

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS PLANARES DE FLUIDOS
HERSCHEL-BULKLEY REGULARIZADOS EMPREGANDO UM MÉTODO
MULTI-CAMPOS DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS

por

Cleiton Elsner da Fonseca

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, 27 de fevereiro de 2008

UMA INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS PLANARES DE FLUIDOS
HERSCHEL-BULKLEY REGULARIZADOS EMPREGANDO UM MÉTODO
MULTI-CAMPOS DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS

por

Cleiton Elsner da Fonseca
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Comissão de avaliação:

Prof^º. Dr. Adriane Prisco Petry – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof^º. Dr. Flavia Zinani – Universidade de Caxias do Sul

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha – Fundação Universidade Federal de Rio Grande

Prof. Dr. Horácio Antônio Vielmo
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 27 de fevereiro 2008

*“Se eu vi mais longe,
foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”*

Isaac Newton

AGRADECIMENTOS

Para a construção de um bom trabalho, devemos sempre nos doar por completo e ter a humildade de aprender e crescer com outras pessoas. Por esses motivos, tenho a honra de agradecer as seguintes pessoas e entidades:

A toda minha família que me apoiou em toda minha caminhada, sempre me dedicando confiança, amor e carinho, possibilitando assim que eu pudesse me dedicar a construção deste trabalho;

Ao meu orientador, e por que não dizer meu amigo, Prof. Dr. Sérgio Frey, por ter me dado a oportunidade de estar realizando um sonho, me dando sempre grande apoio intelectual o que me fizeram crescer não somente como estudante, mas também como pessoa;

A minha namorada Inajara Courtes Soares, que esteve sempre ao meu lado com amor e carinho;

A todos meus colegas e amigos do LAMAC pelo apoio e ajuda em toda essa caminhada;

A Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, pela infra-estrutura proporcionada;

Agradeço a CAPES pela bolsa concedida;

Aos demais professores e funcionários do programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

RESUMO

“UMA INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS PLANARES DE FLUIDOS HERSCHEL-BULKLEY REGULARIZADOS EMPREGANDO UM MÉTODO MULTI-CAMPOS DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS”

A grande maioria dos fluidos encontrados na natureza se comportam como fluidos não-Newtonianos o que torna o seu estudo muito importante para diversas áreas da engenharia. Este trabalho tem como objetivo simular o problema específico de escoamentos de fluidos viscoplásticos em expansões abruptas planares com razão de aspecto de 1:4. O problema em questão se mostra interessante pois em muitos sistemas industriais são apresentados a geometria proposta para estudo associada a fluidos viscoplásticos. Foi empregado o modelo mecânico multi-campos (*mult-field*) baseado nas equações de conservação de massa e balanço de momentum para escoamentos isocóricos acoplados com a equação constitutiva de um Fluido Newtoniano Generalizada (GNL), associada à função de viscosidade de Herschel-Bulkley regularizada através da equação de Papanastasiou. O modelo mecânico é aproximado por um modelo estabilizado de elementos finitos, denominado método Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS). A fim de se pesquisar os fenômenos reológicos ali presentes é feito o estudo da influência do índice de *power-law* na topologia de um escoamento *creeping flow* ($Re \cong 0$) para uma vasta faixa de números de Herschel-Bulkley variando entre 0.1 e 100. Os resultados mostraram-se satisfatórios, apresentando uma forte influencia do número de Herschel-Bulkley e do índice de *power law* na topologia e na dinâmica do escoamento. Obteve-se uma validação do trabalho comparando-se os resultados obtidos nesta dissertação com os obtidos em artigo de grande credibilidade e aceito por toda a academia científica.

Palavras-chave: *fluido viscoplástico; modelo de Herschel-Bulkley; modelo mecânico multi-campos; Galerkin mínimos-quadrados; escoamentos em expansões abruptas.*

ABSTRACT

“AN NUMERICAL INVESTIGATION OF THE PLANAR FLOW OF THE HERSCHEL-BULKLEY FLUIDS REGULARIZED EMPLOYING A METHOD MULTI-FIELD OF GALERKIN LEAST-SQUARES”

The majority of fluids found in nature behave like non-Newtonian fluids what makes their study of great importance to various areas of engineering. The present work aims to simulate the specific problem of the viscoplastic fluids flows through in planar abrupt expansion with the aspect ratio of 1:4. The problem in question is interesting because in many industrial systems are the proposal to study geometry associated with viscoplastic fluid. It employed the multi-field mechanical model based on equations of conservation of mass and momentum balance for the isochoric flow coupled with the constitutive equation of the Generalized Newtonian Liquids (GNL), associated with the function of viscosity of Herschel-Bulkley regularized by the equation of Papanastasiou. The mechanical model is approximated by a stabilized finite element model, called Galerkin Least-Squares method (GLS). In order to research the rheological phenomena present is done studying the influence of power-law index in the topology of the creeping flow ($Re \approx 0$) for a wide range of numbers of Herschel-Bulkley ranging between 0.1 and 100. The results have proved satisfactory, showing a strong influence on the number of Herschel-Bulkley and power law index of the topology and dynamics of the flow. Got to be a validation of the work comparing the results with those obtained in this thesis in an article of great credibility and accepted throughout the scientific academy.

Keywords: *viscoplastic fluid; Herschel-Bulkley model; mechanical multi-field model; Galerkin least-squares; abrupt expansion flow.*

ÍNDICE

	Pág.
1. Introdução.....	01
1.1 Motivação.....	01
1.2 Estado da Arte.....	03
1.3 Objetivo e Plano da Dissertação.....	08
2. Modelagem Mecânica.....	10
2.1 Equações de Balanço.....	10
2.1.1 Conservação de Massa.....	10
2.1.2 Balanço de Momentum.....	10
2.2. Equações Materiais.....	11
2.2.1 Fluido Newtoniano Generalizado.....	11
2.2.2 Modelo de Viscoplasticidade.....	12
3. Aproximação de Elements Finitos.....	15
3.1 Definições Preliminares.....	15
3.2 Formulação Forte.....	16
3.3 O Método de Galerkin.....	17
3.4 O Método Multi-campos de Galerkin Mínimos-Quadrados.....	18
3.5 Problema Matricial.....	19
3.6 Elemento Quadrangular Bi-linear.....	21
4. Resultados Numéricos.....	24
4.1 Escoamento de Fluidos de Herschel-Bulkley Através de Expansões Abruptas.....	24
5. Conclusões e Perspectivas Futuras.....	66
5.1 Comentários Finais.....	67
5.2 Perspectivas Futuras.....	68
6. Referências Bibliográficas.....	69

LISTA DE SÍMBOLOS

Bn	Número de Bingham.....	[-]
C^0	Espaço das funções contínuas em Ω	[-]
C_h	Partição do domínio Ω em elementos finitos.....	[-]
C_p	Número de Euler.....	[-]
D	Tensor taxa de deformação.....	[s ⁻¹]
E	Matrix dos termos de tensão.....	[-]
F	Matrizes dos termos forças de campo.....	[-]
G	Matrizes dos termos de pressão.....	[-]
G^T	Matrizes dos termos de continuidade.....	[-]
g	Aceleração da gravidade.....	[m/s ²]
H	Matriz da ligação entre τ^h e u	[-]
H^T	Matriz da ligação entre τ^h e u	[-]
HB	Número de Herschel-Bulkley.....	[-]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$	[-]
$H_0^1(\Omega)$	Espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em Γ_g	[-]
h_k	Parâmetro relacionado ao tamanho do elemento K	[m]
I	Tensor unitário	[-]
I_D, II_D, III_D	Invariantes do tensor deformação	[-]
J	Matriz Jacobiana.....	[-]
K	Índice de consistência.....	[Pa.s ⁿ]
K	Matrizes dos termos difusivos.....	[-]
L_e	Comprimento do duto a montante da expansão.....	[m]
L_s	Comprimento do duto a jusante da expansão.....	[m]
L_c	Altura do duto a montante da expansão.....	[m]
L_H	Altura do duto a jusante da expansão.....	[m]
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções de quadrado integráveis em Ω	[-]
$L_0^2(\Omega)$	Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω	[-]
$L1$	Tamanho da zona morta a jusante da expansão.....	[m]
$L2$	Medida entre o início do plano de expansão e o início da zona de <i>plug flow</i>	[m]
M	Matrix dos termos δ	[-]
m	Parâmetro Regularizador de Papanastasiou.....	[-]
m	Grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m	[-]

m_k	parâmetro proveniente da análise de erro da formulação GLS.....	[-]
N	Número de dimensões do problema.....	[-]
\mathbf{N}	Matrix dos termos advectivos.....	[-]
N_A	Função de aproximação do nó global A da partição C_h	[-]
n	Índice <i>power-law</i>	[-]
\mathbf{n}	Vetor normal exterior unitária	[-]
\mathbf{P}	Matrix dos termos ε	[-]
p	Pressão hidrostática do fluido	[Pa]
P	Espaço funcional do campo de pressão.....	[-]
P^h	Aproximação por elementos finitos do campo de pressão.....	[Pa]
p^h	Função aproximação de elementos finitos do campo de pressão.....	[Pa]
P_m	Espaço polinomial de grau m para elemento triangular ou tetraédrico.....	[-]
Q_m	Espaço polinomial de grau m para elemento quadrilátero ou hexaédrico.....	[-]
q^h	Função peso do campo de pressão.....	[-]
\mathfrak{R}	Espaço dos números reais.....	[-]
Re	Número de Reynolds	[-]
Re_K	Número de Reynolds de malha	[-]
R_m	Espaço polinomial de grau m	[-]
S^h	Função peso do campo de tensão.....	[-]
\mathbf{T}	Tensor tensão.....	[N/m ²]
t	Tempo	[s]
\mathbf{t}_h	Força de superfície.....	[N]
U	Variável genérica.....	[-]
U^h	Aproximação do conjunto de variáveis U	[-]
\mathbf{u}	Campo de velocidade admissível.....	[m/s]
\mathbf{u}_c	Velocidade característica.....	[m/s]
\mathbf{u}_i	Componente da velocidade na direção i	[m/s]
\mathbf{u}^h	Função aproximação de elementos finitos do campo de velocidades.....	[m/s]
\mathbf{u}_g	Campo de velocidades sobre Γ_g	[m/s]
\mathbf{u}_s	Campo de velocidades na sída.....	[m/s]
\mathbf{v}	Velocidade de um elemento fluido infinitesimal.....	[m/s]
\mathbf{V}	Espaço funcional do campo de velocidade.....	[-]
\mathbf{V}^h	Aproximação por elementos finitos do campo de velocidade.....	[-]
\mathbf{v}^h	Função peso do campo de velocidades.....	[-]

Q1	Elemento quadrangular bi-linear.....	[-]
W	Espaço funcional do campo de tensão.....	[-]
W ^h	Aproximação por elementos finitos do campo de tensão.....	[-]
x	Posição em uma configuração	[m]

LETRAS GREGAS

β	Razão de aspecto da expansão.....	[-]
Γ	Fronteira do domínio Ω	[-]
Γ_g	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Dirichlet.....	[-]
Γ_h	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Neumann	[-]
μ	Viscosidade absoluta do fluido newtoniano.....	[kg/m.s]
η	Viscosidade aparente.....	[kg/m.s]
ρ	Massa específica do fluido	[kg/m ³]
τ_0	Tensão limite de escoamento.....	[N/m ²]
τ	Tensão de cisalhamento.....	[N/m ²]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor - extra de tensão.....	[N/m ²]
τ^h	Função aproximação de elementos finitos do campo de tensão.....	[N/m ²]
Ω	Domínio do problema	[-]
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema	[-]
Ω_k	Domínio do elemento finito K	[-]
ζ	Parâmetro de estabilidade.....	[-]
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação por cisalhamento.....	[s ⁻¹]
ξ	Coordenada natural.....	[-]
η	Coordenada natural.....	[-]

SOBRESCRITO

a	Número do ponto nodal do elemento.....	[-]
g	Condição de contorno essencial (Dirichlet).....	[-]
h	Condição de contorno natural (Neumman)	[-]
k	Grau dos polinômios dos termos de velocidade.....	[-]
h	Elemento finito da partição C_h	[-]

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

∇	Operador gradiente espacial.....	[-]
\otimes	Producto Tensorial.....	[-]
\cdot	Producto escalar.....	[-]

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Pág.
3.1 Domínio de elemento quadrilátero bi-linear no domínio aparente e ordenação nodal local...	22
3.2 Funções de forma local (N_a) e global (N_A) do elemento quadrilátero bi-linear Q1.....	23
4.1 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - descrição do problema.....	24
4.2 Escoamento através de uma expansão planar 1:4: teste de independência de malha.....	25
4.3 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 – malha 19800 elementos Q1/Q1/Q1 e 20281 pontos nodais.....	26
4.4 Iso-regiões de τ , para $n=0,37$, $K=1$ Pa.s ⁿ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.....	28
4.5 Iso-regiões de τ , para $n=1$, $K=1$ Pa.s ⁿ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.	30
4.6 iso-regiões de τ , para $n=1$, $K=1$ Pa.s ⁿ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.....	32
4.7 Medidas das zonas rígidas a jusante do ponto de expansão.....	33
4.8 Curva de comportamento das zonas rígidas a jusante do plano de expansão para: (a) $n=0,37$, (b) $n=1$ e (c) $n=1,5$	34
4.9 Influência do índice <i>power-law</i> , para $K=1$ Pa.s ⁿ , HB=1 e $m=10^3$: (a) $n=0,37$, (b) $n=0,8$, (c) $n=1$, (d) $n=1,5$	37
4.10 Influência do número de HB na quina da expansão para $K=1$ Pa.s ⁿ , $n=0,8$ e $m=10^3$: (a) HB=0, (b) HB=0,005, (c) HB=0,01, (d) HB=0,05, (e) HB=0,1 e (f) HB=1.....	38
4.11 Iso-regiões do campo de pressão, $K=1$ Pa.s ⁿ , Re=0, $n=0,37$ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.....	40
4.12 Iso-regiões do campo de pressão, $K=1$ Pa.s ⁿ , Re=0, $n=1$ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.....	41
4.13 Iso-regiões do campo de pressão, $K=1$ Pa.s ⁿ , Re=0, $n=1,5$ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.....	42
4.14 Superfícies do campo de velocidades na direção x_1 , $K=1$ Pa.s ⁿ , Re=0, $n=0,37$ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB= 50 e (f) HB=100.....	44
4.15 Superfícies do campo de velocidades na direção x_1 , $K=1$ Pa.s ⁿ , Re=0, $n=1$ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB= 50 e (f) HB=100.....	46
4.16 Superfícies do campo de velocidades na direção x_1 , $K=1$ Pa.s ⁿ , Re=0, $n=1,5$ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB= 50 e (f) HB=100.....	47

4.17 Superfícies do campo de velocidades na direção x_2 , $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$, $n=0,37$ e $m=10^3$: (a) $HB=0$, (b) $HB=0,1$, (c) $HB=1$, (d) $HB=10$, (e) $HB=50$ e $HB=100$	49
4.18 Superfícies do campo de velocidades na direção x_2 , $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$, $n=1$ e $m=10^3$: (a) $HB=0$, (b) $HB=0,1$, (c) $HB=1$, (d) $HB=10$, (e) $HB=50$ e (f) $HB=100$	50
4.19 Superfícies do campo de velocidades na direção x_2 , $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$, $n=1,5$ e $m=10^3$: (a) $HB=0$, (b) $HB=0,1$, (c) $HB=1$, (d) $HB=10$, (e) $HB=50$ e (f) $HB=100$	52
4.20 Queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$, $n=0,37$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	53
4.21 Queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$, $n=1$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	54
4.22 Queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$, $n=1,5$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	55
4.23 Perfil de velocidades axiais no plano de expansão em $x_1=0$, para $n=0,37$, $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	56
4.24 Perfil de velocidades axiais no plano de expansão em $x_1=0$, para $n=1$, $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	57
4.25 Perfil de velocidades axiais no plano de expansão em $x_1=0$, para $n=1,5$, $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	58
4.26 Perfil de velocidades axiais em $x_1=10$, para $n=0,37$, $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	59
4.27 Perfil de velocidades axiais em $x_1=10$, para $n=1$, $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	60
4.28 Perfil de velocidades axiais em $x_1=10$, para $n=1,5$, $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	61
4.29 Influência de n na queda de pressão ao longo da linha de simetria, $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$, $HB=1$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	62
4.30 Influência de n na velocidade axial no plano de expansão $x_1=0$, para $K=1 \text{ Pa.s}^n$, $Re=0$, $HB=1$ e 19.800 elementos Q1/Q1/Q1.....	63
4.31 Comparação com os resultados obtidos por Alexandrou et al. (2000), para $HB=1$ e $m=10^3$: (a) $n=0,5$, (b) $n=1$, (c) $n=1,5$	64

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela	Pág.
4.1 Erro calculado entre malhas.....	26

1. INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÃO

Muitos materiais de grande importância aos processos industriais comportam-se como fluidos Não-Newtonianos, que são materiais onde sua viscosidade não varia linearmente com a taxa de deformação. Grande parte destes fluidos podem ainda ser descritos como fluidos viscoplásticos, apresentando uma tensão limite de escoamento que necessita ser ultrapassada para que o material escoe ao qual abaixo dela o material se comporta como se tivesse uma viscosidade altíssima, tendendo ao infinito. Alguns exemplos de materiais viscoplásticos são: cimento, lamas e os óleos pesados na indústria do petróleo; maionese, manteiga, cremes, pastas e muitos produtos lácteos nas indústrias alimentares e cosméticos; barro, lama e outras suspensões concentradas na natureza. Historicamente este tipo de comportamento está graficamente retratado em gráficos de tensão versus taxa de cisalhamento, ou ainda, plotados como logaritmo da viscosidade versus o logaritmo da tensão aplicada.

Por ocorrer este comportamento em que o material apresenta uma tensão mínima de escoamento, duas regiões distintas serão formadas: as chamadas *yielded zones* e a *unyielded zones*. Na primeira as tensões estão acima da tensão mínima de escoamento e o material flui e a segunda região com tensões abaixo da tensão de cisalhamento mínima, apresentando zonas onde o material possui um movimento de corpo rígido. Existe um grande interesse em determinar a forma destas regiões, pois elas afetam diretamente a topologia do escoamento como, por exemplo, aumento de perda de carga. A definição do conceito dessas regiões de certa forma é recente, por isso seria interessante relatarmos alguns conceitos, onde, olhando para as definições populares mostradas hoje, nós temos (Horward A. Barnes, 1999):

Penguin Dicionário de Física:

“yield point – um ponto no gráfico da tensão versus deformação... em que, a deformação torna-se dependente do tempo e o material começa a escoar.

yield stress – a tensão mínima para que ocorra deslizamento. Abaixo deste valor toda a deformação produzida por uma força externa será puramente elástica.

yield value – o mínimo valor da tensão que deve ser aplicada para o material, afim de que ele deva fluir.”

Dicionário MacGraw-Hill de Ciência e Tecnologia, 4ª edição:

“yield point - A tensão mais baixa em que aumenta o cisalhamento sem aumentar a tensão.

yield strength – a tensão em que o material apresenta um desvio específico para (linear) proporcionalidade entre a tensão e cisalhamento”.

Chambers 21st Century Dictionary:

“*yield stress* – o nível de tensão em que uma deformação substancial ocorre subitamente.”

Dicionário Chambers de Ciência e Tecnologia:

“*yield stress* – a tensão em que um montante substancial de deformação plástica ocorre sob carga constante. Este escoamento súbito é característica do aço. Em outros metais, a deformação começa gradualmente...”

Van Nostrand's Science Encyclopaedia, 5ª edição:

“*yield stress* – a tensão mínima em que um... o material irá se deformar sem um aumento significativo da carga... alguns materiais não têm um bem definido yield point e em outros não bem definido valor.”

Existem muitos modelos que descrevem o comportamento dos fluidos em questão, entre os principais estão: *Power-law*, Casson, Carreau-Yasuda, Bingham, Herschel-Bulkley, SMD. Para o trabalho optou-se pelo modelo de Herschel-Bulkley por ser um modelo consagrado na literatura e bastante abrangente descrevendo com muita precisão uma grande gama de fluidos reais onde se pode descrever fluidos newtonianos, pseudoplásticos, dilatantes, plástico de Bingham, viscoplásticos com pseudoplasticidade e viscoplásticos com dilatância.

Problemas de escoamentos em expansões abruptas são estudados em muitos trabalhos por ter uma grande importância, onde em quase todos os sistemas em que se deseja escoar algum material, ocorre uma mudança de área da linha onde se está escoando o material e a expansão abrupta seria um dos casos mais extremos. O estudo dos fenômenos físicos que ali ocorrem podem nos dar uma abrangente visão, tanto da reologia do material, onde pode-se observar suas propriedades viscosas considerando a dinâmica e a cinemática de suas deformações, mas também como pode-se otimizar sistemas, como por exemplo, os de bombeamento de petróleo em que o material é forçado a escoar por várias geometrias diferentes e a expansão seria uma delas.

O problema proposto para estudo desta dissertação pode ser de grande proveito em áreas variadas: desde da área acadêmica através da pesquisa e determinação dos comportamentos físicos deste tipo de material, onde é utilizado todo o conhecimento adquirido em mecânica dos fluidos moderna; como também na área industrial onde esta pesquisa pode ser utilizada de maneira prática afim de melhorar sistemas de produção e reduzir gastos.

1.2. ESTADO DA ARTE

Papanastasiou (1987) estudou escoamentos permanentes bidimensionais de fluidos de Bingham modelados através de uma equação constitutiva modificada, válida para todo escoamento - seja nas regiões onde ocorre escoamento (doravante denominadas simplesmente por regiões de escoamento) como nas regiões onde praticamente o material não escoam (doravante denominadas de regiões rígidas). As equações de conservação e a relação constitutiva foram resolvidas simultaneamente via método de Galerkin clássico e o esquema iterativo de Newton. Essa estratégia numérica elimina a necessidade de rastrear superfícies do escoamento. Esta análise foi aplicada para o escoamento em um canal unidimensional, para o escoamento de uma camada limite bidimensional e para o escoamento de uma extrusão bidimensional. As aproximações de elementos finitos concordaram satisfatoriamente com soluções analíticas disponíveis para casos assintóticos.

Scott and Mirza. (1988) descreveram em seu artigo resultados obtidos para soluções de escoamentos, em regime permanente com baixo número de Reynolds, de materiais viscoplásticos com estrutura de vórtices utilizando o método de elementos finitos. O comprimento do recolamento e a intensidade dos vórtices em expansões planares e axissimétricas abruptas são relatados em função do número de Reynolds e da tensão de escoamento adimensionalizada para os fluidos de Bingham e Casson. O escoamento em uma estenose é examinado usando as relações constitutivas de Bingham e Casson. As zonas de separação em uma bifurcação planar a 180° de entradas planas e curvas são comparadas para os fluidos de Bingham e Newtoniano. Os resultados mostraram que o tamanho e a intensidade da recirculação são reduzidos para materiais viscoplásticos.

Burgos et al. (1999) analisaram em seu artigo os fluidos de Herschel-Bulkley, os quais descrevem materiais que se comportam como sólidos rígidos quando a tensão local τ é mais baixa do que o limite de escoamento τ_0 . O domínio do escoamento é caracterizado por duas regiões, uma onde $\tau > \tau_0$ - a chamada região de escoamento - e a outra na qual $\tau < \tau_0$. - região rígida. A região na qual $\tau = \tau_0$ é conhecida como superfície de escoamento. Os autores, através do uso de soluções analíticas para um escoamento cisalhante entre duas paredes rígidas, discutiram a eficiência dos modelos regularizados de Herschel-Bulkley - tais como o de Papanastasiou - do modelo de bi-viscosidade e do modelo de Bercovier e Engelman em determinar a topografia da superfície de escoamento. São mostrados resultados para diferentes parâmetros de escoamento e comparados com soluções exatas. É concluído que os modelos regularizados, com uma escolha apropriada dos parâmetros de regularização, podem ser usados para prever as dimensões do escoamento e descrever as zonas rígidas. O modelo de Papanastasiou prediz bem a superfície de

escoamento, enquanto os modelos de Papanastasiou e o de bi-viscosidade predizem bem a tensão longe dela. O modelo de Bercovier e de Engelman é equivalente ao modelo de Papanastasiou, para uma escolha apropriada do parâmetro de regularização δ seja feita. Também é demonstrado que em alguns casos a superfície de escoamento pode ser recuperada usando um procedimento de extrapolação baseado em uma representação analítica da solução.

Alexandrou et al. (2001) relataram em seu artigo um estudo sobre escoamentos permanentes de fluidos de Herschel–Bulkley em expansões planares tridimensionais com razão de aspecto 1:2: e 1:4. O comportamento do fluido foi modelado usando uma relação constitutiva contínua regularizada, e o escoamento foi aproximado numericamente empregando uma formulação mista de Galerkin acoplado a um método iterativo de Newton. Os autores apresentaram resultados para a topologia das regiões de escoamento e rígida ao longo das expansões – bem como de suas zonas de recirculação - como uma função dos números de Bingham e Reynolds e do expoente *power-law*. Seus resultados revelaram forte dependência entre os números de Reynolds e Bingham e suas influências na formação e destruição das zonas de estagnação nas quinas da expansão, e no tamanho e localização das regiões de escoamento tampão.

Barnes et al. (2001) mostraram que, a partir da utilização de reômetros de tensão controlada, já é possível aferir, em regime permanente, curvas de escoamento de líquidos estruturados para uma ampla variação da tensão de cisalhamento aplicada. Em diversos líquidos, estas curvas apresentam novas formas, as quais têm características fortemente pseudoplásticas. Os autores introduziram uma categoria de modelos matemáticos empíricos, os quais são simplificações ou elaborações dos bem conhecidos modelos de Cross e Ellis. Estes modelos visam descrever o comportamento de líquidos estruturados fortemente pseudoplásticos, o qual, até o momento, tem sido descritos apenas para elevadas taxas ou tensões de cisalhamento através de um modelo constitutivo com limite de escoamento tal como o modelo de Casson, Bingham e Herschel-Bulkley. Estas novas equações descrevem as curvas de escoamento tanto acima quanto abaixo de qualquer tensão de escoamento do material e encontram aplicação para uma variada gama de líquidos de interesse industrial, indo desde as lamas de perfuração até aos chocolates fundidos.

Pascal Jay et al. (2001) realizaram simulações numéricas de escoamentos através de uma expansão 1:4 axissimétrica abrupta, usando os líquidos de Herschel-Bulkley e Bingham com modelo de bi-viscosidade. Eles analisaram a influência da pseudoplasticidade, da inércia, da tensão limite de escoamento, a estrutura dos escoamentos e suas perdas de cargas. Analisando a estrutura dos escoamentos, eles mostraram o surgimento de um vórtice inicial e, em seguida, a formação de duas zonas estagnadas de formato toroidal – uma localizada junto à quina da

expansão e a outra no ponto de recolamento a jusante do vórtice. Os efeitos de inércia e da tensão de escoamento agem em efeitos opostos. Quando a inércia cresce, o vórtice aumenta e a zona estagnada decresce. Contrariamente, quando o limite de escoamento aumenta, o vórtice decresce e a zona estagnada aumenta. O aumento da pseudoplasticidade reduz as dimensões tanto do vórtice como da zona estagnada. Já a perda de carga aumenta com a tensão de escoamento. Os resultados numéricos mostraram-se consistentes quando comparados com resultados experimentais.

Mendes et al. (2004) propuseram uma nova função de viscosidade para líquidos com alta pseudoplasticidade ou com tensão limite de escoamento, como, por exemplo, pastas e lamas de perfuração. Essa função é contínua e apresenta um platô para baixas taxas de cisalhamento, seguido por uma queda brusca da viscosidade para valores da taxa de cisalhamento limiar (tensão limite), e uma subsequente região de *power-law*. A equação foi ajustada para os dados de duas soluções aquosas de Carbopol com diferentes concentrações, para fluidos de perfuração, para emulsão água/óleo e maionese comercial. A qualidade dos ajustes encontrada por eles foi plenamente satisfatória.

Neofytou (2005) investiga os efeitos não-Newtonianos em escoamentos de fluidos Newtonianos generalizados, empregando um esquema numérico baseado na formulação de volumes finitos. Este esquema utiliza o método de correção de pressão em conjunto com o algoritmo SIMPLE, de modo a solucionar o sistema de equações discretizadas. Visando minimizar a difusividade artificial dos esquemas de baixa ordem, a aproximação dos termos convectivos é realizada usando o esquema QUICK de terceira ordem. Para modelar o comportamento da viscosidade não-Newtoniana, foram empregados os modelos *power-law*, Quemada, e Bingham e Casson modificados. A validação do código foi realizada através da comparação de resultados numéricos disponíveis na literatura. Analisando o problema da cavidade, uma dupla investigação é realizada no que diz respeito aos efeitos não-Newtonianos do escoamento. O problema é tanto explorado empregando diferentes modelos constitutivos, como variando as características pseudoplásticas e dilatantes do fluido.

Mendes et al. (2007) analisaram o escoamento axissimétrico de um líquido viscoplástico através de uma expansão abrupta seguida de uma contração abrupta. Os autores obtiveram soluções numéricas permanentes, sem inércia, através da resolução das equações de conservação de massa e momentum empregando o método de volumes finitos. O comportamento viscoplástico do líquido foi modelado através de um modelo de líquido Newtoniano generalizado com uma função viscosidade recentemente proposta [Souza Mendes et al., 2004]. Eles também realizaram experimentos de visualização com uma solução aquosa de Carbopol em diferentes

concentrações. Superfícies geradas delimitando regiões rígidas e as regiões de não rígidas foram observadas para diferentes combinações de parâmetros governantes.

Agouzal et al. (2005) estudaram uma aproximação para uma classe de modelo não-Newtoniano, baseada na lei de Ladyzhenskaya generalizada para funções viscosidade contínuas e não-linear. Foi introduzida uma aproximação não-conformada de elementos finitos do problema de Stokes não linear. No trabalho utilizou-se um pós-processador para obter a aproximação conformada da tensão, que permitem derivar várias equivalências com aproximações de dois ou três campos para o problema de Stokes não-linear.

Brasil Jr^a et al.(2005) apresentaram um regime de elementos finitos três campos destinado a solução de sistemas tempo-dependente para equações diferenciais parciais que governam os escoamentos viscoplásticos. A forma linearizada deste sistema é um sistema de Stokes tempo-dependente generalizado. Uma vez que uma clássica discretização temporal é realizada, a resultante do sistema três campos de equações permite uma aproximação estável para a velocidade, pressão e tensor extra de tensão, por meios de elementos finitos linear por partes, em ambos, duas ou três dimensões. Outra vantagem descrita desta formulação é o fato que ele implicitamente proporciona um algoritmo para a solução interativa dos sistemas não-lineares no caso de escoamentos viscoplásticos. Uma convergência em uma forma apropriada para escoamentos três campos foi demonstrada, para o sistema de Stokes generalizado.

Naccache et. al. (2007) estudaram numericamente, o *creeping flow* de fluidos viscoplásticos através de um canal com uma expansão seguida de uma contração. A solução das equações de conservação de massa e balanço de *momentum* foram obtidas através do método de volume finito. Para o modelo não-Newtoniano, foi usado a equação Newtoniana constitutiva generalizada. A função viscosidade foi proposta por Mendes e Dutra (Mendes, 2004). As regiões *yielded* e *unyielded* foram obtidas por várias combinações de parâmetros reológicos. Foi analisada a influência desses parâmetros na queda de pressão através de uma cavidade.

Roquet e Saramito (2007) apresentaram a solução numérica do fenômeno da *yield stress* não-linear usando um novo método anisotrópico auto-adaptativo de elementos finitos. O escoamento estudado foi o de Poiseuille para um fluido de Bingham considerando a condição de não deslizamento na parede. A geometria estudada foi o canal com seção quadrada. Os cálculos computacionais cobrem uma grande gama números adimensionais de Bn e exibem um padrão de escoamento complexo.

Mitsoulis (2008) realizou simulações numéricas para o processo de calandragem de folhas viscoplásticas com espessura finitas. O método de elementos finitos (FEM) foi usado para obtenção de resultados numéricos para espessura de entrada fixa sob condições de estado estacionário bi-dimencional. O modelo usado foi de Herschel–Bulkley regularizado, que é válido

para toda a faixa de taxas de deformação. As regiões *yielded/unyielded* foram encontradas para uma faixa de número de Bingham para fluido Newtoniano viscoso ($Bn=0$) até altamente viscoplástico ($Bn=1000$). Os resultados 2D mostraram o limite das regiões *unyielded* entre os rolos, em desacordo com a *lubrication approximation theory* (LAT), que prediz extensas regiões *unyielded* erradas.

Wang e Ho (2008) estudou um modelo Boltzmann dentro da estrutura de D2Q9 para plástico de Bingham. A essência deste modelo reside na incorporação do efeito da taxa de cisalhamento local dentro da função distribuição de equilíbrio da *lattice*. Com esse arranjo, as funções distribuição de partículas são capazes de relaxar os estados contendo própria informação da taxa de deformação local durante as colisões que faz com que o regime proposto em seu trabalho seja mais eficiente e estável. O problema de escoamento em expansão abrupta 1:2 e um canal planar para uma vasta faixa de números de Bingham, $0 \leq Bn \leq 2000$, e números de Reynolds, $0.2 \leq Re \leq 200$, são executados para verificar a aplicação do modelo. Isto mostra que tanto o alcance e a forma das regiões *yielded/unyielded* e os vórtices nas cantos são capturados com precisão e os valores numéricos deles estão de acordo com os resultados existentes.

Neil J. Balmforth et. al. (2008) apresentaram um estudo teórico e experimental da versão viscoplástica do problema de Stokes, em qual uma parede oscilatória com uma camada limite em um movimento unidimensional. Pela teoria, o fluido é tomado sendo descrito pelas equações constitutivas de Herschel_Bulkley, e o problema de escoamento é análogo ao um não usual problema de Stefan. Na teoria, quando as oscilações direcionadas são relativamente fracas, as camadas viscoplásticas movem-se rigidamente com o plato. Para oscilações suficientemente fortes, o *fluid yields* e soluções numéricas ilustram como localiza as regiões *plug flow* coexiste com a região cisalhada e migra verticalmente através da *fluid layer*. Os experimentos confirmam a principio dos escoamentos puramente viscosos, equivalente a um balanço entre inércia e *yield-stress*.

Christophe Ancey e Steve Cochard (2008) investigaram o problema de uma queda-amortecida para fluidos viscoplástico (Herschel-Bulkley) numa calha: um fixo volume do fluido inicialmente contido em uma represa é liberado e escoam por forças gravitacionais até que essas forças sejam incapazes de superar a *yield stress* do fluido. Foi usada a teoria de lubrificação e semelhantes expansões assintóticas para derivar a equação da evolução do caimento do escoamento, mas com escalas diferentes para variáveis de fluxo, o que possibilita o estudo do comportamento do escoamento em grandes declives. Na equação da evolução definiu-se a forma da difusão não-linear – equação da convecção. Para direcionar a ordem, estas equações simplificam dentro da equação da convecção e reflete no balanço entre forças gravitacionais e

forças viscosas. Após apresentado resultados analíticos e numéricos, foi comparada a teoria com os dados experimentais. Foi explorada uma faixa de inclinação da calha com 6° para 24° , para um número de Bingham situado na faixa de 0,07-0,26.

Chupin e Palade (2008) em seu trabalho é abordado escoamentos bi-dimensionais simétricos e axissimétrico de fluidos Newtonianos generalizados e fluidos viscoplásticos de Herschel-Bulkley de encontro à uma abrupta quina que é usada por ser uma geometria singular. O campo de pressões é aproximado usando uma expansão assintótica válida na extremidade da vizinhança, e esta dependência no ângulo da quina é avaliada. Para estes escoamentos especiais, a metodologia usada para obter o comportamento da pressão não requer conhecimento explícito da dependência da viscosidade com a taxa de deformação. Foi provado também que quando o ângulo extremo seja tal que a quina seja uma concavidade abrupta, o fluido viscoplástico comporta-se como um sólido no domínio da extremidade da vizinhança.

1.3 OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho tem como objetivo a modelagem mecânica e simulação numérica através do método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados (GLS), de escoamentos através de expansões abruptas planares de fluidos viscoplásticos de Herschel-Bulkley.

Para um melhor entendimento e apreciação desta Dissertação, será apresentado um plano geral de seus capítulos:

- Capítulo 1: Motivação para a realização desta dissertação e o estado da arte do método de elementos finitos em escoamentos de fluidos viscoplásticos.
- Capítulo 2: Modelagem mecânica baseada nas leis de conservação de massa e balanço *momentum*, com as leis materiais dos fluidos viscoplásticos ao qual foi utilizado o modelo de Herschel-Bulkley regularizado.
- Capítulo 3: Apresenta uma descrição da aproximação de elementos finitos de Galerkin mínimos-quadrados para as equações do modelo mecânico multi-campos introduzido nos Capítulos 2 e o método de resolução do sistema não-linear (modelo matricial).
- Capítulo 4: Apresenta a validação da implementação computacional da formulação multi-campos GLS introduzida no Capítulo 3. Discute fisicamente os resultados das simulações numéricas de escoamentos de fluidos de Herschel-Bulkley regularizados através de expansões planares abruptas.
- Capítulo 5: Faz um resumo do conteúdo de cada um dos Capítulos da Dissertação, enfatiza as principais conclusões obtidas no Capítulo 4 e projeta perspectivas futuras para o trabalho.
- Capítulo 6: Referências bibliográficas utilizadas.

2. MODELAGEM MECÂNICA

2.1 EQUAÇÕES DE BALANÇO

2.1.1 Conservação de Massa

De acordo com o princípio da conservação de massa, tem-se que “a massa total de fluido no interior do volume Ω , somente aumentará devido ao afluxo líquido de fluido através da fronteira Γ “. Matematicamente, aplicando o teorema da divergência de Gauss, o teorema de transporte de Reynolds e o teorema da localização, obtém-se chega-se à forma diferencial Euleriana da *equação da continuidade* [Astarita e Marrucci 1972].

$$\partial_t \rho = -\text{div}(\rho \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

Empregando-se o conceito do operador derivada material de um campo escalar [Astarita e Marrucci, 1972] na Eq.(2.1) pode-se, ainda, obter a forma diferencial Lagrangeana da *equação da continuidade*.

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \text{div} \rho + \rho \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

e ainda sendo simplificada, onde $\text{div} \rho = 0$,

$$\partial_t \rho = -\rho \text{div} \mathbf{u} \quad (2.3)$$

Neste trabalho, foi imposta a hipótese de que o fluido simulado tenha sua massa específica constante, ou seja, os chamados *escoamentos incompressíveis*, fazendo assim com que a *equação da continuidade* tanto na forma Euleriana (Eq. 2.1), quanto na forma Lagrangeana (Eq. 2.2) possa ser simplificada, tendo assim a seguinte forma:

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

2.1.2 Balanço de Momentum

Segundo o princípio da conservação de momentum, “a taxa de aumento de movimento total do fluido no interior do volume Ω é igual ao afluxo líquido de movimento através de suas

fronteiras Γ mais à ação das resultantes das forças de contato e corpo atuando no fluido” [Astarita e Marrucci, 1972]. Matematicamente, aplicando-se os teoremas da divergência de Gauss, de transporte de Reynolds e da localização, obtém-se:

$$\partial_i(\rho \mathbf{u}) + \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.5)$$

A Eq. 2.5 é denominada forma diferencial Euleriana da *equação balanço de momentum*, onde o seu lado esquerdo do sinal de igual representa as forças de inércia por unidade de volume atuantes no fluido, enquanto seu lado direito representa as forças de contato e de corpo atuantes no fluido, por unidade de volume.

A forma Lagrangeana da *equação balanço de momentum* é dada pela Eq. 2.6:

$$\rho D_t \mathbf{u} = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.6)$$

onde a descrição do escoamento é especificado apenas em função do tempo.

2.2 EQUAÇÕES MATERIAIS

2.2.1 Fluido Newtoniano Generalizado

O modelo de Fluido Newtoniano Generalizado (GNL) é um modelo empírico que surgiu a partir da generalização da equação constitutiva Newtoniana incompressível o qual é expresso por:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{T} &= -p \mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $\eta(\dot{\gamma})$ é a viscosidade aparente e \mathbf{D} o tensor taxa de deformação. A viscosidade aparente é uma grandeza escalar que depende somente das combinações dos componentes do tensor taxa de deformação e suas invariantes. Para fluidos incompressíveis o primeiro invariante do tensor taxa de deformação é dado pelo traço dele,

$$I_D = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

e para escoamentos puramente cisalhantes, o terceiro invariante de \mathbf{D} é igual a zero,

$$III_{\mathbf{D}} = \det \mathbf{D} = 0 \quad (2.9)$$

pois os elementos fluidos não sofrem alterações de volume. Assim, a função viscosidade η dependerá somente do segundo invariante do tensor \mathbf{D} , $II_{\mathbf{D}}$. O segundo invariante na prática é dito como a magnitude do tensor taxa de deformação, $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = [2(\text{tr } \mathbf{D}^2)]^{1/2} = [2 II_{\mathbf{D}}]^{1/2} \quad (2.10)$$

Definindo-se tensão de cisalhamento como a magnitude do tensor-extra de tensão \mathbf{T} ,

$$\tau = \left[\frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{T}^2) \right]^{1/2} \quad (2.11)$$

por analogia com a Eq. 2.7 tem-se que;

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}) = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (2.12)$$

e por fim, rearranjando os termos da Eq 2.12 temos a função viscosidade de Newton generalizada

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (2.13)$$

2.2.1 Modelo de Viscoplasticidade

Um das funções viscosidade mais usada para se adequar a os dados de viscosidade dos materiais viscoplásticos é a função de viscosidade de Herschel-Bulkley e por isso optou-se por esse modelo para descrever os escoamentos simulados nesta dissertação. Este modelo utiliza três parâmetros reológicos: τ_0 representando a tensão limite de escoamento, o índice de consistência K e o índice de *power-law* n . A tensão de cisalhamento correspondente a essa função é dado por

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + K \dot{\gamma}^n & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{se } \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde τ é a tensão cisalhante e $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação. Se $n=1$, o modelo se reduz à tradicional função do plástico de Bingham

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} & se \quad \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & se \quad \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde μ_p é a viscosidade plástica. Ambas as equações predizem uma viscosidade infinita no limite em que a taxa de deformação vai a zero. Para índice de *power-law*, $n < 1$, o modelo prediz um material viscoplástico que se comporta com a viscosidade variando como de um fluido pseudoplástico (*shear-thinning*), ou seja, uma variação não linear da viscosidade com a taxa de deformação do material onde a viscosidade aumenta com menor intensidade com o crescimento da taxa de deformação. Quando o índice de *power-law* é maior que um, $n > 1$, o material escoar como um fluido dilatante (*shear-thickening*) onde a viscosidade cresce com mais intensidade com o aumento da taxa de deformação. A função viscosidade aparente é obtida a partir da lei da viscosidade de Newton e é dada por:

$$\begin{aligned} \eta(\dot{\gamma}) &= \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} & se \quad \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & se \quad \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pelo fato de que o material precisa de uma tensão mínima para começar a escoar, o domínio do escoamento será caracterizado por duas regiões distintas: *yielded zone* ou região de escoamento onde a tensão local aplicada é maior que a tensão mínima de escoamento, $\tau > \tau_0$ – em que de fato o material escoar – e uma região chamada *unyielded zone* ou *região rígida* em que a tensão ali aplicada é menor que a tensão de escoamento mínima, $\tau < \tau_0$ – onde ali o material comporta-se como um corpo rígido. Entre essas duas regiões existe uma superfície de transição onde $\tau = \tau_0$ a chamada *yield surface* ou *superfície de escoamento*.

As equações constitutivas apresentadas pelo modelo de Herschel-Bulkley descrevem com muita precisão o comportamento de fluidos Não-Newtonianos porém o modelo é de difícil implementação computacional por ser um modelo descrito por duas equações para a tensão e duas equações para a viscosidade aparente e por não serem equações suaves. Papanastasiou (1987) propôs uma modificação na Eq 2.14 introduzindo um parâmetro regularizador m que controla o crescimento exponencial da tensão.

$$\tau = \tau_0 [1 - \exp(-m|\dot{\gamma}|)] + K \dot{\gamma}^n \quad (2.17)$$

onde o parâmetro m tem dimensões de tempo. Computacionalmente, os modelo regularizado de Papanastasiou é de simples implementação. No entanto, eles não podem prever uma *yield surface* bem definida ($\tau = \tau_0$). O material *unyielded* já não é um corpo rígido mas um fluido com alta viscosidade que aproxima o comportamento viscoplastico ideal. Através da regularização da equação constitutiva da tensão, pode-se agora definir a equação da viscosidade aparente regularizada:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-m|\dot{\gamma}|)] + K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.18)$$

Neste trabalho será utilizada a função regularizadora proposta por Papanastasiou [Papanastasiou, 1987], na forma de uma função de viscosidade contínua a qual é válida para a ampla faixa de tensões, de modo a superar as limitações impostas pelo caráter descontínuo do modelo clássico de Herschel-Bulkley.

3. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos consiste em uma aproximação numérica de equações diferenciais, baseado no conceito de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de graus de liberdade incógnitos e funções de aproximação selecionadas ao longo de todo o domínio do problema [ver, por exemplo, Reddy e Gartling, 1994]. Entre os métodos mais empregados está o método de Galerkin, onde este método foi aplicado a uma variada classe de problemas. Através de anos de estudos, onde aplicou-se este método para problemas de escoamento, observou-se o surgimento de oscilações espúrias sobre todo o domínio computacional, fazendo com que as aproximações de escoamentos divergissem. Como principais dificuldades do método de Galerkin para resolver as equações de conservação de massa e balanço de *momentum* pode-se citar: a necessidade de compatibilizar os sub-espacos de velocidade e pressão, satisfazendo, dessa maneira, a chamada condição de Babuška-Brezzi; instabilidade inerente a esquemas de discretizações centrais, através da formulação de Galerkin ou através de esquemas de diferenças finitas na aproximação de escoamentos advectivo dominantes [Brooks e Hughes, 1982; Patankar e Spalding, 1972; Patankar, 1980].

A fim de sanar estes problemas, desenvolveu-se métodos estabilizados, nos quais foi desenvolvido o método *streamline-upwind / Petrov-Galerkin* (SUPG). Dentre os métodos desenvolvidos a partir do método SUPG destaca-se, o chamado método Galerkin mínimos-quadrados (GLS), introduzido por Hughes et al., 1987 no contexto do problema de Stokes. Como contribuição, esta metodologia adicionou termos dependentes de malha ao método clássico de Galerkin de forma a aumentar a estabilidade da formulação original. Dada a sua grande flexibilidade, a metodologia GLS vem sendo aplicada a uma extensa gama de problemas de fluidos, como atestam os trabalhos de Franca e Frey, 1992; Franceschini e Frey, 2003; Zinani e Frey, 2005; Coronado et al., 2006; Labeur e Wells, 2007; Blasco, 2008; Zhu et al., 2008; Berrone e Marro, 2008; Carmo et al., 2008.

3.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Os problemas abordados são definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, sendo N o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com fronteira Γ poligonal,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_g \cup \Gamma_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h &= \emptyset, \quad \Gamma_g = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde Γ_g é a parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet (essenciais) e Γ_h a região na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais). Sobre o domínio fechado $\overline{\Omega}$ realiza-se uma partição C_h de elementos finitos, com domínio elementar Ω_K na forma:

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \bigcup_{k \in C_h} \overline{\Omega}_k \\ \Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} &= \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in C_h \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para os espaços polinomiais, adota-se a notação:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ um triângulo ou tetraedro,} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ um quadrilátero ou hexaedro} \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $m \geq 0$, sendo m o grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m (Ciarlet, 1978).

Sobre os espaços de funções, $L^2(\Omega)$ define o espaço de funções quadrado-integráveis sobre Ω , $L_0^2(\Omega)$ o espaço de funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre Ω , $H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω e $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω que se tornam zero em Γ_g [Rektorys, 1975].

3.2 FORMULACÃO FORTE

A formulação forte do problema é obtida da particularização das equações de conservação de massa (Eq. 2.4) e balanço de momentum (Eq. 2.5 e 2.6) para um fluido newtoniano generalizado escoando lentamente em regime laminar e permanente, junto com uma equação constitutiva para \mathbf{T} , onde se determina a viscosidade aparente (Eq. 2.16). Pode-se construir a formulação multi-campos para o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned} \rho(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} &= -\nabla p + \text{div } \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\tau} - 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u}) &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\ -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (3.4)$$

no qual ρ representa a massa específica do fluido, ∇p o vetor gradiente de pressão, \mathbf{u} o campo de velocidade admissível, \mathbf{D} o tensor taxa de deformação, \mathbf{g} a aceleração da gravidade, \mathbf{t}_h a força de superfície e o tensor tensão $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor desviador de tensão e a função viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$ dada pela equação de Herschel-Bulkley regularizada (Eq. 2.18)

3. O MÉTODO DE GALERKIN

O método de aproximações de elementos finitos de Galerkin consiste em aproximar os espaços de dimensão infinita, utilizados na formulação fraca do problema por subespaços de dimensão finita apropriados. Logo, sendo P , \mathbf{V} e \mathbf{W} os espaços funcionais dos campos de pressão, velocidade e tensão respectivamente, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} P^h &\subset P && \text{(isto é, se } p^h \in P^h, \text{ então } p^h \in P) \\ \mathbf{V}^h &\subset \mathbf{V} && \text{(isto é, se } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}) \\ \mathbf{W}^h &\subset \mathbf{W} && \text{(isto é, se } \boldsymbol{\tau}^h \in \mathbf{W}^h, \text{ então } \boldsymbol{\tau}^h \in \mathbf{W}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

A aproximação de elementos finitos das Eqs. 3.5, portanto, é construída sobre as definições dos subespaços usuais da dinâmica dos fluidos para a aproximação dos campo de velocidade (\mathbf{V}^h), pressão (P^h) e tensão (\mathbf{W}^h) (Ciarlet, 1976),

$$\begin{aligned} P^h &= \left\{ q \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p_{\Omega_k} \in R_m(\Omega_k), K \in \Omega^h \right\} \\ \mathbf{V}^h &= \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}_{\Omega_k} \in R_l(\Omega_k)^N, K \in \Omega^h \right\} \\ \mathbf{V}_g^h &= \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}_{\Omega_k}^K \in R_l(\Omega_k)^N, K \in \Omega^h, \mathbf{v} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma^h \right\} \\ \mathbf{W}^h &= \left\{ \mathbf{S} \in C^0(\Omega)^{N \times N}, S_{ij} = S_{ji}, i, j = 1, \dots, N \mid \mathbf{S}_{\Omega_k} \in R_K(\Omega_k)^{N \times N}, K \in \Omega^h \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde R_k , R_l denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau k e l [Ciarlet, 1978].

3.4 O MÉTODO MULTI-CAMPOS DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS

Através das definições dos subespaços de pressão, velocidade e tensão, Eq.3.6, é possível determinar uma formulação multi-campos de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS) para o problema definido pelas Eqs 3.4. como segue: Achar $(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{W}^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h$, tal que:

$$B(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{W}^h \times \mathbf{V}^h \times P^h \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned}
B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &= \frac{1}{2\eta(\dot{\gamma})} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u})^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \rho([\nabla \mathbf{u}^h] \mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\
&+ \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} (\rho[\nabla \mathbf{u}^h] \mathbf{u}^h + \nabla p^h - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}) \alpha(\operatorname{Re}_K) (\rho[\nabla \mathbf{v}^h] \mathbf{u}^h + \nabla q^h - \operatorname{div} \mathbf{S}^h) d\Omega \\
&+ 2\eta(\dot{\gamma})\beta \int_{\Omega_K} \left(\frac{1}{2\eta(\dot{\gamma})} \boldsymbol{\tau}^h + \mathbf{D}(\mathbf{u})^h \right) \left(\frac{1}{2\eta(\dot{\gamma})} \mathbf{S}^h - \mathbf{D}(\mathbf{v})^h \right) d\Omega + \epsilon \int_{\Omega_K} p^h q^h d\Omega
\end{aligned} \tag{3.8}$$

e,

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \\
&+ \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} \mathbf{f} \cdot (\alpha(\operatorname{Re}_K) (\rho[\nabla \mathbf{v}^h] \mathbf{u}^h - \nabla q^h + \operatorname{div} \mathbf{S})) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.9}$$

com $\epsilon \ll 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$ por sugestão de Behr et al. (1993). Os parâmetro de estabilidade $\boldsymbol{\zeta}$, avaliado em nível de elemento, é computado por:

$$\alpha(\operatorname{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(\operatorname{Re}_K) \tag{3.10}$$

$$\xi(\operatorname{Re}_K) = \begin{cases} \operatorname{Re}_K, & 0 \leq \operatorname{Re}_K < 1 \\ 1, & \operatorname{Re}_K \geq 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\operatorname{Re}_K = \frac{m_K |\mathbf{u}|_p h_K}{4\eta(\dot{\gamma})/\rho} \tag{3.12}$$

com $|\mathbf{u}|_p$ denotando a norma p do \mathfrak{R}^N e o parâmetro m_k proveniente da análise de erro da formulação GLS [ver Franca e Frey, 1992].

$$|\mathbf{u}|_p = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_i|^p \right]^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, N} |\mathbf{u}_i|, & p = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Comentários:

1. Fazendo ζ igual à zero na formulação GLS definida pelas Eqs.3.10-3.11, recupera-se a aproximação clássica de Galerkin.
2. A expressão usual do número de Reynolds de malha (Johnson, 1987) foi modificada com a inclusão do parâmetro m_k na Eq. 3.12, de modo a também considerar o grau de interpolação empregado. Com isto, as regiões advectivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $Re_k > 1$ e as difusivo-dominadas por $Re_k < 1$, independente do elemento considerado (Franca e Frey, 1992)

3.5 PROBLEMA MATRICIAL

As discretizações das Eq. 3.9-3.13 são obtidas a partir das expansões das aproximações de elementos finitos para τ^h , \mathbf{u}^h , p^h , \mathbf{S}^h , \mathbf{v}^h e q^h como uma combinação das suas respectivas funções de forma e graus de liberdade, assim, gerando um sistema residual de equações de rigidez não lineares.

As funções aproximação para τ^h , \mathbf{u}^h , p^h , \mathbf{S}^h , \mathbf{v}^h e q^h são dadas por expansões polinomiais:

$$\begin{aligned} S_{ij}^h(x) &= \sum_{\hat{A} \in \Omega^h} N_{\hat{A}}(x) S_{ij}^{\hat{A}} \\ v_i^h(x) &= \sum_{A \in \Omega^h} N_A(x) v_i^A \\ q^h(x) &= \sum_{\tilde{A} \in \Omega^h} N_{\tilde{A}}(x) q_{\tilde{A}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

e são substituídos na formulação GLS da Eqs 3.7-3.13. Nas Eq 3.16, $N_A(x)$, $N_{\hat{A}}(x)$, $N_{\tilde{A}}(x)$ são polinômios de A , \hat{A} e \tilde{A} , ponto nodal para velocidade, tensão-extra e pressão, respectivamente. As integrais no L^2 normais da formulação da Eq.3.7-3.13 são aproximadas via quadratura Gaussiana. O resultante sistema algébrico pode ser resumido como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^h) = 0 \quad (3.17)$$

onde \mathbf{U} é o vetor dos graus de liberdade nodais para as variáveis primais τ^h , \mathbf{u}^h e p^h de modo que $\mathbf{R}(\mathbf{U}^h)$ corresponde a expressão matricial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{U}^h) = & [(1+\beta)\mathbf{E}(\eta(\dot{\gamma})) + (1-\beta)\mathbf{H} + \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma}))]\boldsymbol{\tau}^h \\
& + [\mathbf{M} + \mathbf{N}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})) + \beta\mathbf{K} - (1+\beta)\mathbf{H}^T - \mathbf{G}^T]\mathbf{u}^h \\
& + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})) + \mathbf{P}]\mathbf{p}^h - [\mathbf{F} + \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma}))]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{H}^T]$ são as matrizes da ligação entre $\boldsymbol{\tau}^h$ e \mathbf{u}^h , $[\mathbf{E}]$ é a matrix dos termos $\boldsymbol{\tau}^h$, $[\mathbf{N}]$ é matrix dos termos advectivos, $[\mathbf{K}]$ é as matrizes dos termos difusivos, $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{G}^T]$ são as matrizes dos termos de pressão e continuidade, $[\mathbf{F}]$ é a matriz dos termos forças de campo na equação do movimento. As matrizes com subscripto α denota as matrizes dos termos GLS para a equação do movimento, $[\mathbf{M}]$ é a matrix dos termos δ e $[\mathbf{P}]$ é a matrix dos termos ε na Eq.3.18.

A fim de obter a solução dos sistemas algébricos representados pela Eq. 3.18, foi empregado o método quase-Newton. Este método requer uma estimativa inicial \mathbf{U}^k , $k=0$ e, a cada iteração, é resolvido o sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}_k^h)\Delta\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{R}(\mathbf{U}^h) \tag{3.19}$$

onde $\mathbf{R}(\mathbf{U}_k^h)$ é dado pela Eq. (3.18) e $\mathbf{J}(\mathbf{U}_k^h)$ definido por

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{U}_k^h) = & (1+\beta)\mathbf{E}(\eta(\dot{\gamma})) + (1-\beta)\mathbf{H} + \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})) + [\partial_{\mathbf{u}^h}(\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})))]\boldsymbol{\tau}^h \\
& + \mathbf{M} + \mathbf{N}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})) + \beta\mathbf{K} - (1+\beta)\mathbf{H}^T - \mathbf{G}^T + [\partial_{\mathbf{u}^h}(\mathbf{N}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})))]\mathbf{u}^h \\
& + \mathbf{G} + \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})) + \mathbf{P} + [\partial_{\mathbf{u}^h}(\mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})))]\mathbf{p}^h + \partial_{\mathbf{u}^h}(\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{u}^h, \eta(\dot{\gamma})))
\end{aligned} \tag{3.20}$$

a fim de encontrar o vetor incremental $\Delta\mathbf{U}^{k+1}$ e para computar

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \Delta\mathbf{U}^{k+1} \tag{3.21}$$

é assumido que a convergência é alcançada quando a norma de $\mathbf{R}(\mathbf{U}^k)$ é inferior a um valor de tolerância – nessa dissertação determinou-se 10^{-7} .

Comentário: Visando acelerar a convergência do método de quasi Newton, foi implementada uma estratégia de continuação atuando sobre o termo de aceleração convectiva da equação de movimento da formulação GLS. Como estimativa inicial, emprega-se campos nulos de velocidade e pressão [Franceschini e Frey, 2003].

3.6 ELEMENTO QUADRANGULAR BI-LINEAR

O elemento quadrangular bi-linear, identificado pelo símbolo Q1, tem seu domínio elementar global definido pela localização de seus quatro pontos nodais de coordenadas globais x_a^e , $a = 1, \dots, 4$ no plano \mathcal{R}^2 . Os pontos nodais locais são numerados no sentido anti-horário (Figura 3.1) e através de uma transformação linear, relaciona-se o elemento global com o elemento do ponto de vista local. O quadrilátero bi-unitário é chamado de Domínio Aparente e é representado pelas coordenadas locais $\xi = \{\xi, \eta\}$, nos quais ξ e η são os chamadas coordenadas naturais. As coordenados locais são relacionadas com as coordenadas do ponto, $x = \{x_1, x_2\}$, no domínio do elemento, Ω^e , por um mapeamento na forma

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{1a}^e \\ x_2(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{2a}^e \end{aligned} \quad (3.24)$$

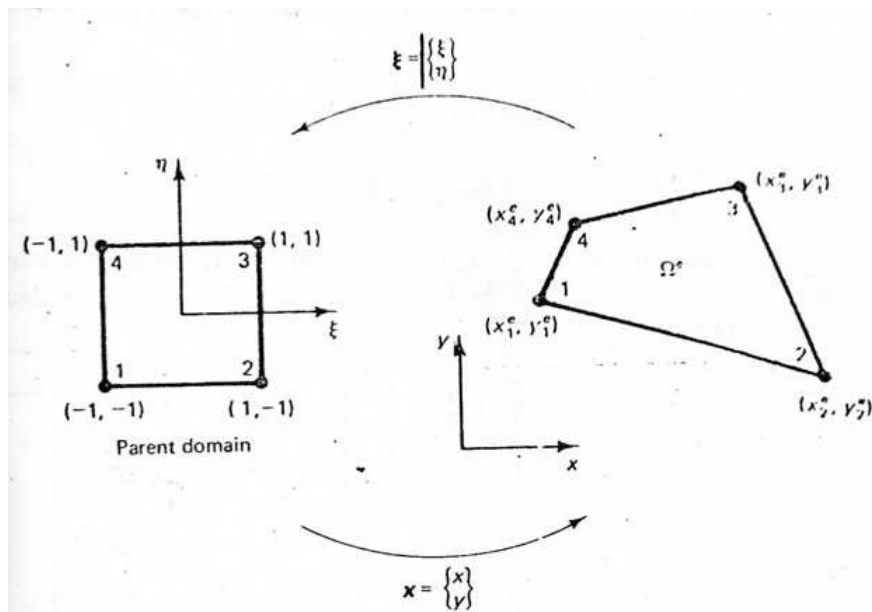


Figura 3.1 Domínio de elemento quadrilátero bilinear no domínio aparente e ordenação nodal local (Hughes, 1987).

onde de uma forma mais sucinta podemos descrever as expressões como:

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi) x_a^e \quad (3.25)$$

As funções de base locais $N_a(\xi)$, podem ser determinadas assumindo, inicialmente, as expansões

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta \\ x_2(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde α e β são parâmetros a serem determinados. O segundo passo é impor que as Eqs. 3.26 satisfaçam, respectivamente, as condições ,

$$\begin{aligned} x_1(\xi_a, \eta_a) &= x_{1a}^e \\ x_2(\xi_a, \eta_a) &= x_{2a}^e \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde η_a e ξ_a são definidos na Fig. 3.1.

Resolvendo-se os sistemas e para os coeficientes α e β , obtém-se a equação da função de forma, ou de aproximação, bi-linear local $N_a(\xi)$:

$$N_a(\xi) = N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad (3.30)$$

com os valores de ξ_a e η_a já definidos e as funções de forma visualizadas na Figura 4.7.

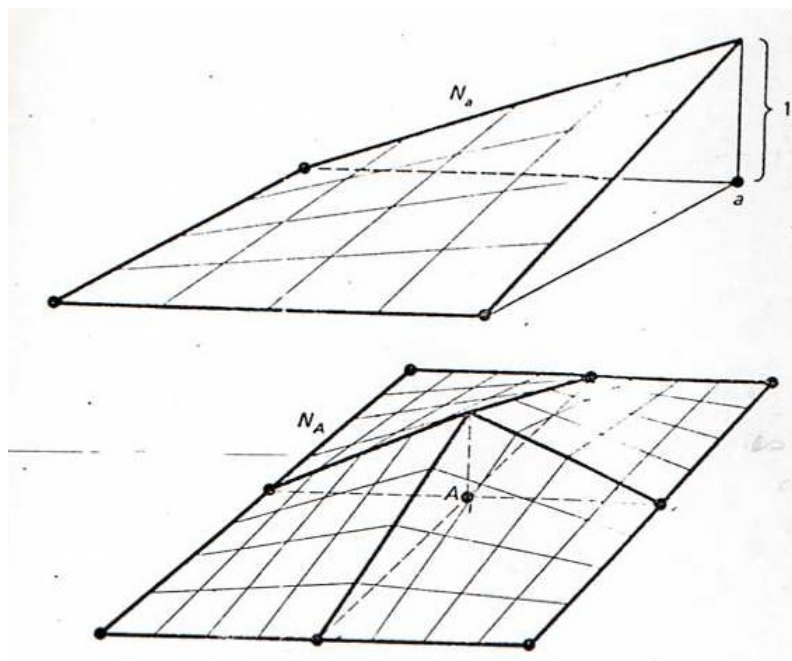


Figura 3.2 Funções de forma local (N_a) e global (N_A) do elemento quadrilátero bi-linear Q1 (Hughes, 1987).

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Objetivo desse capítulo é apresentar a aplicação do método de elementos finitos, com aproximações multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados (GLS), Eq. 3.7-3.13, para o problema definido pela Eq.3.4, que representa escoamento isocórico de um fluido Newtoniano generalizado (Eq. 2.13) empregando a função viscosidade de Herschel-Bulkley regularizada pela equação de Papanastasiou (Eq. 2.18), através de uma expansão planar abrupta. Todos os resultados computacionais foram obtidos utilizando o código de elementos finitos NNFEM, em desenvolvimento pelos pesquisadores do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC), do Departamento de Engenharia Mecânica, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

4.1 ESCOAMENTO DE FLUIDOS DE HERSCHEL-BULKLEY ATRAVÉS DE EXPANSÕES PLANARES ABRUPTAS

Nesta seção, serão realizadas aproximações GLS (Eq. 3.7-3.13) de escoamentos de fluido de Herschel-Bulkley regularizado pela equação de Papanastasiou (Eq. 2.12 e 2.13) através de expansões planares abruptas de razão de aspecto 1:4 (Figura 4.1) mostrando a variação na pressão e a variação na dinâmica do escoamento ao longo do duto com relação à influência do número de Herschel-Bulkley e índice de comportamento *power-law* em uma formulação três campos. As razões de aspecto do escoamento são definidas pela relação entre a altura de entrada do canal de menor, L_c , e a medida da altura do canal de maior, L_H . Para garantir que o escoamento já esteja hidrodinamicamente desenvolvido, tanto no canal menor, quanto no canal maior, foram empregadas as seguintes relações de comprimento, $L_e/L_c=30$ e $L_s/L_H=45$, onde L_e e L_s representam respectivamente os comprimentos do canal menor e maior.

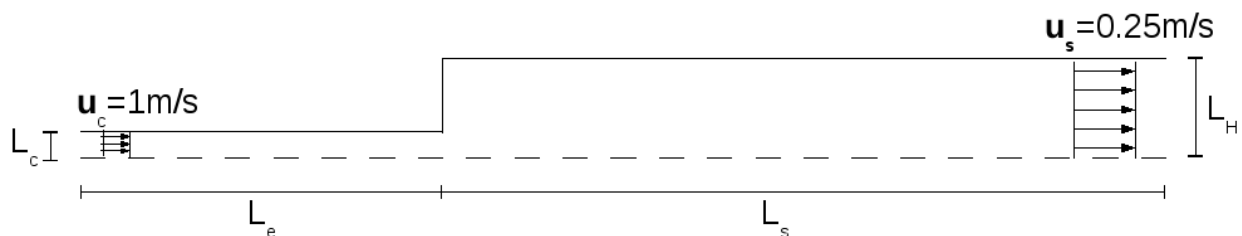


Figura 4.1 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - descrição do problema.

Um dos passos mais importantes para se obter resultados confiáveis é a determinação de uma malha suficientemente refinada, que não influencie nos resultados obtidos. A contraponto, uma malha muito refinada nos custa muito esforço computacional e tempo. Visando encontrar

um ponto ótimo entre essas duas considerações, foi feito um teste para independência de malha. Para este teste confeccionou-se três malhas com números de elementos variados – com níveis de refinamento diferentes – a fim de determinar qual delas se adequaria melhor ao problema proposto. Como critério de escolha, determinou-se o coeficiente de Euler, Eq. 4.1, na linha de simetria e calculou-se o erro entre as malhas, onde se determinou que os resultados não dependiam mais do quanto a malha estaria refinada quando o erro, $\varepsilon < 1\%$. O coeficiente de Euler é definido como:

$$C_p = \frac{\Delta p}{\rho u_c^2 / 2} \quad (4.1)$$

onde a diferença de pressão é dada como $\Delta p = p - p_c$ e p_c é a pressão característica calculada no ponto mais ajusante da expansão. A Figura 4.2 mostra os coeficientes de Euler na linha de simetria para cada malha testada.

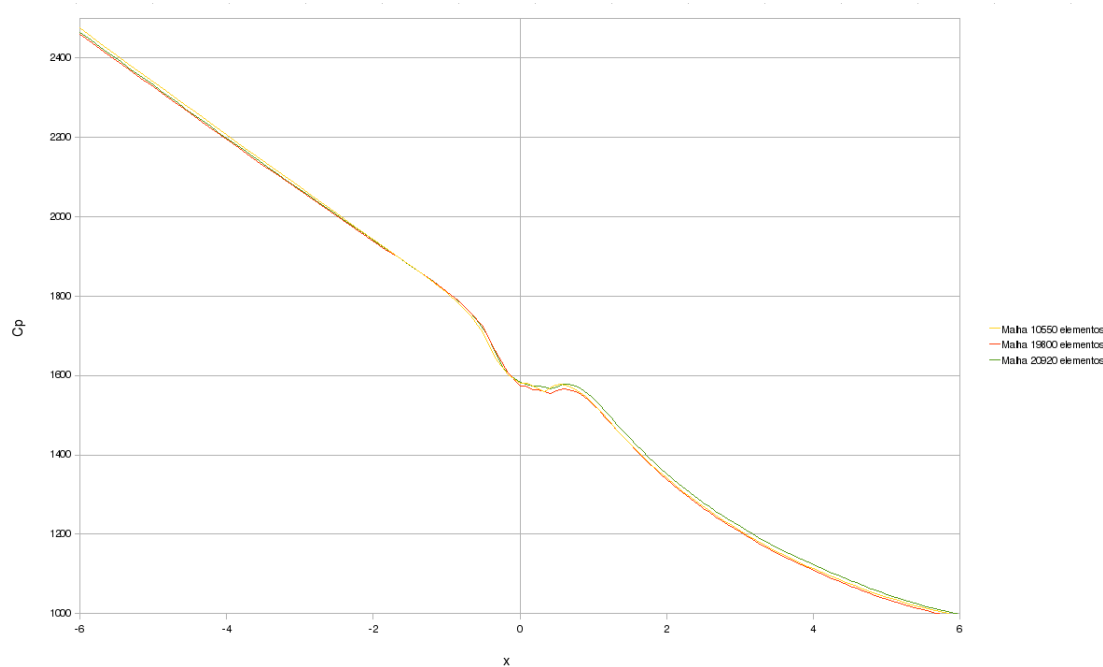


Figura 4.2 Escoamento através de uma expansão planar 1:4: teste de independência de malha.

Para o cálculo do erro, chamou-se de ε_1 o erro entre a malha de 10550 elemento e a malha de 19800 elementos e ε_2 o erro entre a malha de 19800 elementos e a de 20920 elementos. Os resultados para os erros estão demonstrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Erro calculado entre malhas

Pontos	ϵ_1	ϵ_2
-6	0.59%	0.21%
-5	0.56%	0.18%
-4	0.52%	0.15%
-3	0.43%	0.13%
-2	0.22%	0.08%
-1	0.22%	0.00%
0	0.44%	0.58%
1	0.07%	0.98%
2	0.26%	1.09%
3	0.37%	1.19%
4	0.40%	1.27%
5	0.45%	1.16%
6	0.53%	0.93%

Com a observação dos erros calculados conclui-se que as três malhas estão aptas, pois os erros entre elas estão na ordem de grandeza de 1%, que foi o critério estipulado. Nesta dissertação, optou-se pela malha de 19800 elementos Q1/Q1/Q1 por ser uma malha intermediária entre as confeccionadas, mas sem deixar de ressaltar que qualquer uma das malhas não afetariam no resultado, ou seja, os resultados estariam independentes da malha. A Figura 4.3 apresenta a malha utilizada para as simulações, onde foi refinada área da expansão para se obter resultados mais precisos para zonas de estagnação e formação de vórtices.

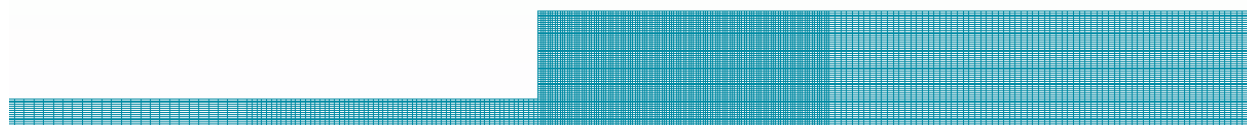


Figura 4.3 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 – malha 19800 elementos Q1/Q1/Q1 e 20281 pontos nodais

Como condições de contorno para a velocidade, nas paredes do duto maior e menor da expansão, são especificadas condições de impermeabilidade e não deslizamento, na linha de centro é imposta condição de simetria para o campo de velocidade ($\partial_{x_2} u_1 = u_2 = 0$) e, na entrada e na saída do duto são prescritos perfis de velocidades próximos a um perfil de um fluido viscoplástico desenvolvido – com o perfil de saída respeitando a conservação de massa do escoamento. Os perfis de velocidade impostos na entrada e na saída do duto são os chamados

perfil *flat*, onde todos pontos nodais na entrada possuem velocidade média $u_c=1\text{m/s}$ e na saída $u_s=0,25\text{ m/s}$. Também foi imposta uma condição de simetria, determinando $u_2 = 0\text{m/s}$ e $\tau_{xy} = 0\text{Pa}$.

Definindo o número de Herschel-Bulkley como:

$$HB = \frac{\tau_0}{K \left(\frac{u_c}{L_c} \right)^n} \quad (4.2)$$

onde τ_0 representa a tensão limite de cisalhamento do material, L_c a altura de entrada da expansão, u_c a velocidade média de entrada, n consiste no expoente *power-law* e K o índice de consistência.

Com a definição do número de Herschel-Bulkley, que compara a tensão de cisalhamento mínima para que ocorra escoamento com a tensão viscoplástica descrita pela lei de *power-law*, observa-se que, à medida que se aumenta o número de Herschel-Bulkley, o efeito viscoplástico se torna mais drástico, aumentando o tamanho das zonas rígidas, região na qual a tensão limite de escoamento é maior que a tensão de cisalhamento local, $\tau < \tau_0$. Isto ocorre porque, mantendo todos os outros parâmetros reológicos constantes, o aumento de HB torna também maior a tensão de cisalhamento mínima, τ_0 , fazendo então que também aumente as chamadas zonas rígidas nos cantos da expansão e um *plug flow* no centro da expansão. Isso também implica que ali ocorreram taxas de deformações muito baixas, fazendo então que ocorra as *unyielded zones* ou também chamadas de zonas de movimento de corpo rígido.

Na Figura 4.4 são apresentadas as iso-regiões da aproximação GLS do campo de tensão de cisalhamento, para número de Re desprezível, parâmetro regularizador de Papanastasiou, $m=10^3$, índice de consistência, $K=1\text{ Pa.s}^n$, coeficiente *power-law*, $n=0,37$ e número de Herschel-Bulkley variando de $HB=0,1$ a 100. Pelos motivos citados acima, pode-se observar que para $HB=0,1$ (Fig. 4.4(a)), a zona onde ocorre escoamento, *yielded zone* (zona branca na Fig. 4.4) ocupa quase a totalidade do domínio a exceção das pequenas zonas estagnadas junto as quinas da expansão e a zona de *plug flow* na região ao longo do seu eixo central da expansão planar (zonas pretas na Fig 4.4). Com um aumento do número de HB para $HB=10$, pode-se observar o aumento das *unyielded zones* em todo o domínio, tanto no *plug flow* na zona central a jusante da expansão quanto a montante, como também o aumento das zonas rígidas nos corners da expansão. Esse padrão mantêm-se para todo o aumento do número de HB, o que era esperado, porém com um aumento das zonas rígidas com menos intensidade a partir de $HB=20$ - conforme se observa nas Figuras 4.4(d)-4.4(f) para $HB=20-100$, respectivamente. A observação destes resultados é extremamente importante, pois de um ponto de vista prático, o aumento das zonas

rígidas influência em toda a dinâmica do escoamento implicando assim com que ocorram alguns fenômenos como a queda mais drástica da pressão estática devido ao aumento da perda de carga distribuída, o que será observado mais adiante.

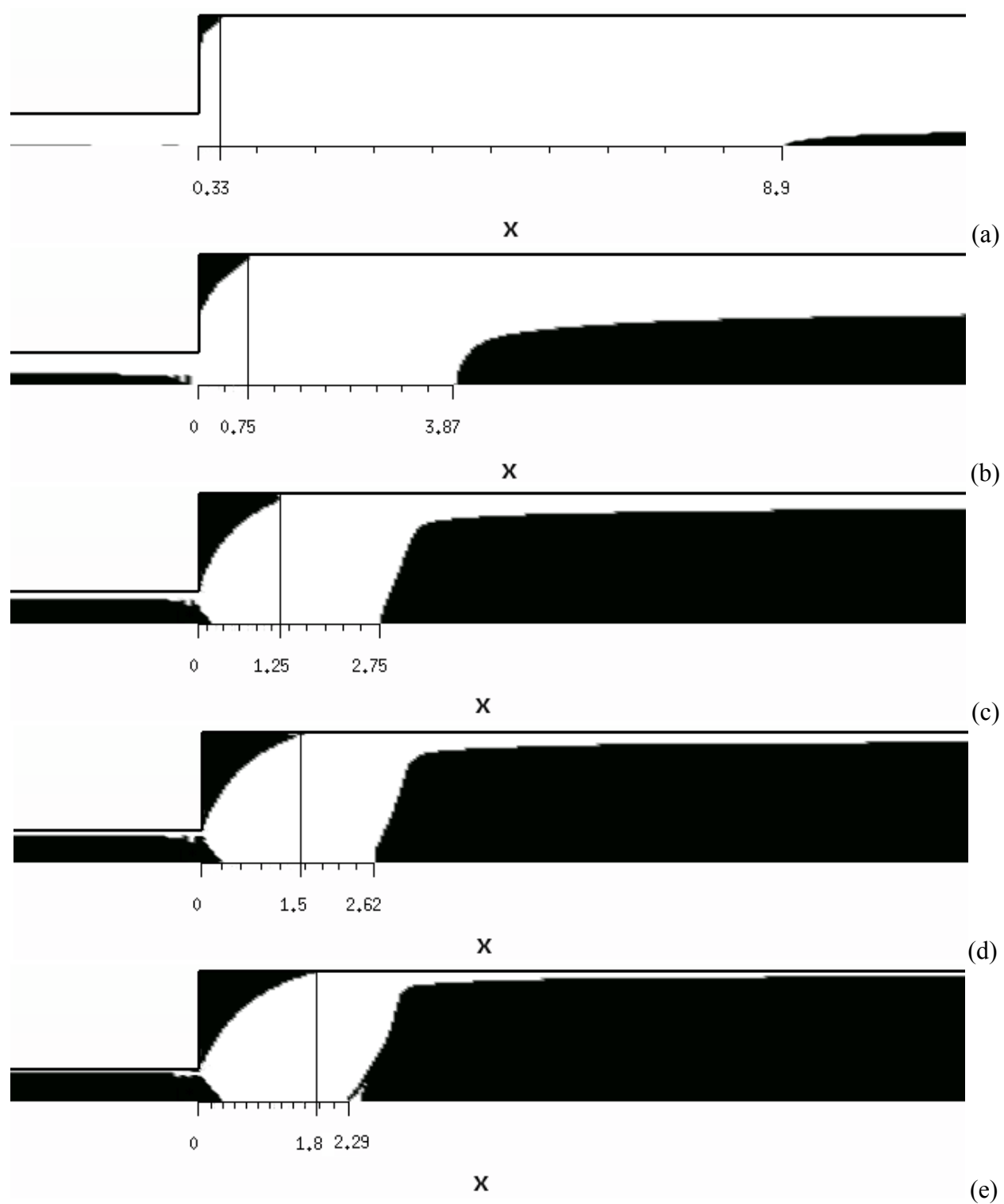
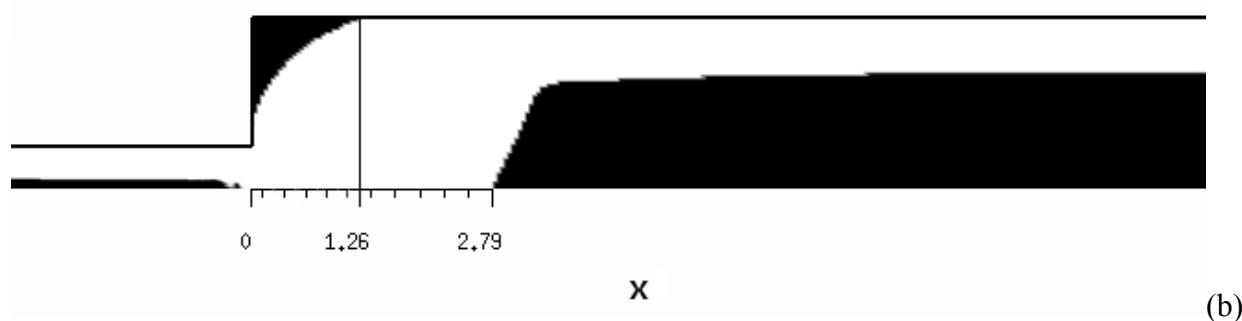
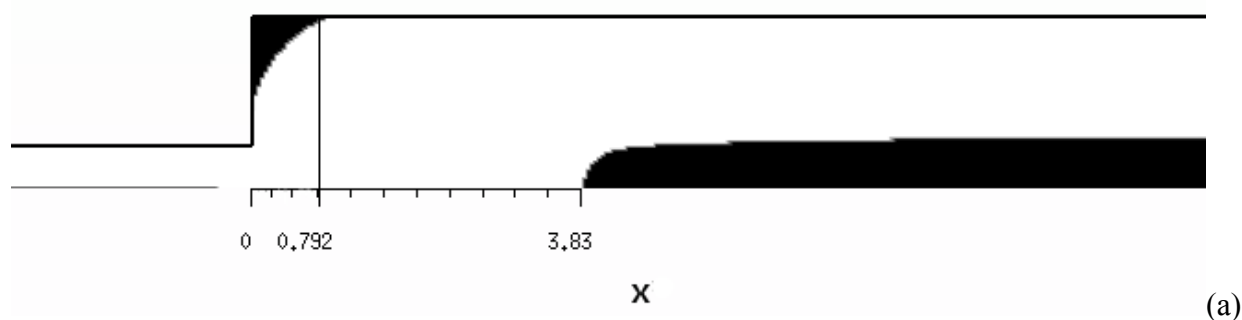




Figura 4.4 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 – iso-regiões de τ , para $n=0,37$, $K=1$ Pa.sⁿ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.

São demonstrados agora na Figura 4.5 os resultados para as iso-regiões de tensão para um índice de *power-law*, $n=1$, índice de consistência, $K=1$ Pa.sⁿ, pãmetro regularizador de Papanastasiou, $m=1000$ e para números de HB variando entre 0,1 e 100. Vimos que, mesmo agora com o material tendo sua viscosidade variando linearmente com a taxa de deformação, o comportamento das zonas rígidas é o mesmo que para o material que faz *shear-thinning*. Percebe-se um tamanho ligeiramente maior das zonas rígidas em relação aos resultados obtidos para o material com $n=0,37$. Pode-se perceber que, como nos resultados anteriores, um grande crescimento nas *unyielded zones* para HB entre 0,1 e 20 (Figuras 4.5(a)-(d)), e um crescimento muito discreto para HB maiores.



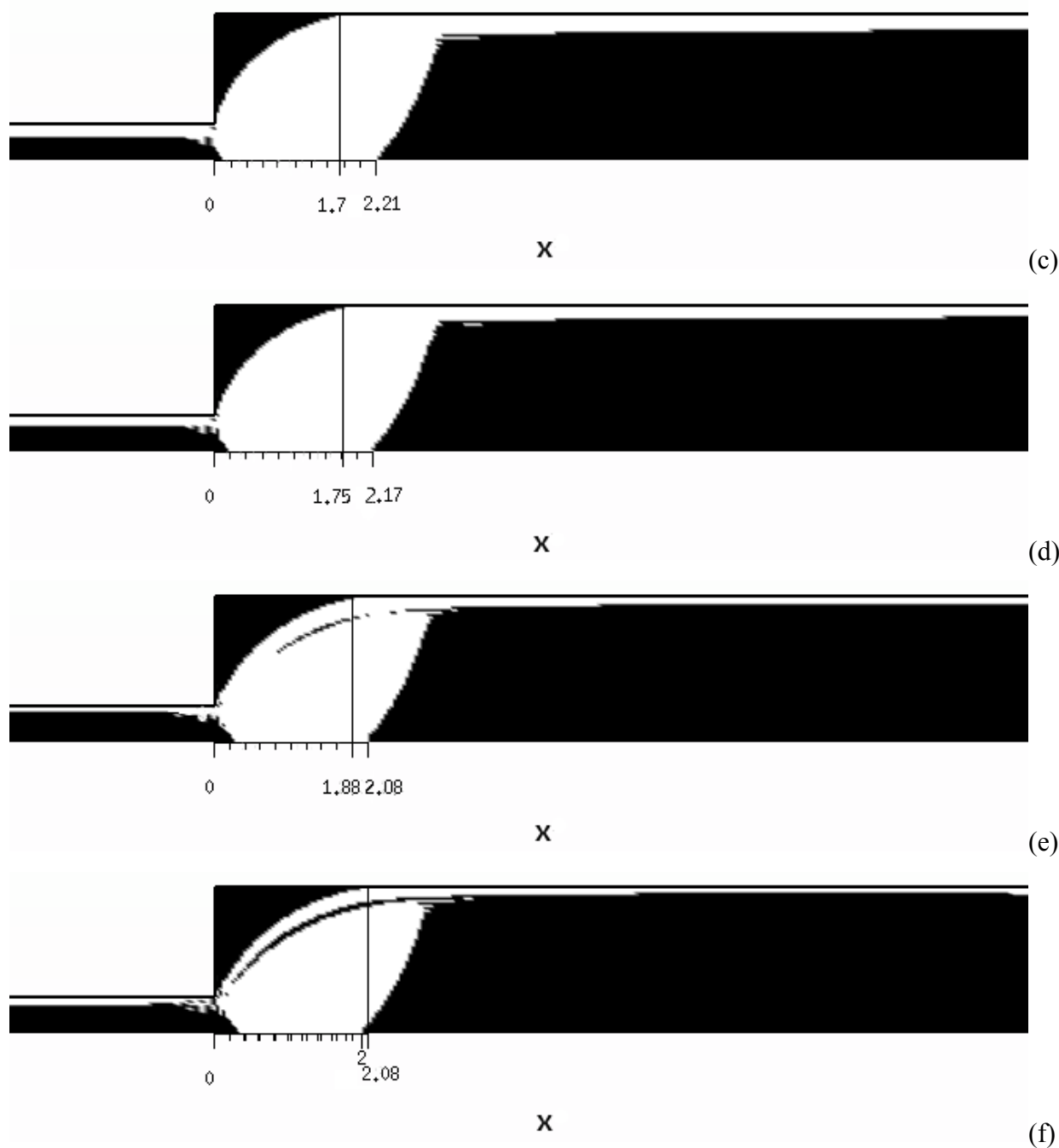
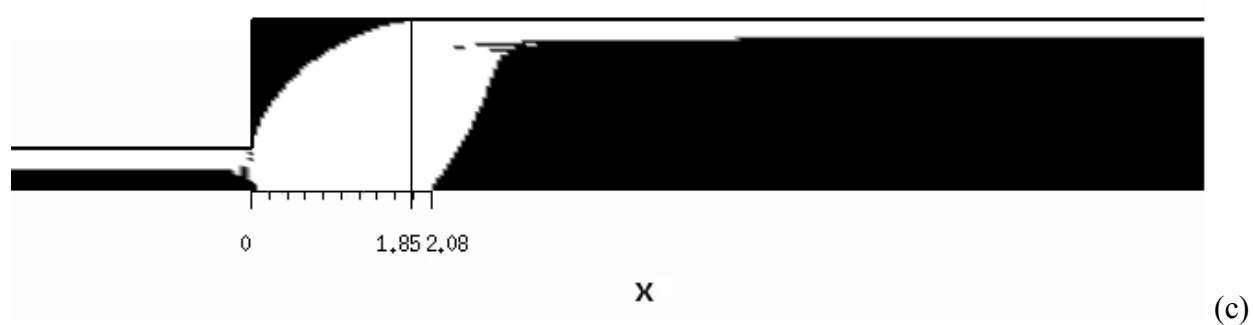
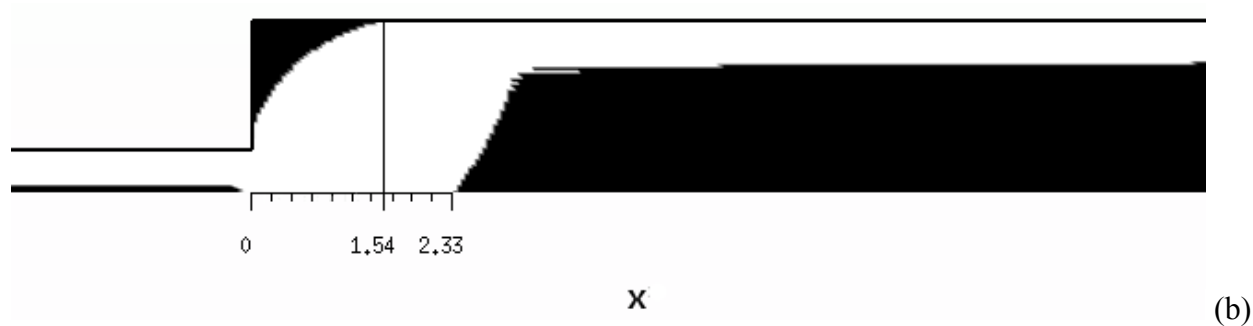
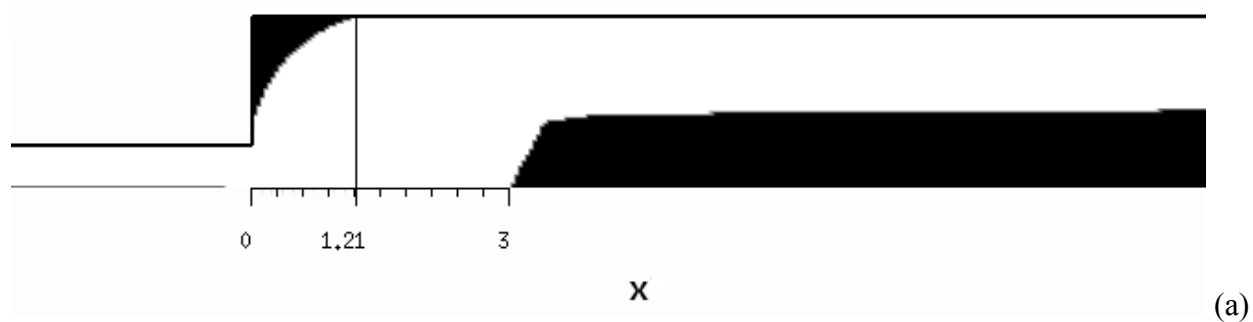


Figura 4.5 escoamento através de uma expansão planar 1:4 – iso-regiões de τ , para $n=1$, $K=1$ Pa.sⁿ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.

Os resultados apresentados a seguir valem para um material viscoplástico que após sua tensão de escoamento mínima escoe como um fluido *shear-thickening* e com $n=1,5$, um índice de consistência, $K=1$ Pa.sⁿ, parâmetro regularizador de Papanastasiou, $m=1000$ e para números de HB variando entre 0,1 e 100. Aqui, as zonas rígidas aumentaram em comparação com os resultados obtidos para os índices de *power-law* de 0,37 e 1, o que nos faz perceber que as regiões rígidas aumentam com o aumento dele. Essa conclusão será discutida posteriormente, quando for avaliada a influência do índice de *power-law*. O comportamento em relação aos

números de HB continuam como nos resultados obtidos anteriormente e demonstradas na Figura 4.6.



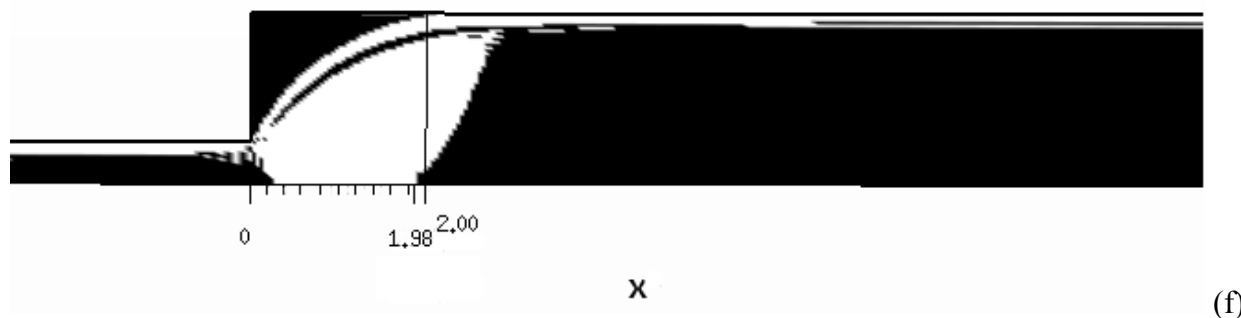


Figura 4.6 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 – iso-regiões de τ , para $n=1,5$, $K=1$ Pa.sⁿ e $m=10^3$: (a) HB=0,1, (b) HB=1, (c) HB=10, (d) HB=20, (e) HB=50 e (f) HB=100.

Para melhor observação do fenômeno que ocorre com o crescimento das *unyielded zones*, estudou-se esse fenômeno determinando o tamanho destas zonas a partir do plano de expansão, onde se chamou de L1 o tamanho da zona morta a jusante da expansão e L2 a medida entre o início do plano de expansão e o início da zona de *plug flow*, conforme mostra a Figura 4.7. Para uma apresentação mais geral dos resultados, é apresentada a adimensionalização das variáveis L1 e L2 como:

$$L1^* = \frac{L1}{L_c} \quad e \quad L2^* = \frac{L2}{L_c} \quad (4.3)$$

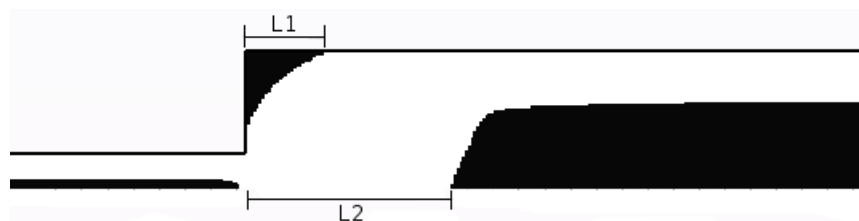


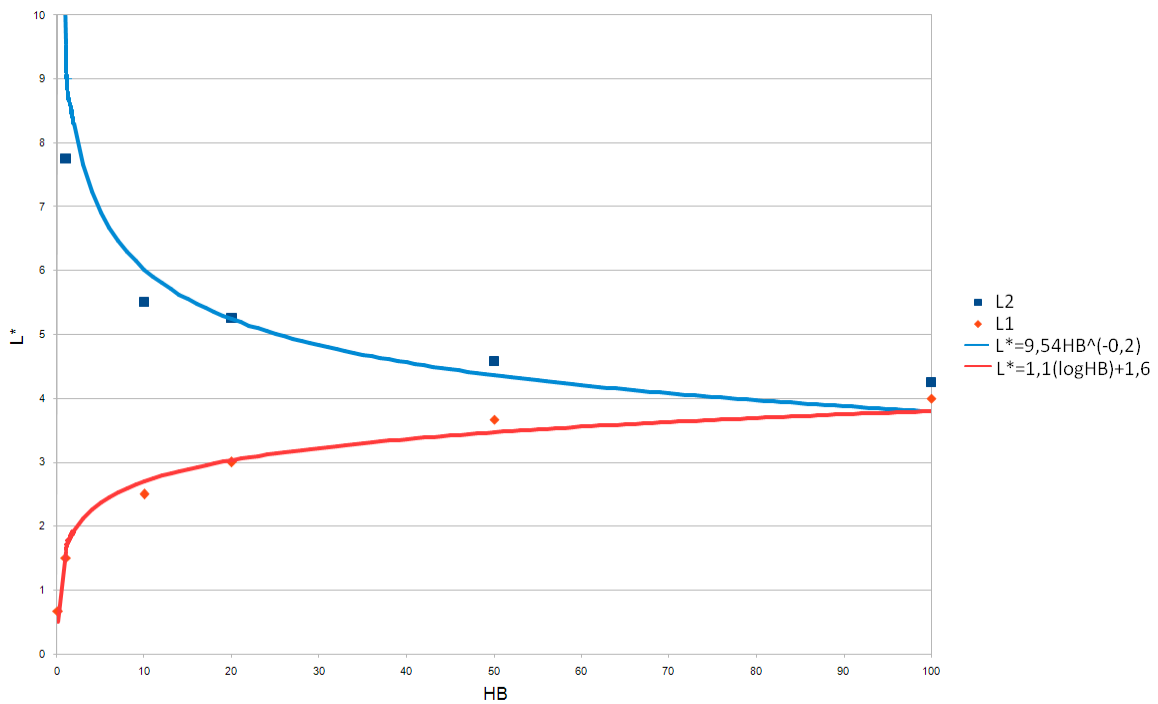
Figura 4.7 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 – medidas das zonas rígidas a jusante do ponto de expansão

Observou-se na Figura 4.8 (a) que a medida $L1^*$ aumentou com o aumento do número de HB, notando-se que para um número de HB mais baixo o aumento das zonas mortas é mais notável enquanto que, ao aumentar HB, a tendência de um aumento cada vez mais suave de $L1^*$, tornando-se quase constante. Para $L2^*$ pode-se ver uma situação semelhante, porém com uma diminuição em $L2^*$ com o aumento de HB. Foi plotado uma curva para visualização deste fenômeno e suas respectivas equações (Figura 4.8(a)), onde determinou-se uma curva de tendência de seu comportamento.

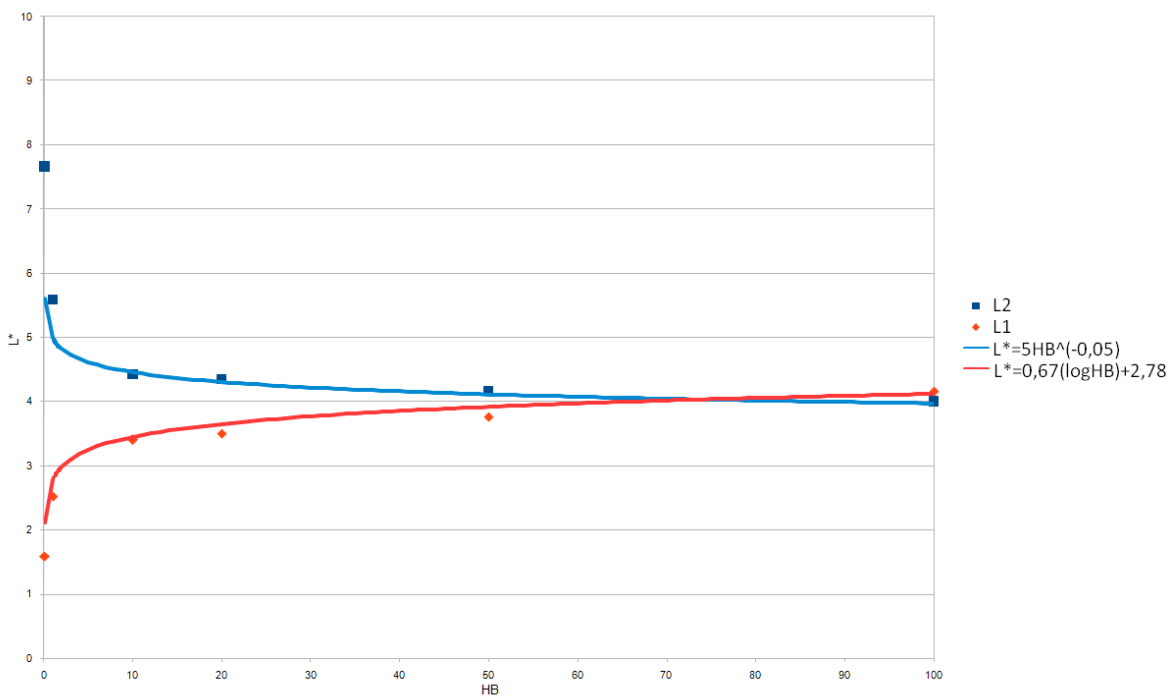
Na Figura 4.8 (b) serão apresentadas as curvas de comportamento para $n=1$, índice de consistência, $K=1$ Pa.sⁿ, e parâmetro de Papanastasiou, $m=10^3$. Aqui pode-se observar um

comportamento semelhante ao apresentado para $n=0,37$, onde ocorre um crescimento mais agudo das *unyielded zones* para números de HB entre 0,1 e 20 e um crescimento mais suave para HB superiores.

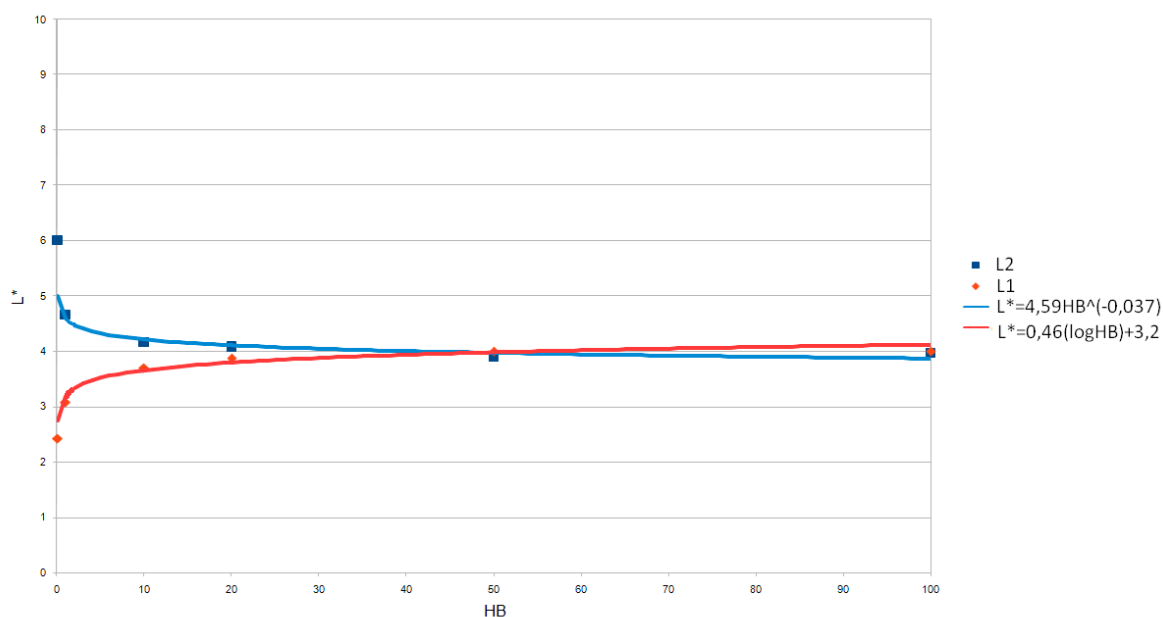
Para um caso de um fluido viscoplástico *shear-thickening*, com $n=1,5$, índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, e parâmetro de Papanastasiou, $m=10^3$ a curva de comportamento das zonas rígidas apresenta o mesmo aspecto que para os casos anteriores e pode ser vista na Figura 4.8 (c).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.8 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 – curva de comportamento das zonas rígidas a jusante do plano de expansão para: (a) $n=0,37$, (b) $n=1$ e (c) $n=1,5$.

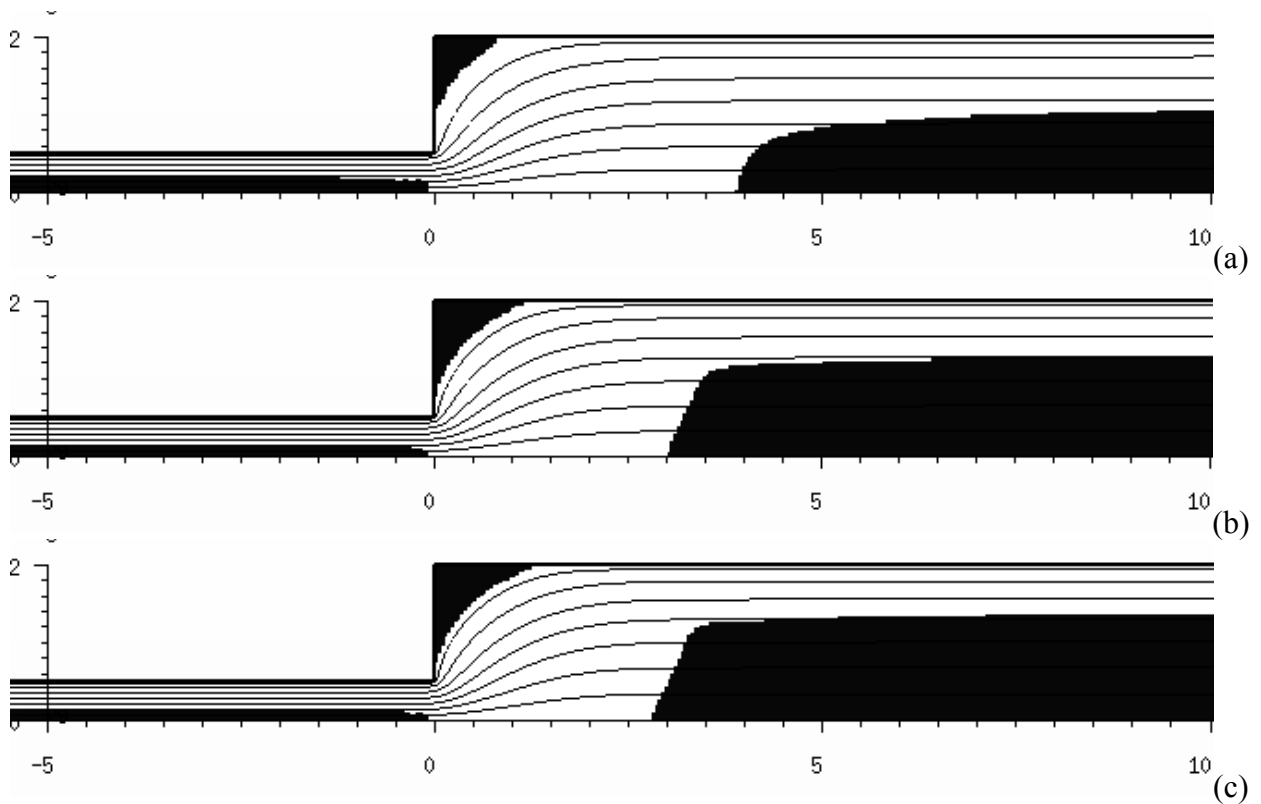
Após ter-se analisado a influência de HB no comportamento do material, é interessante agora estudar a influência da variação índice de *power-law*. Este parâmetro reológico é de extrema importância, pois controla o comportamento da viscosidade determinando a inclinação da curva da equação constitutiva da viscosidade aparente (Eq.3.6) passando por três casos possíveis: *shear-thinning*, newtoniano e *shear-thickening*. A fim de determinar essa influência, variou-se o índice de *power-law* entre 0,37 e 1,5, para um número de Herschel-Bulkley fixo, $HB=1$, índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, e um parâmetro estabilizador de Papanastasiou, $m=1000$ (Figura 4.9 (a)-(d)). Para $n=0,37$, o caso mais pseudoplástico simulado, já se visualiza a formação das zonas rígidas tanto no duto menor na entrada, no duto maior e nos cantos da expansão. Aumentando o índice de *power-law* para 0,8 percebe-se um significativo aumento do *plug flow* a jusante do plano de expansão e das zonas mortas nos cantos, o que não acontece no *plug flow* a montante do plano de expansão que diminui. No caso de um Plástico de Bingham, pode-se ainda observar o padrão descrito acima com aumento do *plug flow* a jusante, aumento das zonas mortas nos cantos e uma diminuição nos *plug flow* a montante do plano de expansão. Observando os resultados obtidos para um fluido que após sua tensão de escoamento mínima escoar com *shear-thickening*, para um $n=1,5$, o padrão continua o mesmo.

Para explicar este comportamento de inversão no crescimento das zonas rígidas deve-se olhar com mais atenção para a taxa de deformação local e suas consequências: no duto a montante do plano de expansão é onde ocorrem as velocidades mais altas - por consequência

natural as maiores taxas de deformação – fazendo com que ocorram as maiores tensões; para o duto a jusante do plano de expansão ocorreram menores velocidades e por consequência taxas de deformação pequenas. Analisando a equação constitutiva regularizada (Eq. 2.17) proposta por Papanastasiou pode-se observar dois termos distintos:

$$\tau = \tau_0 \varepsilon + \tau_{PL} \quad (4.4)$$

onde ε é o termo regularizador de Papanastasiou dado como $\varepsilon = 1 - \exp(-m|\dot{\gamma}|)$ e τ_{PL} é a tensão de *power-law* dada por $\tau_{PL} = K \dot{\gamma}^n$. Ao se imaginar taxas de deformação acima de 1, que já podem ser consideradas taxas de deformação altas para os casos estudados nessa dissertação, pode-se perceber que o termo τ_{PL} aumenta com o aumento de n , fazendo assim com que haja uma tendência a mais regiões com $\tau > \tau_0$. Para o caso em que ocorre $\dot{\gamma}$ pequenos, na ordem inferior a 1, tem-se uma inversão onde, para um aumento em n , o termo τ_{PL} diminui fazendo assim com que a tendência para o aparecimento das zonas rígidas também se inverta, assim com mais regiões com $\tau < \tau_0$.



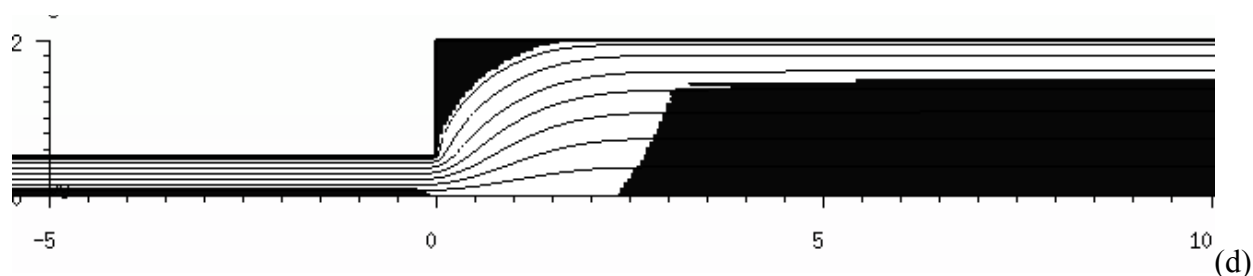
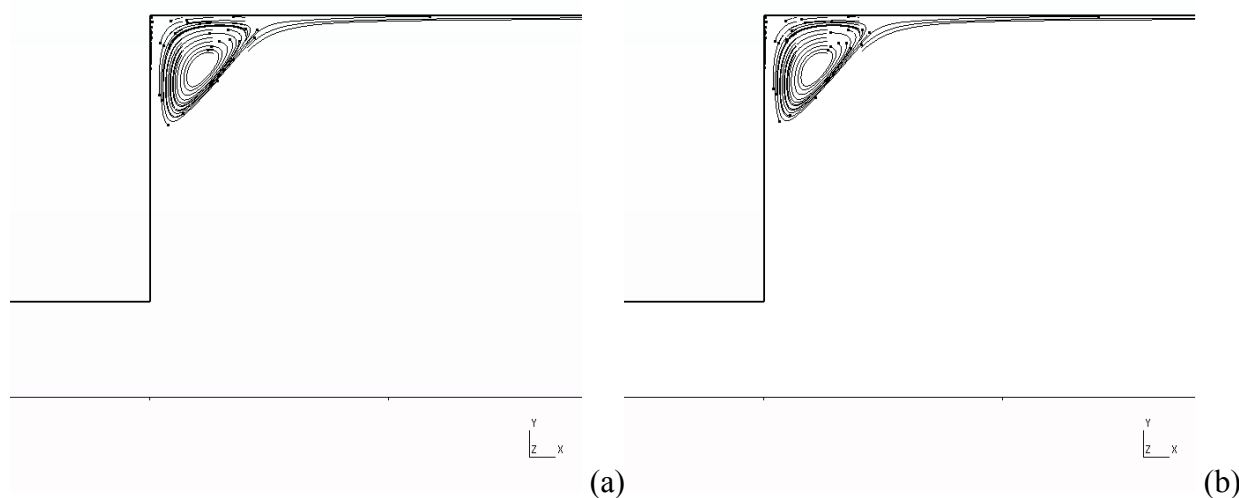


Figura 4.9 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - influências do índice *power-law*, para $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $HB=1$ e $m=10^3$: (a) $n=0,37$, (b) $n=0,8$, (c) $n=1$, (d) $n=1,5$.

Um estudo de grande importância ao trabalho foi o de determinar a influência do número de Herschel-Bulkley nos cantos da expansão. Esses resultados são mostrados nas Figura 4.10 para $n=0,8$, $m=10^3$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, número de Reynolds desprezível. Observa-se para $HB=0$, $HB=0,005$ e $HB=0,01$ a formação de vórtices nos cantos com uma diminuição na intensidade deles com crescimento de HB . Para o aumento de HB para $0,05$, formam-se quatro pequenas zonas rígidas, onde três encontram-se junto a parede e uma mais ao centro. Isso ocorre pelo fato de ali existir vórtices com pequenas velocidades mas o suficiente para que as tensões geradas sejam maior que a tensão de cisalhamento mínima ($\tau < \tau_0$). Aumentando o número de Herschel-Bulkley, fazendo ele agora igual a $0,1$, as zonas rígidas aumentam, mas ainda ocorrem velocidades que fazem com que ocorra um desmembramento dessa zona. Observando os resultados de uma simulação com $HB=0,1$, nota-se que agora a zona morta no canto da expansão está completamente formada onde a tendência é que aumente cada vez mais como já foi abordado anteriormente.



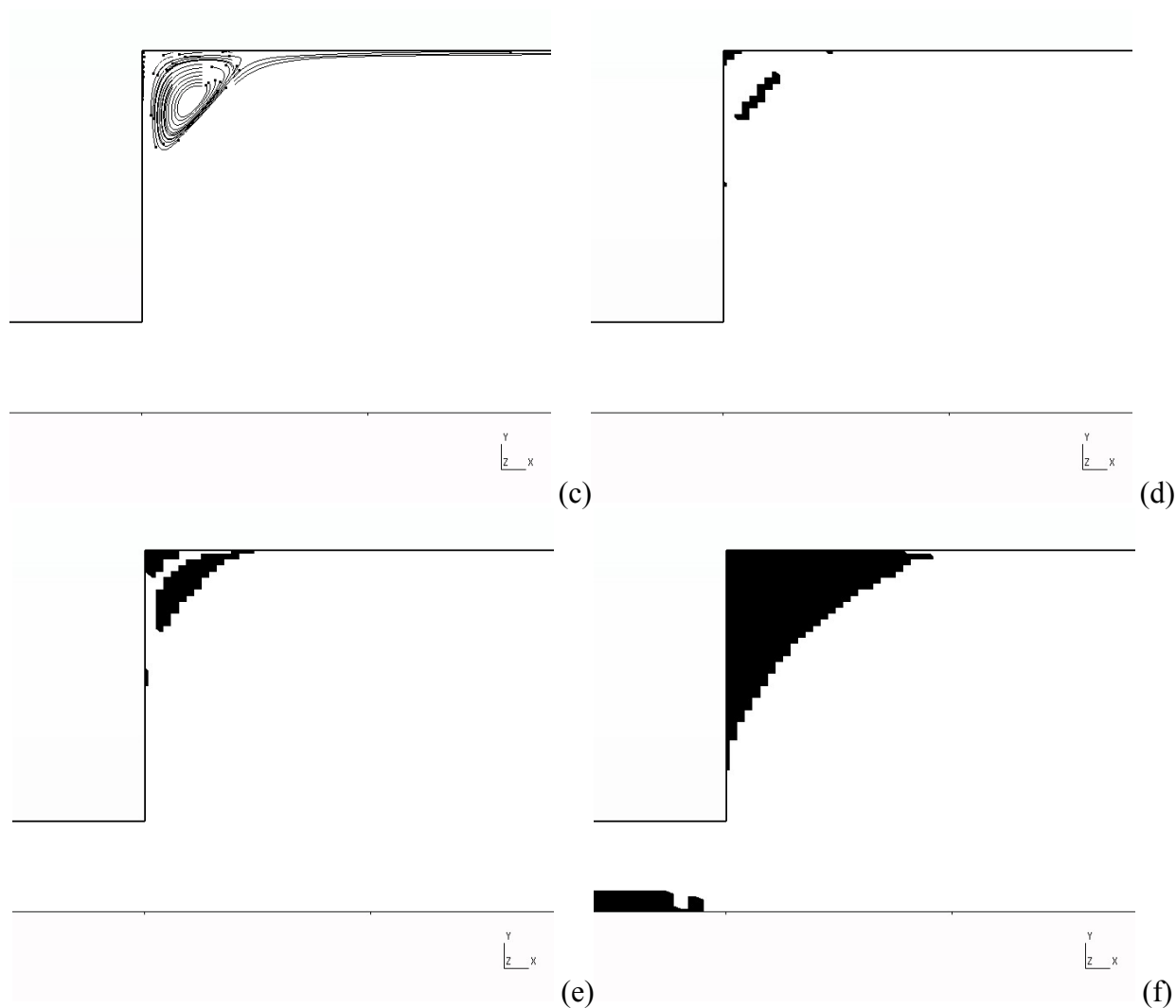
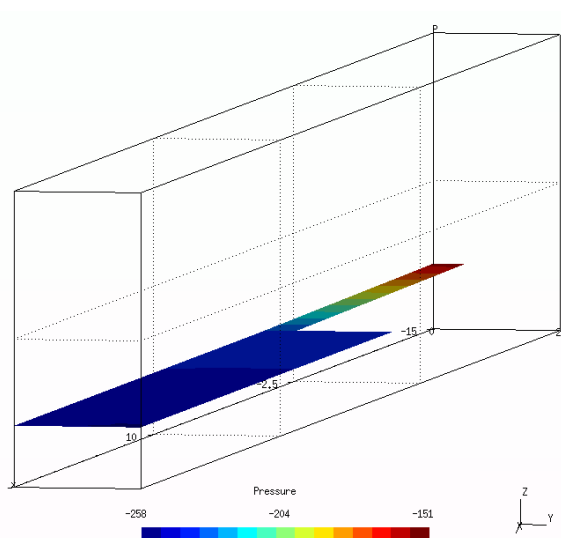


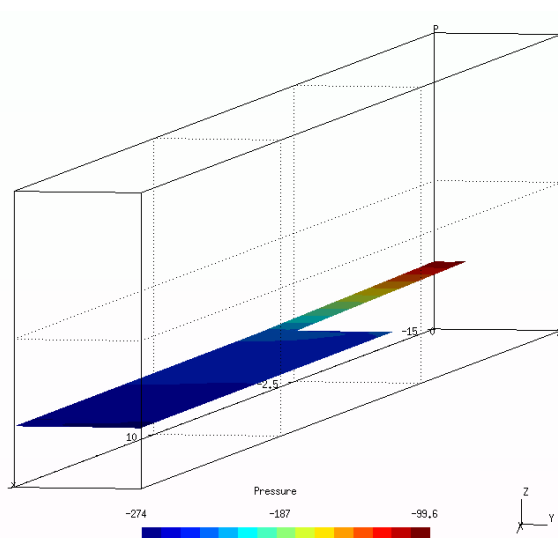
Figura 4.10 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - influência do número de HB na quina da expansão para $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $n=0,8$ e $m=10^3$: (a) $\text{HB}=0$, (b) $\text{HB}=0,005$, (c) $\text{HB}=0,01$, (d) $\text{HB}=0,05$, (e) $\text{HB}=0,1$ e (f) $\text{HB}=1$.

Na Figura 4.11 são apresentadas as iso-regiões do campo de pressão, para número de Reynolds desprezível, ou *creeping flow*; coeficiente *power-law*, $n=0,37$, índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e número de Herschel-Bulkley variando de $\text{HB}=0,1-100$, (Figs. 4.11(a)-4.11(f), respectivamente). Observando as figuras apresentadas abaixo podemos notar que ocorre uma queda de pressão mais brusca com o aumento do HB. Esse fenômeno ocorre devido ao crescimento das zonas rígidas, causando um perfil de velocidades com gradientes mais elevados e maiores taxas de cisalhamento, o que acarreta no aumento da perda de carga e uma diminuição na pressão estática. Pode-se notar que para $\text{HB}=0,1$ praticamente seguem-se os padrões de um escoamento plenamente desenvolvido, o que faz com que a diferença de pressão, Δp , ser a menor entre os casos estudados. Com o aumento de HB para 1, a região de *plug flow* também cresce, tanto a montante quanto a jusante da expansão, fazendo que as perdas de carga aumentem e

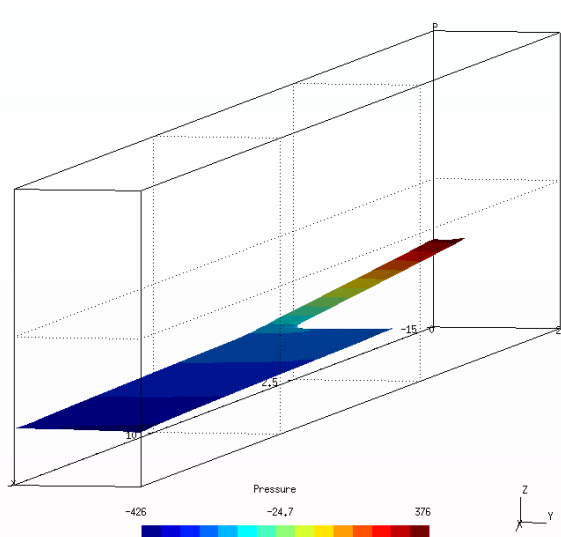
como consequência também seu Δp torna-se mais elevado. Esse quadro cada vez se torna mais crítico com um aumento do *plug flow* e das zonas mortas onde podemos notar que para o HB=100 acontece a maior diferença de pressão. Visto o comportamento apresentado pelo material, pode-se dizer que esse fenômeno é altamente indesejável no ponto de vista prático pois, ao bombear esse material, será preciso vencer uma grande diferença de pressão ao longo da tubulação, tendo como consequência um maior gasto de energia.



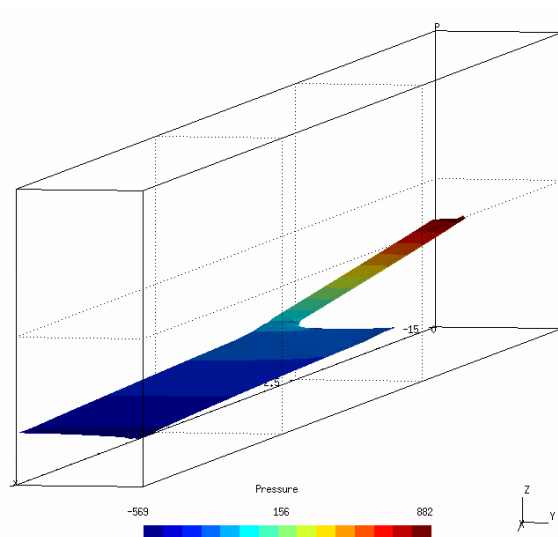
(a)



(b)



(c)



(d)

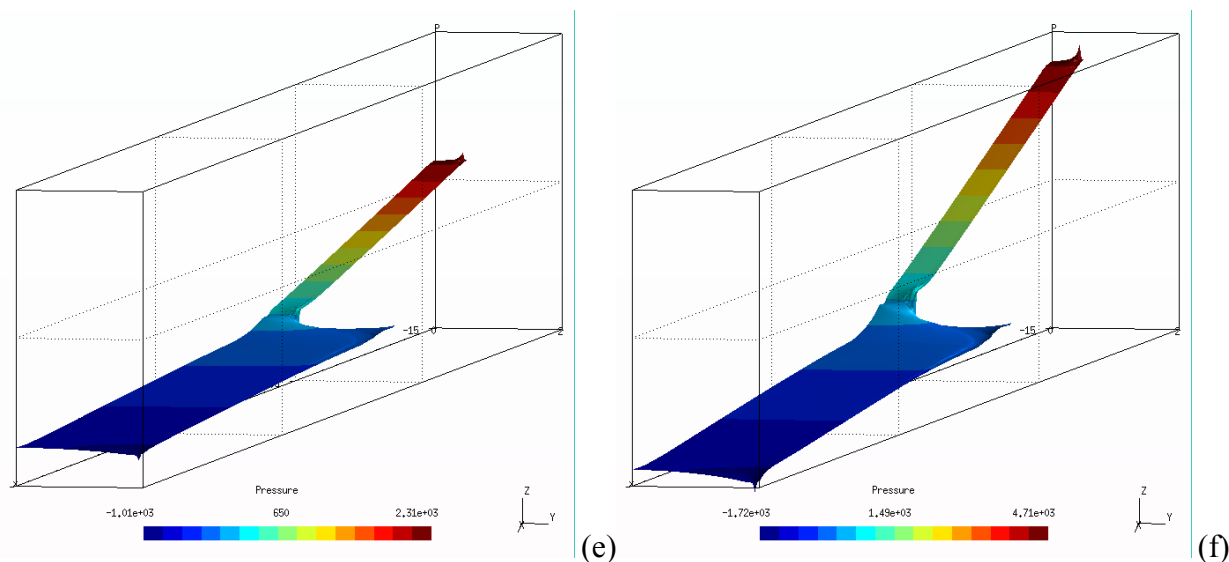
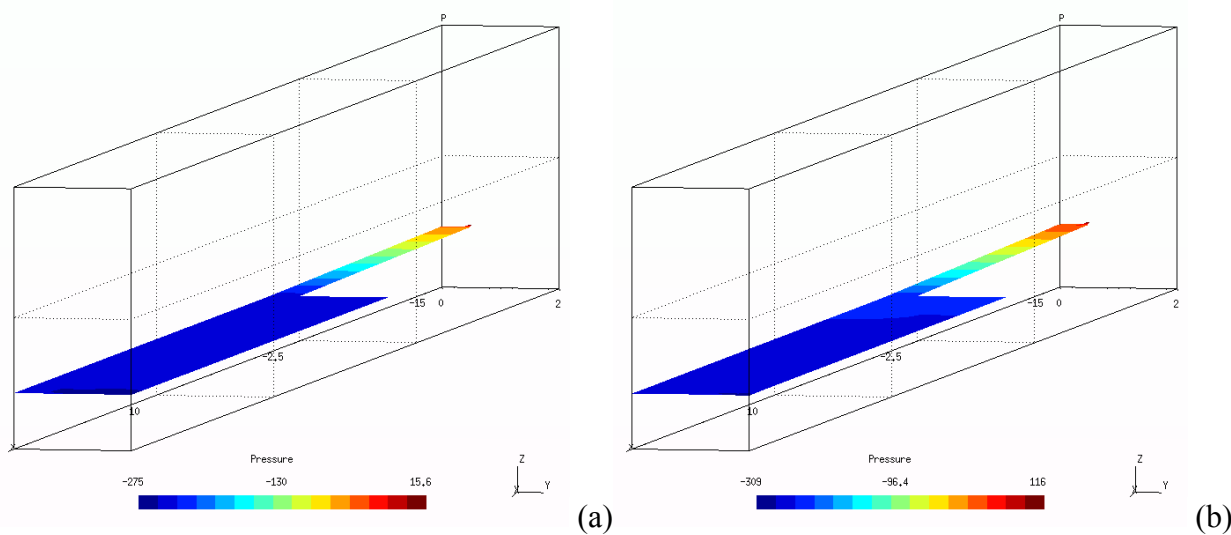


Figura 4.11 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Iso-regiões do campo de pressão, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $\text{Re}=0$, $n=0,37$ e $m=10^3$: (a) $\text{HB}=0,1$, (b) $\text{HB}=1$, (c) $\text{HB}=10$, (d) $\text{HB}=20$, (e) $\text{HB}=50$ e (f) $\text{HB}=100$.

Observando os resultados para $n=1$, $\text{Re}=0$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $m=10^3$ e $\text{HB}=0,1-100$ (Figura 4.12), podemos concluir que qualitativamente o comportamento se mostra o mesmo que para $n=0,37$, mas com Δp maiores em todos os HB. Como já comentado, o crescimento de n implica em um aumento nas zonas rígidas e por consequência o aumento na diferença de pressão, que cresce com o aumento do número de HB.



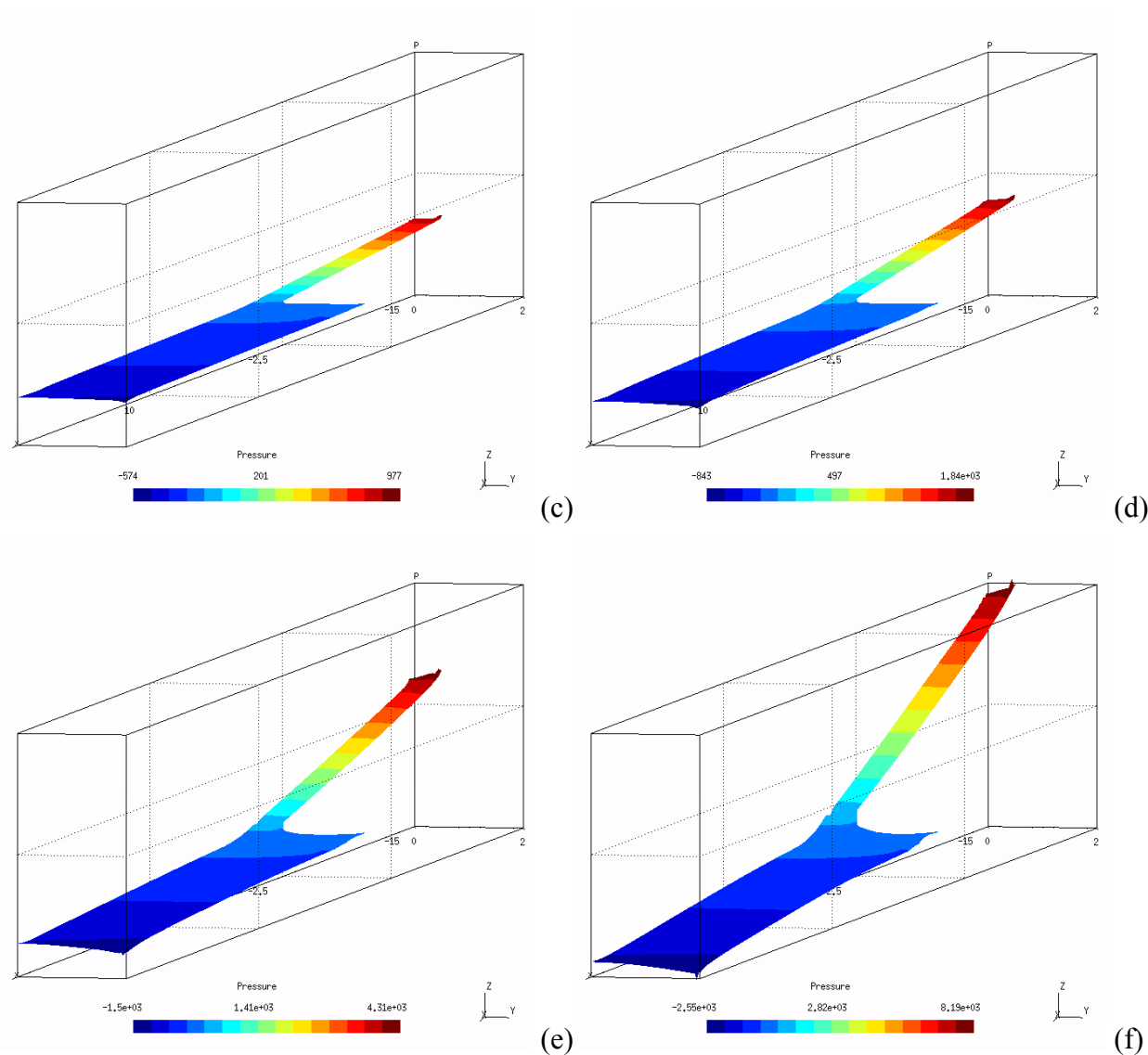


Figura 4.12 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Iso-regiões do campo de pressão, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $\text{Re}=0$, $n=1$ e $m=10^3$: (a) $\text{HB}=0,1$, (b) $\text{HB}=1$, (c) $\text{HB}=10$, (d) $\text{HB}=20$, (e) $\text{HB}=50$ e (f) $\text{HB}=100$.

O padrão já descrito mantém-se também para um aumento do índice de *power-law* para $n=1,5$, com um aumento de Δp para um aumento do número de Herschel-Bulkley e um aumento do gradiente de pressão em relação aos índices de *power-law* mais baixos. Os resultados para $n=1,5$, índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e número de Herschel-Bulkley variando de $\text{HB}=0,1-100$ para um escoamento *creeping flow* estão demonstrados na Figura.4.13 abaixo.

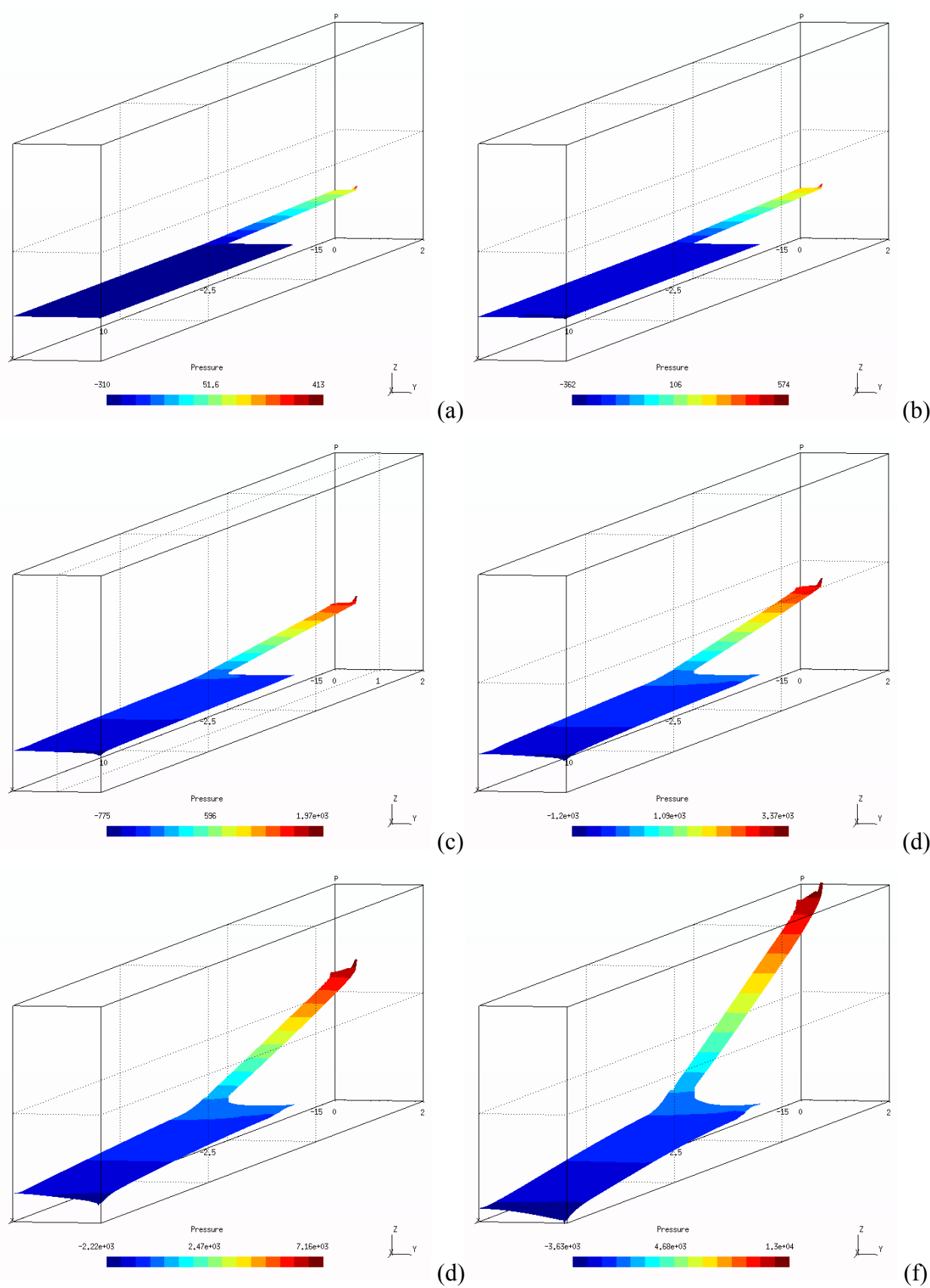


Figura 4.13 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Iso-regiões do campo de pressão, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $\text{Re}=0$, $n=1,5$ e $m=10^3$: (a) $HB=0,1$, (b) $HB=1$, (c) $HB=10$, (d) $HB=20$, (e) $HB=50$ e (f) $HB=100$.

Na Figura 4.14 são apresentadas as superfícies do módulo do campo de velocidade, para simulações com número de Reynolds desprezível, o expoente de comportamento, $n=0,37$, índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e o número de Herschel-Bulkely foi variado de $HB=0,1-100$ (Figs. 4.14(a)-4.14(f), respectivamente). Essa figura é útil para uma clara visualização espacial do desenvolvimento das zonas rígidas de *plug flow* a medida que o HB aumenta, conforme já analisado nas Figuras 4.4.

Foi apresentado condições de contorno para que o escoamento entre com um perfil de velocidades chamado *flat*, onde todos os nós na entrada da expansão receberam uma condição de contorno de velocidades na direção do eixo x_1 , $u_c=1\text{m/s}$, e uma condição de contorno de velocidade na direção x_2 , $u_{2e}=0\text{m/s}$. Como condição de saída impôs-se um perfil também *flat* com $u_s=0,25\text{m/s}$, onde esta condição estaria de acordo a equação de conservação de massa, e $u_{2s}=0\text{m/s}$. No caso mais pseudoplástico com $HB=0,1$ (Figura 4.14(a)), pode-se observar um gradiente de velocidades no duto de entrada com um perfil muito próximo ao parabólico onde também ocorrem as maiores velocidades. E no duto de seção maior, após o plano de expansão, ocorrendo uma diminuição das velocidades devido um aumento da área, onde pela equação da conservação de massa (Eq.2.3) e por ser considerada a hipótese de um escoamento incompressível, o aumento de área é determinante no perfil de velocidades formado após a expansão. Pode-se ver também a formação do *plug flow* na região central do duto maior seção onde o perfil de velocidades é próximo ao parabólico entre a parede da expansão e o início da formação do *plug flow* e *flat* onde o material estaria apresentando um movimento de corpo rígido. Para $HB=1$ (Figura 4.14(b)) observa-se que o perfil torna-se mais achatado em suas maiores velocidades onde se conclui que as regiões onde $\tau < \tau_0$ estão crescendo. Pode-se observar também que com o aumento da formação de zonas rígidas, a área efetiva por onde o fluido escoava diminui, fazendo com que ocorra um aumento no gradiente de velocidades ali apresentado e por consequência maiores taxas de deformação serão apresentadas. Para números de Herschel-Bulkley entre 10 e 100 (Figura 4.14(c)-(f)) observa-se uma mudança muito suave entre eles onde nota-se que o perfil de velocidades está bem achatado e mostrando uma camada limite extremamente severa, determinando uma formação de zonas rígidas movendo-se como corpos rígidos. Pelo perfil de velocidades após o plano de expansão podemos visualizar um aumento do *plug flow*. Como já comentado o aumento de HB implica no aumento das zonas rígidas e que torna-se mais sensível na faixa que compreende entre 0,1 e 20 e com uma mudança muito suave após esta faixa.

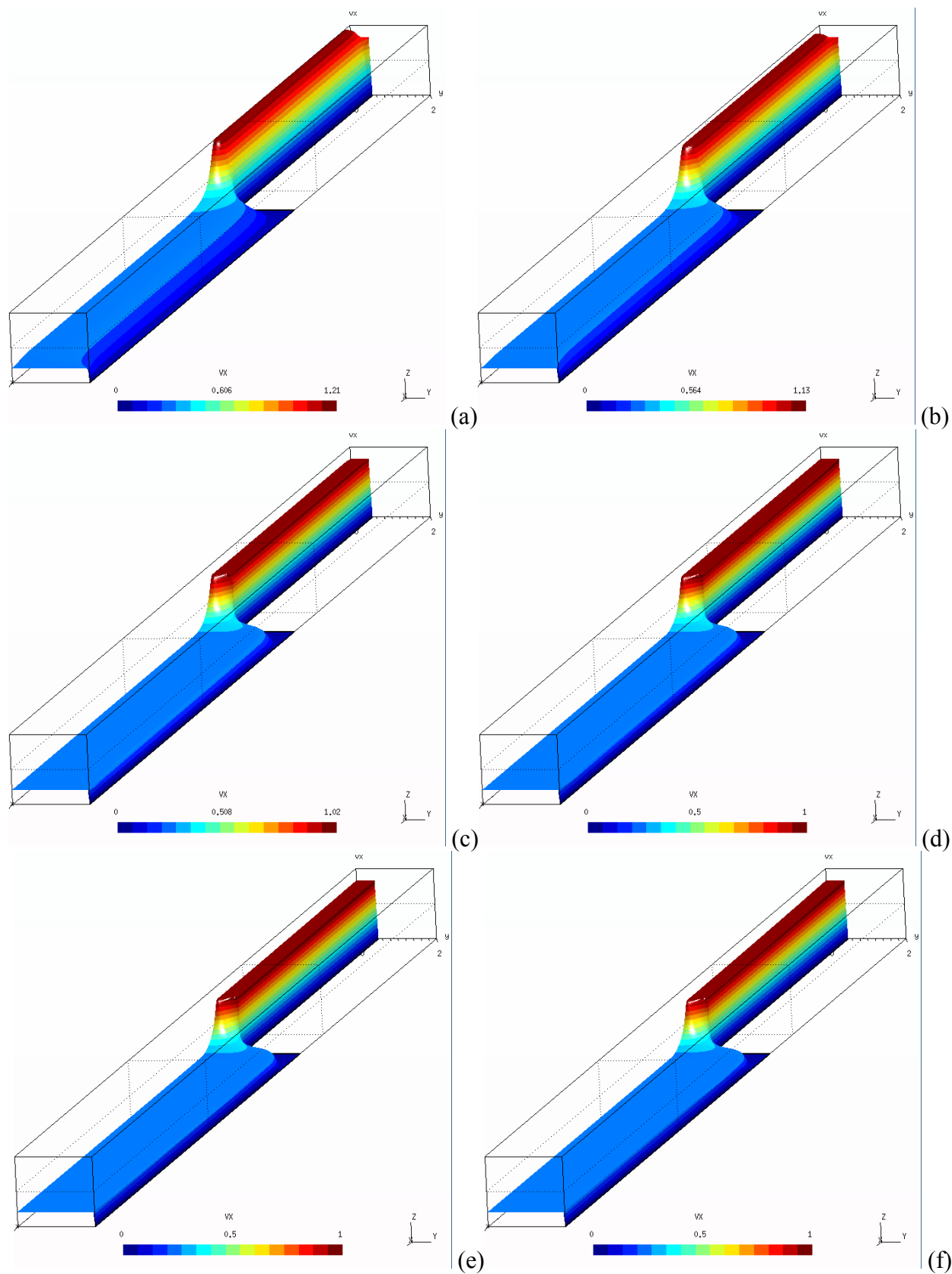
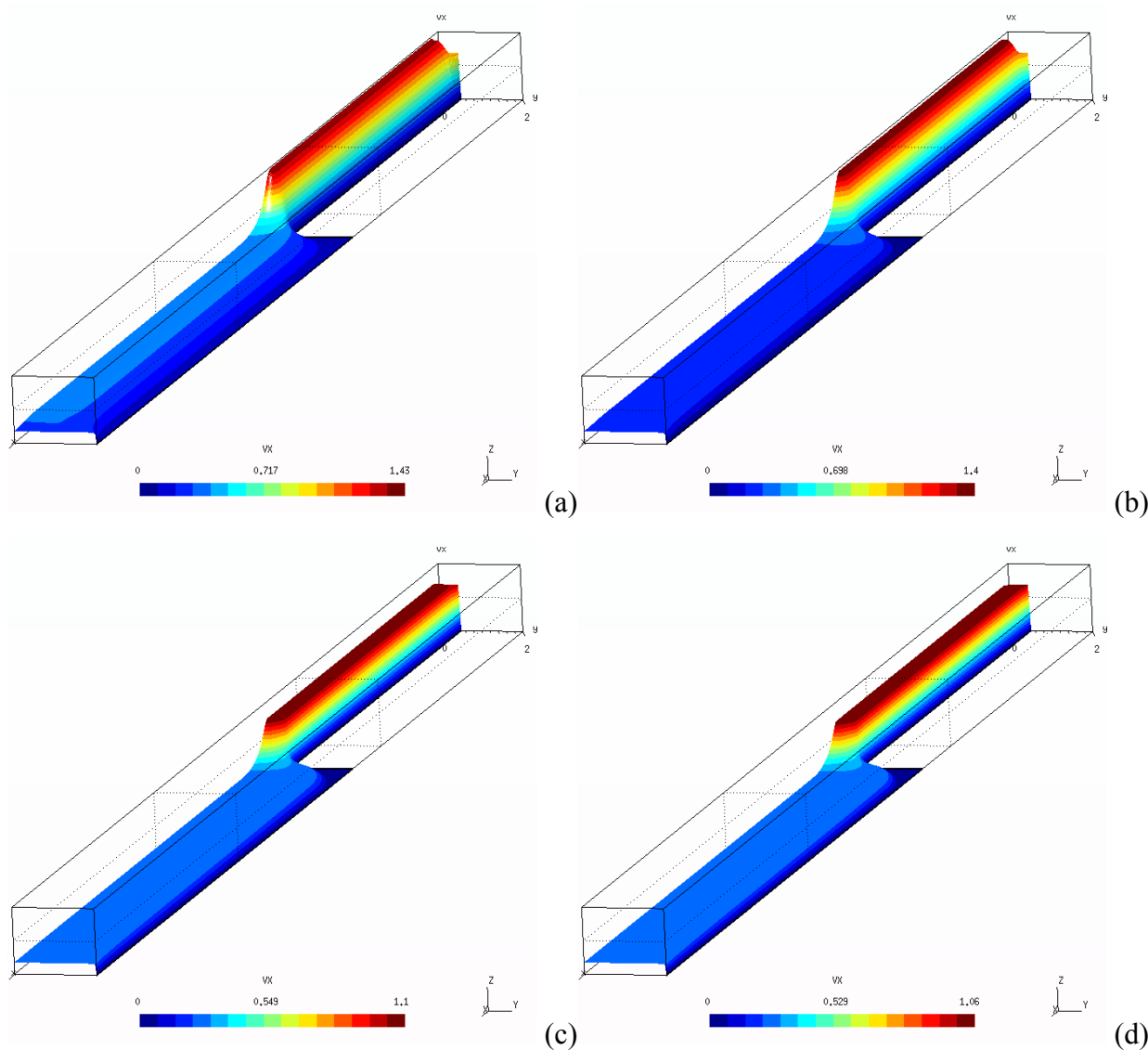


Figura 4.14 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - superfícies do campo de velocidades na direção x_1 , $Re=0$, $n=0,37$, $K=1Pa.s^n$ e $m=10^3$: (a) $HB=0,1$, (b) $HB=1$, (c) $HB=10$, (d) $HB=20$, (e) $HB=50$ e (f) $HB=100$.

As figuras abaixo (Figura 4.15) representam os resultados para o campo de velocidades \mathbf{u} para as simulações de um fluido viscoplástico que após a tensão de escoamento mínima comporta-se como um fluido newtoniano, ou seja, para um escoamento Herschel-Bulkley com $n=1$, índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e o número de Herschel-Bulkely variando de $\text{HB}=0,1-100$. Para $\text{HB}=1$ (Figura 4.15(a)) o escoamento apresenta um comportamento muito semelhante ao de um fluido newtoniano, com um perfil de velocidades muito próximo de um perfil parabólico, com um pequeno achatamento devido a uma pequena zona rígida que está se formando. A medida que se aumenta o número de Herschel-Bulkely, o perfil de velocidades se mostra mais achatado como no caso anterior, devido ao crescimento das zonas rígidas. Após o plano de expansão o gradiente de velocidades mostra um *plug flow* em crescimento junto com os números de Herschel-Bulkely.



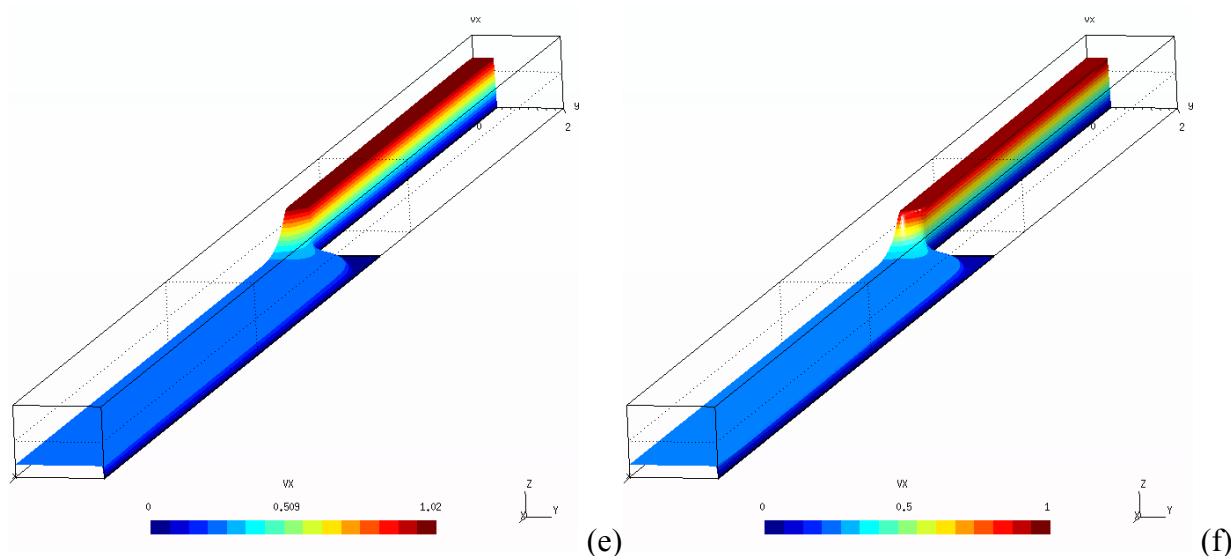
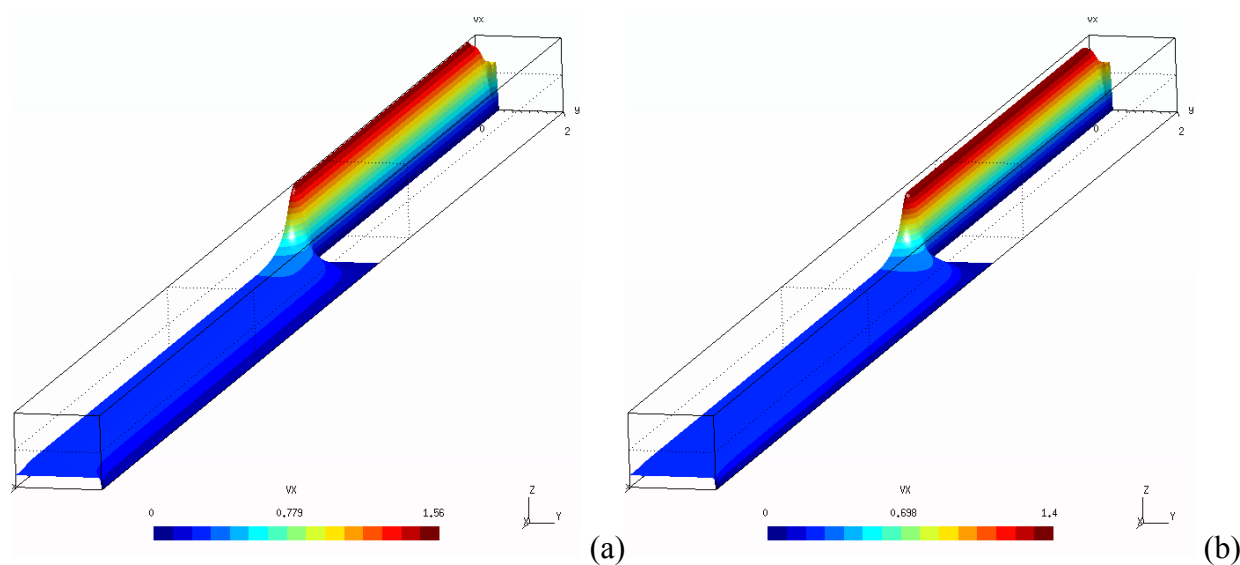


Figura 4.15 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - superfícies do campo de velocidades na direção x_1 , $Re=0$, $n=1$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e $m=10^3$: (a) $HB=0,1$, (b) $HB=1$, (c) $HB=10$, (d) $HB=20$, (e) $HB= 50$ e (f) $HB=100$.

Na Figura 4.16 é apresentado o perfil de velocidade, para simulações com número de Reynolds desprezível, o expoente de comportamento, $n=1,5$, índice de consistência, $K=1\text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ e o número de Herschel-Bulkely foi variado de $HB=0,1-100$ (Figs. 4.16(a)-4.16(f), respectivamente). Com um material dilatante, onde sua viscosidade aumenta assintoticamente com a taxa de deformação, mostra uma formação de um perfil achatado para menores HB em comparação aos casos anteriores, onde a formação das zonas rígidas se dá mais presente, tanto a montante quanto a jusante do plano de expansão.



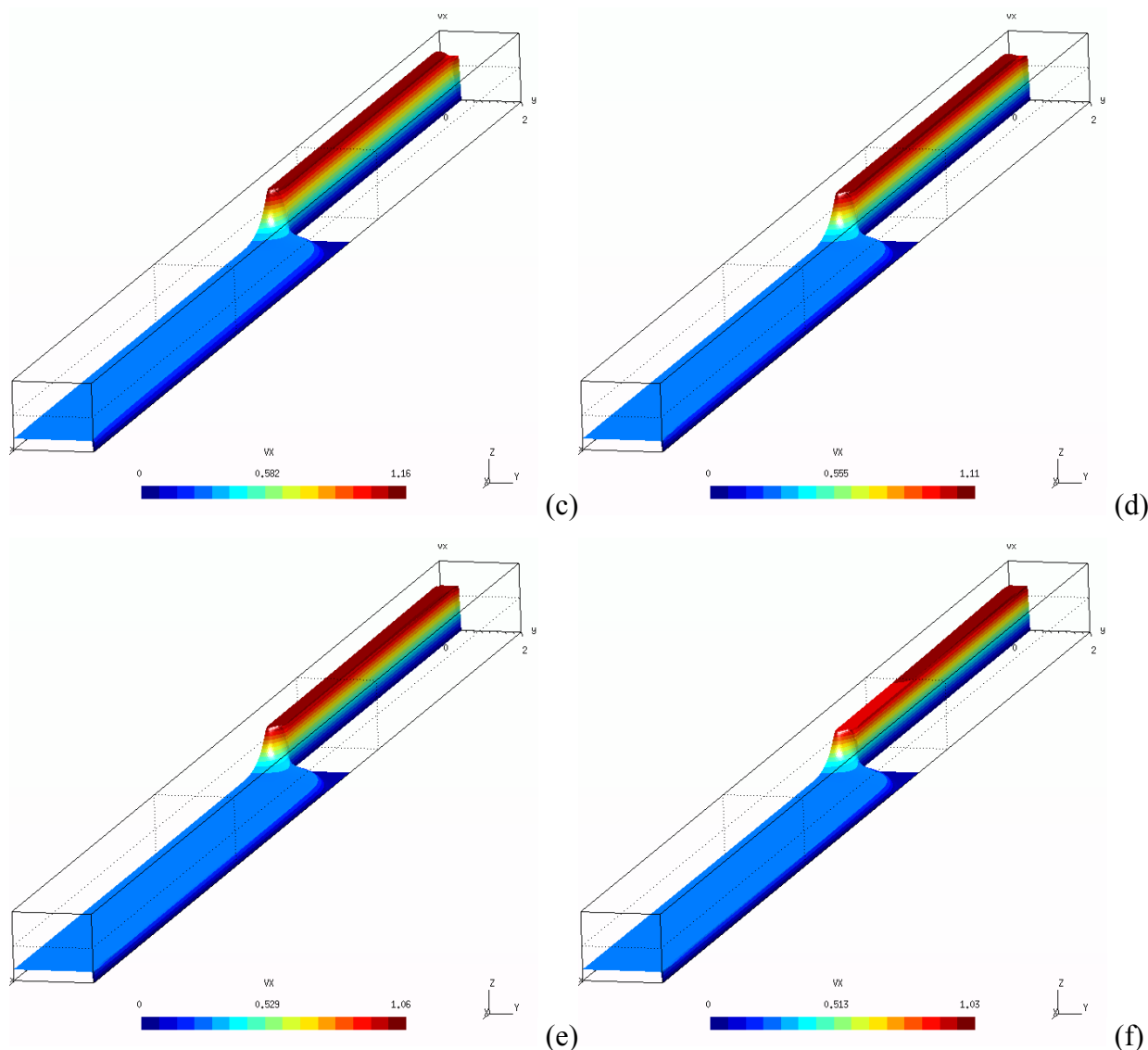


Figura 4.16 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - superfícies do campo de velocidades na direção x_1 , $Re=0$, $n=1,5$, $K=1Pa.s^n$ e $m=10^3$: (a) $HB=0,1$, (b) $HB=1$, (c) $HB=10$, (d) $HB=20$, (e) $HB= 50$ e (f) $HB=100$.

Ao observar as figuras abaixo (Figs 4.17), para número de Reynolds desprezível, ou *creeping flow*, coeficiente *power-law*, $n=0,37$, índice de consistência, $K=1Pa.s^n$ e número de Herschel-Bulkley variando de $HB=0,1-100$, (Figs. 4.17(a)-4.17(f), respectivamente) pode-se ver que as velocidades na direção do eixo x_2 , ou seja, as velocidades u_2 , ocorrem somente na área ligeiramente a jusante da expansão. Pode-se afirmar que esse é um comportamento coerente pois com a determinação das condições de contorno, onde foi fixa uma velocidade u_2 de entrada igual a zero, e do tamanho de entrada e saída da expansão suficientes para que o escoamento se desenvolva, fazendo assim com que não apresente velocidades nessa direção. Daí sai a importância de se analisar esse tipo de comportamento, podendo assim, confirmar que o escoamento está plenamente desenvolvido. Percebe-se também que os comportamentos para diferentes HB são semelhantes.

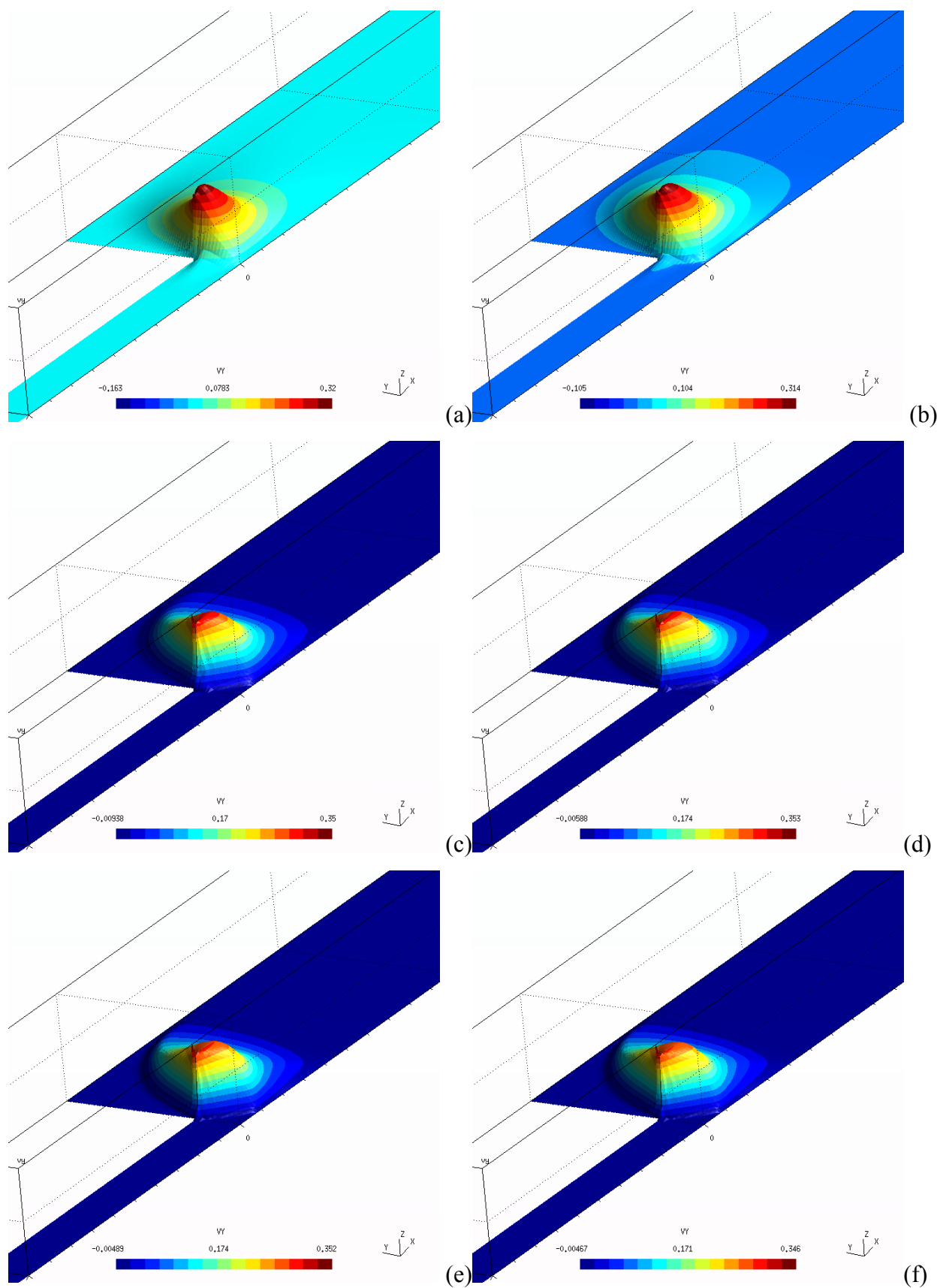
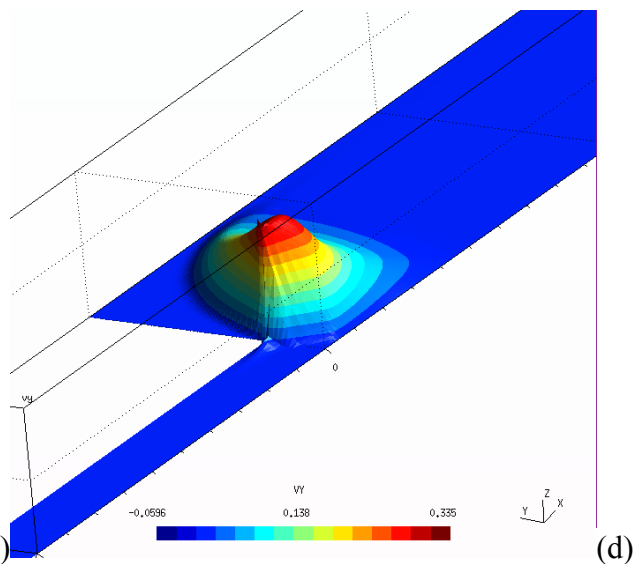
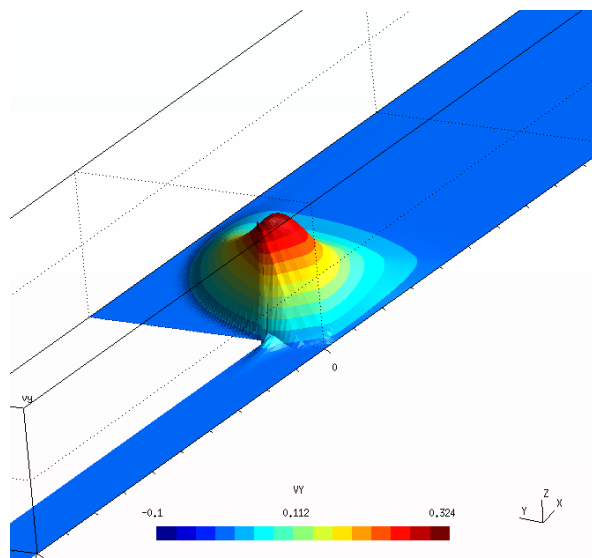
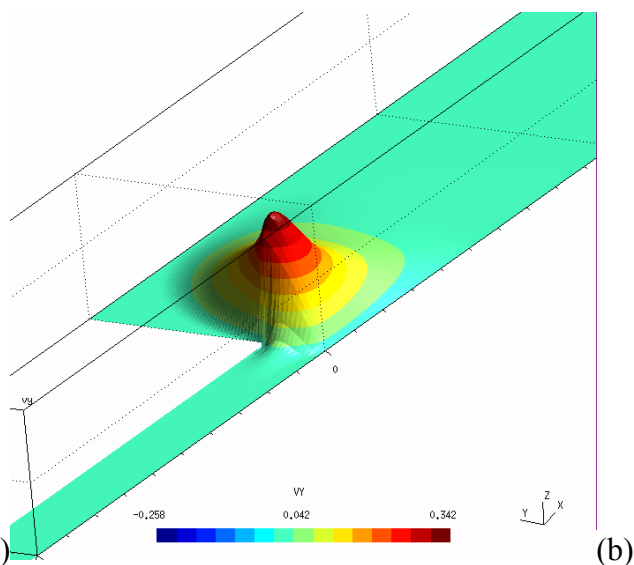
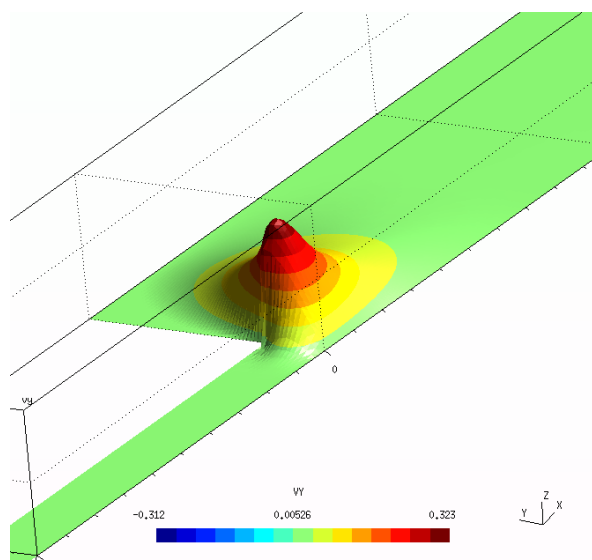


Figura 4.17 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - superfícies do campo de velocidades na direção x_2 , $Re=0$, $n=0,37$, $K=1Pa.s^n$ e $m=10^3$: (a) $HB=0$, (b) $HB=0,1$, (c) $HB=1$, (d) $HB=10$, (e) $HB= 50$ e $HB=100$.

Aumentando o índice de *power-law* para 1, mantendo um *creeping flow* com índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e número de Herschel-Bulkley variando de $\text{HB}=0,1-100$, (Figs. 4.18(a)-4.18(f), respectivamente) podemos notar que esse quadro não varia muito do caso anterior, apenas um quase insignificante aumento na velocidade em questão. Podemos também confirmar que o escoamento está plenamente desenvolvido, mostrando que os canais de entrada e saída tem um comprimento suficiente.



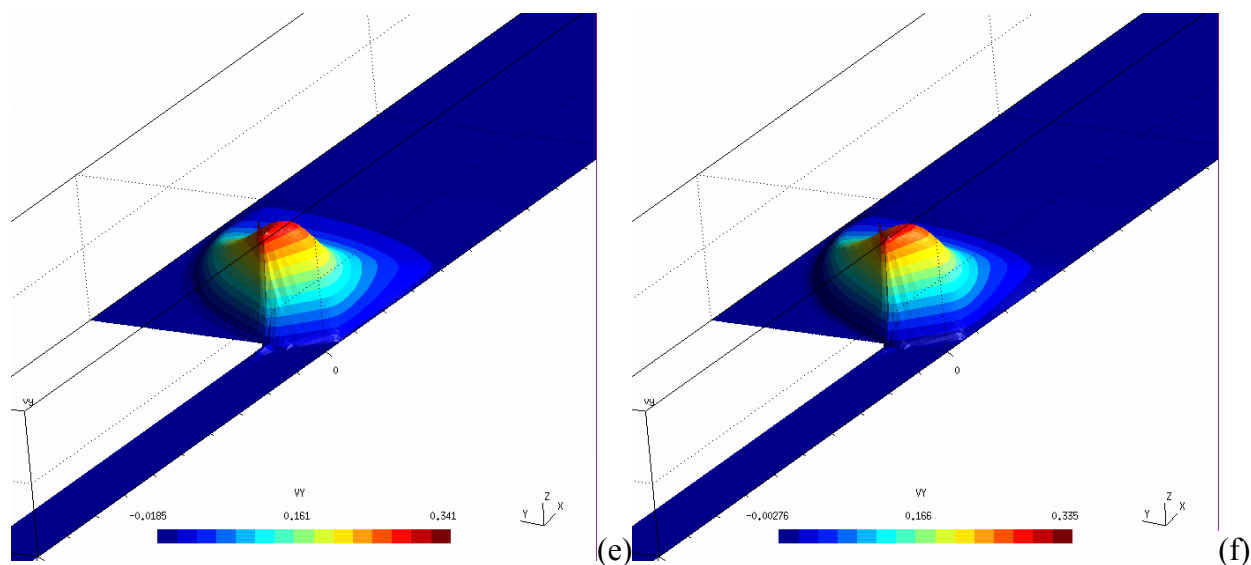
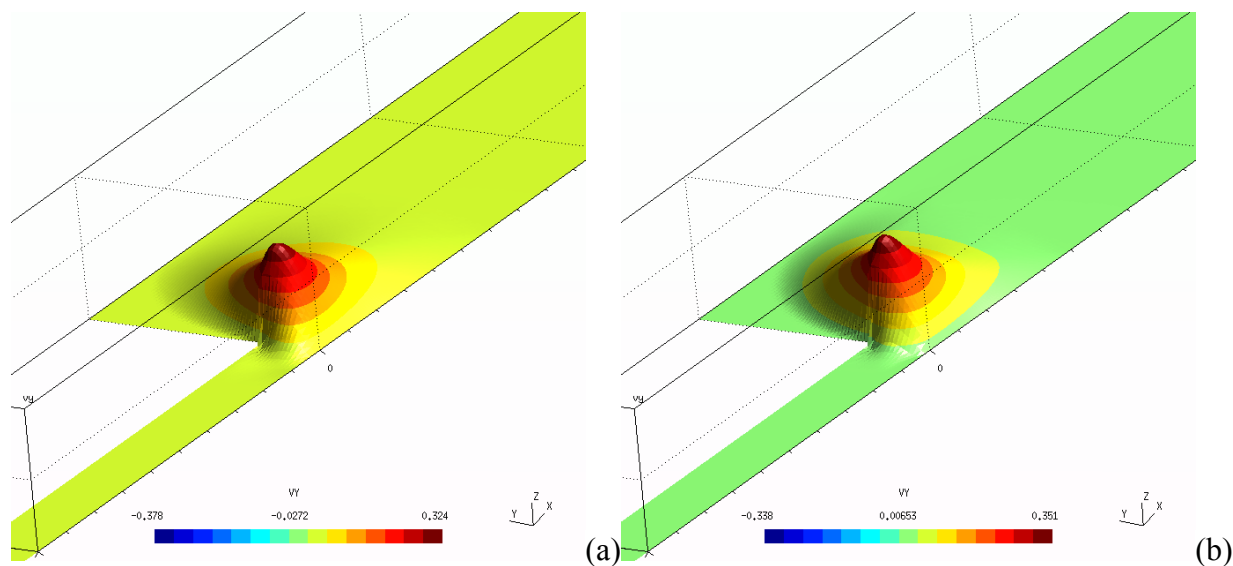


Figura 4.18 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - superfícies do campo de velocidades na direção x_2 , $Re=0$, $n=1$, $K=1Pa.s^n$ e $m=10^3$: (a) $HB=0$, (b) $HB=0,1$, (c) $HB=1$, (d) $HB=10$, (e) $HB= 50$ e (f) $HB=100$.

Agora analisando a influência do número de Herschel-Bulkley para o caso onde ocorre *shear-thickening* para um escoamento com Re desprezível, $n=1,5$ e $K=1Pa.s^n$ novamente segue o mesmo padrão, com a confirmação de um escoamento plenamente desenvolvido como pode-se ser visualizado na Figura 4.19.



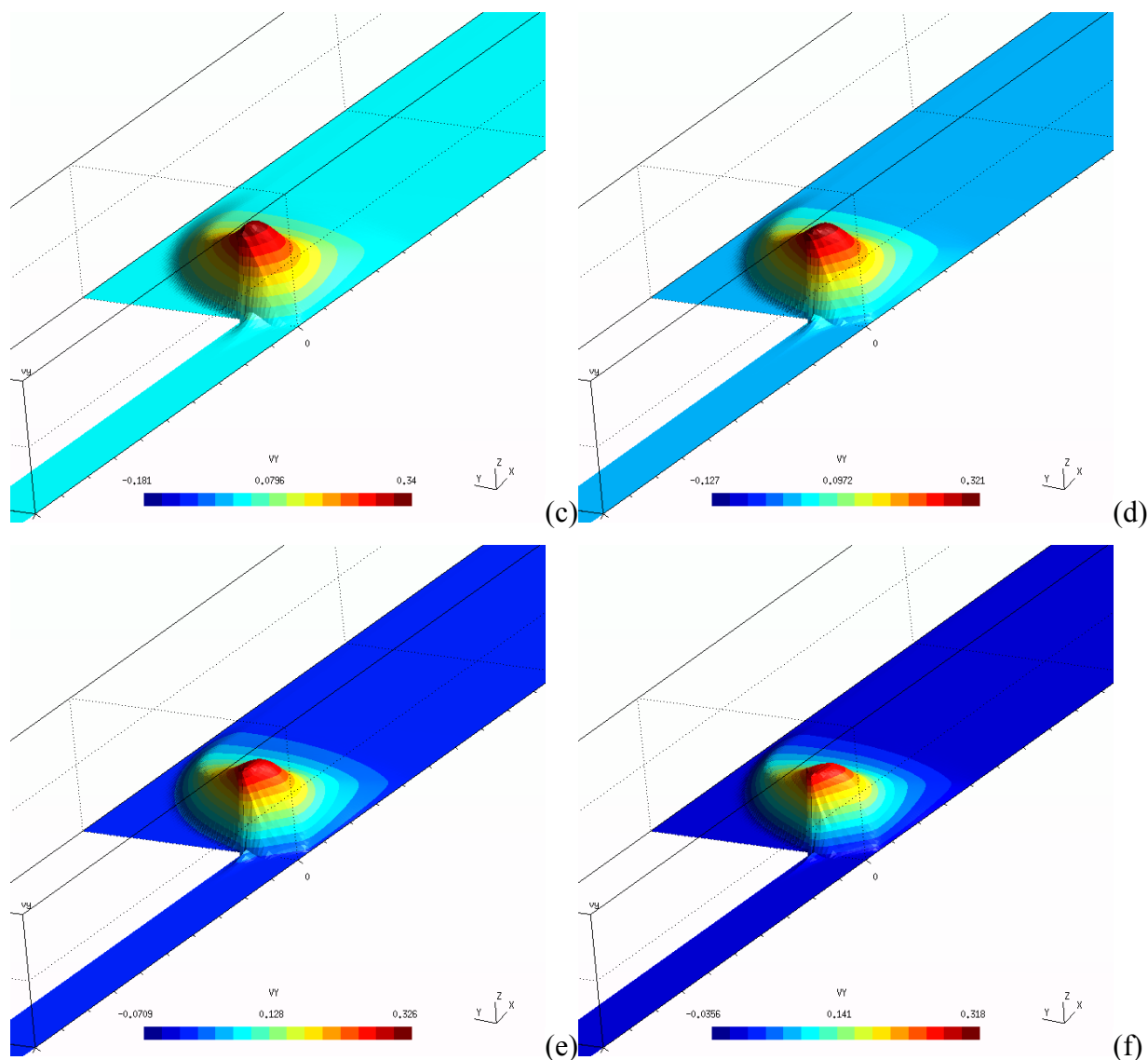


Figura 4.19 escoamento através de uma expansão planar 1:4 - superfícies do campo de velocidades na direção x_2 , $Re=0$, $n=1,5$, $K=1Pa.s^n$ e $m=103$: (a) $HB=0$, (b) $HB=0,1$, (c) $HB=1$, (d) $HB=10$, (e) $HB= 50$ e (f) $HB=100$.

Nas Figuras 4.20-4.22 é apresentada a queda de pressão adimensionalizada ao longo da expansão 1:4, dada pelo número de Euler, Eq.4.1, ao longo da linha de simetria e o comprimento ao longo do duto foi adimensionalizado pela seguinte expressão:

$$x^* = \frac{x_1}{L_c} \quad (4.5)$$

A Figura 4.20 é apresentada a queda de pressão adimensionalizada ao longo da expansão 1:4, para número de Reynolds desprezível, coeficiente *power-law*, $n=0,37$, índice de consistência, $K=1Pa.s^n$ e número de Herschel-Bulkley variando de $HB=0,1-100$. O comportamento da queda de pressão com o número HB já foi analisado na Fig. 4.11: quanto

maior o valor de HB, maior será a queda de pressão na expansão. Pode-se agora ver com clareza a grande influência das zonas rígidas em torno da diferença de pressão onde que para os HB mais altos, o Δp é maior e com uma queda forte devido a obstrução causada pelo *plug flow* e para números de HB baixos, quando as zonas rígidas são menores, o Δp é pequeno e com um caimento suave.

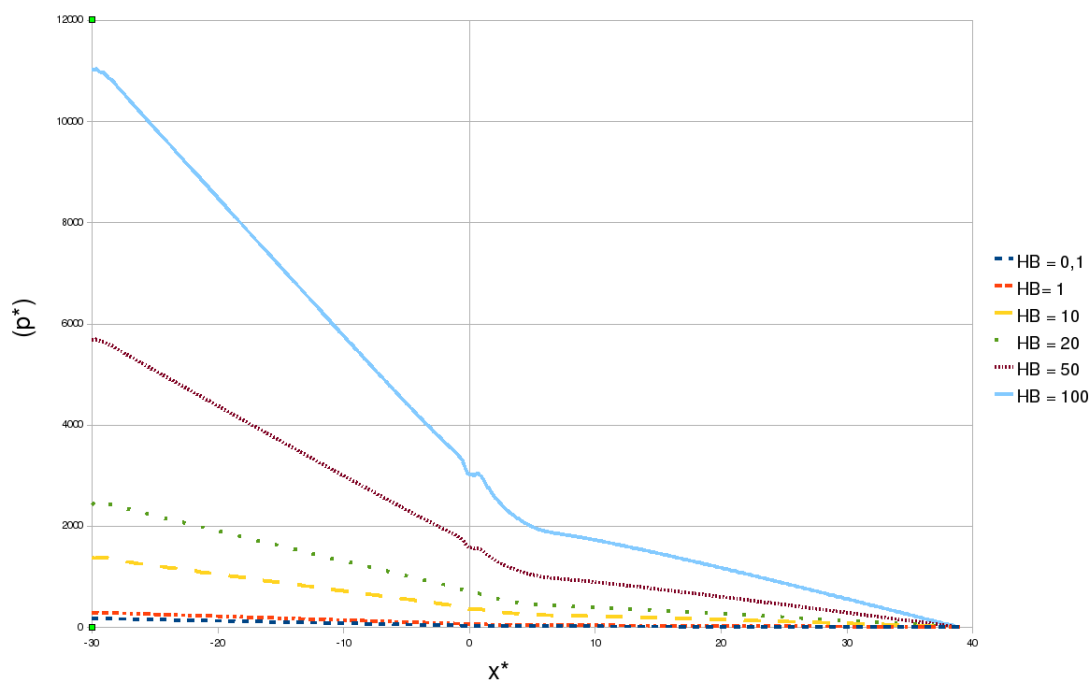


Figura 4.20 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para $Re=0$, $n=0,37$, $K=1Pa.s^n$, $m=10^3$

Na Figura 4.21 podemos observar a queda de pressão adimensionalizada ao longo da expansão 1:4, dada pelo número de Euler, Eq. 4.1, ao longo da linha de simetria, para número de Reynolds desprezível, coeficiente *power-law*, $n=1$, índice de consistência, $K=1Pa.s^n$ e número de Herschel-Bulkley variando de $HB=0,1-100$ onde comportamento é o mesmo apresentado anteriormente mas que, como já foi discutido, o aumento do índice de *power-law* anda em paralelo com o aumento das *unyielded zones* fazendo com que aumente os Δp para os casos de $n=1$.

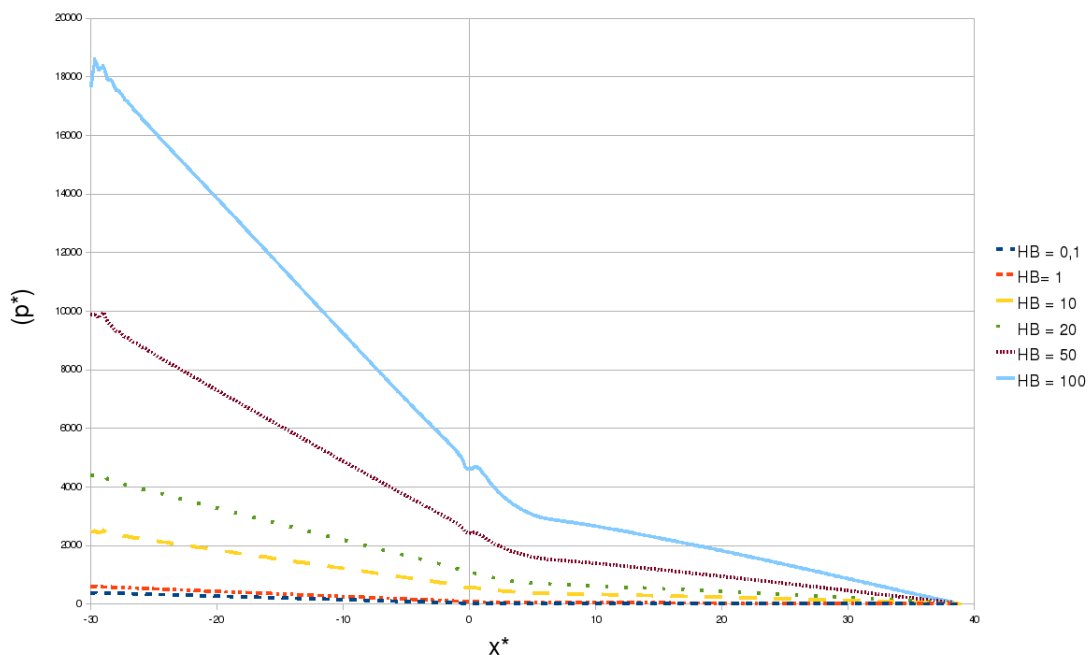


Figura 4.21 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para $Re=0$, $n=1$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $m=10^3$

A Figura 4.22 apresenta a queda de pressão adimensionalizada ao longo da expansão 1:4 para $n=1,5$, índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e número de Herschel-Bulkley variando de $HB=0,1-100$. Assim como os casos anteriores, a diferença de pressão aumentou com o aumento do número de Herschel-Bulkley devido o comportamento já descrito anteriormente.

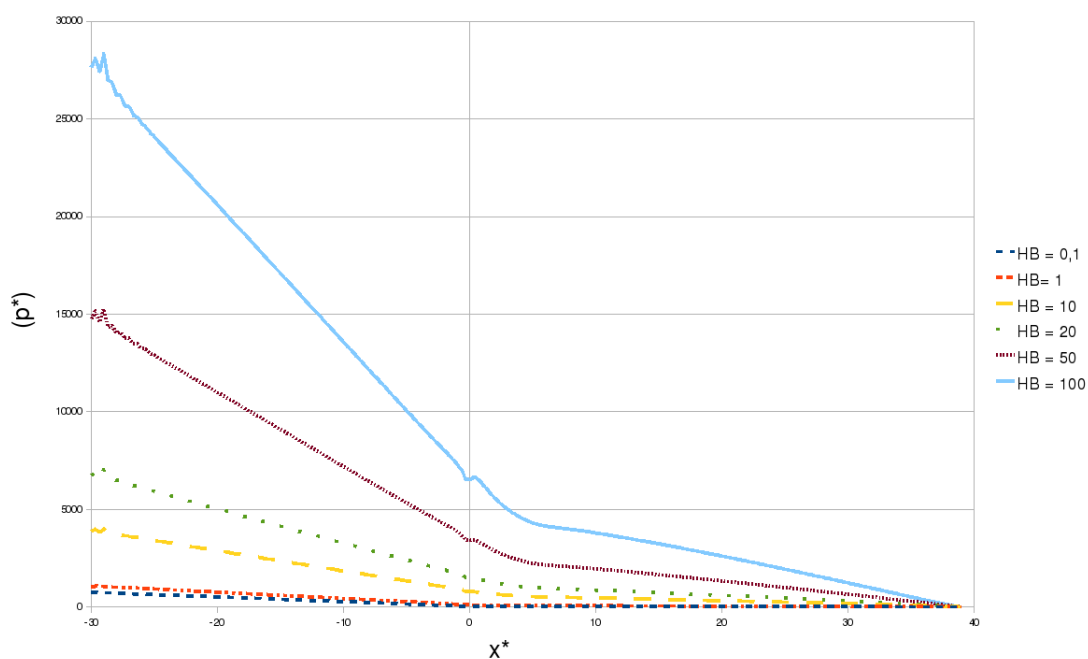


Figura 4.22 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - queda de pressão adimensionalizada ao longo da linha de simetria, para $Re=0$, $n=1,5$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $m=10^3$.

Nas Figuras 4.23-4.28 são apresentados os perfis de velocidades adimensionalizadas em função da altura do duto adimensional, onde as velocidades e a altura são adimensionalizadas seguinte forma respectivamente,

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_c}, \quad H^* = \frac{L_i}{L_c} \quad (4.6)$$

onde o subíndice i pode ser igual a c para indicar a altura do duto de seção menor e H para indicar a altura do duto de seção maior.

A Figura 4.23 mostra o perfil de velocidades para um escoamento com $Re=0$, índice de *power-law*, $n=0.37$, um índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e parâmetro regularizador de Papanastasiou, $m=10^3$, no plano de expansão, onde $x_1=0$. Pode-se observar claramente os perfis de velocidades para números de HB variando entre 0,1-100 onde, para HB entre 0,1 e 1 os perfis mostram-se muito semelhantes a perfis parabólicos com camadas limites suaves e para HB's entre 10 e 100 um perfil extremamente achatado e com uma camada limite com caimento brusco do gradiente de velocidades. Como já mencionado, isto se deve ao crescimento de zonas rígidas, e por consequência, um movimento de corpo rígido nesta região.

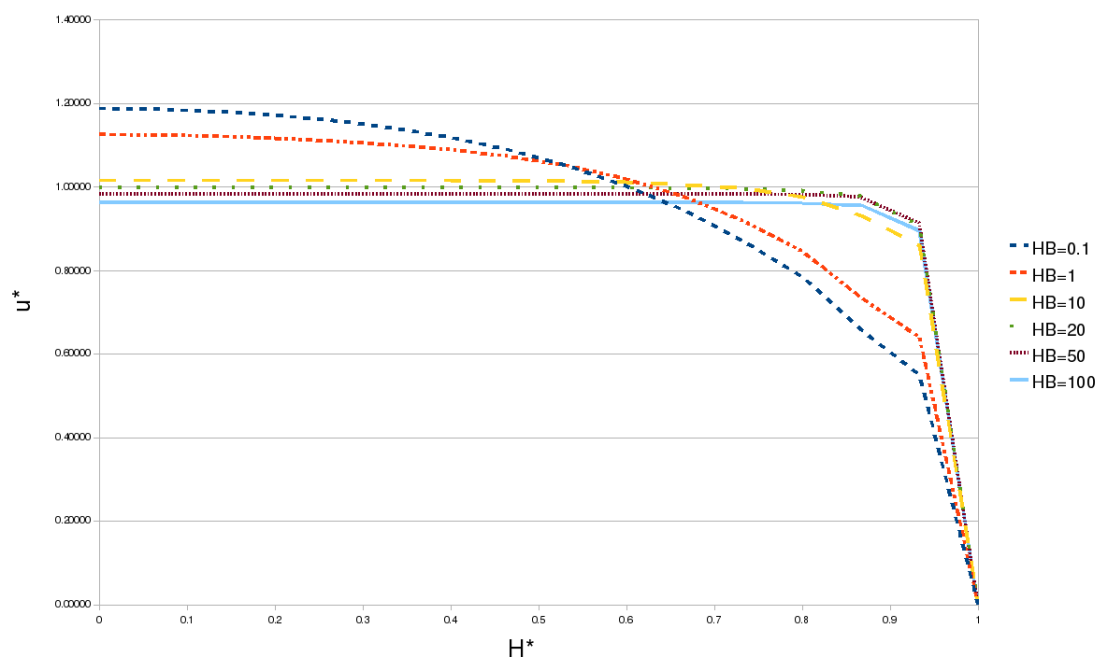


Figura 4.23 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Perfil de velocidades axiais no plano de expansão em $x_1=0$, para $n=0,37$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $Re=0$.

Na Figura 4.24 é apresentado um gráfico do perfil de velocidades no plano de expansão em $x_1=0$ para $n=1$, $K=1$ e $m=10^3$. Com o aumento do índice de *power-law* pode-se notar o mesmo comportamento descrito para o caso anterior, apenas com velocidades mais altas devido a menor área efetiva de escoamento, onde as zonas rígidas tendem a ser maiores com aumento de n .

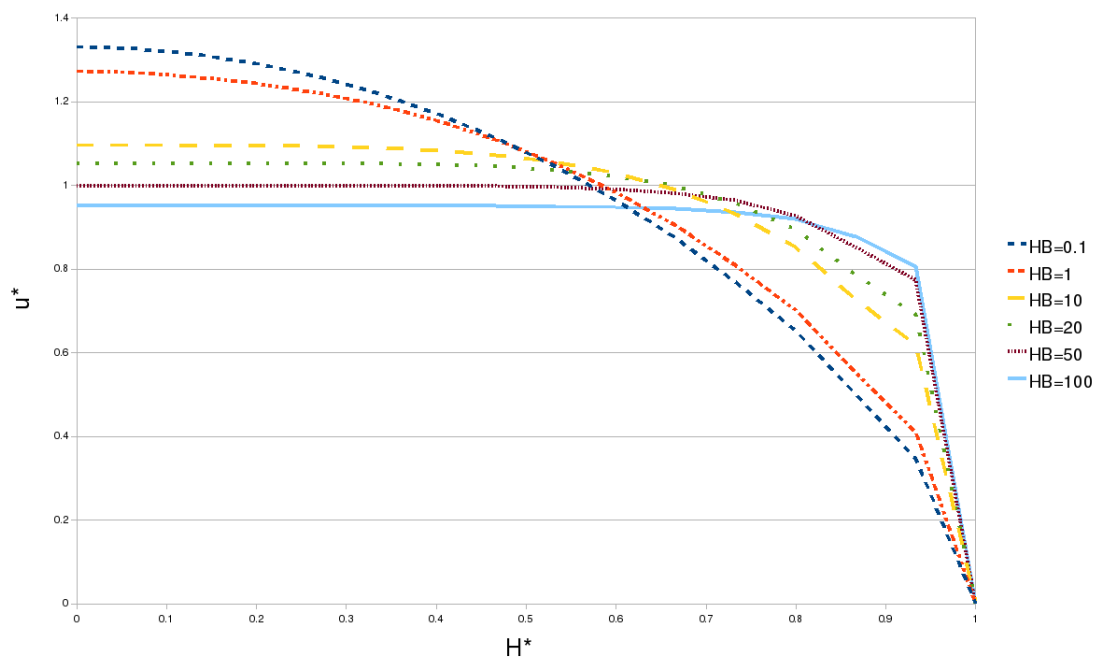


Figura 4.24 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Perfil de velocidades axiais no plano de expansão em $x_1=0$, para $n=1$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $\text{Re}=0$.

A figura a seguir (Figura 4.25) analisa o perfil de velocidades para número de Reynolds desprezível, coeficiente *power-law*, $n=0,37$, índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e número de Herschel-Bulkley variando de $\text{HB}=0,1-100$. Novamente podemos observar que, com o aumento do número de Herschel-Bulkley, os perfis em questão passam de um perfil muito próximo a um perfil parabólico para perfis achatados e com camadas limites cada vez mais com gradientes severos. As velocidades, também neste caso, aumentaram em relação aos casos anteriores, onde as *unyielded zones* também cresceram e por conservação de massa, velocidades mais altas nessa região.

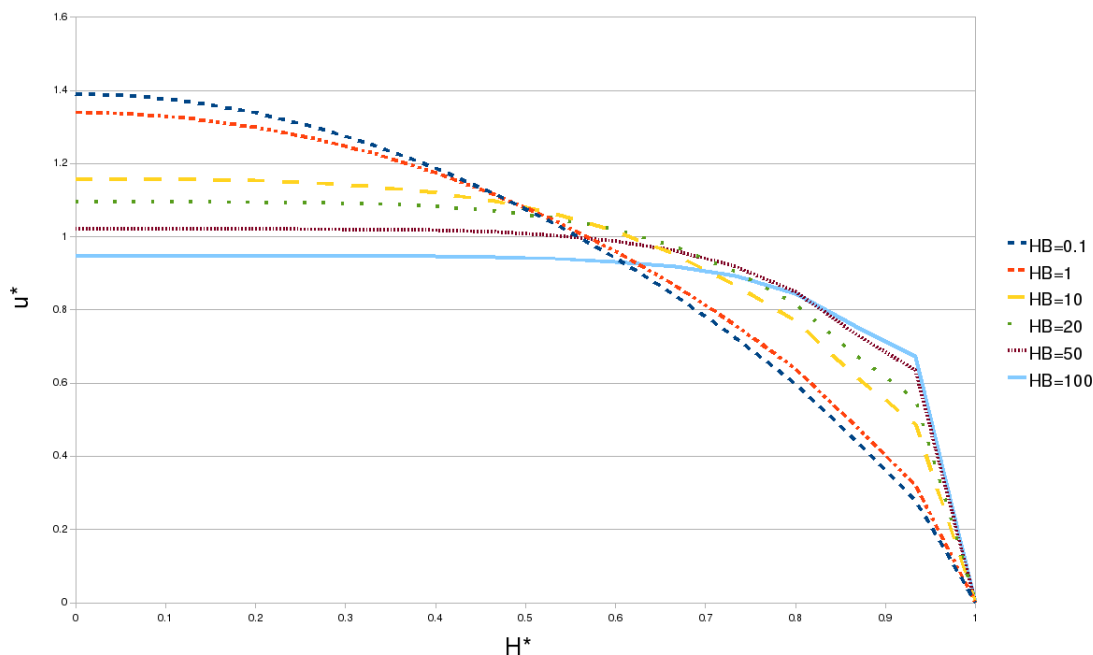


Figura 4.25 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Perfil de velocidades axiais no plano de expansão em $x_1=0$, para $n=1,5$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $\text{Re}=0$.

A Figura 4.26 mostra o perfil de velocidades para um escoamento com $\text{Re}=0$, índice de *power-law*, $n=0.37$, um índice de consistência, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e parâmetro regularizador de Papanastasiou, $m=10^3$, no plano onde $x_1=10$ e H a altura entre o centro e a parede da expansão. Podemos verificar que neste plano, para todos HB's, tem-se regiões rígidas bem desenvolvidas, onde todos os perfis se mostram achatados. Pode-se ver claramente o crescimento do *plug flow* com o aumento do número de Herschel-Bulkley, demonstrando que para HB altos, as taxas de deformação, $\dot{\gamma}$, são menores fazendo com que apareçam mais regiões onde $\tau < \tau_0$. Pode-se constatar também uma mudança no aspecto da camada limite, onde que para HB mais baixos percebe-se uma camada limite com um gradiente de velocidades suave que, com um aumento do número de Herschel-Bulkley torna-se um gradiente extremamente severo.

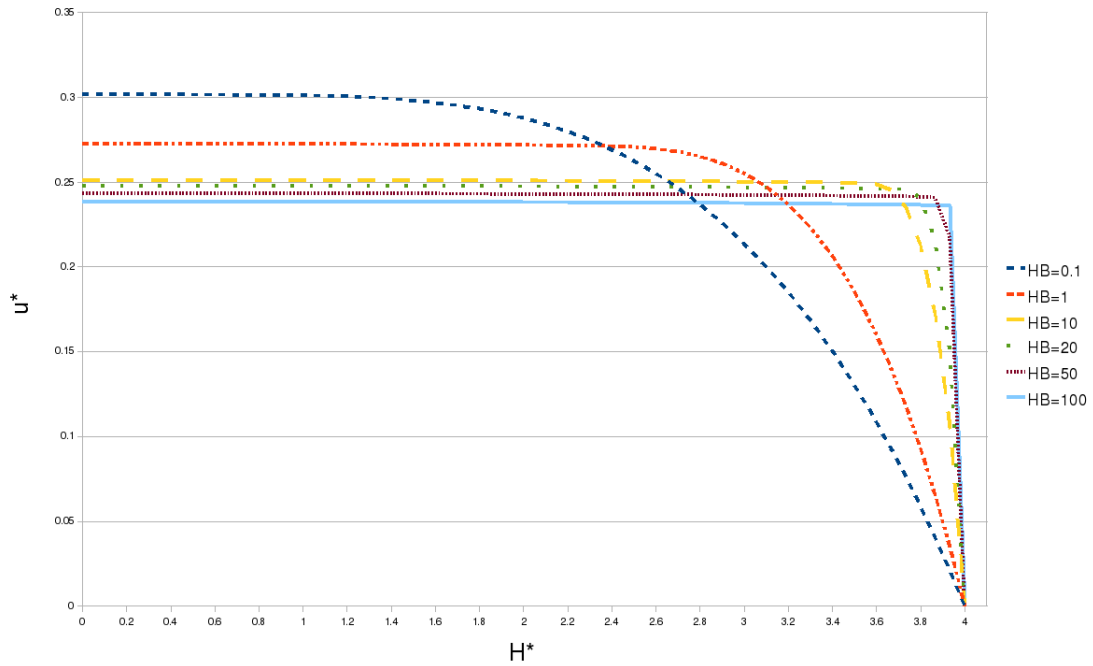


Figura 4.26 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Perfil de velocidades axiais em $x_1=10$, para $n=0,37$, $Re=0$, $K=1Pa.s^n$.

Para os resultados do perfil de velocidades u no plano $x_1=10$ e com $Re=0$, índice de *power-law*, $n=1$, um índice de consistência, $K=1Pa.s^n$ e $m=10^3$ demonstrados na Figura 4.27, temos o comportamento já comentando onde com o aumento de HB o perfil se torna mais achatado devido o crescimento de zonas rígidas.

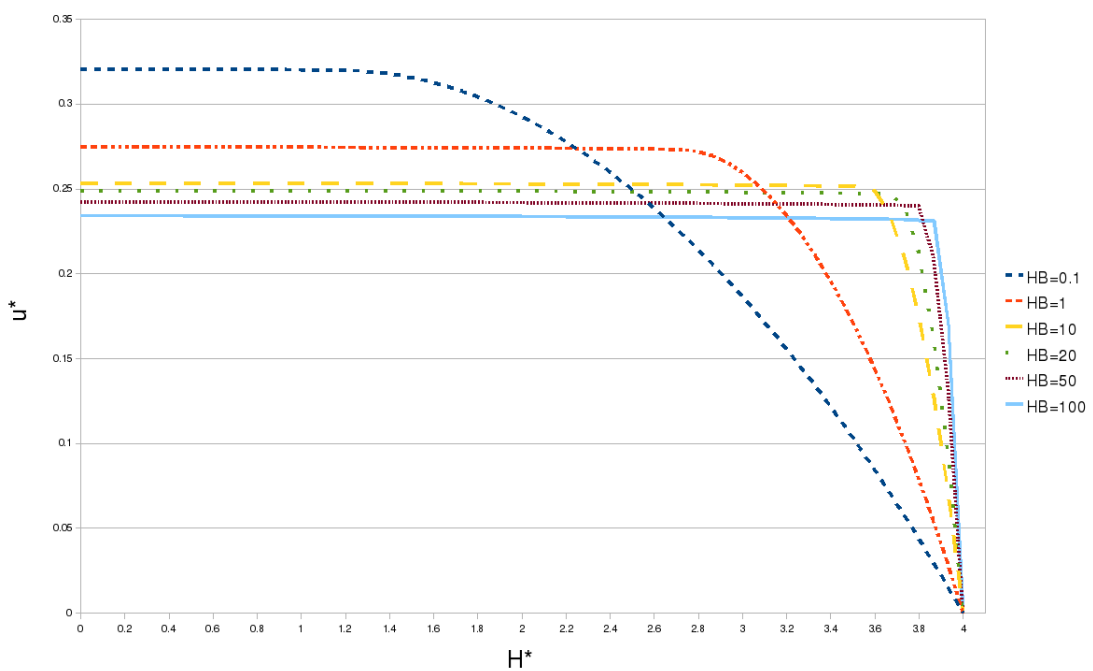


Figura 4.27 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Perfil de velocidades axiais em $x_1=10$, para $n=1$, $K=1Pa.s^n$, $Re=0$.

A seguir, na Figura 4.28 estão demonstrados os resultados para o perfil de velocidades u_1 no plano $x_1=10$ com $Re=0$, índice de *power-law*, $n=1,5$, um índice de consistência, $K=1Pa.s^n$ e parâmetro regularizador de Papanastasiou, $m=10^3$ onde o comportamento mantém-se o mesmo já descrito anteriormente.

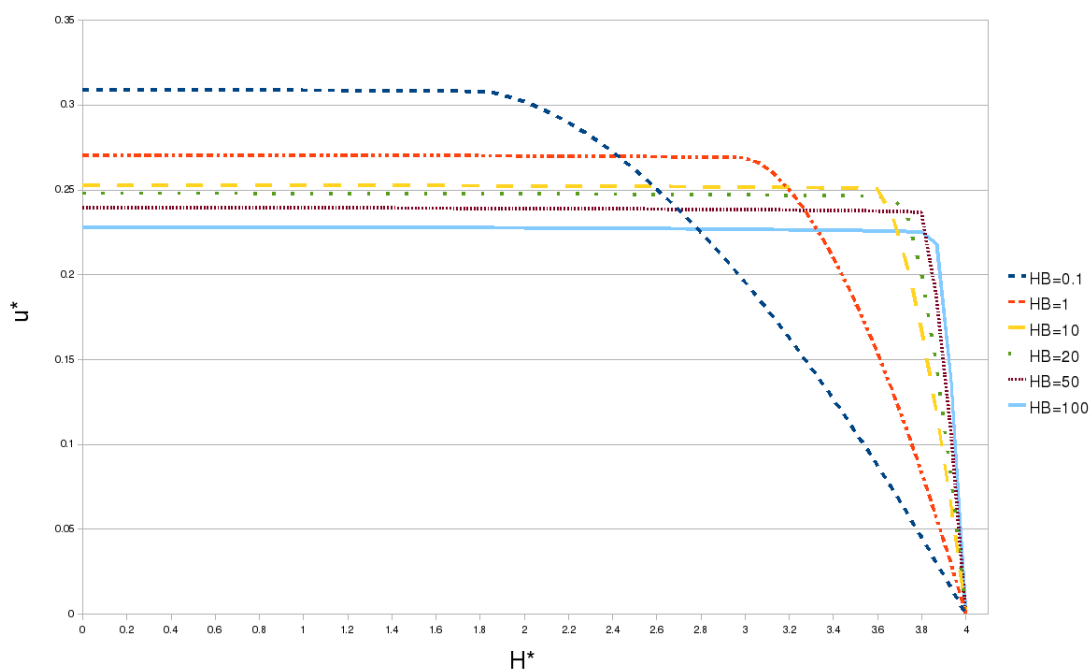


Figura 4.28 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - Perfil de velocidades axiais em $x_1=10$, para $n=1,5$, $K=1Pa.s^n$, $Re=0$.

Na Figura 4.29 retorna-se à análise da queda de pressão adimensional ao longo da linha de simetria, com número de Re desprezível, agora, porém, para o número de Herschel-Bulkley fixo igual a $HB=1$, parametrizadas por diferentes valores do coeficiente *power-law*, $n=0,37-1,5$. Conforme observado na Figura 4.9, pode-se concluir que para menores índices de *power-law* ocorrem as menores diferenças de pressão, ou seja Δp pequenos, enquanto que com o crescimento do índice de *power-law*, passando de um fluido viscoplástico com *shear-thinning* para um fluido viscoplástico newtoniano e posteriormente um fluido viscoplástico com *shear-thickening*, a obstrução da área efetiva de escoamento faz com que aumente gradativamente o Δp e por consequência a perda de carga do sistema.

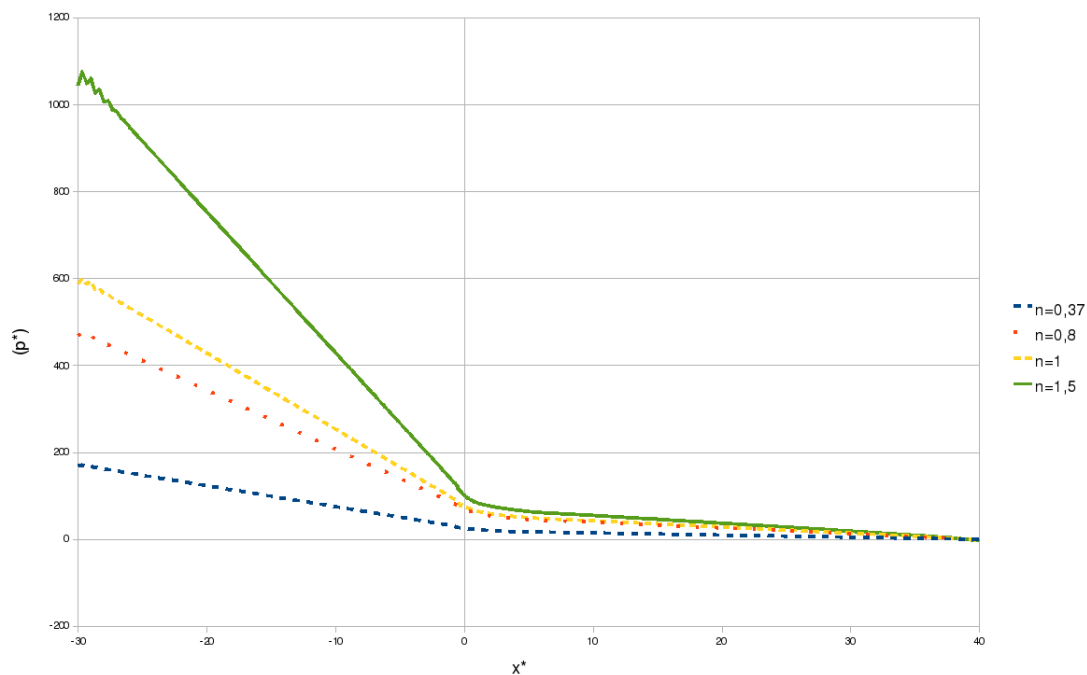


Figura 4.29 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - influência de n na queda de pressão ao longo da linha de simetria, $Re=0$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $HB=1$.

Na Figura 4.30 é avaliada a influência do índice de *power-law* no perfil de velocidades u^* em função da altura dos dutos adimensionalizadas de acordo com a Eq.4.6 no plano de expansão em $x_1=0$ para, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$ e $m=10^3$ e um número de Herschel-Bulkley fixo igual a 1. Analisando os resultados pode-se confirmar uma inversão no crescimento do *plug flow* como já comentado onde que, para o fluido viscoplástico dilatante (*shear-thickening*) com $n=1,5$ temos o perfil de velocidades mais parabólico entre os estudados o que mostra também o menor *plug flow* entre eles. A medida que o índice de *power-law* decai para um fluido viscoplástico newtoniano, o perfil de velocidades apresenta-se mais achatado, demonstrando um crescimento da zona rígida em relação ao anterior. Passando a avaliar o caso de um fluido viscoplástico pseudoplástico (*shear-thinning*), com $n=0,8$ e $n=0,37$, percebe-se que o quadro apresenta-se o mesmo, com um crescimento do *plug flow* e com gradientes de velocidades mais severos.

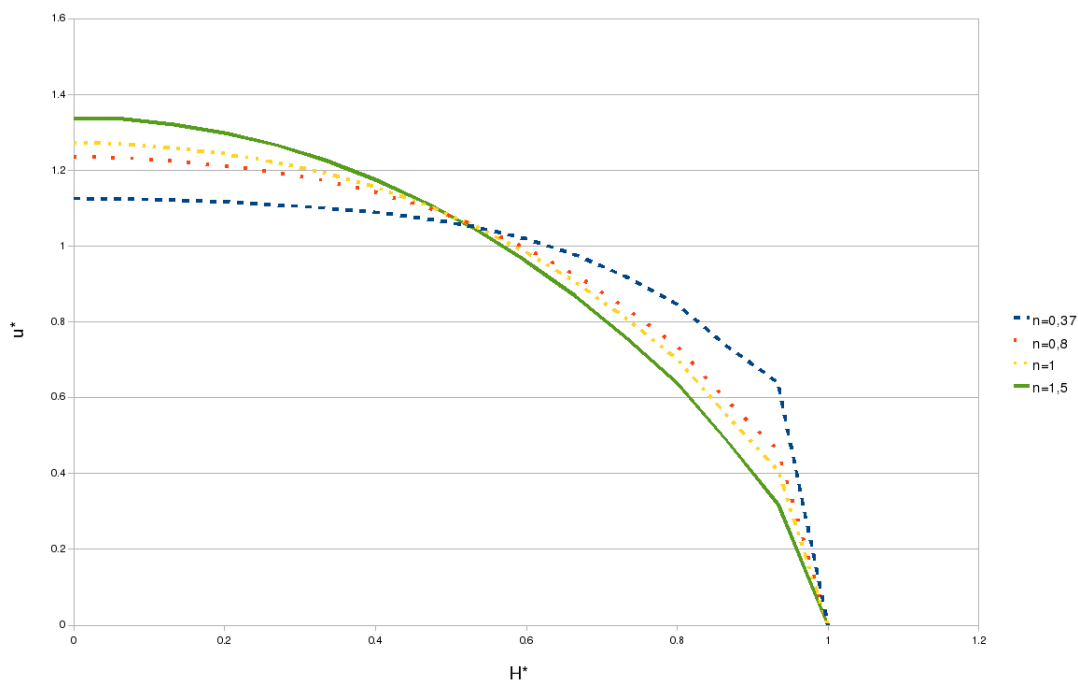


Figura 4.30 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 - influência de n na velocidade axial no plano de expansão $x_1=0$, para $Re=0$, $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, $HB=1$.

Na Figura 4.31 é apresentada uma comparação dos resultados obtidos nesta Dissertação com os resultados obtidos por Alexandrou et al.(2001), para o caso da expansão 1:4 planar abrupta, para um número de Herschel-Bulkley, $HB=1$, parâmetro regularizador, $m=10^3$, índice de consistência $K=1\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, número de Re desprezível e índice de *power-law* variando em $n=0,37$, $n=1$ e $n=1,5$ para a presente dissertação e $Re=1$ e $n=0,5$, $n=1$ e $n=1,5$ para o trabalho desenvolvido por Alexandrou et al.(2001). Pode-se perceber uma excelente concordância, tanto na superfície de *plug flow* no duto menor como nas superfícies rígidas estagnadas no canto da expansão. Na região de *plug flow* a jusante do plano de expansão pôde-se perceber uma pequena discrepância entre os resultados por ser a região onde ocorre a maior diferença entre as taxas de deformação, que vão de altas a pequenas deformações, assim dificultando a determinação exata da *yielded surface*. Outro motivo dessa discrepância foi o fato de que o trabalho realizado por Alexandrou (2001) apresenta fenômenos de inércia em suas simulações, com um $Re=1$, e nesta dissertação estamos lidando com escoamentos *creeping flow*, sem inércia, ou em outras palavras, um escoamento com Reynolds desprezível.

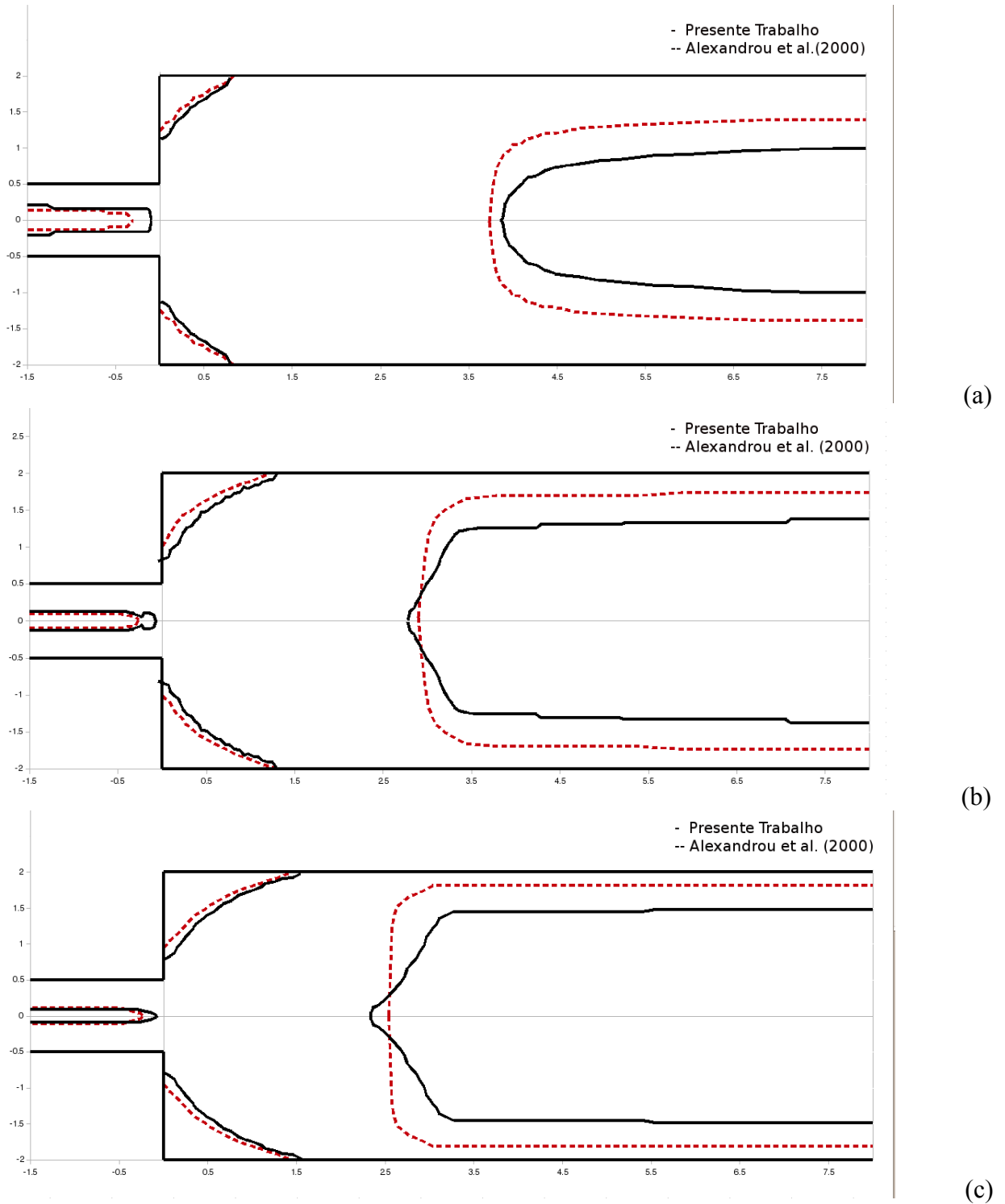


Figura 4.31 Escoamento através de uma expansão planar 1:4 – comparação com os resultados obtidos por Alexandrou et al. (2001), para $HB=1$ e $m=10^3$: (a) $n=0,5$, (b) $n=1$, (c) $n=1,5$.

Mesmo com uma pequena diferença nessas regiões, é importante reforçar que os resultados foram coerentes com os apresentados pelo trabalho já reconhecido de Alexandrou (2001), mostrando o fenômeno de crescimento das zonas rígidas com o crescimento do índice de *power-law*.

5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho objetivou-se estudar os comportamentos reológicos presentes em um escoamento lento (*creeping flow*) de um fluido Herschel-Bulkley através de uma expansão planar abrupta e a validação do código computacional de elementos finitos (NNFEM) via metodologia de Galerkin Mínimos-Quadrados em desenvolvimento pelos pesquisadores do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) através de uma formulação multi-campos.

O Capítulo 1 desta Dissertação introduziu os princípios do método de elementos finitos, determinando seus conceitos e dificuldades de aplicação assim como os métodos estabilizados que surgiram a fim de sanar os problemas encontrados, apresentando a metodologia de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS). Apresentou-se os principais trabalhos realizados atualmente através de uma revisão de artigos de interesse sobre a aproximação numérica de escoamentos de fluidos viscoplástico.

No Capítulo 2 é introduzida a modelagem mecânica a quais são apresentadas as equações de conservação de massa e balanço de momentum em suas formas Lagrangeana e Euleriana. É definido o fluido Newtoniano Generalizado (GNL), assim como uma função viscosidade generalizada a modo de permitir que a viscosidade do fluido passe a depender da taxa de cisalhamento, criando assim o conceito de viscosidade aparente. Por fim, são introduzidas correlações empíricas para a função viscosidade aparente: o modelo de Herschel-Bulkley e a função viscosidade de Herschel-Bulkley regularizado pela Equação de Papanastasiou – a ser utilizada nos testes numéricos desta Dissertação.

No Capítulo 3 é discutido em detalhes o método numérico aplicado nesta Dissertação, declarando primeiramente o domínio do problema e os espaços das funções, apresentando o problema forte para uma formulação três campos. O método de Galerkin clássico é demonstrado para uma aproximação de elementos finitos multi-campos e baseado nele introduz-se a formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS) através da adição à formulação de Galerkin clássica de termos estabilizados e funções do comprimento de malha empregado. É apresentado o problema matricial e o método de quase-Newton como forma de resolver o sistema de equações não lineares juntamente com seu algoritmo.

Os resultados numéricos obtidos e suas análises estão descritos no Capítulo 4. As análises e simulações são apresentadas para escoamentos isocóricos através de uma expansão abrupta com razão de aspecto 1:4 e para os três tipos de fluidos viscoplásticos possíveis: *shear-thinning*, newtoniano e *shear-thickening*. São demonstrados e analisados resultados das iso-regiões de tensão, campo de pressão e velocidades para uma vasta gama de números de Herschel-Bulkley

sendo assim avaliada sua influência nos três tipos de fluidos viscoplásticos. Todos os resultados mostram-se coerentes e fisicamente realistas estando de acordo com a literatura, demonstrando credibilidade e segurança no método aplicado e no código computacional desenvolvido.

5.1 COMENTÁRIOS FINAIS

Avaliando os comentários e análises descritas no Capítulo 4, podem-se destacar os seguintes tópicos:

- A formulação multi-campos e a aproximação de elementos finitos GLS mostrou-se bastante estável e confiável na aproximação de escoamentos de fluidos não-Newtonianos viscoplásticos, caracterizando com precisão as zonas onde ocorre escoamento ou movimento de corpo rígido e a dependência da viscosidade em relação à taxa de cisalhamento.
- Pode-se verificar uma forte influência no número de Herschel-Bulkley no crescimento das zonas rígidas no escoamento de fluidos viscoplásticos, onde a atuação deste número adimensional se torna mais presente principalmente para HB mais baixos e pouco atuante para HB altos.
- Analisando-se a influência do índice de *power-law* em relação ao aparecimento das zonas rígidas, percebe-se dois comportamentos distintos no escoamento de fluidos viscoplásticos a medida que se simula um crescimento deste índice: crescimento das zonas rígidas a jusante do plano de expansão; diminuição da zonas rígidas a montante do plano de expansão.
- Campos de pressão apresentam maiores Δp para maiores números de Herschel-Bulkley o que se demonstra coerente, onde ocorrem maiores tensões de cisalhamento devido ao maior gradiente de velocidades na parede e por consequência maiores perdas de carga.
- O perfil de velocidades na direção do eixo x_1 apresenta-se próximo ao parabólico para os casos de fluidos viscoplásticos que apresentam pseuplasticidade, com camadas limites suaves; para o caso de fluidos viscoplásticos com dilatância o perfil de velocidades mostra-se achatado e com uma camada limite severa.
- Observando-se os resultados do perfil de velocidades na direção do eixo x_2 pode-se concluir que os dutos tanto de entrada quanto de saída possuem um comprimento suficiente para que o escoamento torne-se hidrodinamicamente desenvolvido.

- E por fim verificou-se que os resultados obtidos nessa Dissertação possuem uma boa concordância com os resultados encontrados na literatura, mostrando-se coerente e confiáveis, dando assim credibilidade a metodologia apresentada.

5.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Como complemento da pesquisa desenvolvida nesta Dissertação pode-se sugerir as seguintes propostas de trabalho:

- introduzir o termo de inércia nas simulações dessa Dissertação, observando a influência do número de Reynolds;
- estudar a influência de diferentes razões de aspecto da expansão abrupta planar;
- simular diferentes escoamentos de fluidos viscoplásticos como: expansões abruptas axissimétricas; cavidades forçadas; contrações abruptas planares e axissimétricas; ao redor de um cilindro;
- Calcular a perda de carga localizada devido a expansão através da correção de Couette em função dos parâmetros reológicos;
- introduzir um método de malha adaptativa para melhor determinar a *yielded surface*, onde nas regiões de maior importância ocorreria um refinamento dinâmico;
- realizar simulações tridimensionais para melhor determinar o comportamento reológico e a topologia do escoamento laminar em expansões abruptas planares;
- realizar os mesmos estudos apresentados neste presente trabalho utilizando outras metodologias, assim validando os resultados e a metodologia utilizada.

Após a conclusão do trabalho, pode-se dizer que os objetivos iniciais traçados foram atingidos onde pôde-se determinar e estudar os comportamentos apresentados por um escoamento planar de um fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley, determinando um estudo da reologia do material, onde pôde-se observar suas propriedades viscosas considerando a dinâmica e a cinemática de suas deformações.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agouzal A. , K. Allali, K. Najib, 2005. “Non-conforming finite element discretisations of a class of non-Newtonian flows”, **Applied Mathematics and Computation**, vol. 168, pp. 1004-1019.

Alexandrou, A. N., McGilvrey, T. M., and Burgos, G., 2001. "Steady Herschel-Bulkley fluid in tree-dimensional expansions", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.**, vol. 100, pp. 77-96.

Astarita G., Marrucci G., 1974. “**Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics**” McGraw-Hill, London.

Balmforth, N. J., Forterre Y., Pouliquen O., 2008. “The viscoplastic Stokes layer”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.**

Barnes, H. A., 1999. “The Yield stress – a review or 'παντα' – everything flows?”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 81, pp. 133-178.

Barnes, H. A., Roberts, G. P., and Carew, P., 2001. “Modelling the flow behaviour of very shear-thinning liquids”, **Chemical Engineering Science**, vol. 56, pp 5617-5623.

Behr, A. M., Franca, L. P., Tezduyar, T. E., 1993. “Stabilized finite element methods for the velocity – pressure – stress formulation of incompressible flows”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 104, pp. 31-48.

Blasco, J., 2007. “An anisotropic GLS-stabilized finite element method for incompressible flow problems ”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 197, p. 3712–3723.

Brasil Jr., A.P. ,. “A new algorithm for simulating viscoelastic flows accommodating piecewise linear finite elements ”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, vol. 215, pp. 311-319.

Brooks, A.N., Hughes, T.J.R., 1982. “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convective Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, p. 199-259.

Burgos, G., Alexandrou, A. N., and Entov, V., 1999. "On the determination of yield surfaces in Herschel-Bulkley fluids", **Journal of Rheology**, vol. 43 (3), pp. 463-483.

Carmo E. G. D., Alvarez G. B., Loula A. F. D., Rochinha F. A., 2008. “A nearly optimal Galerkin projected residual finite element method for Helmholtz problem ”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol 197, pp. 1362–1375

Chen-Hao Wang, Jeng-Rong Ho, 2008. “Lattice Boltzmann modeling of Bingham plastics”, **Physica A**, vol 387, pp.4740–4748.

Christophe Ancey, Steve Cochard, 2008. "The dam-break problem for Herschel–Bulkley viscoplastic fluids down steep flumes", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**.

Collocott, T.C., 1971. "**Chambers Dictionary of Science and Technology**", W.R. Chambers, Edinburgo.

Considine, D.M., 1968. "**Van Nostrand's Science Encyclopaedia**", 5ª edição., Van Nostrand, Nova York.

Coronado, M. J., Arora, D., Behr and M., Pasquali, M., 2006. "Four-field Galerkin/Least-squares formulation for viscoelastic fluids", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 140, pp. 132-144.

Franca, L.P., and Frey, S., 1992. "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 99, pp. 209-233.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003a. "Finite element approximation for single-phase multicomponent flows", **Mechanics Research Communications**, USA.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003b. "Galerkin least-squares approximations for generalized newtonian flows", Preprint submitted to **Journal of Fluids Engineering**, USA.

Hughes, T.J.R., 1987. "**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

Johnson, C., 1987. "**Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**", Cambridge University Press, Cambridge.

Illingworth, V., 1991. "**Penguin Dictionary of Physics**", Penguin Books, Londres.

Labeur R.J., Wells G.N., 2007. "A Galerkin interface stabilisation method for the advection–diffusion and incompressible Navier–Stokes equations ", **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, vol. 196, pp. 4985–5000.

Laurent Chupin, Liviu Iulian Palade, 2008. "Generalized Newtonian and Herschel–Bulkley yield stress fluids pressure behavior near the tip of a sharp edge in thin film flows ", **Physics Letters A**, vol. 372, pp. 6404–6411.

Mitsoulis E., 2008. "Numerical simulation of calendering viscoplastic fluids", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 154, pp. 77-88.

Naccache M. F., Barbosa R. S., 2007. "Creeping flow of viscoplastic materials through a planar expansion followed by a contraction", **Mechanics Research Communications**, vol. 34, pp. 423-431.

Neofytou, P., 2005. "A 3rd order upwind finite volume method for generalized Newtonian fluid flows", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 36, pp. 664-680.

Papanastasiou, T. C., 1987. "Flows of Materials with Yield", **Journal of Rheology**, vol. 31 (5), pp. 385-404.

Parker, S.P., 1989. “**McGraw-Hill Dictionary of Science and Technology**”, 4th ed., McGraw-Hill, Nova York.

Pascal, J., Magnin, A., and Piau, J. M., 2001. "Viscoplastic Fluid Flow Through a Sudden Axisymmetric Expansion ", **AICHE Journal**, vol. 47, pp. 2155-2166.

Patankar, S.V, 1980. "**Numerical heat transfer and fluid flow**", McGraw-Hill, New York. ‘momentum transfer in three-dimensional parabolic flows’, **International Journal of heat transfer and mass transfer**, vol.15, pp. 1787-1806.

Reddy, J.N., and Gartling, D.K., 1994. “**The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**”, CRC Press Inc., USA.

Robinson, M., 1996. “**Chambers 21st Century Dictionary**”, W.R. Chambers, Edinburgo.

Roquet N., Saramito P., 2007. “An adaptive finite element method for viscoplastic flows in a square pipe with stick–slip at the wall ”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol.

S. Berrone a , M. Marro, 2008. “Space-Time adaptive simulations for unsteady Navier-Stokes problems ”, **Computers & Fluids**.

Scott, P. S., and Mirza, F., 1988. “Finite-Element of Laminar Viscoplastic Flows with Regions of Recirculation”, **Journal of Rheology**, vol. 32 (4), pp. 387-400.

Souza Mendes, P. R., Naccache, M. F., Vargas, P. R., and Marchesini, F. H., 2007. “Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions - contractions”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 142, pp. 207-217.

Souza Mendes, P. R., and Dutra, E. S. S., 2004. “Viscosity Function for Yield-Stress Liquids”, **Applied Rheology**, vol. 14, pp. 296-302.

Vincent J. Ervin, Jason S. Howell, Iuliana Stanculescu, 2008. “A dual-mixed approximation method for a three-field model of a nonlinear generalized Stokes problem ”, **Computer. Methods Applied Mechanics and Engineering**, vol. 197, pp. 2886–2900.

Zinani, F.; Frey, S., 2006. “Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids”. **Journal of Fluids Engineering** - Transactions of the Asme, Estados Unidos, v. 128, n. 4, p. 856-863.

Zhengjie Zhu , C.A. Dorao, H.A. Jakobsen, 2008. “A least-squares method with direct minimization for the solution of the breakage–coalescence population balance equation”, **Applied Mathematical Modelling**, vol. 31, pp. 513–529.