Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Princípio do Máximo Forte para Inequações Diferenciais Elípticas Quasilineares Singulares em Forma Divergente

Dissertação de Mestrado

Filipe Jung dos Santos

Porto Alegre, março de 2017

Dissertação submetida por Filipe Jung dos Santos[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Alvaro Luiz de Bortoli
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade da vida.

Agradeço a minha familia e principlamente aos meus pais, pelo amor e seus esforços para darem a mim as inúmeras condições favoráveis ao meu progresso.

Agradeço à minha querida e amada Guinever, por todo o amor, carinho e compreensão, nessa fase e sempre.

Agradeço à banca pela pronta atenção dada ao meu trabalho; ao meu orientador, o prof. Leonardo Bonorino, por sua valiosa amizade e dedicação. Aos meus amigos Lucas e Gustavo, pela inestimável amizade ao longo de tantos anos. Aos meus queridos colegas, Daniel, Felix, William, Leonardo e tantos outros, pela amizade, companhia e ajuda mútua.
Aos professores do Instituto de Matemática da UFRGS, cujas excelentes aulas refletem seu compromisso com o nosso aprendizado e crescimento. À Rosane e aos muitos funcionários do instituto que contribuem para tornar tudo possível.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Obrigado!

Resumo

Em [2], assumindo algumas hipóteses sobre A e f, Diaz provou que para a validade do Princípio do Máximo Forte para as soluções fracas C^1 de

$$div(A(|Du|)Du) - f(u) \leq 0, \quad u \geq 0, \tag{1}$$

era necessária a condição

$$\int_0^1 \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty, \tag{2}$$

onde

$$F(s) = \int_0^s f(y)dy, \quad \text{para } s > 0, \quad \Omega(t) = tA(t),$$

$$H(t) = t\Omega(t) - \int_0^t \Omega(s)ds, \quad \text{para } t > 0, \quad H(0) = 0.$$

Nesta dissertação, com base nos trabalhos [6], [5], provamos a suficiência da condição de divergência (2) para a validade do Princípio do Máximo Forte para (1), sob hipóteses ligeiramente mais gerais que em [2].
Ao final, estendemos o resultado para inequações da forma

$$D_i\{a^{ij}(x)A(|Du|D_ju)\} - B(x,u,Du) \leq 0, \quad u \geq 0.$$

Abstract

In [2], under some assumptions about A and f, Diaz proved that for the Strong Maximum Principle to be true for the C^1 solutions of the inequality

$$div(A(|Du|)Du) - f(u) \leq 0, \quad u \geq 0, \tag{1}$$

it was necessary to have the condition

$$\int_0^1 \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty, \tag{2}$$

where

$$F(s) = \int_0^s f(y)dy, \quad \text{for } s > 0, \quad \Omega(t) = tA(t),$$

$$H(t) = t\Omega(t) - \int_0^t \Omega(s)ds, \quad \text{for } t > 0, \quad H(0) = 0.$$

In this dissertation, based on the works [6], [5], we prove the sufficiency of the divergence condition (2) for the validity of the Strong Maximum Principle for (1), under slightly more general hypotheses than those assumed in [2]. At the end, we extend the result for inequalities of the form

$$D_i\{a^{ij}(x)A(|Du|D_ju)\} - B(x,u,Du) \leq 0, \quad u \geq 0.$$

Sumário

1 Introdução

O Princípo do Máximo Forte, em seu enunciado mais simples, afirma que em dado domínio $D \subset \mathbb{R}^n$, uma função subharmônica $u \in C^2(D)$ $(\Delta u \geq 0)$ que atinge o seu máximo no interior de D é constante.

De acordo com [7], esse resultado já era conhecido por Gauss em 1839 e o problema de sua generalização para operadores elípticos mais gerais permaneceu em aberto até o início do século XX. Contribuições nesta direção foram feitas por Bernstein(1904), Picard(1905) e Lichtenstein(1912, 1924) sob hipóteses restritivas de regularidade e por métodos de bastante dificuldade. Finalmente, em 1927, Eberhard Hopf obteve o resultado para operadores elípticos lineares, por meio de uma técnica de comparação essencialmente elementar. A prova de Hopf tornou-se uma referência clássica, tendo sido reproduzida em muitos textos subsequentes. Mais recentemente, o Princípio do Máximo foi estendido para soluções fracas de inequações diferencias elípticas quasilineares com singularidade, uma teoria iniciada por Vazquez e Diaz na década de 1980, previamente sugerida por Benilan, Brezis e Crandall [1].

Em [8], Vazquez estuda as condições para a validade de um enunciado equivalente ao princípio do máximo para as soluções fracas localmente integráveis da inequação

$$\Delta u - f(u) \leq 0, \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

assumindo f contínua e não-decrescente em $\mathbb{R}$, com $f(0) = 0$. A suposição principal era a de que

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(s)}} = \infty, \quad \text{com} \quad F(s) = \int_0^s f(y)dy, \tag{1.2}$$

ou $f(u) = 0$ em $[0, \tau)$, para algum $\tau > 0$. Sob tais hipóteses, foi mostrado que qualquer solução fraca não-negativa de (1.1) em D ou é estritamente positiva em D ou identicamente nula. Vazquez estende este resultado para a inequação

$$\Delta_m u - f(u) \leq 0, \;\; m > 1, \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

onde $\Delta_m u = div\{|Du|^{m-2}Du\}$, sendo necessário para isso substituir a condição (1.2) por

$$\int_0^1 \frac{ds}{[F(s)]^{1/m}} = \infty. \tag{1.4}$$

Em [2], Diaz estudou a inequação

$$div\,\{A(|Du|)Du\} - f\,(u) \leq 0, \tag{1.5}$$

sob a hipótese de que a função $\Omega(t) = tA(t)$ seja continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$, com a condição de elipticidade $\Omega' > 0$, para $t > 0$, e $\Omega(t) \to 0$ com $t \to 0$. Diaz mostrou que o principio do máximo forte não vale se

$$\int_0^1 \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} < \infty, \tag{1.6}$$

onde a função H é definida como $H(0) = 0$ e $H(t) = t\Omega(t) - \int_0^t \Omega(s)ds$ para $t > 0$. As inequações (1.1) e (1.3) são casos particulares da (1.5) quando $A \equiv 1$, com $H(t) = \frac{1}{2}t^2$, e $A(t) = t^{m-2}$, com $H(t) = (m-1)t^m/m$, respectivamente. Ocorre que, nestes casos, a (1.6) torna-se a negação das (1.2) e (1.4), o que assegura também a necessidade destas condições para o princípio do máximo.

O objetivo desta dissertação, feita com base nos trabalhos de Pucci, P.; Serrin, J. [6], [5], é provar a suficiência da condição de divergência

$$\int_0^1 \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty \tag{1.7}$$

para a validade do princípio do máximo forte para as soluções fracas de determinados tipos de inequações diferencias quasilineares elípticas singulares em forma divergente.

Após as Preliminares, na Seção 3, consideramos as inequações

$$div\,\{A(|Du|)Du\} - f\,(u) \leq 0,\ u \geq 0, \tag{1.8}$$

$$div\,\{A(|Du|)Du\} - f\,(u) \geq 0,\ u \geq 0 \tag{1.9}$$

em um domínio D de $\mathbb{R}^n$, não necessariamente limitado, para $n \geq 2$.
Estaremos assumindo as seguintes condições sobre as funções $A = A(t)$ e $f = f(u)$:

(A1) $A \in C(0, +\infty)$;

(A2) $t \mapsto tA(t)$ é estritamente crescente em $(0, +\infty)$ e $tA(t) \to 0$ com $t \to 0$;

(F1) $f \in C[0, +\infty)$;

(F2) $f(0) = 0$ e f é não-decrescente no intervalo $[0, \delta)$, para algum $\delta > 0$.
Provamos a suficiência da condição mencionada para o princípio do máximo forte para (1.8), seguindo o procedimento feito em [6]. Começamos provando o Lema 2, que nos permite construir funções de comparação para as soluções de (1.8). Isto é, para uma dada solução u de (1.8) em D, construimos uma solução v de (1.9), em um domínio limitado a ser definido $E_R \subseteq D$, tal que $v \leq u$ em ∂E_R. No Lema 3, provamos então um resultado de comparação

para estas soluções em domínios limitados; quando aplicado à função obtida pela negação do princípio do máximo forte e a correspondente função de comparação construída, tal resultado nos leva diretamente a uma contradição. Observamos que o método de construção utiliza apenas cálculo elementar, dispensando o uso de teorias de ponto fixo como em [5].

Na Seção 4, estendemos o resultado para inequações na forma

$$D_i \left\{ a^{ij}(x) A\left(|Du|\right) D_j u \right\} - B(x, u, Du) \leq 0, \tag{1.10}$$

onde empregamos a notação

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

e suprimimos o somatório em $1 \leq i, j \leq n$.

Exigimos que $\{a^{ij}(x)\}$ seja uma matriz simétrica, uniformemente elíptica e continuamente diferenciável no domínio e as seguintes hipóteses mais fortes sobre A:

(A1)' $A \in C^1(0, +\infty)$,

(A2)' $\Omega'(t) > 0$ para $t > 0$ e $\Omega(t) \to 0$ com $t \to 0$.

Além disso, suporemos que $B(x, z, p)$ seja contínua em seu domínio e satisfaça a uma condição da forma

$$B(x, u, Du) \leq const.\Omega(|p|) + f(u), \tag{1.11}$$

para $x \in D$, $u \geq 0$ e $p \in \mathbb{R}^n$ com $|p|$ suficientemente pequeno. Para f, continuaremos assumindo as condições (F1) e (F2).

A prova neste caso é essencialmente a mesma do caso anterior, onde o Lema 2 tem papel proeminente. Para o passo final é necessário um lema de comparação adequado à inequação (1.10), que obtemos como corolário de um teorema de comparação provado na útltima seção.

2 Preliminares

2.1 Soluções Fracas

Queremos definir o conceito de solução fraca para as inequações (1.8), (1.9) e (1.10). Começaremos ilustrando a idéia para a Equação de Poisson. Adotamos a notação

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

e estaremos sempre pressupondo o somatório de expressões com índices i e/ou j, para $i, j = 1, \ldots, n$.

Recordemos o Teorema da Divergência:

Teorema 1. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, com fronteira ∂D C^1. Denotemos por ν o vetor normal exterior a ∂D. Então, para qualquer campo de vetores $W \in C^1(\bar{D})$, tem-se

$$\int_D div\ W = \int_{\partial D} W \cdot \nu \tag{2.1}$$

A partir do Teorema da Divergência, temos a fórmula de integração por partes:

Proposição 1. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio qualquer, $f \in C^1(D)$ e $\phi \in C_0^\infty(D)$. Então

$$\int_D D_i f \phi = -\int_D f D_i \phi,$$

para $i = 1, \ldots, n$.

$C_0^\infty(D)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em D ($supp\ \phi$ contido no interior de D.)

Demonstração. Para $i = 1, \ldots, n$, definimos o campo $W_i = (0, \ldots, 0, f, 0, \ldots, 0)$, com f em sua i-ésima coordenada.
Então

$$div(\phi W) = D\phi \cdot W + \phi\ divW = D_i \phi f + \phi D_i f$$

e portanto

$$\int_D div(\phi W) = \int_D D_i \phi f + \int_D \phi D_i f.$$

É possível tomarmos um aberto U, com ∂U C^1, tal que $supp\ \phi \subseteq U \subseteq D$. Como o integrando $div(\phi W)$ é nulo fora de $supp\ \phi$, temos

$$\int_D div(\phi W) = \int_{supp\ \phi} div(\phi W) = \int_U div(\phi W) = \int_{\partial U} \phi W \cdot \nu = 0,$$

onde aplicamos o Teorema da Divergência na penúltima igualdade. Daí segue o resultado. $\square$

Consideremos a Equação de Poisson

$$\Delta u = f \tag{2.2}$$

em um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto e limitado, para uma dada $f \in L^2(D)$.

Uma função u é dita solução de (2.2), no sentido clássico, se $u \in C^2(D)$ e satisfaz a equação.

Seja u seja uma solução de (2.2):

$$D_{ii}u = f$$

Multiplicando esta equação por uma função teste $\phi \in C_0^\infty(D)$ e depois integrando, obtemos

$$\int_D D_{ii}u\phi = \int_D f\phi.$$

Podemos agora integrar por partes, vindo

$$-\int_D D_iuD_i\phi = \int_D f\phi, \quad \text{ou seja,} \quad -\int_D Du \cdot D\phi = \int_D f\phi.$$

Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 1. Dizemos que $u \in C^1(D)$ é uma solução fraca de (2.2) se u satisfaz

$$-\int_D Du \cdot D\phi = \int_D f\phi, \tag{2.3}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(D)$.

Notemos que na expressão (2.3) não precisamos mais do que a diferenciabilidade de u (de fato é necessário bem menos do que isso). Além disso, como vimos, se $u \in C^2(D)$ é solução de (2.2), então u satisfaz (2.3), para toda $\phi \in C_0^\infty(D)$. Deste modo, o conceito de solução fraca é menos restritivo, vindo a generalizar a definição clássica de solução.

As definições de solução fraca para as inequações de interesse neste trabalho são obtidas de modo análogo ao que fizemos para a equação de Poisson. É necessário apenas que nos restrinjamos a tomar funções teste não-negativas, a fim de não alterar as inequações.

Para uma solução $u \in C^2(D)$ de (1.8) temos

$$div\,\{A(|Du|)Du\} - f\,(u) \leq 0.$$

Logo, para $\phi \in C_0^\infty(D)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_D D_i \left\{ A(|Du|) D_i u \right\} \phi - \int_D f(u)\, \phi \leq 0$$

e integrando por partes vem

$$-\int_D A(|Du|) Du \cdot D\phi - \int_D f(u)\, \phi \leq 0.$$

Definição 2. Dizemos que $u \in C^1(D)$ é uma solução fraca de (1.8) se u satisfaz

$$-\int_D A(|Du|) Du \cdot D\phi - \int_D f(u)\, \phi \leq 0, \tag{2.4}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(D)$, $\phi \geq 0$.

Façamos o mesmo para a (1.10). Supondo que $u \in C^2(D)$ seja solução da inequação, temos

$$D_i\{a^{ij}(x) A(|Du|) D_j u\} - B(x, u, Du) \leq 0.$$

Então, para $\phi \in C_0^\infty(D)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_D D_i\{a^{ij}(x) A(|Du|) D_j u\}\phi - \int_D B(x, u, Du)\phi \leq 0$$

e integrando por partes

$$-\int_D \{a^{ij}(x) A(|Du|) D_j u\} D_i\phi - \int_D B(x, u, Du)\phi \leq 0.$$

Definição 3. Dizemos que $u \in C^1(D)$ é solução fraca de (1.10) se

$$-\int_D \{a^{ij}(x) A(|Du|) D_j u\} D_i\phi - \int_D B(x, u, Du)\phi \leq 0, \tag{2.5}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(D)$, $\phi \geq 0$.

2.2 Elipticidade

Nesta seção, definiremos o que é entendido por elipticidade das inequações (1.8), (1.9). Daremos primeiro a definição clássica de elipticidade para operadores quasilineares.

Definição 4. Dizemos que um operador diferencial de segunda ordem Q é quasilinear num domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se Q for expresso na forma

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du) D_{ij} u + b(x, u, Du), \tag{2.6}$$

para $u \in C^2(D)$ e $x \in D$. As funções coeficiente $a^{ij}(x, z, p)$ e $b(x, z, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, são supostas definidas para todas as triplas $(x, z, p) \in D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Q é elíptico em (x, z, p) se a matriz $\{a^{ij}(x, z, p)\}$ for positiva definida. Se $\{a^{ij}(x, z, p)\}$ for positiva definida para todos os valores de $(x, z, p) \in D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Q é dito elíptico em D. Denotando por $\Lambda(x, z, p)$ e $\lambda(x, z, p)$ os respectivos maior e menor autovalores de $\{a^{ij}(x, z, p)\}$, dizemos que Q é uniformemente elíptico em D se o quociente Λ/λ for limitado em $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Possivelmente, se para alguma $u \in C^1(D)$ a matriz $\{a^{ij}(x, u(x), Du(x))\}$ for positiva definida, dizemos que Q é elíptico com respeito a u.

A próxima definição estende o conceito de monotonicidade para campos de vetores.

Definição 5. Seja $\mathbf{A} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial. Dizemos que $\mathbf{A}$ é monótona se, para $\xi, \eta \in U$,

$$\langle \mathbf{A}(\xi) - \mathbf{A}(\eta), \xi - \eta \rangle > 0, \tag{2.7}$$

sempre que $\xi \neq \eta$.

A condição (2.7) será fundamental no que faremos mais adiante e também em outras situações. A seguir, mostramos um exemplo em que ela é satisfeita. Consideremos uma função real A tal que $A(s) > 0$, para $s > 0$, e $\Omega(s) = sA(s)$ seja estritamente crescente em $(0, +\infty)$. Definamos $\mathbf{A}$ por

$$\mathbf{A}(p) = A(|p|)p, \quad p \in \mathbb{R}^n,\ p \neq 0, \qquad \mathbf{A}(0) = 0. \tag{2.8}$$

Proposição 2. A condição (2.7) é satisfeita por $\mathbf{A}$ dada em (2.8).

Demonstração. Se for $\eta = 0$, a condição (2.7) se reduz a $A(|\xi|)|\xi|^2 > 0$, que é trivialmente satisfeita. Sejam pois $\xi, \eta \neq 0$. Se $|\xi| = |\eta|$, temos,

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{A}(\xi) - \mathbf{A}(\eta), \xi - \eta \rangle \\ &\langle A(|\xi|)\xi - A(|\eta|)\eta, \xi - \eta \rangle \\ &A(|\xi|)|\xi - \eta|^2 > 0 \end{aligned}$$

e a condição é satisfeita. Por fim, se $|\xi| \neq |\eta|$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\langle \xi, \eta \rangle| \leq |\xi||\eta|$, logo

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{A}(\xi) - \mathbf{A}(\eta), \xi - \eta \rangle \\
&= A(|\xi|)|\xi|^2 + A(|\eta|)|\eta|^2 - A(|\xi|)\langle \xi, \eta \rangle - A(|\eta|)\langle \eta, \xi \rangle \\
&\geq \Omega(|\xi|)|\xi| + \Omega(|\eta|)|\eta| - \Omega(|\xi|)|\eta| - \Omega(|\eta|)|\xi| \\
&= \{\Omega(|\xi|) - \Omega(|\eta|)\}(|\xi| - |\eta|).
\end{aligned}$$

A conclusão é agora direta pois, pela monotonicidade de Ω, os fatores do último produto concordam em sinal. □

Proposição 3. Suponhamos que $\mathbf{A}(x,p) : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seja contínua e continuamente diferenciável com respeito a p em $D \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, com a matriz jacobiana $\left[D_{p_j}\mathbf{A}^i(x,p)\right]$ positiva definida. Então $\mathbf{A}(x,p)$ satisfaz a condição (2.7).

Demonstração. Começamos notando que, se $\xi \neq \eta$ e o segmento $[\xi, \eta]$ não inclui o 0, pelo Teorema do Valor Médio, para algum ζ no segmento,

$$\langle \mathbf{A}(x,\xi) - \mathbf{A}(x,\eta), \xi - \eta \rangle = \langle D_p\mathbf{A}(x,\zeta)(\xi - \eta), \xi - \eta \rangle > 0$$

já que $\left[D_{p_j}\mathbf{A}^i(x,p)\right]$ é positiva definida em $D \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
No caso em que $0 \in [\xi, \eta]$, observamos que para algum $t \in (0,1)$, $0 = t\xi + (1-t)\eta$ e daí $\xi = \theta\eta$, com $\theta = \frac{t-1}{t} < 0$.
Uma vez que $\mathbf{A}$ é contínua em $D \times \mathbb{R}^n$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio separadamente aos segmentos $[0, \xi]$ e $[\eta, 0]$. Assim obtemos $0 < \zeta_1, \zeta_2 < 1$ tais que

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{A}(x,\xi) - \mathbf{A}(x,\eta), \xi - \eta \rangle \\
&= \langle \mathbf{A}(x,\xi) - \mathbf{A}(x,0), \xi - \eta \rangle + \langle \mathbf{A}(x,0) - \mathbf{A}(x,\eta), \xi - \eta \rangle \\
&= \langle D_p\mathbf{A}(x,\zeta_1)\xi, \xi - \eta \rangle + \langle D_p\mathbf{A}(x,\zeta_2)(-\eta), \xi - \eta \rangle \\
&= \langle D_p\mathbf{A}(x,\zeta_1)\xi, (1-\theta^{-1})\xi \rangle + \langle D_p\mathbf{A}(x,\zeta_2)\eta, (1-\theta)\eta \rangle \\
&= (1-\theta^{-1})\langle D_p\mathbf{A}(x,\zeta_1)\xi, \xi \rangle + (1-\theta)\langle D_p\mathbf{A}(x,\zeta_2)\eta, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Os números $1 - \theta^{-1}$ e $1 - \theta$ são positivos e, novamente, como a matriz jacobiana é positiva definida, segue que a expressão na última igualdade acima é positiva, concluindo a demonstração. □

Em vista da Proposição 3, quando $\mathbf{A}(x,p)$ é apenas contínua na variável p, a condição (2.7) aparece como uma generalização da noção de elipticidade, sendo suficiente em muitos casos. Pela Proposição 2, a função vetorial $p \mapsto A(|p|)p$ em (1.8) é monótona e daí então dizemos que a inequação é elíptica, neste sentido generalizado.

2.3 Espaços de Sobolev

Na última seção precisaremos de alguns resultados referentes aos espaços de Sobolev. Faremos uma breve exposição de alguns fatos fundamentais, provando algumas passagens usadas no trabalho. Referimos [3] para mais detalhes sobre o assunto.

Estaremos considerando a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. A medida de um conjunto mensurável $D \subseteq \mathbb{R}^n$ será denotada por $|D|$.

Nas definições seguintes, por uma função $f : D \to \mathbb{R}$ estaremos nos referindo à classe de equivalência das funções mensuráveis em D que diferem de f em um conjunto de medida nula.

Definição 6. Para $1 \leq p < \infty$, definimos os espaços de Lebesgue $L^p(D)$ das funções p-integráveis em D

$$L^p(D) = \left\{ \ f : D \to \mathbb{R} \ \ : \ \ \int_D |f|^p < \infty \right\}. \tag{2.9}$$

Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ é essencialmente limitada quando existe $C > 0$ tal que $|\ \{x \in D : |f(x)| > C\}| = 0$. Definimos o espaço de Lebesgue $L^\infty(D)$ como

$$L^\infty(D) = \{ \ f : D \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ é essencialmente limitada } \}. \tag{2.10}$$

O número $inf\ \{C > 0 : |\{x \in D : |f(x)| > C\}| = 0\}$ é chamado supremo essencial de f e o denotamos por $ess\ sup_D f$.

Definimos ainda o espaço $L^p_{loc}(D)$ das funções p-integráveis nos compactos de D como

$$L^p_{loc}(D) = \{ \ f : D \to \mathbb{R} \ : \ f \in L^p(V)\ \forall \ \text{ compacto } V \subseteq D\}. \tag{2.11}$$

É imediato que os espaços recém definidos são espaços vetoriais. Para $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p(D)} = \left(\int_D |f|^p \right)^{1/p} \tag{2.12}$$

define uma norma em $L^p(D)$ que o torna um espaço de Banach. Para $p = 2$, $L^2(D)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_D fg. \tag{2.13}$$

$L^\infty(D)$ é também um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(D)} = ess\ sup_D f. \tag{2.14}$$

Um resultado fundamental nos espaços de Lebesgue é a Desigualdade de Hölder:

Teorema (Desigualdade de Hölder)**.** Se $1 \leq p, q < \infty$, $f \in L^p(D)$, $g \in L^q(D)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(D)$ e

$$\int_D |fg| \leq \|f\|_{L^p(D)} \|g\|_{L^q(D)}. \tag{2.15}$$

Observação1: Se $D \subseteq \mathbb{R}$ é limitado, $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(D)$, então $f^q \in L^q(D)$, para todo $1 \leq q \leq p$.

Demonstração. $f \in L^p(D)$, então $f^q \in L^{p/q}(D)$ e considerando a função constante $1 \in L^{p/(p-q)}(D)$, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(D)} = \left(\int_D |f^q| 1 \right)^{1/q} &\leq \left\{ \left(\int_D |f^q|^{p/q} \right)^{q/p} \left(\int_D 1 \right)^{\frac{p-q}{p}} \right\}^{1/q} \\ &= \|f\|_{L^p(D)} |D|^{\frac{p-q}{pq}}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

concluindo o resultado. □

Chamamos de multi-índice a uma n-lista de números inteiros não-negativos $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. O número $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$ é chamado a ordem de α. Adotamos a notação

$$D^\beta = D_1^{\beta_1} \ldots D_n^{\beta_n}.$$

Definição 7. Para $u, v \in L^p_{loc}(D)$ e um multi-índice β, dizemos que v é uma derivada fraca de u com respeito a β se

$$\int_D D^\beta u \phi = (-1)^{|\beta|} \int_D v D^\beta \phi,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(D)$.

Denotaremos por $D^\beta u$ a derivada fraca de u com respeito a β. As derivadas fracas são únicas *q.t.p.* e como podemos ver integrando por partes, se $D^\beta u$ é a derivada de u com respeito a β no sentido clássico, então é também a derivada fraca respectiva, o que faz deste um conceito mais geral.

Definição 8. Para k inteiro, $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(D)$ como o espaço vetorial das funções $u \in L^p(D)$ tais que existe $D^\beta u$ e $D^\beta u \in L^p(D)$, para todo multi-índice β com $0 \leq |\beta| \leq k$.

Em $W^{k,p}(D)$, quando $1 \leq p < \infty$,

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_{L^p}^p \right)^{1/p},$$

define uma norma que o torna um espaço de Banach. Quando $p = 2$, denotamos $W^{k,2}(D) = H^k(D)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_D \sum_{0 \leq |\beta| \leq k} D^\beta u D^\beta v.$$

Para $p = \infty$, $W^{k,\infty}(D)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{k,\infty}} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq k} ess\ sup\ _D |D^\beta u|.$$

Definimos

$$\|Du\|_{L^p(D)} = \| |Du| \|_{L^p(D)},$$

onde

$$|Du| = \left(\sum_{i=1}^{n} D_i u^2 \right)^{1/2}$$

é a norma euclideana do gradiente de u.

Teorema 2 (Desigualdade de Sobolev)**.** Se $1 \leq p < n$, existe uma constante $C = C(n,p)$, dependendo de n e p, tal que, para $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

onde o número $p^* = \frac{np}{n-p} > p$ é chamado o conjugado de Sobolev de p.

A desigualdade acima é um fato acerca das funções C_0^1. Como veremos, poderemos aplicá-la também em espaços de Sobolev por meio de resultados de aproximação por funções C^∞.

Definição 9. Definimos a função suavizadora $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} C exp\left\{ \frac{1}{|x|^2 - 1} \right\} & , |x| < 1; \\ 0 & , |x| \geq 1, \end{cases} \tag{2.17}$$

onde a constante C normaliza $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$.
Definimos $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ por $\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, para cada $\epsilon > 0$.
Para um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, usamos a notação

$$D_\epsilon = \{x \in D : dist(x, \partial D) > \epsilon\}.$$

Definição 10. Para $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ e $\epsilon > 0$, definimos a função suavizada

$$u^\epsilon(x) = u * \eta_\epsilon(x) = \int_D \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)u(x-y)dy,$$

para $x \in D_\epsilon$.

O seguinte teorema justifica nosso interesse pelas suavizações.

Teorema 3 (Aproximação Local por Funções Suaves)**.** Se $u \in W^{k,p}(D)$, $1 \leq p < \infty$, então
i) $u^\epsilon \in C^\infty(D_\epsilon)$, para cada $\epsilon > 0$;
ii) $u^\epsilon \to u$ em $W^{k,p}(V)$ com $\epsilon \to 0$, para todo compacto $V \subseteq D$.

Notemos que, para um multi-índice β, $D^\beta u^\epsilon = \{D^\beta u\}^\epsilon$, como mostra o cálculo

$$\begin{aligned}
D^\beta u^\epsilon(x) =& \int_D D^\beta_x \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy \\
=&(-1)^{|\beta|} \int_D \{D^\beta_y \eta_\epsilon(x-y)\}u(y)dy \\
=&(-1)^{|\beta|}(-1)^{|\beta|} \int_D \eta_\epsilon(x-y)\{D^\beta_y u(y)\}dy \\
=&\{D^\beta u\}^\epsilon(x).
\end{aligned}$$

Proposição 4. Para $u \in W^{1,p}(D)$, $Du = 0$ em qualquer aberto onde u seja constante.

Demonstração. Seja $u = C$ constante no aberto $V \subseteq D$. Será suficiente provarmos o resultado em vizinhanças dos pontos de V. Sejam então $x \in V$ e $r > 0$ tal que $B = B(x,r) \subseteq V$ e satisfaz $\bar{B} \subseteq V$. Para $|\beta| = 1$ e $x \in V_\epsilon$, como vimos,

$$\begin{aligned}
\{D^\beta u\}^\epsilon(x) &= D^\beta u^\epsilon(x) \\
&= D^\beta \int_V \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy \\
&= D^\beta C \int_V \eta_\epsilon(x-y)dy \\
&= D^\beta C \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então $\|D^\beta u^\epsilon\|_{L^p(V_\epsilon)} = 0$, para todo $\epsilon > 0$. Existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $\epsilon < \epsilon_1$ implica $\bar{B} \subseteq V_\epsilon$. Portanto também $\|D^\beta u^\epsilon\|_{L^p(\bar{B})} = 0$. Daí vem

$$\|D^\beta u\|_{L^p(\bar{B})} = \|D^\beta u\|_{L^p(\bar{B})} - \|D^\beta u^\epsilon\|_{L^p(\bar{B})} \leq \|D^\beta u^\epsilon - D^\beta u\|_{L^p(\bar{B})} \to 0$$

com $\epsilon \to 0$ pois, pelo Teorema, $u^\epsilon \to u$ em $W^{1,p}_{loc}(D)$. Logo $D^\beta u = 0$ $q.t.p.$ $\square$

Definição 11. Definimos $W_0^{k,p}(D)$ como o fecho de $C_0^\infty(D)$ em $W^{k,p}(D)$. Assim $u \in W_0^{k,p}(D)$ se, e somente se, existe uma sequência $u_m \in C_0^\infty(D)$ tal que $u_m \to u$ em W^{k,p}(D) . Igualmente, $H_0^k(D)$ é o fecho de $C_0^\infty(D)$ em $H^k(D)$.

Notemos que, na Definição 2, dizemos que $u \geq 0$ é solução fraca de

$$div\,\{A(|Du|)Du\} - f\,(u) \leq 0$$

se

$$-\int_D A(|Du|)Du \cdot D\phi - \int_D f\,(u)\,\phi \leq 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(D)$, $\phi \geq 0$.
Quando $v \in H_0^1(D),\ v \geq 0$, existe uma sequência $\phi_m \in C_0^\infty(D),\ \phi_m \geq 0$, tal que $\phi_m \to v$ em $H^1(D)$. Então

$$\begin{aligned}
&\left|\int_D A(|Du|)Du \cdot D\phi_m - \int_D A(|Du|)Du \cdot Dv\right| \\
\leq\ & \int_D |A(|Du|)Du \cdot \{D\phi_m - Dv\}| \leq \int_D |A(|Du|)Du|\,|D\phi_m - Dv| \\
\leq\ & \|A(|Du|)Du\|_{L^2(D)}\|D\phi_m - Dv\|_{L^2(D)},
\end{aligned}$$

pela Desigualdade de Hölder e de $\|D\phi_m - Dv\|_{L^2(D)} \to 0$ concluímos

$$\int_D A(|Du|)Du \cdot D\phi_m \to \int_D A(|Du|)Du \cdot Dv.$$

Analogamente,

$$\int_D f\,(u)\,\phi_m \to \int_D f\,(u)\,v$$

e, fazendo o limite $m \to 0$ em

$$-\int_D A(|Du|)Du \cdot D\phi_m - \int_D f\,(u)\,\phi_m \leq 0,$$

vem

$$-\int_D A(|Du|)Du \cdot Dv - \int_D f\,(u)\,v \leq 0.$$

Isso mostra que podemos estender o espaço das funções teste incluindo as funções positivas de $H_0^1(D)$.

Proposição 5. Se $u \in C(D) \cap W^{1,p}(D)$ tem suporte compacto em D, $1 \leq p < n$, então $u \in C(D) \cap W_0^{1,p}(D)$ e vale a Desigualdade de Sobolev

$$\|u\|_{L^{p^*}(D)} \leq C\|Du\|_{L^p(D)},$$

para uma constante $C = C(n,p)$, dependendo de n e p.

Demonstração. Pela proposição anterior, definindo $u = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash supp\ u$, teremos aí $Du = 0$, donde podemos considerar $u \in C(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Tomemos um compacto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $supp\ u$ esteja contido em seu interior e seja $d = dist(supp\ u, \partial V)$. Pelo Teorema, $u^\epsilon \to u$ em $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, logo

$$u^\epsilon \to u \text{ em } W^{1,p}(V_{d/3}). \tag{2.18}$$

Quando $\epsilon < \frac{d}{2}$, se $x \in V_\epsilon \backslash V_{d/2}$ e $|y| < \epsilon$, então $u(x-y) = 0$ e aí temos

$$u^\epsilon(x) = \int_{V_\epsilon} \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy = \int_{|y|\leq\epsilon} \eta_\epsilon(y)u(x-y)dy = 0.$$

Assim, $supp\ u^\epsilon \subseteq V_{d/2}$ é compacto em $V_{d/3}$, donde estendendo $u^\epsilon = 0$ em $D\backslash V_{d/3}$, temos $u^\epsilon \in C_0^\infty(D)$. Por (2.18) e sendo $u^\epsilon = 0 = u$ em $D\backslash V_{d/3}$, resulta

$$u^\epsilon \to u \text{ em } W^{1,p}(D)$$

e portanto $u \in C(D) \cap W_0^{k,p}(D)$.

Podemos igualmente estender $u^\epsilon, u = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash D$ de modo que, como antes, $u^\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u^\epsilon \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando a Desigualdade de Sobolev sobre u^ϵ, temos $C = C(n,p)$ tal que

$$\|u^\epsilon\|_{L^{p^*}(D)} \leq C\|Du^\epsilon\|_{L^p(D)}, \tag{2.19}$$

já que $supp\ u^\epsilon \subseteq D$. Para $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, então,

$$\|u^{\epsilon_1} - u^{\epsilon_2}\|_{L^{p^*}(D)} \leq C\|Du^{\epsilon_1} - Du^{\epsilon_2}\|_{L^p(D)},$$

o que dá u^ϵ de Cauchy em $L^{p^*}(D)$. Assim $u^\epsilon \to v$ em $L^{p^*}(D)$, para algum v. Já que $supp\ u^\epsilon \subseteq V_{d/2}$, $\|u^\epsilon - v\|_{L^p(D)} = \|u^\epsilon - v\|_{L^p(V_{d/2})}$ e como $|V_{d/2}| < +\infty$, pela Desigualdade de Hölder,

$$\|u^\epsilon - v\|_{L^p(V_{d/2})} \leq \|u^\epsilon - v\|_{L^{p^*}(D)}|V_{d/2}|^{\frac{pp^*}{p-p^*}},$$

donde $u^\epsilon \to v$ em $L^p(D)$. Pela unicidade do limite, concluímos que $u = v$ e $u^\epsilon \to u$ em $L^{p^*}(D)$. Agora passando ao limite $\epsilon \to 0$ em (2.19), pela continuidade da norma, obtemos o resultado desejado. $\square$

Definição 12. Uma função $u : D \to \mathbb{R}$ é dita de Lipschitz se exsite uma constante $C \geq 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \tag{2.20}$$

para quaisquer $x, y \in D$.

É imediato da definição que a condição de Lipschitz implica a continuidade. Resulta do Teorema do Valor Médio que se u é diferenciável, com derivada limitada em D, então u é de Lipschitz em D.

O seguinte teorema caracteriza $W^{1,\infty}$ pelas funções de Lipschitz.

Teorema 4 (Caracterização de $W^{1,\infty}$)**.** Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado, com fronteira ∂D C^1. Então

$$u : D \to \mathbb{R} \quad \text{é de Lipschitz se, e somente se,} \quad u \in W^{1,\infty}(D).$$

Corolário 1. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio qualquer e $1 \leq p < \infty$. Se $u : D \to \mathbb{R}$ é uma função de Lipschitz com suporte compacto, então $u \in W_0^{1,p}(D)$ e vale a Desigualdade de Sobolev

$$\|u\|_{L^{p^*}(D)} \leq C\|Du\|_{L^p(D)},$$

para uma constante $C = C(n, p)$, dependendo de n e p.

Demonstração. Tomando um compacto $V \subseteq D$ com ∂V C^1 e que contenha *supp* u em seu interior, podemos aplicar o teorema em V, concluindo $u \in W^{1,\infty}(V)$.
Como $u = 0$ é constante em $D \backslash V$, também $Du = 0$ fora de V. Assim

$$\int_D |Du|^p = \int_V |Du|^p \leq \|Du\|^p \int_V 1 = \|Du\|^p |V|,$$

donde $Du \in L^p(D)$ e $u \in W^{1,p}(D)$. Pela condição de Lipschitz, também $u \in C(D)$ e o resultado segue pela Proposição 5. $\square$

Em vista do Corolário 1, podemos tomar funções de Lipschitz de suporte compacto como funções teste nas definições de solução fraca.

3 Resultados para Inequações do Primeiro Caso

Começaremos considerando as inequações em forma divergente

$$div\,\{A(|Du|)Du\} - f\,(u) \leq 0,\ u \geq 0 \tag{3.1}$$

e

$$div\,\{A(|Du|)Du\} - f\,(u) \geq 0,\ u \geq 0 \tag{3.2}$$

em um domínio D de $\mathbb{R}^n$, não necessariamente limitado, para $n \geq 2$. Estaremos assumindo as seguintes condições sobre as funções $A = A(t)$ e $f = f(u)$:

(A1) $A \in C(0, +\infty)$;

(A2) $t \mapsto tA(t)$ é estritamente crescente em $(0, +\infty)$ e $tA(t) \to 0$ com $t \to 0$;

(F1) $f \in C[0, +\infty)$;

(F2) $f(0) = 0$ e f é não-decrescente no intervalo $[0, \delta)$, para algum $\delta > 0$.

(A2) é uma condição mínima para a elipticidade. Além disso, ela permite o comportamento singular ou degenerado de A em $t = 0$. A exemplo temos $A(t) = t^{m-2}$, com $m > 1$. Quando $1 < m < 2$, A é singular, sendo $A(t) \to +\infty$ com $t \to 0$ e quando $m > 2$, A degenera-se em $t = 0$, ocorrendo $A(t) \to 0$ com $t \to 0$. De fato, a escolha $A(t) = t^{m-2}$ dá o operador m-Laplaciano em (3.1), que é conhecido por esse comportamento.

Entendemos por solução de (3.1)/(3.2) em D uma função $u \in C^1(D)$ que satisfaça (3.1)/(3.2) no sentido fraco.

Com a notação $\Omega(t) = tA(t)$, se $t > 0$, $\Omega(0) = 0$, definimos

$$H(t) = t\Omega(t) - \int_0^t \Omega(s)ds,\ t \geq 0. \tag{3.3}$$

Denotando por $\Omega^{-1}(\omega)$ a inversa de $\Omega(t)$, como pode ser visto geometricamente, é claro que

$$t\Omega(t) = \int_0^t \Omega(s)ds + \int_0^{\Omega(t)} \Omega^{-1}(\omega)d\omega.$$

Daí vem a representação

$$H(t) = \int_0^{\Omega(t)} \Omega^{-1}(\omega)d\omega,\ t \geq 0, \tag{3.4}$$

da qual decorre que H é estritamente crescente em $[0, \infty)$.

Observamos que no caso $A \equiv 1$, temos $H(t) = \frac{1}{2}t^2$ e a (3.1) assume a forma clássica

$$\Delta u - f(u) \leq 0, \; u \geq 0;$$

Os casos $A(t) = t^{m-2}$, $m > 1$, com $H(t) = (m-1)t^m/m$ e $A(t) = 1/\sqrt{1+t^2}$, com $H(t) = 1 - 1/\sqrt{1+t^2}$, recuperam os operadores m-Laplaciano e de curvatura média, respectivamente.

Observamos que a (3.1), quando vale a igualdade, é precisamente a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional

$$I[u] = \int_D \{G(|Du|) + F(u)\}dx, \qquad F(u) = \int_0^u f(s)ds, \tag{3.5}$$

onde G é tal que $A(t) = G'(t)/t$, $t > 0$.

O Princípio do Máximo Forte para (3.1) corresponde a afirmação de que, se u é solução de (3.1) e $u(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in D$, então $u \equiv 0$ em D.

Podemos agora enunciar o resultado principal.

Teorema 5. Para a validade do Princípio do Maximo Forte para (3.1), é necessário e suficiente ou que $f(s) = 0$, para $s \in [0, \tau)$, $\tau > 0$, ou que $f(s) > 0$, $s \in (0, \delta)$ e

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty \tag{3.6}$$

Para a prova da suficiência precisamos de alguns lemas preliminares.

Lema 1. i)Para toda constante $\sigma \in [0, 1]$, vale

$$F(\sigma u) \leq \sigma F(u), \; u \in [0, \delta)$$

ii) Seja $\omega = \omega(r)$ de classe $C^1(r_0, r_1)$, com $\omega' > 0$. Então $\Omega \circ \omega'$ é de classe $C^1(r_0, r_1)$ se, e somente se, $H \circ \omega'$ é de classe $C^1(r_0, r_1)$ e neste caso,

$$\{H(\omega'(r))\}' = \omega'(r)\{\Omega(\omega'(r))\}'$$

Demonstração. No item *i)*, como f é não-decrescente em $[0, \delta)$, temos $\sigma f(\sigma u) \leq \sigma f(u)$, para $u \in [0, \delta)$, $\sigma \in [0, 1]$. Integrando esta desigualdade,

$$\int_0^u \sigma f(\sigma s)ds \leq \int_0^u \sigma f(s)ds$$

e então

$$
\begin{aligned}
F(\sigma u) &= \int_0^{\sigma u} f(s)ds = \int_0^u \sigma f(\sigma s)ds \\
&\leq \int_0^u \sigma f(s)ds = \sigma \int_0^u f(s)ds = \sigma F(u).
\end{aligned}
$$

No item *ii)*, a necessidade decorre da representação

$$
H\left(\omega'\left(r\right)\right) = \int_0^{\Omega(\omega'(r))} \Omega^{-1}(\omega)d\omega.
$$

Derivando esta igualdade, pela regra da cadeia, resulta

$$
\{H\left(\omega'\left(r\right)\right)\}' = \Omega^{-1}\left(\Omega\left(\omega'\left(r\right)\right)\right)\{\Omega\left(\omega'\left(r\right)\right)\}' = \omega'(r)\{\Omega\left(\omega'\left(r\right)\right)\}'.
$$

Para a suficiência, provaremos o seguinte resultado elementar:

Sejam $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos, $a \in C(I)$, $b \in C(J)$, com $a(I) \subseteq J$, $b > 0$ e $B : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$
B(r) = \int_{a(\tilde{r})}^{a(r)} b(s)ds, \quad r, \tilde{r} \in I.
$$

Nesta situação, se $B \in C^1(I)$, então $a \in C^1(I)$ e $a' = B'/b \circ a$.

Com efeito, para $r \in I$ e $h > 0$ suficientemente pequeno,

$$
\begin{aligned}
\frac{B(r+h) - B(r)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{a(r)}^{a(r+h)} b(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\, b(a(r) + \theta[a(r+h) - a(r)])(a(r+h) - a(r)) \\
&= b\left(a(r) + \theta[a(r+h) - a(r)]\right)\frac{a(r+h) - a(r)}{h},
\end{aligned}
$$

com $\theta \in (0,1)$ dado pelo Teorema do Valor Médio. Fazendo agora o limite $h \to 0$, ficamos com

$$
B'(r) = b(a(r))\lim_{h\to 0}\frac{a(r+h) - a(r)}{h},
$$

isto é,

$$
\frac{B'(r)}{b(a(r))} = a'(r).
$$

Logo, $a \in C^1(I)$ e $a' = B'/b \circ a$.

Por fim, apliquemos este resultado com $I = (r_0, r_1)$ e $a = \Omega \circ \omega'$. Uma vez que $\omega' > 0$, Ω é crescente e $\Omega(0) = 0$, temos $a(I) = (\Omega \circ \omega')(r_0, r_1) \subseteq (0, \infty)$. Deste modo, podemos escolher $J \subseteq (0, \infty)$ tal que $a(I) \subseteq J$ e que $b = \Omega^{-1}\restriction_J$ esteja bem definida. Teremos assim,

$$B(r) = \int_{\Omega(\omega'(\tilde{r}))}^{\Omega(\omega'(r))} \Omega^{-1}(s)ds = H(\omega'(r)) - H(\omega'(\tilde{r})),$$

donde $B \in C^1(I)$. Segue que $a = \Omega \circ \omega' \in C^1(r_0, r_1)$ e

$$\begin{aligned} \{\Omega(\omega'(r))\}' &= \frac{\{H(\omega'(r))\}'}{\Omega(\Omega^{-1}(\omega'(r)))} \\ &= \frac{\{H(\omega'(r))\}'}{\omega'(r)}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Lema 2. Suponhamos que $f(s) > 0$, $s \in (0, \delta)$, e

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty \tag{3.7}$$

ou que $f(s) = 0$, para $s \in [0, \tau)$, $\tau > 0$. Então, para quaisquer números positivos k, l, R e para $\epsilon \in (0, \delta)$ suficientemente pequeno, a inequação

$$[\Omega(|v'|)]' + \frac{k}{r}\Omega(|v|') + lf(v) \leq 0 \tag{3.8}$$

admite uma solução $v = v(r)$, C^1 no intervalo $[R/2, R]$, com

$$v(R) = 0, \quad v'(R) = -\alpha < 0 \tag{3.9}$$

e

$$0 < v < \epsilon \quad \text{em } [R/2, R], \tag{3.10}$$

para α suficientemente pequeno.

Ao admitirmos (3.7), estamos supondo, sem perda de generalidade, δ suficientemente pequeno a fim de que $F(\delta) \in H[0, \infty)$. Tal condição é verificada pelos operadores Laplaciano e m-Laplaciano, sendo nestes casos $H[0, \infty) = [0, \infty)$. Para o operador de curvatura média, $H[0, \infty) = [0, 1)$, o que faz necessária a restrição $F(\delta) < 1$.

Demonstração. Será conveniente reduzir a prova ao caso $l = 1$. Isso pode ser feito, visto que podemos redefinir $f(s)$ por $lf(s)$, redefinido também o valor de δ, e, como mostraremos a seguir,

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(lF(s))} = \infty$$

se, e somente se, ocorre (3.7).
Para a necessidade, suponhamos primeiro $l \geq 1$. Como H^{-1} é crescente, $H^{-1}(F(s)) \leq H^{-1}(lF(s))$ e então,

$$\frac{1}{H^{-1}(lF(s))} \leq \frac{1}{H^{-1}(F(s))},$$

donde segue a implicação. Suponhamos então $l < 1$. Seja $\delta > 0$ tal que $F(\delta) < H(\infty)$. Do Lema 1, temos $lF(s) \geq F(ls)$ e assim,

$$\int_\epsilon^\delta \frac{ds}{H^{-1}(lF(s))} \leq \int_\epsilon^\delta \frac{ds}{H^{-1}(F(ls))} = \frac{1}{l}\int_{\epsilon l}^{\delta l} \frac{dt}{H^{-1}(F(t))} \leq \frac{1}{l}\int_{\epsilon l}^{\delta} \frac{dt}{H^{-1}(F(t))}.$$

Basta agora fazer $\epsilon \to 0$. Para a suficiência, se $l < 1$, o resultado é imeadiato já que

$$\frac{1}{H^{-1}(lF(s))} \geq \frac{1}{H^{-1}(F(s))}.$$

No caso $l \geq 1$, notemos que do Lema (1), $F(l^{-1}t) \leq l^{-1}F(t)$. Com a mudança $t = ls$, obtemos $lF(s) \leq F(ls)$, para $s \in [0, \delta/l)$. Daí então

$$\frac{1}{l}\int_\epsilon^\delta \frac{dt}{H^{-1}(F(t))} = \int_{\epsilon/l}^{\delta/l} \frac{ds}{H^{-1}(F(ls))} \leq \int_{\epsilon/l}^{\delta/l} \frac{ds}{H^{-1}(lF(s))},$$

onde fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos a prova.

Dividiremos o argumento em três passos. No passo 1, construiremos uma candidata $v(r)$ à solução visando satisfazer a uma das seguintes condições:

i) $v(r)$ está definida em $[R/2, R]$ e satisfaz (3.9) e (3.10);

ii) $v(r)$ está definida num intervalo $[\bar{R}, R]$, $\bar{R} \in [R/2, R)$, satisfaz (3.9) e

$$0 < v < \epsilon \quad \text{em } (\bar{R}, R) \tag{3.11}$$

e ainda, $v(\bar{R}) = \epsilon$;

iii) $v(r)$ está definida num intervalo $[\bar{R}, R]$, $\bar{R} \in [R/2, R)$, satisfaz (3.9), (3.11) e ainda

$$\lim_{r \to \bar{R}} v'(r) = -\infty. \tag{3.12}$$

Provaremos então no passo 2 que a função construída satisfaz à condição i) e no último passo que ela é de fato a solução procurada.

Passo 1

Usaremos um procedimento recursivo no qual v é construída por partes em sucessivos intervalos $(R_1, R]$, $(R_2, R_1]$, ..., $R/2 \leq R_{i+1} \leq R_i$.

Começamos construindo uma função inicial $v = v_1$, definida como a solução C^1 do problema

$$[\Omega(|v'|)]' + \frac{2k}{r}\Omega(|v'|) = 0 \tag{3.13}$$

$$v(R) = 0, \quad v'(R) = -\alpha \tag{3.13_1}$$

no intervalo maximal $I_1 = (R_1, R]$, $R_1 \in [R/2, R)$, no qual ambas as desigualdades

$$0 \leq v < \epsilon \tag{3.14}$$

$$\frac{k}{r}\Omega(|v'|) > f(v) \tag{3.15}$$

sejam satisfeitas.

Para isso, a equação (3.13) pode ser integrada:

$$\begin{aligned}
& [\Omega(|v'|)]' + \frac{2k}{r}\Omega(|v'|) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{[\Omega(|v'|)]'}{\Omega(|v'|)} = -\frac{2k}{r} \\
\Rightarrow \quad & \int_R \frac{[\Omega(|v'|)]'}{\Omega(|v'|)} dr = -\int_R \frac{2k}{r} dr \\
\Rightarrow \quad & \ln \Omega(|v'|) = -2k \ln r + C \\
\Rightarrow \quad & \Omega(|v'|) = Cr^{-2k},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

com

$$C = C_1 = R^{2k}\Omega(\alpha), \tag{3.17}$$

de acordo com a condição inicial (3.13_1). Uma vez que o lado direito de (3.16) não se anula e $v'(R) = -\alpha < 0$, obtemos

$$v' < 0 \tag{3.18}$$

e assim,
$$v'(r) = -\Omega^{-1}\left(Cr^{-2k}\right), \tag{3.19}$$
sendo possível determinar $v(r)$ a partir daí por integração. Pela (3.18), v é decrescente e, como $v(R) = 0$, temos $v \geq 0$ em I_1. Além disso, pela (3.19), v' é crescente, sendo v, portanto, convexa.

Em vista de (3.17), e como $\Omega(t) \to 0$ com $t \to 0$, escolheremos α pequeno o suficiente para que $2^{2k}\Omega(\alpha) \in \Omega([0, +\infty))$. Isso nos garantirá que
$$\begin{aligned} |v'(R_1)| =& \Omega^{-1}\left(C_1 R_1^{-2k}\right) \\ =& \Omega^{-1}\left(\left(\frac{R}{R_1}\right)^{2k}\Omega(\alpha)\right) \leq \Omega^{-1}\left(2^{2k}\Omega(\alpha)\right) < \infty \end{aligned} \tag{3.20}$$
e, junto com a convexidade de v, ambos os limites $v(R_1)$ e $|v'(R_1)| < \infty$ estarão bem definidos.

Se ocorrer $R_1 = R/2$ ou se $v(R_1) = \epsilon$, teremos obtido uma solução satisfazendo a uma das condições *i)* ou *ii)*. A possibilidade restante é que $R_1 > R/2$, (3.14) valha em $[R_1, R]$ enquanto (3.15) deixa de valer em $r = R_1$, isto é,
$$\frac{k}{R_1}\Omega\left(\left|v'\left(R_1\right)\right|\right) = f\left(v\left(R_1\right)\right).$$
Neste caso, passamos a procurar $v = v_2$ definida como sendo a solução C^1 do problema
$$\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]' + 3f(v) = 0, \tag{3.21}$$
$$v(R_1) = v_1(R_1), \quad v'(R_1) = -\alpha_1 = v_1'(R_1) < 0 \tag{3.21_2}$$
no novo intervalo maximal $J_2 = (R_2, R_1]$, sujeita à $0 \leq v < \epsilon$ e à condição
$$\frac{k}{r}\Omega\left(|v|'\right) < 2f(v). \tag{3.22}$$
Convém notarmos que (3.14) e (3.22) são automaticamente satisfeitas no ponto inicial $r = R_1$ de J_2.

Novamente, devemos mostrar a existência de uma solução $v = v_2$ de (3.21), (3.22) e do intervalo maximal J_2. Para tanto, assim como no problema anterior, a equação (3.21) pode ser integrada. De fato, pelo Lema 1,
$$\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]' + 3f(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[H\left(|v'|\right)\right]' = 3f(v)v' = 3\left[F\left(v\right)\right]'$$
donde vem
$$H\left(|v'|\right) = 3F\left(v\right) + const.$$

Ainda pela (3.21), $[\Omega(|v'|)]' = -3f(v) < 0$, o que dá $\Omega \circ |v'|$ decrescente. Como Ω é crescente, devemos ter $|v'|$ decrescente. É claro então que v' nunca se anula, não podendo trocar de sinal. Assim, $v' < 0$ em todo o intervalo e, portanto,

$$-v' = |v'| = H^{-1}(3F(v) + const.) \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & -\frac{v'}{H^{-1}(3F(v) + const.)} = 1 \\
\Rightarrow \qquad & -\int_{R_1}^{r} \frac{v'dr}{H^{-1}(3F(v) + const.)} = r - R_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{v(R_1)}^{v(r)} \frac{ds}{H^{-1}(3F(s) + const.)} = R_1 - r, \tag{3.24}$$

o que define $v = v_2(r)$ implicitamente.
Vejamos que v é de fato C^1. Definindo ϕ em $[0, \epsilon]$ por

$$\phi(t) = \int_{v(R_1)}^{t} \frac{ds}{H^{-1}(3F(s) + const.)},$$

temos ϕ contínua e, pelo fato de que o integrando é contínuo e nunca se anula, ϕ é estritamente monótona. Daí, como $\phi(v(r)) = R_1 - r$, $\phi \circ v$ é contínua, obrigando a continuidade de v. Agora, o resultado auxiliar da prova do Lema 1, aplicado com $a = v \in C(J_2)$, $b = 1/H^{-1}(3F + const.) \in C([0, \epsilon])$ e $B = \phi \circ v \in C^1(J_2)$ nos assegura que $v \in C^1$, como queríamos.
Garantida a diferenciabilidade de v, derivando a (3.24), podemos voltar as implicações acima e concluir que v é de fato solução de (3.21). Já havíamos obtido $|v'|$ decrescente e, como $|v'| = -v'$, resulta v' crescente e, portanto, a convexidade de v.

Nossa intenção agora é garantir a limitação $|v'(R_2)| < \infty$. Para tanto, e com um propósito futuro, definiremos

$$\mu = 2^{2k+3} + 1 > 9.$$

Vamos tomar o valor de ϵ suficientemente pequeno de modo que $\mu F(\epsilon) \in H([0, +\infty))$. Notemos que, pela condição inicial (3.21_2), a constante em (3.23) é dada por $const. = -3F(v(R_1)) + H(\alpha_1)$. Assim, para $R_2 < r \leq R_1$,

$$\begin{aligned}
|v'| &= H^{-1}(3(F(v) - F(v(R_1))) + H(\alpha_1)) \\
&\leq H^{-1}(3F(\epsilon) + H(\alpha_1)) \\
&\leq H^{-1}(\mu F(\epsilon) + H(\alpha_1)) < \infty,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde reescolhemos α fim de que $\mu F(\epsilon) + H(\alpha_1) \in H([0,\infty))$. Isso é possível uma vez que $H(t) \to 0$ com $t \to 0$, como se vê pela representação (3.4), e por (3.20), $\alpha_1 \to 0$ com $\alpha \to 0$.
Da estimativa acima e da convexidade de v segue que $|v'(R_2)| < \infty$ e $v(R_2)$ estão bem definidos.

Se $R_2 = R/2$ ou $v(R_2) = \epsilon$, v verifica a uma das condições $i)$ ou $ii)$ e paramos o procedimento. Do contrário, (3.22) falha em $r = R_2 > R/2$ e passamos a buscar uma nova função $v = v_3$, definida no intervalo maximal $I_3 = (R_3, R_2]$ como a solução C^1 do problema (3.13), (3.14), (3.15), com valor inicial

$$v(R_2) = v_2(R_2), \quad v'(R_2) = -\alpha_2 = v_2'(R_2) < 0. \tag{3.13$_3$}$$

Outra vez, as condições (3.14), (3.15) são automaticamente satisfeitas em $r = R_2$. Analogamente ao que foi feito antes, podemos assegurar a existência da solução $v = v_3$ e do intervalo maximal I_3, bem como a convexidade de v e a existência do valor limite $v(R_3)$.

Para a limitação da derivada em R_3 observemos que, em I_3, v satisfaz

$$-\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]' = \frac{2k}{r}\Omega\left(|v'|\right) = \frac{2k}{r}Cr^{-2k}.$$

Pelo fato de (3.22) falhar em R_2, temos

$$\Omega\left(|v'\left(R_2\right)|\right) = \frac{2R_2}{k}f\left(v(R_2)\right)$$

e daí, como em (3.17), C é dada por

$$C = C_3 = R_2^{2k}\Omega\left(|v'\left(R_2\right)|\right) = \frac{2R_2^{2k+1}}{k}f(v(R_2)).$$

Portanto,

$$-\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]' = 4\left(\frac{R_2}{r}\right)^{2k+1} f(v(R_2)) \leq 2^{2k+3}f(v) = (\mu-1)f(v), \tag{3.26}$$

já que $R/2 < r \leq R_2 < R$ e f é não-descrescente em $[0,\epsilon)$. Multiplicando essa última por $v' < 0$, ficamos com

$$\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]'|v'| \geq (\mu-1)f(v)v',$$

ou seja,

$$\left[H\left(|v'|\right)\right]' \geq (\mu-1)[F(v)]'.$$

Em J_2, já tínhamos visto que

$$\left[H\left(|v'|\right)\right]' = 3[F(v)]',$$

e como $[F(v)]' < 0$, também temos

$$[H(|v'|)]' \geq (\mu - 1)[F(v)]'.$$

Sendo assim, a desigualdade acima é válida para $R_3 < r \leq R_1$. Integrando-a em $[r, R_1]$, resulta

$$\begin{aligned} H(|v'|) \leq & (\mu - 1)(F(v) - F(v(R_2))) + H(\alpha_1) \\ \leq & (\mu - 1)F(\epsilon) + H(\alpha_1) \end{aligned}$$

e invertendo H,

$$|v'| \leq H^{-1}\left((\mu - 1)F(\epsilon) + H(\alpha_1)\right), \qquad R_3 < r \leq R_1,$$

o que nos dá $|v'(R_3)| < \infty$.

Continuamos o procedimento feito até agora repetindo-o em sucessivos intervalos maximais J_4, I_5, J_6, ..., onde v_i é definida como solução de (3.21), (3.21$_i$), (3.14), (3.22) em J_i, i par, e de (3.13), (3.13$_i$), (3.14), (3.15) em I_i, i ímpar.
O argumento para a limitação da derivada em R_3, como veremos mais adiante, se estende para os intervalos seguintes, garantindo que estejam bem definidos os limites $|v'(R_i)|$. Como antes, continuamos tendo a convexidade das funções v_i em cada intervalo, donde existem também os limites $v(R_i)$. Além disso, das condições (3.13$_i$), (3.21$_i$), a função continuada v é C^1, sendo portanto convexa na continuação dos intervalos.

A continuação termina se $R_i = R/2$ ou se $v(R_i) = \epsilon$, para algum $i \geq 1$, sendo verificada uma das condições i) ou ii). Do contrário, a continuação segue indefinidamente. Neste caso, a sequência decrescente $R_i \geq R/2$ converge a um ponto

$$R_0 = \lim_{i \to \infty} R_i.$$

Pela convexidade de v em $(R_0, R]$, existem os limites

$$v(R_i) \to v(R_0), \qquad v'(R_i) \to v'(R_0).$$

Aqui, ou $v'(R_0) < 0$ ou, possivelmente, $v'(R_0) = -\infty$. Mostraremos que deve ser $v'(R_0) = -\infty$ e, deste modo, teremos obtido v satisfazendo a uma das condições i), ii) ou iii). De fato, se fosse $v'(R_0)$ finito, por continuidade, as condições (3.15) e (3.22) implicariam, no limite $i \to \infty$,

$$\frac{k}{R_0}\Omega\left(|v'(R_0)|\right) = f\left(v(R_0)\right) = 2f\left(v(R_0)\right),$$

o que resulta em $f\left(v\left(R_0\right)\right)=0$. A monotonicidade de f daria então $f(s)=0$, $0\leq s\leq v(R_0)$, contradizendo a hipótese inicial do lema.

Passo 2.

Mostraremos a seguir que, se α é suficientemente pequeno, os casos $ii)$ e $iii)$ não podem ocorrer. Para isso, estendemos o argumento de limitação da derivada em R_3 para toda a continuação. Começamos notando que (3.21) vale em cada intervalo J_i, $i\geq 2$ par, enquanto em cada intervalo $I_i=(R_i,R_{i-1}]$, $i\geq 3$ ímpar,

$$-\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]'=\frac{2k}{r}\Omega\left(|v'|\right)=\frac{2k}{r}Cr^{-2k}$$

onde

$$C=C_i=R_{i-1}^{2k}\Omega\left(\left|v'\left(R_{i-1}\right)\right|\right)=R_{i-1}^{2k}\frac{2R_{i-1}}{k}f\left(v\left(R_{i-1}\right)\right)$$

a última igualdade vindo de (3.22) falhar no ponto R_{i-1} de J_i. Logo,

$$-\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]'=4\left(\frac{R_{i-1}}{r}\right)^{2k+1}f\left(v\left(R_{i-1}\right)\right)\leq 2^{2k+3}f\left(v\left(R_{i-1}\right)\right)\leq 2^{2k+3}f(v)$$

uma vez que f é não-decrescente em $[0,\epsilon]$ e $v(r)>v(R_{i-1})$ em I_i. Deste modo, teremos para $\bar{R}<r\leq R_1$, tanto nos intervalos do tipo I quanto J,

$$-\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]'\leq(\mu-1)f(v)$$

e, pelo Lema 1, então

$$\left[H\left(|v'|\right)\right]'\geq(\mu-1)\left[F\left(v\right)\right]',\qquad \bar{R}<r\leq R_1. \tag{3.27}$$

Integrando em $[r,R_1]$, vem

$$H\left(\left|v'\left(r\right)\right|\right)\leq(\mu-1)F\left(v\left(r\right)\right)+H(\alpha_1)$$

e, invertendo H,

$$\left|v'\left(r\right)\right|\leq H^{-1}\left(\left(\mu-1\right)F\left(v\left(r\right)\right)+H\left(\alpha_1\right)\right),\qquad \bar{R}<r\leq R_1. \tag{3.28}$$

Segue daí, junto com $0<v\leq\epsilon$, que $|v'|$ é limitada em toda a continuação. Logo, o caso $iii)$ não pode ocorrer.

Consideremos agora o caso $ii)$, em que vale (3.11) e $v(\bar{R})=\epsilon$. Tomemos $\alpha_0>0$ tal que

$$\alpha_1<2\epsilon/R \tag{3.29}$$

sempre que $\alpha \leq \alpha_0$. Isso é possível pois, pela definição de α_1,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= |v_1'(R_1)| = \Omega^{-1}(C_1 R_1^{-2k}) \\ &= \Omega^{-1}\left((R/R_1)^{2k}\,\Omega\left(\alpha\right)\right) \\ &\leq \Omega^{-1}\left(2^{2k}\Omega\left(\alpha\right)\right)\end{aligned} \tag{3.30}$$

e $\Omega(\alpha) \to 0$ com $\alpha \to 0$. Logo, para $\alpha \leq \alpha_0$, pela convexidade de v e pela (3.29),

$$v(R_1) = \int_{R_1}^{R} |v'|ds \leq \int_{R_1}^{R} \alpha_1 ds \leq \alpha_1 R/2 < \epsilon = v(\bar{R}). \tag{3.31}$$

Segue daí que $\bar{R} < R_1$.
Consideremos primeiro o caso $f(s) = 0$ para $0 < s < \tau$, para algum $\tau \in (0, \delta]$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\delta = \tau$. Como $0 \leq v \leq \epsilon < \delta$, a desigualdade (3.15), isto é, $(k/r)\Omega(|v'|) > f(v)$, é satisfeita em toda a continuação. Logo, devemos ter $R_1 = \bar{R}$, contradizendo a desigualdade (3.31).

Suponhamos daqui em diante o caso principal $f(s) > 0$ para $0 < s < \delta$. Nesta situação, F é estritamente crescente em $[0, \delta)$ e admite uma inversa estritamente crescente F^{-1} em $[0, F\left(\delta\right))$. Vamos impor uma condição adicional sobre α_0, a saber

$$H(\alpha_1) < F(\epsilon) \quad \text{quando } \alpha_1 < \alpha_0. \tag{3.32}$$

Para simplificar a escrita, denotamos $v_1 = v(R_1)$, $F_1 = F(v_1)$ e $H_1 = H(\alpha_1)$. Definamos

$$\gamma = \begin{cases} v_1, & \text{se } F_1 \geq H_1; \\ F^{-1}(H_1), & \text{se } F_1 < H_1. \end{cases} \tag{3.33}$$

Notemos que, da condição (3.32), $H_1 = H(\alpha_1) < F(\epsilon) < F(\delta)$, logo $F^{-1}(H_1)$ está bem definido.

Afirmamos que

$$v_1 \leq \gamma < \epsilon. \tag{3.34}$$

Quando $\gamma = v_1$, a afirmação decorre da desigualdade (3.31). No caso em que $\gamma = F^{-1}(H_1)$, temos $F(\gamma) = H_1 > F_1$, o que dá $v_1 < \gamma$; ainda, da condição (3.32), $F(\gamma) = H_1 < F(\epsilon)$, resultando em $\gamma < \epsilon$. Notemos que em qualquer dos casos vale $F(\gamma) \geq H_1$.

Em vista de $v(\bar{R}) = \epsilon$ e $v' < 0$, junto com $v_1 \leq \gamma < \epsilon$, existe $\rho \in (\bar{R}, R_1]$ tal que $\gamma = v(\rho)$. Então, para $\bar{R} < r \leq \rho$, temos

$$F\left(v\left(r\right)\right) \geq F\left(v\left(\rho\right)\right) = F(\gamma) \geq H_1. \tag{3.35}$$

Usando esta última desigualdade em (3.28) vem, para $\bar{R} < r \leq \rho$,

$$\begin{aligned} |v'(r)| &\leq H^{-1}((\mu-1)F(|v(r)|)+H(\alpha_1)) \\ &\leq H^{-1}((\mu-1)F(|v(r)|)+F(v(r))) \\ &= H^{-1}(\mu F(v(r))). \end{aligned}$$

Tomemos $\epsilon < \delta/\mu$. Pelo Lema 1, i), aplicado com $\sigma = 1/\mu < 1$ e $u = \mu v$, obtemos

$$F(v) = F(\frac{1}{\mu}\mu v) \leq \frac{1}{\mu}F(\mu v) \quad \Rightarrow \quad \mu F(v) \leq F(\mu v)$$

e daí resulta

$$|v'| \leq H^{-1}(F(\mu v)), \qquad \bar{R} < r \leq \rho. \tag{3.36}$$

Segue que

$$\frac{-v'}{H^{-1}(F(\mu v))} \leq 1.$$

Integrando de $\bar{R}$ até ρ,

$$-\int_{\bar{R}}^{\rho} \frac{v'}{H^{-1}(F(\mu v))} dr \leq \rho - \bar{R} \leq \frac{R}{2}$$

e, mudando a variável r de integração para v,

$$\int_{\gamma}^{\epsilon} \frac{dv}{H^{-1}(F(\mu v))} = -\int_{v(\bar{R})=\epsilon}^{v(\rho)=\gamma} \frac{dv}{H^{-1}(F(\mu v))} \leq \frac{R}{2}.$$

Fazendo uma nova mudança de variável $s = \mu v$, ficamos com

$$\int_{\mu\gamma}^{\mu\epsilon} \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} \leq \frac{\mu R}{2}. \tag{3.37}$$

Mostraremos agora que $\gamma \to 0$ quando $\alpha \to 0$. De fato, se $\gamma = v_1$, pela (3.31), temos $\gamma \leq \alpha_1 R/2$ e, da (3.30), $\alpha_1 \leq \Omega^{-1}\left(2^{2k}\Omega(\alpha)\right) \to 0$ quando $\alpha \to 0$, provando o enunciado neste caso. O caso $\gamma = F^{-1}(H_1)$ é imediato, visto que $H_1 = H(\alpha_1) \to 0$ com $\alpha \to 0$.

Finalmente, fazendo $\alpha \to 0$, $\gamma \to 0$ em (3.37) e obtemos

$$\int_{0}^{\mu\epsilon} \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} \leq \frac{\mu R}{2},$$

o que contradiz a hipótese inicial de divergência (3.7). Portanto, a possibilidade do caso ii) fica também excluida e a função v satisfaz as condições do caso i).

Passo 3.

Por fim, mostraremos que v satisfaz a inequação (3.8) em $[R/2, R]$. Nos intervalos do tipo I, temos pela (3.13),

$$[\Omega(|v'|)]' + \frac{2k}{r}\Omega(|v'|) = 0$$

e assim

$$[\Omega(|v'|)]' + \frac{k}{r}\Omega(|v'|) + f(v) = -\frac{k}{r}\Omega(|v'|) + f(v) < 0,$$

pela condição (3.15).
Da mesma maneira, nos intervalos do tipo J,

$$[\Omega(|v'|)]' + 3f(v) = 0,$$

pela (3.21). Portanto, pela condição (3.22),

$$[\Omega(|v'|)]' + \frac{k}{r}\Omega(|v'|) + f(v) = \frac{k}{r}\Omega(|v|') - 2f(v) < 0,$$

completando a prova do lema. $\square$

Lema 3. Sejam u e v soluções de (3.1) e (3.2), respectivamente, em um domínio limitado D. Se u e v são contínuas em $\overline{D}$, $v < \delta$ em D e $u \geq v$ em ∂D, então $u \geq v$ em D.

Demonstração. Seja $w = u - v$ em $\overline{D}$. Por contradição, suponhamos que seja falso o resultado, isto é, que exista $x_1 \in D$ tal que $w(x_1) < 0$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $w(x_1) + \epsilon < 0$. Como $w > 0$ em ∂D, a função $w_\epsilon = min\{w + \epsilon, 0\}$ é não-positiva e tem suporte compacto em D. Além disso, é claro que w_ϵ é de Lipschitz podemos então usar $-w_\epsilon \geq 0$ como função teste em (3.1) e (3.2), para as quais u e v são respectivas soluções (no sentido fraco).

De (3.1) obtemos

$$-\int_D A(|Du|)Du \cdot (-Dw_\epsilon) \leq \int_D f(u)(-w_\epsilon),$$

isto é,

$$\int_D A(|Du|)Du \cdot Dw_\epsilon \leq -\int_D f(u)w_\epsilon.$$

Analogamente, de (3.2) vem

$$-\int_D A(|Dv|)Dv \cdot Dw_\epsilon \leq \int_D f(v)w_\epsilon$$

e, somando estas últimas,

$$\int_D \{A(|Du|)\,Du - A(|Dv|)\,Dv\} \cdot Dw_\epsilon \leq \int_D \{f(v) - f(u)\}\,w_\epsilon. \tag{3.38}$$

Observemos que, em $V = \{x \in D : w_\epsilon(x) < 0\}$, $Dw_\epsilon = Du - Dv = Dw$, que é contínua em V. Como w_ϵ certamente é não-constante em V, temos que o aberto $W = \{x \in V : Dw_\epsilon(x) \neq 0\}$ é não vazio.

Pela monotonicidade de $p \mapsto A(|p|)p$ (ver Preliminares, Def. 5, Prop. 2), segue que o integrando $\{A(|Du|)\,Du - A(|Dv|)\,Dv\} \cdot Dw_\epsilon$ é positivo em W e sendo também contínuo temos que

$$\begin{aligned} 0 &< \int_W \{A(|Du|)\,Du - A(|Dv|)\,Dv\} \cdot Dw_\epsilon \\ &\leq \int_D \{A(|Du|)\,Du - A(|Dv|)\,Dv\} \cdot Dw_\epsilon. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ao mesmo tempo, temos que $w + \epsilon < 0$, $u - v + \epsilon < 0$, logo $0 \leq u < v - \epsilon (< \delta)$. Como f é não-decrescente em $[0, \delta)$, $f(v) - f(u) > 0$, o que leva a $\{f(v) - f(u)\}w_\epsilon < 0$. Daí segue que o lado direito da (3.38) é não-positivo, uma contradição com a (3.39). $\square$

Podemos agora provar a suficiência no Teorema 5.

Demonstração do Teorema 5. Para $O \in D$ fixado, definimos $v(x) = v(r)$, $r = |x - O|$, com v a ser dada pelo Lema 2. O cálculo seguinte mostra que v satisfaz a inequação (3.2) em $E_R = \{x \in \mathbb{R}^n : R/2 \leq |x - O| \leq R\}$:

$$\begin{aligned} & div\,\{A(|Dv|)Dv\} - f(v) \\ =\; & div\,\{-A(|v'|)|v'|(x-O)/r\} - f(v) \\ =\; & -div\,\{\Omega(|v'|)(x-O)/r\} - f(v) \\ =\; & -\{\Omega(|v'|)\}'\,(x-O)/r - \Omega(|v'|)div\,\{(x-O)/r\} - f(v) \\ =\; & -\{\Omega(|v'|)\}' - \Omega(|v'|)\,(n-1)\,/r - f(v) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde a dasigualdade vem do Lema 2, com $k = n - 1$ e $l = 1$.

A função v assim obtida satisfaz às condições

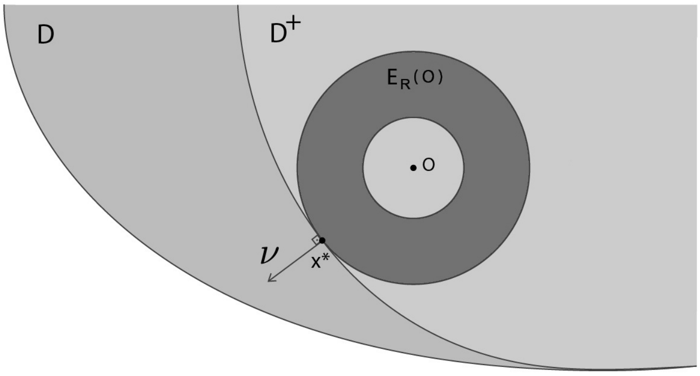
i) $v > 0$ no interior de E_R;

ii) $v = 0$ quando $|x - O| = R$;

iii) $\partial v/\partial \nu = v' < 0$ quando $|x - O| = R$, onde ν é o vetor normal exterior a E_R;

iv) $v < \epsilon$ quando $|x - O| = R/2$.

O passo final da prova é feito por absurdo. Suponhamos então que $u \geq 0$ seja uma solução não identicamente nula de (3.1) em D e que exista $x_0 \in D$ tal que $u(x_0) = 0$. Então $D^+ = \{x \in D : u(x) > 0\} \neq \varnothing$ e $\partial D^+ \cap D \neq \varnothing$. Tomemos $O \in D^+$ tal que $dist(O, \partial D^+) < dist(O, \partial D)$. Como ∂D^+ é fechado, existe $x^* \in \partial D^+$ satisfazendo $dist(O, x^*) = dist(O, D^+)$. Fazendo $R = dist(O, x^*)$, temos que $\text{int}(E_R) \subset D^+$ e $x^* \in \partial E_R \cap \partial D^+$.

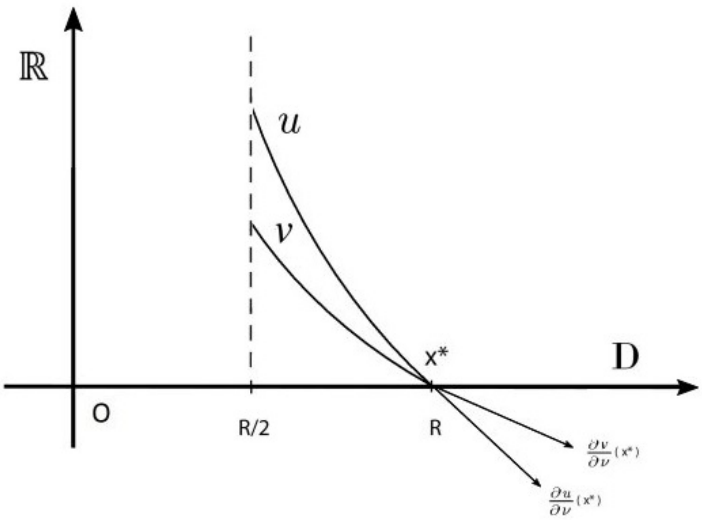


Agora, podemos tomar ϵ suficientemente pequeno de modo que $v \leq u$ em ∂E_R. Aplicando o Lema 3 sobre u e v em E_R resulta $v \leq u$ em E_R. Daí vem

$$\partial u/\partial \nu(x^*) \leq \partial v/\partial \nu(x^*) < 0,$$

o que contradiz o fato de ser $Du(x^*) = 0$ e termina a prova.

$\square$



4 Extensão para o segundo caso

Sejam D um domínio em $\mathbb{R}^n$ e $\{a^{ij}(x)\}$, $i,j = 1,\ldots,n$, uma matriz simétrica, continuamente diferenciável em D e uniformemente elíptica, isto é,

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad x \in D,\ \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

para algum $\lambda > 0$. Ao escrevermos apenas $a^{ij}(x)$, estamos pressupondo o somatório $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)$. Seja ainda $B(x,u,p)$ uma função contínua em $D \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$.

Vamos considerar a inequação

$$D_i\left\{a^{ij}(x)A\left(|Du|\right)D_j u\right\} - B(x,u,Du) \leq 0, \qquad u \geq 0,\ x \in D. \tag{4.1}$$

Exigiremos que o operador $A = A(t)$ satisfaça às seguintes versões mais fortes das condições (A1) e (A2):

(A1)' $A \in C^1(0,+\infty)$,

(A2)' $\Omega'(t) > 0$ para $t > 0$ e $\Omega(t) \to 0$ com $t \to 0$; Para f, continuaremos assumindo as condições (F1) e (F2).

Teorema 6. Suponhamos que exista uma constante $\kappa > 0$ tal que

$$B(x,u,p) \leq \kappa\Omega(|p|) + f(u) \tag{4.2}$$

para $x \in D$, $u \geq 0$ e todo $p \in \mathbb{R}^n$ com $|p| < 1$. Por fim, suponhamos que $f(s) = 0$, para $s \in [0,\tau)$, $\tau > 0$, ou que (3.6) ocorra, ou seja,

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty.$$

Então, se u é uma solução C^1 de (4.1) e $u(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in D$, $u \equiv 0$ em D.

A prova do teorema requer o seguinte aprimoramento do Lema 2:

Lema 4. O enunciado do Lema 2 continua válido com a condição adicional

$$-1 < v' < 0 \ \text{ em } \ [R/2, R). \tag{4.3}$$

Demonstração. Podemos tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a fim de que

$$F(\mu\epsilon) < H(1). \tag{4.4}$$

Afirmamos que (4.3) é válida se tomarmos α suficientemente pequeno satisfazendo $\Omega^{-1}\left(2^{2k}\Omega\left(\alpha\right)\right) < 1$.

No caso em que $f(s) = 0$, para $s \in [0, \tau)$, $\tau > 0$, podemos supor que $\delta = \tau$. Assim sendo, a condição (3.15) é satisfeita em toda a continuação, o que dá $R_1 = R/2$. Daí, como na (3.30), obtemos

$$|v'(R/2)| \leq \Omega^{-1}\left(2^{2k}\Omega\left(\alpha\right)\right) < 1, \tag{4.5}$$

donde pela convexidade de v vem $-1 < v' < 0$. No segundo caso, como na (3.36), chegamos a

$$|v'(R/2)| \leq H^{-1}\left(F\left(\mu\epsilon\right)\right) < 1, \tag{4.6}$$

pela (4.4). Isso completa a prova do lema. $\square$

Podemos agora dar a prova do teorema.

Demonstração do Teorema 6, Suficiência. Para $O \in D$ arbitrário, seja $E_R = \{x \in \mathbb{R}^n : R/2 \leq |x - O| \leq R\}$ e definamos

$$\Lambda = \text{ max. autovalor de } \{a^{ij}(x)\} \text{ em } \mathrm{E}_R, \qquad a = \text{ max. } \left|\sum_{i,j} D_i a^{ij}(x)\right| \text{ em } \mathrm{E}_R.$$

Fazendo $y = x - O$ e novamente pressupondo o somatório em i e j, temos

$$\begin{aligned} D_i\left(a^{ij}(x)\frac{y_j}{r}\right) =& (D_i a^{ij}(x))\frac{y_j}{r} + a^{ij} D_i\left(\frac{y_j}{r}\right) \\ =& (D_i a^{ij}(x))\frac{y_j}{r} + \frac{a^{ij}\delta_{ij}}{r} - \frac{a^{ij}y_i y_j}{r^3}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \left|D_i\left(a^{ij}(x)\frac{y_j}{r}\right)\right| &\leq \left|D_i a^{ij}(x)\right| + \left|\frac{a^{ij}\delta_{ij}}{r}\right| + \left|\frac{a^{ij}y_i y_j}{r^3}\right| \\ &\leq a + \frac{n\Lambda}{r} + \frac{\Lambda|y|^2}{r^3} \\ &\leq a + \frac{(n+1)\Lambda}{r} \end{aligned}$$

donde vem

$$\max_{E_R}\left|D_i\left(a^{ij}(x)\frac{y_j}{r}\right)\right| \leq a + \frac{(n+1)\Lambda}{r}.$$

Seja agora $v = v(r)$, $r = |x - O| = |y|$, com v a ser dada pelo Lema 4. Então $-1 < v' < 0$ em E_R e

$$
\begin{aligned}
D_i\left\{a^{ij}(x)A(|Dv|)D_jv\right\} &= D_i\left\{a^{ij}(x)A(|v'|)v'\frac{y_j}{r}\right\}\\
&= D_i\left\{-a^{ij}(x)A(|v'|)|v'|\frac{y_j}{r}\right\}\\
&= -D_i\left\{a^{ij}(x)\frac{y_j}{r}\right\}\Omega(|v'|) - a^{ij}(x)\frac{y_j}{r}D_i\left\{\Omega(|v'|)\right\}\\
&= -D_i\left\{a^{ij}(x)\frac{y_j}{r}\right\}\Omega(|v'|) - a^{ij}(x)\frac{y_iy_j}{r^2}\left\{\Omega(|v'|)\right\}',
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
&D_i\left\{a^{ij}(x)A(|Dv|)D_jv\right\} - \kappa\Omega(|Dv|) - f(v)\\
&= -D_i\left\{a^{ij}(x)\frac{y_j}{r}\right\}\Omega(|v'|) - a^{ij}(x)\frac{y_iy_j}{r^2}\left\{\Omega(|v'|)\right\}' - \kappa\Omega(|v'|) - f(v)\\
&\geq -a^{ij}(x)\frac{y_iy_j}{r^2}\left\{\Omega(|v'|)\right\}' - \left(a + \frac{n+1}{r}\Lambda + \kappa\right)\Omega(|v'|) - f(v)\\
&\geq -a^{ij}(x)\frac{y_iy_j}{r^2}\left\{\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]' + \frac{k}{r}\Omega\left(|v'|\right) + \frac{f(v)}{\lambda}\right\},
\end{aligned}
$$

onde $k = [(n+1)\Lambda + (a+\kappa)R]/\lambda$. Com a hipótese inicial de divergência (3.6), resulta do Lema 4, com $l = 1/\lambda$,

$$
\left[\Omega\left(|v'|\right)\right]' + \frac{k}{r}\Omega\left(|v'|\right) + \frac{f(v)}{\lambda} \leq 0, \tag{4.7}
$$

o que nos dá finalmente

$$
D_i\left\{a^{ij}(x)A(|Dv|)D_jv\right\} - \kappa\Omega(|Dv|) - f(v) \geq 0, \quad \text{para } x \in E_R. \tag{4.8}
$$

Para concluir a prova precisamos do seguinte lema de comparação que provamos na próxima seção:

Lema 5. Sejam u e v soluções de (4.1) e (4.8), respectivamente, em um domínio limitado $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Assumindo que
i) $B(x,u,Du) \leq \kappa\Omega(|Du|) + f(u) \quad x \in D$;
ii) $|Du| + |Dv| > 0$ em D
iii) $v < \delta$ em D;
iv) u e v contínuas em $\bar{D}$,
então $u \geq v$ em ∂D implica $u \geq v$ em D.

Agora procedemos exatamente como no primeiro caso, onde supomos que $u \geq 0$ seja uma solução não identicamente nula de (4.1) em D e que para

$x_0 \in D$ seja $u(x_0) = 0$. Podemos supor que $x_0 \in \partial D^+$, onde $D^+ = \{x \in D : u(x) > 0\}$. Notemos que, como u assume um mínimo em x_0 e $u \in C^1(D)$, existe um aberto contendo x_0 no qual $|Du| < 1$; assim, a condição *i)* do lema é satisfeita nesse aberto. Tomando $O \in D$ e $R > 0$ adequados de modo que $\mathrm{int}(E_R)$ eteja contido nesse aberto e $\partial E_R \cap \partial D^+ \neq \varnothing$, podemos aplicar o Lema 5 para u e v, escolhida de modo que $u \geq v$ em ∂E_R. Aí teremos $u \geq v$ em E_R, o que leva à mesma contradição do caso anterior. Isso encerra a prova. $\square$

5 Teorema de Comparação

Nesta seção provamos um teorema de comparação para inequações elípticas quasilineares em forma divergente singulares. Trata-se do Teorema 10.7, *(i)* de [4], com a exceção de que permitimos a singularidade das funções $\hat{A}(x,p)$ e $\hat{B}(x,p)$ em $p=0$, exigindo em compensação a condição adicional $|Du|+|Dv|>0$ em D.

Consideremos as inequações

$$div\{\hat{A}\,(x,Du)\}-\hat{B}\,(x,u,Du)\leq 0,\quad u\geq 0,\tag{5.1}$$

$$div\{\hat{A}\,(x,Dv)\}-\hat{B}\,(x,v,Dv)\geq 0,\quad v\geq 0,\tag{5.2}$$

em um domínio possivelmente não-limitado $D\subset\mathbb{R}$.

Façamos as seguintes hipóteses:

$\hat{A}(x,p):D\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é contínua em $D\times\mathbb{R}^n$ e continuamente diferenciável com respeito a p, para $p\neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, com $\hat{A}$ elíptica no sentido de que a matriz $\{D_{p_j}\hat{A}^i(x,p)\}$ é positiva definida, para $x\in D$ e $0\neq p\in\mathbb{R}^n$.

$\hat{B}(x,z,p):D\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é contínua em $D\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e continuamente diferenciável com respeito a p, para $p\neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, com $\hat{B}(x,z,p)$ não-decrescente com respeito a z.

Neste contexto, vale o

Teorema 7. Sejam u e v soluções de (5.1) e (5.2) em D, respectivamente, com u e v contínuas em $\overline{D}$, $|Du|+|Dv|>0$ em D. Se $u\geq v$ em ∂D e, no caso D ilimitado, $\liminf_{x\to\infty}\{u(x)-v(x)\}\geq 0$, então $u\geq v$ em D.

Demonstração. Vamos provar por contradição. Supondo falso o enunciado, se definirmos $w=u-v$, então

$$\bar{\epsilon}=-\inf_{x\in D}w(x)>0.$$

Pela condição de fronteira, para $\epsilon\in(0,\bar{\epsilon})$, $w_\epsilon=min\{w+\epsilon,0\}$ tem suporte compacto em D e é fácil ver que w_ϵ é de Lipschitz. Assim, como na prova do Lema 3, pelo sentido fraco de solução das (5.1) e (5.2), obtemos

$$\begin{aligned}\int_D\{\hat{A}(x,Du)-\hat{A}(x,Dv)\}\cdot Dw_\epsilon &\leq\int_\Sigma\{\hat{B}(x,v,Dv)-\hat{B}(x,u,Du)\}w_\epsilon\\ &\leq\int_\Sigma\{\hat{B}(x,u,Dv)-\hat{B}(x,u,Du)\}w_\epsilon\end{aligned}\tag{5.3}$$

onde $\Sigma = \Sigma_\epsilon = \text{supp } w_\epsilon$. Na última desigualdade usamos que, em Σ, $v \geq u$ e então, pela hipótese sobre $\hat{B}(x,z,p)$,

$$\begin{aligned} & \hat{B}(x,v,Dv) \geq \hat{B}(x,u,Dv) \\ \Rightarrow\ & \hat{B}(x,v,Dv)w_\epsilon \leq \hat{B}(x,u,Dv)w_\epsilon \\ \Rightarrow\ & \{\hat{B}(x,v,Dv) - \hat{B}(x,u,Du)\}w_\epsilon \leq \{\hat{B}(x,u,Dv) - \hat{B}(x,u,Du)\}w_\epsilon. \end{aligned}$$

Definimos agora, para $x \in D$, $u_t(x) = tu(x) + (1-t)v(x)$, $t \in [0,1]$,

$$\hat{a}^{ij}(x) = \int_0^1 D_{p_j}\hat{A}^i(x, Du_t)dt, \qquad \hat{c}^i(x) = -\int_0^1 D_{p_i}\hat{B}(x, u(x), Du_t)dt.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \hat{A}^i(x,Du) - \hat{A}^i(x,Dv) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\hat{A}^i(x,Du_t)dt &= \int_0^1 D_{p_j}\hat{A}^i(x,Du_t)D_j w_\epsilon dt \\ &= \hat{a}^{ij}(x)D_j w_\epsilon. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\hat{B}(x,u,Dv) - \hat{B}(x,u,Du) = -\int_0^1 \frac{d}{dt}\hat{B}(x,u,Du_t) = \hat{c}^i(x)D_i w_\epsilon,$$

donde podemos reescrever a (5.3) como

$$\int_D \hat{a}^{ij}(x)D_i w_\epsilon D_j w_\epsilon \leq \int_\Sigma \hat{c}^i(x)D_i w_\epsilon w_\epsilon. \tag{5.4}$$

Em seguida, provaremos que se $\epsilon \in (0,\bar{\epsilon})$ é suficientemente próximo de $\bar{\epsilon}$, então para alguma constante positiva vale

$$|Du_t| \geq const. > 0 \quad \text{em} \quad \Sigma. \tag{5.5}$$

Para tanto, seja

$$d = \frac{1}{6}\min\{|Du| + |Dv|\} \quad \text{em} \quad \hat{\Sigma} = \text{supp } w_{\bar{\epsilon}/2} \subset D.$$

Notemos que em $E = \{x \in D : w(x) = -\bar{\epsilon}\} \subset \Sigma$, $Du - Dv = Dw = 0$ e, como sup $\{\text{dist}(x,E) : x \in \Sigma\} \to 0$ com $\epsilon \to \hat{\epsilon}$, por continuidade, $|Du - Dv| < d$ em Σ, para ϵ suficientemente próximo de $\bar{\epsilon}$.
Afirmamos que para esses valores de ϵ, vale

$$\min\{|Du|, |Dv|\} \geq 2d \quad \text{em} \quad \Sigma.$$

De fato, do contrário, haveria $x_1 \in \Sigma$ tal que, digamos,

$$\min\{|Du|, |Dv|\} \leq |Du(x_1)| < 2d.$$

Daí viria

$$6d \leq |Du(x_1)| + |Dv(x_1)| < 2d + |Dv(x_1)| \;\Rightarrow\; 4d \leq |Dv(x_1)|$$

e então

$$|Du(x_1) - Dv(x_1)| \geq |Dv(x_1)| - |Du(x_1)| > 4d - 2d = 2d,$$

uma contradição com $|Du - Dv| < d$. Portanto $\min\{|Du|, |Dv|\} \geq 2d$, donde segue que

$$|Du_t| = |tDu + (1-t)Dv| \geq |Dv| - t|Du - Dv| \geq d > 0,$$

provando a afirmação (5.5).

Pela hipótese de elipticidade sobre $\hat{A}$, temos, para $x \in D$ e $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,

$$\hat{a}^{ij}(x)\xi_i\xi_j = \int_0^1 D_{p_j}\hat{A}^i(x, Du_t)\xi_i\xi_j dt \geq \int_0^1 \lambda(x)|\xi|^2 dt = \lambda(x)|\xi|^2.$$

Pela compacidade de Σ, podemos tomar $\lambda > 0$, com $\lambda \leq \inf_{x\in\Sigma} \lambda(x)$ se necessário, de modo que

$$\hat{a}^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{e} \quad |\hat{c}^i(x)| \leq \lambda^{-1},$$

para $x \in \Sigma$ e ϵ suficientemente próximo de $\bar{\epsilon}$.
Feito isto, pela (5.4), vem

$$\begin{aligned}\int_D \lambda|Dw_\epsilon|^2 &\leq \int_D \hat{a}^{ij}(x) D_i w_\epsilon D_j w_\epsilon \leq \int_\Sigma \hat{c}^i(x) D_i w_\epsilon w_\epsilon \\ &\leq \int_\Sigma \left|\hat{c}^i(x)\right| |D_i w_\epsilon| \, |w_\epsilon| \leq \int_\Sigma \lambda^{-1} \, |Dw_\epsilon| \, |w_\epsilon|\end{aligned}$$

e daí

$$\int_D |Dw_\epsilon|^2 \leq \lambda^{-2} \int_\Sigma |Dw_\epsilon| \, |w_\epsilon| \, .$$

Seja $\Gamma = \Gamma_\epsilon = \{\epsilon - \bar{\epsilon} < w_\epsilon < 0\}$. Então $Dw_\epsilon = 0$ *q.t.p.* em $\Sigma \backslash \Gamma$ e a integral do lado direito pode ser igualmente avaliada sobre Γ:

$$\int_D |Dw_\epsilon|^2 \leq \lambda^{-2} \int_\Gamma |Dw_\epsilon| \, |w_\epsilon| \, . \tag{5.6}$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$\int_D |Dw_\epsilon|^2 \leq \lambda^{-2} \int_\Gamma |Dw_\epsilon|\,|w_\epsilon| \leq \lambda^{-2} \left(\int_\Gamma |Dw_\epsilon|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Gamma |w_\epsilon|^2\right)^{1/2},$$

onde cancelando o fator

$$\left(\int_\Gamma |Dw_\epsilon|^2\right)^{1/2} = \left(\int_D |Dw_\epsilon|^2\right)^{1/2}$$

resulta (com a notação $\| \ \|_{2;D} = \| \ \|_{L^2(D)}$)

$$\|Dw_\epsilon\|_{2;D} \leq \lambda^{-2} \|w_\epsilon\|_{2;\Gamma}. \tag{5.7}$$

Vamos supor primeiro o caso $n > 2$. Podemos então aplicar a Desigualdade de Sobolev (ver Preliminares, Corolário 1), vindo

$$C\|w_\epsilon\|_{2^*;\Gamma} \leq C\|w_\epsilon\|_{2^*;D} \leq \|Dw_\epsilon\|_{2;D},$$

para uma constante $C = C(n) > 0$ que só depende da dimensão n.
Por outro lado, pela Observação 1 nas Preliminares, da (5.7) vem

$$\|Dw_\epsilon\|_{2;D} \leq \lambda^{-2}\|w_\epsilon\|_{2;\Gamma} \leq \lambda^{-2}\|w_\epsilon\|_{2^*;\Gamma}|\Gamma|^{1/n},$$

donde

$$C\|w_\epsilon\|_{2^*;\Gamma} \leq \lambda^{-2}\|w_\epsilon\|_{2^*;\Gamma}|\Gamma|^{1/n}.$$

Daí obtemos

$$\left(C\lambda^2\right)^n \leq |\Gamma|, \tag{5.8}$$

contradizendo o fato de $\Gamma \to \varnothing$ com $\epsilon \to \bar{\epsilon}$.

No caso $n = 2$, aplicando a Observação 1 sobre $|Dw_\epsilon|$ com $p = 2, q = 3/2$,

$$\|Dw_\epsilon\|_{3/2;\Gamma} \leq \|Dw_\epsilon\|_{2;\Gamma}|\Gamma|^{1/6} \leq \lambda^{-2}\|w_\epsilon\|_{2;\Gamma}|\Gamma|^{1/6}, \tag{5.9}$$

por (5.7). Agora, pela Desigualdade de Sobolev, com $(3/2)^* = 6$, obtemos $C > 0$ tal que

$$C\|w_\epsilon\|_{6;D} \leq \|Dw_\epsilon\|_{3/2;D},$$

logo

$$C\|w_\epsilon\|_{6;\Gamma} \leq C\|w_\epsilon\|_{6;D} \leq \|Dw_\epsilon\|_{3/2;D} = \|Dw_\epsilon\|_{3/2;\Gamma}.$$

Novamente, resulta da Observação 1

$$\|w_\epsilon\|_{2;\Gamma} \leq \|w_\epsilon\|_{6;\Gamma}|\Gamma|^{1/3}.$$

Levando estas últimas em (5.9) vem

$$C\|w_\epsilon\|_{6;\Gamma} \leq \lambda^{-2}\|w_\epsilon\|_{6;\Gamma}|\Gamma|^{1/2} \tag{5.10}$$

e obtemos mais uma vez

$$\left(C\lambda^2\right)^2 \leq |\Gamma|\,.$$

Isso finaliza a prova. $\square$

Podemos agora provar o Lema 5.

Demonstração do Lema 5. Definimos para $x \in D$, $p \in \mathbb{R}^n$,

$$\hat{A}^i(x,p) = a^{ik}(x)A(|p|)p_k, \qquad \hat{B}(x,z,p) = \kappa\Omega(|p|) + f(z).$$

Deste modo, $\hat{A}(x,p)$ é contínua em $D\times\mathbb{R}^n$ e continuamente diferenciável para $p \neq 0$ e $\hat{B}(x,z,p)$ é contínua em $D \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ e continuamente diferenciável para $p \neq 0$. Pela definição,

$$div\{\hat{A}\,(x,p)\} = D_i\left\{a^{ij}(x)A(|p|)p_j\right\}$$

e daí, usando *i)*,

$$\begin{aligned}
&div\{\hat{A}\,(x,Du)\} - \hat{B}\,(x,u,Du)\\
&= D_i\left\{a^{ij}(x)A(|Du|)D_ju\right\} - \kappa\Omega(|Du|) - f(u)\\
&\leq D_i\left\{a^{ij}(x)A(|Du|)D_ju\right\} - B(x,u,Du) \leq 0,
\end{aligned}$$

donde temos que u e v satisfazem

$$div\{\hat{A}\,(x,Du)\} - \hat{B}\,(x,u,Du) \leq 0,$$

$$div\{\hat{A}\,(x,Dv)\} - \hat{B}\,(x,v,Dv) \geq 0$$

em D.

Notemos que para prova do Teorema 7 é suficiente a monotonicidade de $\hat{B}(x,z,p)$ na variável z apenas para valores $z \in v(D)$. Como temos $v < \delta$ e f é não-decrescente em $[0,\delta)$, este é o caso. Para aplicarmos o teorema, mostremos que $\hat{A}(x,p)$ é elíptica para $p \neq 0$. De fato,

$$D_{p_j}\hat{A}^i(x,p) = a^{ik}(x)\left\{A(|p|)\delta_{kj} + A'(|p|)\frac{p_kp_j}{|p|}\right\} = \left\{a^{ik}(x)\right\}\left\{b^{kj}(p)\right\} \tag{5.11}$$

onde no último membro temos o produto das matrizes $\left\{a^{ik}(x)\right\}$ e

$$\left\{b^{kj}(p)\right\} = \left\{A(|p|)\delta_{kj} + A'(|p|)\frac{p_kp_j}{|p|}\right\}.$$

Denotando por I a matriz identidade $n \times n$ podemos escrever

$$\left\{b^{kj}(p)\right\} = A(|p|)I + \frac{A'(|p|)}{|p|} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

Daí vem

$$\left\{b^{kj}(p)\right\} - A(|p|)I = \frac{A'(|p|)}{|p|} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{bmatrix},$$

cujo espaço nulo tem dimensão $n-1$. Logo $A(|p|) > 0$ é autovalor de $\left\{b^{kj}(p)\right\}$ de multiplicidade $n-1$.
Além disso, é fácil ver que o vetor $(p_1, \dots, p_n)$ é autovetor de $\left\{b^{kj}(p)\right\}$ associado ao autovalor $\Omega'(|p|) > 0$. Portanto, $\left\{b^{kj}(p)\right\}$ é positiva definida e uma vez que $\left\{a^{ik}(x)\right\}$ é positiva definida por hipótese, da (5.11) resulta $D_{p_j}\hat{A}^i(x,p)$ positiva definida. Pelo Teorema 7 decorre então o resultado do lema. $\square$

Referências

[1] Benilan, P.; H. Brezis; M. Crandall. *A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^n)$,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **4** (1975), 523-555.

[2] Diaz, J.I. *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries,* Research Notes in Mathematics, **106**, 1985.

[3] Evans, L. *Partial Differential Equations,* American Mathematical Society, 1998.

[4] Gilbarg, D.; N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* 1988 ed., Springer.

[5] Pucci, P.; Serrin, J.; Zou, H. *A strong maximum principle and compact support principle for singular elliptic inequalities* , J. Math. Pures Appl. (1999).

[6] Pucci, P.; Serrin, J. *A note on the strong maximum principle for elliptic differential inequalities* , J. Math. Pures Appl. 79 (2000) 57–71.

[7] Pucci, P.; Serrin, J. *The Maximum Principle*, Birkhäuser, 2007.

[8] Vazquez, J.L. *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. 12 (1984) 191-202.