

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM ALGORITMO QUE LEVA EM CONTA  
O CONTATO E ATRITO ENTRE UM CORPO RÍGIDO E UM CORPO DEFORMAVEL

IGNACIO ITURRIOZ

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHERIA.

Porto Alegre

Abril 1991

ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

*Armando Miguel Awruch*

---

Prof. Armando Miguel Awruch  
Orientador

---

Prof. Ademar Gilberto Groehs  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Armando Miguel Awruch (Orientador)  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Guillermo Creus  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Ademar Gilberto Groehs  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof Lirio Scheffer  
D.Sc. pela Universidade de Aachen/Rep. Fed. da  
Alemanha

## AGRADECIMENTOS

Aos Professores Armando Miguel Awruch e Guillermo Juan Creus pela sua colaboração na execução deste trabalho.

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Rio Grande Do Sul pelo inestimável conhecimento transmitido.

Aos colegas e funcionários do curso pelas amizade e convivência cotidianas.

Aos professores e colegas de Universidade Nacional do Nordeste (Argentina) que me incentivaram na continuação de meus estudos no Brasil.

Agradece-se, também ao CNPQ- Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela ajuda financeira dada a este trabalho.

A Graciela y a mi familia por el apoyo  
incondicional brindado

## SUMÁRIO

Lista de Figuras .....	vii
Lista de Símbolos .....	ix
Resumo .....	xv
Abstract.....	xvi
I- INTRODUÇÃO.....	1
I.1- Apresentação do Problema - Antecedentes.....	1
I.2- Formulação do Problema, considerando as restrições devidas ao contato e atrito como condições adicionais sobre o funcional.....	2
I.3- Objetivos e Metodologia.....	9
II- RELAÇÕES BÁSICAS.....	12
II.1- Equações de Campo.....	12
II.2- Forma Fraca da Equação de Equilíbrio (Princípio dos Trabalhos Virtuais).....	13
II.3- Formulação Lagrangiana Total.....	14
II.4- Formas Incrementais.....	18
II.5- Formulação Lagrangiana Actualizada.....	20
II.6- Relações Constitutivas.....	22
III- TRATAMENTO DO PROBLEMA DO CONTATO .....	25
III.1- Condições Unilaterais do Contato.....	25
III.2- Lei de Atrito Incremental .....	27
III.3- Aplicação do Metodo dos Elementos Finitos.....	32
IV- IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	36
IV.1- Esquema Geral do Algoritmo.....	37
IV.1.1- Observações Sobre o Algoritmo.....	39
IV.2- Considerações Cinemáticas.....	40

IV.2.1-	Definição do Contorno Rígido.....	40
IV.2.2-	Função da Subrotina CONTOR.....	45
IV.2.3-	Função das Subrotinas CONLIN e CONCUR...	47
IV.2.4-	Cálculo do versor normal interno à superfície rígida no ponto em contato...	50
IV.3-	Considerações Mecânicas.....	53
IV.3.1-	Modificações implementadas para obter uma melhor distribuição das tensões nodais na zona de contato.....	55
V-	EXEMPLOS NUMERICOS.....	65
V.1-	Exemplo 1.....	65
V.2-	Exemplo 2.....	70
VI-	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	75
VI.1-	Conclusões .....	76
VI.2-	Sugestões para Próximos Trabalhos.....	77
ANEXO A-	DEMONSTRAÇÕES DAS PRINCIPAIS EXPRESSÕES DOS CAPÍTULOS II E III.....	79
A.1-	Demonstração da expressão (IV.11).....	79
A.2-	Demonstração da expresssão (IV.21).....	80
A.3-	Demonstração de expressões para a taxa do tensor de Piola-Kirchoff de segunda espécie $(\Delta S_{IJ})$ , (II.25).....	82
A.4-	Dedução da expressão (III.12).....	83
A.5-	Dedução da expressão (III.18).....	86
A.6-	Dedução das expressões (III.25) e (III.26)..	87
A.6.1-	Demonstração da expressão (a.64).....	91
A.6.2-	Demonstração da expressão (a.61).....	92
ANEXO B-	ALGUMAS DAS MODIFICAÇÕES A LEVAR EM CONTA NA FORMULAÇÃO APRESENTADA AO CONSIDERAR PLASTICIDADE COM GRANDES DEFORMAÇÕES NO COMPORTAMENTO DO CORPO FLEXÍVEL.....	93
ANEXO C-	SISTEMA ESFINGE.....	97

C.1- Generalidades.....	97
C.2- Idéias Básicas.....	98
C.3- Equações Constitutivas Para o Problema Elastoplástico com grandes deformações.....	99
C.4- Equações Constitutivas .....	102
C.5- Princípio Variacional - Formulação do Método dos Elementos Finitos.....	109
Bibliografia.....	115

## LISTA DE FIGURAS

### Figura

I.1- Corpo referido a um sistema de eixos cartesianos com uma fronteira de contato função da carga aplicada.....	3
II.1- Corpo referido a um sistema de eixos cartesianos.....	13
II.2- Configuração de referencia para análise de grandes deformações.....	15
III.1- Representação das superfícies definidas sobre o corpo deformável e o corpo rígido $\mathcal{K}$ e $\mathcal{Q}$ respectivamente.....	26
III.2- Superfície rígida em contato com o corpo deformável.	31
III.3- Representação da função F no espaço das tensões tangenciais.....	31
III.4- Carga e descarga na curva definida pela lei de Coulomb.....	32
IV.1- Curva que mostra a variação do coeficiente de atrito $\mu_F$ em função do deslocamento tangencial relativo $\bar{u}_{TR}$ .	39
IV.2- Representação paramétrica de uma reta no plano.....	42
IV.3- Representação paramétrica de uma parábola no plano...	43
IV.4- Representação paramétrica de um arco de círculo.....	44
IV.5- Exemplo que ilustra a forma de trabalho da subrotina CONTOR.....	46
IV.6- Análise do encontro entre um contorno do corpo rígido e um nó do corpo deformável da zona potencial de contato.....	48
IV.7- Representação do versor normal interno num ponto da superfície rígida.....	51
IV.8- Representação dos valores sobre o contorno.....	57
IV.9- Representação dos termos afetados pela penalidade	

sobre o contorno.....	59
IV.10- Zona potencial de contato formada por três contornos elementares do corpo flexível.....	60
V.1- Cilindro rígido que impõe deformações sobre um corpo flexível.....	66
V.2- Malha indeformada que discretiza o corpo flexível da figura V.1 com 178 elementos isoparamétricos lineares de 4 nós.....	67
V.3- Malha da figura V.2 deformada após descer o cilindro rígido 0.6 cm em direção vertical impondo deformações sobre o corpo flexível.....	68
V.4- Detalhe da figura V.3 onde pode-se observar a identificação da malha na zona de contato.....	68
V.5- Tensões computadas com os programas implementados (CONANASE1, CONANASE2) e a numérica de Chen & Kikuchi [8].....	69
V.6- Gráfico que mostra a divergência da solução com a solução teórica de Hertz.....	69
V.7- Anel rígido que impõe deformações sobre um disco flexível.....	71
V.8- Malha indeformada que discretiza o disco flexível da figura V.7 composta de 220 elementos isoparamétricos lineares de 4 nós.....	72
V.9- Malha da figura V.8 deformada após descer o anel rígido 0.2 cm. na direção vertical, impondo deformações sobre o disco flexível.....	73
V.10- Tensões computadas com o programa CONANASE1 e comparação com a solução analítica.....	74
A.1- Cubo elementar antes e depois da deformação.....	80
A.2- Vetor $\underline{z}$ aplicado em um ponto da superfície $\mathcal{X}$ e suas componentes referidas a diferentes bases .....	88
C.1- Esquema do ciclo carga- descarga de um elemento.....	104

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Capítulo I

- $\tilde{e}_i, \tilde{e}_j$  - Base de versores canônica que definem a posição dos eixos cartesianos.
- $\Gamma$  - Fronteira do corpo em estudo.
- $\Gamma_F$  - Porção da fronteira onde são aplicadas as condições mecânicas do contorno.
- $\Gamma_D$  - Porção da fronteira onde são aplicadas as condições mecânicas de contorno.
- $\Gamma_c$  - Porção da fronteira onde é possível que se produza o contato.
- $\rho$  - Função de massa específica.
- $\rho \tilde{b}, \rho \tilde{b}_i; \tilde{f}, f_i; \tilde{t}, t_i$  - Forças de volume, de superfície e forças devidas ao contato e atrito.
- $\tilde{\sigma}, \sigma_{ij}$  - Tensor de tensões de Cauchy.
- $\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$  - Tensor de deformações infinitesimais definido em (II.30) .
- $\tilde{u}, u_i$  - Deslocamentos.
- $\Delta(\ )$  - Incremento.
- $\delta(\ )$  - Variação.
- $i, j, k, l$  - Como subíndices indicam componentes cartesianas.
- $\tilde{K}$  - Matriz de Rigidez do Corpo.
- $\tilde{U}$  - Vetor de deslocamentos nodais.
- $\tilde{P}$  - Vetor de cargas nodais equivalentes.
- $J(\ ), I(\ )$  - Funcionais.
- $G_r(\tilde{u})$  - Equações diferenciais (com  $r$  que varia de 1 até  $\mathcal{R}$ ).
- $\mathcal{R}$  - Quantidade máxima de equações diferenciais.
- $\tilde{\lambda}, \lambda_r$  - Vetor dos multiplicadores de Lagrange.

- $N_{\beta}$  - Funções de interpolação
- $\beta, \varphi$  - Subíndices que variam de 1 a número máximo de nós do elemento em análise.
- $\tilde{G}$  - Matriz de rigidez de  $\mathcal{R}$  filas e  $\mathcal{M}$  colunas.
- $( )^T$  - Indica transposição.
- $\chi$  - Escalar de valor elevado.
- $\tau$  - Tempo.
- $\tilde{K}_{\mathcal{M}}$  - Matriz de rigidez global que depende das características do corpo flexível.
- $\tilde{K}_c, \tilde{F}_c$  - Matriz de rigidez e vetor de cargas que levam em conta o problema de contato
- $i$  - Superíndice que indica o número de iteração.
- $\tilde{v}_o$  - Vetor incógnita generalizado.

## Capítulo II

- $\tilde{X}, X_i; \tilde{\Theta}, \Theta_i; \tilde{x}, x_i$  - Vetor posição das configurações de referencia, actualizada e deformada respectivamente.
- $\tilde{n}, n_i$  - Versor normal interno à superfície do corpo deformável.
- $\tilde{u}, \bar{u}_i$  - Vetor de deslocamentos virtuais.
- $o, \tau$  - Como supraíndices indicam magnitude medida na configuração inicial ou actualizada respectivamente (exemplo  $\Omega^o$  indica volume do corpo medido na configuração inicial).
- $\hat{\tilde{S}}, \hat{S}_{j,i}$  - Tensor de Piola Kirchoff de primeira espécie.
- $J$  - Determinante da matriz jacobiana .
- $f, \hat{f}$  - Funções associadas a cada partícula do corpo.
- $\tilde{S}, S_{IJ}$  - Tensor de Piola-Kirchoff de segunda espécie
- $e_{IJ}^a$  - Tensor de deformações de Green definido em (II.15).
- $\tilde{R}$  - Vetor de desequilíbrio das forças no princípio dos trabalhos virtuais em forma incremental.
- $\sigma_{ij}^J$  - Taxa de tensões de Jaumann.
- $W_{ij}$  - Tensor de velocidade de rotação específica
- $Y( )$  - Função de Escoamento.

$k$	- Endurecimento isótropo.
$J_2$	- Segundo Invariante do tensor desviador.
$H_{ij}$	- Tensor desviador de tensões.
$\epsilon_{ij}^e$	- Parte elástica do tensor de deformações .
$\epsilon_{ij}^p$	- Parte plástica do tensor de deformações.
$\Lambda$	- Escalar positivo.
$D_{ijkl}^{ep}$	- Tensor das constantes do material elastoplástico para o caso geral.
$\tilde{D}_{ijkl}^{ep}$	- Tensor das constantes do material elastoplástico para o caso em que as deformações sejam pequenas frente às plásticas.

### Capítulo III

$\tilde{v}_R$	- Velocidade do corpo rígido.
$\tilde{v}$	- Velocidade do corpo flexível.
$\tilde{Q}(\cdot)$	- Função que determina a superfície do corpo rígido sobre a qual é possível que se produza o contato.
$\tilde{\mathcal{C}}(\cdot)$	- Função que determina a superfície do corpo rígido sobre a qual é possível que se produza o contato.
$u_n$	- Deslocamento na direção normal à superfície em contato.
$g_n$	- Deslocamento prescrito na direção normal à superfície em contato.
$\Gamma_c^*$	- Fronteira do corpo deformável em contato numa certa etapa do processo.
$k_n, k_T$	- Constantes de penalidade.
$u_{Ti}^e, u_{Ti}^p$	- Componentes da parte elástica e plástica do deslocamento na direção tangencial à superfície em contato.
$g_{Ti}$	- Componentes do deslocamento na direção tangencial à superfície em contato.
$FC, \cdot)$	- Lei de atrito-deslizamento de Coulomb definida em (III.8).
$\mu_F$	- Coeficiente de atrito de Coulomb.
$t_n$	- Componente normal das tensões na superfície em

contato.

- $t_{T, t_{Ti}}$  - Componente tangencial das tensões na superfície em contato.
- $\bar{u}_T^P, T_i, \bar{t}_T$  - Expressões definidas em (III.13), (III.16) e (III.17) respectivamente.
- $k_{ij}, c, D_T$  - Expressões definidas em (III.19), (III.20) e (III.21) respectivamente.
- $\vartheta$  - Constante que toma o valor 1 ou 0 dependendo se existe no elemento em análise condição de deslizamento ou adesão.
- $\hat{k}_{ij}$  - Expressão definida em (III.29).

#### Capítulo IV

- $\bar{u}_{TR}$  - Deslocamento tangencial relativo entre a superfície rígida e o corpo deformável.
- $\mu_m$  - Coeficiente de atrito máximo.
- $\mu_{inicial}$  - Coeficiente de atrito inicial.
- $m$  - Quociente entre  $\mu_m$  e  $\mu_{inicial}$ .
- $\gamma$  - Coeficiente que indica o grau de endurecimento ('slip hardening').
- $a$  - Parâmetro que permite definir a forma de um contorno rígido.
- $\tilde{a}$  - Base de polinômios em  $a$ .
- $\tilde{M}$  - Matriz de funções de interpolação da curva.
- $\tilde{P}$  - Pontos que definem a geometria da curva.
- $\hat{k}, \theta$  - Constantes que permitem definir a forma de um arco de circunferência.
- $C_x, C_y$  - Coordenadas do centro de um arco de circunferência.
- $a^*, \Delta\tau^*$  - Valores definidos na seção IV.2.3.
- $\tilde{\Phi}$  - Função vetorial definida em (IV.18).
- $\tilde{n}', \tilde{R}, \tilde{P}_4$  - Vetores definidos em (IV.24), (IV.25) e (IV.26).
- $\tilde{A}(, ), \tilde{F}(, ), \tilde{L}(, )$  - Expressões definidas em (IV.28), (IV.29) e (IV.30).
- $\tilde{\xi}(, ), \tilde{\xi}$  - Função definida em (IV.31).

- $L(C, \gamma)$  - Expressão calculada em (IV.42).  
 $\omega_i^e$  - Pesos que afetam os valores obtidos em cada ponto de integração ao utilizar o método da quadratura de Gauss.  
 $x_i^e$  - Indica coordenada do ponto de integração.  
 $h_e$  - Comprimento do lado  $e$ .  
 $\tilde{\xi}(C, \gamma), \tilde{\xi}^*(C, \gamma), \tilde{\xi}_e^*$  - Funções definidas em (IV.36), (IV.38) e (IV.40) respectivamente.  
 $\hat{L}(C, \gamma), \hat{L}_e(C, \gamma)$  - Expressões definidas na (IV.41).  
 $K_{ij}^e, F_i^e$  - Expressões definidas nas (IV.43) e (IV.44).

## Capítulo V

- $E$  - Módulo de elasticidade Longitudinal.  
 $\nu$  - Módulo de Poisson.  
 $G$  - Módulo de elasticidade transversal.

## Anexo A

- $\otimes$  - Indica produto vetorial.

## Anexo B

- $t^J$  - Taxa corrotacional de Jaumann.  
 $t_n^J, t_{Ti}^J, F^J$  - Expressões definidas em (b.2), (b.5) e (IV.6) respectivamente.

## Anexo C

- $\mathfrak{q}$  - Conjunto de tensores de ordem par.  
 $\tilde{F}$  - Gradiente da deformação.  
 $\tilde{R}$  - Matriz de rotação.  
 $\tilde{I}$  - Matriz unidade.  
 $\tilde{U}, \tilde{V}$  - Tensores de deformação esquerdo e direito respectivamente.  
 $\tilde{e}^G, \tilde{e}^A$  - Tensores de deformações específicas de Green e

Almansi.

- ( $\cdot$ ) - Indica derivada material da função com respeito ao tempo.
- $\tilde{L}$  - Gradiente de velocidade.
- $\tilde{D}$  - Velocidade de deformação específica.
- $\tilde{W}$  - Velocidade de rotação específica.
- $e, p$  - Como subíndices indicam que a magnitude corresponde à parte elástica ou plástica respectivamente.
- $\text{tr}(\ )$  - Indica traça de um tensor.
- $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}^*$  - Taxas do tensor de tensões definidos na (c.41) e (c.44).
- $\tilde{\alpha}$  - Tensor ligado ao critério de endurecimento cinemático.
- $\tilde{h}(\ )$  - Função definida na (c.52).
- $\theta^c$  - Escalar positivo que depende do material.
- $\tilde{w}, w_{ij}$  - Função definida em (c.53).
- $\tilde{h}^k(\ , \ )$  - Função escalar definida em (c.56).
- $\tilde{\sigma}, \tilde{D}$  - Vetores definidos em (c.70), (c.71).
- $\tilde{K}_{el}^{ep}, \tilde{K}_{el}^{ep}$  - Matrizes de rigidez definidas em (c.74), (c.81).
- $\tilde{B}, \tilde{N}, \tilde{r}\hat{N}, \tilde{r}\hat{B}, \tilde{N}^*$  - Matrizes definidas da (c.73) até (c.84).

## Resumo

O contato entre corpos é um dos mecanismos básicos que se apresentam na mecânica do sólido . Através de tal efeito físico é que se aplicam cargas a uma estrutura e esta as transmite a seus apoios.

Neste trabalho apresenta-se a teoria e implementação computacional de um algoritmo que permite considerar os efeitos de contato e atrito entre uma superfície rígida que prescreve deslocamentos sobre um corpo flexível de comportamento elástico linear.

As restrições são impostas empregando o método das funções de penalidade.

A lei geral do atrito associada à regra de Coulomb de deslocamento obtem-se por analogia com a teoria da plasticidade.

Na implementação computacional apareceram problemas para contornar a sobrerestrição dos termos afetados pela função de penalidade, apresentando-se duas formas de tratar os mesmos.

Finalmente são apresentados dois exemplos para testar o trabalho realizado.

## Abstract

Contact is a basic mechanism in solid mechanics. Through this physical effects loads are applied to structures and transmitted to their supports.

The theoretical formulations and the computational implementation of an algorithm, that models contact and friction effects between a rigid surface prescribing and bidimensional linear elastic body are represented in this work.

Restrictions are imposed using the penalty function approach.

A general law for friction associated with Coulomb displacement rule is obtained by analogy with plasticity theory.

Computational difficulties to eliminate locking in terms influenced by penalty functions were detected, and two approaches were used to solve this problem.

Finally, two numerical examples to test the computational code are presented.

## CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO

### I.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA - ANTECEDENTES

Um dos fenômenos básicos que se apresentam na mecânica do sólido é o contato entre corpos. Através desse evento físico aplicam-se cargas a uma estrutura e esta as transmite a seus apoios.

Até há pouco tempo, este importante aspecto do comportamento estrutural não era considerado devido fundamentalmente às não linearidades e outras características envolvidas no problema :

- a área de contato não é conhecida antes da aplicação das cargas;

- as restrições na zona de contato são unilaterais, ou seja, atuam num só sentido e, portanto devem ser colocadas como desigualdades;

- entre as superfícies em contato apresentam-se fenômenos físicos complexos os quais requerem considerações mecânicas e matemáticas especiais .

Nos últimos anos realizaram-se avanços significativos no estudo de certos problemas de contato aplicando-se o método de elementos finitos; sendo que alguns destes problemas podem ser enquadrados dentro do campo das inequações variacionais.

Tem-se, em princípio, duas formas de aproximação empregando-se o método de elementos finitos.

Uma delas é aplicando a aproximação diretamente sobre a inequação variacional, a qual leva a um sistema de equações não lineares cuja solução é possível mediante técnicas de otimização. Esta forma de trabalho conduz a algoritmos computacionais complexos e difíceis de implementar num programa convencional de análise estrutural. Entretanto tem a vantagem de conduzir a resultados mais exatos, além da maior generalidade na formulação do problema.

Sobre esta linha de pesquisa se pode mencionar o trabalho de Campos & Oden [5]. Outras referências podem ser encontradas na revisão feita por Bohm [3] sobre as distintas metodologias empregadas. Do Brasil cabe destacar os trabalhos feitos por Barbosa [9] e Fancello [14] onde também se encontram referências de outras pesquisas realizadas no país, nesta área.

A outra forma de aproximação é considerar a compatibilidade cinemática das superfícies em contato junto com os efeitos de atrito como condições adicionais que a solução do funcional deve satisfazer. Esta forma de análise leva a algoritmos independentes do comportamento do material considerado e fáceis de implementar num programa de análise estrutural.

Combinando esta forma de trabalho com formulações do tipo incremental é possível considerar grandes deformações nos corpos, incluir leis constitutivas plásticas, aspectos dinâmicos e térmicos, etc. Assim pode-se então abordar problemas de engenharia de interesse prático como, por exemplo, análise de processos de conformação mecânica e impacto entre corpos.

## I.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA CONSIDERANDO AS RESTRIÇÕES DEVIDAS AO CONTATO E ATRITO COMO CONDIÇÕES ADICIONAIS SOBRE O FUNCIONAL

Seja um corpo flexível definido num espaço Euclideano de três dimensões referido a um sistema fixo retangular de coordenadas cartesianas  $\underline{x}$  com origem  $o$  e uma base de versores  $\underline{e}$ , ver figura I.2. .

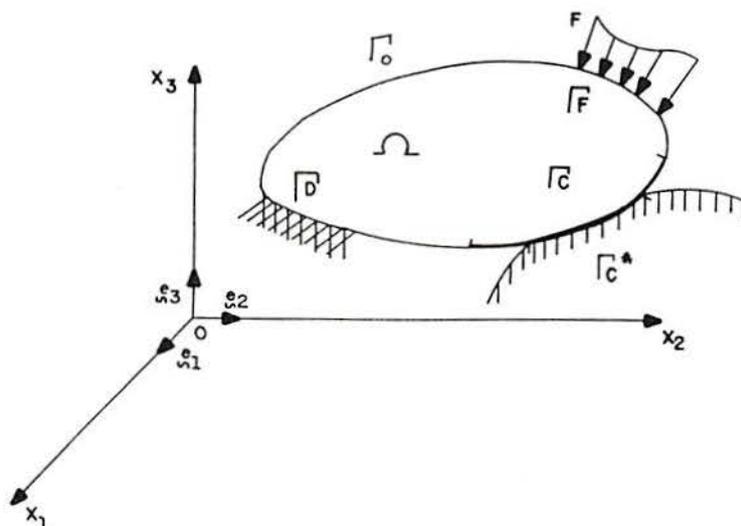


Fig I.1 -Corpo referido a um sistema de eixos cartesianos com uma fronteira de contato função da carga aplicada.

Dito corpo ocupa um volume  $\Omega$  com uma superfície  $\Gamma$  composta por uma porção onde podem aplicar-se condições mecânicas de contorno  $\Gamma_F$ , outra onde verificam-se as condições cinemáticas do contorno  $\Gamma_D$  e por último um setor da superfície onde se pode produzir contato com outro corpo  $\Gamma_C$ . Nenhuma destas superfícies parciais estão superpostas, o que pode também expressar-se como

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_F \cup \Gamma_D \cup \Gamma_C \cup \Gamma_0 \\ \Gamma_F \cap \Gamma_D &= \phi \\ \Gamma_C \cap \Gamma_D &= \phi \\ \Gamma_C \cap \Gamma_F &= \phi\end{aligned}$$

Suponha-se que sob o corpo atue a força de volume  $\underline{p}$  ( $=\rho b_i \underline{e}_i$ ), as forças de superfície  $\underline{f}$  ( $=f_i \underline{e}_i$ ) dentro da fronteira  $\Gamma_F$  e as forças de contato  $\underline{t}$  ( $=t_i \underline{e}_i$ ) dentro da fronteira  $\Gamma_C$ , num determinado passo de um processo incremental

de cargas. Aplicando sobre tal corpo o princípio dos trabalhos virtuais em forma incremental chega-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \Delta b_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_F} \Delta f_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \Delta t_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (I.1)$$

onde  $\underline{\sigma}$  ( $=\sigma_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j$ ),  $\underline{\varepsilon}$  ( $=\varepsilon_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j$ ) e  $\underline{u}$  ( $=u_i \underline{e}_i$ ), são as tensões, deformações e deslocamentos do corpo flexível no um passo de carga respectivamente.  $\rho$ ,  $\rho \underline{b}$ ,  $\underline{f}$ , e  $\underline{t}$ , são a massa específica do material, as forças de volume, de superfície e as forças de contato respectivamente.  $\Delta$  significa incremento e  $\delta$  variação; os subíndices  $i$  e  $j$  variam de 1 a 3 indicando componentes, sendo que todo índice repetido duas vezes indica soma.

Com os três primeiros termos de (I.1) pode aplicar-se o método dos elementos finitos chegando-se finalmente a uma equação do tipo

$$\underline{K} \Delta \underline{U} = \Delta \underline{P}, \quad (I.2)$$

onde  $\underline{K}$  é a matriz de rigidez válida para esse passo de carga,  $\Delta \underline{U}$  é o vetor incremental de deslocamentos nodais incógnitas e  $\Delta \underline{P}$  é o vetor de cargas nodais equivalentes incrementais.

O último termo de (I.1) não pode ser integrado diretamente porque inclui o vetor de forças incrementais de contato que são desconhecidas; frente a esta dificuldade surgem diversas formas de contornar o problema.

A maioria dos trabalhos analisados propõe uma solução mediante a combinação de um esquema iterativo com a minimização de um funcional com restrições devidas ao contato.

Isto equivale a encontrar uma função  $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x})$  que minimize o funcional  $J(\underline{u})$  e também verifique  $\mathcal{R}$  equações diferenciais do tipo

$$G_r(\underline{u}) = 0 \quad (I.3)$$

com  $r$  variando de 1 até  $\mathcal{R}$ .

O problema colocado nesses termos pode ser resolvido utilizando *multiplicadores de Lagrange* ou mediante *funções de penalidade*.

O método dos multiplicadores de Lagrange pode ser resumido da seguinte maneira; seja a função deslocamento  $u$  que minimiza o funcional

$$J(\underline{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_F} f_i u_i d\Gamma -$$

(I.4)

e que também verifica  $\mathcal{R}$  equações diferenciais do tipo (I.3). Isto equivale a encontrar a  $\underline{u}$  que minimize o seguinte funcional indexado

$$I(\underline{u}, \underline{\lambda}) = J(\underline{u}) + \int_{\Omega} \lambda_r (G_r(\underline{u})) d\Omega \quad (I.5)$$

onde  $\underline{\lambda}$  é um vetor de  $\mathcal{R}$  constantes desconhecidas chamadas de multiplicadores de Lagrange.

Escrevendo as componentes da função  $\underline{u}$  através dos seus valores nodais  $U_{i\beta}$  e de funções de interpolação  $N_{\beta}$ , com  $\beta$  variando de 1 até o número de nós de cada elemento, isto é

$$u_i = U_{i\beta} N_{\beta} \quad (I.6)$$

aplicando o método dos elementos finitos sob cada domínio elementar e efetuando a montagem de cada uma das equações elementares tem-se

$$I(\underline{U}, \underline{\lambda}) = 1/2 \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} - \underline{P}^T \underline{U} + \underline{\lambda}^T \underline{G} \underline{U} \quad (I.7)$$

onde  $\underline{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais do sistema,  $\underline{K}$  é a matriz de rigidez global,  $\underline{P}$  o vetor de cargas nodais equivalentes,  $\underline{\lambda}$  é o vetor composto pelos  $\mathcal{R}$  multiplicadores de Lagrange e  $\underline{G}$  uma matriz de coeficientes de  $\mathcal{R}$  filas e  $\mathcal{M}$  colunas, sendo  $\mathcal{M}$  o número de graus de liberdade do sistema.

Impondo as condições de minimização sobre (I.5) com relação às variáveis nodais  $\underline{U}$  e aos multiplicadores  $\underline{\lambda}$  obtém-se o sistema de equações seguinte

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I(\underline{U}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{U}} = 0 &\longrightarrow \underline{K} \underline{U} - \underline{P} + \underline{\lambda}^T \underline{G} = 0 \\ \frac{\partial I(\underline{U}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{\lambda}} = 0 &\longrightarrow \underline{G} \underline{U} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

Ou em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{G}^T \\ \underline{G} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

O sistema de equações (I.9) pode ser resolvido para obter os deslocamentos nodais  $\underline{U}$ , mas observa-se um incremento

no número de equações a resolver e o aparecimento de elementos nulos na diagonal principal da matriz dos coeficientes, que determinam um aumento nos requerimentos de armazenamento e de tempo de processamento. Apesar destes inconvenientes, existem varios algoritmos propostos que empregam esta técnica com bons resultados; entre eles se podem citar os trabalhos de Bathe & Chaudary [2] e Chandresakaran [6].

Por sua parte, o método das funções de penalidade propõe que, a partir do funcional  $J(\underline{u})$  a minimizar e o conjunto de  $R$  restrições do tipo  $G_r(\underline{u}) = 0$ , que por conveniência escrevem-se  $\underline{G}(\underline{u})$ , se encontre a função  $\underline{u}$  minimizando o funcional indexado

$$I(\underline{u}) = J(\underline{u}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \kappa \underline{G}(\underline{u})^T \underline{G}(\underline{u}) d\Omega \quad (I.10)$$

onde  $\kappa$  é um escalar de valor relativamente elevado que deve ser fixado empiricamente.

Minimizando  $I(\underline{u})$  obtém-se

$$\delta I(\underline{u}) = \delta J(\underline{u}) + \int_{\Omega} \kappa \underline{G}(\underline{u}) \delta(\underline{u}) d\Omega = 0 \quad (I.11)$$

Aplicando o método dos elementos finitos sobre (I.11), encontra-se a função  $\underline{u}(\underline{x})$  que verifica as condições impostas. As maiores dificuldades que apresenta este método são que o valor de  $\kappa$  depende do problema resolvido e que no termo afetado pela penalidade deve-se levar em consideração o efeito de sobre-restrição ('locking'). Por outro lado a principal vantagem é que sua implementação computacional é comparativamente simples com relação ao método dos multiplicadores de Lagrange, e além disso, não incrementa o numero de equações; a utilização deste método é, segundo Chandresakaran [6], particularmente vantajosa no caso em que uma das superfícies a entrar em contato seja rígida.

Entre os trabalhos que utilizam as funções de penalidade se destacam os de Chen & Kikuchi [7], [8], nos quais está baseada a presente tese. É também importante mencionar os estudos comparativos sobre vários métodos realizados por Browing e Guerra [19].

Seja empregando o método das funções de penalidade ou dos multiplicadores de Lagrange, mediante a aplicação do método dos elementos finitos, no tempo  $\tau$  de certo processo incremental, obtém-se uma equação matricial do tipo

$$(\tilde{K}_M + \tilde{K}_c^{I-1})_{\tau} \Delta \tilde{v}_s^I = (\Delta P - \Delta \tilde{F}_c^{I-1})_{\tau} \quad (I.12)$$

onde o vetor de deslocamentos totais no tempo  $\tau + \Delta\tau$  é dado por

$$(\tilde{v}_s)_{\tau + \Delta\tau} = (\tilde{v}_s)_{\tau} + (\Delta \tilde{v}_s) \quad (I.13)$$

Nas equações (I.12) e (I.13)  $\Delta \tilde{v}_s$  é o vetor de incógnitas,  $\Delta P$  o vetor das forças nodais equivalentes incrementais e  $\tilde{K}_M$  é a matriz de rigidez global que depende das características do corpo deformável, em geral função de  $(\tilde{v}_s)_{\tau}$ . Finalmente  $\tilde{K}_c$  e  $\Delta \tilde{F}_c$  são, respectivamente, a matriz e o vetor de cargas adicionais que levam em conta o problema de contato. O supra-índice  $i$  indica o número de iteração.

No caso de empregar-se multiplicadores de Lagrange para considerar as restrições tem-se o vetor incógnita

$$\Delta \tilde{v}_s = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{U} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

sendo que  $\Delta \tilde{U}$  é o vetor que contém os incrementos dos

deslocamentos nodais e  $\underline{\lambda}$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange, que fisicamente estão ligados com o valor das forças aplicadas nos nós em contato. Se utilizando o método da função de penalidade então o vetor incógnita será

$$\Delta \underline{v}_s = \Delta \underline{U}. \quad (I.15)$$

Tanto  $\underline{K}_c$  como  $\underline{F}_c$  além de ser funções de  $(\underline{v}_s)_T$ , devido a variação de área do contato durante o processo, dependem do vetor incógnita,  $(\Delta \underline{v}_s)$ , dentro de cada passo incremental, pela não linearidade implícita na determinação do tipo de contato : adesivo ('sticking') ou deslizante ('sliding'). Por tanto, a solução deve ser iterativa. O processo é repetido até satisfazer algum critério de convergência, o qual indica, para o estado que se está analisando, que sejam aproximadamente preenchidas tanto as condições de equilíbrio como as de compatibilidade dos deslocamentos e das restrições impostas.

Analisando os diferentes enfoques dados à forma de tratar o contato, realizou-se a escolha do caminho a seguir e a partir daí fixou-se os objetivos para esta tese.

### I.3 OBJETIVOS E METODOLOGIA

A finalidade deste trabalho é implementar um algoritmo que leve em conta o contato e atrito no caso de um corpo rígido que avança impondo deformações sobre um corpo flexível num processo incremental.

Para isto utilizou-se o método dos elementos finitos para discretizar o corpo deformável, o qual assumiu-se com um comportamento elástico linear. Analisou-se os casos de estado plano de deformações e axissimétrico empregando-se um elemento isoparamétrico linear de 4 nós.

O corpo rígido foi modelado definindo seu contorno mediante combinação de curvas conhecidas (retas, arco de círculo, arco de parábola ).

Para considerar o contato e o atrito utilizou-se uma formulação similar à explicada na seção I.2, baseada nos trabalhos de Chen & Kikuchi [7] e [8], nos quais as restrições são aplicadas utilizando o método das funções de penalidade.

Teve-se presente que o algoritmo com um mínimo de modificações possa ser implementado para o material flexível, considerando um comportamento elastoplástico com grandes deformações.

Utilizou-se como base para a implementação computacional um sistema de elementos finitos de análise estrutural chamado Esfinge [17], o qual foi desenvolvido dentro do CPGEC.

No capítulo II apresentam-se as relações básicas que definem o comportamento de um corpo flexível sobre a ação de cargas, sua leitura é prescindível para a compreensão deste trabalho.

No capítulo III analisa-se a formulação usada no algoritmo para levar em conta os efeitos de contato e atrito.

O capítulo IV mostra as características da implementação computacional e menciona as dificuldades numéricas surgidas.

No capítulo V expõem-se dois exemplos que ilustram a forma de trabalhar do algoritmo.

Finalmente no capítulo VI indicam-se as conclusões obtidas nesta tese.

A título de apêndice se agregaram -se três anexos

complementam este trabalho e podem servir como auxílio em futuras implementações na área.

No anexo A realizam-se deduções das principais fórmulas dos capítulos II e III .

No anexo B agregam-se algumas idéias de como proceder na implementação do algoritmo de contato se o material deformável tem um comportamento elastoplástico com grandes deformações.

Finalmente no anexo C apresenta-se um resumo da formulação e características essenciais do sistema Esfinge utilizado na implementação computacional.

## CAPÍTULO II: RELAÇÕES BÁSICAS.

Neste capítulo apresenta-se as principais relações e definições que permitem determinar o comportamento de um corpo flexível submetido a ação de cargas. Também são abordados alguns tópicos sobre grandes e plasticidade que não são utilizados na formulação implementada. Por esta razão a leitura é prescindível para a compreensão do corpo da tese.

### II.1 EQUAÇÕES DE CAMPO

Seja um corpo flexível num espaço Euclidiano e suponha-se escolhida uma lei constitutiva que relacione tensões e deformações. O campo de tensões pode ser determinado resolvendo as seguintes equações de equilíbrio,

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad (\text{II.1})$$

em  $\Omega$ , que satisfazem as condições de bordo

$$u_i = g_i \quad (\text{II.2})$$

em  $\Gamma_D$ , e

$$\sigma_{ij} n_j = f_i \quad (\text{II.3})$$

em  $\Gamma_F$ , onde  $\underline{\sigma} (= \sigma_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j)$  é o tensor de tensões de Cauchy definido na configuração deformada  $\Omega$ , a qual está referida a um sistema de coordenadas retangulares cartesiano  $\underline{x} (= x_i \underline{e}_i)$  com origem em O, e uma base de vetores  $\underline{e}_i$ , (ver figura II.1); a vírgula com sub-índice representa a derivada parcial com relação à coordenada  $x_i$ , por exemplo  $\sigma_{ij,j} = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ ;  $\rho$  é

a massa por unidade de volume,  $\underline{b} (= b_i \underline{e}_i)$  é o vetor força de volume por unidade de massa,  $\underline{u} (= u_i \underline{e}_i)$  é o vetor deslocamento, o qual está especificado por uma determinada função vetorial  $\underline{g} (= g_i \underline{e}_i)$  na porção da fronteira  $\Gamma_D$  e  $\underline{f} (= f_i \underline{e}_i)$  é uma função vetorial que descreve uma determinada carga por unidade de superfície prescrita em  $\Gamma_F$  cujo versor normal externo é definido por  $\underline{n} (= n_i \underline{e}_i)$ .

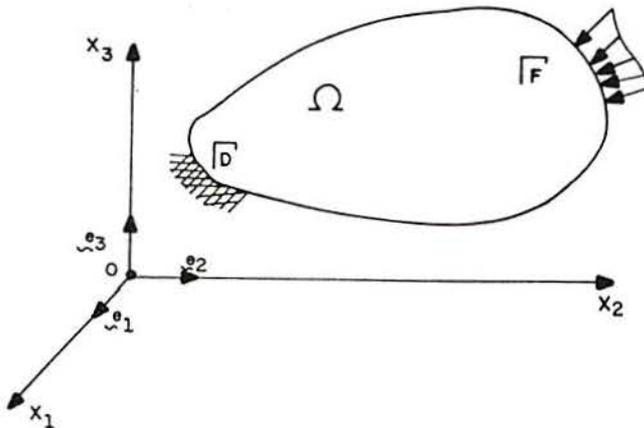


Figura II.1 - Corpo referido a um sistema de eixos cartesianos

## II.2 FORMA FRACA DA EQUAÇÃO DE EQUILIBRIO (PRINCIPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS)

Uma forma de abordar o problema de valores de contorno descrito na seção anterior é aplicando o princípio dos trabalhos virtuais sobre a equação de equilíbrio apresentada em (II.1).

Seja  $\bar{\underline{u}} (= \bar{u}_i \underline{e}_i)$  um vetor de deslocamentos virtuais arbitrário tal que se verifique  $\bar{u}_i = 0$  em  $\Gamma_D$ . Multiplicando  $\bar{u}_i$

em ambos membros de (II.1) e integrando sobre todo o domínio  $\Omega$ , depois de aplicar o teorema da divergência fica a seguinte expressão

$$\int_{\Omega} \sigma_{ji} \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \rho b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_F} f_i \bar{u}_i d\Gamma \quad (\text{II.4})$$

$$\forall \bar{u}_i / \bar{u}_i = 0 \text{ em } \Gamma_D.$$

Deve-se também utilizar as condições de contorno (II.2) e (II.3) na superfície  $\Gamma$  a qual assume-se até agora composta por duas porções que não estão superpostas,  $\Gamma_F$  e  $\Gamma_D$ . Posteriormente serão incluídas as condições de contorno do contato unilateral com fricção, que serão discutidas em detalhe.

Aplicações diretas de (II.4) estão limitadas a problemas lineares onde as deformações são pequenas e o material responde linearmente durante a deformação.

A equação (II.4) está formulada na configuração deformada  $\Omega$ . Se a deformação do corpo é infinitesimal, esta expressão pode ser usada sem dificuldade já que  $\Omega$  será essencialmente igual à configuração inicial  $\Omega^0$  livre de tensões. Mas quando as deformações são finitas,  $\Omega$  é em geral consideravelmente diferente de  $\Omega^0$  que é uma das incógnitas a ser determinada. Portanto poderia ser mais conveniente que (II.4) fosse transformada e referida à configuração de referência, a qual poderia ser identificada com a inicial  $\Omega^0$ .

Escrever o princípio dos trabalhos virtuais na configuração de referência é essencial quando esta é tomada como base para realizar incrementos lineares no tratamento de equações não lineares.

### II.3 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA TOTAL

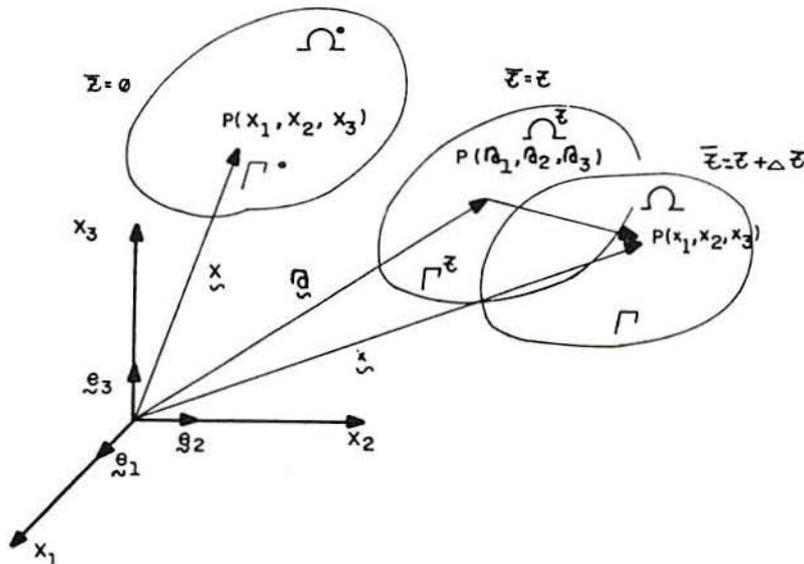
Considere-se um corpo ocupando a região  $\Omega^0$  com uma fronteira  $\Gamma^0$  inicial, à qual corresponde uma região  $\Omega$  com uma fronteira  $\Gamma$  no estado deformado, como pode ser visto na figura II.2. A posição de qualquer ponto material do corpo nas configurações de referência e deformada pode ser localizada pelos vetores de posição  $\underline{X}(=X_I \underline{e}_I)$  e  $\underline{x}(=x_i \underline{e}_i)$  respectivamente. Sub-índices maiúsculos indicam magnitude medida com relação ao estado de referência. A diferença entre  $\underline{X}$  e  $\underline{x}$  é definida pelo vetor de deslocamentos com suas componentes

$$u_i = x_i - X_I. \quad (\text{II.5})$$

Durante a deformação a massa do corpo se conserva, logo

$$\int_{\Omega} \rho \, d\Omega = \int_{\Omega^0} \rho^0 \, d\Omega^0 \quad (\text{II.6})$$

onde  $d\Omega$  e  $d\Omega^0$  são diferenciais de volume.



$\tau=0$  (configuração inicial)  $\rightarrow \Omega^0, \Gamma^0$   
 $\tau = \tau + \Delta\tau$  (configuração deformada)  $\rightarrow \Omega, \Gamma$   
 $\tau = \tau$  (configuração atualizada)  $\rightarrow \Omega^T, \Gamma^T$

Figura II.2- Configuração de referência para análise de grandes deformações.

Qualquer ponto material pode ser representado por uma função tanto de  $\underline{x}$ , na configuração deformada, como de  $\underline{X}$  na configuração inicial, sendo que a relação entre  $\underline{x}$  e  $\underline{X}$  esta univocamente definida. Se poderia utilizar a expressão (II.6) para transformar (II.4) de  $\Omega(\Gamma)$  a  $\Omega_0(\Gamma^0)$  como segue

$$\int_{\Omega^0} \hat{S}_{j,i} \bar{u}_{i,j} d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \rho^0 b_i^0 \bar{u}_i d\Omega^0 + \int_{\Gamma_F^0} f_i^0 \bar{u}_i d\Gamma^0$$

(II.7)

onde  $\hat{S} (= \hat{S}_{j,i} \underline{e}_i \underline{e}_j)$  é o primeiro tensor de Piola-Kirchoff [22] que está relacionado ao tensor de Cauchy  $\sigma_{ij}$  por

$$\hat{S}_{j,i} = J X_{j,j} \sigma_{ji} , \quad (II.8)$$

$\underline{f}^0 (= f_i^0 \underline{e}_i)$  é o vetor tensão definido sob a superfície indeformada  $\Gamma_F^0$ ,  $J (= \rho^0 / \rho)$  em (II.8) é o determinante da matriz jacobiana  $[\partial x_i / \partial X_j]$ ; é importante destacar que  $u_{i,j}$  representa a derivada parcial da  $i$ -ésima componente de  $u$  com relação á das coordenadas  $X_j$  chamadas também coordenadas materiais definidas na configuração de referência  $\Omega^0$ .

Seja  $f$  uma função associada à cada partícula ou à massa do corpo, então a relação fica

$$\int_{\Omega} \rho f(x) d\Omega = \int_{\Omega_0} \rho^0 \hat{f}(X) d\Omega_0, \quad (II.9)$$

com  $\hat{f}(X) = f(\underline{x}(X))$ ; que representa a transformação entre a configuração deformada e a de referência. Desta forma o trabalho interno pode escrever-se

$$\int \sigma_{ji} \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \rho^{-1} \rho \sigma_{ij} X_{J,j} \bar{u}_{i,J} d\Omega =$$

(II.10)

$$\int_{\Omega} \rho^{\circ} \rho^{-1} \sigma_{ji} X_{J,j} \bar{u}_{i,J} d\Omega^{\circ}$$

onde se empregaram as seguintes relações

$$u_{i,j} = X_{J,j} u_{i,J} \quad (\text{II.11})$$

(ver sua demonstração em A.1), e

$$J \rho = \rho^{\circ} \quad (\text{II.12})$$

transformando-se então o princípio dos trabalhos virtuais na configuração deformada (II.4) na configuração de referência (II.7).

É importante ressaltar que o tensor de tensões de Cauchy é simétrico, ou seja que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Porém da relação (II.8) pode-se ver que o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchoff não é simétrico. Para evitar trabalhar com um tensor não simétrico se definirá um outro tensor da seguinte forma

$$S_{JI} = X_{I,i} \hat{S}_{Ji}$$

ou

(II.13)

$$S_{IJ} = J X_{I,i} X_{J,j} \sigma_{ji}$$

onde  $\underline{\underline{S}} (= S_{IJ} \underline{\underline{e}}_I \underline{\underline{e}}_J)$  é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchoff que possui a característica de ser simétrico. Pode observar-se que este último tensor pode ser obtido a partir de  $\sigma_{ij}$  através de transformações cinemáticas. Pode-se então expressar (II.7) da seguinte forma

$$\int_{\Omega^0} S_{IJ} x_{i,I} \bar{u}_{i,J} d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \rho^0 b_i \bar{u}_i d\Omega^0 + \int_{\Gamma_F^0} f_i^0 \bar{u}_i d\Gamma^0 \quad (\text{II.14})$$

a qual é chamada formulação Lagrangiana total do problema de valores do contorno apresentado em (II.1) a (II.3), sendo  $\Omega^0$  identificada com a configuração inicial do corpo.

Para esclarecer o significado do termo esquerdo da equação (II.14) lembre-se que o tensor de deformações de Green vem dado por

$$e_{IJ}^G = 1/2(x_{i,I} x_{i,J} - \delta_{IJ}) \quad (\text{II.15})$$

sendo que  $\delta_{IJ}$  indica o delta de Kronecker.

Da expressão (II.15) pode-se encontrar a deformação virtual  $\bar{e}_{IJ}^G$  que tem a forma seguinte

$$\bar{e}_{IJ}^G = 1/2(x_{i,I} \bar{u}_{i,I} + u_{i,I} x_{i,J}). \quad (\text{II.16})$$

Então é possível escrever que

$$S_{JI} x_{i,I} \bar{u}_{i,J} = S_{JI} \bar{e}_{IJ}^G \quad (\text{II.17})$$

e desta forma o termo esquerdo da equação (II.14) fica mais claro.

#### II.4 FORMAS INCREMENTAIS

A linearidade das equações do equilíbrio oferece uma gran vantagem para resolver problemas de valores do contorno. Desafortunadamente para grandes deformações e propriedades materiais gerais as equações são altamente não lineares. Por essa razão, em muitas aplicações, é conveniente

derivar formas linearizadas destas equações aceitando que a resposta não linear total de um corpo é substituída por uma seqüência comportamentos lineares incrementais.

Suponha-se que no tempo  $\tau$  o corpo deformado ocupa a configuração  $\Omega^\tau$ . Num instante posterior  $\tau + \Delta\tau$ , o corpo se deformou até coincidir com  $\Omega$ , a qual é suficientemente próxima de  $\Omega^\tau$  (ver figura II.2). As tensões no corpo e as coordenadas de cada ponto mudam de  $S_{IJ}$  para  $S_{IJ} + \Delta S_{IJ}$  e de  $x_i$  para  $x_i + \Delta u_i$ , devido ao incremento de  $\Delta b_i^\circ$  e  $\Delta f_i^\circ$ . Assim para cada sucesivo incremento a equação (II.14), negligenciando os termos de ordem superior  $\Delta S_{IJ} \Delta u_{i,I}$  e  $\Delta S_{IJ} \Delta u_{i,J}$ , toma a seguinte forma

$$\int_{\Omega^\circ} (\Delta S_{IJ} x_{i,I} \bar{u}_{i,J} + S_{IJ} \Delta u_{i,I} \bar{u}_{i,J}) d\Omega^\circ = \quad (II.18)$$

$$= \tilde{\mathcal{R}} + \int_{\Omega^\circ} \rho^\circ \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega^\circ + \int_{\Gamma_F^\circ} \Delta f_i^\circ \bar{u}_i d\Gamma^\circ,$$

onde

$$\tilde{\mathcal{R}} = - \int_{\Omega^\circ} S_{JI} x_{i,J} \bar{u}_{i,I} d\Omega^\circ + \int_{\Omega^\circ} \rho^\circ b_i \bar{u}_i d\Omega^\circ + \int_{\Gamma_F^\circ} f_i^\circ \bar{u}_i d\Gamma^\circ \quad (II.19)$$

Deve-se lembrar que o vetor de carga corretor  $\tilde{\mathcal{R}}$  surge do desequilíbrio das forças resultantes. Para uma solução incremental simples,  $\tilde{\mathcal{R}}$  se considera igual a zero, mas pode-se deixar na formulação procurando sua anulação através de um proceso iterativo o qual se traduz numa diminuição dos

erros numéricos cometidos durante o processo.

Apropriadas formas para  $\Delta b_i$  e  $\Delta f_i$  podem encontrar-se na bibliografia especializada. A seguir analisa-se o caso em que  $f_i = p n_i$ , sendo  $p$  ( $p > 0$ ) uma pressão hidrostática atuante por unidade de superfície e  $n_i$  as componentes de um versor normal dirigido para a parte externa. Neste caso o segundo termo de (II.4) fica

$$\int_{\Gamma_F} f_i \bar{u}_i d\Gamma = \int_{\Gamma_F} -p \bar{n}_i \bar{u}_i d\Gamma \quad (\text{II.20})$$

empregando análise vetorial (ver A.2), pode-se chegar a que

$$d\Gamma n_i = J X_{I,i} d\Gamma^0 n_I^0 \quad (\text{II.21})$$

onde  $d\Gamma^T$  e  $d\Gamma^0$  são elementos diferenciais de  $\Gamma$  e  $\Gamma^0$  respectivamente. Substituindo (II.21), em (II.20) e comparando com (II.14) obtém-se

$$f_i^0 = -p J X_{I,i} n_I^0 \quad (\text{II.22})$$

e a forma incremental pode escrever-se como segue

$$\Delta f_i^0 = -\Delta p J X_{I,i} n_I^0 - p \Delta(J X_{I,i}) n_I^0 \quad (\text{II.23})$$

na qual o segundo termo é devido a mudança na geometria quando a carga fica fixa. É importante frisar notar que o segundo termo gera termos adicionais na matriz de rigidez na análise por elementos finitos, já que  $\Delta J$  e  $\Delta X_{I,i}$  dependem do valor de  $\Delta u_{i,I}$ .

## II.5 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA ATUALIZADA

Em lugar de proceder com se indicou em (II.7)

toma-se a configuração  $\Omega^\tau$  no tempo  $\tau$  como a de referência. Então todas as variáveis estáticas e cinemáticas estão referidas a esta configuração na qual assume-se  $S_{IJ} \approx \hat{S}_{ji} \approx \sigma_{ji}$ . A figura II.2 ilustra a relação entre a configuração inicial, actualizada e deformada, onde  $\underline{X}$ ,  $\underline{a}$  e  $\underline{x}$  são seleccionados para descrever a posição de qualquer ponto material nessas configurações. Para um incremento de tempo  $\Delta\tau$  suficientemente pequeno tal que instantaneamente pode-se considerar  $J \approx 1$ , a equação (II.7) pode ser colocada na forma incremental da maneira seguinte

$$\int_{\Omega^\tau} \Delta \hat{S}_{ji} \bar{u}_{i,j} d\Omega^\tau = \int_{\Omega^\tau} \rho b_i \bar{u}_i d\Omega^\tau + \int_{\Gamma^\tau} \Delta f_i \bar{u}_i d\Gamma^\tau \quad (\text{II.24})$$

a qual é denominada formulação lagrangiana atualizada, devido á escolha da configuração atualizada como de referência. Outra forma baseada na (II.12) pode escrever-se em termos de  $\Delta \hat{S}$  [1].

A relação entre  $\Delta \hat{S}_{ji}$ ,  $\Delta S_{JI}$ ,  $\Delta \sigma_{ji}$ , pode-se deduzir a partir de (II.8); devido a que neste caso a configuração de referência e a configuração atualizada coincidente serão usadas somente letras minúsculas para os subíndices.

$$\Delta S_{ij} = \Delta \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \Delta u_{k,k} - \sigma_{kj} \Delta u_{i,k} - \Delta u_{j,k} \sigma_{ik} \quad (\text{II.25})$$

$$\Delta \hat{S}_{ji} = \Delta \sigma_{ij} + \sigma_{ji} \Delta u_{k,k} - \sigma_{ki} \Delta u_{j,k} \quad (\text{II.26})$$

Nas expressões anteriores considera-se que  $J \cong 1$ ,  $\Delta J \cong \Delta u_{k,k}$ ,  $\Delta X_{k,j} = -\Delta u_{k,j}$ . (ver a dedução da (II.25) em B.3)

No caso de análise de plasticidade com grandes deformações é mais conveniente utilizar expressões derivadas da (II.24). A razão desta escolha é que as equações da formulação Lagrangiana atualizada são obviamente mais simples

ue as da formulação Lagrangiana total. Por outro lado materiais elasto-plásticos com um comportamento dependente da história de cargas são facilmente incorporados numa formulação Lagrangiana atualizada já que tais equações constitutivas são funções de variáveis referidas à configuração atual, sendo que elas podem ser transformadas de forma tal que fiquem incluídas à configuração inicial.

## I.6 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Se introduz uma nova medida para a taxa de tensões chamada taxa de Jaumann [22], muito utilizada nas formulações incrementais, a qual pode-se expressar em termos do tensor de Jaumann como

$$\dot{\sigma}_{ij}^J = \Delta \sigma_{ij} - \sigma_{ik} W_{kj} - \sigma_{jk} W_{ki} \quad (\text{II.27})$$

que cumpre com o princípio de indiferença referencial exigido para as magnitudes tensoriais, [22]. Tanto o segundo tensor de Kirchhoff (II.13) como o tensor taxa de tensões de Jaumann caracterizam-se pelo fato de não serem afetados pelos movimentos de corpo rígido ou seja que ambos são tensores objetivos. Por isto a expressão (II.25) também cumpre o princípio de indiferença referencial,

$$W_{ij} = 1/2 (\Delta u_{j,i} - \Delta u_{i,j}) \quad (\text{II.28})$$

o tensor incremento de rotação específica ('spin tensor').

A equação constitutiva de um material elástico, sótropa excluindo os efeitos térmicos pode ser escrita em forma incremental na forma

$$\Delta \sigma_{ij} = \lambda \Delta \epsilon_{kk}^{\circ} \delta_{ij} + 2 \nu \Delta \epsilon_{ij}^{\circ} \quad (\text{II.29})$$

onde  $\lambda$  e  $\nu$  são as constantes de Lamé e  $\Delta \epsilon_{ij}^{\circ}$  são as

componentes elásticas do tensor incremental de deformações  $\Delta \varepsilon_{ij}$  definido por

$$\Delta \varepsilon_{ij} = 1/2 (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (\text{II.30})$$

Postulados básicos da teoria da plasticidade foram sugeridos por Levy e Von Mises e posteriormente extendidos por Prandtl e Reuss [22]; estes são :

a) Existe uma função de escoamento

$$Y(\sigma_{ij}, k) = \sqrt{3 J_2} - k \quad (\text{II.31})$$

tal que  $Y < 0$  implica uma carga elástica do material. Se diz que o material atingiu o escoamento quando  $Y = 0$ .

$$J_2 = 1/2 H_{ij} H_{ij}, \quad (\text{II.32})$$

é o segundo invariante do tensor desviador de tensões, sendo que  $H_{ij}$  é o tensor desviador de tensões, e  $k$  é a tensão de escoamento que depende da historia de cargas. Na expressão (II.31) considera-se somente o endurecimento isótropo dado pela variação do  $k$ ; mais adiante serem introduzidos outros conceitos em relação ao endurecimento (ver anexo C).

b) É considerada uma lei de fluxo associada que pode escrever-se

$$\Delta \varepsilon_{ij}^P = \Lambda \partial Y / \partial \sigma_{ij} \quad (\text{II.33})$$

a qual indica que no espaço nove-dimensional das tensões o vetor taxa de deformação plástica tem a direção e o sentido do gradiente de  $Y$ . Considerando o espaço  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  com seus eixos coincidentes, a (II.33) indica que o vetor de componentes  $\Delta \varepsilon_{ij}^P$  tem a direção da normal à superfície definida por  $Y = 0$  no ponto  $\sigma_{ij}$  correspondente (postulado da Normalidade).

c) A decomposição de  $\Delta \varepsilon_{ij}$  em  $\Delta \varepsilon_{ij}^e$  e  $\Delta \varepsilon_{ij}^P$  toma a forma

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (\text{II.34})$$

a qual é assumida válida durante o processo de deformação.

A relação tensão-deformação de Prandtl-Reuss para materiais que obedecem o critério de escoamento de Von Mises pode-se escrever, em termos do tensor de Jaumann, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^J = D_{ijkl}^{eP} \cdot \Delta \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.35})$$

onde  $D_{ijkl}^{eP}$  é o tensor de constantes materiais.

Para obter uma matriz de rigidez simétrica na aproximação do princípio dos trabalhos virtuais por intermédio do método dos elementos finitos substitui-se a equação constitutiva (II.33) por

$$\sigma_{ij}^J + \sigma_{ij} \Delta u_{k,k} = \tilde{D}_{ijkl}^{eP} \cdot \Delta \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.36})$$

a qual leva a uma matriz de rigidez simétrica.

No caso de o material ser considerado incompressível, o qual é aproximadamente válido no caso de pequenas deformações elásticas frente às plásticas, tem-se que .

$$\Delta u_{k,k} \cong 0 \quad (\text{II.37})$$

o que implica que

$$\tilde{D}_{ijkl}^{eP} = D_{ijkl}^{eP} \quad (\text{II.38})$$

## CAPITULO III : TRATAMENTO DO PROBLEMA DO CONTATO

### III.1 CONDIÇÕES UNILATERAIS DO CONTATO

Seja um corpo deformável do tipo definido na figura (I.2) que se move com uma velocidade  $\underline{v}(=v_i \underline{e}_i)$  onde  $v$  é função do tempo  $\tau$  e da posição do ponto definida por  $\underline{x}(=x_i \underline{e}_i)$  sobre o domínio  $\Omega$ . Seja também um corpo rígido que se desloca a uma velocidade prescrita  $\underline{\bar{v}}_R (= \bar{v}_{Ri} \underline{e}_i)$  e que pode entrar em contato com o corpo deformável antes descrito.

As superfícies dos corpos deformáveis e rígidos ficam determinadas pelas funções  $\mathcal{X}(\underline{x})$  e  $\mathcal{Q}(\underline{x})$  respectivamente, sendo definida, esta última, na região  $\Gamma_c$  do corpo deformável na qual é possível que se produza o contato.

A medida que o tempo transcorre as superfícies  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Q}$  vão mudando de posição sendo possível que aconteça o contato entre elas.

Num certo tempo  $\tau$  do processo analisado, e considerando um incremento  $\Delta\tau$  suficientemente pequeno, pode-se escrever

$$\underline{n} \cdot (\mathcal{Q}(\underline{x}) + \underline{\bar{v}}_R \Delta\tau) \geq (\mathcal{X}(\underline{x}') + \underline{v}(\underline{x}', \tau) \Delta\tau) \cdot \underline{n} \quad (\text{III.1})$$

onde  $\underline{n}(=n_i \underline{e}_i)$  é um versor normal interno a superfície rígida,  $\underline{x}$  e  $\underline{x}'$  representam as posições de qualquer ponto das superfícies  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{X}$  respectivamente.

A figura III.1 procura esclarecer o significado da inequação (III.1).

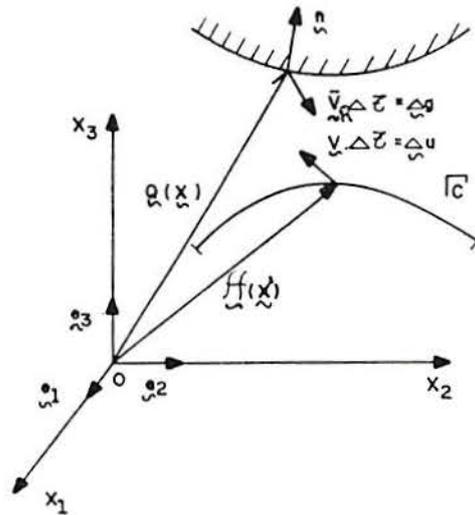


Figura III.1 -Representação das superfícies definidas sobre o corpo deformável e o corpo rígido  $\tilde{\mathcal{X}}$  e  $\tilde{\mathcal{Q}}$  respectivamente.

Quando se produz o contato entre ambas superfícies se tem

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathcal{X}}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (\text{III.2})$$

para todo  $\tilde{\mathbf{x}}$  que pertença à superfície  $\Gamma_c^*$ , (fronteira onde existe contato entre os corpos no tempo  $\tau$ ) incluída em  $\Gamma_c$ , (fronteira onde poderá existir contato durante todo o processo). Neste caso a expressão (III.1) pode ser escrita.

$$\tilde{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{v}}_R \Delta \tau \geq \Delta \tau \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau) \tilde{\mathbf{n}} \quad \text{sobre } \Gamma_c^* \quad (\text{III.3})$$

e, ficando só com a igualdade, é possível escrever

$$\Delta u_n - \Delta g_n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_c^* \quad (\text{III.4})$$

sendo  $\Delta u_n (= \Delta u_i n_i)$  o incremento do deslocamento restringido por um deslocamento prescrito  $\Delta g_n$  sob a interface em contato  $\Gamma_c^*$ .

Para resolver esta restrição opta-se pelo caminho indicado por Chen & Kicuchi [7], [8] aplicando o método das funções de penalidade que do ponto de vista físico pode ser considerado igual a colocar uma mola muito rígida entre as superfícies em contato; desta forma define-se

$$\Delta t_n = -k_n (\Delta u_n - \Delta g_n) \quad \text{sobre } \Gamma_c^* \quad (\text{III.5})$$

onde  $k_n$  (constante da mola)  $>0$  é um parâmetro muito grande, e  $\Delta t_n$  é o incremento da reação normal. Dependendo da condição de carga o ponto que ainda está em  $\Gamma_c^*$  poderá tender a separar-se da superfície rígida em certa etapa do processo e nesse caso o sinal de  $\Delta t_n$  será positivo. O ponto ficará em contato enquanto a reação resultante do contato  $t_n$  atualizada mediante  $\Delta t_n$  permaneça negativa.

### III.2 LEI DE ATRITO INCREMENTAL

A semelhança entre os fenômenos de atrito e de escoamento plástico justifica a formulação a seguir [16].

O vetor do deslocamento incremental  $\Delta u_T (= \Delta u_{Ti} e_i)$ , tangencial à superfície rígida, é descomposto na forma

$$\Delta u_{Ti} = \Delta u_{Ti}^e + \Delta u_{Ti}^p \quad (\text{III.6})$$

A componente  $\Delta u_{Ti}^p$  corresponde ao deslocamento propriamente dito. O termo  $\Delta u_{Ti}^e$  corresponde a um pequeno deslocamento elástico (reversível) observado experimentalmente antes do início do deslizamento, e será o que ativa o método da penalidade. A relação 'elástica' pode ser expressa como

$$\Delta t_{Ti} = -k_T (\Delta u_{Ti}^e - \Delta g_{Ti}) \quad (\text{III.7})$$

onde  $\Delta t_{Ti}$  indica as componentes da força tangencial na interface,  $\Delta g_{Ti}$  é o movimento prescrito pela superfície rígida

na direção tangencial e  $k_T$  é a constante da função de penalidade, que pode ser escolhida com base em estudos experimentais para levar em conta o deslocamento  $\Delta u_{Ti}^*$ , [4].

O critério de escoamento corresponde à lei de atrito-deslizamento de Coulomb que pode ser expressa da seguinte forma:

$$F(\underline{t}_T, \mu_F, \underline{t}_n) = \sqrt{(\underline{t}_T \cdot \underline{t}_T)} + \mu_F \underline{t}_n \quad (\text{III.8})$$

onde  $\underline{t}_T (= t_{Ti} \underline{e}_i)$  e  $\underline{t}_n$  são as componentes normal e tangencial do vetor tensão na zona de contato  $\Gamma_c^*$

$$\underline{t} = \underline{t}_T + \underline{t}_n \underline{n}, \quad (\text{III.9})$$

e  $\mu_F$  é o coeficiente do atrito.

Para um ponto em  $\Gamma_c^*$  as superfícies:

$$\text{- permanecerão coladas se } \left\{ \begin{array}{l} F < 0 \\ \text{ou} \\ F=0 \text{ y } \dot{F} < 0 \end{array} \right.$$

- poderá ter-se deslizamento se  $F = 0$  e  $\dot{F} \geq 0$   
segundo se indica na figura III.4 .

A lei de fluxo associada fornece o incremento do deslizamento

$$\Delta u_{Ti}^P = - \Lambda \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \quad (\text{III.10})$$

onde o valor de  $\Lambda$  é uma constante positiva.

O valor de  $\Lambda$  pode ser determinado mediante a condição de deslizamento

(III.11)

$$\Delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \Delta t_{Ti} + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_F} \right) \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial u_{Ti}^P} \right) \Delta u_{Ti}^P + \left( \frac{\partial F}{\partial t_n} \right) \Delta t_n = 0$$

que combinada com as equações (III.6), (III.7) e (III.10) permite calcular o valor de  $\Lambda$ , o qual pode expressar-se como segue

$$\Lambda = \frac{-k_T T_j (\Delta u_{Ti} - \Delta g_{Ti}) + \mu_F \Delta t_n}{k_T + T_k t_n \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial u_{Tk}^P} \right)} \quad (III.12)$$

onde

$$\bar{u}_T^P = \sqrt{u_{Tj}^P u_{Tj}^P} \quad (III.13)$$

$$\frac{\partial \mu_F}{\partial u_T^P} = \frac{\partial \mu_F}{\partial \bar{u}_T^P} \frac{\partial \bar{u}_T^P}{\partial u_{Tk}^P} \quad (III.14)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_T^P}{\partial u_{Tk}^P} = \frac{u_{Tk}^P}{\bar{u}_T^P} \quad (III.15)$$

$$T_i = \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} = \frac{t_{Ti}}{\bar{t}_T} \quad (III.16)$$

$$\bar{t}_T = \sqrt{t_{Ti} t_{Ti}} \quad (III.17)$$

Substituindo (III.12) em (III.10) e empregando (III.5) e (III.6), pode-se obter a relação constitutiva incremental do contato com atrito na forma (ver anexo A.5).

$$\Delta t_{Ti} = -k_{ij} (\Delta u_{Tj} - \Delta g_{Tj}) - c T_i \Delta t_n \quad (III.18)$$

onde

$$k_{ij} = k_T (\delta_{ij} - \vartheta \frac{k_T}{D_T} T_i T_j) \quad (\text{III.19})$$

$$c = \vartheta \frac{k_T}{D_T} \mu_F \quad (\text{III.20})$$

$$D_T = k_T + T_k t_n \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial \bar{u}_T^P} \right) \left( \frac{u_{Tk}^P}{\bar{u}_T^P} \right) \quad (\text{III.21})$$

A  $\left( \frac{\partial \mu_F}{\partial \bar{u}_T^P} \right)$  é o módulo de endurecimento isotrópico, obtido a partir de uma curva  $(\mu_F - \bar{u}_T^P)$  que sai de ensaios de deslizamento [10], nas expressões (III.19) e (III.20)  $\vartheta$  fica definida de seguinte maneira

$$* \vartheta = 0 \quad \text{se} \quad \left\{ \begin{array}{l} F < 0 \\ \text{ou} \\ F = 0 \text{ e } T_i \Delta T_i + \mu_F \Delta t_n < 0 \end{array} \right. \quad (\text{descarga})$$

$$* \vartheta = 1 \quad \text{se} \quad F = 0 \text{ e } T_i \Delta T_i + \mu_F \Delta t_n \geq 0 \quad \text{carga}$$

Resulta importante lembrar que  $\Delta t_n < 0$  indica aumento de pressão.

Para esclarecer o significado das expressões vistas nesta seção suponha-se um corpo plano deformável que entra em contato com um contorno rígido como se mostra na figura III.2. Num dos pontos em contato a reação sobre o corpo deformável pode descompor-se como foi indicado na expressão (III.9).

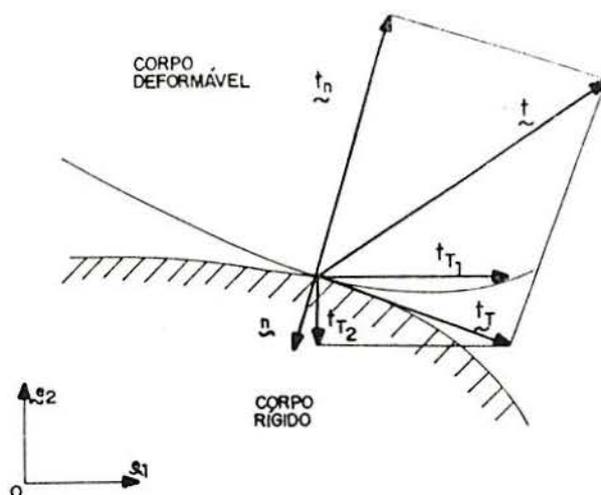


Figura III.2. Superfície rígida em contato com o corpo deformável.

Se no espaço das componentes tangenciais  $t_{T1}$ ,  $t_{T2}$  da tensão  $t_T$  se grafica a função de escoamento friccional dada pela lei de Coulomb (III.6), se terá, como se mostra na figura III.3, uma circunferência com raio  $(t_n \mu_F)$  e centro coincidente com o origem de coordenadas, e pode observar-se que  $\vec{T} = \partial \tilde{F} / \partial \vec{t}_T$  é um vetor normal à superfície de escoamento no ponto em análise.

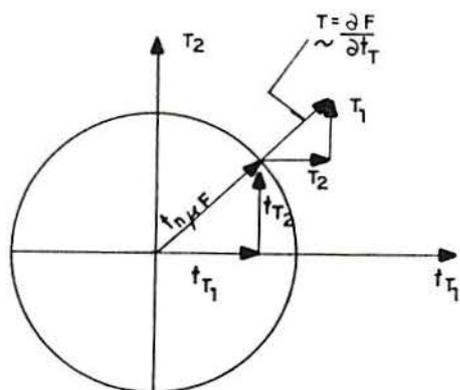


Figura III.3. Representação da função  $F$  no espaço das tensões tangenciais

Na figura III.4 mostram-se os casos de carga e descarga sobre a curva  $F$

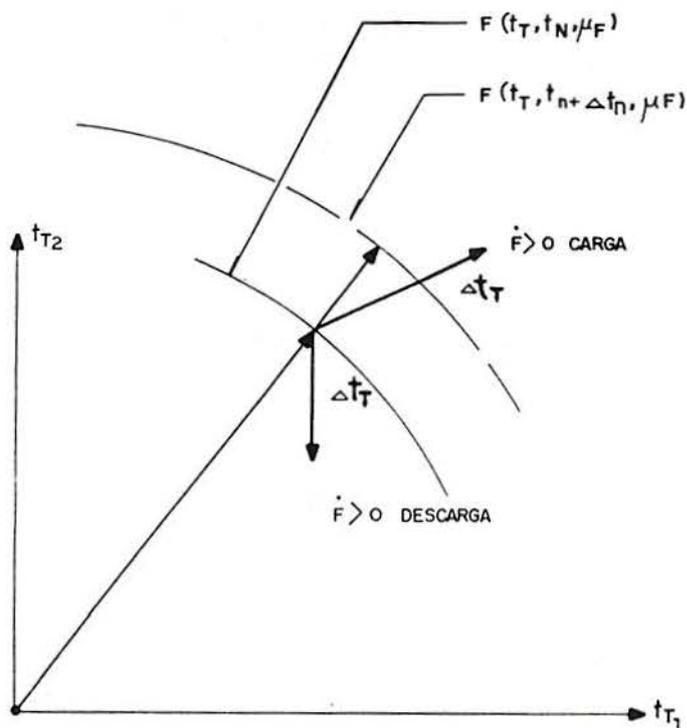


Figura III.4 Carga e descarga na curva definida pela lei de Coulomb.

### III.3 APLICAÇÃO DO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O princípio dos trabalhos virtuais (I.1) pode-se escrever

$$\int_{\Omega^{\tau}} \Delta \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega^{\tau} - \int_{\Omega^{\tau}} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega^{\tau} - \int_{\Gamma_F^{\tau}} \Delta f_i \bar{u}_i d\Gamma_F^{\tau} - \quad (III.22)$$

$$\int_{\Gamma_c^{*\tau}} \Delta t_n \bar{u}_n d\Gamma_c^{\tau} - \int_{\Gamma_c^{*\tau}} \Delta t_{Ti} \bar{u}_{Ti} d\Gamma_c^{\tau} = 0$$

válida para todo  $\bar{u}_i$  tal que  $\bar{u}_i = 0$  sobre  $\Gamma_D$ .

Na equação (III.22) dá o caráter de virtual as deformações ou deslocamentos.

Utilizando as relações (III.5) e (III.18) pode-se reescrever a equação (III.22) como

$$\int_{\Omega^{\tau}} \Delta \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega^{\tau} - \int_{\Omega^{\tau}} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega^{\tau} - \int_{\Gamma_F^{\tau}} \Delta f_i \bar{u}_i d\Gamma_F^{\tau} + \quad (III.23)$$

$$\int_{\Gamma_c^{*\tau}} k_n (\Delta u_n - \Delta g_n) \bar{u}_n d\Gamma_c^{\tau} - \int_{\Gamma_c^{*\tau}} [k_{ij} (\Delta u_{Tj} - \Delta g_{Tj}) - c_{Ti} \Delta t_n] \bar{u}_{Ti} d\Gamma_c^{\tau} = 0$$

Aplicando sobre (III.23) o método dos elementos finitos pode-se obter a equação matricial seguinte:

$$\left( \underset{\sim}{K}_M + \underset{\sim}{K}_c \right) \Delta \underset{\sim}{U} = \Delta \underset{\sim}{P} + \Delta \underset{\sim}{F}_c \quad (III.24)$$

a qual é similar a (I.12), sendo que  $\Delta \underset{\sim}{U}$  é o vetor incógnita formado por deslocamentos nodais incrementais,  $\underset{\sim}{K}_M$  e  $\Delta \underset{\sim}{P}$  são a matriz de rigidez e o vetor de cargas globais respectivamente obtidos a partir dos três primeiros termos da equação (III.23). As características de  $\underset{\sim}{K}_M$  e  $\Delta \underset{\sim}{P}$  dependerão do comportamento estrutural do corpo deformável.

$\tilde{K}_c$  e  $\Delta F_{\tilde{c}}$  são a matriz e o vetor de cargas adicionais devidos ao contato e atrito, e surgem dos dois últimos termos da equação (III.23).

As contribuições de cada elemento com fronteira em contato à matriz de rigidez adicional  $\tilde{K}_c$  e ao vetor de cargas adicionais  $\Delta F_{\tilde{c}}$  são expressas por

$$\tilde{K}_{c \text{ elem}} = K_{ij\varphi\beta} = \int_{\Gamma_{c \text{ elem}}^{*\tau}} \langle k_n n_i n_j + \hat{k}_{ij} \rangle N_\varphi N_\beta d\Gamma^\tau \quad (\text{III.25})$$

$$\Delta F_{\tilde{c} \text{ elem}} = \Delta F_{i\varphi} = \int_{\Gamma_{c \text{ elem}}^{*\tau}} \langle k_n \Delta g_n n_i + k_{ik} \Delta g_{Tk} - c T_i \Delta t_n \rangle N_\varphi d\Gamma^\tau \quad (\text{III.26})$$

onde

$$\Delta u_i(x) = \Delta U_{i\varphi} N_\varphi(x) \quad (\text{III.27})$$

$$\bar{u}_i(x) = \bar{u}_{i\varphi} N_\varphi(x) \quad (\text{III.28})$$

sendo que  $N_\varphi(x)$  representa as funções de forma que interpolam  $\Delta u(x)$  e  $u(x)$  dentro de cada elemento,  $\varphi$  indica o número local do nó e varia de 1 até o número de nós do elemento,  $\Delta U_{i\varphi}$  e  $\bar{u}_{i\varphi}$  são as componentes dos deslocamentos incrementais e virtuais no nó  $\varphi$ .

Pode-se provar que (veja anexo A.2)

$$\hat{k}_{ij} = k_{ij} - k_{kj} n_i n_k \quad (\text{III.29})$$

As transformações necessárias para passar dos dois últimos termos da (III.23) às expressões (III.25) e (III.26) podem ser vistas também no anexo A.6.

Pode-se observar a necessidade de resolver a equação matricial em forma iterativa dentro de cada passo incremental, já que  $\Delta t_n$  na expressão (III.26) não é conhecida "a priori".

Alguns problemas numéricos que surgem na implementação computacional serão comentados no capítulo IV, também serão discutidas no anexo B algumas modificações propostas por Chen & Kikuchi [8] a esta formulação para levar em conta leis de comportamento mais complexas para o corpo flexível.

## CAPITULO IV: IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo apresenta-se a implementação computacional da formulação mostrada no capítulo III para realizar a análise mecânica de um corpo deformável submetido a deslocamentos impostos pelo avanço de um corpo rígido que se desloca num processo que evoluciona no tempo.

Supõe-se um comportamento elástico linear para o corpo deformável e analisam-se os casos de estado plano de deformações e axisimétrico. O modelamento da estrutura se faz através do método dos elementos finitos utilizando elementos isoparamétricos lineares de 4 nós.

O algoritmo implementado, em princípio, não precisa de grandes modificações para ser adaptado a um sistema de análise elastoplástica com grandes deformações. No anexo B mostram-se algumas das características sobre esta questão.

O corpo rígido é modelado mediante a definição de um contorno complexo formado mediante a combinação de três tipos de formas simples (reta, arco de parábola e arco de círculo).

A seguir apresenta-se um esquema geral do algoritmo implementado; depois as características cinemáticas e mecânicas do problema e por último algumas modificações feitas no algoritmo com as quais este ganha em simplicidade e permite resolver os problemas da sobre-restrrição ('locking') dos termos afetados pela penalidade [26].

## IV.1 ESQUEMA GERAL DO ALGORITMO.

\*-Entrada dos dados convencionais (\*\*)

\*-Entrada de dados referidos ao problema do contato

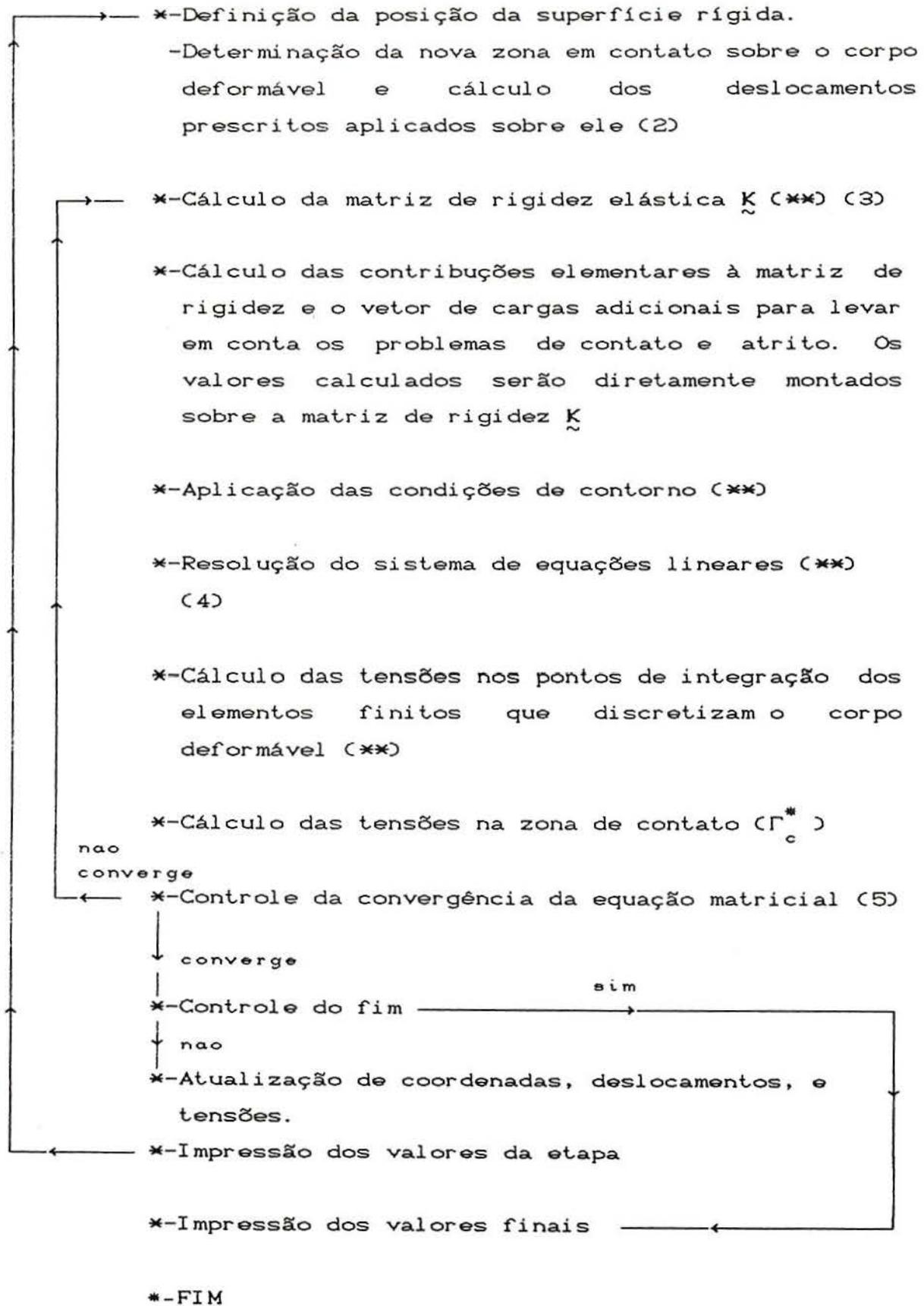
-Determinação dos nós que pertencem à zona potencial do contato ( $\Gamma_c$ )

-Determinação do contorno rígido definido como uma combinação de vários contornos simples, determinando neles as características do coeficiente do atrito (1)

-Definição do vetor velocidade da superfície rígida  $\vec{v}_R$ . Ele é determinado mediante suas duas componentes nas direções dos eixos  $x, y$  globais

-Valor do incremento de tempo a ser utilizado no processo incremental  $\Delta t$





## IV.1.1 OBSERVAÇÕES SOBRE O ALGORITMO

(\*\*) Indica que o cálculo é feito utilizando a subrotina do sistema de análise estrutural empregado como base (sistema ESFINGE [17]).

(1) O coeficiente de atrito, como se mencionou no capítulo III varia em função do deslocamento tangencial relativo  $\bar{u}_{TR}$  entre a superfície rígida e o corpo deformável calculado pelo programa.

Neste trabalho adota-se a seguinte lei de variação para o coeficiente de atrito, ver [16]

$$\mu_F(\bar{u}_{TR}) = \mu_m (1 - (m-1)e^{-\gamma \bar{u}_{TR}}) \quad (\text{IV.1})$$

onde  $\mu_m$  é o coeficiente de atrito máximo,  $m$  um coeficiente dado pelo seguinte quociente

$$m = \frac{\mu_{\text{inicial}}}{\mu_{\text{maximo}}}, \quad (\text{IV.2})$$

e  $\gamma$  é uma constante que mede o 'endurecimento' que se produz na variação do  $\mu_F$ . Na figura IV.1 mostra-se a forma da curva expressa na equação (IV.1).

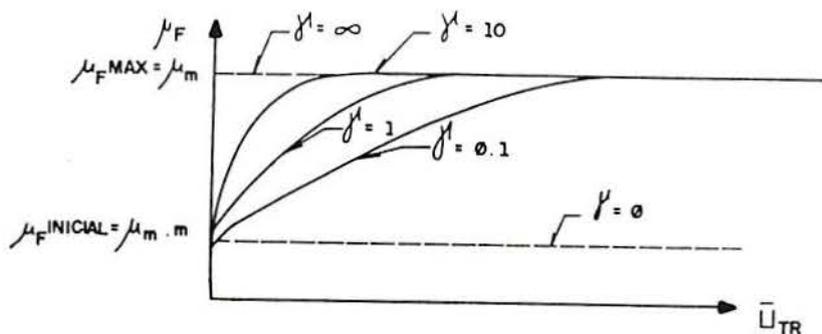


Figura IV.1- Curva que mostra a variação do coeficiente de atrito  $\mu_F$  em função do deslocamento tangencial relativo  $\bar{u}_{TR}$ .

(2) Neste ponto são chamadas as subrotinas CONTOR, CONLIN e CONCUR que serão explicadas nas secções IV.2.2 e IV.2.3

(3) Para otimizar o algoritmo levando em conta que o comportamento do corpo deformável é elástico linear poderia-se empregar algum esquema que evite montar a matriz de rigidez em todas as etapas. Neste trabalho isto não é feito pois no caso de ter-se leis de comportamento do material mais complexas não teria sentido fazer esta otimização .

(4) O sistema de equações a resolver é similar ao mostrado em (I.12), e para o tempo  $\tau + \Delta\tau$  tem-se

$$(\underline{K}(\underline{u}^T))\Delta\underline{U}^I = \Delta\underline{F}(\underline{u}^T, \Delta\underline{U}^{I-1}) \quad (I.3)$$

onde  $\Delta\underline{U}^I$  é o vetor de deslocamentos nodais resolvidos na iteração I dentro do passo incremental  $\tau + \Delta\tau$  do processo.

(4) A convergência da equação matricial (IV.3) é dada por

$$\left| \int_{\Gamma_c^*} (\Delta t^I - \Delta t^{I-1})^2 d\Gamma \right| \leq \text{tolerância} \quad (IV.4)$$

onde  $| \cdot |$  indica valor absoluto,  $\Delta t_n$  é o incremento da tensão normal na superfície em contato e  $\Gamma_c^*$  indica o contorno em contato nesse passo incremental.

## IV.2 CONSIDERAÇÕES CINEMÁTICAS

### IV.2.1 DEFINIÇÃO DO CONTORNO RÍGIDO

O mesmo será composto pela combinação de vários contornos simples

A representação destes contornos se faz mediante funções vetoriais cujas componentes são definidas em forma paramétrica [24]. Assim uma curva no plano pode-se representar por

$$\tilde{Q}(a) = \begin{bmatrix} x(a) \\ y(a) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

se  $x(a)$  e  $y(a)$  são polinômios em  $a$ , a equação (IV.5) pode-se expressar em forma matricial como segue

$$\tilde{Q}(a) = \tilde{a} \tilde{M} \tilde{P} \quad (\text{IV.6})$$

sendo que

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_{1x} & P_{2x} \\ P_{2x} & P_{2y} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

$\tilde{a}$  : Base de polinômios

$\tilde{M}$  : Matriz da função de interpolação da curva

$\tilde{P}$  : Pontos que definem a geometria da curva

Desta forma tem-se, no caso de uma reta (ver figura IV.2).

$$\tilde{Q}(a) = [ a \ 1 ] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\tilde{1}} \\ P_{\tilde{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

com  $a$  variando de 0 a 1, onde

$$\tilde{P}_1 = [P_{1x}, P_{1y}]$$

(IV.9)

$$\tilde{P}_2 = [P_{2x}, P_{2y}]$$

Neste caso a curva é definida através de dois pontos no plano (4 coordenadas reais), e desenvolve-se de  $\tilde{P}_1$  para  $\tilde{P}_2$ , conforme a variação do parâmetro  $a$  (0 á 1).

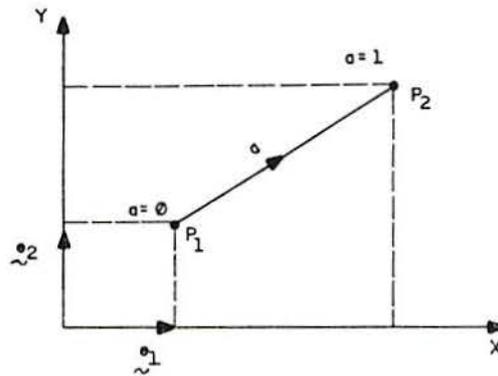


Figura IV.2 -Representação paramétrica de uma reta no plano

No caso que o contorno seja um arco de parábola, (ver figura IV.3) ela é definida através de três parâmetros no plano (6 coordenadas reais), e desenvolve-se de  $\tilde{P}_1$  para  $\tilde{P}_2$  passando por  $\tilde{P}_3$ .

Utilizando-se os polinômios interpoladores de Lagrange tem-se

$$\tilde{Q}(a) = [a^2, a, 1] \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_3 \end{bmatrix} \quad \text{(IV.10)}$$

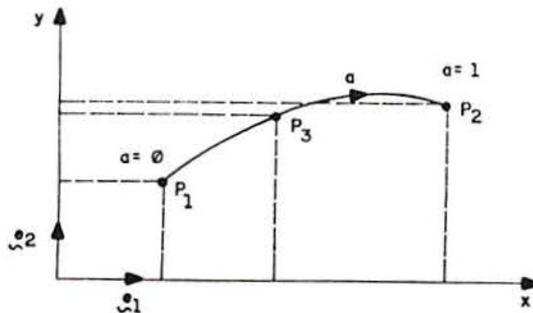


Figura IV.3 - Representação paramétrica de uma parábola no plano.

Por último, empregando curvas de Bézier modificadas é possível a representação de um arco de círculo definido por quatro pontos no plano (8 coordenadas reais); o centro de curvatura  $\tilde{C}$ , o ponto inicial  $\tilde{P}_1$ , o ponto final  $\tilde{P}_2$ , e pelo ponto onde se cortam as tangentes à curva que passam por  $\tilde{P}_1$  e  $\tilde{P}_2$  (ver figura IV.5).

Para o caso do arco de círculo tem-se então

$$\tilde{Q}(a) = [a^3 \ a^2 \ a \ 1] \begin{bmatrix} (2-A) & (A-2) & 0 \\ (2A-3) & (3-A) & -A \\ -A & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_a \end{bmatrix}$$

(IV.11)

sendo que  $A$  é dado pela seguinte expressão

$$k = \frac{1 + \cos \theta - 2 \cos(\theta/2)}{\cos \theta - 1} (3.9988 + 1.1020 \cdot 10^{-4} \theta + (-1.4575 \cdot 10^{-6} \theta^2)) \quad (\text{IV.12})$$

onde  $\theta$  pode escrever-se como

$$\theta = \arccos \left[ \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}} \right] \quad (\text{IV.13})$$

com

$$\begin{aligned} x_1 &= P_{1x} - C_x \\ y_1 &= P_{1y} - C_y \\ x_2 &= P_{2x} - C_x \\ y_2 &= P_{2y} - C_y \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

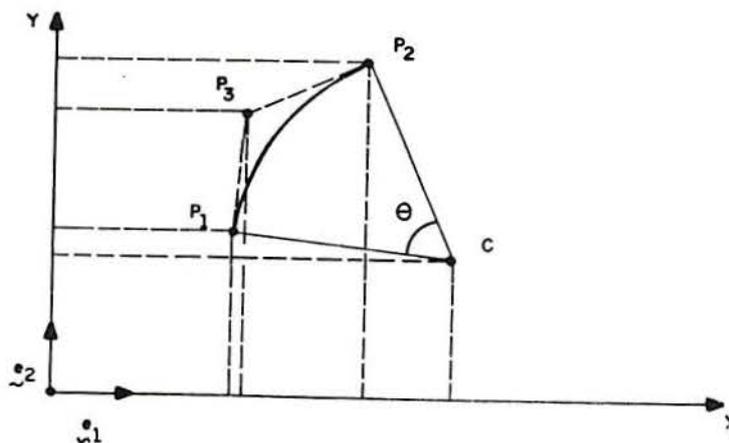


Figura IV.4- Representação paramétrica de um arco de círculo no plano.

Na definição dos contornos adiciona-se mais um parâmetro, o ponto  $P_4$ , que é interior ao corpo rígido e permite definir qual é a parte interna e qual a externa.

#### IV.2.2 FUNÇÃO DA SUBROTINA CONTOR

A função desta subrotina é relacionar, dentro de cada passo incremental do processo, os contornos simples que definem a forma do corpo rígido com os nós da zona potencial de contato do corpo deformável, determinando, para cada um destes nós, o contorno simples com o qual entraria em contato.

Para ilustrar melhor a forma de trabalho do algoritmo suponha-se um corpo rígido no plano, sendo que sua forma fica determinada pelos os seguintes contornos simples; contorno I (tramo de reta), contorno II (arco de círculo) e contorno III (arco de parábola).

Seja também uma zona potencial de contato de um corpo flexível formada por três nós A, B, C ver figura IV.6.

Para obter a relação procurada procede-se da seguinte maneira

1)-Traça-se uma poligonal que passa pelos pontos extremos dos contornos simples que definem a forma do corpo rígido. Os lados de tal poligonal são definidos em forma paramétrica como mostrou-se na seção IV.2.1

2)-Definem-se retas que pasam por cada um dos nós da zona potencial de contato e que têm a mesma direção que o vetor velocidade da superfície rígida  $\vec{v}_R$ , retas a, b, c na figura IV.6.

3)- Considera-se cada uma das retas, ( se faz só a análise para o nó A), define-se a intersecção da mesma com o

prolongamento dos lados da poligonal definida em 1), determina-se os segmentos  $AA_I$ ,  $AA_{II}$ ,  $AA_{III}$ .

4)- O contorno relacionado com o nó em análise, será aquele no qual o ponto  $A_i$  fique dentro dos extremos do lado da poligonal, ou seja que para esse caso  $a$  esteja compreendido entre 0 e 1. No exemplo que se ilustra na figura IV.6, se o nó  $A$  entrar em contato nesse passo incremental o fará com o contorno II.

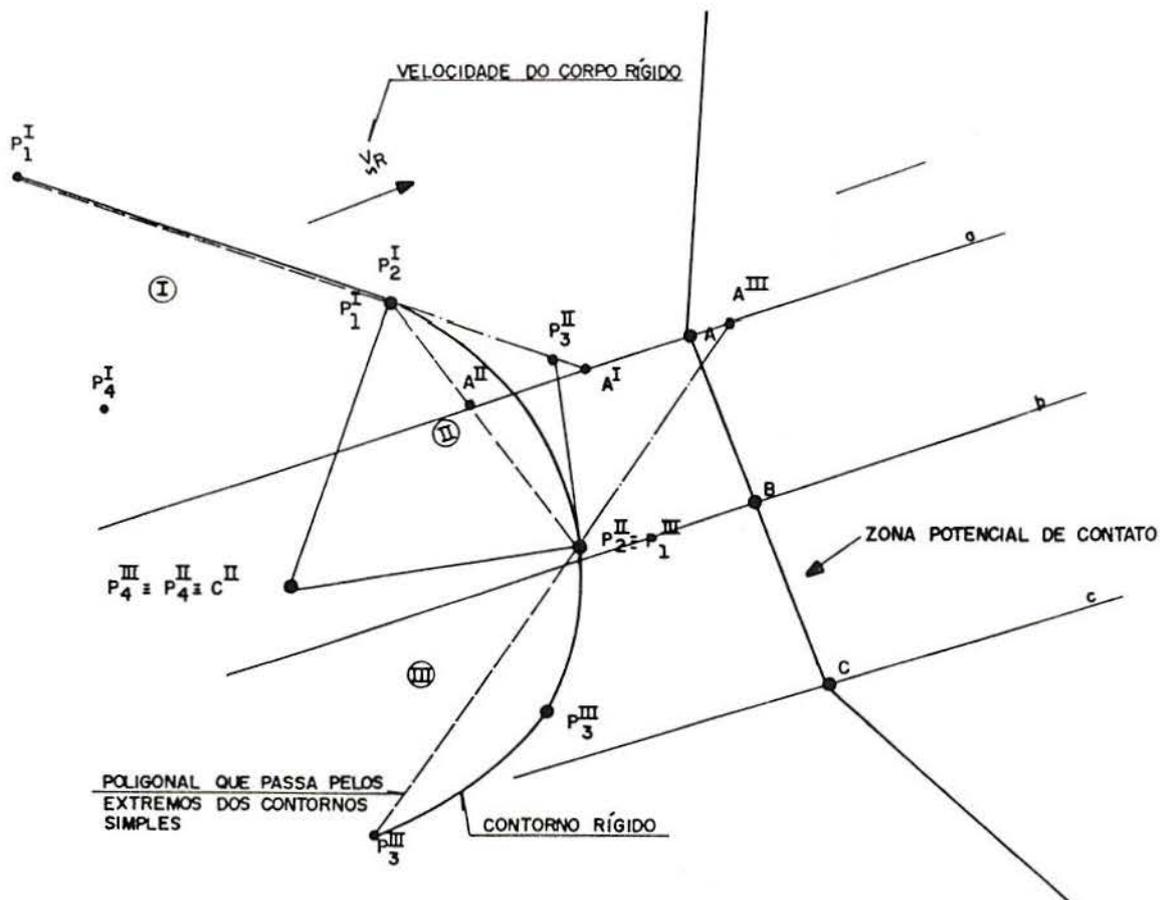


Figura IV.5- Exemplo que ilustra a forma de trabalho da subrotina CONTOR, (análise para o nó A).

### IV.2.3 FUNÇÃO DAS SUBROTINAS CONLIN E CONCUR

Definida na seção anterior a relação entre os nós da zona potencial de contato do corpo deformável e os contornos simples que definem a fronteira do corpo rígido num certo tempo  $\tau$  do processo incremental, as subrotinas CONLIN e CONCUR permitem determinar o tempo necessário para que se produza o contato entre ambos (o tempo terá valor negativo se houver solapê) e a posição no plano onde este acontecerá.

Seja um contorno simples da superfície rígida definida num tempo  $\tau$  do processo pela função vetorial  $\underline{Q}^{\tau}$  que avança com uma velocidade  $\underline{v}_R$ . Transcorrido um tempo  $\Delta\tau$  a nova posição do contorno rígido estará definida pelo vetor  $\underline{Q}^{\tau+\Delta\tau}$ . Considera-se também o nó A que pertence à superfície potencial de contato do corpo deformável e tem definida sua posição pelo vetor  $\underline{x}_A$ . Então pode-se descrever a situação mediante a seguinte equação (ver figura IV.7).

$$\underline{x}_A = \underline{Q}^{\tau+\Delta\tau} - \Delta g \quad (\text{IV.15})$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x^{\tau+\Delta\tau} \\ Q_y^{\tau+\Delta\tau} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{Rx} \Delta\tau^* \\ v_{Ry} \Delta\tau^* \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

sendo que a (IV.15) e (IV.16) representam um sistema de duas equações com duas incógnitas  $\Delta\tau^*$  e  $a^*$ , onde  $\Delta\tau^*$  é o tempo necessário para que se produza o contato e  $a^*$  a coordenada paramétrica que define o ponto do contorno no qual este se produz.



linear e que pode expressar-se como

$$\tilde{\Phi}(a^*, \Delta\tau^*) = Q(a^*) - v_R \Delta\tau^* - x_A = 0 \quad (\text{IV.18})$$

ou

$$\Phi_1(a^*, \Delta\tau^*) = Q_x(a^*) - v_{Rx} \Delta\tau^* - x_A = 0 \quad (\text{IV.19})$$

$$\Phi_2(a^*, \Delta\tau^*) = Q_y(a^*) - v_{Ry} \Delta\tau^* - y_A = 0$$

na (IV.17)  $Q(a^*)$  será dada por (IV.10) ou pela (IV.11) segundo o tipo de curva.

Para resolver a equação (IV.19) utiliza-se um proceso iterativo baseado no método de Newton Rapshon que pode-se resumir como segue.

$$\begin{bmatrix} a^* \\ \Delta\tau^* \end{bmatrix}^{I+1} = \begin{bmatrix} a^* \\ \Delta\tau^* \end{bmatrix}^I + \Delta \begin{bmatrix} a^* \\ \Delta\tau^* \end{bmatrix}^{I+1} \quad (\text{IV.20})$$

sendo que o supra-índice  $I$  indica o passo na iteração e

$$\Delta \begin{bmatrix} a^* \\ \Delta\tau^* \end{bmatrix}^{I+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}^I \tilde{J}^{I-1} \quad (\text{IV.21})$$

onde  $\tilde{J}^I$  é o jacobiano da função  $\tilde{\Phi}$  com os valores calculados no passo  $I$ , e que pode expressar-se como

$$\tilde{J}^I = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial a} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial a} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial a} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial a} \end{bmatrix}^I \quad (\text{IV.22})$$

Na implementação computacional  $\tilde{J}^{I-1}$  é desenvolvido em forma explícita para os dois tipos de curvas empregadas, arco de círculo e arco de parábola, (ver subrotina CONCUR).

O processo de cálculo continua até que

$$|\tilde{\Phi}|_{I+1} \leq \text{tolerância} \quad (\text{IV.23})$$

O cálculo de  $\tilde{a}^*$  e  $\Delta\tau^*$  para o caso de contorno curvo é feito pela subrotina CONCUR.

Obtendo  $\Delta\tau^*$  pode-se calcular o solapé como

$$\Delta g = \tilde{v}_R \Delta\tau^* \quad (\text{IV.24})$$

#### IV.2.4 CÁLCULO DO VETOR NORMAL INTERNO À SUPERFÍCIE RÍGIDA NO PONTO EM CONTATO

Define-se um ponto sobre um contorno rígido determinado pelo vetor  $\tilde{Q}(a)$  onde  $a$  é um parâmetro de valor compreendido entre 0 e 1; refere-se tal contorno a um par de eixos cartesianos com versores  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ ; (ver figura (IV.8))

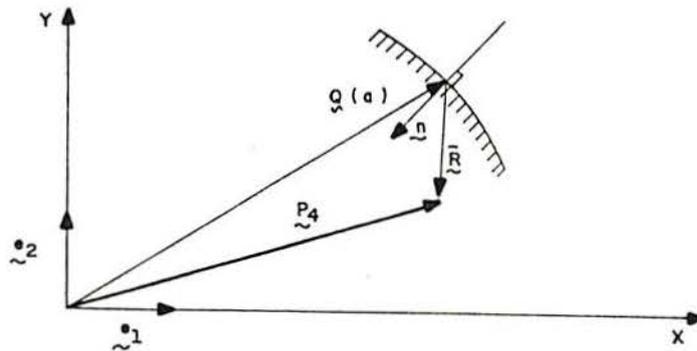


Figura IV.7- Representação do versor normal interno num ponto da superfície rígida.

O versor normal sobre a superfície pode-se obter da seguinte expressão

$$\tilde{n}' = - \frac{\partial Q_x(a)}{\partial a} \tilde{e}_1 + \frac{\partial Q_y(a)}{\partial a} \tilde{e}_2 \quad (\text{IV.25})$$

Para fazer que o versor normal seja interno à superfície rígida, define-se um ponto que pertence ao corpo rígido, ficando definida sua posição mediante o vetor  $\tilde{P}_4$ . A partir dele e do vetor  $\tilde{Q}(a)$  pode-se calcular o vetor  $\tilde{\hat{R}}$  definido por

$$\tilde{\hat{R}} = \tilde{Q}(a) - \tilde{P}_4. \quad (\text{IV.26})$$

Então se

$$\hat{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{n}}' > 0 \quad \text{se tem que } \tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}}'$$

e se

(IV.27)

$$\hat{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{n}}' < 0 \quad \text{se cumpre que } \tilde{\mathbf{n}} = -\tilde{\mathbf{n}}'.$$

O versor  $\tilde{\mathbf{n}}$  será ocupado no cálculo dos termos da matriz de rigidez e do vetor de cargas adicionais para levar em conta o contato e atrito.

Pode-se observar que a forma apresentada para calcular o versor normal traz alguns problemas numéricos quando o nó em contato está em condições de deslizar sobre o contorno rígido, e o gradiente de variação de  $\tilde{\mathbf{n}}$  ao passar de um nó para outro adjacente, é considerável. Devido a estes problemas se considera que é melhor calcular  $\tilde{\mathbf{n}}$  diretamente sobre o lado do corpo flexível da zona potencial de contato e calcular as normais nos nós como uma média dos valores nos lados. O cálculo das normais diretamente sobre o lado foi feito nas modificações introduzidas no programa que serão comentadas na seção IV.3.2.

#### IV.3 CARACTERISTICAS MECANICAS

No programa implementado o que se faz a partir das expressões (III.25) , (III.26) é achar as contribuições elementares à matriz de rigidez e ao vetor de cargas globais.

Inicialmente, tentou-se realizar a integração numérica dos termos afetados pela penalidade empregando a regra da quadratura de Gauss com só um ponto de integração por contorno elementar (integração reduzida) procurando assim solucionar o problema da sobre-restrrição ocasionada pelo uso das funções de penalidade ('locking'), porém os valores obtidos por este caminho não foram satisfatórios.

Empregando integração completa (dois pontos de integração por contorno elementar) obteve-se bons resultados para os deslocamentos, surgindo problemas ao calcular as tensões na zona de contato, utilizando diretamente as funções de penalidade, (ver expressões (III.5) e (III.18)); neste caso a distribuição dos resultados foi errada, aumentando a distorção dos mesmos quando o gradiente de tensões crescia. Várias formas de suavizar e distribuir as tensões foram testadas sem bons resultados .

A outra tentativa foi a de calcular as reações nodais na zona de contato seguindo o caminho clássico empregado no método dos elementos finitos. Mediante uma distribuição consistente [2], obtiveram-se as tensões nodais com valores similares aos calculados utilizando-se diretamente as funções de penalidade, os quais, como já foi mencionado, resultaram pouco satisfatórios.

Tentou-se também trabalhar com o elemento isoparamétrico quadrático de 8 nós com integração reduzida, porém os resultados obtidos também foram ruins.

Ante este panorama optou-se por calcular as tensões

nos nós a partir de uma interpolação dos valores obtidos nos pontos de integração dos elementos adjacentes à zona de contato. Diferentes formas de interpolação foram testadas utilizando um processo de suavização a partir do cálculo por mínimos quadrados dos valores nos pontos de integração.

Outro caminho testado foi empregar uma regra de integração apresentada por Kikuchi em [20] e [23], a qual mistura a regra da quadratura de Gauss utilizando só um ponto de integração por contorno elementar e o método de integração dos trapézios, obtendo-se desta forma uma suavização na distribuição das tensões na zona de contato.

Finalmente se implementaram duas versões do programa (CONANASE1 e CONANASE2), ambas tem essencialmente a mesma estrutura.

Indica-se a continuação as características que as diferenciam.

#### Versão CONANASE1

-A integração sobre o contorno em contato ( $\Gamma_c^*$ ) dos termos adicionais à matriz de rigidez e ao vetor de cargas globais para levar em conta o contato e atrito, se faz utilizando o método da quadratura de Gauss com dois pontos de integração (integração completa).

-As tensões nos nós da zona potencial de contato são calculadas a partir dos valores obtidos nos pontos de integração dos elementos adjacentes empregando um método de suavização de tensões.

Os versores normais nos nós em contato são achados levando em conta a forma do contorno rígido em contato com determinado nó, como se explica na secção IV.2.

Com esta versão do programa obtiveram-se os

resultados mostrados no capítulo V, e pôde-se observar que as tensões tangenciais afastavam-se dos valores corretos se o gradiente de variação das mesmas tinha um valor elevado.

#### Versão CONANASE2

A integração sobre o contorno em contato ( $\Gamma_c^*$ ) dos termos adicionais à matriz de rigidez e ao vetor global de cargas para levar em conta os efeitos do contato e atrito é feita empregando um método misto [20], que combina a regra da quadratura de Gauss com um ponto de integração e o método dos trapézios.

Trabalhando desta forma foi possível obter uma distribuição razoável das tensões na zona de contato utilizando diretamente as funções de penalidade (ver expressões (III.5) e (III.18)).

Neste programa os versores normais na zona em contato são calculados a partir das normais aos lados dos elementos do corpo flexível realizando posteriormente a média para levar os valores aos nós .

Se bem que esta versão do algoritmo não foi totalmente testada, considera-se que é o melhor caminho a seguir pois o programa se simplifica notavelmente sobretudo no pós-processamento necessário para obter as tensões na zona de contato.

Como última seção deste capítulo se apresenta as características das modificações feitas nesta última versão.

#### IV.3.1 MODIFICAÇÕES IMPLEMENTADAS PARA OBTER UMA MELHOR DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NODAIS NA ZONA DE CONTATO

Estas modificações estão baseadas no trabalho de

Kikuchi [20] e constituem basicamente uma técnica para suavizar a distribuição das tensões nos nós da zona potencial de contato.

A (III.23) pode-se escrever em forma mais compacta da seguinte forma

$$A(\Delta \underline{u}, \bar{\underline{u}}) + L(\mathcal{E}(\Delta \underline{u}), \bar{\underline{u}}) = F(\bar{\underline{u}}) \quad (\text{IV.28})$$

sendo que

$$A(\Delta \underline{u}, \bar{\underline{u}}) = \int_{\Omega^\tau} \Delta \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega^\tau \quad (\text{IV.29})$$

$$F(\bar{\underline{u}}) = \int_{\Omega^\tau} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega^\tau + \int_{\Gamma_F^\tau} \Delta f_i \bar{u}_i d\Gamma_F^\tau \quad (\text{IV.30})$$

$$L(\mathcal{E}(\Delta \underline{u}), \bar{\underline{u}}) = \int_{\Gamma_c^{*\tau}} \mathcal{E}(\Delta u_j) \bar{u}_i d\Gamma^\tau \quad (\text{IV.31})$$

onde a partir da (III.23) se deduz que

$$\mathcal{E}(\Delta \underline{u}) = [(\hat{k}_{n_i n_j} + \hat{K}_{ij}) \Delta u_j - (\Delta g_{n n_i} + \Delta g_{Tk} K_{ik} + c T_i \Delta t_n)] \quad (\text{IV.32})$$

a (IV.31) pode-se escrever como segue

$$L(\mathcal{E}(\Delta \underline{u}), \bar{\underline{u}}) = \sum_{e=1}^{\text{no de elem}} L_e(\mathcal{E}(\Delta \underline{u}), \bar{\underline{u}}) \quad (\text{IV.33})$$

onde o símbolo somatório implica montagem das contribuições

elementares à equação global.

Para simplificar a notação a partir de agora substitui-se  $\xi$  por  $\xi(\Delta u)$ . Escrevendo então  $L(\xi, \bar{u})$  da seguinte maneira

$$L(\xi, \bar{u}) = \sum_{i=1}^{\sigma} \omega_i^e \xi(x_i^e), \bar{u}(x_i^e) \quad (\text{IV.34})$$

sendo que  $\omega_i^e$  são os pesos que afetam os valores obtidos em cada ponto de integração ao utilizar o método da quadratura de Gauss para integrar, e  $x_i^e$  indica a coordenada do ponto de integração.

Se na (IV.34)  $\sigma=1$ , então  $x_i^e$  será a coordenada do centróide do lado  $e$  (ver figura IV.8).

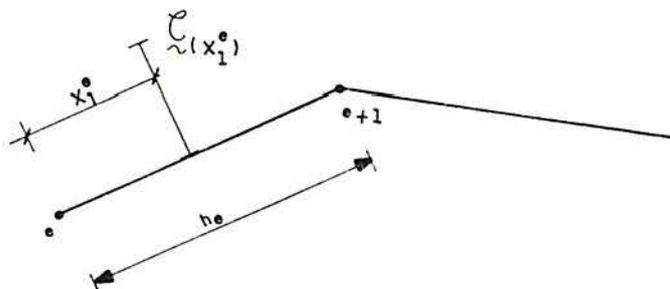


Figura (IV.8) Representação dos valores sobre o contorno.

Introduzindo as expressões (IV.29), (IV.30), (IV.33) e (IV.34) na equação (IV.28), com  $\sigma=1$  na (IV.34) ocorre que em alguns casos uma das condições de convergência de Babuska Brezzi não é preenchida [20].

Para contornar o problema redefine-se a (IV.33) da seguinte maneira

$$L(\xi, \bar{u}) = \sum_{e=1}^{n^{\circ} \text{ de elementos}} \xi_e (u_e + u_{e+1}) h_e / 2 \quad (\text{IV.35})$$

sendo que em (IV.34)  $h_e$  é o comprimento do lado  $e$ , além disso dentro de cada contorno se tem

$$\tilde{\xi}_e = \tilde{\xi}_{(x_1^e)} \quad (\text{IV.36})$$

e

$$\bar{u}(x) = \bar{u}_e (1 - x / h_e) + \bar{u}_{e+1} x / h_e \quad (\text{IV.37})$$

onde  $\bar{u}_e$  e  $\bar{u}_{e+1}$  são os deslocamentos virtuais dos nós extremos do lado  $e$ , e  $x$  é o vetor posição que define a posição de um ponto sobre o lado  $e$ .

Define-se também a função  $\tilde{\xi}^*(x)$  da seguinte forma

$$\tilde{\xi}^*(x) = \tilde{\xi}_e^* (1 - x / h_e) + \tilde{\xi}_{e+1}^* x / h_e \quad (\text{IV.38})$$

onde

$$\tilde{\xi}_1^* = \tilde{\xi}_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\xi}_{E+1}^* = \tilde{\xi}_E \quad (\text{IV.39})$$

$$\tilde{\xi}_e^* = (h_{e-1} \tilde{\xi}_{e-1} + h_e \tilde{\xi}_e) / (h_{e-1} + h_e) \quad \text{com } e = 2, \dots, E$$

(IV.40)

finalmente a (IV.34) pode-se escrever como segue

$$\begin{aligned} L(\tilde{\xi}, \bar{u}) &= \tilde{\xi}_1^* \bar{u}_1 h_1 / 2 + \sum_{e=2}^E \tilde{\xi}_e^* \bar{u}_e (h_{e-1} + h_e) / 2 + \\ &+ \tilde{\xi}_{E+1}^* \bar{u}_{E+1} h_E / 2 = \sum_{e=1}^E (\tilde{\xi}_e^* \bar{u}_e + \tilde{\xi}_{e+1}^* \bar{u}_{e+1}) h_e / 2 = \\ &= \sum_{e=1}^E \hat{L}_e(\tilde{\xi}_e^*, \bar{u}_e) = \hat{L}(\tilde{\xi}^*, \bar{u}) \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

onde  $\hat{L}_e$  é o operador da regra de integração do trapézio.

Utilizando as expressões antes vistas a (IV.28) pode-se escrever

$$A(\Delta \underline{u}, \bar{\underline{u}}) + L(\underline{\xi}^*, \bar{\underline{u}}) = F(\bar{\underline{u}}) \quad (\text{IV.42})$$

Na figura (IV.11) se ilustra o significado de alguns termos vistos anteriormente.

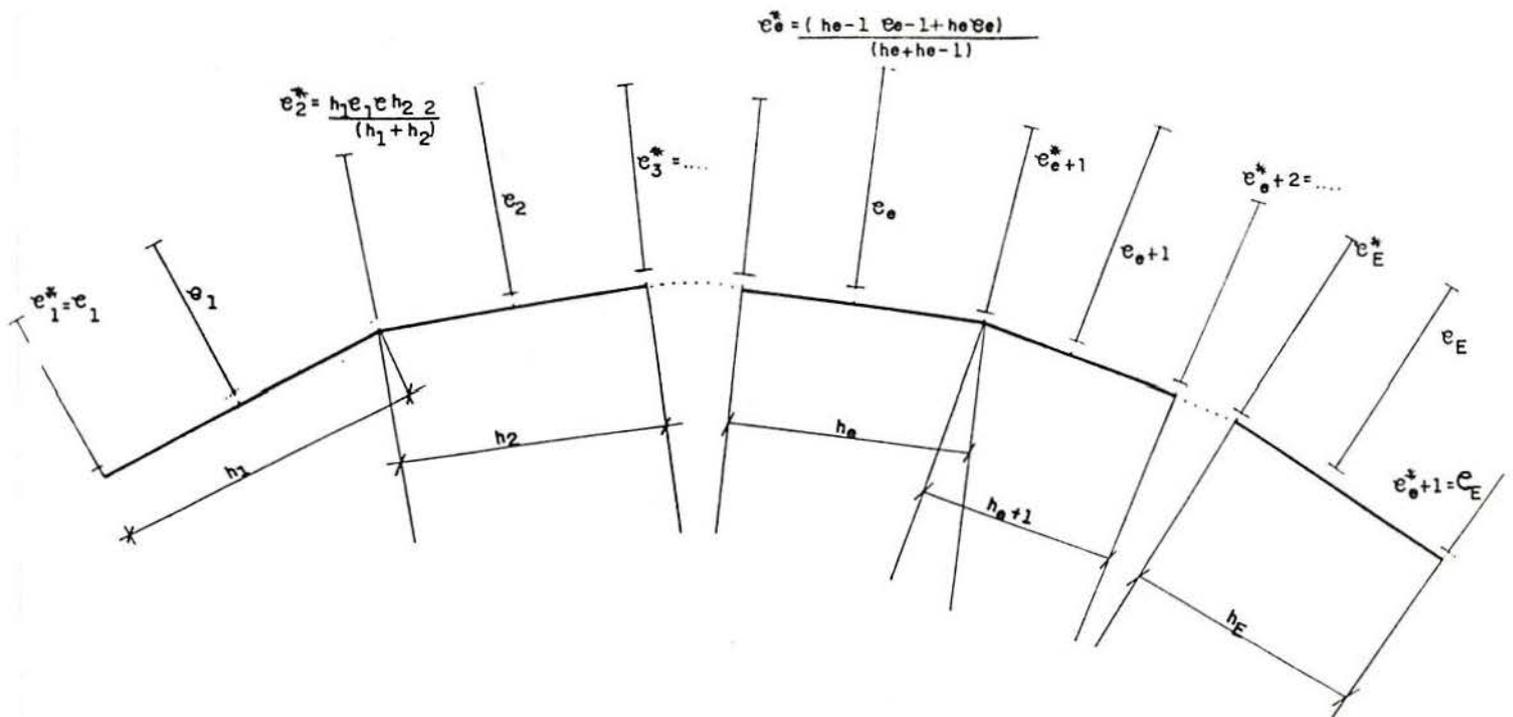


Figura IV.9- Representação dos termos afetados pela penalidade sobre o contorno em contato do corpo flexível.

A implementação computacional das modificações assinaladas requer fazer algumas mudanças na parte cinemática do algoritmo pois agora se faz necessário calcular as normais ao lado e não aos nós em contato. Além disso é necessário calcular valores de solapé e de incremento de tensões nos lados a partir dos valores nodais.

Para ilustrar a forma da matriz de rigidez e o vetor de cargas adicionais para levar em conta o contato e o

atrato se faz o desenvolvimento de ditos termos para o caso do contorno de um corpo flexível formado por três contornos elementares como pode ver-se na figura (IV.10).

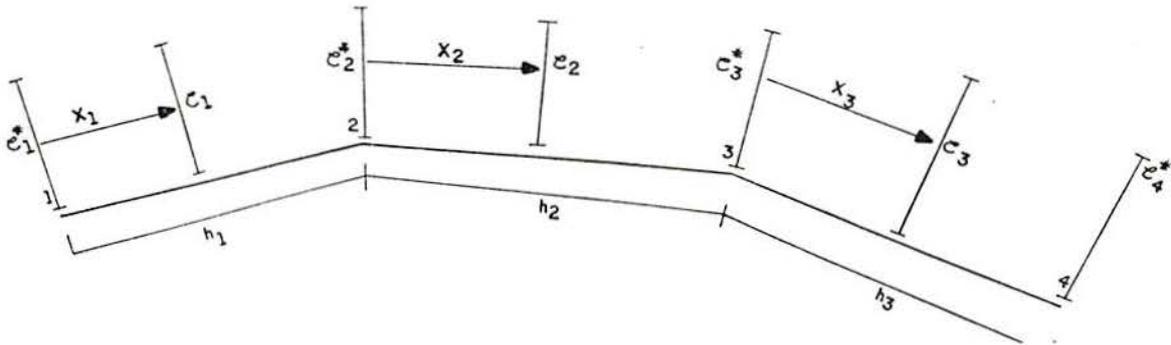


Figura IV.10- Zona potencial de contato formada por três contornos elementares do corpo flexível.

Partindo da (III.25) e (III.26) é possível escrever

$$K_{ij}^e = (k_{n_i n_j} + \hat{K}_{ij})_{(x_1^e)} \quad (IV.43)$$

$$F_i^e = (\Delta g_{n_i} k_{n_i} + \Delta g_{Tk} K_{ik} + c T_i \Delta t)_{(x_1^e)} \quad (IV.44)$$

as expressões (IV.43) e (IV.44) são constantes para o lado  $e$ .

Na (IV.44) a inclusão do último termo é discutível pois não está afetado pela função de penalidade, ou seja que poderia ser integrado ocupando a regra da quadratura de Gauss com dois pontos de integração. No programa implementado se aplicou o mesmo método de integração para todos os termos devidos ao contato e ao atrito.

A  $\tilde{\xi}_e$  pode-se escrever da seguinte forma

$$\tilde{\xi}_e = K_{ij}^e N_{\beta(x_1^e)} \Delta u_{i\beta} - F_i^e \quad (IV.45)$$

onde  $x_1^e$  é a ordenada do centróide do lado  $e$ . Os subíndices  $i, j$  podem tomar valores  $x$  ou  $y$  que indicam direção dos eixos e  $\beta$  valores 1 ou 2 indicando os nós extremos do contorno

elementar.

Também se cumpre que

$$N_{\beta(x_1^e)} = 1/2 \quad (\text{IV. 46})$$

desenvolvendo a (IV. 45) tem-se

$$\xi_e = \begin{bmatrix} K_{xx}^e & K_{xy}^e \\ K_{yx}^e & K_{yy}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{x1} \\ \Delta u_{y1} \\ \Delta u_{xz} \\ \Delta u_{yz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_x^e \\ F_y^e \end{bmatrix}$$

(IV. 47)

substituindo (IV. 46) na (IV. 47) e operando chega-se a

$$\xi_e = (1/2) \begin{bmatrix} K_{xx}^e & K_{xy}^e & K_{xx}^e & K_{xy}^e \\ K_{yx}^e & K_{yy}^e & K_{yx}^e & K_{yy}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{x1} \\ \Delta u_{y1} \\ \Delta u_{xz} \\ \Delta u_{yz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_x^e \\ F_y^e \end{bmatrix}$$

(IV. 48)

desenvolvendo a (IV. 40) para o exemplo que se analisa tem-se

$$\begin{aligned} [(\xi_e^*, \bar{u})] = (1/2) [ & \xi_1^* h_1 \bar{u}_1 + \xi_2^* (h_1 + h_2) \bar{u}_2 + \xi_3^* (h_1 + h_2) \bar{u}_3 + \\ & + \xi_4^* h_3 \bar{u}_4 ] \end{aligned} \quad (\text{IV. 49})$$

utilizando as expressões (IV. 39) e (IV. 40), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \hat{L}(\xi_e^*, \bar{u}) = (1/2) [ & \bar{u}_1^T \xi_1 h_1 + \bar{u}_2^T (\xi_2 h_1 + \xi_2 h_2) (1/(h_1 + h_2)) + \dots + \\ & + \bar{u}_4^T \xi_4 h_3 ] \end{aligned} \quad (\text{IV. 50})$$

se na (IV.50) substitui-se  $\xi_e$  pela (IV.32) tem-se

$$\begin{aligned}
 \widehat{(\xi_e^*, \bar{u})} &= \\
 &= [\bar{u}_{1x} \bar{u}_{1y}] \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} K_{xx}^1 & K_{xy}^1 & K_{xx}^1 & K_{xy}^1 \\ K_{yx}^1 & K_{yy}^1 & K_{yx}^1 & K_{yy}^1 \end{array} \right] \frac{h_1}{4} \begin{bmatrix} \Delta u_{x1} \\ \Delta u_{y1} \\ \Delta u_{x2} \\ \Delta u_{y2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \end{bmatrix} \frac{h_1}{2} \right\} + \\
 &+ [u_{2x} u_{2y}] \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} K_{xx}^1 & K_{xy}^1 & K_{xx}^1 & K_{xy}^1 \\ K_{yx}^1 & K_{yy}^1 & K_{yx}^1 & K_{yy}^1 \end{array} \right] \frac{h_1}{4} \begin{bmatrix} \Delta u_{x1} \\ \Delta u_{y1} \\ \Delta u_{x2} \\ \Delta u_{y2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \end{bmatrix} \frac{h_1}{2} \right\} + \\
 &+ [u_{2x} u_{2y}] \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} K_{xx}^2 & K_{xy}^2 & K_{xx}^2 & K_{xy}^2 \\ K_{yx}^2 & K_{yy}^2 & K_{yx}^2 & K_{yy}^2 \end{array} \right] \frac{h_1}{4} \begin{bmatrix} \Delta u_{x2} \\ \Delta u_{y2} \\ \Delta u_{x3} \\ \Delta u_{y3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_x^2 \\ F_y^2 \end{bmatrix} \frac{h_2}{2} \right\} + \dots + \\
 &+ [u_{4x} u_{4y}] \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} K_{xx}^3 & K_{xy}^3 & K_{xx}^3 & K_{xy}^3 \\ K_{yx}^3 & K_{yy}^3 & K_{yx}^3 & K_{yy}^3 \end{array} \right] \frac{h_3}{4} \begin{bmatrix} \Delta u_{x3} \\ \Delta u_{y3} \\ \Delta u_{x4} \\ \Delta u_{y4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_x^3 \\ F_y^3 \end{bmatrix} \frac{h_3}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

(IV.51)

A (IV.51) pode-se escrever em forma mais conveniente como segue

$$\bar{u} (1/4) K \Delta u = (1/2) F \quad (IV.52)$$

onde  $\underline{K}$  pode-se expressar da seguinte forma

(IV. 53)

$$\left[ \begin{array}{cccccccc}
 K_{xx}^1 h_1 & K_{xy}^1 h_1 & K_{xx}^1 h_1 & K_{xy}^1 h_1 & & & & \\
 & K_{yy}^1 h_1 & K_{xy}^1 h_1 & K_{yy}^1 h_1 & & & & \\
 & & K_{xx}^1 h_1 + K_{xx}^2 h_2 & K_{xy}^1 h_1 + K_{xy}^2 h_2 & K_{xx}^2 h_2 & K_{xy}^2 h_2 & & \\
 & & & K_{yy}^1 h_1 + K_{yy}^2 h_2 & K_{xy}^2 h_2 & K_{yy}^2 h_2 & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & K_{xx}^3 h_3 & K_{xy}^3 h_3 \\
 & & & & & & & K_{yy}^3 h_3
 \end{array} \right]$$

sim

$$\left[ \begin{array}{l}
 F_x^1 h_1 \\
 F_y^1 h_1 \\
 F_x^1 h_1 + F_x^2 h_2 \\
 F_y^1 h_1 + F_y^2 h_2 \\
 : \\
 : \\
 F_x h_3 \\
 F_y h_3
 \end{array} \right]$$

(IV. 54)

A partir da (IV.53) e (IV.54) é possível deduzir que a matriz de rigidez e o vetor de cargas elementares para levar em conta o contato e o atrito no contorno e pode-se expressar como segue.

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} K_{xx}^{\circ} h_i & K_{xy}^{\circ} h_e & K_{xx}^{\circ} h_e & K_{xy}^{\circ} h_e \\ & K_{yy}^{\circ} h_e & K_{xy}^{\circ} h_e & K_{yy}^{\circ} h_e \\ & & K_{xx}^{\circ} h_e & K_{xy}^{\circ} h_e \\ & & & K_{yy}^{\circ} h_e \end{bmatrix} \quad \text{(IV.55)}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_x^{\circ} h_e \\ F_y^{\circ} h_e \\ F_x^{\circ} h_e \\ F_y^{\circ} h_e \end{bmatrix} \quad \text{(IV.56)}$$

Os termos expressos na (IV.55) e (IV.56) são calculados para cada um dos contornos elementares em contato do corpo fléxivel nas sucessivas iterações até cumprir a condição (IV.4) dentro de cada passo incremental.

Em cada iteração deve-se também comprovar que as tensões normais (tensões e não incrementos das mesmas) sobre os contornos elementares em contato sejam de compressão.

No caso em que sejam de tração, o qual não tem sentido físico, se elimina a contribuição dada por (IV.55) e (IV.56) correspondente a esse contorno na próxima iteração.

## CAPITULO V: EXEMPLOS NUMERICOS

Em continuação, são apresentados dois exemplos que permitem avaliar o comportamento dos programas implementados (CONANASE1 e CONANASE2).

### V.1 EXEMPLO 1

Suponha-se um cilindro circular rígido de raio  $R = 8$  cm, que ao descer impõe deformações sobre um corpo flexível com comportamento elástico linear (ver figura V.1).

O corpo elástico de dimensões 16 cm x 4 cm é discretizado utilizando 178 elementos quadriláteros lineares de 4 nós é analisado considerando estado plano de deformações.

Adota-se  $E = 10000$  MPa.,  $\nu = 0.3$ , coeficiente de atrito  $\mu = 0.0$  e constante de penalidade  $k_n = 1E10$ .

A malha utilizada para discretizar o corpo flexível é mais densa na zona onde se produz o contato, como pode ver-se nas figuras V.2 e V.4.

Na figura V.3 se ilustra a malha deformada após da aplicação de um deslocamento prescrito devido ao avanço de 0.6 cm do cilindro rígido na direção vertical. Na figura V.4 mostra-se um detalhe da malha deformada.

Os resultados numéricos obtidos foram comparados com a solução teórica de Hertz [25] e com a solução numérica apresentada por Chen & Kikuchi [8]. A comparação dos mesmos pode ver-se na figura V.5.

Analisando os valores achados com o programa implementado pode ver-se que os mesmos se ajustam razoavelmente bem a solução dada por Chen & Kikuchi [8]. Ao confronta-los com a solução teórica de Hertz observam-se bons resultados para profundidades de penetração baixas, separando-se a solução teórica da numérica a medida que a penetração aumenta. Isto pode ser explicado levando-se em consideração que, para grandes deformações impostas, as hipóteses da solução de Hertz deixam de valer ( ver figura V. 6)

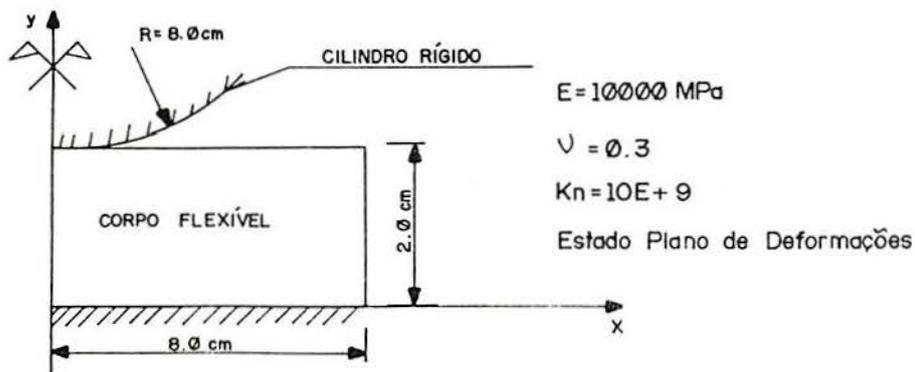


Figura V.1-Cilindro rígido que impõe deformações sobre um corpo flexível.

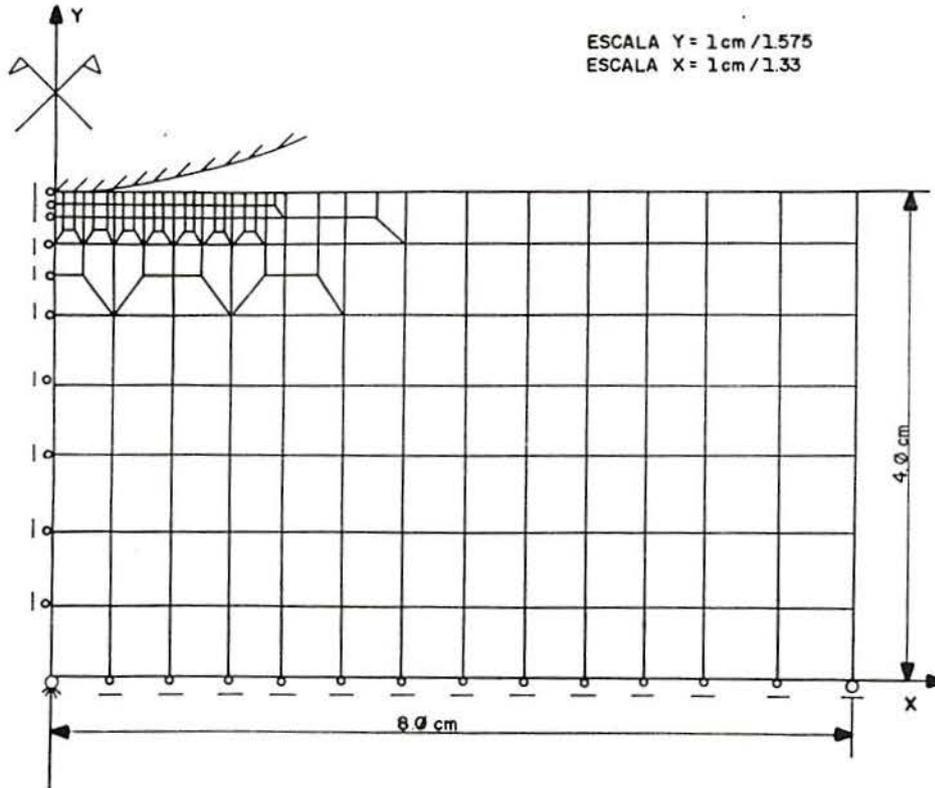


Figura V.2-Malha indeformada que discretiza o corpo flexível da figura V.1 com 178 elementos isoparamétricos lineares de 4 nós.

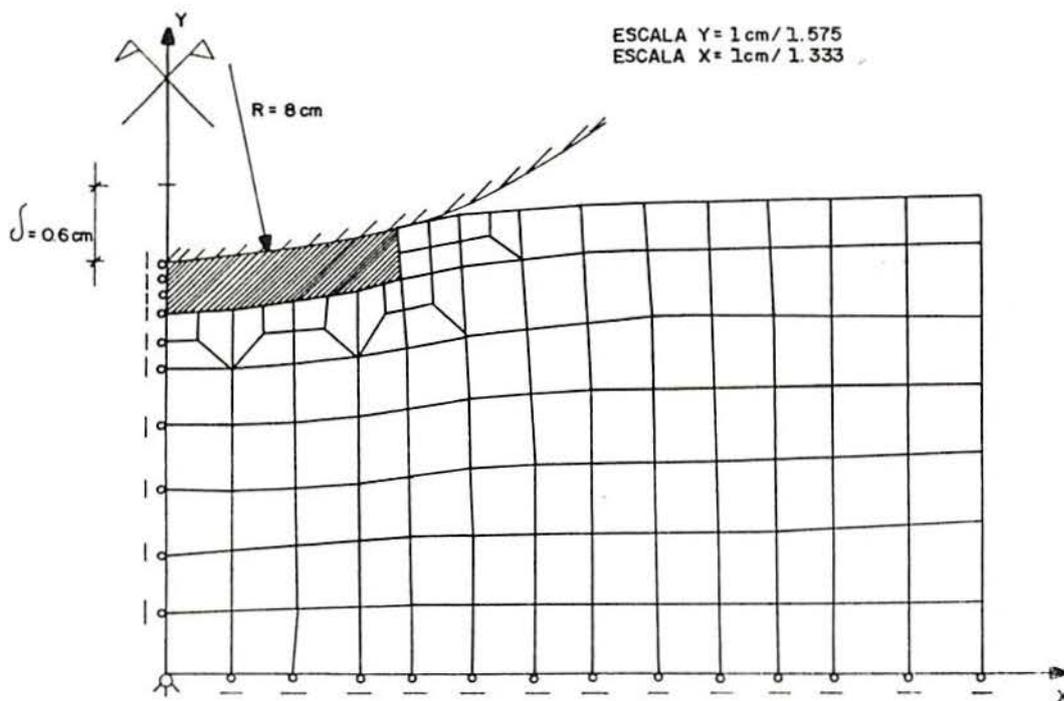


Figura V.3- Malha da figura V.2 deformada após descer o cilindro rígido 0.6 cm em direção vertical impondo deformações sobre o corpo flexível.

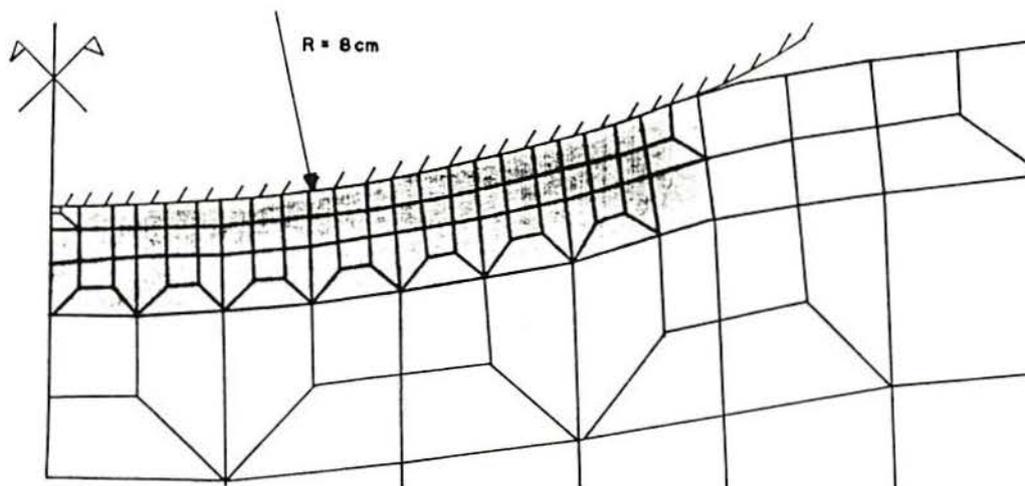


Figura V.4 - Detalhe da figura V.3 onde pode-se observar a densificação da malha na zona de contato.

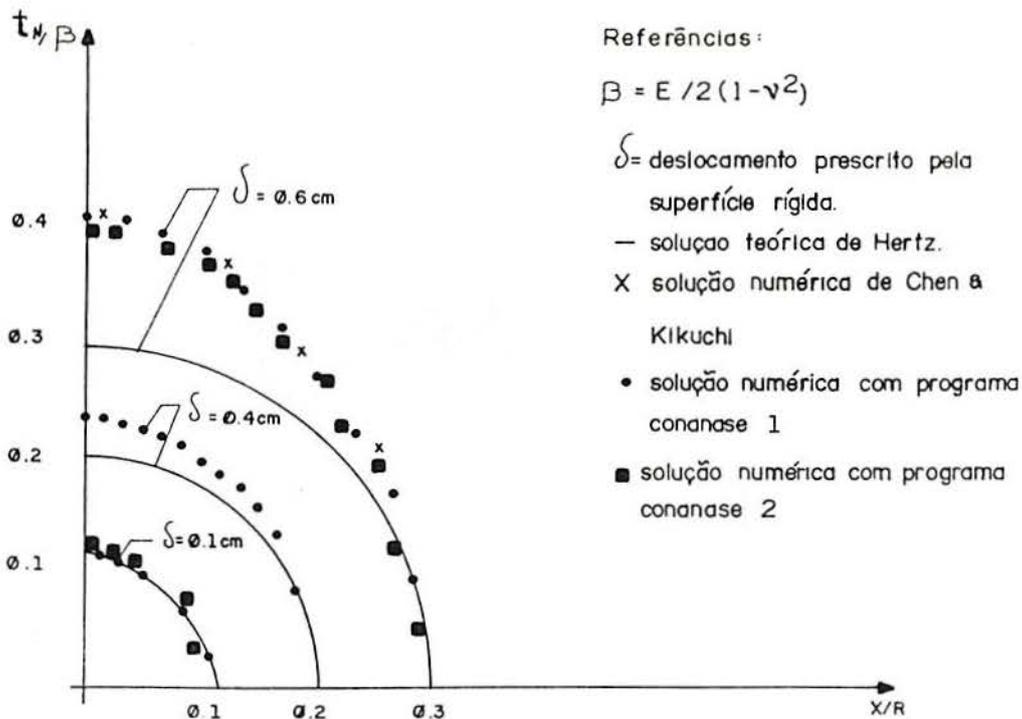


Figura V.5- Tensões computadas com os programas implementados (CONANASE1 e CONANASE2) e comparação com a solução teórica de Hertz [25] e a numérica de Chen & Kikuchi [8].

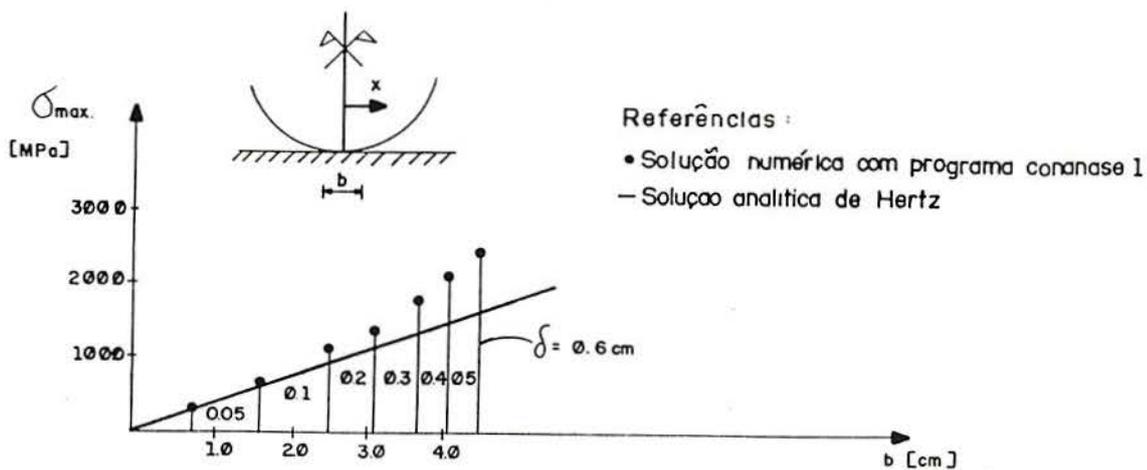


Figura V.6- Gráfico que mostra a divergência da solução numérica com a solução teórica de Hertz.

## V.2 EXEMPLO 2

Considera-se um disco elástico de raio  $R = 2$  cm e espessura  $e = 1$  cm, sobre o qual impõe deformações um anel circular rígido, (ver figura V.7).

Adotam-se os seguintes valores de constantes elásticas

$$E = 1000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

e os valores de penalidade empregados são

$$K_n = K_T = 1 \text{ E } 10$$

O exemplo é analisado considerando ele axisimétrico.

A malha utilizada para discretizar o corpo flexível é composta por 220 elementos isoparamétricos lineares de 4 nós.

Na figura V.8 mostra-se a malha indeformada e na figura V.9 a mesma deformada depois que o anel rígido impõe um deslocamento prescrito de 0.2 cm na direção vertical.

Os resultados obtidos ajustaram-se relativamente bem à solução analítica dada por Shibuya [23], como se mostra na figura V.10.

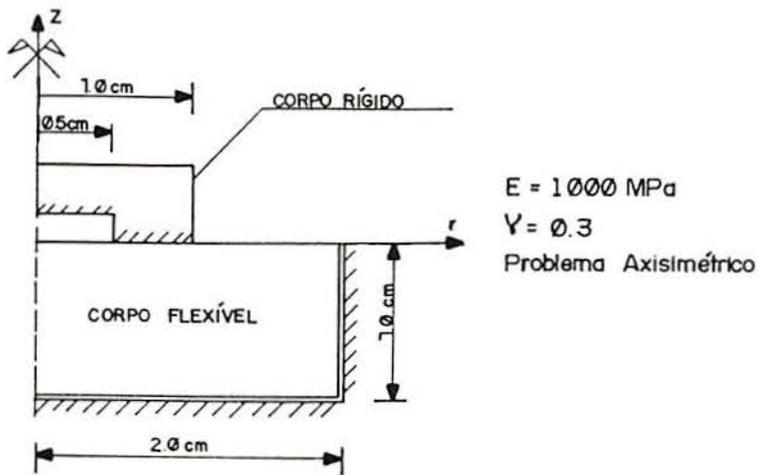


Figura V.7- Anel rígido que impõe deformações sobre um disco flexível.

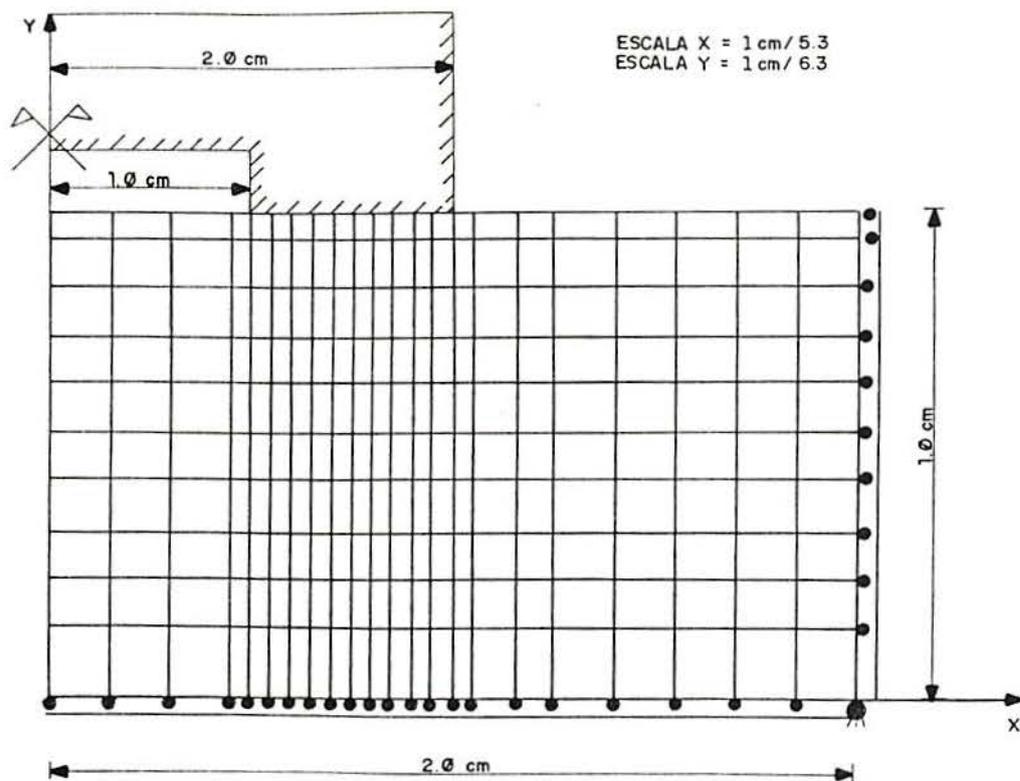


Figura V.8- Malha indeformada que discretiza o disco flexível da figura V.7 composta de 220 elementos isoparamétricos lineares de 4 nós.

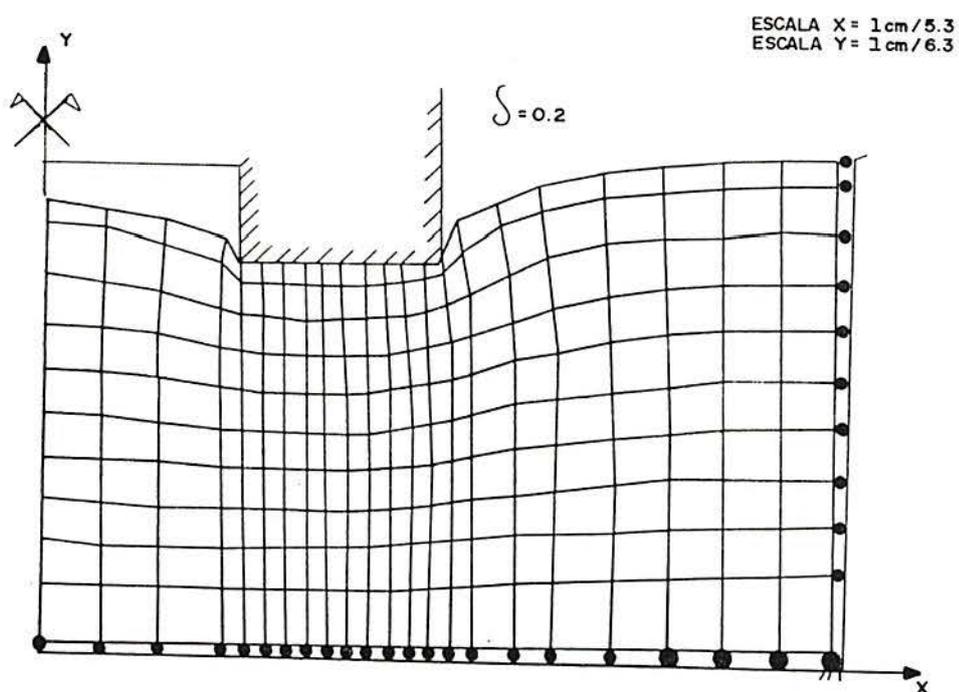


Figura V.9- Malha da figura V.8 deformada após descer o anel rígido 0.2 cm na direção vertical, impondo deformações sobre o disco flexível. (programa CONANASE1).

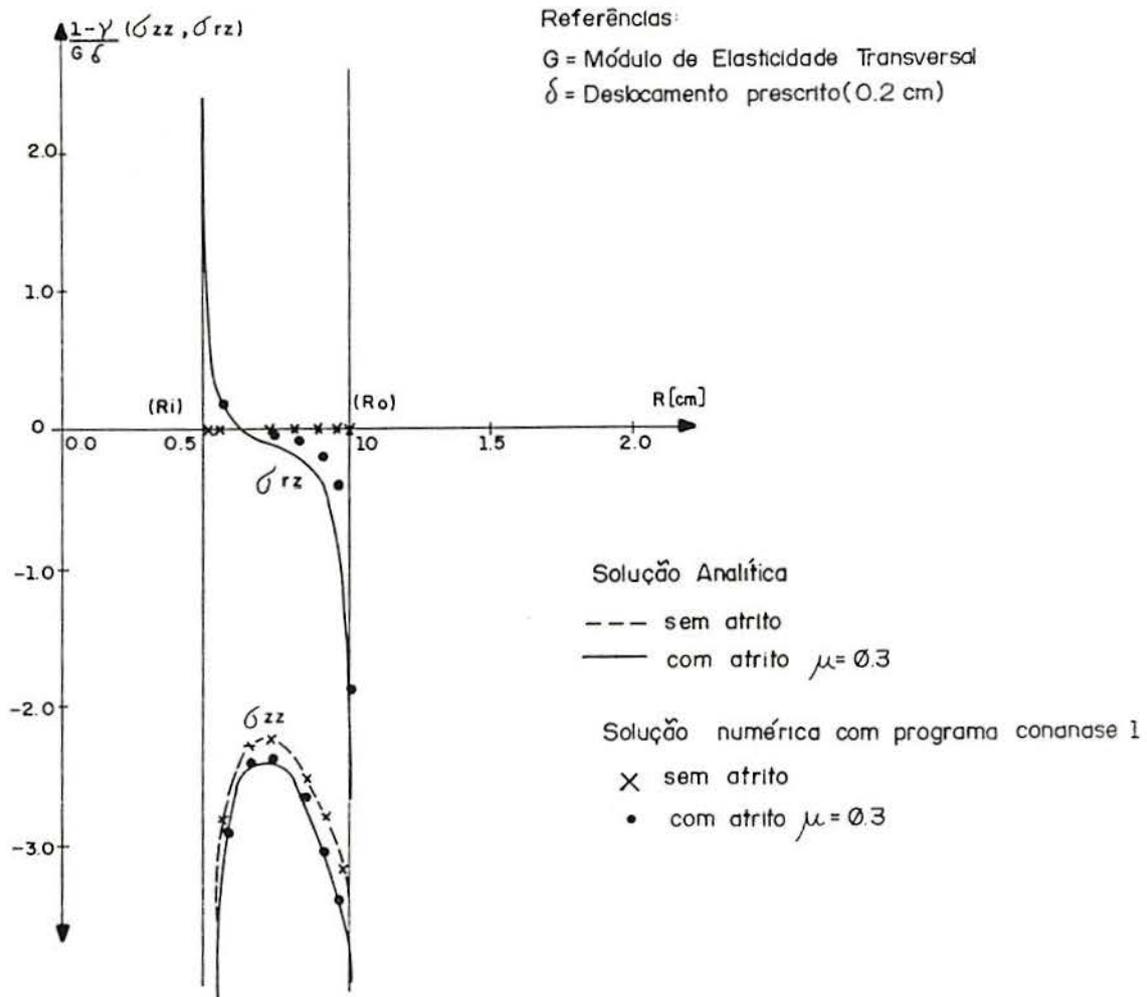


Figura V.10- Tensões computadas com o programa CONANASE1 e comparação com a solução analítica.

## CAPITULO VI: CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho apresentou-se a teoria e a implementação computacional de um algoritmo que leva em conta o contato e o atrito no caso em que um corpo rígido avança impondo deslocamentos sobre um corpo flexível de comportamento elástico linear num processo incremental.

Foram analisados problemas de estado plano de deformações e axissimétrico.

O corpo rígido foi modelado mediante a combinação de contornos de geometria simples (reta, arco de círculo e arco de parábola) definidos em forma paramétrica .

O corpo deformável foi modelado mediante o método dos elementos finitos empregando elementos isoparamétricos de 4 nós.

Os efeitos do contato e atrito entre os corpos foram levados em conta empregando a teoria apresentada por Chen & Kikuchi [7], [8] baseada no método das funções de penalidade.

Uma das premissas ao implementar o algoritmo foi a facilidade de adaptar o mesmo para o caso em que o corpo flexível tiver uma lei de comportamento mais complexa (por exemplo plasticidade com grandes deformações).

O principal problema apresentado na implementação computacional foi contornar o efeito da sobrerestrição ('locking') que se produz nos termos afetados pelas funções de penalidade, o qual distorce a distribuição das tensões na zona em contato.

Foram testadas várias estratégias para solucionar o problema, tais como integração reduzida, implementação de elementos quadráticos e distintos tipos de suavizações dos valores das tensões calculadas na zona em contato, obtendo as seguintes conclusões.

## VI.1 CONCLUSÕES

-A luz dos resultados obtidos pela versão do programa CONANASE1, pode-se concluir que o método das funções de penalidade permite achar, sem maiores problemas, o campo de deslocamentos, produzindo-se inconvenientes no cálculo das tensões via penalidade, razão pela qual as tensões na zona de contato foram calculadas a partir dos valores obtidos nos pontos de integração dos elementos adjacentes levados a os nós do contorno em contato mediante uma técnica de interpolação.

-Calculando as tensões na zona de contato a partir dos valores nos pontos de integração dos elementos adjacentes pode-se chegar a resultados relativamente bons como se observa nos exemplos apresentados no capítulo V. Observou-se também que se o gradiente de variação das tensões é muito elevado sua distribuição sofre distorções.

-Uma discretização muito fina na zona onde se produz o contato é essencial para obter uma aproximação razoável dos resultados.

-Pelos testes feitos com a versão do programa CONANASE2 pode-se observar que a suavização na distribuição das tensões na zona de contato calculadas via penalidade é satisfatória devido à técnica implementada na integração numérica, a qual traz uma simplificação considerável no cálculo.

-Se bem que esta versão do programa não tenha sido totalmente testada, considera-se que é o melhor caminho a seguir em futuras extensões do trabalho apresentado.

Ao se adotar valores de incremento no tempo de avanço ( $\Delta t$ ) grandes, o erro introduzido no cálculo das tensões na zona de contato será elevado, mas como nos casos analisados o corpo deformável tem um comportamento elástico linear, podem-se calcular os versores normais aos contornos da zona potencial de contato sobre a configuração original e, neste caso, não se existe limitação na escolha do  $\Delta t$ .

Caso só importar o estado final no processo incremental analisado, poder-se-ia considerar um incremento de tempo igual à duração de todo o processo, ganhando assim, tempo no cálculo. Mas se a lei de comportamento do corpo deformável prever grandes deformações, então deverá trabalhar-se com valores de  $\Delta t$  pequenos para obter bons resultados.

## VI.2 SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

São numerosas as possíveis extensões a este trabalho, entre elas podem-se citar:

-Considerar um comportamento plástico com grandes deformações para o corpo flexível, e desta maneira estar em condições de simular processos de conformação mecânica .

-Estudar métodos de remanejo de malha ('remeshing ') a aplicar na discretização feita no corpo flexível, pois pode-se observar que é essencial para obter resultados razoáveis uma densificação considerável na zona em que existem os maiores gradientes de tensões, os que geralmente se produzem nos bordos da fronteira em contato ( $\Gamma_c^*$ ) e vão mudando na medida que o processo incremental avança.

Seria muito útil que a malha mais fina fosse acompanhando a mudança da fronteira em contato de tal forma que a maior densificação da mesma coincida com a região de mais altos gradientes durante todo o processo incremental.

-Estudar com profundidade a forma de levar em conta o atrito testando a influência nos resultados da variação do coeficiente de atrito  $\mu_F$  com o deslizamento tangencial relativo entre as superfícies de contato, e implementar outras leis do comportamento do atrito diferentes da lei de Coulomb para assim procurar simular a ação de lubrificantes, muito empregados nos processos de conformação mecânica.

-Implementar um algoritmo que trabalhe empregando o método dos multiplicadores de Lagrange e poder assim comparar os resultados e a efetividade de outras formas de encarar o problema. Além disso, o uso dos multiplicadores de Lagrange facilita a consideração de que ambos corpos em contato sejam flexíveis.

-Podem-se também ampliar as possibilidades do programa para levar em conta efeitos dinâmicos o qual permitiria analisar problemas de impacto, e também considerar as mudanças produzidas pelo calor tanto no estado tensional como das propriedades do atrito entre ambas superfícies.

ANEXO A: DEMOSTRAÇÕES DAS PRINCIPAIS EXPRESSÕES  
DOS CAPÍTULOS II E III

Neste anexo se fazem algumas demonstrações de expressões dos capítulos II e III.

A.1 DEMOSTRAÇÃO DA EXPRESSÃO (II.11)

Escreve-se a expressão (II.11)

$$u_{i,j} = X_{j,j} u_{i,j} \quad (\text{a.1})$$

Da II.5 pode-se escrever

$$u_{i,j} = x_{i,j} - X_{i,j} = \delta_{ij} - X_{i,j} \quad (\text{a.2})$$

e

$$u_{i,j} = x_{i,j} - X_{i,j} = x_{i,j} - \delta_{ij} \quad (\text{a.3})$$

Escrevendo (a.1) em termos de (a.2) e (a.3) se tem-se

$$\delta_{ij} - X_{i,j} = X_{j,j} (x_{i,j} - \delta_{ij}). \quad (\text{a.4})$$

Realizando o seguinte produto no segundo membro da (a.4)

$$X_{j,j} x_{i,j} - X_{j,j} \delta_{ij} = \delta_{ij} - X_{i,j} \quad (\text{a.5})$$

fica então demonstrada a igualdade (a.1)

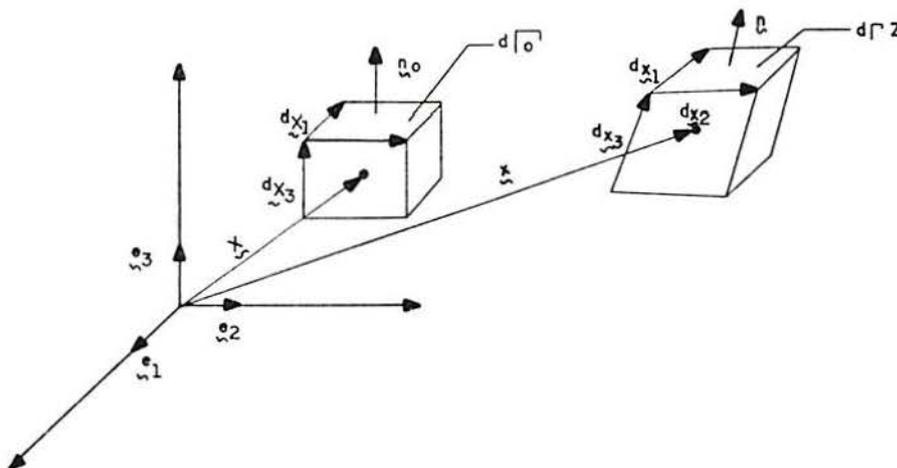
A.2

## DEMONSTRAÇÃO DA EXPRESSÃO (II.21)

A expressão (II.21) pode-se escrever como

$$d\Gamma^T n_i = J X_{I,i} d\Gamma^O n_I^O \quad (\text{a.6})$$

Considera-se um cubo de volume elementar  $\Delta v_0$  referido a um sistema de eixos cartesianos. Sobre uma de suas faces de área  $d\Gamma^O$  atua o vetor normal  $\underline{n}^O$  paralelo ao versor  $\underline{e}$ . Procura-se a expressão para calcular o produto da área  $d\Gamma$  de uma face pelo vetor normal a mesma  $\underline{n}$  do cubo deformado, em termos dos valores  $d\Gamma^O$  e  $\underline{n}^O$ , (ver figura A.1)



A.1- Cubo elementar antes e depois da deformação

Se emprega no desenvolvimento notação matricial para facilitar os cálculos.

Sendo então

$$\underline{F} = x_{i,j} \quad (\text{a.7})$$

se  $\otimes$  indica produto vetorial pode-se escrever

$$\tilde{n} \, d\Gamma = d\tilde{x}_1 \oplus d\tilde{x}_2 \quad (\text{a.8})$$

que em termos da configuração indeformada fica

$$\tilde{n} \, d\Gamma = (\tilde{F} \, d\tilde{X}_1) \oplus (\tilde{F} \, d\tilde{X}_2) \quad (\text{a.9})$$

multiplicando o segundo termo da (a.9) por  $(\tilde{F} \, d\tilde{X}_3)$  e sua inversa se tem

$$((\tilde{F} \, d\tilde{X}_1) \oplus (\tilde{F} \, d\tilde{X}_2) \tilde{F} \, d\tilde{X}_3 (\tilde{F} \, d\tilde{X}_3)^{-1}) \quad (\text{a.10})$$

que pode escrever-se

$$J(d\tilde{X}_1 \oplus d\tilde{X}_2) \, d\tilde{X}_3 (\tilde{F} \, d\tilde{X}_3)^{-1} \quad (\text{a.11})$$

onde

$$J = \det \tilde{F} = [x_{i,j}] \quad (\text{a.12})$$

Da (a.11) substituindo os fatores pelo que representam se tem

$$J \, \tilde{n}^\circ \, d\Gamma^\circ \, d\tilde{X}_3 \, d\tilde{X}_3^{-1} \, \tilde{F}^{-1} \quad (\text{a.13})$$

pode-se agora escrever (a.8) como

$$\tilde{n} \, d\Gamma^\tau = J \, \tilde{n}^\circ \, d\Gamma^\circ \, \tilde{F}^{-1} \quad (\text{a.14})$$

que em notação indicial fica

$$n_i \, d\Gamma = J \, n_I^\circ \, d\Gamma^\circ \, X_{I,i} \quad (\text{a.15})$$

igual à expressão (II.20)

A.3 DEDUÇÃO DE EXPRESSÕES PARA O INCREMENTO DO TENSOR DE PIOLA KIRCHOFF DE SEGUNDA ESPÉCIE ( $\Delta S_{IJ}$ )-(II.25)

Partindo de (II.13)

$$S_{IJ} = J X_{I,i} X_{J,j} \sigma_{ji} \quad (\text{a.16})$$

Aplicando o incremento como sendo derivada com respeito ao tempo se tem

$$\begin{aligned} \Delta S_{IJ} = J X_{I,i} X_{J,j} \Delta \sigma_{ji} + \sigma_{ij} ( \Delta J X_{I,i} X_{J,j} + \\ + J ( \Delta X_{I,i} X_{J,j} + \Delta X_{J,j} X_{I,i} ) ) \end{aligned} \quad (\text{a.17})$$

Por sua vez se sabe que

$$u_{i,j} = X_{i,j} - X_{I,j} = \delta_{ij} - X_{I,j} \quad (\text{a.18})$$

Calculando o incremento do deslocamento como

$$\Delta u_{i,j} = -\Delta X_{I,j} \quad (\text{a.19})$$

Se a configuração de referência e a configuração atualizada coincidem se cumpre que

$$J = 1, \Delta J = \Delta u_{k,k}, X_{i,j} = \delta_{ij} \quad (\text{a.20})$$

e considerando só índices minúsculos fica

$$\Delta S_{ij} = \Delta \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \Delta u_{k,k} - \sigma_{kl} \delta_{j,l} \Delta u_{i,k} - \Delta u_{j,k} \delta_{i,l} \sigma_{lk} \quad (\text{a.21})$$

Trabalhando a expressão anterior fica

$$\Delta S_{ij} = \Delta \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \Delta u_{k,k} - \sigma_{kj} \Delta u_{i,k} - \Delta u_{j,k} \sigma_{ik} \quad (\text{a.22})$$

De forma similar podem deduzir-se (II.26)

## A.4 DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO (III.12)

Partindo das equações (III.7), (III.10) e (III.11) como taxas, se tem

$$\Delta t_{Ti} = -k_T (\Delta u_{Ti}^e - \Delta g_{Ti}) \quad (a.23)$$

$$\Delta u_{Ti}^p = -\Lambda \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \quad (a.24)$$

$$\Delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \Delta t_{Ti} + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_F} \right) \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial u_{Ti}^p} \right) \Delta u_{Ti}^p + \left( \frac{\partial F}{\partial t_n} \right) \Delta t_n = 0 \quad (a.25)$$

Assume-se que  $\Delta u_{Ti}$  pode-se decompor como segue

$$\Delta u_{Ti} = \Delta u_{Ti}^e + \Delta u_{Ti}^p \quad (a.26)$$

Substituindo  $\Delta t_{Ti}$  por (a.23) e  $\Delta u_{Ti}^p$  por (a.24) na expressão (a.25) tem-se

$$\Delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) [-k_T (\Delta u_{Ti}^e - \Delta g_{Ti})] + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_F} \right) \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial u_{Ti}^p} \right) \left( -\Lambda \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \right) + \Delta t_n \left( \frac{\partial F}{\partial t_n} \right) = 0 \quad (a.27)$$

A partir da (a.26) pode-se escrever  $\Delta u_{Ti}^e$  da seguinte forma

$$\Delta u_{Ti}^e = \Delta u_{Ti} - \Delta u_{Ti}^p \quad (a.28)$$

substituindo em (a.28)  $\Delta u_{Ti}^p$  por (a.24) se tem

$$\Delta u_{Ti}^e = \Delta u_{Ti} - \Lambda \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \quad (\text{a.29})$$

e introduzindo finalmente (a.24) e (a.29) na equação (a.27) pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Delta F = & \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \left[ -k_T (\Delta u_{Ti} + \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} - \Delta g_{Ti}) \right] + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_F} \right) \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial u_{Ti}^P} \right) \left( -\Lambda \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \right) + \\ & + \Delta t_n \left( \frac{\partial F}{\partial t_n} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{a.30})$$

Desenvolvendo e agrupando em forma conveniente a (a.30) fica

$$\begin{aligned} \Lambda \left[ k_T \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_F} \right) \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial u_{Ti}^P} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \right] = & -k_T \Delta g_{Ti} \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) - \\ -\Delta t_n \left( \frac{\partial F}{\partial t_n} \right) + k_T \Delta u_{Ti} \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} = & 0 \end{aligned} \quad (\text{a.31})$$

A partir da (a.31) pode-se obter a seguinte expressão

$$\Lambda = \frac{k_T \Delta g_{Ti} \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) + \Delta t_n \left( \frac{\partial F}{\partial t_n} \right) - k_T \Delta u_{Ti} \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right)}{\left[ k_T \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_F} \right) \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial u_{Ti}^P} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) \right]} \quad (\text{a.32})$$

Utilizando as seguintes operações auxiliares, algumas delas já apresentadas no capítulo III

$$T_i = \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} = \frac{t_{Ti}}{\bar{t}_T} \quad (\text{a.33})$$

$$\bar{t}_T = \sqrt{t_{Ti} t_{Ti}} \quad (\text{a. 34})$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_n} = \mu_F \quad (\text{a. 35})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_F} = t_n \quad (\text{a. 36})$$

$$\frac{\partial \mu_F}{\partial u_{Ti}^P} = \frac{\partial \mu_F}{\partial \bar{u}_T^P} \frac{u_{Ti}^P}{\bar{u}_T^P} \quad (\text{a. 37})$$

onde

$$\bar{u}_T^P = \sqrt{u_{Tj}^P u_{Tj}^P} \quad (\text{a. 38})$$

e por último

$$\frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} = \frac{t_{Ti}}{\sqrt{(t_{Ti} t_{Ti})}} \frac{t_{Ti}}{\sqrt{(t_{Ti} t_{Ti})}} = 1 \quad (\text{a. 39})$$

pode-se finalmente escrever (a.32) da seguinte forma

$$\Lambda = \frac{-k_T T_j (\Delta u_{Ti} - \Delta g_{Ti}) + \mu_F \Delta t_n}{k_T + T_k t_n (\partial \mu_F / \partial \bar{u}_T^P)} \quad (\text{a. 40})$$

sendo que (a.40) é a equação (III.12).

## A.5 DEDUÇÃO DA (III.18)

Definindo  $D_T$  como

$$D_T = k_T + T_k t_n \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial \bar{u}_T^P} \right) \left( \frac{u_{Tk}^P}{\bar{u}_T^P} \right) \quad (\text{a.41})$$

e utilizando (a.32) e (a.39) em (a.24) pode-se escrever

$$u_{Ti}^P = \frac{(k_T T_j (\Delta u_{Ti} - \Delta g_{Ti}) + \mu_F \Delta t_n) T_i}{D_T} \quad (\text{a.42})$$

A partir das expressões (a.28) e (a.42) a relação constitutiva do atrito incremental fica

(a.43)

$$\Delta t_{Ti} = -k_T (\Delta u_{Ti} - \Delta u_{Ti}^P - \Delta g_{Ti}) = -(\Delta u_{Ti} - \Delta g_{Ti}) k_T +$$

$$+ \frac{(k_T T_j (\Delta u_{Ti} - \Delta g_{Ti}) + \mu_F \Delta t_n) T_i}{D_T}$$

Trabalhando algebricamente a equação (a.43) esta fica

$$\Delta t_{Ti} = -k_T (\delta_{ij} - \vartheta \frac{k_T T_i T_j}{D_T}) (\Delta u_{Ti} - \Delta u_{Ti}^P) -$$

$$- (\vartheta \mu_F \frac{k_T}{D_T}) \Delta t_n T_i \quad (\text{a.44})$$

Chamando

$$k_{ij} = k_T (\delta_{ij} - \vartheta \frac{k_T T_i T_j}{D_T}) \quad (\text{a.45})$$

$$c = \vartheta k_T \mu_F / D_T \quad (\text{a.46})$$

e utilizando (a.45) e (a.46), pode-se escrever a (a.44) em forma mais compacta ficando

$$\Delta t_{Ti} = -k_{ij} (\Delta u_{Tj} - \Delta g_{Tj}) - c T_i \Delta t_n \quad (\text{a.47})$$

Sendo que esta última expressão é equivalente a (III.18). O significado do  $\vartheta$  é dado no capítulo III.

#### A.6- DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES (III.25) E (III.26)

Partindo dos dois últimos termos da equação (III.23)

$$\int_{\Gamma_c^*} \left[ k_n (\Delta u_n - \Delta g_n) \bar{u}_n d\Gamma + [k_{ij} (\Delta u_{Tj} - \Delta g_{Tj}) + c T_i \Delta t_n] \bar{u}_{Ti} d\Gamma \right]_{\text{elem}} \quad (\text{a.48})$$

e das seguintes relações entre vetores

$$z_n = z_i n_i \quad (\text{a.49})$$

$$\tilde{z}_T = \tilde{z} - \tilde{z}_n \quad (\text{a.50})$$

onde  $\tilde{z}$  é um vetor aplicado sobre um ponto da superfície  $\mathcal{X}$ , com um versor normal interno  $\tilde{n} (= n_i e_i)$  á superfície nesse ponto.

Expressando a (a.50) em componentes referidas à base canônica e utilizando (a.40) é possível escrever

$$z_{Ti} e_i = z_i e_i - z_n n_i e_i = z_i e_i - z_j n_j n_i e_i \quad (\text{a.51})$$

de onde em forma imediata se obtém a relação

$$z_{Ti} = z_i - z_j n_j n_i \quad (\text{a.52})$$

a representação gráfica das relações anteriores podem-se ver na figura A.2

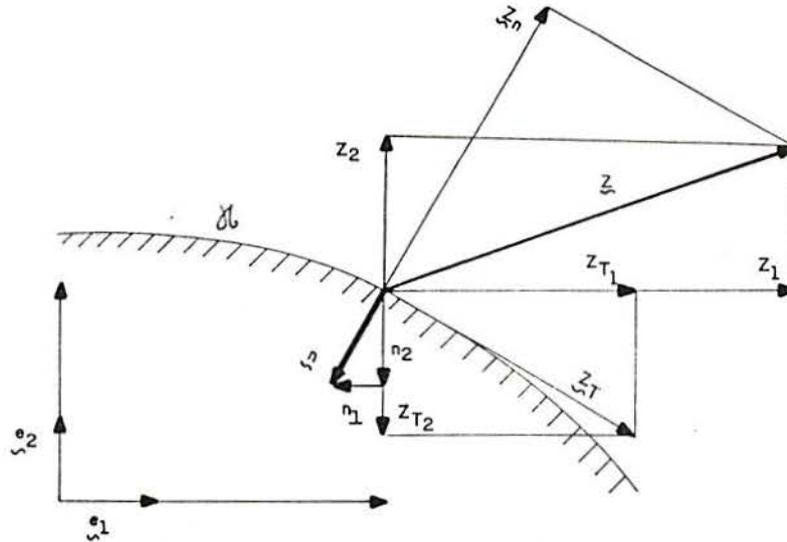


Figura A.2-Vetor  $\underline{z}$  aplicado em um ponto da superfície  $\mathcal{X}$  e suas componentes referidas a diferentes bases.

Sendo que as relações (a.49) até (a.52) são válidas para qualquer vetor, sua utilização na (a.48) fornece

$$\int_{\Gamma_c^*} \langle k_n (\Delta u_j n_j - \Delta g_n) \bar{u}_i n_i + [k_{ij} (\Delta u_j - \Delta u_k n_k n_j) (\bar{u}_i - \bar{u}_l n_l n_i) + \quad (\text{a.53})$$

$$+ (-\Delta g_{Tj} k_{ij} + c T_i \Delta t_n) (\bar{u}_i - \bar{u}_l n_l n_i) \rangle d\Gamma$$

Desenvolvendo o primeiro termo da expressão (a.53) se obtém

$$\langle k_n n_i n_j \Delta u_k - \Delta g_n n_j \rangle \bar{u}_i, \quad (\text{a.54})$$

O segundo termo da (a.53) pode-se escrever

$$k_{ij} \Delta u_j \bar{u}_i - k_{ij} n_k n_i \Delta u_k \bar{u}_i - k_{ij} n_l n_j \Delta u_j \bar{u}_l + k_{ij} n_i n_j n_k n_l \Delta u_k \bar{u}_l \quad (\text{a.55})$$

onde são válidas as seguintes igualdades

$$k_{ij} n_i n_k \Delta u_k \bar{u}_i = k_{ik} n_k n_j \Delta u_j \bar{u}_i \quad (\text{a.56})$$

$$k_{ijl} n_l \Delta u_j \bar{u}_l = k_{lj} n_l n_i \Delta u_j \bar{u}_i \quad (\text{a.57})$$

$$k_{ijl} n_i n_j n_k \Delta u_k \bar{u}_l = k_{lk} n_k n_l n_i n_j \Delta u_j \bar{u}_i \quad (\text{a.58})$$

substituindo (a.56), (a.57) e (a.58) na (a.55) pode-se escrever esta última como

$$\hat{k}_{ij} \Delta u_j \bar{u}_i \quad (\text{a.59})$$

onde

$$\hat{k}_{ij} = k_{ij} - k_{ik} n_k n_j - k_{lj} n_l n_i + k_{lk} n_k n_l n_i n_j \quad (\text{a.60})$$

Pode-se demonstrar (ver em (A.6.2)) que

$$k_{lj} n_l n_i = k_{lk} n_k n_l n_i n_j \quad (\text{a.61})$$

Conseqüentemente tanto a (a.60) fica reduzida a

$$\hat{k}_{ij} = k_{ij} - k_{ik} n_k n_j \quad (\text{a.62})$$

Finalmente se analisa o último termo da (a.53) que fica

$$\begin{aligned} -\Delta g_{Tj} k_{ij} \bar{u}_i + \Delta g_{Tj} k_{ij} \bar{u}_l n_l n_i + c T_i \Delta t_n \bar{u}_i - c T_i \Delta t_n \bar{u}_i = \\ = -\Delta g_{Tj} k_{ij} \bar{u}_i + c T_i \Delta t_n \bar{u}_i \end{aligned} \quad (\text{a.63})$$

$$\Delta g_{Tj} k_{ij} u_l n_l n_i = 0 \quad (\text{a.64})$$

(ver sua demonstração em A.6.1), e

$$c T_i n_i \bar{u}_l n_l \Delta t_n = 0 \quad (\text{a.65})$$

por ser  $T_i n_i = 0$ , que representa o produto escalar de dois vetores perpendiculares.

Utilizando (a.54) (a.59) e (a.63) pode-se apresentar a integral (a.53) da seguinte maneira

$$\int_{\Gamma_c^* \text{elem}} \langle [k_{n_i n_j} + \hat{k}_{ij}] \Delta u_j \bar{u}_i + [-\Delta g_{n_i} - k_{ij} \Delta g_{Tj} + c T_i \Delta t_n] \bar{u}_i \rangle d\Gamma \quad (\text{a.66})$$

substituindo na (a.64)  $\Delta u_j$  e  $\bar{u}_i$  por (III.27) e (III.28) se pode escrever

$$\int \langle [k_{n_i n_j} + k_{ij}] N_\varphi N_\beta \Delta U_{j\varphi} + [-\Delta g_{n_i} - k_{ij} \Delta g_{Tj} + c T_i \Delta t_n] N_\beta \rangle \bar{u}_{i\beta} d\Gamma \quad (\text{a.67})$$

Finalmente da (a.67) podem-se achar facilmente as contribuições elementares à matriz de rigidez e ao vetor de cargas adicionais para levar em conta o contato e o atrito.

$$\tilde{K}_{c \text{ elem}} = K_{ij\varphi\beta} = \int_{\Gamma_c^* \text{elem}} \langle k_{n_i n_j} + \hat{k}_{ij} \rangle N_\varphi N_\beta d\Gamma \quad (\text{a.68})$$

$$\Delta F_{c \text{ elem}} = \Delta F_{i\varphi} = \int_{\Gamma_c^* \text{elem}} \langle k_n \Delta g_{n_i} + k_{ik} \Delta g_{Tk} - c T_i \Delta t_n \rangle N_\varphi d\Gamma \quad (\text{a.69})$$

Estas duas últimas expressões são a (III.25) e (III.26) respectivamente.

#### A.6.1 DEMOSTRAÇÃO DA EXPRESSÃO (a.64)

$$\Delta g_{T_j} k_{ij} u_l n_l n_i = 0 \quad (\text{a.64})$$

Da (a.45) pode-se escrever desenvolvendo os termos, ( $i, j$  variam de 1 até 2 para simplificar os cálculos).

$$k_{ij} = k_T \begin{bmatrix} (1 - \vartheta T_1 T_1) & -\vartheta T_1 T_2 \\ -\vartheta T_2 T_1 & (1 - \vartheta T_2 T_2) \end{bmatrix} \quad (\text{a.70})$$

Da (a.33) chega-se a conclusão que  $T_1 = n_2$  e  $T_2 = -n_1$  ou  $T_1 = -n_2$  e  $T_2 = n_1$ , e então a (a.70) pode-se escrever em termos do versor normal da seguinte forma

$$k_{ij} = k_T \begin{bmatrix} (1 - \vartheta n_1 n_1) & -\vartheta n_1 n_2 \\ -\vartheta n_2 n_1 & (1 - \vartheta n_2 n_2) \end{bmatrix} \quad (\text{a.71})$$

Desenvolvendo a (a.64), deixando fora  $u_l n_l$  fica

$$\Delta g_{T_1} k_{11} n_1 + \Delta g_{T_1} k_{21} n_2 + \Delta g_{T_2} k_{12} n_1 + \Delta g_{T_2} k_{22} n_2 \quad (\text{a.72})$$

Sustituindo as componentes de  $k_{ij}$  por suas componentes mostradas na (a.71) tem-se

$$\begin{aligned}
& k_T [\Delta g_{T1} (1 - \vartheta n_2 n_2) n_1 + \Delta g_{T1} \vartheta n_1 n_2 n_2 + \Delta g_{T2} \vartheta n_1 n_2 n_1 + \\
& + \Delta g_{T2} (1 - \vartheta n_1 n_1) n_2] \tag{a.73}
\end{aligned}$$

onde

$$\Delta g_{T1} n_1 + \Delta g_{T2} n_2 = 0 \tag{a.74}$$

por representar o produto escalar de dois vetores perpendiculares, e os outros termos se anulam mutuamente.

#### A.6.2 DEMOSTRAÇÃO DA IGUALDADE (a.61)

$$k_{lj} n_l n_i = k_{lk} n_k n_l n_i n_j = k_T n_i n_j \tag{a.61}$$

É possível chegar a (a.61) desenvolvendo os termos de ambos os membros da mesma, utilizando a (a.71) e lembrando a seguinte identidade trigonométrica.

$$n_1^2 + n_2^2 = 1 \tag{a.75}$$

ANEXO B: ALGUMAS DAS MODIFICAÇÕES A LEVAR EM CONTA  
NA FORMULAÇÃO APRESENTADA AO CONSIDERAR  
PLASTICIDADE COM GRANDES DEFORMAÇÕES NO  
COMPORTAMENTO DO CORPO FLEXIVEL

Na formulação apresentada no capítulo III a utilização de  $\Delta \tilde{t}_n$  e  $\Delta \tilde{t}_{Ti}$  é limitada a problemas de pequenas deformações, já que nenhum dos incrementos citados cumpre com o principio da indiferença do sistema de referência (Malvern pag 380-403 [22]).

Para contornar o problema podem-se introduzir a taxa corrotacional de Jaumann  $\dot{\tilde{t}}^J (= \dot{\tilde{t}}_i \tilde{e}_i)$ , a qual é invariante relação a rotações de corpo rígido.

Em termos das tensões na zona de contato pode-se expressar

$$\dot{\tilde{t}}_i^J = \Delta \tilde{t}_i - W_{ij} \tilde{t}_j \quad (b.1)$$

onde  $W_{ij}$  é definido na expressão (II.28).

A equação (III.5) fica agora da seguinte forma

$$\dot{\tilde{t}}_n^J = -k_n (\Delta u_n - \Delta g_n) \quad (b.2)$$

onde

$$\dot{\tilde{t}}_n^J = \dot{\tilde{t}}_n^J \tilde{n} = \Delta \tilde{t}_n - \tilde{t}_i W_{ij} \tilde{n}_j \quad (b.3)$$

e a relação 'elástica' (III.7) fica

$$t_{Ti}^J = -k_T (\Delta u_{Ti}^e - \Delta g_{Ti}) \quad (b.4)$$

onde

$$t_{Ti}^J = t_i^J - t_n^J \quad n_i = \Delta t_{Ti} - W_{kj} t_j (\delta_{ik} - n_k n_i) \quad (b.5)$$

A condição de consistência (III.11) fica

$$F^J = \left( \frac{\partial F}{\partial t_{Ti}} \right) t_{Ti}^J + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_F} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial u_{Ti}^p} \right) \Delta u_{Ti}^p + \left( \frac{\partial F}{\partial t_n} \right) t_n^J = 0 \quad (b.6)$$

e  $\Lambda$  calcula-se em forma similar à vista no anexo A.4 chegando-se a

$$\Lambda = \frac{-k_T T_j (\Delta u_{Ti} - \Delta g_{Ti}) + \mu_F t_n^J}{k_T + T_k t_n (\partial \mu_F / \partial u_{Tk}^p)} \quad (b.7)$$

Operando em forma análoga ao já feito no anexo A.5, obtem-se a seguinte relação constitutiva incremental do contato com atrito

$$t_{Ti}^J = -k_{ij} (\Delta u_{Tj} - \Delta g_{Tj}) - c T_i t_n^J \quad (b.8)$$

onde as expressões que definem  $k_{ij}$  e  $c$  são dadas por (III.19) e por a (III.20), sendo que a constante  $\vartheta$  fica definida como segue

$$* \vartheta = 0 \quad \text{se} \quad \left\{ \begin{array}{l} F < 0 \\ \text{ou} \quad \quad \quad \text{(descarga)} \\ F = 0 \quad \text{e} \quad F^J = T_i t_{Ti} + \mu_F t_n^J < 0 \end{array} \right.$$

\*  $\vartheta = 1$  se  $\langle F = 0$  e  $F^J \geq 0$  (carga)

Se na forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais expressado em III.22 substitui-se  $\Delta t_n$  e  $\Delta t_{\tau_i}$  pelas expressões obtidas a partir de (b.3) e (b.5) pode-se escrever

$$\int_{\Omega^T} \Delta \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega^T} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega - \int_{\Gamma_F} \Delta f_i \bar{u}_i d\Gamma_F -$$

(b.9)

$$- \int_{\Gamma_c^*} (t_n^J + t_j W_{ij} n_i) \bar{u}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_c^*} (t_{\tau_i}^J + W_{kj} t_j (\delta_{ik} - n_k n_i)) \bar{u}_{\tau_i} d\Gamma = 0$$

que é válida para todo  $\bar{u}_i$  tal que  $\bar{u}_i = 0$  sobre  $\Gamma_D$ .

Introduzindo (b.2) e (b.8) na (b.9) e aplicando o método dos elementos finitos chega-se uma equação matricial incremental como a mostrada na (III.24) onde a forma de  $\tilde{K}_c$  e  $\Delta F_c$  serão similares às vistas no capítulo IV (tentou-se fazer sua dedução mas não foram obtidos os resultados de [8]).

A matriz  $\tilde{K}_M$  é função das tensões no corpo e mudará a medida que o processo incremental avança. Suas características são discutidas no capítulo II e no Anexo C.

Se além de considerar grandes deformações considera-se um comportamento plástico para o corpo deformável a utilização de um incremento do tempo de avanço fixo pode ser discutível, pois deveria ser muito pequeno para não introduzir grandes erros.

Talvez neste caso seja mais acertado introduzir um incremento do tempo como referência podendo ser este alterado em cada passo incremental pelo mais crítico dos seguintes critérios:

-Mudança da condição de plastificação em algum ponto de integração dos elementos do corpo deformável.

-Novo nó da superfície potencial do contato troca sua condição (une-se à superfície rígida ou se afasta da mesma).

-Mudança nas condições de adesão-deslizamento em qualquer dos pontos em contato.

## ANEXO C: SISTEMA ESFINGE

### C.1 GENERALIDADES

Neste anexo se resumirão as características fundamentais do sistema ESFINGE, programa computacional utilizado como base para realizar a implementação do algoritmo de contato.

As possibilidades do sistema não foram totalmente aproveitadas devido a que, no trabalho, só se levou em conta que o corpo flexível tenha um comportamento elástico linear.

Mas se é desejado ampliar as possibilidades do programa apresentado nesta tese no contexto deste sistema será necessário conhecer as características teóricas e computacionais inerentes ao considerar não linearidades físicas e geométricas no modelado do corpo flexível.

ESFINGE (Estudo, Físico, Isótropo ou Não, e Geométrico de Estruturas) é um programa do tipo linguagem orientada que foi desenvolvido no CPGEC-UFRGS durante o período 1978-1983 e permite realizar, usando o método dos elementos finitos, análises do tipo linear e não linear física (plasticidade), geométrica e física-geométrica.

Para a obtenção das equações constitutivas são utilizados os conceitos emitidos por Lee [21] combinando os mesmos com os trabalhos de Fardshisheh & Onat [15] e fazendo a particularização dos mesmos para grandes deformações plásticas e pequenas deformações elásticas. É considerada formulação Lagrangiana atualizada e endurecimento isotrópico combinado com o cinemático. As equações são deduzidas para um material do

tipo Prandtl-Reuss valendo pois o princípio de normalidade. A aplicação de tais equações é típica em metais.

## C.2 IDÉIAS BÁSICAS

Em continuação, se detalham algumas das idéias nas quais estão baseadas as equações constitutivas utilizadas neste programa [18].

a) Supor-se-á o material submetido a um carregamento quase estático. Dentro desta suposição pode-se considerar, para materiais metálicos, a hipótese de pequenas deformações elásticas, mesmo na fase elastoplástica, embora com a possibilidade de ter-se, paralelamente, grandes deformações plásticas e grandes rotações.

b) O material virgem é inicialmente isótropo e homogêneo.

c) Partes do material que entraram na fase elastoplástica após sofrerem descarga, permanecem isótropos no que diz respeito ao comportamento elástico e este não é distinguível em relação ao material virgem. Em outras palavras, as constantes elásticas (representadas pelo módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e pelo coeficiente de Poisson  $\nu$  não sofrem mudança em seus valores quando o material sofre deformações permanentes. O mesmo não ocorre com o limite de escoamento do material, o qual era inicialmente igual em todas as direções (isótropo). Depois que o material sofre uma deformação permanente o limite de escoamento pode mudar de valor e perder sua isotropia inicial.

d) O limite entre a região elastoplástica, para um material virgem, será representado pela condição  $\underline{\underline{Y}}(\underline{\underline{\sigma}}, k) = 0$ , onde  $k$  é uma constante e  $\underline{\underline{\sigma}}$  é o tensor de tensões de Cauchy.

e) Para um material que já tenha sofrido deformações

permanentes o limite entre a região elástica e a elastoplástica é representado por uma condição  $\underline{Y}(\underline{\sigma}, \underline{q}) = 0$  onde  $\underline{q}$  representa um conjunto de tensores de ordem par [15] que levam em consideração as mudanças de comportamento do material produzidas pelas deformações permanentes.

Dos dois últimos itens pode-se concluir que o material pode operar em três estados distintos, a saber:

-material virgem operando elasticamente;

-material operando na região elastoplástica;

-material modificado por deformações permanentes (não virgem) operando na região elástica.

Na seção seguinte só se apresentarão as principais expressões. A dedução das leis de comportamento do material para os distintos casos citados pode encontrar-se em [17] [18] [13].

### C.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O PROBLEMA ELASTÓPLÁSTICO COM GRANDES DEFORMAÇÕES

#### C.3.1 EXPRESSÕES BÁSICAS

Nesta seção se trabalhará, por conveniência, com uma notação mais compacta utilizada por vários pesquisadores entre eles Lee e seguida por Grohes e Creus no desenvolvimento da base teórica do ESFINGE [17] [18] [13].

Define-se então as principais magnitudes com que se vai trabalhar.

O gradiente de deformação  $\underline{F}$  é em termos da notação

indicial utilizada nos capítulos II e III

$$\tilde{F} = x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (c.1)$$

sua inversa é

$$\tilde{F}^{-1} = X_{I,j} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} \quad (c.2)$$

e o jacobiano, em termos de  $\tilde{F}$  fica

$$J = \det \tilde{F} \quad (c.3)$$

Como  $\tilde{F}$  é uma transformação contínua e não singular se pode aplicar a decomposição polar na seguinte forma [17]

$$\tilde{F} = \tilde{R} \tilde{U} = \tilde{V} \tilde{R} \quad (c.4)$$

onde

$$\tilde{R} \tilde{R}^T = \tilde{I} \quad (c.5)$$

pois  $\tilde{R}$  é uma matriz ortogonal

$$\tilde{V}^2 = \tilde{V} \tilde{V}^T \quad (c.6)$$

$$\tilde{U}^2 = \tilde{U} \tilde{U}^T \quad (c.7)$$

sendo  $\tilde{R}$  o tensor de rotação,  $\tilde{I}$  a matriz unidade,  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  os tensores de deformação esquerdo e direito respectivamente. Qualquer gradiente de deformação  $\tilde{F}$  pode ser obtido aplicando primeiro uma deformação simétrica  $\tilde{U}$  (dilatação) e após uma rotação rígida  $\tilde{R}$  ou também, aplicando primeiro uma rotação  $\tilde{R}$  rígida e após uma deformação simétrica  $\tilde{V}$  (dilatação).

Chamam-se tensores esquerdo e direito de deformação de Cauchy-Green respectivamente a

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \quad (c.8)$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T \quad (c.9)$$

Em termos de  $\underline{\underline{C}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  pode-se expressar os tensores de deformação específica de Green e Almansi que vem dados, respectivamente, por

$$\underline{\underline{e}}^G = 1/2(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \quad (c.10)$$

$$\underline{\underline{e}}^A = 1/2(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}^{-1}) \quad (c.11)$$

Por outro lado se  $\Delta \underline{\underline{u}}$  e  $\Delta \tau$  (incremento de tempo) são suficientemente pequenos pode-se escrever

$$\frac{\Delta \underline{\underline{u}}}{\Delta \tau} \cong \dot{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{v}} \quad (c.12)$$

onde  $(\dot{\cdot})$  significa a derivada material da função com respeito ao tempo; em forma similar podem-se definir outras taxas por exemplo

$$\frac{\Delta \underline{\underline{q}}}{\Delta \tau} = \dot{\underline{\underline{q}}} \quad (c.13)$$

$$\frac{\Delta \underline{\underline{F}}}{\Delta \tau} = \dot{\underline{\underline{F}}} \quad (c.14)$$

O gradiente da velocidade  $\underline{\underline{L}}$  vem dado por

$$\underline{\underline{L}} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial \underline{\underline{X}}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (c.15)$$

sendo que

$$\dot{\tilde{F}} = \dot{\tilde{R}} \tilde{U} + \tilde{R} \dot{\tilde{U}} = \dot{\tilde{V}} \tilde{R} + \tilde{V} \dot{\tilde{R}} \quad (c.16)$$

Se pode decompor  $\tilde{L}$  na soma de uma parte simétrica e outra antissimétrica, a saber

$$\tilde{D} = 1/2(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \quad (c.17)$$

que é a velocidade de deformação específica e

$$\tilde{W} = 1/2(\tilde{L} - \tilde{L}^T) \quad (c.18)$$

que é a velocidade de rotação específica; de (c.17) e (c.18) se obtém que

$$\tilde{L} = \tilde{D} + \tilde{W} . \quad (c.19)$$

No caso em que a configuração atual coincide com a de referência, tem-se que,

$$\tilde{R}^T = \tilde{I} ; \tilde{F}^T = \tilde{I} , \tilde{U}^T = \tilde{V}^T = \tilde{I} \quad (c.20)$$

e como a decomposição de  $\tilde{L}$  é única, fica

$$\tilde{D} = \dot{\tilde{U}}^T = \dot{\tilde{V}}^T ; \tilde{W} = \dot{\tilde{R}}^T \quad (c.21)$$

No item seguinte, utilizando a notação introduzida, se apresentam as relações que regem o comportamento do material quando trabalha em distintas condições.

#### C.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Considere-se um corpo operando parcial ou totalmente no estado elastoplástico. Isto significa que este corpo possui pontos que sofreram deformações permanentes ao longo do processo de carga. Seja, para um destes pontos, o

gradiente de deformação correspondente ao processo de carga, representado por  $\tilde{F}$ ; a regra da derivação em cadeia permite decompor  $\tilde{F}$  como produto de um gradiente de deformação elástico  $\tilde{F}^e$  e um gradiente de deformação plástico  $\tilde{F}^p$ , ou seja

$$\tilde{F} = \tilde{F}^e \tilde{F}^p \quad (c.22)$$

onde os supraíndices  $e$  e  $p$  indicam a parte da deformação elástica e plástica respectivamente. Tomando-se um elemento no entorno de um destes pontos pode-se representar um ciclo de carga e descarga como se indica na figura c.1. Dentro de cada elemento à medida que o estado nulo de tensões é atingido ao aplicar a descarga, a mudança de comprimentos lineares pode ser representada com transformações lineares do tipo

$$d\tilde{x}^p = \tilde{F}^p d\tilde{X} \quad (c.23)$$

$$d\tilde{x} = \tilde{F}^e d\tilde{x}^p \quad (c.24)$$

Estas transformações lineares expressam a deformação elástica e plástica em cada ponto do corpo.  $\tilde{F}^p$  e  $\tilde{F}^e$  são matrizes funções da posição do elemento. São, entretanto constituídas por derivadas parciais. As equações (c.23) e (c.24) permitem escrever

$$d\tilde{x} = \tilde{F}^e \tilde{F}^p d\tilde{X} \quad (c.25)$$

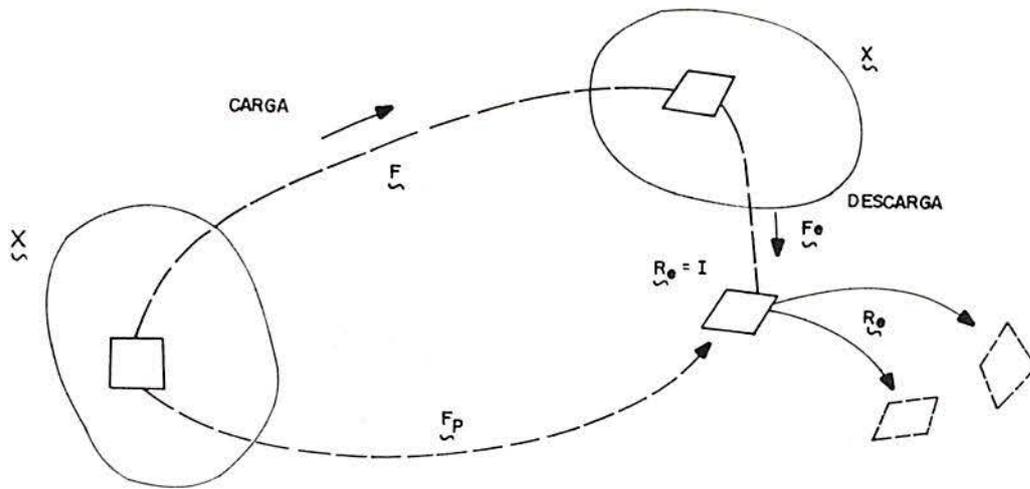


Figura C.1 Esquema do ciclo carga descarga de um elemento

A decomposição proposta por Lee [21], (c.22) não é única, já que  $\tilde{R}$  pode ser qualquer movimento de rotação de corpo rígido a menos que se assuma uma descarga elástica sem rotação, ou seja que se assuma

$$\tilde{R}^e = \tilde{I} \quad \Rightarrow \quad \tilde{R} = \tilde{R}^P \quad (\text{c.26})$$

e desta forma a decomposição se torna única.

Fazendo a decomposição polar e levando em conta (c.26) se pode escrever

$$\tilde{F}^e = \tilde{R}^e \tilde{U}^e = \tilde{V}^e \tilde{R}^e \quad (\text{c.27})$$

e isto implica que

$$\tilde{F}^e = \tilde{F}^{eT} = \tilde{U}^e = \tilde{V}^e = \tilde{B}^e = \tilde{C}^e \quad (\text{c.28})$$

Por outro lado, a taxa do gradiente de deformações é

$$\dot{\tilde{F}} = \dot{\tilde{F}}^e \tilde{F}^P + \tilde{F}^e \dot{\tilde{F}}^P \quad (\text{c.29})$$

e a partir dela, o gradiente da velocidade pode-se escrever

$$\tilde{L} = \dot{\tilde{F}} \tilde{F}^{-1} = \tilde{D} + \tilde{W} \quad (c.30)$$

A partir da (c.22) resulta

$$\dot{\tilde{F}} = \dot{\tilde{F}}^e \tilde{F}^P + \tilde{F}^e \dot{\tilde{F}}^P \quad (c.31)$$

e

$$\tilde{F}^{-1} = \tilde{F}^{P^{-1}} \tilde{F}^{e^{-1}} \quad (c.32)$$

obtendo-se finalmente a decomposição

$$\tilde{L} = \dot{\tilde{F}} \tilde{F}^{-1} = \dot{\tilde{F}}^e \tilde{F}^P \tilde{F}^{P^{-1}} \tilde{F}^{e^{-1}} + \tilde{F}^e \dot{\tilde{F}}^P \tilde{F}^{P^{-1}} \tilde{F}^{e^{-1}} = \tilde{L}^e + \tilde{F}^e \dot{\tilde{F}}^P \tilde{F}^{P^{-1}} \tilde{F}^{e^{-1}} \quad (c.33)$$

a qual, no caso de pequenas deformações elásticas e grandes deformações plásticas (esta hipótese é válida para metais)

$$\tilde{L} = \tilde{L}^e + \tilde{L}^P \quad (c.34)$$

com

$$\tilde{F}^e = \tilde{I} \implies \tilde{B}^e = \tilde{C}^e = \tilde{I} \quad (c.35)$$

e

$$\tilde{L}^P = \dot{\tilde{F}}^P \tilde{F}^{P^{-1}} \quad (c.36)$$

Também pode demonstrar-se [17] que neste caso

$$\tilde{D} \cong \tilde{D}^e + \tilde{D}^P \quad (c.37)$$

e

$$\text{tr } \underline{D}^P = 0 \quad (\text{c. 38})$$

(incompressibilidade no campo plástico ), e que

$$\underline{W} \cong \underline{W}^P \quad (\text{c. 39})$$

ou seja que  $\underline{W}^e$  é muito pequeno frente a  $\underline{W}^P$ . Neste caso pode-se deduzir a seguinte relação elástica para a lei de crescimento de  $\underline{\sigma}$  [17].

$$\dot{\underline{\sigma}} = -\underline{\sigma} \text{tr } \underline{D} + \underline{W} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{W} + \underline{E}(\underline{D} - \underline{D}^P) \quad (\text{c. 40})$$

onde foi negligenciado o termo

$$\bar{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma} \underline{D}^e + \underline{D}^{eT} \underline{\sigma} \quad (\text{c. 41})$$

sendo que supraíndice  $\tau$  indica transposição.

Esta hipótese é válida em metais pois

$$\bar{\underline{\sigma}} \ll \underline{E}(\underline{D} - \underline{D}^P) \quad (\text{c. 42})$$

A (c. 39) pode-se escrever na forma

$$\underline{\sigma}^* = \underline{E} (\underline{D} - \underline{D}^P) \quad (\text{c. 43})$$

onde

$$\underline{\sigma}^* = \dot{\underline{\sigma}} + \underline{\sigma} \text{tr } \underline{D} - \underline{W} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{W} \quad (\text{c. 44})$$

e também em função do tensor de taxas de tensões de Jaumann  $\underline{\sigma}^J$  [22]

$$\underline{\sigma}^J = \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \text{tr } \underline{D} \quad (\text{c. 45})$$

Na (c.43)  $\underline{\underline{E}}$  é um tensor de coeficientes que pode ser considerado no caso de pequenas deformações elásticas, como segue

$$\underline{\underline{E}}_{ijkl}^{el} = 2\nu\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (c.46)$$

sendo  $\nu$  e  $\lambda$  são as constantes de Láme.

Adota-se a função de escoamento de Von-Mises com endurecimento isótropo e cinemático, a qual tem forma

$$\underline{\underline{Y}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{q}}) = \sqrt{3/2(\underline{\underline{H}}_{ij} - \alpha_{ij})(\underline{\underline{H}}_{ij} - \alpha_{ij}) - k} = \underline{\underline{q}} \quad (c.47)$$

com

$$\underline{\underline{H}}_{ij} = \sigma_{ij} - 1/2(\delta_{ij}\sigma_{kk}) \quad (c.48)$$

Considera-se válida a relação seguinte

$$\underline{\underline{D}}^P = \Lambda \partial \underline{\underline{Y}} / \partial \underline{\underline{q}} \quad (c.49)$$

que é equivalente á equação (II.31). A condição de consistência, que sai de derivar com respeito ao tempo a (c.47), vem dada por

$$\dot{\underline{\underline{Y}}} = \frac{\partial \underline{\underline{Y}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial \underline{\underline{Y}}}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \dot{\underline{\underline{\alpha}}} + \frac{\partial \underline{\underline{Y}}}{\partial k} \dot{k} \quad (c.50)$$

sendo que  $\dot{\underline{\underline{\alpha}}}$  pode-se obter de (c.44)

O tensor de segunda ordem  $\underline{\underline{\alpha}}$  está ligado ao critério de endurecimento cinemático; ele caracteriza junto com  $k$ , o material de um elemento que sofreu deformações permanentes; o tensor  $\underline{\underline{\alpha}}$  depende das deformações permanentes ou seja é de alguma maneira função de  $\underline{\underline{F}}^P$ . Isto permite chegar a uma

expressão para sua taxa de variação do tipo

$$\dot{\underline{\alpha}} = \underline{w} \underline{\alpha} - \underline{\alpha} \underline{w} + \underline{h}(\underline{\alpha}, \underline{D}^P) \quad (c.51)$$

onde

$$\underline{h}(\underline{\alpha}, \underline{D}^P) = (\underline{w} \underline{\alpha} - \underline{\alpha} \underline{w}) + \theta^c \underline{D}^P \quad (c.52)$$

sendo  $\underline{w}$  uma função de  $\underline{B}^e$  e  $\theta^c$  um escalar positivo que depende do material. A forma desta função  $\underline{h}$  é muito discutida hoje em dia sendo que alguns pesquisadores diretamente não levam em conta o endurecimento cinemático no caso da formulação elastoplástica com deformações finitas.

Se pode demonstrar que

$$w_{ij} = -D_{ij} (\sqrt{B_{ii}^e} - \sqrt{B_{jj}^e}) / (\sqrt{B_{ii}^e} + \sqrt{B_{jj}^e}) \quad (c.53)$$

se anula para o caso em que

$$\underline{B}^e = \underline{I} \quad (c.54)$$

O escalar  $k$  também depende das deformações permanentes caracterizadas por  $\underline{F}^P$ , e é uma função escalar do tempo. A taxa de variação de  $k$  pode expressar-se em forma geral como

$$\dot{k} = h^k(k, \underline{D}^P) \quad (c.55)$$

onde

$$h^k(k, \underline{D}^P) = \theta^i \underline{D}^P \quad (c.56)$$

na qual  $\theta^i$  é uma função escalar que depende do material.

As expressões (c.51) até (c.56) são discutidas em detalhe em [17].

Utilizando as equações apresentadas de (c.40) até (c.56) é possível obter a seguinte relação elastoplástica que goza do princípio de indiferença referencial e que rege o comportamento de um material operando na região elastoplástica

$$\sigma_{ij}^* = \mathbb{E}_{ijkl}^{ep} D_{kl} \quad (c.57)$$

sendo que

$$\mathbb{E}_{ijkl}^{ep} = \mathbb{E}_{ijkl}^{el} - \frac{\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{rt}} \mathbb{E}_{rtkl}^{el} \mathbb{E}_{ijpq}^{el} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{pq}}}{\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{rs}} \mathbb{E}_{repq}^{el} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_{pq}} - \theta^c \frac{\partial Y}{\partial \alpha_{rs}} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{rs}} - \theta^i \frac{\partial Y}{\partial k}} \quad (c.58)$$

é a matriz elastoplástica.

Para o caso de deformações e rotações infinitesimais

$$\dot{\tilde{\sigma}}^* = \dot{\tilde{\sigma}} \quad (c.59)$$

e

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = \dot{\tilde{D}} \quad (c.60)$$

## C.5 PRINCÍPIO VARIACIONAL-FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Partindo do princípio dos trabalhos virtuais na forma incremental Lagrangeana actualizada, mas trabalhando com

taxas em lugar de incrementos e supondo que a variação de  $u$  se faz só sobre a passagem da configuração  $(\tau)$  à configuração  $(\tau+\Delta\tau)$  da figura II.3, então a equação (II.22) fica

$$\int_{\Omega^\tau} \dot{T}_{ij} \delta(L_{ij}) d\Omega^\tau = \int_{\Omega^\tau} \rho \dot{b}_i \delta v_i d\Omega^\tau + \int_{\Gamma_F^\tau} \dot{f}_i \delta v_i d\Gamma^\tau \quad (c.61)$$

que sobre esta forma recebe o nome de Princípio variacional de Hill [11]. Nesta equação  $\delta(\dot{\phantom{u}})$  é equivalente à  $(\dot{\phantom{u}})$ , na (II.22).

Da (c.12) e (c.15) se deduz que

$$\delta(\dot{u}_{i,j}) = \delta(v_{i,j}) = \delta(L_{ij}) \quad (c.62)$$

e de (II.25) e (II.26) fica claro que

$$\dot{T}_{ij} = \dot{S}_{ij} + \sigma_{ki} L_{jk} \quad (c.63)$$

ou em forma matricial

$$\dot{\underline{T}} = \dot{\underline{S}} - \underline{\sigma} \underline{L}^T. \quad (c.64)$$

É vantajoso efetuar a substituição (c.64) em (c.62) devido à simetria da taxa do tensor de Piola-Kirchoff de segunda espécie  $\dot{S}$ , ficando a (c.61) da seguinte forma

$$\int_{\Omega^\tau} (\dot{S}_{ij} + \sigma_{ki} L_{jk}) \delta(L_{ij}) d\Omega^\tau = \int_{\Omega^\tau} \rho \dot{b}_i \delta v_i d\Omega^\tau + \int_{\Gamma_F^\tau} \dot{f}_i \delta v_i d\Gamma^\tau \quad (c.65)$$

Devido à simetria de  $\dot{S}$  se pode escrever

$$\dot{S}_{ij} \delta L_{ij} = \dot{S}_{ij} \delta D_{ij} \quad (c.66)$$

ficando

$$\int_{\Omega^T} (\dot{S}_{ij} + \sigma_{ki} D_{jk}) \delta(D_{ij}) d\Omega^T = \int_{\Omega^T} \rho \dot{b}_i \delta v_i d\Omega^T +$$

$$+ \int_{\Gamma_F^T} \dot{f}_i \delta v_i d\Gamma^T \quad (c. 67)$$

ou, em termos da taxa de tensões  $\overset{*}{\underset{\sim}{\sigma}}$  definida em (c.44), se tem

$$\int_{\Omega^T} (\overset{*}{\sigma}_{ij} - 2\sigma_{ik} D_{ik}) \delta D_{ij} + \sigma_{ik} L_{kj} \delta(L_{ij}) d\Omega^T =$$

$$= \int_{\Omega^T} \rho \dot{b}_i \delta v_i d\Omega^T + \int_{\Gamma_F^T} \dot{f}_i \delta v_i d\Gamma^T \quad (c. 68)$$

Analisando o primeiro termo da esquerda da (c.68) e utilizando a relação (c.57) pode-se escrever

$$\int_{\Omega^T} (\overset{*}{\sigma}_{ij} \delta(D_{ij})) d\Omega^T = \int_{\Omega^T} (D_{kl} \mathbb{E}_{ijkl} \delta(D_{ij})) d\Omega^T =$$

$$= \int_{\Omega^T} \overset{*}{\underset{\sim}{\sigma}} \overset{+}{\underset{\sim}{D}} d\Omega^T \quad (c. 69)$$

onde

$$\overset{*}{\underset{\sim}{\sigma}} = [ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} ] \quad (c. 70)$$

$$\overset{+}{\underset{\sim}{D}} = [ D_{11}, D_{22}, D_{33}, 2D_{12}, 2D_{13}, 2D_{23} ] \quad (c. 71)$$

Nas últimas expressões, de (c.60) até (c.68) as forças de superfície  $\tilde{f}$  e as forças de massa  $\tilde{b}$  são medidas com relação à configuração de referência.

Finalmente aplicando em (c.61) o método dos elementos finitos [17] obtém-se para cada elemento

$$(\tilde{K}_{el}^{eP} + \tilde{K}_{el}^G) \dot{\tilde{U}}_{el} = \dot{\tilde{P}}_{el} \quad (c.72)$$

Onde  $\tilde{K}_{el}^{eP}$  é a matriz de rigidez elastoplástica,  $\tilde{K}_{el}^G$  a parte da matriz que leva em conta a não linearidade geométrica,  $\dot{\tilde{P}}_{el}$  é o vetor que contém as taxas de variação das cargas dos nós do elemento, e  $\dot{\tilde{U}}$  indica a taxa de variação dos deslocamentos nodais.

As funções de interpolação que relacionam as taxas de deslocamentos  $\dot{\tilde{u}}$  no interior de cada elemento com as taxas de deslocamentos dos nós do elemento  $\dot{\tilde{U}}_{el}$  podem-se agrupar em uma matriz  $\tilde{N}$  de modo que

$$\dot{\tilde{u}} = \tilde{N} \dot{\tilde{U}}_{el} \quad \text{ou} \quad \dot{u}_i = N_{ij\varphi} \dot{U}_{j\varphi_{el}} \quad (c.73)$$

onde os subíndices de letras latinas variam de 1 até 3 indicando componentes e índices com  $\varphi$ ,  $\beta$  indicam nós do elemento e variam de 1 até o número máximo de nós do elemento.

As matrizes e vetores da (c.71) são obtidas a seguir

$$\tilde{K}_{el}^{eP} = \int_{\tilde{\Omega}^T} \tilde{B}^T \tilde{E} \tilde{B} d\tilde{\Omega}^T \quad (c.74)$$

$\tilde{B}$  é uma matriz que relaciona o vetor de deformações  $\tilde{D}$  e o vetor de taxas de deslocamentos  $\dot{\tilde{u}}$  da

seguinte forma

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\dot{U}}} \quad (\text{c. 75})$$

e  $\underline{\underline{E}}^{\text{ep}}$  é a matriz constitutiva elastóplástica. O tensor que contém os gradientes de velocidades vem dado por

$$L_{ij} = N_{ik\varphi,j} \dot{U}_{k\varphi}^{\text{el}} = {}^i\hat{N}_{jk\varphi} \dot{U}_{k\varphi}^{\text{el}} \quad (\text{c. 76})$$

ou

$$\underline{\underline{L}} = {}^1\hat{N} \dot{U}_{\text{el}} + {}^2\hat{N} \dot{U}_{\text{el}} + {}^3\hat{N} \dot{U}_{\text{el}} = {}^r\hat{N} \dot{U}_{\text{el}} \quad (\text{c. 77})$$

${}^r\hat{N}$  são as matrizes formadas pelas derivadas das funções de interpolação agrupadas em  $\underline{\underline{N}}$ ; em forma similar se pode expressar a taxa de deformações como

$$D_{ij} = [D_{j1}, D_{j2}, D_{j3}]^T \quad (\text{c. 78})$$

e também

$$D_{ij} = [{}^1\hat{B}_{jk\varphi} \dot{U}_{k\varphi}^{\text{el}}, {}^2\hat{B}_{jk\varphi} \dot{U}_{k\varphi}^{\text{el}}, {}^3\hat{B}_{jk\varphi} \dot{U}_{k\varphi}^{\text{el}}]^T = {}^r\hat{B} \dot{U}_{\text{el}} \quad (\text{c. 79})$$

${}^r\hat{B}$  são as matrizes que relacionam o tensor taxa de deformações com o vetor de deslocamentos nodais. Utilizando (c.74), e (a.76) pode-se escrever agora

$$K_{ij\varphi\beta}^{\sigma} = \int_{\Omega^T} [{}^r\hat{N}_{ik\varphi} \sigma_{kl} {}^r\hat{N}_{jl\beta} - 2 {}^r\hat{B}_{ki\varphi} \sigma_{kl} {}^r\hat{B}_{lj\beta}] d\Omega^T \quad (\text{c. 80})$$

ou

$$\tilde{K}_{el}^G = \int_{\Omega^T} [(\hat{N})^T \hat{c} (\hat{N}) - 2(\hat{B})^T \hat{c} (\hat{B})] d\Omega^T \quad (c.81)$$

finalmente o vetor de cargas vem dado por

$$\tilde{P}_{el} = \int_{\Omega^T} \rho (\tilde{N}^T \hat{b}) \tilde{N} d\Omega^T + \int_{\Omega^T} (\tilde{N}^T \hat{f}) \tilde{N} d\Gamma^T \quad (c.82)$$

ou

$$P_{i\beta} = \int_{\Omega^T} \rho \tilde{N}_\varphi^* \hat{b}_{i\varphi} \tilde{N}_\beta^* d\Omega^T + \int_{\Omega^T} \tilde{N}_\varphi^* \hat{f}_{i\varphi} \tilde{N}_\beta^* d\Gamma^T \quad (c.83)$$

com  $\tilde{N}$  formado pelas funções de interpolação do elemento.

A (c.72) é montada levando em conta a contribuição de todos os elementos, e depois são aplicadas as condições de contorno obtendo-se finalmente o sistema

$$\tilde{K}_T \dot{\tilde{U}} = \dot{\tilde{P}} \quad (c.84)$$

onde  $\tilde{K}_T$  é a matriz tangente.

Para resolver o problema quase-estático assume-se que  $\tilde{K}_T$  é constante no intervalo de tempo  $\Delta\tau$  ficando a seguinte expressão válida para cada passo incremental

$$\tilde{K}_T^\tau \Delta U^{\tau+\Delta\tau} = \Delta P^\tau \quad (c.85)$$

Mais detalhes sobre o tema abordado neste anexo podem ver-se em [17].

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bathe, K. J. **Finite element procedures in engineering analysis.** Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1982.
2. Bathe, K. J., Chaudhary, A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.21, p.65-88, 1985.
3. Böhm, J. A. Comparison of different contact algorithms with applications. **Computers and Structures**, v.26, n. 1/2, p. 207-221, 1987.
4. Bowden, F. P., Tabor, D. **Friction and Lubrication.** London: Methuen, 1967. 166p.
5. Campos, L. T., Oden, J. T. , Kikuchi, N. A numerical analysis of class of contact problems with friction in elastostatics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.34, p. 821-845, 1982.
6. Chandresakaran, N., Haisler, W. e. , Goforth, R. E. A finite element solution method for contact problems with friction. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.24, p. 477-495, 1987.
7. Cheng, J. H., Kikuchi, N. An analysis of metal forming processes using large deformation elasto-plastic formulations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.49, n.1, p.71-108, May 1985.
8. Cheng, J. H., Kikuchi, N. An incremental constitutive relation of unilateral contact friction for large

- deformation analysis. *Journal of Applied Mechanics* , v. 52, p. 639-648, Sept. 1985.
9. Correa Barbosa, H.J. Algoritmos numéricos para problemas de contato em elasticidade. Rio de Janeiro: COPPE, 1986. Tese de Doutorado, UFRJ.
  10. Courtney-Pratt, J. S. ,Eisner, E. The effect of a tangencial force on the contact of metallic bodies. *Proceedings of the Royal Society A*, n. 238, p.529-550, 1957.
  11. Creus, G. J. Analisis no lineal de estructuras: elementos básicos y aplicaciones. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1985. 122p. (caderno de Engenharia, 7).
  12. Creus, G. J. Relações Constitutivas elastoplásticas no caso multiaxial. Porto Alegre : CPGEC/UFRGS, 1983. 33p. (Caderno Técnico, A-55).
  13. Creus, G. J., Groehs, A. G. Finite element analysis of large plastic deformations in metals. In: Chenot, J.L., Oñate, E. (Eds.) *Modelling of metal forming processes*. Tordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. p.27-36.
  14. Fancello, E. A. Formulação variacional do problema do contato com atrito; resolução via regularização. Rio de Janeiro : COPPE, 1989. Dissertação de mestrado, UFRJ.
  15. Fardshisheh, F., Onat, E. T. Representation of elastoplastic behaviour by means of state variables. In: *INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FOUNDATION OF PLASTICITY, 1972, Warsaw. Proceedings*. Leyden: Nordhoff International, 1974 p. 89-115.
  16. Frederikson, B. Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems.

- Computers and Structures, v.16,p281-290, 1976.
17. Grohes, A. G. **ESFINGE: uma Linguagem orientada para cálculo elastoplástico.** Rio de Janeiro: COPPE, 1983. Tese de Doutorado, UFRJ.
  18. Grohes, A. G., Creus, G. J. Equações constitutivas elastoplásticas utilizadas no sistema ESFINGE. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 22, 1983, Santiago, Chile. Trabajos Presentados . Santiago, 1983. v.3, F-18.
  19. Guerra, F. M., Browing, R. V. Comparison of two Slideline methods in contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.17, n. 5/6, p. 819-834, 1983.
  20. Kikuchi, N. A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.18, p. 343-350, 1982.
  21. Lee, E.H. Elastic-Plastic deformation at finite strains. **Journal of Applied Mechanics**, v.36, n.1, p. 1-6, Mar. 1969.
  22. Malvern, L. E. **Introduction to the mechanics of continuous medium.** Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1969. 713 p.
  23. Oden, J. T. ,Carey, G. F. **Finite elements ; special problems in solid mechanics.** Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1984. v. 5, Cap 4: Contact problems in elastoestatics, p. 158-212.
  24. Petry, R.P., **Um Modelador geométrico Uni-Bi Tridimensional com aplicação para geração de malhas de elementos finitos.** Porto Alegre: CPGEC,1990, Tese de Mestrado,

UFRGS.

25. Timoshenko, S.P. , Goodier, J. N. Teoria da elasticidade.  
3 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.
26. Zienkiewicz, O. C. EL metodo de los elementos finitos.  
Barcelona: Editorial Reverté, 1982.