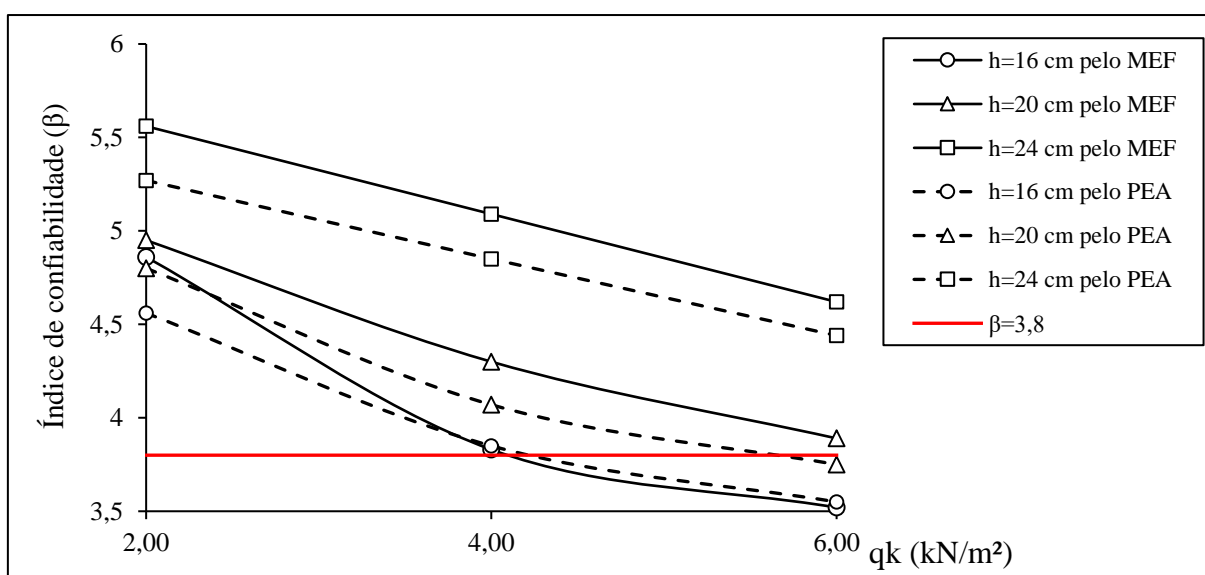


Figura 7.18 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=90$  MPa

De forma geral, nota-se que o índice de confiabilidade diminui com o aumento do carregamento accidental. Nota-se, também, que para um mesmo carregamento accidental o índice de confiabilidade é maior para as lajes de maior altura. Além disso, as lajes dimensionadas pelo PEA apresentam valores menores do índice de confiabilidade em comparação com as lajes dimensionadas pelo MEF, porém, apresentam curvas semelhantes.



## 8 ANÁLISE PARAMÉTRICA DAS LAJES LISAS COM ARMADURA DE CISALHAMENTO

Na análise das lajes lisas sem armadura de cisalhamento pode-se observar que as curvas das lajes analisadas pelo PEA são semelhantes as curvas das lajes analisadas pelo MEF. Dessa forma, a análise paramétrica das lajes lisas com armadura de cisalhamento foi elaborada apenas com as lajes analisadas pelo PEA, tendo em vista que esse dimensionamento apresenta valores de confiabilidades menores e com comportamento semelhante ao dimensionamento pelo MEF.

### 8.1 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

#### 8.1.1 Análise em relação à altura da laje

A influência da resistência à compressão do concreto em relação à altura da laje sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 8.1 a 8.3. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times f_{ck}$ , onde a altura da laje é analisada. As figuras apresentam as configurações de carregamento de 2, 4, e 6 kN/m<sup>2</sup>, respectivamente.

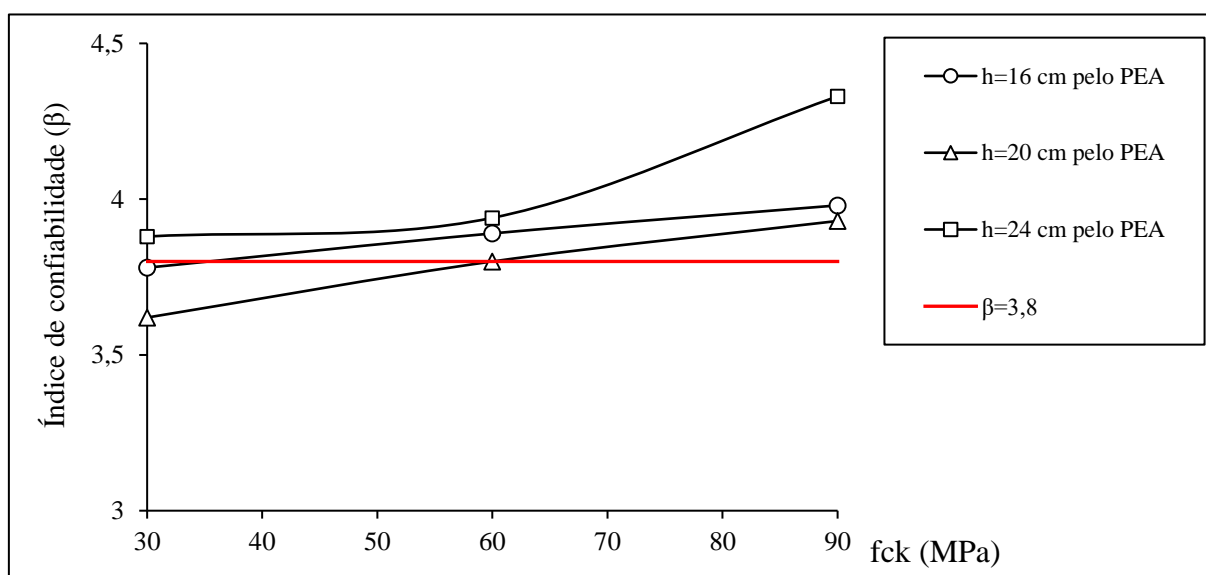


Figura 8.1 - Análise do índice de confiabilidade para lajes com carregamento acidental de 2 kN/m<sup>2</sup>

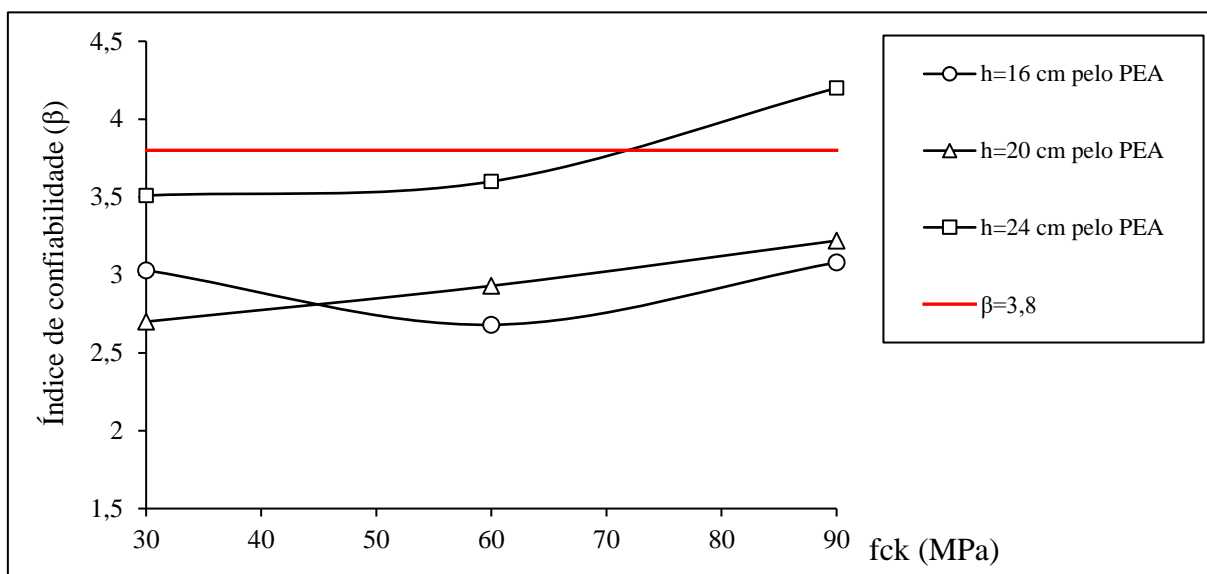


Figura 8.2 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 4 kN/m<sup>2</sup>

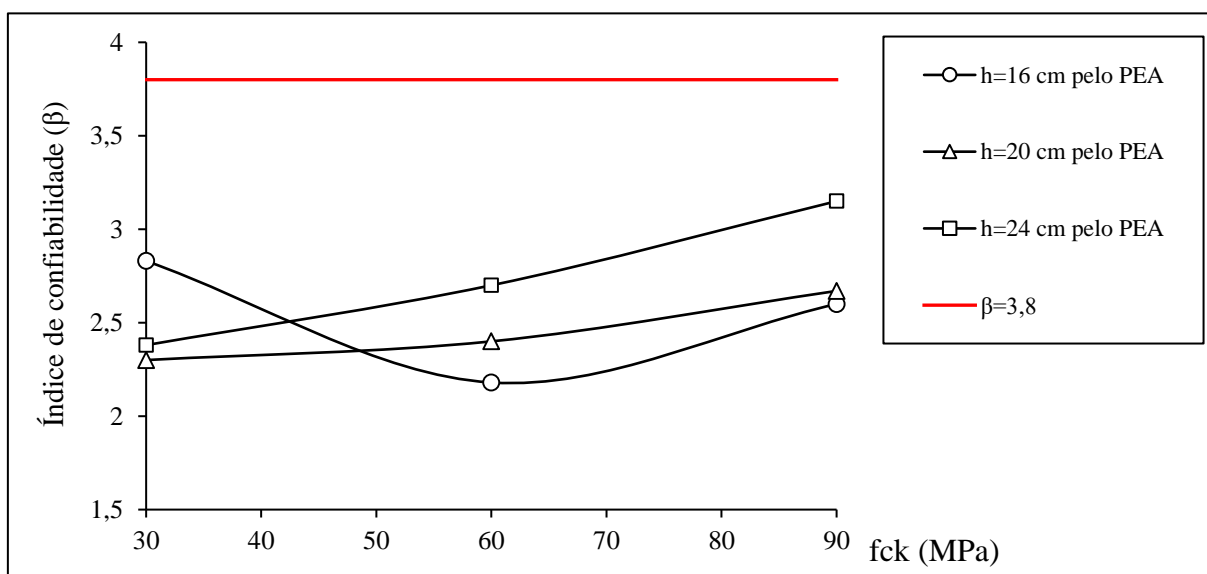


Figura 8.3 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 6 kN/m<sup>2</sup>

A observação dos dados obtidos mostra que de forma geral o índice de confiabilidade aumenta com o acréscimo da resistência à compressão do concreto. Entretanto, para as lajes dimensionadas com altura de 16 cm e carregamento acidental de 4 e 6 kN/m<sup>2</sup> são observadas curvas decrescentes na região entre 30 MPa e 60 MPa. Além disso, para o carregamento acidental de 2 kN/m<sup>2</sup> as lajes de 16 cm apresentaram valores ligeiramente superiores as das lajes de 20 cm.

### 8.1.2 Análise em relação ao carregamento acidental

A influência da resistência à compressão do concreto em relação ao carregamento acidental na laje sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 8.4 a 8.6, onde as mesmas apresentam lajes com altura de 16, 20 e 24 cm, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times f_{ck}$ , onde o carregamento acidental na laje é analisado.

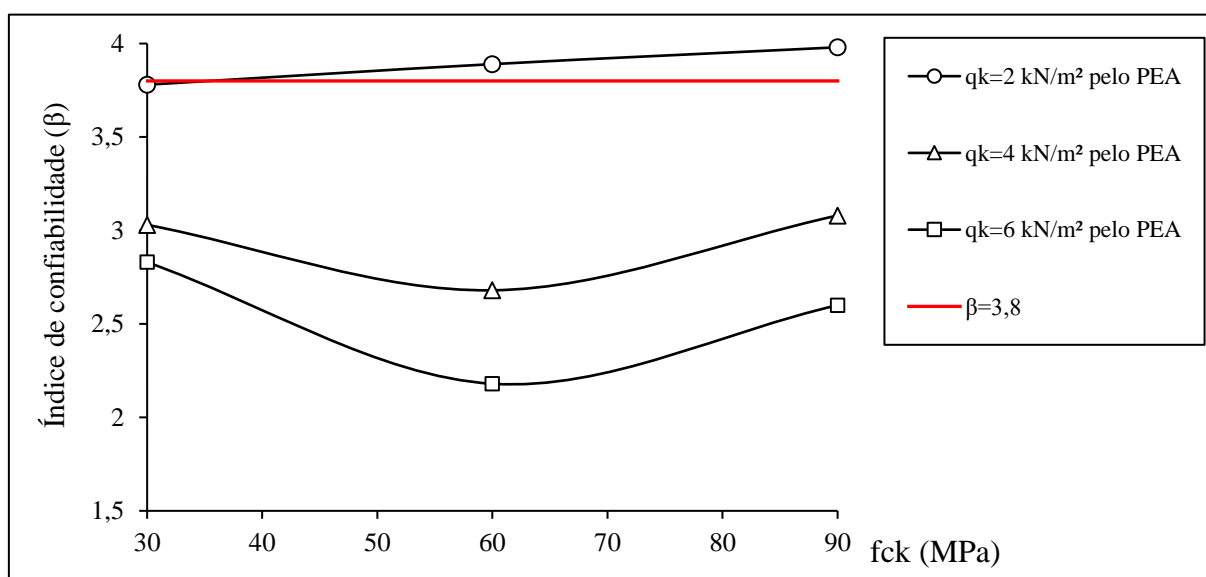


Figura 8.4 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 16 cm

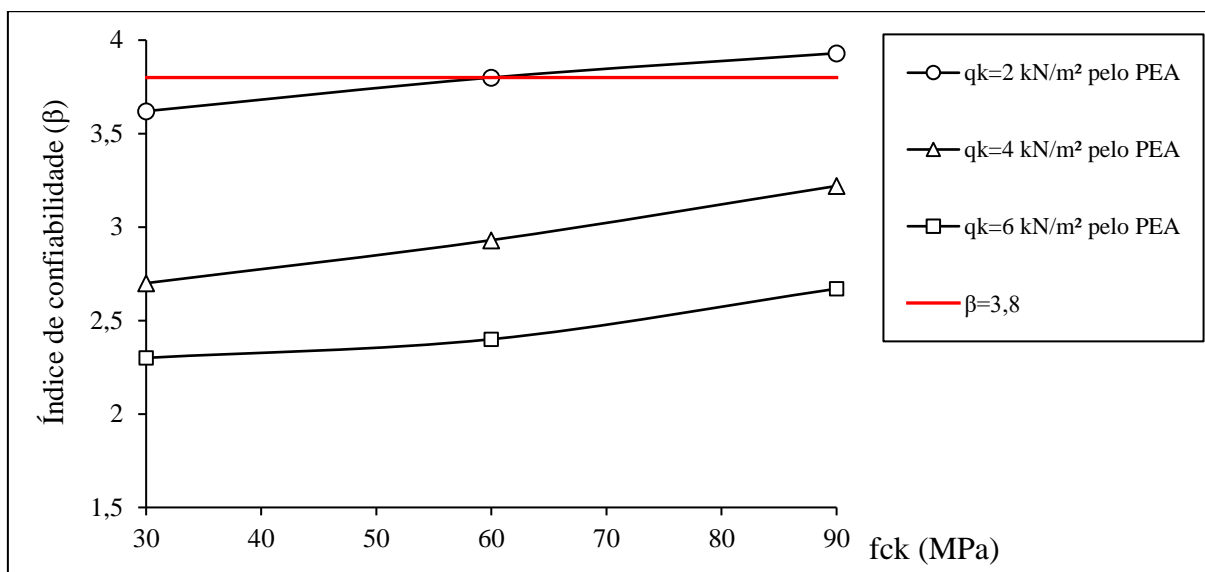


Figura 8.5 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 20 cm

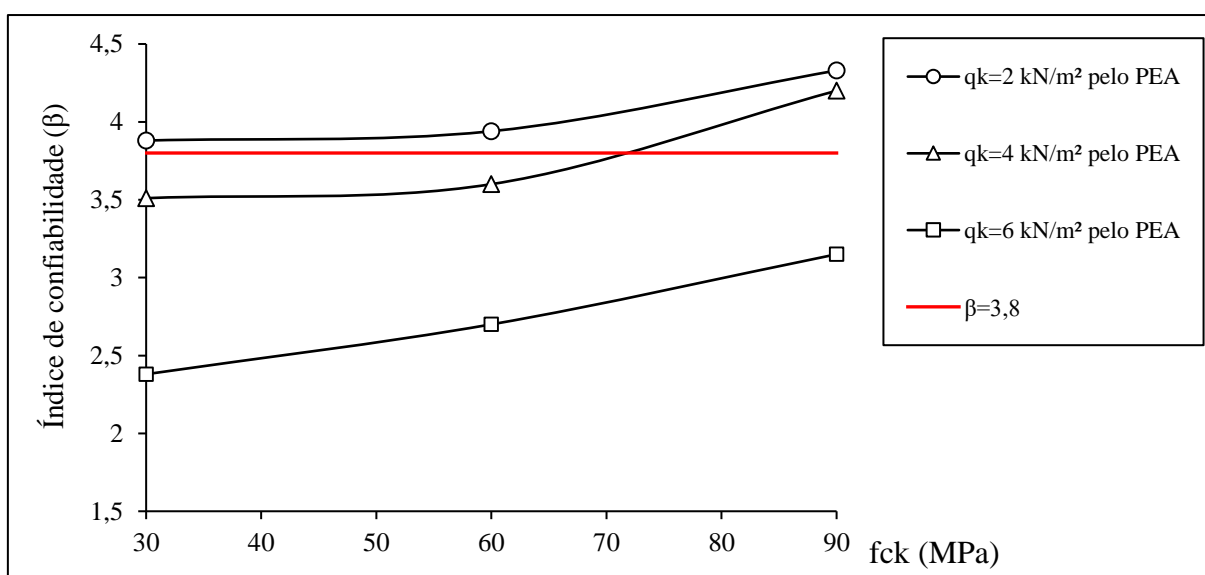


Figura 8.6 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com altura de 24 cm

A partir da Figura 8.4 percebe-se uma pequena variação no índice de confiabilidade para o carregamento acidental de 2 kN/m<sup>2</sup> e um decréscimo no índice na região entre 30 e 60 MPa. Além disso, nota-se que os valores do índice de confiabilidade para as lajes de 30 MPa e 90 MPa pouco variam.

Nas Figuras 8.5 e 8.6 o comportamento das curvas são semelhantes e mostram que o índice de confiabilidade sofre um acréscimo com o aumento da resistência à compressão do concreto. Ademais, em todos os casos, para uma mesma resistência característica à compressão, o índice de confiabilidade foi superior para as menores cargas acidentais.

## 8.2 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DA ALTURA DA LAJE

### 8.2.1 Análise em relação à resistência à compressão do concreto

A influência da altura da laje em relação a resistência à compressão do concreto sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 8.7 a 8.9, onde as mesmas apresentam lajes com carregamento de 2, 4 e 6 kN/m<sup>2</sup>, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times altura$ , onde a resistência à compressão do concreto é analisada.

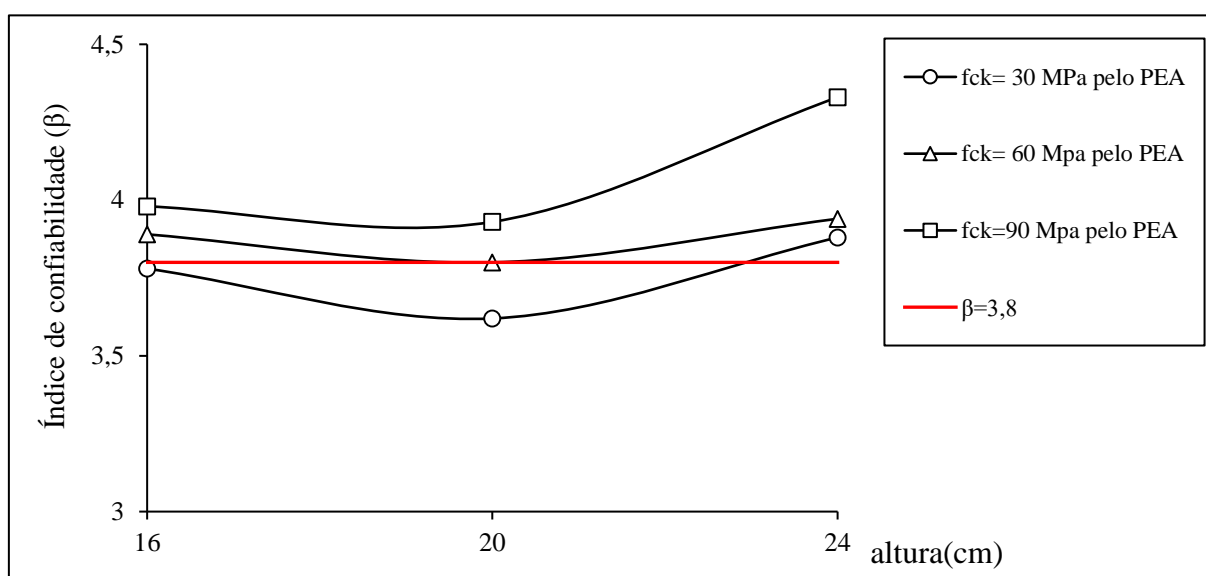


Figura 8.7 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 2 kN/m<sup>2</sup>

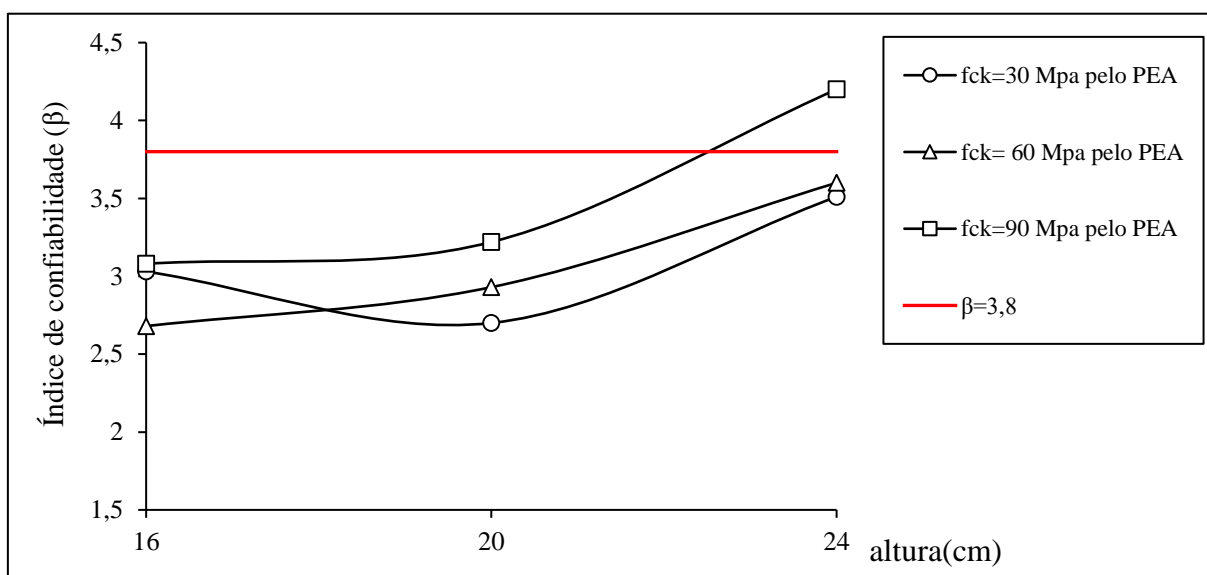


Figura 8.8 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 4 kN/m<sup>2</sup>

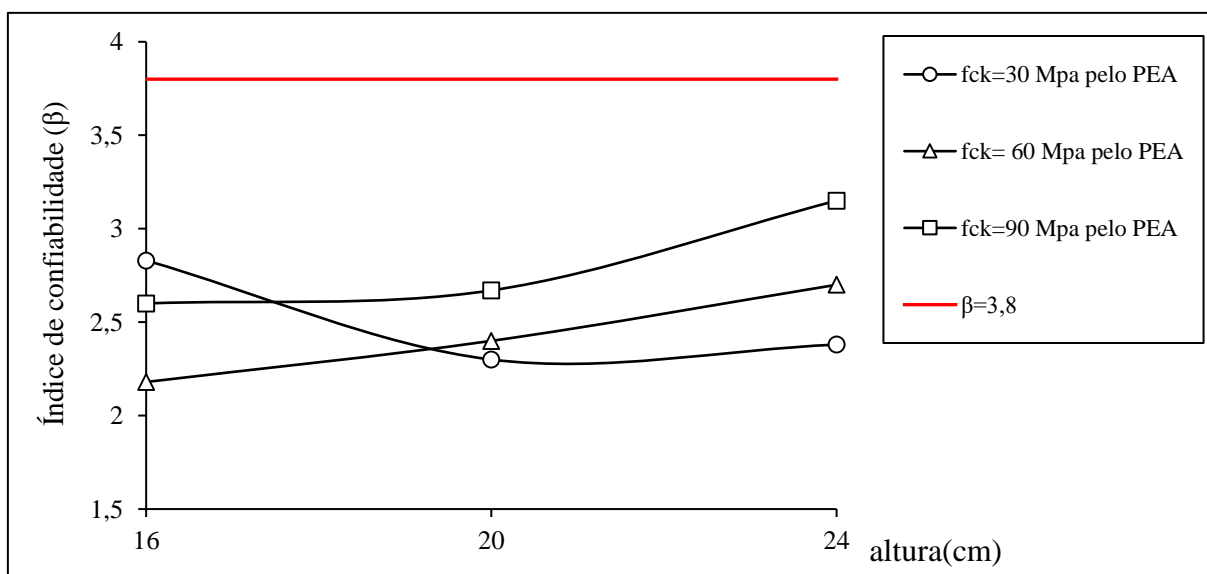


Figura 8.9 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com carregamento acidental de 6 kN/m<sup>2</sup>

As lajes com carregamento acidental de 2 kN/m<sup>2</sup> tiveram uma variação muito pequena em relação à altura para as resistências a compressão de 30 e 60 MPa. Porém, para as lajes de 90 MPa houve um acréscimo considerável no índice de confiabilidade entre as lajes de 20 e 24 cm.

As Figuras 8.8 e 8.9 apresentaram curvas semelhantes. Pode-se observar que, excetuando as lajes dimensionadas com 30 MPa, o aumento da altura tende a aumentar o índice de

confiabilidade da laje. Além disso, na maioria dos casos as lajes de maior resistência à compressão apresentam os maiores índices de confiabilidade.

### 8.2.2 Análise em relação ao carregamento acidental

A influência da altura da laje em relação ao carregamento acidental sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 8.10 a 8.12, onde as mesmas apresentam lajes com resistência característica à compressão do concreto de 30, 60 e 90 MPa, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times altura$ , onde o carregamento acidental é analisado.

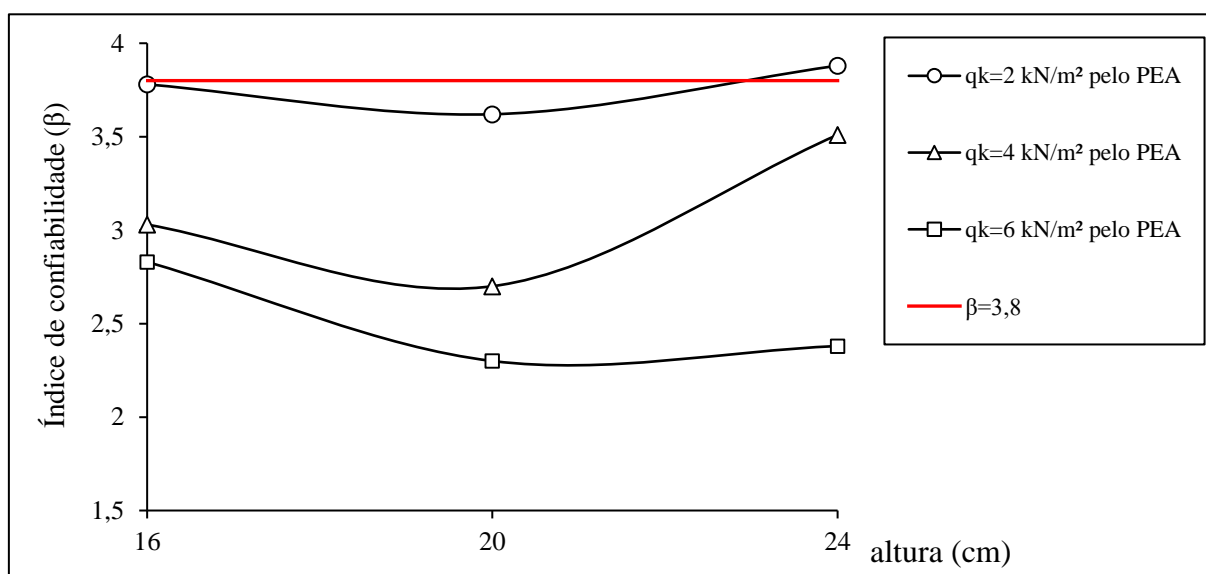


Figura 8.10 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=30 \text{ MPa}$

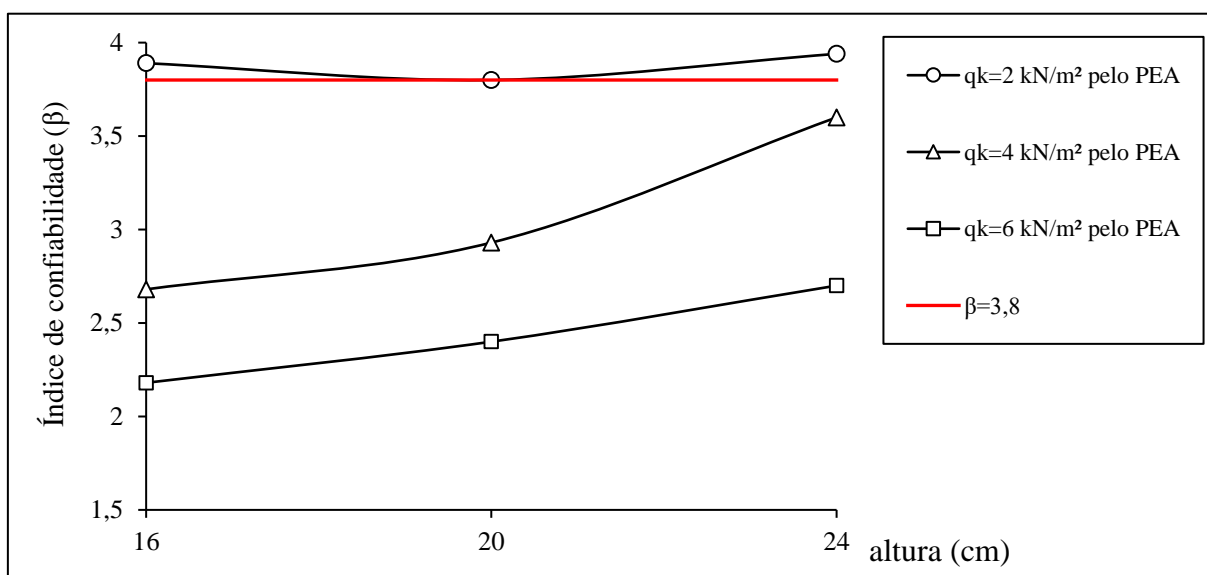


Figura 8.11 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=60$  MPa

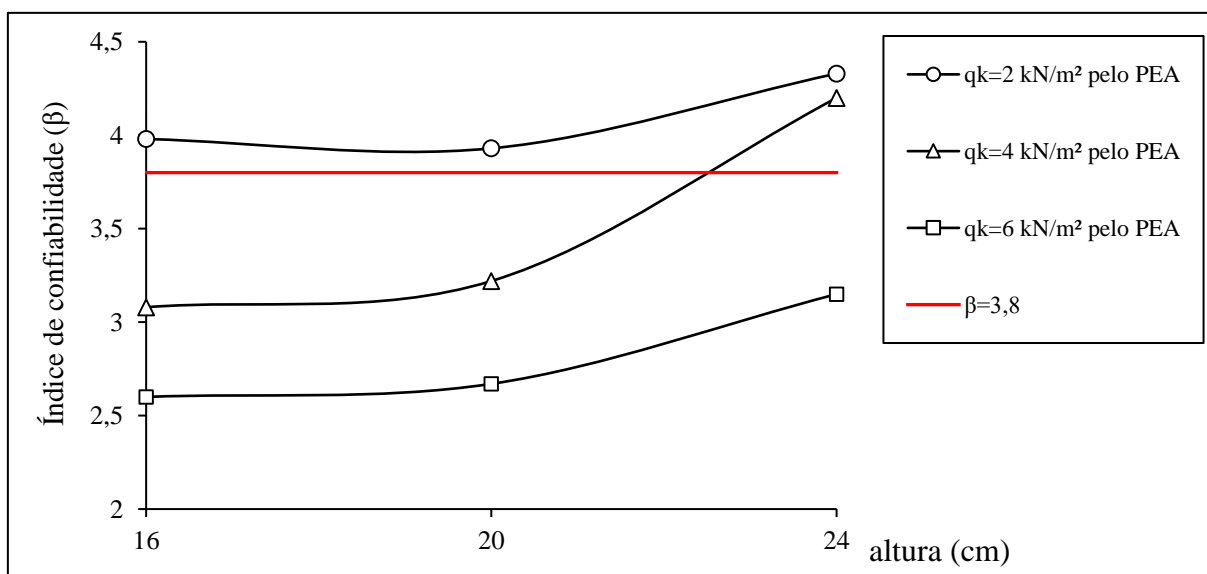


Figura 8.12 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=90$  MPa

Observa-se que as lajes dimensionadas com altura de 16 cm e 20 cm não apresentam variações significativas no índice de confiabilidade, sendo que há uma diminuição no índice para lajes dimensionadas com 30 MPa e um acréscimo nas lajes dimensionadas com 60 MPa e 90 MPa. Além disso, observa-se um comportamento semelhante entre as alturas de 20 cm e 24 cm.



Nesses casos há um acréscimo significativo no índice de confiabilidade com o aumento da altura.

### 8.3 VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE EM FUNÇÃO DO CARREGAMENTO ACIDENTAL

#### 8.3.1 Análise em relação à resistência à compressão do concreto

A influência do carregamento acidental em relação a resistência à compressão do concreto sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 8.13 a 8.15, onde as mesmas apresentam lajes com altura de 16, 20 e 24 cm, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times q_k$ , onde a resistência à compressão do concreto é analisada.

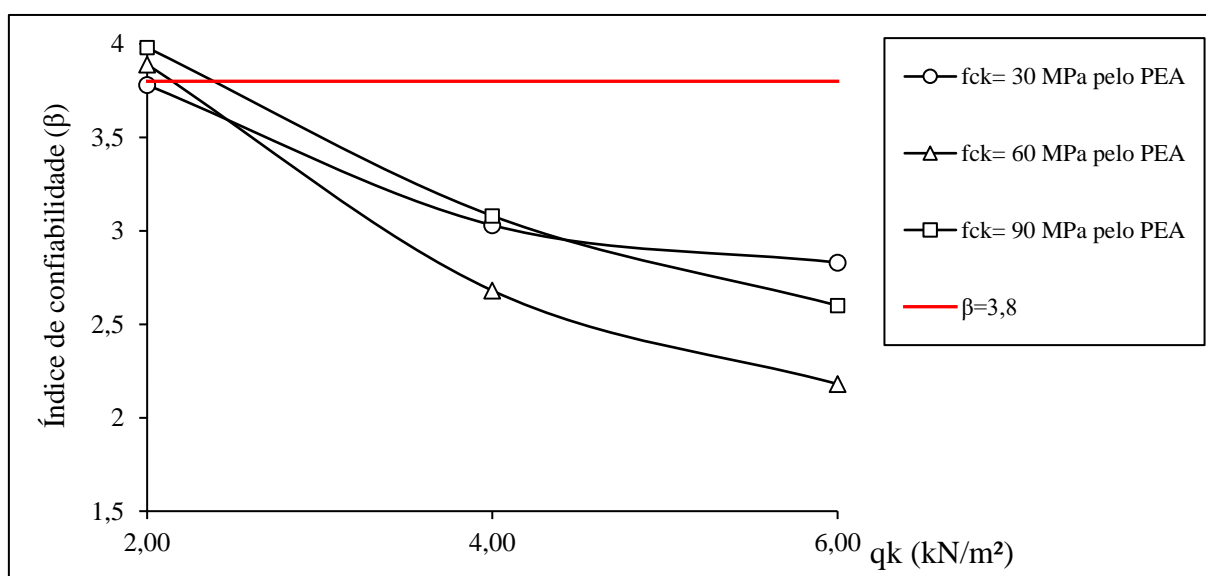


Figura 8.13 - Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 16 cm

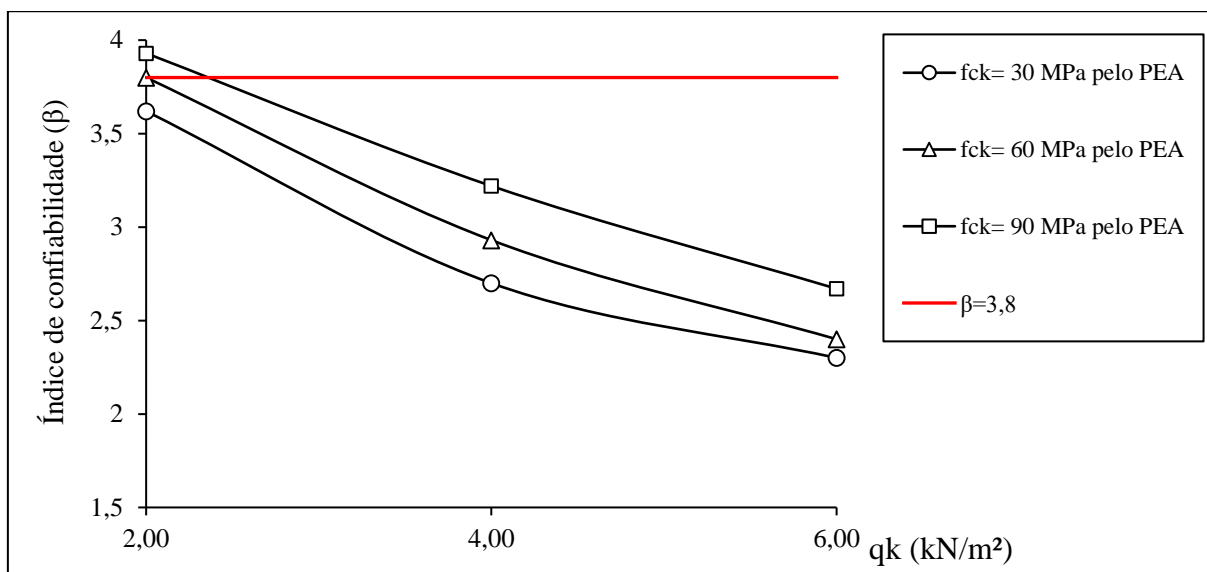


Figura 8.14 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 20 cm

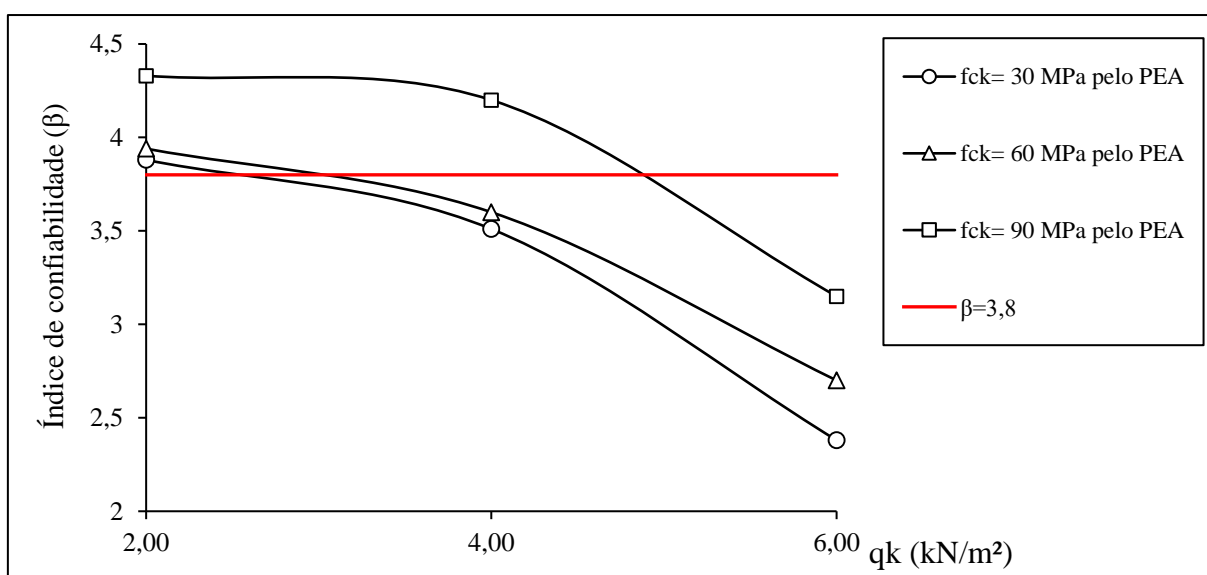


Figura 8.15 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes altura de 24 cm

Em todos os casos houve uma diminuição do índice de confiabilidade com o aumento da carga acidental. Ademais, nota-se que na maioria dos casos, para um mesmo carregamento acidental as lajes com maiores resistências à compressão do concreto atingem valores de confiabilidade mais elevados.

### 8.3.2 Análise em relação à altura da laje

A influência do carregamento acidental em relação à altura da laje sobre o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser observada pelas Figuras 8.16 a 8.18, onde as mesmas apresentam lajes com resistência característica à compressão do concreto de 30, 60 e 90 MPa, respectivamente. Nessas figuras são apresentados gráficos  $\beta \times q_k$ , onde a altura da laje é analisada.

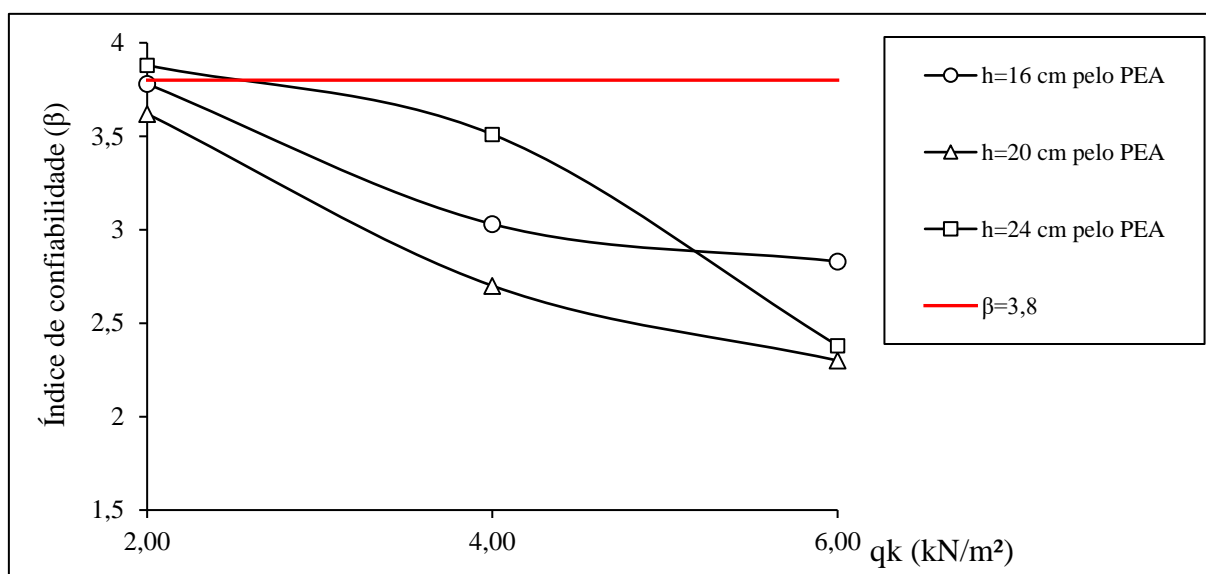


Figura 8.16 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=30$  MPa

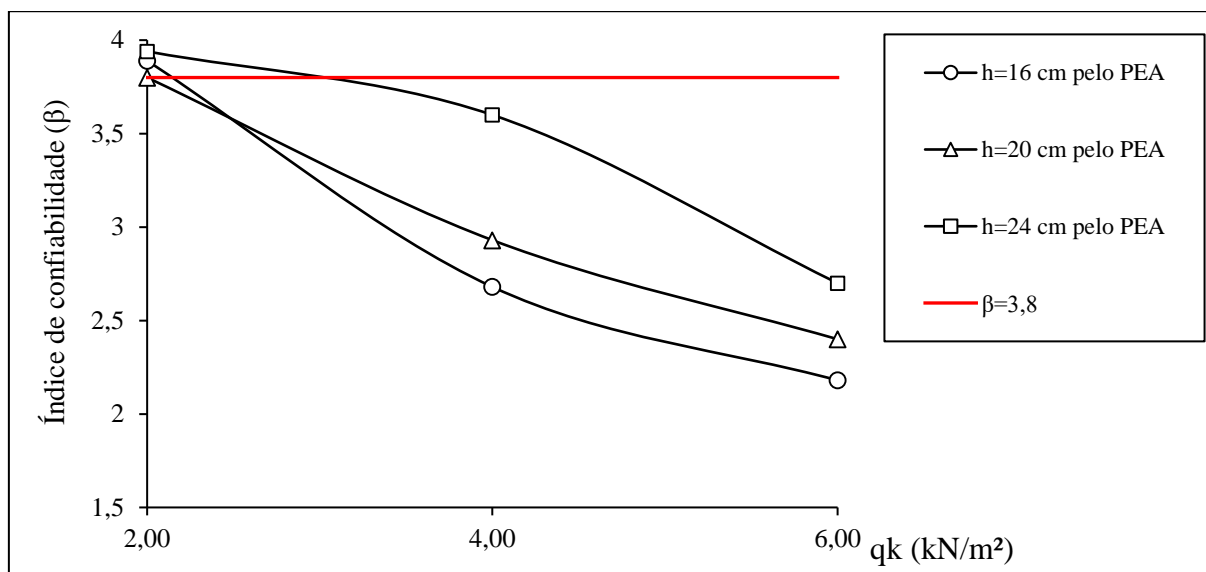


Figura 8.17 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=60$  MPa

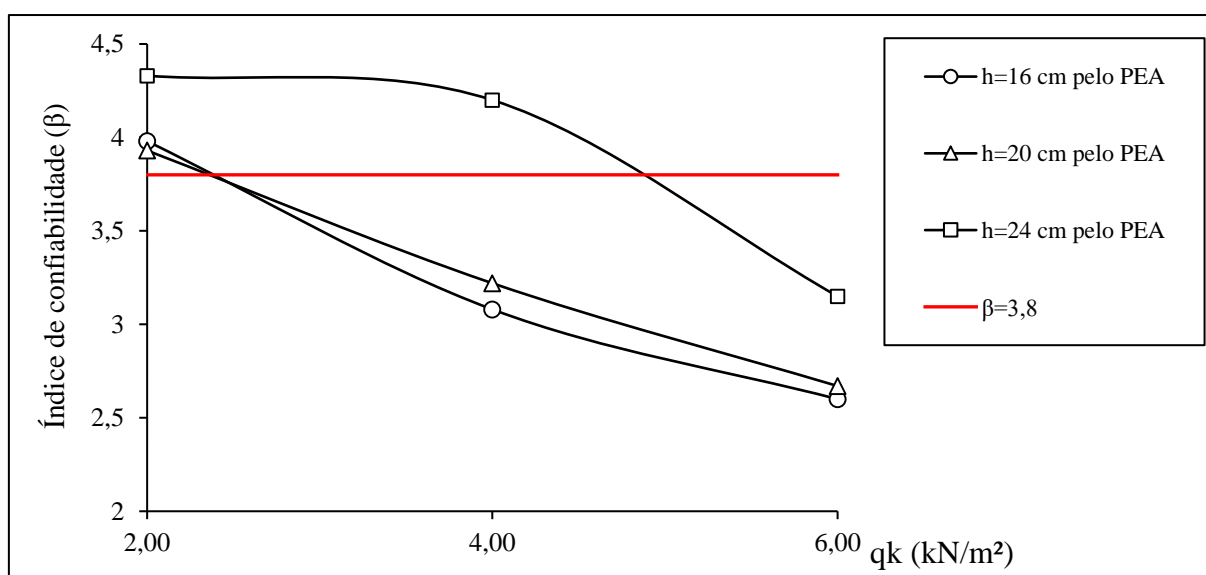


Figura 8.18 – Análise do índice de confiabilidade para as lajes com  $f_{ck}=90$  MPa

De forma geral, nota-se que o índice de confiabilidade diminui com o aumento do carregamento acidental. Nas lajes com resistência característica à compressão de 60 MPa e 90 MPa os índices de confiabilidade são maiores para as lajes de maior altura, ao contrário do acontece com as lajes de 30 MPa, onde as lajes de 16 cm de altura apresentam índices superiores as lajes de 20 cm.

## 9 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados apresentados anteriormente são referentes às configurações finais das lajes estudadas, uma para laje lisa sem armadura de cisalhamento e uma para laje lisa com armadura de cisalhamento. Porém, ao longo do trabalho, outras configurações foram analisadas a fim de se obter a configuração mais próxima do ideal. Essas outras configurações apresentaram, ao longo do dimensionamento, lajes com armadura mínima à flexão e configurações de não atendimento à norma. Assim, procuraram-se configurações que, mesmo com a variação dos parâmetros, apresentassem um conjunto adequado de lajes para as análises. Apesar deste cuidado, a laje L030616, analisadas pelo MEF, e as lajes L030416, L030616 e L030620 dimensionadas pelo PEA não passaram na verificação do contorno C’.

O dimensionamento para as lajes citadas acima, conforme a norma, deveria ser feito utilizando uma armadura de cisalhamento para o combate à punção. Entretanto, com o intuito de verificar a confiabilidade dessas lajes, não se adotou nenhuma armadura de cisalhamento. Os índices de confiabilidade obtidos para essas lajes foram de 2,44, 2,25, 2 e 2,62, respectivamente. Dessa forma, pode-se notar que os índices obtidos ficaram abaixo do índice alvo adotado, sendo os menores índices de confiabilidade alcançados para as lajes lisas sem armadura de cisalhamento.

Os resultados obtidos para lajes lisas sem armadura de cisalhamento mostram de forma indireta a influência da taxa de armadura de flexão nos índices de confiabilidade da estrutura. Isso ocorre porque a única diferença entre uma laje analisadas pelo MEF e o PEA é a quantidade de armadura longitudinal de flexão. Assim, os resultados mostraram que há um acréscimo na confiabilidade do sistema com o aumento da taxa de armadura de flexão.

Com os resultados obtidos, notou-se que os índices de confiabilidade calculados são dependentes das distribuições de probabilidade adotadas. Considerando a solicitação e a resistência como funções de variáveis aleatórias normais, os índices de confiabilidade apresentaram um valor maior em comparação com a adoção de distribuições baseadas nas análises estatísticas dos dados. Isso pode ser explicado observando a Figura 9.1, onde se nota que a curva da solicitação se distancia de uma curva normal à medida que a carga variável aumenta. Como a cauda da curva adotada apresenta, na maioria dos casos, maior probabilidade de ocorrerem valores mais elevados para a solicitação, conforme mostra a Figura 9.2, o índice de confiabilidade diminui em relação ao índice calculado adotando uma curva normal.

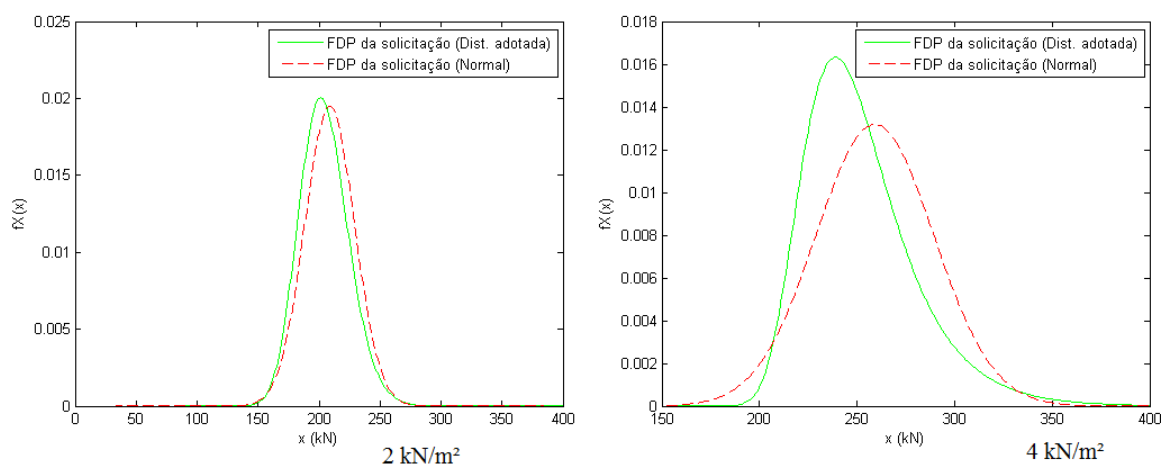


Figura 9.1 – FDP da solicitação composta pela carga variável de 2 kN/m<sup>2</sup> e 4 kN/m<sup>2</sup>

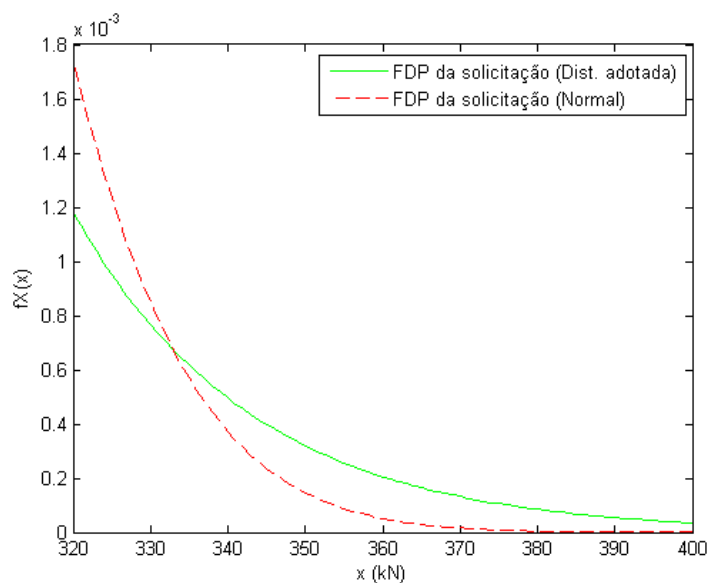


Figura 9.2 – Região ampliada da FDP da solicitação para a carga variável de 4 kN/m<sup>2</sup>

O índice de confiabilidade para as lajes lisas sem armadura de cisalhamento oscilou entre um mínimo de 2, para a laje L030616, e um máximo de 5,56 para a laje L090224, correspondendo à probabilidade de falha, da ordem de  $2,28 \times 10^{-2}$  a  $1,35 \times 10^{-8}$ . Para o caso das lajes lisas com armadura de cisalhamento, o índice de confiabilidade oscilou entre um mínimo de 2,18, para a laje L160616, e um máximo de 4,23 para a laje L190224, correspondendo à probabilidade de falha, da ordem de  $1,46 \times 10^{-2}$  a  $7,46 \times 10^{-6}$ .

A partir das análises paramétricas pode-se observar que:

- O índice de confiabilidade  $\beta$  é maior para as lajes analisadas pelo MEF. Isso ocorre porque essas lajes possuem taxas de armadura de flexão maiores em comparação as lajes analisadas pelo PEA. O acréscimo dessa taxa aumenta a contribuição do aço na carga de ruptura, como a variabilidade do aço é pequena, as lajes ganham resistência sem aumentar sua variabilidade, assim, o índice de confiabilidade dessas lajes aumenta;
- A razão entre o carregamento variável e o permanente tem grande influência no índice de confiabilidade, sendo que dentro das nove razões presentes neste estudo, o menor índice de confiabilidade é relacionado à razão de 1,2; o maior é relacionado à razão de 0,29. Esse fato acontece tanto para as lajes com armadura de cisalhamento quanto para as lajes sem essa armadura, e pode ser explicado pelo aumento do coeficiente de variação do carregamento total;
- O aumento da altura da laje contribui para um aumento na resistência ao cisalhamento e a flexão, fazendo com que o índice de confiabilidade também aumente. Esse fato pode ser explicado pelo significativo aumento da média da resistência para lajes mais espessa. Embora o coeficiente de variação da resistência aumente para essas lajes, esse aumento é compensado pelo acréscimo significativo da média, aumentando assim o índice de confiabilidade;
- A resistência à compressão do concreto também mostrou ter influência nos índices de confiabilidade das lajes estudadas. Para as lajes lisas sem armadura de cisalhamento, o aumento de resistência à compressão do concreto fez com que as probabilidades de falha de todas as lajes diminuíssem. Já para as lajes com armadura de cisalhamento, em alguns casos houve a diminuição da confiabilidade com o aumento da resistência do concreto. Notou-se que essa influência é menor nas lajes com armadura de cisalhamento. Uma possível explicação é que, diferentemente das lajes sem armadura de cisalhamento, essas lajes possuem a contribuição da resistência à tração do concreto e da resistência da armadura de cisalhamento no combate à punção.

Foram analisadas 54 lajes lisas sem armadura de cisalhamento, e apenas 28 lajes apresentaram índices de confiabilidade iguais ou superiores ao índice de confiabilidade alvo adotado. Porém, das 26 lajes que apresentaram índices menores que o índice de confiabilidade alvo, apenas três

representam situações comuns na construção civil. Ademais, as 27 lajes com armadura de cisalhamento apresentaram resultados mais insatisfatórios. Apenas oito lajes obtiveram índices de confiabilidade iguais ou superiores ao índice de confiabilidade alvo. Porém, das nove lajes que apresentam situação comum na construção civil, sete alcançaram o índice de confiabilidade alvo adotado. Além disso, acredita-se que os resultados das lajes analisadas pelo MEF apresentariam índices de confiabilidade mais elevados.

Os resultados obtidos indicam que a NBR 6118:2014 é adequada, na maioria das situações, para o projeto de lajes lisas sem armadura de cisalhamento. Porém, a mesma apresentou resultados insatisfatórios para as lajes lisas com armadura de cisalhamento. Dessa forma, fica evidente a necessidade de maiores estudos na área de confiabilidade de lajes lisas com armadura de cisalhamento, com o intuito de verificar e aprimorar o dimensionamento desse tipo de estrutura.

Por fim, deve-se salientar que os resultados e conclusões aqui estabelecidos são válidos apenas para as lajes lisas com características físicas, geométricas e de carregamento iguais às lajes aqui consideradas. Sendo que, para conclusões mais abrangentes, seriam demandados estudos probabilísticos mais exaustivos, envolvendo um número maior de parâmetros e variáveis aleatórias.



## 10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, a confiabilidade de lajes lisas apoiadas em pilares internos foi avaliada. A utilização do método de elementos finitos para a análise das lajes possibilitou o uso de materiais que representassem mais fielmente a realidade física do problema, e permitiu a utilização de um método de simulações para avaliar a confiabilidade das estruturas. O Método de Monte Carlo utilizado para análise de confiabilidade mostrou-se um método prático e eficaz.

A utilização da ferramenta UPF foi de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho. Com ela pôde-se utilizar um modelo constitutivo que representasse bem o comportamento do concreto. Além disso, foi possível o uso de armadura incorporada que permitiu, por não apresentar dependência da malha, uma melhor programação dos *scripts* das lajes e simulações numéricas menos onerosas.

O modelo numérico utilizado para simular o comportamento das lajes lisas apresentou bons resultados quando comparado com modelos reais encontrados na literatura. Porém, o mesmo apresentou pequenas instabilidades numéricas quando utilizado com a ferramenta PDS.

Os índices de confiabilidade obtidos neste trabalho foram calculados com base nos dados das simulações de Monte Carlo por dois métodos diferentes. No primeiro método, as funções de variáveis aleatórias da resistência e da solicitação foram consideradas estatisticamente independentes e com distribuição normal de probabilidade. Assim, o índice de confiabilidade pode ser calculado diretamente pela razão entre a média e o desvio padrão da margem de segurança. No segundo, primeiramente foi realizado um estudo estatístico nos dados obtidos a fim de se determinar as distribuições de probabilidade que melhor se ajustavam aos dados das simulações, e em seguida foi realizado o cálculo do índice de confiabilidade pelo método da integração numérica.

As análises paramétricas mostraram a influência dos parâmetros adotados na verificação da confiabilidade das lajes estudadas. Observou-se com essas análises que, de maneira geral, os índices de confiabilidade aumentaram com o acréscimo da taxa de armadura de flexão, diminuíram com o aumento da carga variável e cresceram com o aumento da altura das lajes. Além disso, notou-se que, na maioria dos casos, os índices de confiabilidade também aumentaram com o acréscimo da resistência à compressão do concreto.

Os estudos das lajes indicaram que a NBR 6118:2014 está adequada para a maioria das lajes lisas sem armadura de cisalhamento, sendo necessário um cuidado maior ao se utilizar o Processo Elástico Aproximado, para o cálculo dos esforços nas lajes, e ao se utilizar carregamentos variáveis elevados. Ademais, para as lajes lisas com armadura de cisalhamento, o dimensionamento através da NBR 6118:2014 apresentou, em sua maioria, resultados insatisfatórios do índice de confiabilidade, mostrando a necessidade de maiores estudos para essas lajes.

Para trabalhos futuros sugere-se um estudo mais aprofundado em lajes lisas com armadura de cisalhamento, abrangendo mais de um tipo de armadura transversal, e o estudo da confiabilidade da ligação laje-pilar de extremidade e de canto. Dessa maneira, a avaliação da confiabilidade das lajes lisas compreenderia a maioria dos casos encontrados na construção civil.

## REFERÊNCIAS

- ACI Committee 318. **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318-14)**. American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2014.
- ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design**. Volume II: Decision, risk, and reliability. New York, John Wiley & Sons, 1984b.
- ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. New York, John Wiley & Sons, 2007.
- ANSYS, Inc. **ANSYS Mechanical APDL Element Reference** (Version 15.0), 2013a
- ANSYS, Inc. **Theory reference** (Version 15.0), 2013b.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**, Vol. 1 – 2 – 3 - 4, Dunas, Rio Grande, 2010.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.
- ATAÍDE, C. A. V.; CORRÊA, M. R. S. Estudo comparativo entre o método das tensões admissíveis e o método dos estados limites para a alvenaria estrutural. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v.8, n. 34, p. 105-134, 2006.
- BARBOSA, W. C. S. **Punção em lajes lisas de concreto armado com pilares de canto reentrante**. 2012. 211 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2012.
- COELHO, A. E. G. **Puncionamento em lajes cogumelo de concreto armado com resistência de 30 MPa e armadura de cisalhamento vertical e inclinada**. 1999. 133 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 1999.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model code 2010**. Bulletin N° 65, 2012.
- CORDOVIL, F. A. B. **Lajes de conceto armado: punção**. 225 p. Ed. da UFSC, Florianópolis, 1997.
- CORDOVIL, F. A., B.; FUSCO, P. B. Ensaio de placas de concreto armado – Punção excêntrica. In: XXVII JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, 1995, Tucumán. p. 141-151

COSTA, V. C. M.; OLIVEIRA, D.C.; GOMES, R. B.; GUIMARÃES, G. N. Punção em lajes cogumelo de concreto armado - retangularidade dos pilares. **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**. v.5, p.36-46, 2012.

DAMAS, A. P. **Estudo de Confiabilidade no Projeto de Pilares Esbeltos de Concreto de Alta Resistência**. 2015. 184 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EUROCODE 2: Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and Rules for Building**. Bruxelas, 2004, 226p.

FERREIRA, M. P. **Punção em lajes lisas de concreto armado com armaduras de cisalhamento e momentos desbalanceados**. 2010. 275 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

GALAMBOS, T. V.; ELLINGWOOD, B.; MACGREGOR, J. G.; CORNELL, C. A. Probability based load criteria: Assessment of current design practice. **Journal of the Structural Division**, v.108, p.959-977, May.1982.

GOMES, R. B. **Punching resistance of reinforced concrete flat slabs with shear reinforcement**. 1991. 185 p. PhD Thesis, Polytechnic of Central London, London, 1991.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design**. JohnWiley & Sons, New York, 2000.

HALVONIK, J.; FILLO, E. The maximum punching shear resistance of flat slabs. **Procedia engineering**, v.65, p.376–381, 2013. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705813015658>>.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press Limited, 550p. 1988.

LAZZARI, P. M. **Simulação numérica das etapas construtivas de pontes estaiadas através do método dos elementos finitos**. 2016. 301 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

LIMA, A. W. **Estudo experimental e analítico de punção em lajes lisas de concreto armado utilizando polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC) como armadura de cisalhamento**. 2012. 166 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2012.

MAMEDE N. F. S.; RAMOS, A. P.; FARIA, D. M. V. Experimental and parametric 3d nonlinear finite element analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement. **Engineering Structures**, v. 48, p. 442–457, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.09.035>>.

MELGES, J. L. P. **Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido**. 2001. 414 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

MELGES, J. L. P. **Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experimental**. 1995. 252 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

MUNHOZ, F. S. **Análise do comportamento de blocos de concreto armado sobre estacas submetidos à ação de força centrada**. 2004. 160 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Departamento de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

MUSSE, T.H. **Punção em Lajes Cogumelo: Fibras de Aço e Armadura de Cisalhamento**. 2004. 189p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2004.

NOGUEIRA, H. A. T. **Avaliação da confiabilidade de pilares curtos em concreto armado projetados segundo a NBR 6118 : 2003**. 2006. 146 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of Structures**. McGraw-Hill Companies, Inc., 2000.

OLIVEIRA, D. R. C. **Análise Experimental de Lajes Cogumelo de Concreto de Alta Resistência com Armadura Inclinada de Punção**. 1998. 137p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília. Brasília, 1998.

PALIGA, C. M. **Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do Método de Monte Carlo utilizando um modelo de elementos finitos**. 2008. 249 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/13455>>.

PINTO, R. C. A. **Punção assimétrica em lajes**. 1993. 145 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993.

RABELLO, F. T. **Análise comparativa de normas para a punção em lajes de concreto armado**. 2010. 248 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

REAL, M. V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**. 2000. 249 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/119135>>.

REGAN, P. E. Punching of slabs under highly concentrated loads. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings**, v.157, p. 165–171, 2004.

REGAN, P. E. **Behavior of reinforced concrete flat slabs**. Report 89, Construction Industry Research and Information Association (CIRIA); London, Feb. 1981, p 89.

REGAN, P. E.; BRAESTRUP, M. W. Punching shear in reinforced concrete: a state of the art report. **CEB Bulletin d'Information**, n.168, jan, 1985.

REGAN, P. E.; SAMADIAN, F. Shear reinforcement against punching in reinforced concrete flat slab. **The Structural Engineer**. v. 79, nº 10, p. 24-31, May, 2001

SAN MARTINS, D. A. **Confiabilidade de vigas pré-tracionadas de concreto protendido**. 2014. 155 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

SOUZA, R. M. **Punção em lajes lisas de concreto armado com furos adjacentes ao pilar e transferência de momento**. 2008. 407 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2008. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/1762>>.

SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A. J. P. **Lajes em Concreto Armado e Protendido**. Niterói: EDUFF, 1994.

STUCCHI, F. R.; SANTOS, S. H. C.; FRANCO, R. M. Evaluation of the safety criteria of Brazilian Standard NBR 6118 for slender members based on reliability analyses. **Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering**, p. 2761–2767, 2011.

TRAUTWEIN, L. M. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento tipo “stud” interno e tipo estribo inclinado**. 2001. 165 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2001.

TRAUTWEIN, L. M. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado: Análise Experimental e Numérica**. 2006. 350 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

WILLAM, K.J.; WARNKE, E.P. **Constitutive models for the triaxial behavior of concrete**. International Association of Bridge Structures, Proceeding, v. 19, p. 1-30, 1975.

## **APÊNDICE A – TABELAS DO DIMENSIONAMENTO DAS LAJES**

## A.1) Armadura de flexão das lajes analisadas

## A.1.1) Armadura de flexão das lajes lisas sem armadura de cisalhamento dimensionadas pelo

PEA

LA/E	lx (cm)	ly (cm)	h (cm)	Armadura de flexão			Armadura de distribuição	
				M (kNm/m)	As,adot (cm <sup>2</sup> /m)	Descrição da armadura negativa	As, min (cm <sup>2</sup> /m)	Descrição da armadura positiva
L030216	200	200	16	18,86	4,69	21 φ 7,7 mm c. 10 cm na direção x	1,82	12 φ 6,3 mm c. 17 cm em cada direção
L030416	200	200	16	24,27	6,12	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção x	1,82	12 φ 6,3 mm c. 17 cm em cada direção
L030616	200	200	16	29,63	7,57	21 φ 9,8 mm c. 10 cm na direção x	1,82	12 φ 6,3 mm c. 17 cm em cada direção
L030220	200	200	20	22,40	4,24	21 φ 7,4 mm c. 10 cm na direção x	2,28	16 φ 6,3 mm c. 13 cm em cada direção
L030420	200	200	20	28,00	5,35	21 φ 8,3 mm c. 10 cm na direção x	2,28	16 φ 6,3 mm c. 13 cm em cada direção
L030620	200	200	20	33,56	6,46	21 φ 9,1 mm c. 10 cm na direção x	2,28	16 φ 6,3 mm c. 13 cm em cada direção
L030224	200	200	24	26,10	4,00	21 φ 7,2 mm c. 10 cm na direção x	2,73	19 φ 6,3 mm c. 11 cm em cada direção
L030424	200	200	24	31,89	4,91	21 φ 7,9 mm c. 10 cm na direção x	2,73	19 φ 6,3 mm c. 11 cm em cada direção
L030624	200	200	24	37,70	5,83	21 φ 8,6 mm c. 10 cm na direção x	2,73	19 φ 6,3 mm c. 11 cm em cada direção
L060216	200	200	16	18,86	4,59	21 φ 7,6 mm c. 10 cm na direção x	2,20	15 φ 6,3 mm c. 14 cm em cada direção
L060416	200	200	16	24,27	5,94	21 φ 8,7 mm c. 10 cm na direção x	2,20	15 φ 6,3 mm c. 14 cm em cada direção
L060616	200	200	16	29,63	7,30	21 φ 9,6 mm c. 10 cm na direção x	2,20	15 φ 6,3 mm c. 14 cm em cada direção
L060220	200	200	20	22,40	4,18	21 φ 7,4 mm c. 10 cm na direção x	2,86	21 φ 6,3 mm c. 10 cm em cada direção
L060420	200	200	20	28,00	5,25	21 φ 8,2 mm c. 10 cm na direção x	2,86	21 φ 6,3 mm c. 10 cm em cada direção
L060620	200	200	20	33,56	6,31	21 φ 9 mm c. 10 cm na direção x	2,86	21 φ 6,3 mm c. 10 cm em cada direção
L060224	200	200	24	26,10	3,95	21 φ 8,2 mm c. 10 cm na direção x	3,51	26 φ 6,3 mm c. 8 cm em cada direção
L060424	200	200	24	31,89	4,84	21 φ 8,2 mm c. 10 cm na direção x	3,51	26 φ 6,3 mm c. 8 cm em cada direção
L060624	200	200	24	37,70	5,74	21 φ 8,5 mm c. 10 cm na direção x	3,51	26 φ 6,3 mm c. 8 cm em cada direção
L090216	200	200	16	18,86	4,56	21 φ 7,6 mm c. 10 cm na direção x	2,59	19 φ 6,3 mm c. 11 cm em cada direção
L090416	200	200	16	24,27	5,89	21 φ 8,7 mm c. 10 cm na direção x	2,59	19 φ 6,3 mm c. 11 cm em cada direção
L090616	200	200	16	29,63	7,22	21 φ 9,6 mm c. 10 cm na direção x	2,59	19 φ 6,3 mm c. 11 cm em cada direção
L090220	200	200	20	22,40	4,16	21 φ 8 mm c. 10 cm na direção x	3,35	23 φ 6,3 mm c. 9 cm em cada direção
L090420	200	200	20	28,00	5,21	21 φ 8,1 mm c. 10 cm na direção x	3,35	23 φ 6,3 mm c. 9 cm em cada direção
L090620	200	200	20	33,56	6,27	21 φ 8,9 mm c. 10 cm na direção x	3,35	23 φ 6,3 mm c. 9 cm em cada direção
L090224	200	200	24	26,10	3,94	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção x	4,12	29 φ 6,3 mm c. 7 cm em cada direção
L090424	200	200	24	31,89	4,82	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção x	4,12	29 φ 6,3 mm c. 7 cm em cada direção
L090624	200	200	24	37,70	5,71	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção x	4,12	29 φ 6,3 mm c. 7 cm em cada direção



A.1.2) Armadura de flexão das lajes lisas sem armadura de cisalhamento dimensionadas pelo MEF

LA/E	lx (cm)	ly (cm)	h (cm)	Armadura de flexão			Armadura de distribuição		
				M (kNm/m)	AS <sub>adot</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	Descrição da armadura negativa	AS <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	Descrição da armadura positiva	
L030216	200	200	16	24,84	6,27	21 φ 8,9 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,9 mm c. 10 cm na direção y	1,82	12 φ 6.3 mm c. 17 cm em cada direção
L030416	200	200	16	31,7	8,15	21 φ 10,2 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 10,2 mm c. 10 cm na direção y	1,82	12 φ 6.3 mm c. 17 cm em cada direção
L030616	200	200	16	37,3	9,73	21 φ 11,1 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 11,1 mm c. 10 cm na direção y	1,82	12 φ 6.3 mm c. 17 cm em cada direção
L030220	200	200	20	29,89	5,72	21 φ 8,5 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,5 mm c. 10 cm na direção y	2,28	16 φ 6.3 mm c. 13 cm em cada direção
L030420	200	200	20	37,1	7,18	21 φ 9,6 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9,6 mm c. 10 cm na direção y	2,28	16 φ 6.3 mm c. 13 cm em cada direção
L030620	200	200	20	44,29	8,66	21 φ 10,5 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 10,5 mm c. 10 cm na direção y	2,28	16 φ 6.3 mm c. 13 cm em cada direção
L030224	200	200	24	34,65	5,35	21 φ 8,3 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,3 mm c. 10 cm na direção y	2,73	19 φ 6.3 mm c. 11 cm em cada direção
L030424	200	200	24	42,06	6,54	21 φ 9,1 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9,1 mm c. 10 cm na direção y	2,73	19 φ 6.3 mm c. 11 cm em cada direção
L030624	200	200	24	49,47	7,74	21 φ 9,9 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9,9 mm c. 10 cm na direção y	2,73	19 φ 6.3 mm c. 11 cm em cada direção
L060216	200	200	16	24,84	6,09	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção y	2,20	15 φ 6.3 mm c. 14 cm em cada direção
L060416	200	200	16	31,7	7,83	21 φ 10 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 10 mm c. 10 cm na direção y	2,20	15 φ 6.3 mm c. 14 cm em cada direção
L060616	200	200	16	38,55	9,60	21 φ 11,1 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 11,1 mm c. 10 cm na direção y	2,20	15 φ 6.3 mm c. 14 cm em cada direção
L060220	200	200	20	29,89	5,61	21 φ 8,4 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,4 mm c. 10 cm na direção y	2,86	21 φ 6.3 mm c. 10 cm em cada direção
L060420	200	200	20	37,1	6,99	21 φ 9,4 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9,4 mm c. 10 cm na direção y	2,86	21 φ 6.3 mm c. 10 cm em cada direção
L060620	200	200	20	44,29	8,39	21 φ 10,3 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 10,3 mm c. 10 cm na direção y	2,86	21 φ 6.3 mm c. 10 cm em cada direção
L060224	200	200	24	34,65	5,27	21 φ 8,2 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,2 mm c. 10 cm na direção y	3,51	26 φ 6.3 mm c. 8 cm em cada direção
L060424	200	200	24	42,06	6,41	21 φ 9 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9 mm c. 10 cm na direção y	3,51	26 φ 6.3 mm c. 8 cm em cada direção
L060624	200	200	24	49,47	7,57	21 φ 9,8 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9,8 mm c. 10 cm na direção y	3,51	26 φ 6.3 mm c. 8 cm em cada direção
L090216	200	200	16	24,84	6,03	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção y	2,59	19 φ 6.3 mm c. 11 cm em cada direção
L090416	200	200	16	31,7	7,74	21 φ 9,9 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9,9 mm c. 10 cm na direção y	2,59	19 φ 6.3 mm c. 11 cm em cada direção
L090616	200	200	16	38,55	9,46	21 φ 11 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 11 mm c. 10 cm na direção y	2,59	19 φ 6.3 mm c. 11 cm em cada direção
L090220	200	200	20	29,89	5,57	21 φ 8,4 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,4 mm c. 10 cm na direção y	3,35	23 φ 6.3 mm c. 9 cm em cada direção
L090420	200	200	20	37,1	6,94	21 φ 9,4 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9,4 mm c. 10 cm na direção y	3,35	23 φ 6.3 mm c. 9 cm em cada direção
L090620	200	200	20	44,29	8,31	21 φ 10,3 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 10,3 mm c. 10 cm na direção y	3,35	23 φ 6.3 mm c. 9 cm em cada direção
L090224	200	200	24	34,65	5,24	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 8,8 mm c. 10 cm na direção y	4,12	29 φ 6.3 mm c. 7 cm em cada direção
L090424	200	200	24	42,06	6,37	21 φ 9 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9 mm c. 10 cm na direção y	4,12	29 φ 6.3 mm c. 7 cm em cada direção
L090624	200	200	24	49,47	7,51	21 φ 9,8 mm c. 10 cm na direção x	21 φ 9,8 mm c. 10 cm na direção y	4,12	29 φ 6.3 mm c. 7 cm em cada direção

A.1.3) Armadura de flexão das lajes lisas com armadura de cisalhamento dimensionadas pelo PEA

LAJE	l <sub>x</sub> (cm)	l <sub>y</sub> (cm)	h (cm)	Armadura de flexão			Armadura de distribuição		
				M (kNm/m)	AS <sub>adot</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	Descrição da armadura negativa	As,min (cm <sup>2</sup> /m)	Descrição da armadura positiva	
L130216	300	300	16	46,20	12,37	31 φ 12,6 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 12,6 mm c. 10 cm na direção y	1,82	18 φ 6.3 mm c. 17 cm nas duas direções
L130416	300	300	16	59,70	16,71	31 φ 14,6 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 14,6 mm c. 10 cm na direção y	1,82	18 φ 6.3 mm c. 17 cm nas duas direções
L130616	300	300	16	72,60	21,34	31 φ 16,5 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 16,5 mm c. 10 cm na direção y	1,82	18 φ 6.3 mm c. 17 cm nas duas direções
L130220	300	300	20	55,65	11,08	31 φ 11,9 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 11,9 mm c. 10 cm na direção y	2,28	24 φ 6.3 mm c. 13 cm nas duas direções
L130420	300	300	20	69,60	14,18	31 φ 13,4 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 13,4 mm c. 10 cm na direção y	2,28	24 φ 6.3 mm c. 13 cm nas duas direções
L130620	300	300	20	83,52	17,44	31 φ 14,9 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 14,9 mm c. 10 cm na direção y	2,28	24 φ 6.3 mm c. 13 cm nas duas direções
L130224	300	300	24	65,61	10,43	31 φ 11,5 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 11,5 mm c. 10 cm na direção y	2,73	28 φ 6.3 mm c. 11 cm nas duas direções
L130424	300	300	24	80,19	12,94	31 φ 12,8 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 12,8 mm c. 10 cm na direção y	2,73	28 φ 6.3 mm c. 11 cm nas duas direções
L130624	300	300	24	94,76	15,53	31 φ 14,1 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 14,1 mm c. 10 cm na direção y	2,73	28 φ 6.3 mm c. 11 cm nas duas direções
L160216	300	300	16	46,20	11,62	31 φ 12,2 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 12,2 mm c. 10 cm na direção y	2,20	22 φ 6.3 mm c. 14 cm nas duas direções
L160416	300	300	16	59,70	15,27	31 φ 13,9 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 13,9 mm c. 10 cm na direção y	2,20	22 φ 6.3 mm c. 14 cm nas duas direções
L160616	300	300	16	72,60	18,89	31 φ 15,5 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 15,5 mm c. 10 cm na direção y	2,20	22 φ 6.3 mm c. 14 cm nas duas direções
L160220	300	300	20	55,65	10,62	31 φ 11,6 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 11,6 mm c. 10 cm na direção y	2,86	31 φ 6.3 mm c. 10 cm nas duas direções
L160420	300	300	20	69,60	13,42	31 φ 13,1 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 13,1 mm c. 10 cm na direção y	2,86	31 φ 6.3 mm c. 10 cm nas duas direções
L160620	300	300	20	83,52	16,27	31 φ 14,4 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 14,4 mm c. 10 cm na direção y	2,86	31 φ 6.3 mm c. 10 cm nas duas direções
L160224	300	300	24	65,61	10,11	31 φ 11,3 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 11,3 mm c. 10 cm na direção y	3,51	38 φ 6.3 mm c. 8 cm nas duas direções
L160424	300	300	24	80,19	12,44	31 φ 12,6 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 12,6 mm c. 10 cm na direção y	3,51	38 φ 6.3 mm c. 8 cm nas duas direções
L160624	300	300	24	94,76	14,80	31 φ 13,7 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 13,7 mm c. 10 cm na direção y	3,51	38 φ 6.3 mm c. 8 cm nas duas direções
L190216	300	300	16	46,20	11,40	31 φ 12 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 12 mm c. 10 cm na direção y	2,59	28 φ 6.3 mm c. 11 cm nas duas direções
L190416	300	300	16	59,70	14,89	31 φ 13,8 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 13,8 mm c. 10 cm na direção y	2,59	28 φ 6.3 mm c. 11 cm nas duas direções
L190616	300	300	16	72,60	18,30	31 φ 15,3 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 15,3 mm c. 10 cm na direção y	2,59	28 φ 6.3 mm c. 11 cm nas duas direções
L190220	300	300	20	55,65	10,49	31 φ 11,6 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 11,6 mm c. 10 cm na direção y	3,35	34 φ 6.3 mm c. 9 cm nas duas direções
L190420	300	300	20	69,60	13,20	31 φ 13 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 13 mm c. 10 cm na direção y	3,35	34 φ 6.3 mm c. 9 cm nas duas direções
L190620	300	300	20	83,52	15,95	31 φ 14,2 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 14,2 mm c. 10 cm na direção y	3,35	34 φ 6.3 mm c. 9 cm nas duas direções
L190224	300	300	24	65,61	10,01	31 φ 11,3 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 11,3 mm c. 10 cm na direção y	4,12	43 φ 6.3 mm c. 7 cm nas duas direções
L190424	300	300	24	80,19	12,29	31 φ 12,5 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 12,5 mm c. 10 cm na direção y	4,12	43 φ 6.3 mm c. 7 cm nas duas direções
L190624	300	300	24	94,76	14,58	31 φ 13,6 mm c. 10 cm na direção x	31 φ 13,6 mm c. 10 cm na direção y	4,12	43 φ 6.3 mm c. 7 cm nas duas direções

## A.2) Armadura de colapso progressivo das lajes lisas analisadas

## A.2.1) Lajes lisas sem armadura de cisalhamento dimensionadas pelo PEA

Armaduras contra colapso progressivo						
Laje	Reação do pilar (kN)	Fsd (kN)	As necessário (cm <sup>2</sup> )	As existente (cm <sup>2</sup> )	As colapso progr. (cm <sup>2</sup> )	Descrição
L030216	174	208,8	7,20	1,46	5,75	5 φ 13 mm em cada direção
L030416	224	268,8	9,27	1,46	7,82	4 φ 16 mm em cada direção
L030616	274	328,8	11,34	1,46	9,89	7 φ 14 mm em cada direção
L030220	202	242,4	8,36	1,82	6,54	5 φ 14 mm em cada direção
L030420	253	303,6	10,47	1,82	8,65	5 φ 16 mm em cada direção
L030620	300	360	12,42	1,82	10,60	5 φ 17 mm em cada direção
L030224	239	286,8	9,89	2,19	7,71	6 φ 14 mm em cada direção
L030424	281	337,2	11,63	2,19	9,45	5 φ 16 mm em cada direção
L030624	330	396	13,66	2,19	11,48	5 φ 18 mm em cada direção
L060216	174	208,8	7,20	1,76	5,44	5 φ 13 mm em cada direção
L060416	224	268,8	9,27	1,76	7,51	4 φ 16 mm em cada direção
L060616	274	328,8	11,34	1,76	9,58	5 φ 16 mm em cada direção
L060220	202	242,4	8,36	2,28	6,08	5 φ 13 mm em cada direção
L060420	253	303,6	10,47	2,28	8,19	5 φ 15 mm em cada direção
L060620	300	360	12,42	2,28	10,14	5 φ 17 mm em cada direção
L060224	239	286,8	9,89	2,81	7,09	5 φ 14 mm em cada direção
L060424	281	337,2	11,63	2,81	8,83	5 φ 16 mm em cada direção
L060624	330	396	13,66	2,81	10,86	5 φ 17 mm em cada direção
L090216	174	208,8	7,20	2,07	5,13	4 φ 13 mm em cada direção
L090416	224	268,8	9,27	2,07	7,20	5 φ 14 mm em cada direção
L090616	274	328,8	11,34	2,07	9,27	5 φ 16 mm em cada direção
L090220	202	242,4	8,36	2,68	5,68	4 φ 14 mm em cada direção
L090420	253	303,6	10,47	2,68	7,79	5 φ 15 mm em cada direção
L090620	300	360	12,42	2,68	9,74	5 φ 17 mm em cada direção
L090224	239	286,8	9,89	3,29	6,60	5 φ 13 mm em cada direção
L090424	281	337,2	11,63	3,29	8,34	5 φ 15 mm em cada direção
L090624	330	396	13,66	3,29	10,37	5 φ 17 mm em cada direção

## A.2.2) Lajes lisas sem armadura de cisalhamento dimensionadas pelo MEF

Armaduras contra colapso progressivo						
Laje	Reação do pilar (kN)	Fsd (kN)	As necessário (cm <sup>2</sup> )	As existente (cm <sup>2</sup> )	As colapso progr. (cm <sup>2</sup> )	Descrição
L030216	174,00	313,20	7,20	1,46	5,75	5 φ 12,5 mm
L030416	224,00	403,20	9,27	1,46	7,82	7 φ 12,5 mm
L030616	274,00	493,20	11,34	1,46	9,89	9 φ 12,5 mm
L030220	202,00	363,60	8,36	1,82	6,54	6 φ 12,5 mm
L030420	253,00	455,40	10,47	1,82	8,65	8 φ 12,5 mm
L030620	300,00	540,00	12,42	1,82	10,60	9 φ 12,5 mm
L030224	239,00	430,20	9,89	2,19	7,71	7 φ 12,5 mm
L030424	281,00	505,80	11,63	2,19	9,45	8 φ 12,5 mm
L030624	330,00	594,00	13,66	2,19	11,48	10 φ 12,5 mm
L060216	174,00	313,20	7,20	1,76	5,44	5 φ 12,5 mm
L060416	224,00	403,20	9,27	1,76	7,51	7 φ 12,5 mm
L060616	274,00	493,20	11,34	1,76	9,58	8 φ 12,5 mm
L060220	202,00	363,60	8,36	2,28	6,08	5 φ 12,5 mm
L060420	253,00	455,40	10,47	2,28	8,19	7 φ 12,5 mm
L060620	300,00	540,00	12,42	2,28	10,14	9 φ 12,5 mm
L060224	239,00	430,20	9,89	2,81	7,09	6 φ 12,5 mm
L060424	281,00	505,80	11,63	2,81	8,83	8 φ 12,5 mm
L060624	330,00	594,00	13,66	2,81	10,86	9 φ 12,5 mm
L090216	174,00	313,20	7,20	2,07	5,13	5 φ 12,5 mm
L090416	224,00	403,20	9,27	2,07	7,20	6 φ 12,5 mm
L090616	274,00	493,20	11,34	2,07	9,27	8 φ 12,5 mm
L090220	202,00	363,60	8,36	2,68	5,68	5 φ 12,5 mm
L090420	253,00	455,40	10,47	2,68	7,79	7 φ 12,5 mm
L090620	300,00	540,00	12,42	2,68	9,74	8 φ 12,5 mm
L090224	239,00	430,20	9,89	3,29	6,60	6 φ 12,5 mm
L090424	281,00	505,80	11,63	3,29	8,34	7 φ 12,5 mm
L090624	330,00	594,00	13,66	3,29	10,37	9 φ 12,5 mm

## A.2.3) Lajes lisas com armadura de cisalhamento dimensionadas pelo PEA

Armaduras contra colapso progressivo						
Laje	Reação do pilar (kN)	Fsd (kN)	As necessário (cm <sup>2</sup> )	As existente (cm <sup>2</sup> )	As colapso progr. (cm <sup>2</sup> )	Descrição
L130216	435	783,0	18,01	1,46	16,55	8 $\phi$ 17 mm
L130416	559	1006,2	23,14	1,46	21,68	8 $\phi$ 19 mm
L130616	683	1229,4	28,28	1,46	26,82	10 $\phi$ 19 mm
L130220	505	909,0	20,91	1,82	19,08	10 $\phi$ 16 mm
L130420	632	1137,6	26,16	1,82	24,34	10 $\phi$ 18 mm
L130620	758	1364,4	31,38	1,82	29,56	10 $\phi$ 20 mm
L130224	577	1038,6	23,89	2,19	21,70	10 $\phi$ 17 mm
L130424	705	1269,0	29,19	2,19	27,00	10 $\phi$ 19 mm
L130624	834	1501,2	34,53	2,19	32,34	10 $\phi$ 21 mm
L160216	435	783,0	18,01	1,76	16,25	8 $\phi$ 17 mm
L160416	559	1006,2	23,14	1,76	21,38	8 $\phi$ 19 mm
L160616	683	1229,4	28,28	1,76	26,51	8 $\phi$ 21 mm
L160220	505	909,0	20,91	2,28	18,62	8 $\phi$ 18 mm
L160420	632	1137,6	26,16	2,28	23,88	8 $\phi$ 20 mm
L160620	758	1364,4	31,38	2,28	29,10	8 $\phi$ 22 mm
L160224	577	1038,6	23,89	2,81	21,08	8 $\phi$ 19 mm
L160424	705	1269,0	29,19	2,81	26,38	8 $\phi$ 21 mm
L160624	834	1501,2	34,53	2,81	31,72	8 $\phi$ 23 mm
L190216	435	783,0	18,01	2,07	15,94	8 $\phi$ 16 mm
L190416	559	1006,2	23,14	2,07	21,07	8 $\phi$ 19 mm
L190616	683	1229,4	28,28	2,07	26,21	8 $\phi$ 21 mm
L190220	505	909,0	20,91	2,68	18,23	8 $\phi$ 18 mm
L190420	632	1137,6	26,16	2,68	23,48	8 $\phi$ 20 mm
L190620	758	1364,4	31,38	2,68	28,70	8 $\phi$ 22 mm
L190224	577	1038,6	23,89	3,29	20,59	8 $\phi$ 19 mm
L190424	705	1269,0	29,19	3,29	25,89	8 $\phi$ 21 mm
L190624	834	1501,2	34,53	3,29	31,23	8 $\phi$ 23 mm

## A.3) Armadura de cisalhamento das lajes lisas analisadas

Armadura de cisalhamento													
LAJE	Reação do pilar (kN)	tsd2 (kN/cm <sup>2</sup> )	tsd1 (kN/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{Rd2}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{Rd1}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	Contorno C	Contorno C'	fywd (kN/cm <sup>2</sup> )	sr (cm)	Asw (cm <sup>2</sup> )	Descrição	Contorno C''	
L130216	435	0,28	0,13	0,51	0,08	OK	FALHA	30	9	4,71	6 $\phi$ 7,08 mm espaçados em 9 cm	OK	
L130416	559	0,36	0,17	0,51	0,09	OK	FALHA	30	9	6,80	8 $\phi$ 8,5 mm espaçados em 9 cm	OK	
L130616	683	0,43	0,21	0,51	0,10	OK	FALHA	30	9	8,94	9 $\phi$ 9,74 mm espaçados em 9 cm	OK	
L130220	505	0,25	0,10	0,51	0,07	OK	FALHA	30	9	3,99	6 $\phi$ 6,51 mm espaçados em 9 cm	OK	
L130420	632	0,31	0,13	0,51	0,07	OK	FALHA	30	9	5,65	8 $\phi$ 7,75 mm espaçados em 9 cm	OK	
L130620	758	0,37	0,16	0,51	0,08	OK	FALHA	30	9	7,33	9 $\phi$ 8,82 mm espaçados em 9 cm	OK	
L130224	577	0,23	0,09	0,51	0,06	OK	FALHA	30	9	3,49	6 $\phi$ 6,09 mm espaçados em 9 cm	OK	
L130424	705	0,28	0,11	0,51	0,06	OK	FALHA	30	9	4,85	7 $\phi$ 7,18 mm espaçados em 9 cm	OK	
L130624	834	0,34	0,12	0,51	0,07	OK	FALHA	30	9	6,24	9 $\phi$ 8,14 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160216	435	0,28	0,13	0,88	0,10	OK	FALHA	30	9	3,74	4 $\phi$ 6,31 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160416	559	0,36	0,17	0,88	0,11	OK	FALHA	30	9	5,78	6 $\phi$ 7,84 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160616	683	0,43	0,21	0,88	0,12	OK	FALHA	30	9	7,89	7 $\phi$ 9,16 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160220	505	0,25	0,10	0,88	0,08	OK	FALHA	30	9	3,02	5 $\phi$ 5,67 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160420	632	0,31	0,13	0,88	0,09	OK	FALHA	30	9	4,63	5 $\phi$ 7,01 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160620	758	0,37	0,16	0,88	0,10	OK	FALHA	30	9	6,26	6 $\phi$ 8,16 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160224	577	0,23	0,09	0,88	0,07	OK	FALHA	30	9	2,52	6 $\phi$ 5,18 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160424	705	0,28	0,11	0,88	0,08	OK	FALHA	30	9	3,82	6 $\phi$ 6,37 mm espaçados em 9 cm	OK	
L160624	834	0,34	0,12	0,88	0,08	OK	FALHA	30	9	5,17	6 $\phi$ 7,41 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190216	435	0,28	0,13	1,11	0,11	OK	FALHA	30	9	3,04	4 $\phi$ 5,68 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190416	559	0,36	0,17	1,11	0,13	OK	FALHA	30	9	5,02	4 $\phi$ 7,3 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190616	683	0,43	0,21	1,11	0,13	OK	FALHA	30	9	7,09	6 $\phi$ 8,68 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190220	505	0,25	0,10	1,11	0,10	OK	FALHA	30	9	2,33	6 $\phi$ 4,98 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190420	632	0,31	0,13	1,11	0,10	OK	FALHA	30	9	3,89	5 $\phi$ 6,43 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190620	758	0,37	0,16	1,11	0,11	OK	FALHA	30	9	5,48	5 $\phi$ 7,63 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190224	577	0,23	0,09	1,11	0,08	OK	FALHA	30	9	1,83	6 $\phi$ 4,41 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190424	705	0,28	0,11	1,11	0,09	OK	FALHA	30	9	3,08	6 $\phi$ 5,72 mm espaçados em 9 cm	OK	
L190624	834	0,34	0,12	1,11	0,10	OK	FALHA	30	9	4,39	6 $\phi$ 6,83 mm espaçados em 9 cm	OK	

## A.4) Verificação da necessidade de armadura de cisalhamento das lajes lisas analisadas

## A.4.1) Lajes lisas sem armadura de cisalhamento dimensionadas pelo PEA

Verificação à punção							
LAJE	Reação do pilar (kN)	$\tau_{sd2}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{sd1}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{Rd2}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{Rd1}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	Contorno C	Contorno C'
L030216	174	0,111	0,054	0,509	0,059	OK	OK
L030416	224	0,143	0,069	0,509	0,065	OK	FALHA
L030616	274	0,174	0,085	0,509	0,069	OK	FALHA
L030220	202	0,100	0,042	0,509	0,049	OK	OK
L030420	253	0,125	0,053	0,509	0,053	OK	OK
L030620	300	0,148	0,062	0,509	0,057	OK	FALHA
L030224	239	0,096	0,036	0,509	0,043	OK	OK
L030424	281	0,113	0,042	0,509	0,046	OK	OK
L030624	330	0,133	0,049	0,509	0,049	OK	OK
L060216	174	0,111	0,054	0,879	0,074	OK	OK
L060416	224	0,143	0,069	0,879	0,081	OK	OK
L060616	274	0,174	0,085	0,879	0,086	OK	OK
L060220	202	0,100	0,042	0,879	0,062	OK	OK
L060420	253	0,125	0,053	0,879	0,067	OK	OK
L060620	300	0,148	0,062	0,879	0,071	OK	OK
L060224	239	0,096	0,036	0,879	0,059	OK	OK
L060424	281	0,113	0,042	0,879	0,059	OK	OK
L060624	330	0,133	0,049	0,879	0,061	OK	OK
L090216	174	0,111	0,054	1,111	0,084	OK	OK
L090416	224	0,143	0,069	1,111	0,092	OK	OK
L090616	274	0,174	0,085	1,111	0,098	OK	OK
L090220	202	0,100	0,042	1,111	0,075	OK	OK
L090420	253	0,125	0,053	1,111	0,076	OK	OK
L090620	300	0,148	0,062	1,111	0,081	OK	OK
L090224	239	0,096	0,036	1,111	0,072	OK	OK
L090424	281	0,113	0,042	1,111	0,072	OK	OK
L090624	330	0,133	0,049	1,111	0,072	OK	OK

## A.4.2) Lajes lisas sem armadura de cisalhamento dimensionadas pelo MEF

Verificação à punção							
LAJE	Reação do pilar (kN)	$\tau_{sd2}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{sd1}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{Rd2}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{Rd1}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	Contorno C	Contorno C'
L030216	174	0,110727	0,053744	0,509143	0,065129	OK	OK
L030416	224	0,142545	0,069187	0,509143	0,071063	OK	OK
L030616	274	0,174364	0,084631	0,509143	0,075404	OK	FALHA
L030220	202	0,099577	0,041937	0,509143	0,054554	OK	OK
L030420	253	0,124718	0,052525	0,509143	0,058832	OK	OK
L030620	300	0,147887	0,062283	0,509143	0,062633	OK	OK
L030224	239	0,096149	0,035762	0,509143	0,047538	OK	OK
L030424	281	0,113046	0,042046	0,509143	0,050826	OK	OK
L030624	330	0,132759	0,049378	0,509143	0,053775	OK	OK
L060216	174	0,110727	0,053744	0,879429	0,081247	OK	OK
L060416	224	0,142545	0,069187	0,879429	0,088361	OK	OK
L060616	274	0,174364	0,084631	0,879429	0,094572	OK	OK
L060220	202	0,099577	0,041937	0,879429	0,068265	OK	OK
L060420	253	0,124718	0,052525	0,879429	0,073482	OK	OK
L060620	300	0,147887	0,062283	0,879429	0,078079	OK	OK
L060224	239	0,096149	0,035762	0,879429	0,059587	OK	OK
L060424	281	0,113046	0,042046	0,879429	0,063632	OK	OK
L060624	330	0,132759	0,049378	0,879429	0,067242	OK	OK
L090216	174	0,110727	0,053744	1,110857	0,092716	OK	OK
L090416	224	0,142545	0,069187	1,110857	0,100739	OK	OK
L090616	274	0,174364	0,084631	1,110857	0,107714	OK	OK
L090220	202	0,099577	0,041937	1,110857	0,077974	OK	OK
L090420	253	0,124718	0,052525	1,110857	0,083885	OK	OK
L090620	300	0,147887	0,062283	1,110857	0,089082	OK	OK
L090224	239	0,096149	0,035762	1,110857	0,071817	OK	OK
L090424	281	0,113046	0,042046	1,110857	0,072693	OK	OK
L090624	330	0,132759	0,049378	1,110857	0,076788	OK	OK



## **APÊNDICE B – Scripts ANSYS APDL 17.2**

## B.1) Exemplo de script utilizado para análises das cargas de ruptura das lajes lisas no ANSYS APDL 17.2.

```

! *****
! Programador: Gustavo Ribeiro da Silva
! Nome do arquivo: L130224
! unidades: cm, kN
! *****
*create,reliability,pdan          ! Cria uma macro para ser usada durante
!                                ! o looping
!
!-----
! Determinação de parâmetros de programação - Entrada de dados
!-----
!-----
! Propriedades geométricas
!-----
!
lx=150                          ! Comprimento da laje em x (cm)
lz=150                          ! Comprimento da laje em z (cm)
h=24                            ! Altura da laje (cm)
lp=20                           ! Largura em x do pilar (cm)
nbs=15                          ! Numero de barras superior >1
nbi=14                          ! Numero de barras inferior >1
nbi2=5                          ! Numero de barras arm.de colapso prog.
nst=6                            ! Numero de barras transversais
sbst=9                          ! Espacamento entre as barras transversais (cm)
dbs=1.15                        ! Diâmetro da barra de aço superior (cm)
dbi=0.63                        ! Diâmetro da barra de aço inferior (cm)
dbi2=1.7                        ! Diâmetro da barra de aço arm.colapso prog.(cm)
dbst=.61                        ! Diâmetro da armadura transversal (cm)
d1=2.5                          ! Cobrimento do concreto (cm)
d2=1                            ! Afastamento da armadura trnsv. em relação ao pilar
nelem=6                          ! Numero de elementos em cada direção
nelemp=1                        ! Numero de elementos do pilar
ndiv=3                          ! Numero de elementos na direção da altura
dp=3.5                          ! Carregamento em deslocamento (cm)
nsub=500                        ! Numero de substeps
!-----
! Propriedades dos materiais
!-----
!
v=0.2                          ! Coef. de Poisson do concreto
vs=0.3                          ! Coef. de Poisson do aço
fck=3                          ! Resistência carac.a compr. do concr. (kN/cm2)
fyk=50                          ! Resistência ao escoamento do aço arm. long. (kN/cm2)
fyks=30                         ! Resistência ao escoamento do aço arm. transversal. (kN/cm2)
ESl=20000                      ! Módulo de elasticidade do aço long.
ESt=20000                      ! Módulo de elasticidade do aço trans.
fabr1=0                        ! Arm. long.= CA 50, fabr1=0, se for CA 60, fabr1=1
fabrt=0                        ! Arm. transv.= CA 50, fabrt=0, se for CA 60, fabrt=1
!-----
! Determinação das variáveis aleatorias
!-----
!
Vfc=0.15                       ! Coef. de variação de fc
Vec=0.15                       ! Coef. de variação de Eci
Vft=1.2*Vfc                    ! Coef. de variação de ft
Vfy=0.05                       ! Coef. de variação de fy
Vfys=0.05                      ! Coef. de variação de fys
Vh=0.04                        ! Coef. de variação da altura da laje

```

```

Vd1=0.125          ! Coef. de variação do cobrimento do concr.
roct=0.80          ! Correlação entre fc e ft
rote=0.70          ! Correlação entre ft e Eci
roce=0.90          ! Correlação entre fc e Eci
!
!-----
! Determinação de parâmetros de programação - cálculo dos parâmetros da análise
!-----
!
sbi=(lz)/(nbi-1)   ! Espaçamento entre as barras inf. (cm)
sbs=(lz)/(nbs-1)   ! Espaçamento entre as barras sup. (cm)
cst=(nst-1)*sbst   ! Comprimento das barras transversais (cm)
fcm=fck/(1-1.645*Vfc) ! Resistência média a comp. do concr. (kN/cm2)
Eci=2150*fcm**(1/3) ! Modulo de elasticidade do concreto (kN/cm2)
*IF,fck,LE,5,THEN   ! Resistência média a tração do conc. (kN/cm2)
ft=0.03*(10*fck)**(2/3) ! fkc<=50 MPa
*ELSE               !
ft=0.212*log(1+0.1*(10*fck+8)) ! fck> 50 MPa
*ENDIF             !
dsvfc=fcm*Vfc      ! Desvio padrão fc
fy=fyk/(1-1.645*Vfy) ! Resistência média ao escoamento da arm. long.
dsvfy=fy*Vfy       ! Desvio padrão fy
fys=fyks/(1-1.65*Vfys) ! Resistência média ao escoamento da arm. transv.
dsvfys=fys*Vfys    ! Desvio padrão fys
dsvft=ft*Vft       ! Desvio padrão ft
dsvec=Eci*Vec      ! Desvio padrão Eci
dsvh=h*Vh          ! Desvio padrão da altura da laje
dsvd1=d1*Vd1       ! Desvio padrão cobrimento conc.
sx=(lx-lp)/(nelem) ! Largura do elemento em x
sz=(lz-lp)/(nelem) ! Largura do elemento em z
sp=lp/nelemp       ! Largura do elemento do pilar
dleng1=(sx*sx*(h/ndiv))**(1/3) ! comprimento característico (cm)
dleng2=(sx*sp*(h/ndiv))**(1/3)
dleng3=(sp*sp*(h/ndiv))**(1/3)
!* -----
!* Definição do elemento
!* -----
/PREP7
!*
ET,1,SOLID186
!*
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,6,0
!
!* -----
!* Definição dos materiais
!* -----
! -----
! CONCRETO - USER - material 1
! -----
!
! Material da subrotina usermat3d
!
tb,user,1,2,5      ! Material 1, 2 temperaturas, 4 constantes (prop)
tbtemp,1.0        ! first temp.
tbdata,1,Eci,v,fcm,ft,dleng1 ! temp 1, E, posn, fc, ft
tb,state,1,,9
!
! -----
! CONCRETO - USER - material 2
! -----
!
! Material da subrotina usermat3d
!
tb,user,2,2,5      ! Material 1, 2 temperaturas, 4 constantes (prop)

```

```

tbtemp,1,0                ! first temp.
tbdata,1,Eci,v,fc,ft,dleng2  ! temp 1, E, posn, fc, ft
tb,state,2,,9
!
! -----
! CONCRETO - USER - material 3
! -----
!
! Material da subrotina usermat3d
!
tb,user,3,2,5             ! Material 1, 2 temperaturas, 4 constantes (prop)
tbtemp,1,0                ! first temp.
tbdata,1,Eci,v,fc,ft,dleng3  ! temp 1, E, posn, fc, ft
tb,state,3,,9
!
! -----
! ARMADURA BARRAS LONGITUDINAIS - material 4
! -----
!
! PARAMETROS DO ACO
! -----
!
*IF,fabr1,EQ,1,THEN
    FY2=fy*0.85
    EPSLONY2=FY2/ES1
    EPSLONU2=0.01
    ES22=.15*fy/(0.01-fy/ES1)
    FU2 = (EPSLONU2-EPSLONY2)*ES22+FY2
*ELSE
    FY2=fy
    ES22=ES1/100
*ENDIF
!
! Modelo Linear Isotrópico
!
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,4,,ES1
MPDATA,PRXY,4,,vs
!
! Modelo Bilinear - entra com a curva tensao x def
!
TB,BISO,4,1,2,
TBTEMP,0
TBDATA,,FY2,ES22,,,,
!
! -----
! ARMADURA BARRAS TRANSVERSAIS - material 5
! -----
!
! PARAMETROS DO ACO
! -----
!
*IF,fabrt,EQ,1,THEN
    FY3=fys*0.85
    EPSLONY3=FY3/Est
    EPSLONU3=0.01
    ES33=.15*fys/(0.01-fys/Est)
    FU3 = (EPSLONU3-EPSLONY3)*ES33+FY3
*ELSE
    FY3=fys
    ES33=Est/100
*ENDIF
!
! Modelo Linear Isotrópico
!

```

```

MPTMP,,,,,,,,
MPTMP,1,0
MPDATA,EX,5,,EST
MPDATA,PRXY,5,,vs
!
! Modelo Bilinear - entra com a curva tensao x def
!
TB,BISO,5,1,2,
TBTEMP,0
TBDATA,,FY3,ES33,,,,
!
!* -----
!* Definição da geometria
!* -----
!
BLOCK,0,lx-lp,0,h,0,lz-lp,
BLOCK,lx-lp,lx,0,h,0,lz-lp,
BLOCK,0,lx-lp,0,h,lz-lp,lz,
BLOCK,lx-lp,lx,0,h,lz-lp,lz,
!
!* -----
!* Definição da malha
!* -----
!
NUMMRG,ALL, , , ,LOW           ! Agrupa propriedades em comum
NUMCMP,NODE                     ! Renumerar os nós
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz,lz-lp
LSEL,U,LOC,Z,0
LESIZE,all, , ,nelem, , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,lx-lp
LSEL,U,LOC,X,0
LESIZE,all, , ,nelem, , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,0,lx-lp
LSEL,U,LOC,X,lx
LESIZE,all, , ,nelem, , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,0,lz-lp
LSEL,U,LOC,Z,lz
LESIZE,all, , ,nelem, , , ,1
!
VSEL,S, , ,1
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,0
LSEL,U,LOC,Y,h
!
LESIZE,all, , ,ndiv, , , ,1
!
ALLSEL
!
VSEL,S, , ,1
TYPE,1
MAT,1
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1

```

```

VMESH,all
!
VSEL,S,,2
VSEL,A,,3
TYPE,1
MAT,2
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,all
!
!
VSEL,S,,4
TYPE,1
MAT,3
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VSEL,, , ,all
VMESH,all
!
allsel
!
! -----
!                          ARMADURA INCORPORADA - REINF264
! -----
!
!* -----
!* Definição dos reforços- armadura inferior-Direção x
!* -----
!
*IF,nbi,GE,1,THEN
Ai1=3.14159265359*(dbi*dbi)/4
yi1=d1/(h/ndiv)
*if,yi1,le,0,or,yi1,ge,1,then
yi1=1
*endif
secao=0
*DO,i,1,nbi,1
  locbs=(i-1)*sbi
  *IF,locbs,LE,sz,THEN
    ztot=0
    ze=(locbs-ztot)/sz
  *ELSEIF,locbs,LT,lz-lp,THEN
    vc1=(locbs/sz)/nint(locbs/sz)
    *IF,vc1,LT,1,THEN
      NSEL,S,LOC,Z,locbs-sz,locbs-sz/2
    *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
      NSEL,S,LOC,Z,locbs-sz
    *ELSE
      NSEL,S,LOC,Z,locbs-sz/2,locbs
    *ENDIF
    *GET,ztot,node,0,mxloc,z
    ze=(locbs-ztot)/sz
  *ELSE
    locbp=locbs-(lz-lp)
    *IF,locbp,LE,sp,THEN
      ztot=lz-lp
      ze=(locbs-ztot)/sp
    *ELSE
      *IF,ztot,GE,lz,THEN
        ztot=lz-sp
      *ELSE
        vc1=(locbp/sp)/nint(locbp/sp)
        *IF,vc1,LT,1,THEN
          NSEL,S,LOC,Z,locbs-sp,locbs-sp/2
        *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
          NSEL,S,LOC,Z,locbs-sp

```

```

                                *ELSE
                                NSEL,S,LOC,Z,locbs-sp/2,locbs
                                *ENDIF
                                *GET,ztot,node,0,mxloc,z
                                *ENDIF
                                ze=(locbs-ztot)/sp
                                *ENDIF
                                *ENDIF
                                *IF,ze,LE,0,THEN
                                ze=0
                                *ENDIF
                                *IF,ze,GE,1,THEN
                                ze=1
                                *ENDIF
                                secas=secas+1
                                sect,secas,REINF,DISC
                                secdata,4,Ai1,EDGo,1,yi1,ze,yi1,ze
                                NSEL,S,LOC,Z,ztot+sz/2
                                *IF,ztot,GE,lz-lp,THEN
                                NSEL,S,LOC,Z,ztot+sp/2
                                *ENDIF
                                ESLN,R
                                NSEL,R,LOC,Y,0
                                ESLN,R
                                SECN,secas
                                EREINF
                                ALLSELL,ALL
*ENDDO
!
!* -----
!* Definição dos reforços- armadura inferior-Direção Z
!* -----
!
yi2=(d1+dbi)/(h/ndiv)                                !distância da face inferior
*if,yi2,le,0,or,yi2,ge,1,then
yi2=1
*endif
*DO,i,1,nbi,1
locbs=(i-1)*sbi
*IF,locbs,LE,sx,THEN
ztot=0
xe=(locbs-ztot)/sx
*ELSEIF,locbs,LT,lx-lp,THEN
vc1=(locbs/sx)/nint(locbs/sx)
*IF,vc1,LT,1,THEN
NSEL,S,LOC,X,locbs-sx,locbs-sx/2
*ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
NSEL,S,LOC,X,locbs-sx
*ELSE
NSEL,S,LOC,X,locbs-sx/2,locbs
*ENDIF
*GET,ztot,node,0,mxloc,x
xe=(locbs-ztot)/sx
*ELSE
locbp=locbs-(lx-lp)
*IF,locbp,LE,sp,THEN
ztot=lx-lp
xe=(locbs-ztot)/sp
*ELSE
*IF,ztot,GE,lx,THEN
ztot=lx-sp
*ELSE
vc1=(locbp/sp)/nint(locbp/sp)
*IF,vc1,LT,1,THEN
NSEL,S,LOC,x,locbs-sp,locbs-sp/2
*ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN

```

```

                                NSEL,S,LOC,x,locbs-sp
                                *ELSE
                                NSEL,S,LOC,x,locbs-sp/2,locbs
                                *ENDIF
                                *GET,ztot,node,0,mxloc,x
                                *ENDIF
                                xe=(locbs-ztot)/sp
                                *ENDIF
                                *ENDIF
                                *IF,xe,LE,0,THEN
                                xe=0
                                *ENDIF
                                *IF,xe,GE,1,THEN
                                xe=1
                                *ENDIF
                                secao=secao+1
                                sect,secao,REINF,DISC
                                secdata,4,Ai1,EDGo,3,xe,yi2,xe,yi2
                                NSEL,S,LOC,x,ztot+sx/2
                                *IF,ztot,GE,lx-lp,THEN
                                NSEL,S,LOC,X,ztot+sp/2
                                *ENDIF
                                ESLN,R
                                NSEL,R,LOC,Y,0
                                ESLN,R
                                SECN,secao
                                EREINF
                                ALLSELL,ALL
                                *ENDDO
                                *ENDIF
                                !
                                !* -----
                                !* Definição dos reforços- armadura superior-Direção x
                                !* -----
                                !
                                *IF,nbs,GE,1,THEN
                                As1=3.14159265359*(dbs*dbs)/4                !área da seção de armadura
                                ys1=((h/ndiv)-d1)/(h/ndiv)          !distância da face superior
                                *if,ys1,le,0,or,ys1,ge,1,then
                                ys1=0
                                *endif
                                *DO,i,1,nbs,1
                                locbs=(i-1)*sbs
                                *IF,locbs,LE,sz,THEN
                                ztot=0
                                ze=(locbs-ztot)/sz
                                *ELSEIF,locbs,LT,lz-lp,THEN
                                vc1=(locbs/sz)/nint(locbs/sz)
                                *IF,vc1,LT,1,THEN
                                NSEL,S,LOC,Z,locbs-sz,locbs-sz/2
                                *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
                                NSEL,S,LOC,Z,locbs-sz
                                *ELSE
                                NSEL,S,LOC,Z,locbs-sz/2,locbs
                                *ENDIF
                                *GET,ztot,node,0,mxloc,z
                                ze=(locbs-ztot)/sz
                                *ELSE
                                locbp=locbs-(lz-lp)
                                *IF,locbp,LE,sp,THEN
                                ztot=lz-lp
                                ze=(locbs-ztot)/sp
                                *ELSE
                                *IF,ztot,GE,lz,THEN
                                ztot=lz-sp
                                *ELSE

```



```

vc1=(locbp/sp)/nint(locbp/sp)
*IF,vc1,LT,1,THEN
    NSEL,S,LOC,Z,locbs-sp,locbs-sp/2
*ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
    NSEL,S,LOC,Z,locbs-sp
*ELSE
    NSEL,S,LOC,Z,locbs-sp/2,locbs
*ENDIF
*GET,ztot,node,0,mxloc,z
    *ENDIF
ze=(locbs-ztot)/sp
*ENDIF
*ENDIF
*IF,ze,LE,0,THEN
    ze=0
*ENDIF
*IF,ze,GE,1,THEN
    ze=1
*ENDIF
secao=secao+1
sect,secao,REINF,DISC
secdata,4,As1,EDGo,1,ys1,ze,ys1,ze
NSEL,S,LOC,Z,ztot+sz/2
    *IF,ztot,GE,lz-lp,THEN
        NSEL,S,LOC,Z,ztot+sp/2
    *ENDIF
ESLN,R
NSEL,R,LOC,Y,h
ESLN,R
SECN,secao
EREINF
ALLSELL,ALL
*ENDDO
!
!* -----
!* Definição dos reforços- armadura superior-Direção Z
!* -----
!
ys2=((h/ndiv)-d1-dbs)/(h/ndiv)
*if,ys2,le,0,or,ys2,ge,1,then
ys2=0
*endif
*DO,i,1,nbs,1
    locbs=(i-1)*sbs
    *IF,locbs,LE,sx,THEN
        ztot=0
        xe=(locbs-ztot)/sx
    *ELSEIF,locbs,LT,lx-lp,THEN
        vc1=(locbs/sx)/nint(locbs/sx)
        *IF,vc1,LT,1,THEN
            NSEL,S,LOC,X,locbs-sx,locbs-sx/2
        *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
            NSEL,S,LOC,X,locbs-sx
        *ELSE
            NSEL,S,LOC,X,locbs-sx/2,locbs
        *ENDIF
        *GET,ztot,node,0,mxloc,x
        xe=(locbs-ztot)/sx
    *ELSE
        locbp=locbs-(lx-lp)
        *IF,locbp,LE,sp,THEN
            ztot=lx-lp
            xe=(locbs-ztot)/sp
        *ELSE
            *IF,ztot,GE,lx,THEN
                ztot=lx-sp

```

!distância da face inferior

```

*ELSE
    vc1=(locbp/sp)/nint(locbp/sp)
    *IF,vc1,LT,1,THEN
        NSEL,S,LOC,x,locbs-sp,locbs-sp/2
    *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
        NSEL,S,LOC,x,locbs-sp
    *ELSE
        NSEL,S,LOC,x,locbs-sp/2,locbs
    *ENDIF
    *GET,ztot,node,0,mxloc,x
*ENDIF
    xe=(locbs-ztot)/sp
*ENDIF
*ENDIF
*IF,xe,LE,0,THEN
    xe=0
*ENDIF
*IF,xe,GE,1,THEN
    xe=1
*ENDIF
secao=secao+1
sect,secao,REINF,DISC
secdata,4,As1,EDGo,3,xe,ys2,xe,ys2
NSEL,S,LOC,x,ztot+sx/2
    *IF,ztot,GE,lx-lp,THEN
        NSEL,S,LOC,X,ztot+sp/2
    *ENDIF
ESLN,R
NSEL,R,LOC,Y,h
ESLN,R
SECN,secao
EREINF
ALLSELL,ALL
*ENDDO
*ENDIF
!
!* -----
!* Definição dos reforços- armadura colapso progressivo
!* -----
!
*IF,nbi2,GE,1,THEN
Ai2=3.14159265359*(dbi2*dbi2)/4          !área da seção de armadura
ye=(d1+dbi)/(h/ndiv)
*if,ye,le,0,or,ye,ge,1,then
ye=1
*endif
sbp=lp/(nbi2+1)
*DO,i,1,nbi2,1
    locbp=sbp*i
    locbs=lx-lp+locbp
    *IF,locbp,LE,sp,THEN
        ztot=lx-lp
        xe=(locbs-ztot)/sp
    *ELSE
        *IF,ztot,GE,lx,THEN
            ztot=lx-sp
        *ELSE
            vc1=(locbp/sp)/nint(locbp/sp)
            *IF,vc1,LT,1,THEN
                NSEL,S,LOC,x,locbs-sp,locbs-sp/2
            *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
                NSEL,S,LOC,x,locbs-sp
            *ELSE
                NSEL,S,LOC,x,locbs-sp/2,locbs
            *ENDIF
            *GET,ztot,node,0,mxloc,x
        *ENDIF
    *ENDIF

```

```

                                *ENDIF
                                xe=(locbs-ztot)/sp
                                *ENDIF
*IF,xe,LE,0,THEN
    xe=0
*ENDIF
*IF,xe,GE,1,THEN
    xe=1
*ENDIF
secao=secao+1
sect,secao,reinf,discrete,
secdata,4,Ai2,EDGo,3,xe,ye,xe,ye
NSEL,S,LOC,X,ztot+sp/2
ESLN,R
NSEL,R,LOC,Y,0
ESLN,R
SECN,secao
EREINF
ALLSELL,ALL
*ENDDO
!
*DO,i,1,nbi2,1
    locbp=sbp*i
    locbs=lz-lp+locbp
    *IF,locbp,LE,sp,THEN
        ztot=lz-lp
        ze=(locbs-ztot)/sp
    *ELSE
        *IF,ztot,GE,lz,THEN
            ztot=lz-sp
        *ELSE
            vc1=(locbp/sp)/nint(locbp/sp)
            *IF,vc1,LT,1,THEN
                NSEL,S,LOC,z,locbs-sp,locbs-sp/2
            *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
                NSEL,S,LOC,z,locbs-sp
            *ELSE
                NSEL,S,LOC,z,locbs-sp/2,locbs
            *ENDIF
            *GET,ztot,node,0,mxloc,z
        *ENDIF
    *ENDIF
    ze=(locbs-ztot)/sp
    *ENDIF
*IF,ze,LE,0,THEN
    ze=0
*ENDIF
*IF,ze,GE,1,THEN
    ze=1
*ENDIF
secao=secao+1
sect,secao,reinf,discrete,
secdata,4,Ai2,EDGo,1,ye,ze,ye,ze
NSEL,S,LOC,Z,ztot+sp/2
ESLN,R
NSEL,R,LOC,Y,0
ESLN,R
SECN,secao
EREINF
ALLSELL,ALL
*ENDDO
*ENDIF
!* -----
!* Definição dos reforços- armadura trasversal
!* -----
!
*IF,nst,GE,1,THEN

```

```

!
Ast=3.14159265359*(dbst*dbst)/4      !área da seção de armadura
!
!-----
!Direção 90°
!-----
!
!DO,i,1,nst,1
  locbs=(lx-lp-d2)-(i-1)*sbst
  *if,locbs,le,sx,then
    x2tot=0
  *else
    vc1=(locbs/sx)/nint(locbs/sx)
    *IF,vc1,LT,1,THEN
      NSEL,S,LOC,x,locbs-sx,locbs-sx/2
    *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
      NSEL,S,LOC,x,locbs-sx
    *ELSE
      NSEL,S,LOC,x,locbs-sx/2,locbs
    *ENDIF
    *GET,x2tot,node,0,mxloc,x
  *endif
  x2=(locbs-x2tot)/sx
secao=secao+1
sect,secao,REINF,DISC
secdata,5,Ast,EDGo,2,x2,1,x2,1
ESEL,S,TYPE,,1
NSEL,S,LOC,z,lz
NSEL,R,LOC,x,x2tot+sx/2
ESLN,R
*GET,emax,elem,0,num,max
ESEL,S,,,emax
*do,j,1,(ndiv-1)
  e=emax-j*nelem
  ESEL,A,,,e
*enddo
SECN,secao
EREINF
ALLSELL,ALL
*ENDDO
!-----
!Direção 0°
!-----
!
!DO,i,1,nst,1
  locbs=(lz-lp-d2)-(i-1)*sbst
  *if,locbs,le,sz,then
    z2tot=0
  *else
    vc1=(locbs/sz)/nint(locbs/sz)
    *IF,vc1,LT,1,THEN
      NSEL,S,LOC,z,locbs-sz,locbs-sz/2
    *ELSEIF,vc1,EQ,1,THEN
      NSEL,S,LOC,z,locbs-sz
    *ELSE
      NSEL,S,LOC,z,locbs-sz/2,locbs
    *ENDIF
    *GET,z2tot,node,0,mxloc,z
  *endif
  z2=(locbs-z2tot)/sz
secao=secao+1
sect,secao,REINF,DISC
secdata,5,Ast,EDGo,2,1,z2,1,z2
ESEL,S,TYPE,,1
NSEL,S,LOC,x,lx
NSEL,R,LOC,z,z2tot+sz/2

```

```

ESLN,R
*GET,emax,elem,0,num,max
ESEL,S,, ,emax
*do,j,1,(ndiv-1)
    e=emax-j*nelemp
    ESEL,A,, ,e
*enddo
SECN,secao
EREINF
ALLSELL,ALL
*ENDDO
!-----
! direcao 30°
!-----
*AFUN,DEG
xloc=sbst*sin(30)
zloc=sbst*cos(30)
*DO,i,1,nst,1
    locx=(lx-lp-0.01)-(i-1)*xloc
    locz=(lz-lp-d2)-(i-1)*zloc
    vc1=(locz/sz)/nint(locz/sz)
    *IF,vc1,LE,1,THEN
        NSEL,S,LOC,z,locz-sz,locz-sz/2
    *ELSE
        NSEL,S,LOC,z,locz-sz/2,locz
    *ENDIF
    *GET,ztot,node,0,mxloc,z
    ze=(locz-ztot)/sz
    vc1=(locx/sx)/nint(locx/sx)
    *IF,vc1,LE,1,THEN
        NSEL,S,LOC,x,locx-sx,locx-sx/2
    *ELSE
        NSEL,S,LOC,x,locx-sx/2,locx
    *ENDIF
    *GET,xtot,node,0,mxloc,x
    xe=(locx-xtot)/sx
    secao=secao+1
    sect,secao,REINF,DISC
    secdata,5,Ast,EDGo,2,xe,ze,xe,ze
    ESEL,S,TYPE,,1
    NSEL,S,LOC,x,xtot
    NSEL,R,LOC,z,ztot+sz/2
    ESLN,R
    *GET,emax,elem,0,num,max
    ESEL,S,, ,emax
    *do,j,1,(ndiv-1)
        e=emax-j*nelem
        ESEL,A,, ,e
    *enddo
    SECN,secao
    EREINF
    ALLSELL,ALL
*ENDDO
!-----
! direcao 60°
!-----
*AFUN,DEG
xloc=sbst*sin(60)
zloc=sbst*cos(60)
*DO,i,1,nst,1
    locx=(lx-lp-d2)-(i-1)*xloc
    locz=(lz-lp-0.01)-(i-1)*zloc
    vc1=(locz/sz)/nint(locz/sz)
    *IF,vc1,LE,1,THEN
        NSEL,S,LOC,z,locz-sz,locz-sz/2
    *ELSE

```

```

        NSEL,S,LOC,z,locz-sz/2,locz
    *ENDIF
    *GET,ztot,node,0,mxloc,z
    ze=(locz-ztot)/sz
    vc1=(locx/sx)/nint(locx/sx)
    *IF,vc1,LE,1,THEN
        NSEL,S,LOC,x,locx-sx,locx-sx/2
    *ELSE
        NSEL,S,LOC,x,locx-sx/2,locx
    *ENDIF
    *GET,xtot,node,0,mxloc,x
    xe=(locx-xtot)/sx
    secas=secas+1
    sect,secas,REINF,DISC
    secdata,5,Ast,EDGo,2,xe,ze,xe,ze
    ESEL,S,TYPE,,1
    NSEL,S,LOC,x,xtot
    NSEL,R,LOC,z,ztot+sz/2
    ESLN,R
    *GET,emax,elem,0,num,max
    ESEL,S,,emax
    *do,j,1,(ndiv-1)
        e=emax-j*nelem
        ESEL,A,,e
    *enddo
    SECN,secas
    EREINF
    ALLSELL,ALL
*ENDDO
*ENDIF
!
!-----
! Propriedades gráficas
!-----
!
ESEL,S,TYPE,,1
/TRLCY,ELEM,0.5,all
ALLSEL,ALL
/ESHAPE,1.0
/COLOR,NUM,DGRA,1
/COLOR,NUM,DGRA,2
/COLOR,NUM,DGRA,3
/COLOR,NUM,CBLUE,4
/PNUM,MAT,1
/NUMBER,1
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
/REPLOT
!
!* -----
!* Restricoes nos apoios
!* -----
!
NSEL,S,LOC,Y,h
NSEL,R,LOC,X,0
NSEL,A,LOC,Z,0
NSEL,R,LOC,Y,h
!
d,all,uy,0
!
allsel
!
ASEL,S,LOC,Z,lz
ASEL,A,LOC,X,lx
DA,all,SYMM

```

```

allsel
!
! -----
! ANÁLISE NÃO-LINEAR
!
! INCREMENTO DE DESLOCAMENTO
! -----
! -----
!                               CARREGAMENTO
! -----
/SOLU
!
VSEL,S,LOC,X,lx-lp,lx
VSEL,R,LOC,Z,lx-lp,lx
ASEL,R,LOC,Y,0
ASLV,R
DA,ALL,UY,dp
allsel
!
antype,0
solcontrol,on
nropt,full,,on
eqslv,spar,,0,
!
autots,on
nsubst,nsub,600,nsub
ncnv,2,,3000
neqit,20
CNVTOL,F, ,0.4,2,1
CNVTOL,U, ,0.01,2,1
outres,all,1
!
time,1
eresx,no
!
LSWRITE,1,
!
FINISH
/SOLU
LSSOLVE,1,1,1,
FINISH
!-----
! POST-PROCESS
!-----
/POST26
!-----
! Rotina para se fazer o gráfico carga-deslocamento quando se usa
! incremento de deslocamento
!-----
NUMVAR,200                                ! Número máximo de variáveis armazenadas
!
*SET,FATOR1,1.00                           ! Fator para multiplicar o deslocamento se necessário
!                                           ! (por exemplo: torna positivos os deslocamentos)
*SET,FATOR2,-4.00                          ! Fator para multiplicar a carga se necessário
!                                           ! (por exemplo: Ptotal = 4xP)
nset,s,loc,y,h
nset,r,loc,x,lx
nset,r,loc,z,lz
*GET,NCD,NODE,0,NUM,MIN
*SET,NNUY,ncd                               ! Número do nó do qual se quer fazer o gráfico carga-
!                                           ! deslocamento (ver listagem dos nós com coordenadas)
!
/AXLAB,Y,CARGA P                            ! Label Y
/AXLAB,X,FLECHA UY                          ! Label X
NSOL,2,NNUY,U,y                            ! Especifica o nó cujo deslocamento Uy vai ser plotado.
NSOL,3,1,U,Z                                ! Variável muda, serve para armazenar a soma das reações

```

```

!                                     ! (corresponde ao deslocamento UZ do nó 1).
!
NSEL,S,LOC,Y,h                         ! Seleciona os nós cuja coordenada y é igual a 0
NSEL,R,LOC,X,0                         ! (escolher a coordenada de onde estão as reações).
NSEL,A,LOC,Z,0
NSEL,R,LOC,Y,h
!
*GET,NUMNOD,NODE,0,COUNT                ! Captura o número de nós de onde estão as
!                                     ! reações.
*GET,CURNOD,NODE,0,NUM,MIN              ! Captura o menor número do nó nos nós selecionado
!
*DO,I,1,NUMNOD                          ! Laço que faz a soma das reações Fy dos nós selecionados
antes.
RFORCE,4,CURNOD,F,y
ADD,3,3,4,SOMA
CURNOD=NDNEXT(CURNOD)
*ENDDO
!
PROD,2,2,,,,,FATOR1                    ! Ajuste dos deslocamentos pelo fator FATOR1
PROD,3,3,,,,,FATOR2                    ! Ajuste das cargas pelo fator FATOR2
!
XVAR,2                                  ! Plota os deslocamentos no eixo X
PLVAR,3                                  ! Plota a carga total no eixo Y
*GET,npts,VARI,3,NSETS,
nrupt=npts-2
*IF,npts,LE,nsub/1.8,THEN
error=1e-4
*ELSEIF,npts,GE,nsub,THEN
error=2e-4
*ELSE
error=0
*ENDIF
*GET,fr,VARI,3,RSET,nrupt
!
ALLSEL,ALL
FINISH
!
*end                                     ! Fecha a macro
!
!-----
! ANÁLISE DE PROBABILIDADE
!-----
!
/inp,Reliability,pdan                   ! Abre a macro criada
/PDS                                     ! Abre a ferramenta de análise probabilística
pdan1,Reliability,pdan                  ! Define o arquivo de análise a ser usado
!                                       ! no looping
!-----
! Declaracao das variaveis aleatorias
!-----
!
PDVAR,Eci,GAUS,Eci,dsvect               ! Define as variaveis aleatoria e suas
PDVAR,fc,GAUS,fc,dsvfc                  ! distribuicoes de probabilidade
PDVAR,ft,GAUS,ft,dsvft
PDVAR,fy,GAUS,fy,dsvfy
PDVAR,h,GAUS,h,dsvh
PDVAR,d1,GAUS,d1,dsvd1
!
PDCOR,fc,ft,roct                         ! Define a correlacao entre as variaveis aleatorias
PDCOR,ft,Eci,rote
PDCOR,fc,Eci,roce
!
PDVAR,fr,resp                            ! Define os parametros de resposta
PDVAR,error,resp
!

```



```
!-----  
! Define o metodo de analise de probabilidade  
!-----  
PDMETH,MCS,LHS ! Define o metodo de Monte Carlo  
PDLHS,150,5,RAND,,AUTO,0.005,0.01,50,INIT ! 150 simulacoes, 5 ciclos de rep.  
PDEXE,Reliability_result ! Roda analise e salva a solucao no arq.  
! ! chamado de Reliability_result  
fini
```

## B.2) Exemplo de script utilizado para análises das reações dos pilares nas lajes lisas no ANSYS APDL 17.2.

```

! *****
! Programador: Gustavo Ribeiro da Silva
! Nome arquivo: Solicitação L130224
! unidades: cm, kN
! *****
!
*create,solicitacao,pdan      ! Cria uma macro para ser usada durante
!                             ! o looping
!-----
! Propriedades geométricas
!-----
!
lx=1600                      ! Comprimento da laje em x (cm)
lz=1600                      ! Comprimento da laje em z (cm)
db=100                       ! Distancia da laje ao primeiro pilar (cm)
dp=700                       ! Distancia entre pilares
hp=300                       ! Altura do pilar
h=24                         ! Altura da laje (cm)
lpx=40                       ! Largura em x do pilar (cm)
lpz=40                       ! Largura em z do pilar (cm)
!-----
! Propriedades dos materiais
!-----
!
v=0.2                        ! Coef. de Poisson do concreto
fck=3
!-----
! Determinação das variáveis aleatorias
!-----
!
ainf=49                      ! Area de influencia (m^2)
g=7                          ! Carga permanente (kN/m^2)
q=2                          ! Carga acidental (kN/m^2)
cg=0.0007                   ! Carga permanente (kN/cm^2)
cq=0.0002                   ! Carga acidental (kN/cm^2)
Vfc=0.15                    ! Coef. de variação de fc
Vg=0.10                     ! Coef. de variação da carga permanente
Vq=0.25                     ! Coef. de variação da carga variável
!-----
! Determinação de parâmetros de programação - cálculo dos parâmetros da análise
!-----
!
gk=ainf*g                    ! Carga permanente (kN)
gm=1.05*gk                   ! Carga permanente média
cgm=1.05*cg                  ! Carga permanente média
qk=ainf*q                    ! Carga variável (kN)
fcm=fck/(1-1.645*Vfc)       ! Resistência média a comp. do concr. (kN/cm2)
Eci=2150*fcm**(1/3)         ! Modulo de elasticidade do concreto (kN/cm2)
ct=cgm+cq
dsvgm=gm*Vg                  ! Desvio padrão da carga permanente
dsvqk=qk*Vq                  ! Desvio padrão da carga variavel
dsvg=cgm*Vg                  ! Desvio padrão da carga permanente
dsvq=cq*Vq                   ! Desvio padrão da carga variavel
!*-----
!* Definição do elemento
!*-----
/PREP7
!*
ET,1,SHELL181
!*
ET,2,BEAM188

```

```

!* -----
!* Definição do material
!* -----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,Eci
MPDATA,PRXY,1,,.2
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,20000
MPDATA,PRXY,2,,.3
!* -----
!* Definição da seção
!* -----
!
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, PILAR, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,lpx,lpz,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
sect,2,shell,,LAJE
secdata, h,1,0.0,3
secoffset,MID
seccontrol,,,, , , ,
!
!* -----
!* Definição da geometria
!* -----
!
K,1,0,0,0,
K,2,0,0,lz,
K,4,lx,0,0,
K,3,lx,0,lz,
A,1,2,3,4
K,5,lx-db,0,lz-db,
K,6,db,0,lz-db,
K,7,db+dp,0,lz-db,
K,8,db+dp,0,100,
K,9,db+dp,0,db+dp,
K,10,db,0,db+dp,
K,11,db,0,db,
K,12,lx-db,0,db,
K,13,lx-db,0,db+dp,
allsel
FLST,3,9,3,ORDE,2
FITEM,3,5
FITEM,3,-13
KGEN,2,P51X, , , ,-hp, , ,0
LSTR, 6, 15
LSTR, 7, 16
LSTR, 5, 14
LSTR, 13, 22
LSTR, 12, 21
LSTR, 11, 20
LSTR, 8, 17
LSTR, 9, 18
LSTR, 10, 19
!-----
!Associando material e seção
!-----
FLST,5,9,4,ORDE,2
FITEM,5,5
FITEM,5,-13
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y

```

```

!*
!*
CMSEL,S,_Y1
LATT,1, ,2, , , ,1
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
CM,_Y,AREA
ASEL, , , , 1
CM,_Y1,AREA
CMSEL,S,_Y
!*
CMSEL,S,_Y1
AATT, 1, , 1, 0, 2
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!-----
! Malha dos elementos
!-----
FLST,2,1,5,ORDE,1
FITEM,2,1
AESIZE,P51X,25,
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,1
!*
CM,_Y,AREA
ASEL, , , , 1
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
!*
AMESH,_Y1
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
gplot
!
FLST,2,9,4,ORDE,2
FITEM,2,5
FITEM,2,-13
LMESH,P51X
!-----
!propriedades gráficas
!-----
/SHRINK,0
/ESHAPE,1.0
/EFACET,1
/RATIO,1,1,1
/CFORMAT,32,0
/REPLOT
!-----
! Acoplamento
!-----
NUMMRG,NODE, , , ,LOW
NSEL,S,LOC,Y,-hp/3
ESLN,S
NSLE,S
NSEL,R,LOC,Y,0
CPINTF,all,0.0001,
allsel
!-----
! Restrição nos apoios

```

```

!-----
KSEL,S,LOC,Y,-hp
DK,all,, , ,0,ALL, , , , ,
allsel
!-----
! Carregamento
!-----
FLST,2,1,5,ORDE,1
FITEM,2,1
/GO
!*
SFA,P51X,1,PRES,-ct
gplot
!*
FINISH
!-----
! Solução
!-----
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!-----
! POST-PROCESS
!-----
/POST26
!-----
! Rotina para se fazer o gráfico carga-deslocamento quando se usa
! incremento de deslocamento
!-----
NUMVAR,200 ! Número máximo de variáveis armazenadas
!
*SET,FATOR1,-1.00 ! Fator para multiplicar o deslocamento se necessário
! ! (por exemplo: torna positivos os deslocamentos)
*SET,FATOR2,1.00 ! Fator para multiplicar a carga se necessário
! ! (por exemplo: Ptotal = 4xP)
nset,s,loc,y,0
nset,r,loc,x,lx/2
nset,r,loc,z,lz/2
*GET,NCD,NODE,0,NUM,MIN
*SET,NNUY,ncd ! Número do nó do qual se quer fazer o gráfico carga-
! deslocamento (ver listagem dos nós com coordenadas)
!
/AXLAB,Y,CARGA P ! Label Y
/AXLAB,X,FLECHA UY ! Label X
NSOL,2,NNUY,U,y ! Especifica o nó cujo deslocamento Uy vai ser plotado.
NSOL,3,1,U,Z ! Variável muda, serve para armazenar a soma das reações
! ! (corresponde ao deslocamento UZ do nó 1).
!
NSEL,S,LOC,Y,-hp ! Seleciona os nós cuja coordenada y é igual a 0
NSEL,R,LOC,X,lx/2 ! (escolher a coordenada de onde estão as reações).
NSEL,R,LOC,z,lz/2
!
*GET,NUMNOD,NODE,0,COUNT ! Captura o número de nós de onde estão as
! reações.
*GET,CURNOD,NODE,0,NUM,MIN ! Captura o menor número do nó nos nós selecionado
!
*DO,I,1,NUMNOD ! Laço que faz a soma das reações Fy dos nós selecionados
antes.
RFORCE,4,CURNOD,F,y
ADD,3,3,4,SOMA
CURNOD=NDNEXT(CURNOD)
*ENDDO
!
PROD,2,2,,,,,FATOR1 ! Ajuste dos deslocamentos pelo fator FATOR1
PROD,3,3,,,,,FATOR2 ! Ajuste das cargas pelo fator FATOR2

```

```

!
XVAR,2                ! Plota os deslocamentos no eixo X
PLVAR,3              ! Plota a carga total no eixo Y
*GET,Ri,VARI,3,EXTREM,VMAX
!
ALLSEL,ALL
FINISH
!
*end                  ! Fecha a macro
!
!-----
! ANÁLISE DE PROBABILIDADE
!-----
!
/inp,solicitacao,pdan      ! Abre a macro criada
/PDS                      ! Enter probabilistic design system
pdan1,solicitacao,pdan    ! Define o arquivo de análise a ser usado
!                          ! no looping
!-----
! Declare random input variables
!-----
!
PDVAR,cg,GAUS,cg,dsvg
PDVAR,cq,LOG1,1.9569e-04,4.9491e-05
PDVAR,gm,GAUS,gm,dsvgm
PDVAR,qk,LOG2,3.65,0.227
!
PDVAR,Ri,resp           ! Define a response parameter
!
!-----
! Choose the probabilistic design tool or method
!-----
!
PDMETH,MCS,LHS          ! Specify direct Monte Carlo simulation
PDLHS,200,5,RAND,,AUTO,0.005,0.01,50,INIT ! 200 simulações, 5 ciclos de rep.
PDEXE,Reliability_result ! run analysis and define solution
!                          ! label resulpds
fini

```