

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Operadores Maximais via Método TT^*

por

Lucas da Silva Oliveira

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo
Orientador

Porto Alegre, Março de 2009.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

da Silva Oliveira, Lucas

Operadores Maximais via Método TT^* / Lucas da Silva Oliveira.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2009.

57 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2009.

Orientador: Barrionuevo, José Afonso

Dissertação: Análise Aplicada

Método TT^* , Operadores Maximais, Operador de Kakeya

Operadores Maximais via Método TT^*

por

Lucas da Silva Oliveira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo

Banca examinadora:

Dr. Jairo Bochi
PPGMAT - PUC-RIO

Dr. Leonardo Prange Bonorino
PPGMAT - UFRGS

Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano
PPGMAP - UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
05/03/2009.

Waldir Leite Roque
Coordenador

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS	v
RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
1 INTRODUÇÃO	1
2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E TÉCNICAS ENVOLVIDAS	5
2.1 Operadores Maximais	5
2.2 O método TT^* e a Linearização de Operadores Maximais	8
2.3 Prova dos Teoremas	13
3 EXEMPLOS DE OPERADORES MAXIMAIS E APLICAÇÕES	16
3.1 O Operador Maximal Diádico	16
3.2 O Teorema Ergódico Maximal em L^2	23
3.3 O Operador Maximal de Córdoba Revisitado	31
4 TEORIA DE OPERADORES MAXIMAIS DIRECIONAIS NO PLANO	37
4.1 Limitação do Operador Maximal \mathcal{M} em $L^2(\mathbb{R}^2)$	39
4.2 O Princípio de Quase Ortogonalidade de Alfonseca-Vargas-Soria	43
5 CONCLUSÃO E PROBLEMAS EM ABERTO	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53

LISTA DE SÍMBOLOS

- \mathbb{N} : Conjunto dos números naturais, ou seja, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- \mathbb{Z} : Conjunto dos números inteiros.
- \mathbb{C} : Conjunto números complexos.
- \mathbb{R}^n : Espaço euclidiano n -dimensional equipado com a medida de Lebesgue.
- (X, \mathfrak{X}, μ) : Espaço de medida arbitrário.
- $f \geq 0$: $f(x) \geq 0$ para quase todo x .
- C_0^∞ : Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
- $L^2(X)$: Espaço das funções $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis de quadrado integrável, isto é, tais que $\int_X |f|^2 d\mu < \infty$.
- $|\cdot|$: denota a medida de Lebesgue, a cardinalidade de um conjunto ou o valor absoluto de uma função, dependendo do contexto.
- $\|\cdot\|_{L^2(X)}$: norma das funções em $L^2(X)$.
- $\|\cdot\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}$: norma de operador, para um operador agindo sobre $L^2(X)$.
- R : designa um retângulo (ou paralelepípedo) em \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^n).
- C : designa uma constante numérica positiva, que não precisa ser a mesma da passagem de uma linha para outra, a menos que seja indicado o contrário.

RESUMO

Desenvolvemos o *método TT^** , uma técnica baseada na estrutura de espaço de Hilbert dos espaços de funções L^2 , e obtemos resultados sobre a continuidade de operadores maximais definidos sobre esses espaços.

Em um segundo momento, fixamos nossa atenção nos *operadores maximais direcionais no plano*. Definimos uma nova classe de operadores maximais direcionais que generalizam uma introduzida por Córdoba 1971 e provamos sua continuidade em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Além disso, obtemos uma prova alternativa e mais simples para o teorema de quase ortogonalidade de Alfonseca, Sória e Vargas.

ABSTRACT

Primarily, we develop the TT^* *method*, a technique based on the Hilbert space structure of de L^2 spaces, to establish continuity results for certain maximal operators of interest in Harmonic Analysis and Ergodic Theory.

In a second moment, we fix our attention on a special class of maximal operators, the *maximal directional operators on the plane*. We will define a new class of maximal operators in the plane that generalizes a class introduced earlier by Córdoba and prove sharp estimates on L^2 . Moreover, we obtain a new proof of the optimal result of Alfonseca, Sória e Vargas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado a chance de poder estudar, enquanto tantos outros passam necessidades nesse mundo. Aos meus pais, Helida e Maurício, por todo amor, cuidado, educação e carinho ao longo desses anos. Meus irmãos, Gabriel e Tiago, minha família (especialmente minha vó materna, Maria de Lourdes) e aos meus amigos (a lista é grande, mas deixo aqui registrado alguns nomes: Anderson Dogão, Hugo Pirata, Igor Salsicha, Vinícius Fraco, Glauber Milano, Matheus Custódio, Gilberto Lima, Eloah, Andrea, Paulo, Rene, Luiz Emílio, André, Rodrigo, Júlio, Colla, a galera da Física e a gurizada do futibas) pelos momentos de amizade, diversão e assistência. A minha namorada, Geordana, pelo amor, carinho e apoio. Ao meu orientador, Prof. José Afonso Barrionuevo, pelo exemplo de profissional da área, por sempre estar disposto a me ajudar e pela grande contribuição para o término dessa dissertação. A todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão dessa etapa em minha formação. Ao CNPq pelo apoio financeiro e a UFRGS pelo ensino sério, público e de qualidade.

1 INTRODUÇÃO

Em 1930, G.H. Hardy e J. E. Littlewood [26] introduziram um novo tipo de operador que possuía, em particular, aplicações na Teoria de Diferenciação das Integrais de Lebesgue. De forma atual podemos enunciar esse resultado da seguinte maneira:

*Dada uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, definimos o **operador de Hardy-Littlewood** como*

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy, \quad (1.1)$$

onde I é um intervalo centrado em x . Então existem constantes C_p tais que para toda função f e $\alpha > 0$

$$|\{x : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{C_1}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (1.2)$$

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (1 < p \leq \infty) \quad (1.3)$$

Usando (1.2) no caso em que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e (1.3) quando $f \in L^p(\mathbb{R})$, podemos concluir que

$$\frac{1}{|I|} \int_I f(y) dy \rightarrow f(x) \text{ quando } |I| \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

Logo, para obtermos resultado sobre a diferenciação de integrais de funções em $L^1(\mathbb{R})$ basta provarmos que um certo operador está limitado em $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ [46]. Operadores da forma (1.1) são exemplos de *operadores maximais*. Pelo princípio de continuidade de Banach [53], e pelos trabalhos de Calderón [13] e Stein [43], vemos que essa situação é um pouco mais geral: em certas situações a existência do limite da sequência de operadores necessita de estimativas do operador maximal associado.

O controle sobre operadores maximais em problemas de convergência pode ser aplicado em diversas áreas da matemática: Convergência das séries de Fourier ([15], [29], [23], [36]); Convergência de médias ergódicas ([44], [39], [25]);

Diferenciação de integrais ([20], [51]); Análise Harmônica e Análise Real ([9], [8] [56], [54], [55], [51], [12] [49]).

Para demonstrar uma estimativa do tipo (1.3), podemos utilizar Lemas de Coberturas [48], Transformadas de Fourier [38], Princípios de Quase Ortogonalidade ([17], [19, cap. 10], [46, cap. 7]) entre outros métodos. Quando estamos trabalhando em um espaço de funções do tipo L^2 , podemos utilizar uma técnica chamada *método TT^** . Esta técnica apareceu de maneira implícita nos artigos de Kolmogorov e Seliverstov [34] e Paley [40] sobre convergência pontual de séries de Fourier. Posteriormente foi utilizada por Stein [44] na obtenção de alguns resultados em Teoria Ergódica e finalmente foi formalizada por Barrionuevo [3], em um estudo sobre operadores maximais direcionais. Um resultado similar foi obtido por Nevo [39] de maneira independente. A idéia geral do método consiste em linearizar o operador maximal e então, utilizando a estrutura de espaço de Hilbert de L^2 , obter uma desigualdade algébrica que permita obter a estimativa desejada (Capítulo 2).

Em [3] e [4], utilizando o método TT^* , Barrionuevo obteve resultados parciais em \mathbb{R}^2 para um importante problema, equivalente a chamada *conjectura maximal de Kakeya* ([51], [56]), que apresentamos agora.

Dado um subconjunto finito Ω (isto é, $|\Omega| = N$) de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, consideramos a coleção B_Ω composta por todos os paralelepípedos $R \in \mathbb{R}^n$ que possuem uma das faces perpendicular a um vetor de Ω . Para cada função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos o operador maximal

$$M_\Omega f(x) = \sup_{x \in R \in B_\Omega} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy. \quad (1.5)$$

Conjectura 1. *Para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante C_ϵ tal que para toda função $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$*

$$\|M_\Omega f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq C_\epsilon N^\epsilon \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.6)$$

Essa conjectura é verdadeira para $n = 1$ (trivial) e para $n = 2$ (ver referências abaixo).

Para o caso em que Ω é um conjunto lacunário (isto é, $w \in \Omega$ é da forma $w = (1, \lambda_n)$, onde a sequência $\{\lambda_n\}$ satisfaz $\lambda_{n+1} \leq \theta \lambda_n$ para algum $\theta < 1$), a conjectura foi provada por Nagel, Stein e Wainger [38] utilizando Transformada de Fourier. Quando Ω é um conjunto uniformemente distribuído de \mathbb{S}^1 , a resposta afirmativa foi obtida por Stromberg [48] com lemas de cobertura. Córdoba [18] obteve um resultado similar em \mathbb{R}^2 quando B_Ω era a coleção de todos os retângulos com excentricidade δ , para um $\delta > 0$ (por excentricidade δ queremos dizer que a razão entre os lados menor e maior é δ). Em 1993, Barrionuevo [3] obteve demonstrações para classes de famílias de paralelepípedos B_Ω em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n que incluíam todos os resultados acima utilizando o método TT^* . Já em 1996, Barrionuevo [4] obteve uma estimativa parcial em \mathbb{R}^2 para o caso geral em que $\Omega \subset \mathbb{S}^1$ é um conjunto finito qualquer. A resposta positiva para a **Conjectura 1** em \mathbb{R}^2 foi dada por Katz em 1999 ([32] e [33]). Extensões foram apresentadas por Karagulyan e Lacey [30] e por Bateman ([6] e [7]). Em 2003, Alfonseca, Vargas e Soria [2] provaram um princípio de quase ortogonalidade em \mathbb{R}^2 que implica (1.4) como um caso particular. A conjectura geral em \mathbb{R}^n segue em aberto. Resultados parciais e problemas relacionados podem ser encontrados nos artigos de Tao ([51], [12], [49] e [52]), Wolff ([56], [54] e [55]) e Bourgain ([9], [11] e [10]).

Nesse trabalho, primeiramente apresentamos o método TT^* , segundo Barrionuevo, e damos exemplos de aplicação do método em Teoria Ergódica, Análise Harmônica e Diferenciação de Integrais. Em um segundo momento, trabalhamos exclusivamente com operadores maximais direcionais. Introduzimos um novo operador maximal e provamos sua limitação, utilizando ainda o método TT^* . Obtemos também uma prova mais simples para o resultado de Alfonseca, Vargas e Soria, usando uma variante do método TT^* que agrega um princípio de ortogonalidade.

Descrevemos abaixo a disposição dos capítulos.

No capítulo 2 provamos que, sob certas condições, uma família de operadores lineares em $L^2(X)$ irá definir um operador maximal limitado em $L^2(X)$. Esse teorema está presente em Barrionuevo [3] e é uma versão abstrata do argumento

empregado por Kolmogorov e Seliveristov em [34] para a obtenção de um resultado sobre convergência pontual de Séries de Fourier e por Stein na sua demonstração do Teorema Ergódico Maximal [44]. Um teorema semelhante foi demonstrado independentemente por Nevo [39] para provar alguns resultados em Teoria Ergódica.

No capítulo 3 apresentaremos algumas aplicações da teoria desenvolvida no Capítulo 2: Provamos que uma variante do operador maximal de Hardy-Littlewood, o *Operador Maximal Diádico*, é limitado em $L^2(\mathbb{R})$ e utilizamos este resultado para demonstrar uma versão do Teorema de Carleson para uma outra base de autofunções: as wavelets de Haar ([50],[37]); Obtemos o Teorema Ergódico Maximal em L^2 nas linhas de Stein [44] e o utilizamos para demonstrar o Teorema Ergódico Pontual [41]; Finalmente, concluimos esse capítulo provando que o Operador Maximal de Córdoba (também conhecido como operador maximal de Kakeya) é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$, com uma norma de operador da ordem de $\log N$, isto é, a estimativa ótima ([18], [3], [56]).

No capítulo 4, apresentamos a teoria de operadores maximais direcionais no plano. Introduzimos um novo operador maximal e provamos sua limitação em $L^2(\mathbb{R}^2)$ nas mesmas linhas de Barrionuevo [3]. Esse novo operador maximal é baseado em um anterior, introduzido por Córdoba no seu estudo sobre multiplicadores de Fourier [18]. Concluimos esse capítulo e apresentando uma nova demonstração para o resultado devido a Alfonseca, Vargas e Sória [2], agregando ao método TT^* uma noção de quase ortogonalidade.

No capítulo 5, concluimos o trabalho e apresentamos alguns problemas em aberto que podem vir a ser um projeto futuro.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E TÉCNICAS ENVOLVIDAS

Neste capítulo, definiremos o conceito de operador maximal, introduziremos o processo de linearização e obteremos o Método TT^* , além de prepararmos alguns exemplos que servirão de base para o que será feito nos capítulos subsequentes. Os conceitos básicos de Teoria da Medida e Análise Funcional podem ser encontrados em Rudin [42] e Stein e Shakarchi [47]. O Método TT^* como apresentado aqui é idêntico ao encontrado em Barrionuevo [3]. Outras referências são do Curso de Análise de Fourier de Tao [50] e o livro de Stein [46].

2.1 Operadores Maximais

Começaremos definindo o que é um operador maximal associado a coleção de operadores lineares agindo sobre L^2 .

Definição 2.1.1. *Seja A um conjunto qualquer e considere a coleção de operadores lineares $\{T_\mu\}_{\mu \in A}$ agindo sobre $L^2(X)$, onde (X, dx) é um espaço de medida σ -finito. O **operador maximal** \mathcal{T} associado a $\{T_\mu\}$ sobre $L^2(X)$ é*

$$\mathcal{T}f(x) = \sup_{\mu \in A} |T_\mu f(x)|. \quad (2.1)$$

Operadores maximais aparecem de forma natural quando estudamos questões relativas à existência de certos limites de operadores, pois a existência de tais limites é (em alguns casos) garantida pela *limitação* de um operador maximal associado.

Exemplo 2.1 (Teoria de Diferenciação). Dada uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$, para provarmos que

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy \rightarrow f(x) \text{ quando } \delta \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

para quase todo ponto x , basta demonstrarmos que o *Operador Maximal de Hardy-Littlewood*

$$Mf(x) = \sup_{0 < \delta < \infty} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y)| dy \quad (2.3)$$

satisfaz

$$|\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (2.4)$$

para cada $\alpha > 0$ (ver [51]). No Capítulo 2, trabalharemos com o operador maximal diádico M_D , que é definido para cada função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ por

$$M_D f(x) = \sup_I \frac{\chi_I(x)}{|I|} \int_I |f(y)| dy, \quad (2.5)$$

com $I = [j2^k, (j+1)2^k)$ para algum par $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$. A limitação deste operador nos permitirá provar um resultado sobre a convergência pontual (de fato, convergência em quase toda parte) da representação de *Haar* de funções em $L^2([0, 1])$, isto é, provar que

$$\sum_I \langle h_I, f \rangle h_I(x) = f(x) \text{ em } x - q.t.p., \quad (2.6)$$

onde a soma é tomada sobre todos os intervalos diádicos $I \subset [0, 1]$ e onde $\{h_I\}$ é a base de Haar (Capítulo 3, Seção 1).

Exemplo 2.2 (Teoria Ergódica). Dado um espaço de probabilidade (X, \mathfrak{X}, μ) , uma transformação inversível $T : X \rightarrow X$ que preserva medida (isto é, $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$) e uma função $f \in L^2(X)$ qualquer, o *Teorema Ergódico de Birkhoff (ou Pontual)* em $L^2(X)$ nos afirma que a função \tilde{f}

$$\tilde{f}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(T^k(x)) \quad (2.7)$$

esta definida para quase todo ponto $x \in X$, pertence a $L^2(X)$ e satisfaz

- (i) $\left\| \tilde{f} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(T^k(x)) \right\|_{L^2(X)} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$;
- (ii) $\tilde{f}(T(x)) = \tilde{f}(x)$ para quase todo ponto $x \in X$;
- (iii) $\int_X \tilde{f}(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$

Para provarmos o teorema acima, o ingrediente chave é provar que o operador ergódico maximal

$$\mathcal{E}f(x) = \sup_{0 \leq N < \infty} \left| \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(T^k(x)) \right| \quad (2.8)$$

é limitado em $L^2(X)$.

Exemplo 2.3 (Operadores Maximais Geométricos, I). Para cada $\delta > 0$, $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ considere a δ -vizinhança tubular do segmento de reta de direção e e centro x (ou, δ -tubo), isto é,

$$T_e^\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle (y-x), e \rangle| \leq \frac{1}{2}, |(y-x)^\perp| \leq \delta\} \quad (2.9)$$

onde $y^\perp = y - \langle y, e \rangle e$. O operador maximal de *Kekeya* de uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ por

$$K_\delta f(x) = \sup_{T_e^\delta(x)} \frac{1}{|T_e^\delta(x)|} \int_{T_e^\delta(x)} |f(y)| dy. \quad (2.10)$$

Associado ao operador acima, temos a seguinte conjectura.

Conjectura 2 (Conjectura de *Kekeya* Maximal). *Para cada $\epsilon > 0$ existe uma constante C_ϵ tal que*

$$\|K_\delta f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \quad (2.11)$$

Em dimensão $n = 2$ a conjectura é verdadeira e a estimativa ótima é dada por

$$\|K_\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C (\log \delta) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad (2.12)$$

Uma prova desse resultado será dada na Capítulo 3, utilizando a formulação equivalente de Córdoba, que utiliza retângulos de excentricidade δ ao invés de retângulos com lados fixos (cabe ressaltar que esse tipo de operador de *Kekeya* foi introduzido por Córdoba [18] em dimensão 2 e, por conta disso, também é conhecido como *operador maximal de Córdoba*). Para dimensão $n \geq 3$, apenas resultados parciais são conhecidos, cujas referências são os trabalhos de Bourgain [9], Wolff [56] e Tao [51].

Exemplo 2.4 (Operadores Maximais Geométricos, II). Seja Ω um subconjunto de \mathbb{S}^{n-1} e consideremos o operador maximal definido para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

por

$$M_{\Omega}f(x) = \sup_{x \in R \in B_{\Omega}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy, \quad (2.13)$$

onde B_{Ω} é a coleção de todos os paralelepípedos cujo maior lado é paralelo a um vetor $e_{\omega} \in \Omega$. Como foi dito na introdução, é conjecturado que quando $|\Omega| = N < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante C_{ϵ} tal que

$$\|M_{\Omega}f(x)\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\epsilon} N^{\epsilon} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \quad (2.14)$$

Seguindo o exemplo anterior, para $n \geq 3$ a conjectura acima permanece em aberto. Para $n = 2$ ela é verdadeira. Esse resultado foi demonstrado por Katz [32], Karagulyan e Lacey [30] e Alfonseca [1]. Uma prova desse resultado será dada no Capítulo 4.

Logo, como os exemplos acima podem mostrar, nosso principal objetivo será a obtenção de estimativas que demonstrem a limitação de determinados operadores maximais.

Como trabalharemos apenas com operadores definidos sobre espaços L^2 , existe uma técnica muito interessante que introduziremos na próxima seção.

2.2 O método TT^* e a Linearização de Operadores

Maximais

Para desenvolvermos nossa técnica, vamos rever a definição de operador linear sobre $L^2(X)$ e de norma de operador.

Definição 2.2.1. *Um operador linear agindo sobre um espaço $L^2(X)$, onde (X, dx) é um espaço de medida σ -finito, é uma função $T : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ que satisfaz para cada $f, g \in L^2(X)$, $x \in X$ e para cada $\alpha \in \mathbb{C}$*

$$(i) \quad T(f + g)(x) = T(f)(x) + T(g)(x),$$

$$(ii) \quad T(\alpha f)(x) = \alpha T(f)(x).$$

Definição 2.2.2. A *norma* de um operador linear T , denotada por $\|T\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}$, é definida como

$$\|T\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} = \inf\{C \geq 0 : \|Tf\|_{L^2(X)} \leq C\|f\|_{L^2(X)}, \forall f\} \quad (2.15)$$

onde $\|f\|_{L^2(X)} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ é a norma de f em $L^2(X)$ e onde $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)dx$ é o produto interno usual. Quando $C < \infty$, dizemos que o operador é limitado. Se não existir tal constante ou se $C = \infty$, o operador é dito ilimitado.

Uma das ferramentas empregadas na obtenção de estimativas para a norma de T é o *método* TT^* . A técnica consiste em analisar o operador T através de TT^* , obtendo comparações com T e T^* e explorando o lema abaixo (que será demonstrado na próxima seção).

Lema 2.2.1. Seja (X, dx) um espaço de medida σ -finito e seja $T : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ um operador linear. Então, se T^* é o adjunto de T , segue que

$$\|T\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} = \|T^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} = \|TT^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}^{1/2} \quad (2.16)$$

Mas porque esperarmos que nossa tarefa seja simplificada ao trabalhar com TT^* ao invés de T ?

Exemplo 2.5. Considere um operador agindo sobre $L^2(X)$ (onde (X, \mathfrak{X}, μ) é um espaço de medida qualquer) dado por

$$Tf(x) = \int_X k(x, y)f(y)dy. \quad (2.17)$$

Suponha que k é uma função limitada com $|\text{supp}(k)| < \infty$. Observe que para cada $x \in X$ fixo

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x) \quad (2.18)$$

ou seja, T é linear. Usando o produto interno usual em $L^2(X)$, concluímos que

$$T^*g(y) = \int_X k(x, y)g(x)dx. \quad (2.19)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
TT^*f(x) &= \int_X k(x, y) T^*f(y) dy \\
&= \int_X k(x, y) \left(\int_X k(z, y) f(z) dz \right) dy \\
&= \int_X f(z) \left(\int_X k(x, y) k(z, y) dy \right) dz \\
&= \int_X f(z) \mathbb{K}(x, z) dz
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Observe que o núcleo desse operador integral é mais suave que o núcleo original de T . Além disso, em casos particulares, pode ocorrer algum tipo de cancelamento, na integral que define o núcleo \mathbb{K} , que facilite estimativas para a norma de operador TT^* .

Nos exemplos tratados no próximo capítulo, veremos que TT^* pertence a uma classe comparável com T .

Essa é a essência do método TT^* : esperamos que o operador TT^* seja *mais bem comportado* do que o operador original T .

Precisamos desenvolver alguma técnica que nos permita aplicar o método acima aos problemas envolvendo operadores maximais: o **Lema 2.2.1** é aplicável apenas a operadores lineares e, obviamente, operadores maximais não o são.

Da definição (2.1), segue que um operador maximal \mathcal{T} é um operador *sublinear*, ou seja, satisfaz

$$(i') \quad \mathcal{T}(f + g)(x) \leq \mathcal{T}f(x) + \mathcal{T}g(x) ,$$

$$(ii') \quad \mathcal{T}(\alpha f)(x) = |\alpha| \mathcal{T}f(x).$$

Para operadores sublineares está definida uma norma de operador similar ao caso de operadores lineares, que continuará sendo denotada por $\|\mathcal{T}\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}$.

Para cada função mensurável $\mu(x) : X \rightarrow A$, definimos a **linearização** $T_{\mu(x)}f(x)$ de $\mathcal{T}f(x)$. Obviamente, dado um $x \in X$, $\epsilon > 0$ e uma $f \in L^2(X)$, vai

existir uma função $\mu(x)$ tal que

$$\mathcal{T}f(x) < (1 + \epsilon)T_{\mu(x)}f(x) \quad (2.21)$$

Esse processo é chamado linearização, porque cada $T_{\mu(x)}$ é um operador linear sobre $L^2(X)$. Em casos especiais, como veremos no teorema abaixo, vale ainda

$$\|\mathcal{T}\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} \leq \sup_{\mu(x)} \|T_{\mu(x)}\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}. \quad (2.22)$$

Obtemos dessa forma uma técnica que explora totalmente a estrutura do espaço de Hilbert $L^2(X)$ na obtenção de estimativas da norma de operadores maximais.

O seguinte teorema (presente em Barrionuevo [3]) nos dá condições suficientes para que o processo desenvolvido acima nos possibilite concluir a limitação de um operador maximal dado. Como em [3], tratamos apenas o caso de operadores lineares auto adjuntos. A prova do resultado abaixo será dada na próxima seção.

Teorema 2.1 (Método TT^*). *Suponha que A é um conjunto enumerável e seja $\{T_\mu\}_{\mu \in A}$ uma família de operadores lineares auto adjuntos sobre $L^2(X, dx)$, onde (X, dx) é um espaço de medida σ -finito. Suponha ainda que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) T_μ são uniformemente limitadas.
- (ii) Para todo μ , $T_\mu f(x) \geq 0$ se $f(x) \geq 0$.
- (iii) Se $f \geq 0$, então para quase todo $x \in X$

$$T_\mu T_\nu f(x) \leq M_\mu T_{\varphi(\nu)} f(x) + N_\nu T_{\varphi(\mu)} f(x) \quad (2.23)$$

para todo μ e para todo ν , onde φ é uma função fixa de Λ em Λ e onde M_μ e N_ν são operadores lineares sobre $L^2(X, dx)$ satisfazendo

$$\left\| \sup_{\mu} M_\mu f \right\|_{L^2(X)} \leq M \|f\|_{L^2(X)} \quad (2.24)$$

e

$$\left\| \sup_{\mu} N_{\mu} f \right\|_{L^2(X)} \leq N \|f\|_{L^2(X)} \quad (2.25)$$

para algum par de constantes M e N .

(iv) Existe um subespaço denso D de $L^2(X, dx)$ tal que

$$\left\| \sup_{\mu} T_{\mu} f \right\|_{L^2(X)} < \infty \text{ para } f \in D \quad (2.26)$$

Então

$$\left\| \sup_{\mu} T_{\mu} f \right\|_{L^2(X)} \leq C \|f\|_{L^2(X)}, \quad (2.27)$$

onde C é uma constante menor ou igual a $M + N$.

Nos próximos capítulos utilizaremos o princípio acima para obtermos a limitação de alguns operadores maximais.

Observação 2.1. A hipótese de que todos os operadores $\{T_{\mu}\}$ são uniformemente limitados não é o suficiente para garantir a limitação do operador maximal. Como exemplo, vamos considerar a família de operadores lineares $\{T_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ agindo sobre $L^2(\mathbb{T})$, definidos para cada $k \in \mathbb{Z}$ por

$$T_k f(x) = f(x + k\omega) \quad (2.28)$$

onde ω é irracional. Como

$$\|T_k f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad (2.29)$$

para cada $f \in L^2(\mathbb{T})$, vemos que $\|T_k\|_{L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})} = 1$ para cada k , ou seja, a família $\{T_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uniformemente limitada.

Se $f \in L^2(\mathbb{T})$ mas $f \notin L^{\infty}(\mathbb{T})$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} T_k f(x) = \infty \quad (2.30)$$

pois $\{x + k\omega : k \in \mathbb{Z}\}$ é uniformemente distribuído (mod 1).

2.3 Prova dos Teoremas

Prova do Lema 2.2.1 A primeira igualdade é somente a noção de dualidade. Então, basta provarmos a última igualdade. Por um lado temos que

$$\|TT^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} \leq \|T\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} \|T^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} = \|T^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}^2.$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade acima obtemos

$$\|TT^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}^{1/2} \leq \|T^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}. \quad (2.31)$$

Por outro lado, observe que para cada $f \in L^2(X)$

$$\|T^*f\|_{L^2(X)}^2 = \langle f, TT^*f \rangle \leq \|f\|_{L^2(X)} \|TT^*f\|_{L^2(X)} \leq \|f\|_{L^2(X)}^2 \|TT^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}.$$

para cada $f \in L^2(X)$. Tomando a raiz quadrada, podemos concluir que

$$\|T^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} \leq \|TT^*\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)}^{1/2}. \quad (2.32)$$

Combinando (2.31) e (2.32), obtemos o resultado.

Prova do Teorema 2.1 Definamos $\Lambda = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, onde cada A_i é finito e para todo i $A_i \subset A_{i+1}$. Primeiro provaremos o teorema para o caso finito. Tome m um inteiro positivo e seja $\mu(x)$ uma função mensurável tomando valores sobre A_m . A condição (iii) nos garante que para qualquer $f \geq 0$

$$T_{\mu(x)} T_{\nu} f(x) \leq M_{\mu(x)} T_{\varphi(\nu)} f(x) + N_{\nu} T_{\varphi(\mu(x))} f(x). \quad (2.33)$$

Como os operadores T_{μ} são auto adjuntos e positivos, tomando adjuntos na equação (2.33), temos

$$T_{\nu} T_{\mu(x)}^* f(x) \leq T_{\varphi(\nu)} M_{\mu(x)}^* f(x) + T_{\varphi(\mu(x))}^* N_{\nu}^* f(x). \quad (2.34)$$

Para $f \geq 0$, se tomarmos $\nu = \mu(x)$ na equação acima, obteremos

$$\langle T_{\mu(x)}^* f, T_{\mu(x)}^* f \rangle \leq \langle M_{\mu(x)}^* f, T_{\varphi(\mu(x))}^* f \rangle + \langle N_{\mu(x)}^* f, T_{\varphi(\mu(x))}^* f \rangle. \quad (2.35)$$

Esta relação nos será útil no que segue.

Fixemos uma função $f \geq 0$. Dados $\epsilon > 0$ e $x \in X$, escolhemos $\mu(x)$ tal que

$$(1 + \epsilon)T_{\mu(x)}f(x) \geq \sup_{\mu \in A_m} T_{\mu}f(x). \quad (2.36)$$

Usando (2.24), (2.25), (2.35) e a desigualdade de Hölder, se $\|f\|_{L^2(X)} \leq 1$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{\mu \in A_m} T_{\mu}f \right\|_{L^2(X)}^2 &< (1 + \epsilon)^2 \|T_{\mu(x)}f\|_{L^2(X)}^2 \\ &= (1 + \epsilon)^2 \|T_{\mu(x)}^*f\|_{L^2(X)}^2 = (1 + \epsilon)^2 \langle T_{\mu(x)}^*f, T_{\mu(x)}^*f \rangle \\ &\leq (1 + \epsilon)^2 \langle M_{\mu(x)}^*f, T_{\varphi(\mu(x))}^*f \rangle + \langle N_{\mu(x)}^*f, T_{\varphi(\mu(x))}^*f \rangle \\ &\leq (1 + \epsilon)^2 \left(\|M_{\mu(x)}^*f\|_{L^2(X)} \|T_{\varphi(\mu(x))}^*f\|_{L^2(X)} \right) \\ &\quad + (1 + \epsilon)^2 \left(\|N_{\mu(x)}^*f\|_{L^2(X)} \|T_{\varphi(\mu(x))}^*f\|_{L^2(X)} \right) \\ &= (1 + \epsilon)^2 \left(\|M_{\mu(x)}f\|_{L^2(X)} \|T_{\varphi(\mu(x))}^*f\|_{L^2(X)} \right) \\ &\quad + (1 + \epsilon)^2 \left(\|N_{\mu(x)}f\|_{L^2(X)} \|T_{\varphi(\mu(x))}^*f\|_{L^2(X)} \right) \\ &\leq (1 + \epsilon)^2 \|T_{\varphi(\mu(x))}^*f\|_{L^2(X)} \left(\left\| \sup_{\mu \in A_m} M_{\mu}f \right\|_{L^2(X)} + \left\| \sup_{\mu \in A_m} N_{\mu}f \right\|_{L^2(X)} \right) \\ &\leq (1 + \epsilon)^2 \|f\|_{L^2(X)} (M + N) \|T_{\varphi(\mu(x))}^*f\|_{L^2(X)} \\ &\leq (1 + \epsilon)^2 (M + N) \left\| \sup_{\mu \in A_m} T_{\varphi(\mu)}f \right\|_{L^2(X)} \\ &\leq (1 + \epsilon)^2 (M + N) \left\| \sup_{\mu} T_{\varphi(\mu)}f \right\|_{L^2(X)} \\ &\leq (1 + \epsilon)^2 (M + N) \left\| \sup_{\mu} T_{\mu}f \right\|_{L^2(X)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

para toda função $f \in L^2(X)$ satisfazendo $\|f\|_{L^2(X)} \leq 1$.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluimos que

$$\left\| \sup_{\mu \in A_m} T_{\mu}f \right\|_{L^2(X)}^2 \leq (M + N) \left\| \sup_{\mu} T_{\mu}f \right\|_{L^2(X)}. \quad (2.38)$$

Assumindo $f \in D$, segue que

$$\left\| \sup_{\mu \in A_m} T_{\mu}f \right\|_{L^2(X)}^2 \leq (M + N) \left\| \sup_{\mu} T_{\mu}f \right\|_{L^2(X)} < \infty \quad (2.39)$$

para $f \in L^2 \cap D$ e $\|f\|_{L^2(X)} \leq 1$.

Como o lado direito de (2.39) é independente de m , fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\left\| \sup_{\mu} T_{\mu} f \right\|_{L^2(X)} \leq (M + N) \quad (2.40)$$

para todas $f \in D \cap L^2(X)$ com $\|f\|_{L^2(X)} \leq 1$. Como D é denso em $L^2(X)$, nós obtemos que (2.40) vale para toda funções $f \in L^2(X)$ com $\|f\|_{L^2(X)} \leq 1$, que é o resultado desejado.

Observação 2.2. *No Capítulo 4, para demonstrarmos o Princípio de Quase Ortogonalidade de Alfonseca, Vargas e Soria, será necessário agregar um princípio de quase ortogonalidade ao método TT^* .*

3 EXEMPLOS DE OPERADORES MAXIMAIS E APLICAÇÕES

No capítulo anterior desenvolvemos um método que nos permite obter a limitação de alguns tipos de operadores maximais definidos sobre espaços L^2 . O presente capítulo servirá para mostrar, através de exemplos concretos, quão vasta é a aplicabilidade do método TT^* e como a limitação de operadores maximais são importantes no estudo de diversos campos da matemática.

Demonstraremos que uma versão diádica do operador maximal de Hardy-Littlewood é limitada em $L^2(\mathbb{R})$ e, como corolário, obteremos a convergência pontual da representação na base de Haar de funções em $L^2([0, 1])$. Provaremos a limitação do Operador Ergódico Maximal em $L^2(X)$ (onde (X, \mathfrak{X}, μ) é um espaço de probabilidade qualquer) e aplicaremos esse resultado na obtenção do Teorema Ergódico Pontual. Finalizaremos com um resultado sobre a limitação do operador maximal de Córdoba em $L^2(\mathbb{R}^2)$, que é um resultado particular do **Teorema A** do artigo de Barrionuevo [3].

Vale ressaltar que os operadores maximais das seções 1 e 2 são contínuos em L^p , para $p > 1$ e que a estimativa da norma de operador em L^2 obtida também não é a ótima. Para o operador de Córdoba, a estimativa em L^2 é ótima e as estimativas ótimas para L^p , com $p \neq 2$, são obtidas por interpolação com os resultados triviais de L^1 e L^∞ .

3.1 O Operador Maximal Diádico

Nessa seção vamos provar o teorema de Carleson [15] para o caso particular da *base de Haar* em $L^2([0, 1])$. Esse resultado segue facilmente de uma variante do **Teorema de Diferenciação de Lebesgue** para intervalos diádicos. Para obter-

mos esse teorema de diferenciação, necessitamos da limitação do operador maximal associado.

Definição 3.1.1. *O conjunto de todos os intervalos $I \subset \mathbb{R}$ da forma*

$$I = [m2^k, (m+1)2^k) \quad (3.1)$$

onde $k, m \in \mathbb{Z}$, será denotado por \mathcal{D} . Aos intervalos pertencentes a esse conjunto damos o nome de **intervalos diádicos**.

Associado a \mathcal{D} , temos o **Operador Maximal Diádico**, definido para cada função localmente integrável f (e, em particular para $f \in L^2(\mathbb{R})$) por

$$M_{\mathcal{D}}f(x) = \sup_{I \in \mathcal{D}} \frac{\chi_I(x)}{|I|} \int_I |f(y)| dy. \quad (3.2)$$

Segue então o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *O operador maximal $M_{\mathcal{D}}$ satisfaz*

$$\|M_{\mathcal{D}}f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (3.3)$$

Prova. Primeiramente, como $M_{\mathcal{D}}f = M_{\mathcal{D}}|f|$, podemos supor que $f \geq 0$. Definindo a família de operadores integrais $\{T_I\}_{I \in \mathcal{D}}$, por

$$T_I f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_I(x)\chi_I(y)}{|I|} f(y) dy = \frac{\chi_I(x)}{|I|} \int_I f(y) dy, \quad (3.4)$$

observamos que cada T_I é um operador linear autoadjunto agindo sobre $L^2(\mathbb{R})$ e que o operador maximal $M_{\mathcal{D}}$ está associado com a família $\{T_I\}_{I \in \mathcal{D}}$ pela relação

$$M_{\mathcal{D}}f(x) = \sup_{I \in \mathcal{D}} T_I f(x). \quad (3.5)$$

Por fim, se provarmos que a família de operadores $\{T_I\}_{I \in \mathcal{D}}$ satisfaz as condições do **Teorema 2.1**, o teorema fica demonstrado.

Os membros de $\{T_I\}_{I \in \mathcal{D}}$ são uniformemente limitados, pois dados $I \in \mathcal{D}$ e $f \in L^2(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}
\|T_I f\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \chi_I(x) \frac{1}{|I|} \int_I f(y) dy \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_I(x) dx \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{|I|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \chi_I(y) |f(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{|I|^{1/2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\chi_I\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Além disso, cada elemento de $\{T_I\}_{I \in \mathcal{D}}$ satisfaz

$$T_I f(x) \geq 0 \text{ se } f(x) \geq 0. \tag{3.7}$$

Vamos mostrar que se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, então

$$\|M_D f\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \tag{3.8}$$

Essa será a família densa para a qual a família de operadores $\{T_I\}$ é limitada.

Fixando uma função $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, notamos que existe um $M \geq 0$ tal que

$$f(x) = 0 \text{ se } |x| \geq M. \tag{3.9}$$

Como

$$T_I f(x) = \frac{\chi_I(x)}{|I|} \int_I f(y) dy \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{3.10}$$

para cada $I \in \mathcal{D}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que

$$M_D f(x) \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{3.11}$$

Além disso, se $|x| > 2M$, então

$$\int_I f(x) dx \neq 0 \tag{3.12}$$

implica $|I| \geq |x|/2$. Primeiramente, vemos que, caso contrário $\chi_I(x) = 0$. Para que $\int_I f(y) dy \neq 0$, é necessário que I intercepte o suporte de f , ou seja, existe um $y \in I$

tal que $|y| \leq M$. Logo, $x, y \in I$ e

$$|x - y| \geq |x| - |y| \geq |x| - M > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Portanto, $|I| \geq |x|/2$. Assim,

$$T_I f(x) = \frac{1}{|I|} \int_I f(y) dy \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} 2M}{|I|} \leq \frac{C_f}{|x|} \quad (3.13)$$

onde C_f é uma constante que depende da função f . Logo,

$$\|M_D f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} 2M + \int_{|x|>2M} \frac{C_f}{|x|^2} dx < \infty \quad (3.14)$$

Resumindo, a família de operadores lineares autoadjuntos $\{T_I\}_{I \in \mathcal{D}}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) T_I são uniformemente limitados.
- (ii) $T_I f(x) \geq 0$ se $f(x) \geq 0$ para todo $I \in \mathcal{D}$
- (iii) $\|M_D f\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$ se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

Logo, para obtermos (3.3) basta provarmos uma estimativa pontual para $T_I T_J f(x)$. Dados $I, J \in \mathcal{D}$, temos que

$$\begin{aligned} T_I T_J f(x) &= \frac{\chi_I(x)}{|I|} \int_I T_J f(y) dy \\ &= \frac{\chi_I(x)}{|I|} \int_I \left(\frac{\chi_J(y)}{|J|} \int_J f(z) dz \right) dy \\ &= \chi_I(x) \int_J f(z) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_I(y) \chi_J(y)}{|I||J|} dy \right) dz \\ &= \chi_I(x) \frac{|I \cap J|}{|I||J|} \int_J f(z) dz. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Agora, dados dois intervalos não disjuntos $I, J \in \mathcal{D}$, temos que $I \subset J$ ou $J \subset I$. Supondo que $I \subset J$ e usando em (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} T_I T_J f(x) &\leq \chi_I(x) \frac{|I \cap J|}{|I||J|} \int_J f(z) dz \\ &\leq \chi_I(x) \frac{|I|}{|I||J|} \int_J f(z) dz \\ &\leq \frac{\chi_J(x)}{|J|} \int_J f(z) dz = T_J f(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Uma desigualdade análoga para o caso em que $J \subset I$ nos permite concluir que

$$T_I T_J f(x) \leq T_J f(x) + T_I f(x). \quad (3.17)$$

Logo, pelo **Teorema 2.1**, temos que

$$\|M_D f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Observação 3.1. *O operador maximal diádico aproxima o operador maximal de Hardy-Littlewood, no sentido de que*

$$M_D f(x) \leq 4Mf(x) \quad (3.18)$$

onde $Mf(x) = \sup_I |I|^{-1} \int_I f(y) dy$, com I um intervalo qualquer centrado em x . Também podemos aplicar o método TT^* ao operador de Hardy-Littlewood [50]. O procedimento é idêntico, sendo apenas que a estimativa pontual é dada por

$$H_I H_J f(x) \leq C (H_{2I} f(x) + H_{2J} f(x)) \quad (3.19)$$

onde $H_I f(x) = |I|^{-1} \int_I f(y) dy$ e $I = (x - h, x + h)$.

Observação 3.2. *A estimativa otimal*

$$\|M_D f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (3.20)$$

para $1 < p \leq \infty$ é obtida por interpolação e lemas de cobertura [50]. A estimativa otimal para o operador de Hardy-Littlewood não é conhecida.

Observação 3.3. *Para cada $f \in L^2([0, 1])$ e para quase todo $x \in [0, 1]$*

$$\frac{1}{|I|} \int_I f(y) dy \rightarrow f(x) \text{ quando } |I| \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

onde o limite é tomado sobre todos os intervalos diádicos contidos em $[0, 1]$ contendo x .

Prova. Primeiramente, se $k < 0$ e $0 \leq m < 2^k$, então o intervalo diádico $I = I(k, m) = [m2^k, (m+1)2^k) \subset [0, 1]$. Logo, se M_D também denota a função maximal restrita a coleção dos intervalos $I \in \mathcal{D}$ com $I \subset [0, 1]$, segue que

$$\|M_D f\|_{L^2([0,1])} \leq 2\|f\|_{L^2([0,1])} \quad (3.22)$$

para cada $f \in L^2([0, 1])$. Para mostrarmos (3.21), basta provarmos que o operador

$$O_f(x) = \limsup_{I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f(y) dy - \liminf_{I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f(y) dy \quad (3.23)$$

onde o limite é tomado sobre todos os intervalos diádicos contidos em $[0, 1]$ com $x \in I$, é zero quase sempre. Vemos que $O_{(\cdot)}(x)$ é sublinear e satisfaz

$$O_h(x) = 0 \text{ para cada } h \text{ contínua,} \quad (3.24)$$

$$O_f(x) \leq 2M_D f(x) \text{ para cada } x \in [0, 1]. \quad (3.25)$$

Como para cada $f \in L^2([0, 1])$ existe uma função $g \in C^0([0, 1])$ tal que $\|f - g\|_{L^2([0, 1])} < \epsilon$, temos que

$$\|O_{f-g}\|_{L^2([0, 1])} \leq \|f - g\|_{L^2([0, 1])} \leq C\epsilon. \quad (3.26)$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário e o operador $O_{(\cdot)}(x)$ é sublinear, temos que $O_f(x) = 0$ quase sempre.

Observação 3.4. *A partir da fórmula (3.21), podemos obter a convergência pontual (quase sempre) da representação de uma função $f \in L^2([0, 1])$ em uma base de funções ortonormais de $L^2[0, 1]$, conhecida como base de Haar. Seja \mathbb{D} a coleção de todos os intervalos diádicos contidos em $[0, 1]$, isto é, $\mathbb{D} = \{I = I_{j,k} \in \mathcal{D} : j \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq k < 2^j\}$. Defina a **base de Haar** $\{h_{I_n}\}_{I_n \in \mathbb{D}} = \{h_{j,k}\}_{j,k}$, onde $n = (j, k)$ é o par de inteiros que determinam $I_n = I_{j,k}$*

$$h_{I_0}(x) = h_{0,0}(x) = \chi_{[0,1]}(x)$$

$$h_{I_n}(x) = h_{j,k}(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k)$$

com $h(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x)$ (a função h é chamada de **função de Haar**). A representação de uma função $f \in L^2([0, 1])$ na base de Haar é a expressão

$$Hf(x) = \sum_{I_n} \langle f, h_{I_n} \rangle h_{I_n}(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{0 \leq k < 2^j} \langle f, h_{j,k} \rangle h_{j,k}(x). \quad (3.27)$$

Vamos demonstrar o seguinte resultado relativo a convergência da soma acima:

Proposição 3.1.1. *Se $f \in L^2([0, 1])$, então f admite uma decomposição da forma*

$$f(x) = \sum_{I_n} \langle f, h_{I_n} \rangle h_{I_n}(x) \quad (3.28)$$

para quase todo ponto $x \in [0, 1]$.

Prova. Como $C([0, 1])$ é denso em $L^2([0, 1])$, basta demonstrarmos (3.28) para funções contínuas (em [42], existe uma demonstração da densidade de C em L^2). Usando a propriedade de que se I e J são dois intervalos diádicos não disjuntos, então $I \subset J$ ou $J \subset I$, podemos reescrever (3.21) como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_{n(x)}|} \int_{I_{n(x)}} f(y) dy \quad (3.29)$$

onde $I_{0(x)} = [0, 1] \supset I_{1(x)} \supset I_{2(x)} \supset \dots \supset I_{n(x)} \supset \dots$ é uma sequência monótona de intervalos diádicos de diâmetro decrescente convergindo para x . Dado um intervalo $I_{n(x)}$, podemos decompô-lo como

$$I_{n(x)} = I_{n+1(x)} \cup J_{n+1(x)} \quad (3.30)$$

onde $J_{n+1(x)}$ é o *intervalo irmão* de $I_{n+1(x)}$ (note que $x \notin J_{n+1(x)}$ q.s. é a propriedade que determina qual dos dois subintervalos de comprimento $|I_n|/2$ que será o próximo $I_{n+1(x)}$). Agora, observe que

$$D_{n+1}(x) - D_n(x) = \langle f, h_{I_{n+1}(x)} \rangle h_{I_{n+1}(x)}(x). \quad (3.31)$$

Definindo $G_n(x) = D_{n+1}(x) - D_n(x)$ e usando a soma telescópica, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N G_n(x) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (D_{n+1}(x) - D_n(x)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} D_{N+1}(x) - D_0(x). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por outro lado, usando a relação (3.31)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (D_{n+1}(x) - D_n(x)) \\ &= \sum_{I_{n(x)}} \langle f, h_{I_{n(x)}} \rangle h_{I_{n(x)}}(x) \\ &= \sum_{I_n, I_n \neq I_0} \langle f, h_{I_n} \rangle h_{I_n}(x), \end{aligned} \quad (3.33)$$

pois a soma sobre os intervalos diádicos que não contém x é igual a zero. Para a representação na base de Haar ficar completa em (3.33), falta obtermos o elemento $\langle f, h_{I_0} \rangle h_{I_0}(x)$. Como as expressões em (3.32) e (3.33) tem que ser iguais, obtemos a expressão

$$f(x) = D_0(x) + \sum_{I_n, I_n \neq I_0} \langle f, h_{I_n} \rangle h_{I_n}(x)$$

Como $D_0(x) = \langle f, h_{I_0} \rangle h_{I_0}(x)$, segue que

$$f(x) = \sum_{I_n} \langle f, h_{I_n} \rangle h_{I_n}(x). \quad (3.34)$$

Observação 3.5. Resultados como o da **Proposição 3.1.1** são muito mais difíceis de se conseguir quando estamos trabalhando com a **série de Fourier clássica**, ou seja, quando a base de funções é a **base trigonométrica**, composta por exponenciais da forma $\{e^{imx}\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Um importante problema proposto por Lusin em 1920, afirmava que se $f \in C(\mathbb{T})$, então a série de Fourier da função f deveria convergir pontualmente (quase sempre) para f . Resultados parciais foram obtidos por Kolmogorov-Seliverstov [34] (em seu artigo que motivou o desenvolvimento do método TT^*) para uma classe especial de funções em $L^2(\mathbb{T})$. O resultado geral para $L^2(\mathbb{T})$ só foi obtido por Carleson em 1965 [15]. Provas alternativas foram dadas por Fefferman [23] e Lacey e Thiele [36].

3.2 O Teorema Ergódico Maximal em L^2

Seja (X, \mathfrak{X}, μ) um espaço de probabilidade e $T : X \rightarrow X$ uma transformação inversível que preserva medida, isto é, $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathfrak{X}$. Defina o operador linear P agindo sobre $L^2(X, \mu)$ por

$$P(f)(x) = (f \circ T)(x) = f(T(x)) \quad (3.35)$$

Segue da definição de T que

$$\begin{aligned}\langle P(g), P(g) \rangle &= \|P(g)\|_{L^2(X)}^2 = \int_X |g(T(x))|^2 d\mu(x) \\ &= \int_X |g(x)|^2 d\mu(x) = \|g\|_{L^2(X)}^2 \\ &= \langle g, g \rangle.\end{aligned}\tag{3.36}$$

para cada função $g \in L^2(X)$. Por (3.36), vemos que P é uma isometria. Em particular, isso implica que $\|P\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} = 1$.

Definimos as *médias ergódicas* $E_N(f)(x)$ por

$$E_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N P^k(f)(x),\tag{3.37}$$

onde $P^k = P \overbrace{\circ \dots \circ}^{k\text{-vezes}} P$, e o *operador maximal ergódico* por

$$\mathcal{E}f(x) = \sup_{0 \leq N < \infty} |E_N(f)(x)|.\tag{3.38}$$

Nessa seção, nossa meta será provar o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Para cada $f \in L^2(X)$ temos que*

$$\|\mathcal{E}f\|_{L^2(X)} \leq D \|f\|_{L^2(X)}\tag{3.39}$$

Prova. Como

$$\mathcal{E}f(x) = \sup_{0 \leq N < \infty} \left| \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N P^k(f)(x) \right| \leq \sup_{0 \leq N < \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N P^k|f|(x) = \mathcal{E}|f|(x),$$

podemos supor que $f \geq 0$.

Agora, definamos para cada função não negativa $f \in L^2(X)$, os operadores auxiliares

$$A_N f(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N P^k f(x)\tag{3.40}$$

e

$$\mathcal{A}f(x) = \sup_{0 \leq N < \infty} A_N f(x).\tag{3.41}$$

Fica claro que, quando estamos restritos as funções não negativas em $L^2(X)$, vale a desigualdade

$$E_N f(x) \leq 2A_N f(x) \quad (3.42)$$

e, logo, também vale

$$\mathcal{E}f(x) \leq 2\mathcal{A}f(x). \quad (3.43)$$

Portanto, basta provarmos que

$$\|\mathcal{A}f(x)\|_{L^2(X)} \leq D\|f\|_{L^2(X)}. \quad (3.44)$$

Para isso, utilizaremos o **Teorema 2.1**.

Da definição da família de operadores $\{A_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, segue que eles são operadores lineares auto adjuntos sobre $L^2(X)$, que $A_N f(x) \geq 0$ se $f(x) \geq 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$ e que para cada $f \in L^2(X)$ e $N \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} \|A_N f\|_{L^2(X)} &\leq \left(\frac{1}{2N+1} \right) \sum_{k=-N}^N \|P^k f\|_{L^2(X)} \\ &= \left(\frac{1}{2N+1} \right) \sum_{k=-N}^N \sqrt{\langle P^k f, P^k f \rangle} \\ &= \left(\frac{1}{2N+1} \right) \sum_{k=-N}^N \sqrt{\langle f, f \rangle} \\ &= \left(\frac{1}{2N+1} \right) \sum_{k=-N}^N \|f\|_{L^2(X)} = \|f\|_{L^2(X)}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

pois P é uma isometria.

Além disso, dada uma função $f \geq 0$ com $f \in L^\infty$ e um operador A_N , temos que

$$\begin{aligned}
\|A_N f\|_{L^2(X)} &= \left(\int_X \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N P^k f(x) \right\}^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_X \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N f(T^k x) \right\}^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_X \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \|f\|_{L^\infty(X)} \right\}^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\
&= \frac{\|f\|_{L^\infty(X)}}{2N+1} (2N+1)\mu(X)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^\infty(X)} \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Portanto, a família de operadores $\{A_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ tem as seguintes propriedades:

- (i) Cada A_N é autoadjunto.
- (ii) A_N são uniformemente limitados.
- (iii) $A_N f(x) \geq 0$ se $f(x) \geq 0$ para todo N .
- (iv) $\|A_N f\|_{L^2(X)} < \infty$ se $f \in L^\infty(X)$

Logo, para provarmos (3.44), basta uma estimativa para $A_N A_M f(x)$, onde $N, M \in \mathbb{N}$. Um cálculo simples nos mostra que

$$\begin{aligned}
A_N A_M f(x) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N P^k(A_M f)(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N A_M f(T^k x) \\
&= \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2M+1} \sum_{l=-M}^M P^l A_M f(T^k x) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2N+1} \right) \left(\frac{1}{2M+1} \right) \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-M}^M A_M f(T^{k+l} x) \\
&= \left(\frac{1}{2N+1} \right) \left(\frac{1}{2M+1} \right) \sum_{j=-N-M}^{N+M} C_j f(T^j x) \\
&\leq \left(\frac{1}{2N+1} \right) \left(\frac{1}{2M+1} \right) \min\{N, M\} \sum_{j=-N-M}^{N+M} f(T^j x) \\
&\leq \left(\frac{1}{2N+1} \right) \left(\frac{M}{2M+1} \right) \sum_{j=-2N}^{2N} f(T^j x) \\
&+ \left(\frac{N}{2N+1} \right) \left(\frac{1}{2M+1} \right) \sum_{j=-2M}^{2M} f(T^j x) \\
&\leq \left(\frac{2}{4N+2} \right) \sum_{j=-2N}^{2N} f(T^j x) + \left(\frac{2}{4M+2} \right) \sum_{j=-2M}^{2M} f(T^j x) \\
&\leq \left(\frac{2}{4N+1} \right) \sum_{j=-2N}^{2N} f(T^j x) + \left(\frac{2}{4M+1} \right) \sum_{j=-2M}^{2M} f(T^j x) \\
&= 2 \{A_{2N} f(x) + A_{2M} f(x)\} \tag{3.47}
\end{aligned}$$

onde C_j é igual ao número de soluções da equação $k+l=j$, onde $k \in \{-N, \dots, N\}$, $l \in \{-M, \dots, M\}$ e $j \in \{-N-M, \dots, N+M\}$.

Pelo **Teorema 2.1**,

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^2(X)} \leq 4\|f\|_{L^2(X)},$$

Como $\mathcal{E}f(x)$ é dominado pontualmente por $2\mathcal{A}f(x)$, segue que

$$\|\mathcal{E}f\|_{L^2(X)} \leq 8\|f\|_{L^2(X)}. \tag{3.48}$$

Observação 3.6. O Teorema 3.2 nos permite demonstrar o famoso Teorema Ergódico Pontual (ou Teorema Ergódico de Birkhoff, como é mais conhecido) para o caso especial em que $f \in L^2(X)$.

Corolário 3.2.1 (Teorema Ergódico Pontual). Dado uma função $f \in L^2(X)$, onde (X, \mathfrak{X}, μ) é um espaço de medida, e uma transformação inversível $T : X \rightarrow X$ que preserva medida (isto é, $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$). Então

$$\tilde{f}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N f(T^k(x)) \text{ existe para quase todo } x \in X, \quad (3.49)$$

\tilde{f} pertence a $L^2(X)$ e

$$(i) \left\| \tilde{f} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(T^k(x)) \right\|_{L^2(X)} \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty;$$

$$(ii) \tilde{f}(T(x)) = \tilde{f}(x) \text{ para quase todo ponto } x \in X;$$

$$(iii) \int_X \tilde{f}(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

Prova. Demonstrando que o limite em (3.49) existe para quase todo ponto $x \in X$, todas as propriedades enunciadas no corolário seguem facilmente.

Para isso, definimos os conjuntos $C = \{g \in L^2(X) : g(x) = h(x) - h(T(x)), h \in L^\infty(X)\}$, chamado *conjunto das coboundarys* e $I = \{f \in L^2(X) : f(x) = f(T(x))\}$, o *conjunto das funções T-invariantes*. Vamos mostrar que

$$D_2 = \{f \in L^2(X) : f(x) = I_f(x) + C_f(x), I_f \in I \text{ e } C_f \in C\} \quad (3.50)$$

é denso em $L^2(X)$ (esse conjunto será importante no que segue abaixo). Seja $h \in L^2(X)$ tal que $h \perp (g - Tg)$ para toda $g \in L^\infty(X)$. Então, utilizando o produto interno, concluímos que

$$\int_X h(x) d\mu(x) = \int_X h(T^{-1}x) d\mu(x), \quad (3.51)$$

ou seja, que $Th = h$. Logo, $L^2(X)$ pode ser decomposto como a soma direta de I com o fecho de C . Em particular, isto implica que D_2 é denso em $L^2(X)$.

Para cada $f \in L^2(X)$, definamos o operador auxiliar

$$O(f)(x) = \limsup_{N \rightarrow \infty} E_N f(x) - \liminf_{N \rightarrow \infty} E_N f(x). \quad (3.52)$$

Fica evidente que $O(f)(x) = 0$ para quase todo $x \in X$ é equivalente ao limite em (3.49) existir. Da definição do operador $O(\cdot)(x)$, vemos que ele é sublinear, limitado pontualmente pelo operador ergódico maximal \mathcal{E} e que para cada função $g \in D_2$, $O(g)(x) = 0$ quase sempre.

Fixando uma função $f \in L^2(X)$, como D_2 é denso em $L^2(X)$, dado um $\epsilon > 0$ existe uma função $g \in D_2$ tal que $\|f - g\|_{L^2(X)} < \epsilon$. Usando as propriedades do operador $O(\cdot)(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|O(f)\|_{L^2(X)} &\leq \|O(g)\|_{L^2(X)} + \|O(f - g)\|_{L^2(X)} \\ &\leq C\|\mathcal{E}(f - g)\|_{L^2(X)} \\ &\leq \|f - g\|_{L^2(X)} < \epsilon \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, para cada $f \in L^2(X)$ segue que $O(f)(x) = 0$ quase sempre, ou seja, \tilde{f} existe quase sempre.

O fato de que $\tilde{f} \in L^2(X)$ segue diretamente da limitação do operador maximal ergódico:

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(X)} \leq \|\mathcal{E}(f)\|_{L^2(X)} \leq C\|f\|_{L^2(X)} < \infty \quad (3.54)$$

Uma nova aplicação da limitação do operador maximal ergódico nos permite obter (i). Definindo

$$f_N(x) = \tilde{f}(x) - E_N f(x), \quad (3.55)$$

temos que $\lim_{N \rightarrow \infty} |f_N(x)|^2 = 0$ para quase todo $x \in X$ (por (3.49)) e que

$$|f_N(x)|^2 \leq 4(\mathcal{E}f(x))^2 \quad (3.56)$$

para quase todo $x \in X$. Logo, como $(\mathcal{E}f(x))^2 \in L^1(X)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \|f_N\|_{L^2(X)}^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X |\tilde{f}(x) - E_N f(x)(x)|^2 d\mu(x) \\
&= \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} |\tilde{f}(x) - E_N f(x)(x)|^2 d\mu(x) \\
&= \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} |f_N(x)|^2 d\mu(x) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

ou seja, $E_N f \rightarrow \tilde{f}$ em norma.

A propriedade (ii) é apenas um truque algébrico. Como $\tilde{f} \in L^2(X)$, temos que $\tilde{f}(x) < \infty$ para quase todo $x \in X$, de onde

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(T(x)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(T^{k+1}(x)) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N+1} f(T^k(x)) - \frac{1}{N+1} f(x) \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+2}{N+1} \frac{1}{N+2} \sum_{k=0}^{N+1} f(T^k(x)) - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} f(x) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+2} \sum_{k=0}^{N+1} f(T^k(x)) = \tilde{f}(x)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Como (X, \mathfrak{X}, μ) é um espaço de probabilidade, pela desigualdade de Hölder segue que

$$\|\mathcal{E}f\|_{L^1(X)} \leq \|\mathcal{E}f\|_{L^2(X)} \mu(X)^{1/2} < \infty, \tag{3.59}$$

ou seja, $\mathcal{E}f \in L^1(X)$. Logo, uma nova aplicação do Teorema da Convergência Dominada (usando $|E_N f(x)| \leq \mathcal{E}f(x)$ e a relação (3.49)), juntamente com fato de

que a medida μ é invariante pela transformação T , nos permite obter

$$\begin{aligned}
\int_X \tilde{f}(x) d\mu(x) &= \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} E_N f(x) d\mu(x) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X E_N f(x) d\mu(x) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(T^k(x)) d\mu(x) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \int_X f(x) d\mu(x) \\
&= \int_X f(x) d\mu(x)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

que prova (iii) e encerra demonstração do corolário.

3.3 O Operador Maximal de Córdoba Revisitado

Nessa seção demonstramos o **Teorema A** do artigo de Barrionuevo [3] para o caso especial $n = 2$. Essa restrição simplifica consideravelmente os resultados geométricos envolvidos. Vale ainda ressaltar que o teorema abaixo foi inicialmente demonstrado por Córdoba [18], mas com uma estimativa para a norma de operador não optimal. Por causa desse fato, vamos chamar nosso operador de *operador maximal de Córdoba*.

Consideremos a coleção Ω_N de todos os retângulos que são congruentes a alguma dilatação do retângulo $R_N = [0, 1] \times [0, N^{-1}]$, onde $N > 0$. Definamos para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ o operador maximal direcional

$$M_N f(x) = \sup_{x \in R \in \Omega_N} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy \tag{3.61}$$

Então, segue que:

Teorema 3.3. *O operador maximal M_N como definido em (3.61) satisfaz*

$$\|M_N f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C (\log N) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{3.62}$$

Observação 3.7. *O fator $\log N$ em (3.62) é ótimo. Para ver isso, considere a função*

$$f_N(x) = \frac{1}{|x|} \chi_{1 \leq |x| \leq N}(x)$$

Então

$$\|f_N\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = C (\log N)^{1/2}$$

e

$$\|M_N f_N\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq C (\log N)^{3/2}$$

Para demonstrarmos o **Teorema 3.3** precisamos de alguns resultados que simplifiquem a geometria envolvida no problema, permitindo reformular o teorema em uma forma equivalente para a qual possamos aplicar as mesmas idéias do **Teorema 2.1**.

Primeiramente, precisamos de um resultado sobre o suporte de convoluções, que pode ser encontrado em [28] para o de distribuições.

Lema 3.3.1. *Sejam $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ são funções de suporte compacto, então $u * v$ também é uma função integrável de suporte compacto e*

$$\text{supp}(u * v) \subset \text{supp}(u) + \text{supp}(v) = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in \text{supp}(u), y \in \text{supp}(v)\} \quad (3.63)$$

Prova. Seja h uma função $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy \right) h(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) h(x) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y) h(z + y) dy dz \end{aligned} \quad (3.64)$$

O integrando vai ser diferente de zero somente se $z + y \in \text{supp}(u) + \text{supp}(v)$.

Seja \mathcal{B}_ϵ a classe de todos os retângulos simétricos em torno da origem, que são congruentes a alguma dilatação do retângulo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$. Agora, para cada par $\mu = (h, \theta)$, onde $h > 0$ e $\theta \in \mathbb{S}^1$, definamos \mathcal{B}_ϵ^μ a classe de todos os

retângulos em \mathcal{B}_ϵ que são congruentes a $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \times [-\frac{h\epsilon}{2}, \frac{h\epsilon}{2}]$ e que possuem o lado maior apontando na direção de θ . Para $\mu = (h, \theta)$ e $\nu = (k, \gamma)$, considere os retângulos $R_1 \in \mathcal{B}_\epsilon^\mu$ e $R_2 \in \mathcal{B}_\epsilon^\nu$ e as funções

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{|R_i|} \chi_{R_i}(x) \quad (i = 1, 2). \quad (3.65)$$

Então, vale o seguinte resultado.

Lema 3.3.2. *Para $i = 1, 2$, sejam R_i e φ_i , como acima. Então existe uma constante C independente de R_1 e R_2 e um retângulo E tais que*

$$\varphi_1 * \varphi_2(x) \leq C \frac{1}{|E|} \chi_E(x). \quad (3.66)$$

E é um retângulo simétrico centrado na origem e congruente a $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$, onde a e b satisfazem

$$a = \max\{2h, 2k\}, \quad (3.67)$$

$$b = \max\{2\epsilon a, d \sin \widehat{\theta\gamma}\}, \quad (3.68)$$

onde $d = \min\{2h, 2k\}$ e $\widehat{\theta\gamma}$ denota o ângulo entre θ e γ . Além disso, E possui o lado maior apontando na direção de θ se $h \geq k$ ou na direção de γ se $h < k$.

Prova. Sem perda de generalidade podemos assumir que $h \geq k$. Isso implica que $a = 2h$ e que $d = 2k$. Além disso, aplicando uma mudança de coordenadas se necessário, podemos assumir que $\theta = e_2 = (0, 1)$. Um cálculo simples nos mostra que

$$\varphi_1 * \varphi_2(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(y) \varphi_2(x - y) dy = \frac{|R_1 \cap (R_2 + x)|}{|R_1||R_2|} \quad (3.69)$$

Logo, precisamos compreender como se comporta, geometricamente, a intersecção do retângulo R_1 e do retângulo transladado $R_2 + x$. Vamos considerar dois casos

Caso 1. $4\epsilon h > 2k \sin \widehat{\theta\gamma}$

Usando o **Lema 3.3.1**, vemos que $\text{supp}(\varphi_1 * \varphi_2)$ está contido no retângulo

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq h, |x_2| \leq 2\epsilon h\}$$

que possui área $|E| = 8h^2\epsilon$. Usando o fato trivial de que $|R_1 \cap (R_2 + x)| \leq |R_2 + x| = |R_2|$ em (3.69), concluímos que para cada $x \in E$

$$\varphi_1 * \varphi_2(x) \leq \frac{1}{|R_1|} = \frac{1}{h^2\epsilon}$$

Logo, para cada $x \in \mathbb{R}^2$, obtemos a desigualdade

$$\varphi_1 * \varphi_2(x) \leq \frac{8}{|E|} \chi_E(x) \quad (3.70)$$

Caso 2. $2k \sin \widehat{\theta\gamma} > 4\epsilon h$ Novamente, aplicando o **Lema 3.3.1**, segue que

$$\text{supp}(\varphi_1 * \varphi_2) \subset E = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq h, |x_2| \leq k \sin \widehat{\theta\gamma}\}$$

onde $|E| = 4kh \sin \widehat{\theta\gamma}$. Usando a fórmula (3.69) para $x = 0$ e notando que, nesse caso, $|R_1 \cap R_2| = (\epsilon h)(\epsilon k) \left(\sin \widehat{\theta\gamma}\right)^{-1}$, obtemos

$$\varphi_1 * \varphi_2(0) = \frac{(\epsilon h)(\epsilon k) \left(\sin \widehat{\theta\gamma}\right)^{-1}}{(\epsilon h^2)(\epsilon k^2)} = \frac{1}{hk \sin \widehat{\theta\gamma}}$$

Como $|R_1 \cap (R_2 + x)|$ não pode aumentar quando $x \in E$ varia,

$$\varphi_1 * \varphi_2(x) \leq \frac{4}{|E|} \chi_E(x) \leq \frac{8}{|E|} \chi_E(x) \quad (3.71)$$

Logo, para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$, obtemos um retângulo E orientado na direção θ se $h \geq k$ que satisfaz (3.66). Fazendo um procedimento análogo para o caso $k > h$ concluímos a demonstração do lema.

Agora, para $N > 2$ fixo, seja m um inteiro tal que $2^m \leq N < 2^{m+1}$. Então, se R é um retângulo em \mathbb{R}^2 contendo x e congruente a $[0, h] \times [0, hN^{-1}]$, onde $h > 0$ satisfaz, $2^i < hh < 2^{i+1}$ para algum $i \in \mathbb{Z}$, temos que para toda função $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ não negativa

$$\frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy \leq C \frac{1}{|R'|} \chi_{R'} * f(x), \quad (3.72)$$

onde R' é um retângulo centrado na origem, congruente a $[-2^i, 2^i] \times [-2^{i-m}, 2^{i-m}]$, com os lados paralelos a R , isto é, $R' \in \mathcal{B}_{2^{-m}}$, e com a mesma orientação de R .

Logo, $R' = R_\mu$ com $\mu = (2^i, \theta)$, $i \in \mathbb{Z}$ e $\theta \in \mathbb{S}^1$. Pela continuidade da integral de Lebesgue, podemos assumir ainda que θ pertence a um subconjunto enumerável e denso Ω de \mathbb{S}^1 .

Assim, o **Teorema 3.3** é equivalente a

Teorema 3.4. *Seja $\Omega = \{\theta_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ um subconjunto denso de \mathbb{S}^1 . Para $\mu = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$, seja R_μ o retângulo em $\mathcal{B}_{2^{-m}}$ congruente a $[-2^i, 2^i] \times [-2^{i-m}, 2^{i-m}]$ com θ_j paralelo ao lado maior. Defina T_μ^m e T^m para cada função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ por*

$$T_\mu^m f(x) = \frac{1}{|R_\mu|} \chi_{R_\mu} * f(x), \quad (3.73)$$

$$T^m f(x) = \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^2} |T_\mu^m f(x)|. \quad (3.74)$$

Então

$$\|T^m f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Cm \|f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (3.75)$$

Prova. Pela positividade de T^m , precisamos provar (3.75) para $f \geq 0$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Aplicando o mesmo procedimento das seções anteriores, obtemos que os operadores T_μ^m são operadores lineares auto adjuntos uniformemente limitados sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$, que para todo $\mu \in \mathbb{Z}^2$ e para toda $f(x) \geq 0$ q.s. vale $T_\mu^m f(x) \geq 0$, e que se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ então $T^m f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Logo, para aplicarmos as idéias do **Teorema 2.1**, precisamos estimar $T_\mu^m T_\nu^m f(x)$ para cada $f \geq 0$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Se $\mu = (i, j)$ e $\nu = (k, l)$, o **Lema 3.3.2** nos garante que

$$T_\mu^m T_\nu^m f(x) \leq C_1 \frac{1}{|E|} \chi_E f(x) \quad (3.76)$$

onde C_1 não depende dos retângulos e onde E é um retângulo em \mathbb{R}^2 simétrico em torno da origem, congruente a $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ (onde a e b satisfazem (3.67)) e com E orientado de acordo com a conclusão do **Lema 3.3.2**. Então E é um elemento de algum $\mathcal{B}_{2^{-s}}$, onde s satisfaz $1 \leq s \leq m - 1$, e E é paralelo a R_μ se $k \leq i$ ou a R_ν se $i < k$. Então, se $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ é definida por $\varphi((i, j)) = (i', j)$, onde i' satisfaz $2^{i'-1} < 2^i < 2^{i'}$, temos que

$$T_\mu^m T_\nu^m f(x) \leq C_1 (T_{\varphi(\mu)}^s + T_{\varphi(\nu)}^s) f(x), \quad (3.77)$$

onde $s = s(\mu, \nu) \leq m - 1$. Para eliminarmos a dependência de s sobre μ e ν , nós vamos somar em s . Logo,

$$T_\mu^m T_\nu^m f(x) \leq C_1 \sum_{s=1}^{m-1} (T_{\varphi(\mu)}^s + T_{\varphi(\nu)}^s) f(x). \quad (3.78)$$

Repetindo os mesmos passos da demonstração do **Teorema 2.1**, obteremos

$$\|T^m f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 2C_1 \sum_{s=1}^{m-1} \|T^s f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (3.79)$$

A demonstração é concluída usando indução em m .

Para $m = 1$, T^1 é dominado pelo operador de Hardy-Littlewood, de onde $\|T^1 f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, com $C \geq C_1$. Suponha que para todo $s < m$ nós temos que $\|T^s f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq Cs \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, onde C é independente de s e f . Podemos assumir que $C > C_1$. Então, por (3.80), temos que

$$\|T^m f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 2C^2 \sum_{s=1}^{m-1} s \|f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C^2 m^2 \|f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (3.80)$$

Isso encerra a demonstração do **Teorema 3.4** e, por consequência, demonstra também o **Teorema 3.3**.

4 TEORIA DE OPERADORES MAXIMAIS DIRECIONAIS NO PLANO

Seja \mathcal{C} uma coleção de subconjuntos abertos e limitados de \mathbb{R}^n . Associado a essa família definamos o operador maximal

$$M_{\mathcal{C}}f(x) = \sup_{x \in C \in \mathcal{C}} \frac{1}{|C|} \int_C |f(y)| dy \quad (4.1)$$

para cada função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Se provarmos que o operador maximal é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, por exemplo, então

$$f(x) = \lim_{C \rightarrow x} \frac{1}{|C|} \int_C f(y) dy \quad (4.2)$$

onde $C \rightarrow x$ significa que estamos tomando uma sequência de elementos $C \in \mathcal{C}$ cujo diâmetro está convergindo para zero, tal que todos C contém x . Como visto no **Exemplo 2.1** do Capítulo 1, este tipo de resultado é válido para intervalos I da reta \mathbb{R} . Uma extensão desse resultado para dimensão n segue de maneira trivial se trocarmos intervalos por bolas (como pode ser visto no texto de Tao [50] ou Stein [45]). Porém, se substituírmos bolas por paralelepípedos, o comportamento de um operador do tipo (4.1) muda completamente. Vamos considerar alguns exemplos:

Exemplo 4.1 Se \mathfrak{D} é uma família qualquer de conjuntos abertos e limitados de \mathbb{R}^n . Se existem constantes c_1 e c_2 tal que para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe uma bola B satisfazendo

$$c_1(B) \subset D \subset c_2(B), \quad (4.3)$$

então o operador maximal $M_{\mathfrak{D}}$ é limitado pelo operador maximal de Hardy-Littlewood [46].

Exemplo 4.2 Se T é a coleção de todos os paralelepípedos em \mathbb{R}^n , então M_T é ilimitado em todos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p < \infty$. Esse resultado pode ser obtido utilizando a construção de Kakeya (mais informações podem ser encontradas em [56]).

Exemplo 4.3. Se \mathcal{S} é a coleção de todos os paralelepípedos centrados em x e com os lados paralelos aos eixos ordenados, então o operador maximal $M_{\mathcal{S}}$ (conhecido como *strong maximal operator*) é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 < p \leq \infty$ e satisfaz uma estimativa do tipo $L \log(L)^{n-1}$ *fraca* para $p = 1$, isto é,

$$|\{x : M_{\mathcal{S}}f(x) > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^{n-1} dx$$

onde $\log^+(t) = \log(t)\chi_{[0,\infty)}(t)$. Para mais referências e a demonstração desse resultado, referenciamos o artigo de Robert Fefferman [24])

Exemplo 4.4. Se \mathcal{L} consiste de todos os retângulos em \mathbb{R}^2 cujo lado maior faz um ângulo $\theta_k = 2^{-k}$ com o eixo x , para algum $k \in \mathbb{N}$, então o operador maximal $M_{\mathcal{L}}$, o *operador maximal lacunário*, é limitado em $L^p(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 < p \leq \infty$. Para $p = 1$ não existe nenhum resultado.

Exemplo 4.5. Se \mathcal{U} consiste de todos os retângulos em \mathbb{R}^2 cujo lado maior é ângulo u_k com o eixo x , onde

$$u_k \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{N}, \dots, \frac{2\pi(N-1)}{N} \right\}, \quad (4.4)$$

o operador maximal $M_{\mathcal{U}}$ satisfaz a estimativa otimal

$$\|M_{\mathcal{U}}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C (\log N) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.5)$$

Logo, fazendo $N \rightarrow \infty$, vemos que $\|M_{\mathcal{U}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \rightarrow \infty$.

Exemplo 4.6. Considere o caso em que K é a coleção dos segmentos de reta no plano cuja inclinação formada com o eixo x toma valores no conjunto de Cantor clássico. Então M_K é ilimitado em $L^p(\mathbb{R}^2)$ para todo $p < \infty$ (para a demonstração desse resultado ver [7])

Nota. A prova de que os operadores $M_{\mathcal{S}}$ e $M_{\mathcal{L}}$ são limitados em L^p , para $1 < p \leq \infty$, pode ser encontrada em Stein [45]. A estimativa L^2 para o *operador maximal uniformemente distribuído* $M_{\mathcal{U}}$ é devida a Stromberg [48]. Uma prova usando o método TT^* aparece no artigo de Barrionuevo [3].

Considerando os exemplos acima, resultados sobre a limitação de operadores do tipo (4.1) podem depender muito da geometria da coleção de conjuntos

associada. Em particular, quando a coleção dos conjuntos em \mathcal{C} dependem da orientação, costumamos chamar os operadores $M_{\mathcal{C}}$ de *operadores maximais direcionais*. Esse tipo de operador aparece em diferentes situações: Fefferman [21] e Córdoba [18] utilizaram operadores do tipo *Takeya* (**Exemplo 2.4**) para obterem seus resultados sobre a convergência das médias de Bochner-Riesz no plano; Nagel, Stein e Wainger [38], demonstraram a limitação do operador maximal lacunário no seu estudo sobre diferenciação em direções lacunárias; Katz ([32] e [33]), Barrionuevo ([3] e [4]) e Karagulyan e Lacey [36] estudaram operadores maximais cujo conjunto B_{Ω} consiste de retângulos cujo lado maior é paralelo a algum vetor $e_j \in \Omega$ (onde $\Omega \subset \mathbb{S}^1$ é um subconjunto finito) quando estudavam questões relativas a **Conjectura 1** em $n = 2$, isto é, que o operador maximal M_{Ω} satisfaz

$$\|M_{\Omega}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(\log N) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Neste capítulo, estaremos interessados em resultados sobre operadores maximais associados a famílias de retângulos em \mathbb{R}^2 . Na primeira seção, introduzimos um novo tipo de operador maximal direcional, que denotamos por \mathcal{M} , que generaliza o operador maximal de Córdoba, estudado no Capítulo 3 (**Teorema 3.3**). Finalizamos o capítulo, dando uma nova demonstração a um resultado de Alfonseca, Sória e Vargas [2] que permite obter o resultado de Katz [32], a solução da **Conjectura 1** em \mathbb{R}^2 , como um simples corolário.

4.1 Limitação do Operador Maximal \mathcal{M} em $L^2(\mathbb{R}^2)$

Em 1977, em um artigo sobre as somas de Bochner-Riesz, Córdoba [18] introduziu um novo tipo de operador maximal. Para cada $\delta > 0$, considerou a base de retângulos $B_{\delta} = \{R \subset \mathbb{R}^2 : EXC(R) = \delta\}$, onde

$$EXC(R) = \frac{\text{lado menor de } R}{\text{lado maior de } R} \tag{4.6}$$

e definiu para cada função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ o operador maximal

$$M_{\delta}f(x) = \sup_{x \in R \in B_{\delta}} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy. \tag{4.7}$$

Nesse artigo, Córdoba demonstrou que

$$\|M_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C (\log 3\delta)^2 \quad (4.8)$$

e, utilizando essa estimativa, pode deduzir o Teorema de Carleson-Sjolin-Fefferman-Hormander ([16], [22], [27]) sobre Multiplicadores de Fourier. A estimativa (4.9) foi melhorada por Stromberg [48] e por Barrionuevo [3], que obtiveram a estimativa ótima (esse resultado foi demonstrado na última seção do capítulo anterior)

$$\|M_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \log \delta. \quad (4.9)$$

Nessa seção, vamos demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *Para cada função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, defina o operador maximal*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{0 < \delta < 1/2} \frac{1}{|\log \delta|} M_\delta f(x) \quad (4.10)$$

Então, \mathcal{M} é limitado em $L^2(\mathbb{R}^2)$

Observação 4.1. *O fator $|\log \delta|^{-1}$ em (4.10) é o melhor possível. Se substituirmos ele por um a_δ tal que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\log \delta|}{a_\delta} = \infty,$$

então $\|\mathcal{M}\| = \infty$.

Prova. Primeiramente, pelo Teorema da Convergência Monótona é suficiente mostrar que o operador maximal

$$\mathcal{M}_0 f(x) = \sup_{0 < \delta_0 < \delta < 1/2} \frac{1}{\log \delta} M_\delta f(x) \quad (4.11)$$

satisfaz

$$\|\mathcal{M}_0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad (4.12)$$

com C independente de δ_0 e f . Podemos assumir ainda que o conjunto das possíveis direções é restrito a $\theta \in [0, 1/10]$. Isso faz com que direção vertical seja uniformemente transversal a todas as direções dos retângulos admissíveis, com o custo de uma constante multiplicativa na norma de operador de \mathcal{M}_0 .

Para cada $m = (h, \theta, \delta)$, considere o retângulo $R_m = R_m(x)$ que possui dimensões $h \times \delta h$, é centrado em x e possui seu lado maior apontando na direção θ . Se $l_m = 1 + |\log \delta|$, definimos o operador linear positivo e autoadjunto T_m por

$$T_m f(x) = l_m^{-1} \frac{1}{|R_m|} \int_{R_m} f(y) dy. \quad (4.13)$$

Não é difícil notar que T_m é uma linearização de \mathcal{M}_0 . Além disso, usando as idéias empregadas na prova do **Teorema 4.2**, podemos mostrar que

$$\|\mathcal{M}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| \sup_m T_m \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.14)$$

Portanto, basta provarmos que

$$\left\| \sup_m T_m \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C. \quad (4.15)$$

Para isso, vamos aplicar o **Teorema 2.1**.

Como nosso operador é positivo, $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é uma classe densa de $L^2(\mathbb{R}^2)$ para o qual $\|\sup_m T_m\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} < \infty$ e a coleção $\{T_m\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uniformemente limitada (**Teorema 3.3**), basta obtermos uma estimativa pontual do tipo (2.23).

Se $m = (h, \theta, \delta)$, $n = (k, \beta, \eta)$ e $h > k$, um cálculo simples (**Teorema 2.3**) nos permite concluir que

$$T_m T_n f(x) \leq C l_m^{-1} l_n^{-1} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy, \quad (4.16)$$

onde R é um retângulo de dimensões $2h \times 2w$, com $w = \max\{\eta k, \delta h, k \sin |\theta - \beta|\}$, com o lado maior $2h$ apontando na direção de θ e onde C é uma constante independente dos retângulos. Vamos considerar agora dois casos separadamente:

Caso 1: $w = \delta h$

Definimos o operador linear positivo e autoadjunto S_m por

$$S_m f(x) = l_m^{-1} \frac{1}{|\tilde{R}_m|} \int_{\tilde{R}_m} f(y) dy \quad (4.17)$$

onde \tilde{R}_m é um retângulo com o mesmo centro que R_m mas com dimensões $2h \times 2\delta h$. Não é difícil de ver que estimativa pontual (4.16) toma a forma

$$T_m T_n f(x) \leq C l_n^{-1} S_m f(x) \leq C S_m f(x). \quad (4.18)$$

Caso 2: $w = \max\{\eta k, k \sin |\theta - \beta|\}$

Para algum $j \leq 2l_n$, nós temos que $w \in (\eta k 2^{j-1}, \eta k 2^j]$. Definindo o operador linear

$$W_n f(x) = (2l_n)^{-1} \sum_{j=1}^{2l_n} H_{n,j} f(x) \quad (4.19)$$

onde, para cada $n = (k, \beta, \eta)$ e $j \leq 2l_n$,

$$H_{n,j} f(x) = (\eta k 2^{j+1})^{-1} \int_{-\eta k 2^j}^{\eta k 2^j} f(x + t(0, 1)) dt, \quad (4.20)$$

observe que $|H_{n,j} f(x)| \leq C M^y f(x)$, onde M^y é o operador maximal de Hardy-Littlewood unidimensional agindo na direção y . Pelo Teorema de Fubini, para cada $p > 1$

$$\begin{aligned} \|M^y f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |M^y f(x, y)|^p dy dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)|^p dy dx = C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p. \end{aligned}$$

Então, se $W f(x) = \sup_n |W_n f(x)|$, obtemos

$$\|W\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|M^y\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \quad (4.21)$$

e que vale a estimativa pontual para (4.16)

$$T_m T_n f(x) \leq C S_m W_n f(x) \quad (4.22)$$

Considerando (4.18) e (4.22) e o caso simétrico onde $h \leq k$, obtemos a estimativa pontual

$$T_m T_n f(x) \leq C (S_m + S_n + S_m W_n + S_n W_m) f(x). \quad (4.23)$$

Como $S_m = T_{\varphi(m)}$, com $\varphi((h, \theta, \delta)) = (2h, \theta, \delta)$, a estimativa pontual (4.23), nos permite concluir que

$$T_m T_n \leq C (\mathbb{I} + W_n) T_{\varphi(m)} f(x) + C (\mathbb{I} + W_m) T_{\varphi(n)} f(x), \quad (4.24)$$

onde \mathbb{I} é a identidade, isto é, $\mathbb{I} f(x) = f(x)$. Como $\|\sup_n (\mathbb{I} + W_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C$, as propriedades básicas dos operadores T_m (positividade, existência de um conjunto

denso de $L^2(\mathbb{R}^2)$ para o qual o operador maximal associado é limitado, etc) e a desigualdade (4.24) nos permitem aplicar o **Teorema 2.1** e concluir que

$$\left\| \sup_m T_m f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad (4.25)$$

ou seja,

$$\|\mathcal{M}_0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| \sup_m T_m \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C, \quad (4.26)$$

onde a norma de operador \mathcal{M}_0 não depende de δ_0 . Portanto, \mathcal{M} é limitado em $L^2(\mathbb{R}^2)$ com uma norma que não depende de δ .

4.2 O Princípio de Quase Ortogonalidade de Alfonseca-Vargas-Soria

Seja $\Omega \subset [0, 2\pi]$ e consideremos a coleção de todos os vetores da forma $e_w = (\cos w, \sin w)$, onde $w \in \Omega$. Definamos então a família de retângulos B_Ω composta pelos retângulos $R \in \mathbb{R}^2$ cujo maior dos lados é paralelo a um vetor e_w .

Associada a essa família de retângulos, consideremos o operador maximal definido para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ por

$$M_\Omega f(x) = \sup_{x \in R \in B_\Omega} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy. \quad (4.27)$$

Em [2], Alfonseca, Soria e Vargas obtiveram um princípio de quase ortogonalidade para o operador (4.27) que implica a solução de Katz [32] da **Conjectura 1** para o caso $n = 2$, como um simples corolário. O argumento empregado na demonstração foi baseado em uma estimativa de dualidade desenvolvida por Carbery em [14]. Nessa seção, provamos o mesmo resultado, mas utilizando uma variante do método TT^* que simplifica consideravelmente a prova.

Vamos começar definindo alguns conjuntos e operadores maximais. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\Omega \subset [0, \pi/4]$, pagando o preço de uma constante multiplicativa na norma de operador de M_Ω . Suponhamos ainda que $\pi/4 \in \Omega$.

Consideremos então $\Omega_0 \subset \Omega$ um subconjunto enumerável e ordenado, não necessariamente finito, definido por

$$\Omega_0 = \{\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_k > \dots\} \quad (4.28)$$

e que satisfaz a seguinte hipótese: se $\Omega_1 = [\pi/4, \theta_1)$ e $\Omega_i = [\theta_{i-1}, \theta_i) \cap \Omega$ para $i = 2, 3, \dots$, a coleção disjunta $\{\Omega_i\}_{i=1}^\infty$ é uma partição de Ω , ou seja, $\cup_i \Omega_i = \Omega$.

Associados com a coleção $\{\Omega_i\}_{i=0}^\infty$, definamos os operadores maximais

$$M_{\Omega_i} f(x) = \sup_{x \in R \in B_{\Omega_i}} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy, \quad (4.29)$$

onde B_{Ω_i} , para $i = 0, 1, \dots$, é a coleção dos retângulos cujo maior lado é paralelo a um vetor e_{w_i} , com $e_{w_i} = (\cos w_i, \sin w_i)$ para algum $w_i \in \Omega_i$.

Teorema 4.2. *Sejam M_Ω , M_{Ω_0} e $\{M_{\Omega_i}\}_{i=1}^\infty$ como definidos acima. Então,*

$$\|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} + C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \quad (4.30)$$

Prova. Dada uma função mensurável $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow B_\Omega$, tal que $x \mapsto R_x$, definimos o operador linear associado a Φ por

$$Tf(x) = \frac{1}{|R_x|} \int_{R_x} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} k(x, y) f(y) dy, \quad (4.31)$$

onde o núcleo é

$$k(x, y) = \frac{1}{R_x} \chi_{R_x}(y). \quad (4.32)$$

Definimos ainda dois operadores auxiliares. Se R_x tem inclinação em Ω_j , considere os seguintes retângulos associados a ele:

- (i) \tilde{R}_x , o retângulo com mesmo centro e inclinação que R_x , mas com duas vezes suas dimensões;
- (ii) R'_x , o retângulo com mesmo centro que R_x , duas vezes sua a dimensão e com inclinação θ_{j-1} ;
- (iii) R''_x , o retângulo com mesmo centro que R_x , duas vezes sua a dimensão e com inclinação θ_j .

Associados a estes retângulos, definimos os operadores lineares

$$T_0 f(x) = \frac{1}{|R'_x|} \int_{R'_x} f(y) dy + \frac{1}{|R''_x|} \int_{R''_x} f(y) dy \quad (4.33)$$

e

$$\tilde{T} f(x) = \frac{1}{|\tilde{R}_x|} \int_{\tilde{R}_x} f(y) dy \quad (4.34)$$

Os operadores lineares T , T_0 e \tilde{T} estão associados com os operadores maximais M_Ω e M_{Ω_0} pelas relações abaixo:

$$\begin{aligned} |T_0 f(x)| &\leq T_0 |f|(x) \leq C M_{\Omega_0} f(x) \\ |T f(x)| &\leq T |f|(x) \leq M_\Omega f(x) \\ |\tilde{T} f(x)| &\leq \tilde{T} |f|(x) \leq M_\Omega f(x) \end{aligned}$$

Além disso, se $f \geq 0$, T e \tilde{T} estão relacionados pela relação

$$T f(x) \leq 4 \tilde{T} f(x).$$

O adjunto da transformação T é dado por

$$T^* f(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|R_x|} \chi_{R_x}(y) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} k(x, y) f(x) dx. \quad (4.35)$$

Da mesma forma obtemos T_0^* e \tilde{T}^* . Um cálculo simples nos mostra que

$$T T^* f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{K}(x, z) f(z) dz \quad (4.36)$$

onde

$$\mathbb{K}(x, z) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|R_x|} \chi_{R_x}(y) \frac{1}{|R_z|} \chi_{R_z}(y) dy = \frac{|R_x \cap R_z|}{|R_x| |R_z|} \quad (4.37)$$

Logo, para obtermos uma estimativa para a norma do operador $T T^*$, precisamos entender a natureza das intersecções dos retângulos R_x . Se olharmos para a definição do núcleo \mathbb{K} e para a definição dos conjuntos Ω_i , vemos que existem dois casos principais a serem estudados

Caso 1. Quando $R_x, R_z \in B_{\Omega_i}$;

Caso 2. Quando $R_x \in B_{\Omega_i}$ e $R_z \in B_{\Omega_j}$, com $i \neq j$.

De fato, mostraremos que esses são os únicos casos a considerar.

Definimos para cada $j \in \mathbb{N}$ os conjuntos $A_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : R_x \in B_{\Omega_j}\}$. Então os conjuntos A_j são mensuráveis, disjuntos e cobrem \mathbb{R}^2 . Essa coleção de conjuntos nos permite decompor o núcleo \mathbb{K} da seguinte maneira

$$\mathbb{K}(x, z) = \sum_{i,j=1} \chi_{A_i}(x) \mathbb{K}(x, z) \chi_{A_j}(z) = \mathbb{K}_1(x, z) + \mathbb{K}_2(x, z) \quad (4.38)$$

onde \mathbb{K}_1 representam os termos da diagonal da soma acima, isto é,

$$\mathbb{K}_1(x, z) = \sum_i \chi_{A_i}(x) \mathbb{K}(x, z) \chi_{A_i}(z). \quad (4.39)$$

Associados a estes núcleos estão os operadores \mathbb{T}_s , $s = 1, 2$, dados por

$$\mathbb{T}_s f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{K}_s(x, z) f(z) dz. \quad (4.40)$$

que, por sua vez, estão associados ao operador TT^* pela relação trivial

$$TT^* f(x) = \mathbb{T}_1 f(x) + \mathbb{T}_2 f(x) \quad (4.41)$$

Fica óbvio pela decomposição (4.38), que o operador \mathbb{T}_1 controla os casos em que R_x e R_z pertencem a B_{Ω_i} , enquanto \mathbb{T}_2 serve para controlar o caso em que $R_x \in B_{\Omega_i}$ e $R_z \in B_{\Omega_j}$, com $i \neq j$.

Vamos estimar primeiro a norma de operador de \mathbb{T}_1 . Como

$$\|\chi_{A_i} T\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} = \|(\chi_{A_i} T)^*\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}$$

para cada i , o fato dos conjuntos A_i serem disjuntos implica

$$\begin{aligned} \|\mathbb{T}_1 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \sum_i \|\chi_{A_i} (\chi_{A_i} T) (\chi_{A_i} T)^* \chi_{A_i} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq \sum_i \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \|\chi_{A_i} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq \sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \sum_i \|\chi_{A_i} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= \sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Podemos concluir que

$$\|\mathbb{T}_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (4.43)$$

Para controlarmos \mathbb{T}_2 , vamos dominar o núcleo \mathbb{K} como foi definido em (4.37), trocando os retângulos (menores) originais por retângulos que possuem inclinação em B_{Ω_0} , ou seja, vão existir $R'_x, R'_z \in B_{\Omega_0}$ tais que

$$\frac{|R_x \cap R_z|}{|R_x||R_z|} \leq C \max \left\{ \frac{|\tilde{R}_x \cap R'_z|}{|\tilde{R}_x||R'_z|}, \frac{|R'_x \cap \tilde{R}_z|}{|R'_x||\tilde{R}_z|} \right\} \quad (4.44)$$

Isto implica que para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $f \geq 0$,

$$\mathbb{T}_2 f(x) \leq C \left(\tilde{T} T_0^* f(x) + T_0 \tilde{T}^* f(x) \right). \quad (4.45)$$

Por (4.41) e (4.45), obtemos uma estimativa pontual para TT^* dada por

$$TT^* f(x) \leq \mathbb{T}_1 f(x) + C \left(\tilde{T} T_0^* f(x) + T_0 \tilde{T}^* f(x) \right) \quad (4.46)$$

para todas funções $f \geq 0$. Logo, usando a desigualdade (4.43) e o fato de que os operadores lineares T , \tilde{T} e T_0 são dominados pontualmente por M_Ω e M_{Ω_0} , concluímos que

$$\|TT^*\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C \|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \|M_{\Omega_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \quad (4.47)$$

Agora, dado $\epsilon > 0$ tomemos $f \geq 0$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$ com $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$ tal que

$$(1 + \epsilon)^2 \|M_\Omega f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}$$

e R_x em (4.31) satisfazendo

$$(1 + \epsilon) T f(x) \geq M_\Omega f(x).$$

A última desigualdade implica que

$$(1 + \epsilon) \|T\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.48)$$

Finalmente, escolhemos $g \geq 0$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$ com $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1$ tal que

$$(1 + \epsilon) \|T^* g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \|T^*\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} = \|T\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.49)$$

Por (4.48), (4.49) e pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
\|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq (1 + \epsilon)^4 \|T\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\leq (1 + \epsilon)^6 \|T^*g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&= (1 + \epsilon)^6 \langle TT^*g, g \rangle \\
&\leq (1 + \epsilon)^6 \|TT^*\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= (1 + \epsilon)^6 \|TT^*\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|TT^*\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.51}$$

Para terminarmos a demonstração, vamos substituir (4.51) em (4.37). Assim, obtemos

$$\|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} + C \|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \|M_{\Omega_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.52}$$

Se $\|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} = \infty$, $\sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} = \infty$ ou $\|M_{\Omega_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} = \infty$, o resultado é trivial e a desigualdade segue. Se as normas de M_Ω e M_{Ω_0} são finitas e se $\sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} < \infty$, completando os quadrados concluímos que

$$\|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sup_{i \geq 1} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} + C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.53}$$

Observação 4.2. *O resultado de Katz [32], que demonstra a **Conjectura 1** para o caso especial $n = 2$, é obtida como um simples corolário [1]. Por completez, enunciaremos e provaremos esse resultado abaixo.*

Suponha que Ω é um subconjunto de cardinalidade N de \mathbb{S}^1 e defina M_Ω como em (4.27). Então, existe uma constante K independente de Ω tal que

$$\|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq K (\log N) \tag{4.54}$$

Prova. Tome $N = 2^M$. A demonstração será feita por indução em M . Se $M = 1, 2$, basta tomarmos C suficientemente grande em (4.54), devido a limitação do operador maximal M_S (**Exemplo 4.1**).

Para $M \geq 3$, vamos supor que (4.54) é verdadeira para todo conjunto com cardinalidade 2^k , com $1 \leq k < M$, e assumir ainda que $2K \geq C/\log 2$, onde C é a constante do **Teorema 4.2** multiplicada pela norma do operador M_S . Se os elementos de Ω estão ordenados, $\{\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_N\}$, então definimos $\Omega_0 = \theta_{\frac{N}{2}}, \theta_N$. Assim, Ω_0 possui 2 elementos e Ω_1 e Ω_2 possuem cada um $N/2$ elementos.

Aplicando o **Teorema 4.2**, concluímos que

$$\|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|M_{\Omega_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} + \sup_{i=1,2} \|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \quad (4.55)$$

Como Ω_0 só possui 2 elementos a norma de operador de M_{Ω_0} é limitada por $2C$, onde essa constante é igual a constante original multiplicada pela norma do operador M_S . Pela hipótese de indução,

$$\|M_{\Omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} \leq K \left(\log \frac{N}{2} \right) \quad (4.56)$$

para $i = 1, 2$. Usando esses dois fatos em (4.55), obtemos

$$\begin{aligned} \|M_\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq 2C + K \log \frac{N}{2} \\ &= 2C + K \log N - K \log 2 \\ &\leq K \log N, \end{aligned} \quad (4.57)$$

pois $K \geq \frac{2C}{\log 2}$.

5 CONCLUSÃO E PROBLEMAS EM ABERTO

Obtivemos uma série de resultados sobre a limitação de operadores maximais em espaços do tipo L^2 através do método TT^* . Começamos definindo o que é o método TT^* e como devemos proceder (aplicando o processo de linearização) para obtermos resultados sobre a limitação de operadores maximais (Capítulo 2). Concluimos essa parte do trabalho apresentando alguns exemplos importantes de aplicação da técnica em Análise Harmônica e Teoria Ergódica (Capítulo 3). Fica claro nesse ponto que o método TT^* é uma ferramenta poderosa no estudo de operadores maximais, porém bastante restritiva: a técnica, como enunciada no **Teorema 2.1**, exige que os operadores envolvidos sejam definidos sobre espaços de Hilbert.

Em um segundo momento, concentramos nossa atenção no estudo dos operadores maximais direcionais no plano. Introduzimos um novo operador maximal direcional, associado com o Operador Maximal de Córdoba, e demonstramos a sua limitação em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Uma nova demonstração para o Princípio de Quase Ortogonalidade de Alfonseca, Vargas e Soria, que é mais simples que a prova original, também foi obtida. Utilizando esse princípio de quase ortogonalidade, a demonstração da **Conjectura 1** para o caso $n = 2$ segue de maneira bem mais simples do que o argumento utilizado originalmente por Katz. Cabe ressaltar que esses resultados (que compõem o Capítulo 4) são inéditos e estão presentes em [5].

Existem outras questões em aberto envolvendo operadores maximais direcionais no plano. Falaremos agora sobre alguns desses problemas, que podem ser abordadas em um projeto futuro.

Seja $0 < \alpha < 1$ e Ω um subconjunto de \mathbb{S}^1 , cujos elementos iremos denotar por e_j . Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $e_j \in \Omega$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, consideremos os operadores direcionais

$$I_j^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - e_j t) \mathcal{I}^\alpha(t) dt, \quad (5.1)$$

$$H_j f(x) = \text{p.v} \int_{\mathbb{R}} f(x - e_j t) \mathcal{H}(t) dt, \quad (5.2)$$

onde $dt = d\mu(e_j t)$ denota a medida de Lebesgue induzida sobre a reta $\{y \in \mathbb{R}^2 : y = te_j, t \in \mathbb{R}\}$ e

$$\mathcal{I}^\alpha(t) = \frac{1}{|t|^\alpha}, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{t} \quad (5.4)$$

Karagulyan [31] mostrou que se Ω é um conjunto infinito qualquer então o operador maximal

$$H_\Omega f(x) = \sup_{e_j \in \Omega} |H_j f(x)| \quad (5.5)$$

é ilimitado em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Um problema proposto por Lacey [35], consiste em estudar a versão maximal direcional do potencial Riesz I^α e mostrar que tal operador deve satisfazer uma estimativa semelhante a estimativa do operador de Keakeya. Esse trabalho está em sua fase inicial e uma das maiores dificuldades é que o método TT^* não pode ser aplicado diretamente pois o potencial de Riesz não leva L^2 em L^2 . No que segue, vamos descrever de forma mais rigorosa em que consiste o problema. Suponhamos que $\alpha \in (0, 1)$ e $1 < p \leq \infty$.

Questão 1. *Seja I_j como em (5.1). Então, se*

$$\mathbb{I}^\alpha f(x) = \sup_{e_j \in \Omega} |I_j f(x)| \quad (5.6)$$

será que para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$

$$\|\mathbb{I}^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad (5.7)$$

existem α e $q = q(p, \alpha)$ que tornem a desigualdade acima verdadeira?

Outros problemas interessantes ocorrem quando a direção dos retângulos varia de forma *instantânea*. Seja v um campo de vetores suaves no plano. Para cada função de Schwartz f sobre \mathbb{R}^2 defina o operador

$$M_{v,\epsilon}f(x) = \sup_{0 < t \leq \epsilon} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t |f(x - sv(x))| ds. \quad (5.8)$$

Conjectura 3 (Conjectura de Zygmund). *Suponha que v é Lipschitz. Então para toda função $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ nós temos*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t f(x - sv(x)) ds = f(x) \text{ q.s.} \quad (5.9)$$

De forma mais quantitativa, existe uma constante K tal que se $\epsilon^{-1} = K\|v\|_{Lip}$ vale a estimativa fraca

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x : M_{v,\epsilon}f(x) > \lambda\}| \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad (5.10)$$

A versão singular do problema acima está presente na

Conjectura 4 (Conjectura de Stein). *Existe uma constante K tal que se $\epsilon^{-1} = K\|v\|_{Lip}$ vale a estimativa fraca*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x : H_{v,\epsilon}f(x) > \lambda\}| \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad (5.11)$$

onde

$$H_{v,\epsilon}f(x) = p.v. \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x - sv(x)) \frac{ds}{s} \quad (5.12)$$

Variantes da Conjectura de Keakeya Maximal, onde substituímos os retângulos por conjuntos curvos ou a medida de Lebesgue por medidas σ -finitas mais gerais, também seriam problemas razoáveis a se considerar. Concluímos, expondo que quando o conjunto de direções Ω , da **Conjectura 1**, é não enumerável, não se sabe se o operador maximal M_Ω pode ser limitado em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Alfonseca. Strong type inequalities and an almost-orthogonality principle for families of maximal operators along directions in \mathbb{R}^2 . *J. London Math. Soc.*, 67:208–218, 2003.
- [2] A. Alfonseca, F. Soria, e A. Vargas. An almost-orthogonality principle in L^2 for directional maximal functions. *Proceedings of the Mt. Holyoke Conference*, 2003.
- [3] J. A. Barrionuevo. Estimates for some Keakeya Type Maximal Operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 335:667–682, 1993.
- [4] J. A. Barrionuevo. A note on Keakeya maximal operators. *Mathematical Research Letters*, 3:61–65, 1996.
- [5] J. A. Barrionuevo e L. Oliveira. A Note on Maximal Averages in the Plane. *preprint*. <http://arxiv.org/abs/0810.0911>.
- [6] M. Bateman. Keakeya sets and directional maximal operators in the plane. *preprint*. <http://arxiv.org/math/0703559>.
- [7] M. Bateman e N. Katz. Keakeya sets in Cantor directions. *Math. Res. Lett.*, 15:73–81, 2008.
- [8] J. Bourgain. Averages in the plane over convex curves and maximal operators. *J. Anal. Math.*, 47:69–85, 1986.
- [9] J. Bourgain. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. *Geom. Func. Anal.*, 1:147–187, 1991.
- [10] J. Bourgain. On the dimension of Keakeya sets and related maximal inequalities. *Geom. Func. Anal.*, 9:256–282, 1999.
- [11] J. Bourgain, N. Katz, e T. Tao. A sum-product estimate in finite fields and applications. *Geom. Func. Anal.*, 1:147–187, 1991.

- [12] L. Brandolini, L. Colzani, A. Iosevich, e G. Travaglini, editores. *Fourier analysis and convexity*, Birkhäuser, páginas 217–243. Birkhäuser, 2004.
- [13] A. Calderón. Estimates for singular integrals in terms of maximal functions. *Studia Math.*, 44:563–582, 1972.
- [14] A. Carbery. Covering lemmas revisited. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 31:145–150, 1988.
- [15] L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.*, 116:135–157, 1966.
- [16] L. Carleson e P. Sjölin. Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc. *Studia Math.*, 44:287–299, 1972.
- [17] M. Cotlar. A combinatorial inequality and its application to L^2 spaces. *Rev. Mat. Cuyena*, 1:41–55, 1955.
- [18] A. Córdoba. The Kakeya maximal function and spherical summation multiplier. *Amer. J. Math.*, 99:1–22, 1977.
- [19] K. M. Davies e Y. Chang. *Lectures on Bochner-Riesz Means*. Cambridge University Press, 1987.
- [20] M. de Guzmán. Differentiation of integrals in \mathbb{R}^n . *Lectures Notes in Mathematics - Springer*, 481, 1936.
- [21] C. L. Fefferman. The multiplier problem for the ball. *Ann. of Math.*, 94:330–336, 1971.
- [22] C. L. Fefferman. A note on spherical summation multipliers. *Israel J. Math.*, 15:44–52, 1973.
- [23] C. L. Fefferman. Pointwise convergence of Fourier series. *Ann. of Math.*, 98:551–571, 1973.
- [24] R. Fefferman. Beijing Lectures in Harmonic: Multiparameter Fourier Analysis. *Ann. of Math. Stud.*, (112):47–130, 1986.

- [25] K. Fujiwara e A. Nevo. Maximal and pointwise Ergodic Theorems for word-hyperbolic groups. *Erg. Th. and Dyn. Sys.*, 18:843–874, 1998.
- [26] G. H. Hardy e J. E. Littlewood. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta. Math.*, 54:81–116, 1930.
- [27] L. Hörmander. Oscillatory integrals and multipliers on FL^p . *Arkiv. fur Mat.*, II:1–11, 1974.
- [28] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators, Vol I*. Springer-Verlag, 1983.
- [29] R. A. Hunt. On the converggence of Fourier series, orthogonal expansions and their continuous analogues. *Mathematical Research Letters*, 3:61–65, 1996.
- [30] N. Karagulyan. On unboundedness of maximal operators for directional hilbert transforms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135:3133–3141, 2007.
- [31] N. Karagulyan e M. T. Lacey. An estimate of the maximal operators associated with generalized lacunary sets. *Journal Contemporary Math. Anal.*, 39:50–59, 2005.
- [32] N. H. Katz. Maximal operators over arbitrary sets of directions. *Duke Mathematical Journal*, 97:67–79, 1999.
- [33] N. H. Katz. Remarks on maximal operators over arbitrary sets of directions. *Bulletin of London Mathematical Society*, 31:700–710, 1999.
- [34] A. N. Kolmogorov e G. A. Seliverstov. Sur la convergence des series de Fourier. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 131:603–606, 1924.
- [35] M. T. Lacey. Comunicação pessoal.
- [36] M. T. Lacey e C. Thiele. A proof of boundedness of the carleson operator. *Math. Res. Lett.*, 7:361–370, 200.

- [37] Y. Meyer. *Wavelets: Algorithms & Applications*. 1994.
- [38] A. Nagel, E. M. Stein, e S. Wainger. Differentiation in lacunary directions. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 75:1060–1062, 1978.
- [39] A. Nevo. Harmonic analysis and pointwise ergodic theorems for non-commuting transformations. *J. of Amer. Math. Soc.*, 7:875–902, 1994.
- [40] R. Paley. A proof of a theorem on averages. *Proc. Lond. math. Soc.*, 31:289–300, 1930.
- [41] M. Pollicot e K. Yuri. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1998.
- [42] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1983.
- [43] E. M. Stein. On limits of sequences of operators. *Ann. fo Math.*, 74:140–170, 1961.
- [44] E. M. Stein. On the maximal ergodic theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 47:1894–1897, 1961.
- [45] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability of Functions*. Princeton University Press, 1970.
- [46] E. M. Stein. *Harmonic Analysis*. Princeton University Press, 1993.
- [47] E. M. Stein e S. Shakarchi. *Real Analysis*. Princeton University Press, 2003.
- [48] J. Strömberg. Maximal functions associated to uniformly distributed families of directions. *Ann. of Math.*, 108:1060–1062, 1978.
- [49] T. Tao. From rotating needles to stability of waves:Emerging connections between combinatorics, analysis and PDE. *Notices of Amer. Math. Soc.*, 48(3).

- [50] T. Tao. Graduate Fourier Analysis 247A: Lecture Notes in Harmonic Analysis. <http://www.math.ucla.edu/~tao/247a.1.067f>.
- [51] T. Tao e N. H. Katz. Recent progress on the keakeya conjecture. *Publications Mathematiques*, páginas 161–180, 2002.
- [52] T. Tao, A. Vargas, e L. Vega. A bilinear approach to the restriction and Keakeya conjectures. *J. Amer. Math. Soc.*, 11:967–1000, 1998.
- [53] A. Torchinsky. *Real Variable Methods in Harmonic Analysis*. Dover Publications, 2004.
- [54] T. Wolff. An improved bound for Keakeya type maximal functions. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 11(3):651–674, 1995.
- [55] T. Wolff. Recent work connected with the Keakeya problem. *Pros. in Math, Amer. Math. Soc.*, páginas 129–162, 1999.
- [56] T. Wolff. *Lectures on Harmonic Analysis*. AMS Books, 2000.