

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Efeito do Transporte Radial de Partículas na  
Eficiência da Geração de Corrente por Ondas  
do Tipo Híbrida Inferior em Tokamaks**

por

**Clésio Ismério de Oliveira**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da UFRGS  
em preenchimento parcial dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Física.

Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell  
Orientador

Porto Alegre, Agosto de 2002

# **Efeito do Transporte Radial de Partículas na Eficiência da Geração de Corrente por Ondas do Tipo Híbrida Inferior em Tokamaks**

por

**Clésio Ismério de Oliveira**

Dissertação<sup>1</sup> apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de

**Mestre em Física**

Área de Concentração: Física de Plasmas

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell

Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell

Coordenador da CPGFis

Porto Alegre, 2002

---

<sup>1</sup>Este trabalho foi desenvolvido com o auxílio da CAPES.

## AGRADECIMENTOS

Desenvolver e escrever esta dissertação não foi uma tarefa trivial. Muito pelo contrário, precisei do auxílio de várias pessoas que de uma forma ou de outra muito me apoiaram e ajudaram, e é a essas pessoas que gostaria de deixar registrado o meu agradecimento.

Em primeiro quero agradecer a minha esposa, amiga e companheira Vlândia de Souza e ao meu querido filhinho Vítor Francisco, em cujos sorrisos puros encontrei muita força e perseverança.

Quero agradecer a meus pais, João Carlos Koch e Iloiva Ismério, pelo apoio fraterno.

Não posso deixar de citar aqui os professores que, enquanto era aluno de Engenharia, através de disciplinas de curso 2 ou mesmo bolsas de monitoria ou de iniciação científica, contribuíram para formar-me como um cientista. Cito, então, Eliane A. Veit, Victória Hercovitz, Farhang Sefidvash, e outros que além disso, abriram meus caminhos na Física de Plasmas, como Darcy Dillenburg, João Goedert e Ruth Schneider.

E finalmente, mas não menos importante, registro aqui os meus agradecimentos a uma pessoa que apesar de estar cheia de compromissos, aceitou me orientar. Uma pessoa que soube ser um guia seguro durante a trajetória que percorri neste desafio. Luiz Fernando Ziebell, obrigado pela amizade e orientação.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS . . . . .	iv
LISTA DE TABELAS . . . . .	vi
RESUMO . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	viii
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .	7
3 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM PLAS- MAS . . . . .	22
3.1 Introdução . . . . .	22
3.2 Propriedades do plasma . . . . .	22
3.3 Equação de Vlasov . . . . .	30
3.4 Relação de dispersão de ondas em um plasma em equilíbrio	32
3.5 Relação de dispersão de plasma frio . . . . .	37
4 TEORIA QUASE-LINEAR . . . . .	39
4.1 Introdução . . . . .	39
4.2 Teoria quase-linear de um plasma não magnetizado . . . . .	39
4.3 Teoria quase-linear de um plasma magnetizado . . . . .	48

4.4	Obtenção do coeficiente de difusão quase-linear para elétrons sob o efeito de ondas LH . . . . .	51
5	MODELO TEÓRICO . . . . .	57
5.1	Introdução . . . . .	57
5.2	Modelo do tokamak . . . . .	57
5.3	Modelo do pacote de ondas híbridas . . . . .	59
5.4	Termo quase-linear para ondas do tipo híbrida inferior . . . . .	61
5.5	Termo de colisão . . . . .	62
5.6	Termo de transporte . . . . .	62
5.7	Equação de difusão . . . . .	64
6	RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	68
6.1	Introdução . . . . .	68
6.2	Implementação do modelo . . . . .	69
6.3	Análise dos resultados numéricos . . . . .	70
6.3.1	Perfil de densidade constante . . . . .	71
6.3.2	Considerações sobre o perfil de densidade de elétrons . . . . .	76
6.3.3	Considerações sobre resultados anteriores . . . . .	78
7	CONCLUSÕES . . . . .	84
	ANEXO A-1 COEFICIENTE DE FOKKER-PLANCK . . . . .	85

ANEXO A-2	CÁLCULO DA POTÊNCIA DISSIPADA POR ON- DAS LH . . . . .	92
ANEXO A-3	APLICAÇÃO DO MÉTODO ADI PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO . . . . .	95
A-3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	95
A-3.2	DIFERENÇAS FINITAS . . . . .	96
A-3.3	MÉTODO EXPLÍCITO E MÉTODO IMPLÍCITO . . . .	98
A-3.4	MÉTODO IMPLÍCITO EM DIREÇÕES ALTERNADAS	102
REFERÊNCIAS	. . . . .	112

## LISTA DE FIGURAS

Figura 5.1	Figura esquemática do tokamak. . . . .	58
Figura 5.2	Detalhe da superfície magnética no tokamak. . . . .	60
Figura 5.3	Perfis utilizados para o coeficiente de transporte, como função da posição radial normalizada. . . . .	64
Figura 6.1	$-\ln f_{e\parallel}$ vs. $u_{\parallel} u_{\parallel} $ em (a) $s = 0,05$ , (b) $s = 0,2$ , (c) $s = 0,4$ e (d) $s = 0,6$ para parâmetros do JET e $\tau_e = 100$ . . . . .	72
Figura 6.2	$-\ln f_{e\parallel}$ vs. $u_{\parallel} u_{\parallel} $ em $s = 0,6$ para parâmetros do JET e $\tau_e = 100$ . De cima para baixo tem-se a seguinte ordem dos perfis: sem dif., #5, #2, #4, #3, #1. . . . .	73
Figura 6.3	$\ln f_{e\perp}$ vs. $u_{\perp}^2/2$ em (a) $s = 0,05$ , (b) $s = 0,2$ , (c) $s = 0,4$ e (d) $s = 0,6$ para parâmetros do JET e $\tau_e = 100$ . . . . .	74
Figura 6.4	$\ln f_{e\perp}$ vs. $u_{\perp}^2/2$ em $s = 0,6$ para parâmetros do JET e $\tau_e = 100$ . De cima para baixo tem-se a seguinte ordem dos perfis: #1, #3, #4, #2, #5, sem difusão. . . . .	75
Figura 6.5	Razão $P/I$ , para parâmetros do JET. . . . .	76
Figura 6.6	Razão $ I /P$ , para parâmetros do JET. . . . .	77
Figura 6.7	Razão $I(\text{perfil})/I(\text{sem dif.})$ , para parâmetros do JET. . . . .	78
Figura 6.8	Potência da onda LH absorvida $P$ vs. $\tau$ , para parâmetros do JET. . . . .	79
Figura 6.9	Potência da onda LH absorvida $P$ vs. $\tau$ (ampliado), para parâmetros do JET. . . . .	80

Figura 6.10	Densidade de corrente $J$ no final da evolução vs. posição espacial normalizada $s$ , para parâmetros do JET. . . . .	80
Figura 6.11	Densidade de corrente $J$ no final da evolução vs. posição espacial normalizada $s$ (ampliado), para parâmetros do JET. . . . .	81
Figura 6.12	Densidade de potência $\rho$ no final da evolução vs. posição espacial normalizada $s$ , para parâmetros do JET. . . . .	81
Figura 6.13	Densidade de potência $\rho$ no final da evolução vs. posição espacial normalizada $s$ (ampliado), para parâmetros do JET. . . . .	82
Figura 6.14	Densidade de elétrons inicial e final sem difusão vs. posição espacial normalizada $s$ , para $u_{\text{crit}} = 1,0$ e para parâmetros do JET. . . . .	82
Figura 6.15	Densidade de elétrons inicial, final sem difusão e final do perfil #2 vs. posição espacial normalizada $s$ , para $u_{\text{crit}} = 2,5$ e para parâmetros do JET. . . . .	83
Figura A-3.1	Disposição dos pontos de grade. . . . .	97
Figura A-3.2	Esquema ilustrativo do método ADI . . . . .	103



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1	Reações de fusão nuclear que ocorrem a baixas temperaturas. $E$ e $E^*$ são respectivamente a energia nuclear total liberada em uma reação e a energia liberada na forma de partículas carregadas (Ribe, 1975) . . . . .	2
------------	--	---

**TÍTULO:** “EFEITO DO TRANSPORTE RADIAL DE PARTÍCULAS NA EFICIÊNCIA DA GERAÇÃO DE CORRENTE POR ONDAS DO TIPO HÍBRIDA INFERIOR EM TOKAMAKS”

## RESUMO

Usamos a teoria quase-linear para estudar os efeitos do transporte radial de partículas na eficiência da geração de corrente por ondas do tipo híbrida inferior (*lower hybrid* ou LH), em um *tokamak* modelado como uma lâmina. Nossos resultados numéricos foram obtidos com cinco diferentes modelos do termo de transporte e indicaram que embora a potência absorvida e a corrente gerada possam ser modificadas por efeito do transporte, a proporção de variação dessas quantidades não é muito sensível a uma forma particular do termo de transporte. Na formulação quase-linear utilizada, a evolução no tempo da função distribuição de elétrons, em um dado ponto da geometria de lâmina proposta, ocorre sob a ação de ondas do tipo híbrida inferior, colisões e transporte, e é descrita pela seguinte equação:  $\partial_\tau f_e = (\partial_\tau f_e)_{LH} + (\partial_\tau f_e)_{COL} + (\partial_\tau f_e)_T$ . O terceiro termo pretende demonstrar a natureza e a magnitude dos efeitos de transporte, e é dado pela seguinte forma:  $(\partial_\tau f_e)_T = \partial_s [D_T(s) \partial_s f_e]$ , com um coeficiente para difusão espacial dependente de posição. Utilizamos cinco formas totalmente arbitrárias para a dependência de posição, com as quais pretendemos verificar a sensibilidade do processo de geração de corrente a aspectos do termo de difusão.

**TITLE:** “EFFECT OF RADIAL TRANSPORT OF PARTICLES ON THE EFFICIENCY OF LOWER HYBRID CURRENT GENERATION IN TOKAMAKS”

## ABSTRACT

We use quasilinear theory to study the effects of particle radial transport on the efficiency of current generation by lower hybrid (LH) waves, in a tokamak modelled as a plasma slab. Our numerical results are obtained with five different model transport terms, and indicate that although the absorbed power and the generated current may be modified by effect of the transport, the ratio of these quantities is not very sensitive to the particular form of the transport term. In the quasilinear formulation utilized the time evolution of the electron distribution function, at a given point of the proposed slab geometry, occurs under the action of LH waves, collisions and transport, and is described by the following equation  $\partial_\tau f_e = (\partial_\tau f_e)_{LH} + (\partial_\tau f_e)_{COL} + (\partial_\tau f_e)_T$ . The third term intends to demonstrate the nature and magnitude of the transport effects, and is given by the following  $(\partial_\tau f_e)_T = \partial_s [D_T(s) \partial_s f_e]$ , with a space dependent coefficient for spatial diffusion. We utilize five quite arbitrary forms of space dependence which are intended to verify the sensitivity of the current generation process to features of the diffusion term.

# 1 INTRODUÇÃO

O consumo global de energia continua a crescer ano após ano com a expansão da população mundial e com as sociedades tornando-se mais e mais dependentes do fornecimento de energia. Os combustíveis fósseis, carvão, petróleo e gás natural, embora ainda exploráveis, não representam uma solução para o problema energético do terceiro milênio. Isto ocorre porque além de terem seus custos elevados à medida que escasseiem, existem os problemas ecológicos que geram com seu uso.

Neste contexto, a energia nuclear possui um papel de grande relevância. Embora a opinião pública não aceite o uso de reatores nucleares a fissão por questões como segurança, o mesmo não acontece com os reatores nucleares a fusão. Mesmo ainda não existindo usinas geradoras de eletricidade por reatores a fusão, estes se apresentam mais aceitáveis por fatores como:

- Uma grande e nova fonte de energia;
- Combustíveis são abundantes;
- Segurança inerente, desde que o mau funcionamento gera o desligamento;
- Não há poluição atmosférica conduzindo a chuva ácida ou "efeito estufa";
- A radioatividade da estrutura do reator, causada por nêutrons, decai rapidamente e pode ser minimizada por cuidadosa seleção de materiais de baixa atividade.

A fusão nuclear ocorre quando dois núcleos atômicos (de mesma carga) se aproximam suficientemente para vencer a força de repulsão eletrostática. Esse é

	E(MeV)	E*(MeV)
$D + T \rightarrow He^4(3, 52\text{MeV}) + n(14, 06\text{MeV})$	17,58	3,52
$D + D \rightarrow He^3(0, 82\text{MeV}) + n(2, 45\text{MeV})$	3,27	0,82
$D + D \rightarrow T(1, 01\text{MeV}) + p(3, 03\text{MeV})$	4,04	4,04
$D + T \rightarrow He^4(3, 67\text{MeV}) + p(14, 67\text{MeV})$	18,34	18,34
$T + T \rightarrow He^4 + n + n$	11,32	

Tabela 1.1 Reações de fusão nuclear que ocorrem a baixas temperaturas. E e E\* são respectivamente a energia nuclear total liberada em uma reação e a energia liberada na forma de partículas carregadas (Ribe, 1975)

o processo de geração de energia que ocorre no Sol e nas estrelas, onde a força gravitacional compacta os íons no núcleo da estrela apesar da repulsão Coulombiana. No Sol, hidrogênio é convertido em hélio gerando energia suficiente para manter a vida na Terra.

As reações mais adequadas para o fornecimento de energia na Terra são as que envolvem os isótopos pesados do hidrogênio: deutério (D) e trítio (T) e apenas deutério. Na Tabela 1.1 apresentamos algumas dessas reações.

Nas estrelas como nos reatores na Terra, as reações de fusão são obtidas em altas temperaturas, sendo chamadas reações termonucleares. O que faz a diferença entre esses dois processos é que nos reatores não existem altos campos gravitacionais confinando os átomos. Na ausência de forças gravitacionais intensas, na Terra, busca-se obter as condições para a fusão termonuclear através do uso de forças magnéticas ou inerciais enquanto o combustível é aquecido. Existem várias formas de se aquecer o plasma para se obter as reações de fusão. É neste ponto onde começam os desafios que a fusão termonuclear controlada gera a cientistas e a engenheiros.

São basicamente três as condições para que um sistema seja "auto-sustentado" (i.e., produza mais energia do que a inicialmente suprida):

- **Temperatura:** Um plasma perde parte de sua energia por radiação emitida pelas partículas carregadas aceleradas nas altas temperaturas necessárias para fusão. Acima de uma determinada temperatura, chamada temperatura crítica, a taxa de produção de energia por fusão é maior que a taxa de perda por radiação. Manter essa alta temperatura é um dos desafios que se apresenta. Para conseguir isto, o plasma não pode ter contato com os materiais do vaso e deve ser confinado, caso contrário, a transferência de energia por colisão para a parede do vaso causaria um resfriamento súbito e liberaria átomos do material (impurezas) que contaminariam e resfriariam mais o plasma.
- **Confinamento de Plasma e de Energia:** O confinamento do plasma pode ser conseguido através de campos magnéticos. Além do confinamento magnético existe o confinamento inercial. Neste, a idéia é aquecer uma pequena partícula de uma mistura de D-T pela incidência de vários feixes de *lasers* de alta intensidade. Já nos dispositivos a confinamento magnético a idéia é manter o plasma em equilíbrio e estável através do uso de campos magnéticos (gerados internamente ou externamente ao plasma) e correntes (induzidas no plasma ou externas). Os sistemas de confinamento magnético são de dois tipos: abertos e fechados. Os sistemas com extremos fechados possuem a forma de um toróide. A eficiência do isolamento magnético é medido por uma quantidade chamada de *tempo de confinamento de energia*. Esta é uma característica da escala de tempo para o resfriamento do plasma quando a fonte de calor é removida.
- **Densidade:** A densidade dos íons do combustível deve ser suficientemente grande para que as reações de fusão ocorram na taxa requerida. A potência de fusão é reduzida se o combustível é diluído por átomos de impurezas liberadas do material da superfície do vaso ou por acumulação de "cinzas" de hélio da reação de fusão. Impurezas multipla-

mente ionizadas também contribuem muito para as perdas de energia por radiação.

Como valores numéricos para a reação D-T temos: temperatura do plasma de 100 a 200 milhões de graus Celsius, tempo de confinamento de energia de 1 a 2 segundos e densidade do plasma central de  $2$  a  $3 \times 10^{20}$  partículas por metro cúbico (Comparemos com  $3 \times 10^{25}$  moléculas por metro cúbico de um gás a condições ambientes).

As pesquisas em confinamento magnético de plasmas em altas temperaturas têm sido realizadas basicamente nos seguintes esquemas: espelhos magnéticos, sistemas constritivos ( *$\theta$ -pinch* e  *$z$ -pinch*), *stellarator* e *tokamak*. Esses esquemas diferem entre si pela geometria dos campos magnéticos confinantes.

Vamos aqui nos fixar apenas em reatores do tipo *tokamak*, que foram o ambiente de estudo neste trabalho. A denominação *tokamak*, cunhada por Goqovin, (Fisch, 1987) vem do russo *toroidalnaya kamara i magnitnaya katushka* que significa câmara toroidal e bobina magnética. Assim, o *tokamak* consiste em uma armadilha magnética que emerge hoje como uma possível solução para a fusão termonuclear controlada. Este dispositivo basicamente compreende uma câmara toroidal que confina plasma em campos magnéticos helicoidais criados pela superposição de um campo magnético toroidal forte, criado externamente, e um campo poloidal gerado por correntes no plasma. A corrente no plasma, induzida por ação do transformador, aquece o plasma resistivamente (Hagler; Kristiansen, 1977).

A geração das correntes internas necessárias à obtenção do campo poloidal é um ponto crucial no projeto de *tokamaks*. Muitos métodos têm sido propostos para atingir tal intento, quais sejam, aquecimento ôhmico, injeção de partículas neutras, injeção de ondas eletromagnéticas e outros (Rosa, 1993).

No aquecimento ôhmico o plasma é tratado como o secundário de um transformador. Uma descarga passa através do primário do transformador, oca-

sionando uma forte variação no fluxo magnético na direção vertical ao plano que contém o plasma, o que faz aparecer uma corrente na direção toroidal. Neste método, ocorre o problema dele ser pulsado, o que ocasiona fadiga na estrutura da máquina. Na injeção de partículas neutras, estas após serem ionizadas por colisões com as partículas do plasma, formam uma corrente ao longo das linhas do campo magnético. Uma vez que são injetadas com um determinado ângulo em relação ao campo magnético toroidal, possuem portanto uma componente de momentum na direção desse campo. Um problema com esse método é a dificuldade tecnológica de gerar-se feixes de partículas neutras de alta energia. A injeção de ondas eletromagnéticas, tecnologicamente mais simples que o método anterior, é um método que tem despertado grande interesse devido às possibilidades de geração de corrente (eletrônica ou iônica) e aquecimento do plasma de forma contínua. O mecanismo de geração de corrente resulta da quebra de simetria da função distribuição eletrônica através da transferência de momentum na direção paralela ao campo magnético toroidal a elétrons de baixa velocidade em relação à velocidade térmica (ondas de Alfvén, por exemplo) ou através da modificação da colisionalidade dos elétrons com alta velocidade na direção paralela (caso das ondas de cíclotron eletrônica e híbrida inferior, por exemplo).

Neste trabalho vamos nos concentrar nas ondas híbridas inferiores (LH), ondas de frequência entre as frequências de cíclotron de íons e de elétrons, e estudar, através da teoria quase-linear, o efeito do transporte radial de partículas na eficiência da geração de corrente por estas ondas.

Primeiramente fazemos uma revisão de alguns trabalhos importantes na área de geração de correntes por ondas LH (Capítulo 2). Revisamos as propriedades do plasma e propagação de ondas em plasmas no Capítulo 3. No Capítulo 4, fazemos um estudo da Teoria Quase-Linear, a qual é a teoria que usamos no desenvolvimento deste trabalho. No Capítulo 5 apresentamos o modelo teórico utilizado em nosso trabalho e no Capítulo 6 analisamos os resultados numéricos. As conclusões são



apresentadas no Capítulo 7. A equação que governa o comportamento cinético de um plasma é a equação de Vlasov, como vemos no Capítulo 3. Mas essa equação não considera colisões. Para fazer isto necessitamos incluir o termo de colisões ou coeficiente de Fokker-Planck. A dedução deste coeficiente é apresentada no Apêndice A-1. Apresentamos o cálculo da potência dissipada por ondas LH no Apêndice A-2. No Apêndice A-3, apresentamos uma discussão detalhada sobre o método ADI, ferramenta esta utilizada para a solução da equação de difusão.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As ondas híbridas inferiores (LH) são freqüentemente utilizadas para aquecimento suplementar e como mecanismo auxiliar para geração de corrente em tokamaks. Devido a essas aplicações interessantes, ondas LH em tokamaks têm sido objeto de muitas investigações. O objetivo deste capítulo é fazer uma revisão dessas investigações.

O movimento de um íon em uma onda LH coerente em um plasma de tokamak foi estudado por Karney (1979). Para íons satisfazendo  $v_{\perp} > \omega/k_{\perp}$ , a força de Lorentz para um íon é reduzida a um conjunto de equações diferenciais as quais dão o raio de Larmor e a fase de um íon em uma órbita de cíclotron em termos dessas quantidades no início do período de cíclotron. Estas equações exibem comportamento estocástico quando a amplitude da onda excede um limite. As equações de diferenças finitas são usadas para derivar a equação de difusão governando o aquecimento dos íons acima do limite estocástico. Muito acima do limite estocástico, o amortecimento Landau é recuperado. Com a inclusão de efeitos de colisão, a taxa global de aquecimento para íons é obtida.

A teoria quase-linear de absorção de ondas cíclotron de elétrons para o modo ordinário, propagando-se perpendicularmente ao campo magnético de um tokamak, foi investigada por Fidone, Meyer e Granata (1983). Um código de valor inicial bidimensional foi desenvolvido para investigar a distorção da distribuição de momento dos elétrons, considerando como função distribuição inicial uma Maxwelliana. Mostraram que para potências de interesse para o aquecimento de elétrons em futuros tokamaks, colisões Coulombianas não são suficientes para evitar achatamento da distribuição de elétrons, portanto há uma redução da taxa de amortecimento quando comparada ao caso linear.

Fidone et al. (1984) investigaram a teoria de geração de corrente por uma combinação de efeitos de absorção de ondas LH e EC (cíclotron de elétrons), considerando o caso de um coeficiente de difusão LH espacialmente homogêneo e o modo de propagação ordinário de elétrons propagando-se próximo a normal do campo magnético. O efeito de absorção seletiva de cíclotron de elétrons, para otimização de geração de corrente LH, foi discutido em duas situações, uma delas com frequência próxima à frequência de cíclotron, e a outra com frequência muito menor do que a girofrequência cíclotron de elétrons, correspondendo a aquecimento de partículas com velocidades moderadas e com energias levemente relativísticas, respectivamente. No primeiro caso, usando solução numérica para equação de Fokker-Planck, os autores mostraram que o aquecimento de elétrons é mantido por controle de densidade na cauda da distribuição gerada por ondas LH. O último caso foi investigado para ondas de potência moderada e mostraram ser mais apropriado para otimizar a razão  $J/P$ , onde  $P$  é a potência dissipada por unidade de volume para sustentar a densidade de corrente  $J$ .

Bonoli et al. (1988) investigaram um modelo de simulação que é descrito para geração de corrente LH, *rampup*, aquecimento e estabilização dente-de-serra. O modelo incorporou código de transporte radial unidimensional, cálculo Fokker-Planck da velocidade paralela, e código de *ray tracing* toroidal. Para geração de corrente estacionária foi encontrado que geração de corrente RF (*Radio Frequency*) é precisamente predita pelo tempo de confinamento de elétrons rápidos da forma  $\tau_L = \tau_0^{(\pm)} \gamma^3$  com  $\tau_0^{(\pm)} = 3$  ms na região de densidade de  $3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$  (onde  $\pm$  distingue elétrons movendo-se paralelamente (antiparalelamente) à direção de geração de corrente),  $\gamma$  é o fator relativístico e  $\tau_0^{(\pm)} \propto \tau_e$ , sendo  $\tau_e$  o tempo de confinamento de energia de elétrons para plasma térmico. Estudos de estabilização dente-de-serra em experimentos LHRF (*Lower Hybrid Radio Frequency*) com corrente RF indicam a possibilidade de criação de perfis estáveis do fator de segurança,  $q$ , via a geração de corrente positiva RF próximo à superfície  $q = 1$ , assim produzindo uma corrente tipo "pedestal".

Giruzzi, Fidone e Meyer (1989) estudaram a geração de corrente por injeção simultânea de ondas EC e LH para o controle do perfil de densidade de corrente em tokamaks. O estudo foi realizado com um código tridimensional de Fokker-Planck (bidimensional no espaço de momentum e unidimensional no espaço real). Isso mostrou que este é um método flexível para grandes mudanças de  $q$ , fator de segurança no eixo, e é portanto de relevância para estudos de acesso ao segundo regime de estabilidade.

Uehara, Nemoto e Nagashima (1989) investigaram os parâmetros para geração de corrente LH em tokamaks usando o critério fundamental de conversão de modos, acessibilidade e instabilidade paramétrica. Foi demonstrado que o espaço de parâmetros para geração de corrente em tokamaks é dividido em duas regiões, denominadas instabilidade paramétrica e acessibilidade.

Ushigusa et al. (1989) observaram aumento da energia contida no plasma, através da injeção de ondas LH de alta potência (até 6.0 MW) em plasmas aquecidos por feixe neutro (20 MW) em um regime de densidade de elétrons média ( $\bar{n}_e \leq 3,5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ), com o mesmo tempo de confinamento do incremento de energia observado quando o aquecimento era feito apenas com injeção de feixe neutro. Quando o aquecimento LH foi usado em adição ao aquecimento de íons e elétrons térmicos, o feixe de íons foi acelerado a energias consideravelmente mais altas que a energia de injeção do feixe. Em contraste com a injeção LH em plasmas aquecidos ohmicamente no mesmo regime de densidade, onde substancial produção de elétrons energéticos foi observada, foram observados muito menos elétrons de energia alta no caso do confinamento combinado. A eficiência do aquecimento de ondas LH durante o aquecimento combinado tendeu a decrescer com o crescimento da densidade de elétrons. A análise de *ray tracing* sugere que a condição de acessibilidade impede o aquecimento efetivo de um plasma de densidade alta. Cálculos de amortecimento de onda, tomando em conta a componente do feixe da função

distribuição de velocidade de íons, indicam que as ondas são absorvidas pelo feixe de íons antes de serem absorvidas pelos elétrons.

Barbato e Santini (1991) estudaram, através de um código unidimensional de Fokker-Planck suplementado por um termo quase-linear em estado estacionário, o fato de que a presença de partículas alfa energéticas, na fase de ignição, pode evitar interações onda-elétron, assim reduzindo a eficiência da geração de corrente. Isto é devido à energia de nascimento muito alta das partículas alfa que podem absorver muito da potência das ondas LH. Este efeito desfavorável está ausente em frequências altas ( $\sim 8$  GHz para parâmetros de reatores típicos). Todavia, devido a dificuldades técnicas envolvidas no uso de tais frequências, é muito importante investigar se a absorção de potência por partículas alfa poderia ser desprezível para frequências muito baixas. Um tal estudo foi realizado com base na teoria quase-linear de interações de onda-partículas alfa, desde que a distorção da função distribuição alfa pode aumentar a absorção de radio-frequência acima do nível linear. Novos efeitos foram encontrados, tais como concentração e aceleração local de partículas alfa. O modelo de partículas alfa é acoplado com um código 1-D de deposição para ondas LH, para calcular a competição em absorção de potência entre as alfas e os elétrons, com a propagação das ondas no núcleo do plasma para parâmetros de um reator típico (ITER – *International Thermonuclear Experimental Reactor*). É mostrado que para frequências tão baixas como 5 GHz, a absorção de potência por partículas alfa é desprezível para condições de plasma convencional e concentrações realísticas de partículas alfa. Em condições mais "pessimistas" e severas, a absorção ocorre a 6 GHz.

A formulação quase-linear de Fokker-Planck é generalizada, por Kupfer e Bers (1991), para a geração de corrente por ondas LH incluir o transporte radial de elétrons rápidos induzido por ondas. O traçado toroidal mostra que os campos de onda no plasma desenvolvem uma grande componente poloidal associada com o deslocamento para cima em  $k_{\parallel}$  e o recheio do "vazio espectral". Esses campos

conduzem ao aumento da deriva  $E \times B$  dos elétrons ressonantes. Dois tipos de correntes radiais são obtidas: uma corrente convectiva externa gerada por assimetria do espectro de onda poloidal, e a corrente difusiva proporcional à largura do espectro poloidal. Resultados numéricos relevantes para o Alcator C e o JT-60 são apresentados; eles mostram que a velocidade de convecção radial tem um amplo máximo de aproximadamente 1m/s e é independente da amplitude do campo. Em ambos os casos, a difusão radial é encontrada como sendo altamente localizada próximo ao eixo magnético. Para JT-60, o pico do perfil de difusão pode ser um pouco grande, aproximadamente 1 m<sup>2</sup>/s.

Moreau e Gormezano (1991) apresentaram experimentos em LHCD (*Lower Hybrid Current Drive*) no TORE SUPRA e no JET (*Joint European Torus*). Grande injetores de multijunção permitiram o acoplamento de 5 MW para o plasma por vários segundos com um máximo de 3,8 kW/cm<sup>2</sup>. A eficiência da geração de corrente no TORE SUPRA é de cerca de  $0,2 \times 10^{20}$  A/(m<sup>2</sup> W) somente com potência LH e atinge a  $0,4 \times 10^{20}$  A/(m<sup>2</sup> W) no JET mantido a uma alta temperatura de elétrons mediada no volume (1,9 keV) e também a uma sinergia entre LH e ondas magnetosônicas rápidas. Em  $\bar{n}_e = 1,5 \times 10^{19}$  m<sup>-3</sup> no TORE SUPRA, a estabilização dente-de-serra foi suprimida e oscilações MHD com m=1, com frequência que claramente depende da quantidade da potência de LH, foram observadas em *soft X-rays* e também em ECE (*Electron Cyclotron Emission*) não térmico. No JET, ICRH (*Ion Cyclotron Resonant Heating*) produzido em períodos livres de dente de serra é estendido por aplicação de LHCD (2,9 segundos com 4MW ICRH) e o perfil de corrente alargado foi claramente observado, consistentemente com as populações de elétrons fora do eixo. Experimentos de modulação de potência LH realizados no TORE SUPRA a  $\bar{n}_e = 4 \times 10^{19}$  m<sup>-3</sup> mostraram um aquecimento de elétrons central atrasado apesar da criação fora do eixo de elétrons supratérmicos, assim descartando a possibilidade de um aquecimento direto através da absorção de onda central. Uma possível explicação em termos de anomalia no transporte de elétrons rápidos e moderação clássica conduz a um coeficiente de difusão da ordem de 10 m<sup>2</sup>/s para elétrons

rápidos. Outras interpretações tais como constrição do aquecimento anômalo ou um confinamento central aumentado não podem ser excluídas. Finalmente, abastecimento bem sucedido de pelotas de um plasma com corrente parcialmente gerada por LH foi obtido no TORE SUPRA, 28 sucessivas pelotas permitiram a densidade atingir  $\bar{n}_e = 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ . Isto pode ser atingido por desligamento da potência LH por 90 ms antes de cada injeção de pelota, i.e. sem modificar significativamente o perfil de densidade de corrente.

Propriedades de confinamento da geração de corrente por LH em plasmas e aquecimento EC em plasma no tokamak WT-3 foram estudados por Nakamura et al. (1991). As partículas superficiais e os fluxos de energia são estimados de parâmetros de plasma SOL (*scrape-off layer*<sup>1</sup>). Durante o período de LHCD a densidade e a temperatura do plasma SOL diminuem drasticamente, enquanto a densidade no núcleo do plasma cresce, sugerindo um decrescimento do fluxo para fora. Esses resultados mostram que o confinamento de partículas é melhorado por LHCD. Ao contrário, durante ECH a densidade do plasma SOL cresce e a densidade do núcleo do plasma decresce, sugerindo uma deterioração do confinamento de partículas. Melhoramento no confinamento não é obtido próximo à densidade limite de LHCD, pois o melhoramento não está relacionado com atividades MHD durante o LHCD.

A absorção de ondas LHS (*Lower Hybrid Slow*) em um plasma termonuclear foi investigada por Spada, Bornatici e Engelmann (1991) considerando tanto amortecimento Landau de elétrons quase-linear (auto-consistente) como absorção por partículas alfa de fusão (linear). As propriedades da relação de dispersão completa de plasma frio foram levadas em conta. Adotou-se uma geometria cilíndrica e foi assumido que a componente poloidal do vetor de onda pode ser desconsiderada. Expressões analíticas para ambos coeficientes de absorção foram apresentadas, com ênfase no caso onde o índice refrativo paralelo da onda LHS não está próximo do

---

<sup>1</sup>Constitui-se de pequena quantidade residual de plasma entre a "borda" do plasma (definida por um limitador) e o vaso do tokamak.

valor acessível. Nesse caso, efeitos eletromagnéticos são importantes. Resultados numéricos para o perfil de deposição radial de potência tanto para elétrons como para partículas alfa, bem como densidade de corrente foram dados e discutidos para parâmetros típicos de plasma tipo NET (*Next European Torus*).

A teoria quase-linear foi usada por Rosa e Ziebell (1992) para estudar a evolução no tempo da função distribuição sob a ação de ondas LH. Foi assumido um modelo de espectro para as ondas LH, e foi investigada a dependência do coeficiente de difusão LH resultante na temperatura de elétrons, densidade de elétrons, e no campo magnético ambiente. Um conjunto de parâmetros típicos de pequenos tokamaks foi utilizado na análise numérica, e a dinâmica de formação da cauda foi investigada. O resultado foi uma dependência quase-linear entre a densidade de corrente e a potência da onda.

Takase e Okano (1992) usaram um código de Fokker-Planck tridimensional relativístico, desenvolvido e combinado com o código de *ray-tracing*, para a análise de LHCD em plasmas de tokamaks. A eficiência na geração de corrente foi calculada, usando parâmetros de plasma da categoria de reator, como sendo de cerca de um fator de  $1,7 - 2$  vezes maior que os resultados obtidos de outras análises (código de Fokker-Planck unidimensional relativístico combinado com o código de *ray-tracing* e código de Fokker-Planck bidimensional relativístico combinado com o código de *ray-tracing*). Desde que o aumento da eficiência de LHCD devido ao efeito bidimensional e os efeitos relativísticos tendem a aumentar em um plasma de temperatura alta, tem-se que esses efeitos são importantes para analisar LHCD em tokamaks grandes.

A perda direta de elétrons energéticos durante a geração de corrente LH no JT-60U foi identificada através de medidas de sinais de raio X das placas do divisor por Ushigusa et al. (1992). Foi encontrado que a perda de potência decresce com o crescimento da densidade de elétrons e com o crescimento de  $N_{||}$  da onda lançada e é caracterizada pelo tempo de moderamento dos elétrons acelerados



por ondas LH. Em  $\bar{n}_e \sim 0,5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$  e  $N_{\parallel} \sim 1,4$ , cerca de 5 – 10% da potência injetada é perdida através de elétrons energéticos; a eficiência máxima de geração de corrente é obtida a uma corrente de plasma de 1,2 MA no JT-60U. Também foi encontrado que o confinamento de elétrons de alta energia é melhorado pelo crescimento da corrente de plasma. Esses resultados sugerem que a perda direta de potência será desprezível no ITER em operação de estado estacionário.

Bartiromo et al. (1993) apresentam uma análise detalhada de dados experimentais do conteúdo de energia na população de elétrons rápidos criados por ondas LH no tokamak ASDEX e isso mostrou que na maior parte das circunstâncias a perda direta, devido à difusão desses elétrons, pode ser desprezada. O valor do coeficiente de difusão de elétrons rápidos foi inferido do comportamento da forte emissão de raio X durante experimentos de modulação de potência. Os resultados mostram que os elétrons rápidos são melhor confinados que os elétrons térmicos. Esse resultado experimental foi comparado com uma predição teórica baseada na geração de transporte por turbulência eletrostática ou magnética.

Belikov e Silivra (1993) estudaram as perdas instantâneas de partículas alfa na presença de um campo HF. A equação cinética para a função distribuição de partículas alfa foi encontrada quando existe uma região de perda no espaço de velocidade, e o fluxo de partículas alfa deixando o plasma foi calculado como uma função dos parâmetros de plasma e da entrada de potência HF. Os resultados foram analisados do ponto de vista da obtenção de geração de corrente em um reator tokamak por meios de ondas LH. Mostraram que o uso de ondas LH para a geração de corrente não induzida faz crescer a perda instantânea de partículas alfa.

Rosa e Ziebell (1993) empregaram a teoria quase-linear para estudar a evolução do coeficiente de absorção para o modo extraordinário de ondas EC por uma cauda de elétrons estendida no espaço de momento, em um plasma magnetizado sob a ação de ondas EC e LH lançadas externamente. Usaram ondas LH para gerar a cauda estendida e para introduzir a interação das ondas EC com a cauda

de elétrons. Seus resultados mostraram que o coeficiente de absorção para o raio central do espectro de ondas cíclotron cresce com a largura do espectro e também mostraram que o coeficiente de absorção assintótico pode ser muito maior que o valor no início das ondas EC, para um ângulo de injeção suficientemente grande dessas ondas relativo à normal ao campo magnético.

Brusati et al. (1994) combinaram a informação proveniente de diferentes diagnósticos (FEB – *Fast Electron Bremsstrahlung*, PHA – *Pulse Height Analysis* e ECE – *Electron Cyclotron Emission*) a fim de caracterizar a função distribuição de elétrons rápidos em experimentos de geração de corrente híbrida inferior. Uma cadeia de análise numérica foi desenvolvida, identificando os principais momentos da função distribuição da corrente de elétrons rápidos e permitindo simulações baseadas nesses momentos, para comparação com emissões de raio X, emissão cíclotron de elétrons e dados magnéticos.

A informação de diferentes diagnósticos (raios  $\gamma$  e taxa de emissão de nêutrons) foi empregada por Andrade et al. (1994) no JET para identificar o nível de interação entre as ondas LH e íons rápidos acelerados acima de poucos MeV por ondas cíclotron de íons. Encontram que mais de 25% da potência de LH pode ser absorvida por íons rápidos sob condições específicas do plasma. Análise de Fourier da taxa de emissão de nêutrons e sinais de energia de íons rápidos durante experimentos de modulação LH mostraram que o nível de interação depende da posição relativa da ressonância de cíclotron e as camadas de absorção de LH.

Por sua vez, Ignat, Valeo e Jardim (1994) analisaram um modelo computacional dinâmico para LHCD na presença de campo elétrico. Efeitos no espaço de velocidades bidimensional foram aproximados para um tratamento de Fokker-Planck unidimensional. O modelo não foi hábil em aproximar-se aos resultados experimentais em alguns casos caracterizados por baixa densidade, corrente baixa, alta razão de aspecto e um lançamento de espectros com velocidade de fase alta relativa à

velocidade térmica. Em outros casos, foi encontrada concordância qualitativa com as medições.

Um limite superior para o coeficiente de difusão espacial de elétrons energéticos através de campos em descargas de um tokamak de densidade moderada foi medido por Knowlton, Porkolab e Takase (1994). Os elétrons energéticos foram gerados por injeção de onda LH com modulação quadrada. O decaimento da população dos elétrons rápidos para elétrons de energia  $\varepsilon \geq 100$  keV, seguinte ao corte da potência de radio-freqüência, foi inferido da dependência no tempo do perfil radial de forte emissão de raio x e bremsstrahlung. Os resultados experimentais foram ajustados para o modelo difusivo que inclui perdas colisionais e aceleração de campo elétrico. O coeficiente de difusão de elétrons rápidos consistente com os dados é  $D_f \leq 0,2 \text{ m}^2/\text{s}$  no mínimo na metade interna do plasma. O correspondente tempo de confinamento global dos elétrons energéticos é estimado para ser no mínimo um fator de 2 maior que o tempo de confinamento de energia para o plasma de fundo em descargas de densidade de  $n_e = 8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ .

Um modelo simples foi usado por Cairns et al. (1995) para a análise de dados de partículas rápidas e difusão de corrente durante aquecimento LH. O método permitiu a variação arbitrária de densidade e do coeficiente de difusão espacial com o raio e é simples o bastante para permitir um rápido exame de diferentes magnitudes e dependência radial do coeficiente de difusão.

Fuchs et al. (1995) discutiram a física básica de um modelo de simulação para LHCD e analisaram questões associadas com a deposição de potência LH – propagação da onda, conversão de modo e corte na geometria toroidal – bem como amortecimento Landau linear e quase-linear. Um modelo de simulação (ACCOMME) foi aplicado a experimentos LHCD operando no Tokamak de Varennes (TdeV). Os perfis e valores de densidade e temperatura necessários como entrada para o ACCOME foram tomados de experimentos. As predições de densidade de corrente e *loop* de voltagem para o ACCOME foram, então, comparados com resultados

experimentais. A possibilidade de experimentos de controle de perfil de corrente foi analisada para o TdeV usando espectros LH compostos para controlar a localização da deposição de potência de RF. Discutiram, também, a relevância dos resultados de controle de perfil de corrente para dispositivos futuros e mostraram um exemplo para parâmetros semelhantes para o ITER.

Heikkinen e Sipilä (1996) investigaram a modificação da geração de corrente de partículas alfa, produzidas por fusão, devido a interação com ondas de radiofrequência (RF) intensamente localizadas. Foi encontrado que a corrente alfa cresce significativamente por uma prolongação de tempo de moderação e um concomitante crescimento da concentração de partículas alfa quentes, bem como por um crescimento da fração de partículas alfa aprisionadas através da elevação da energia perpendicular contida na população alfa magnetizada, com a interação Landau entre as partículas alfas e as ondas LH. Para uma onda suficientemente localizada com densidade de potência de absorção comparável à densidade de potência de produção de partículas alfa local, a onda gerada como resultado da corrente de *bootstrap* domina a geração de corrente alfa baseada em transferência de momento, conduzindo a um perfil de corrente bidirecional. O aumento na corrente cresce com o coeficiente de difusão da onda, inversamente à razão de aspecto e à temperatura de elétron, e é maximizado por ondas de velocidade de fase perpendicular um tanto abaixo da velocidade de nascimento das partículas alfas.

Peeters e Westerhof (1996) usando simulações numéricas, com um código de Fokker-Planck tridimensional, mostram que, para pequenos tokamaks, o transporte de elétrons através das superfícies magnéticas em um nível consistente com transporte anômalo tem uma grande influência na formação do platô quase-linear durante o aquecimento ressonante de cíclotron de elétrons. A redução da absorção de ondas devido a formação do platô é muito menor quando os efeitos de transporte radial são incluídos. Isto é explicado pela natureza local da ressonância no espaço de velocidade e a forte dependência da energia ressonante com a posição radial.

Rosa e Ziebell (1996) estudaram a evolução no tempo do coeficiente de absorção para o modo extraordinário de ondas EC interagindo com uma distribuição de elétrons carregando corrente, em um plasma de tokamak modelado por uma lâmina, generalizando um trabalho anterior que acompanhava a evolução apenas em um ponto do plasma (Rosa; Ziebell, 1993). O coeficiente de absorção foi obtido da solução numérica da relação de dispersão, a qual incorporou efeitos auto-consistentes devido a evolução da função distribuição de elétrons, sob a ação das ondas LH e EC, e colisões. Os resultados mostraram que para a lâmina de plasma inteira o valor assintótico quase-linear do coeficiente de absorção para ondas de EC pode ser uma pequena porcentagem maior que o coeficiente de absorção devido à cauda de elétrons gerada apenas pelas ondas LH, no início das ondas EC, para um ângulo de injeção suficientemente grande dessas ondas relativo a normal ao campo magnético.

Rosa e Ziebell (1997) usaram a teoria quase-linear para investigar a influência de perdas de partículas energéticas no comportamento da absorção EC durante geração de corrente LH e EC. Essa análise levou em conta os efeitos quase-lineares da interação de radiação EC com a cauda LH produzida na presença de colisões e um termo de perda para partículas energéticas. Estudaram o comportamento de diferentes quantidades, como a função distribuição paralela de elétrons e a temperatura perpendicular, para vários valores do tempo de confinamento, que é um importante parâmetro para o modelo do termo de perda. A absorção de ondas EC no modo extraordinário pela cauda de elétrons resultou ser substancialmente reduzida quando o termo de perda é tomado em conta na equação de difusão quase-linear, como comparada ao caso quando essas perdas são desprezadas.

Shkarofsky e Shoucri (1997) aplicaram um código para resolver as equações cinéticas completas de Fokker-Planck em três dimensões na presença de LHCD para estudar numericamente o problema de modelar LHCD, incluindo os efeitos combinados de difusão espacial radial e um campo elétrico. O código usa o operador relativístico de colisões de Beliaev-Budker, e aplica um método de passos

fracionais para a solução numérica da equação de evolução no tempo para a equação de Fokker-Planck. A intenção da simulação foi igualar perfis de imagem por raio X com perfis de densidade de corrente. Um tratamento relativístico preciso da cauda quente auxiliou a fazer-se um estudo desses problemas menos fenomenológicos e mais físicos. Alguns resultados preliminares do Tokamak de Varennes foram analisados a fim de ilustrar o poder do método.

Barbato (1998) sumariza uma série de experimentos LHCD, e discute a eficiência da geração de corrente e sua dependência com a temperatura de elétrons. A importância da propagação de onda em determinar o perfil de potência depositada foi examinada exaustivamente, e foram discutidos os métodos para controlar o perfil de densidade. Esse trabalho também apresenta o modelamento da configuração da bainha central negativa, experimentalmente obtida por LHCD. Uma boa concordância foi encontrada entre os resultados modelados e os encontrados experimentalmente, mostrando que foi atingido um bom grau de entendimento da teoria LHCD.

O sinergismo na geração de corrente entre ondas EC e LH foi testado por Colborn et al. (1998) no tokamak Versator-II através da injeção parcial de ondas EC em uma descarga LHCD. Para descargas com linha média de densidade de elétrons térmicos ( $\langle n_e \rangle \approx 8 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ), as ondas EC fizeram crescer a corrente de plasma e decresceram o *loop* de voltagem. Em contraste, para descargas com  $\langle n_e \rangle \leq 6 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , as ondas EC decrescem a corrente de plasma e crescem o *loop* de voltagem. Esta redução na corrente de plasma por ondas EC a baixa densidade foi geralmente acompanhada por um crescimento no limite de emissão de raio X e um bloqueio ou redução em emissão de plasma de 70 GHz, sugerindo que o confinamento de corrente supratérmica carregando elétrons foi degradado pelas ondas EC. Esse aumento da perda de corrente paralela na cauda de elétrons de alta energia, gerada pelas ondas LH, pode ter sido causado por turbulência magnética induzida por ondas EC, a qual foi observada crescendo durante a injeção de ondas

EC por mais de uma ordem de magnitude no espaço de frequência de 50 a 400 kHz. Os níveis de turbulência observados durante a injeção de ondas EC e a energia paralela média da corrente de elétrons foram altos para descargas de baixa densidade, fazendo a corrente de elétrons mais suscetível a perdas causadas por turbulência magnética. Estimativas simples mostram que a turbulência magnética induzida por EC observada pode explicar a pobre eficiência da geração de corrente EC/LH e sua dependência com a densidade de elétrons.

Rosa e Ziebell (1999) estudaram os efeitos do transporte radial de partículas no coeficiente de absorção de cíclotron de elétrons. Consideraram um plasma de tokamak sob a ação combinada de ondas LH e EC, colisões e transporte espacial de elétrons através das superfícies magnéticas. Seus resultados, encontrados da solução numérica da equação de difusão, indicaram uma significativa modificação no perfil do coeficiente de absorção de cíclotron de elétrons em torno da superfície ressonante quando o transporte é levado em conta relativamente à situação com transporte ausente.

Dumont, Giruzzi e Barbato (2000) desenvolveram um modelo numérico para simulações preditivas de geração de corrente por radiofrequência em plasmas confinados magneticamente. Este incluiu uma equação cinética tridimensional, equações de calor unidimensional e de transporte de corrente, e o acoplamento ressonante entre o espaço de velocidade e a dinâmica do espaço de configuração, através de convenientes equações de propagação de ondas. As propriedades básicas deste sistema numérico não-linear foram investigadas e ilustradas por simulações aplicadas a regimes de *magnetic shear* reverso obtidos por geração de corrente LH e EC para parâmetros típicos do tokamak Tore Supra.

Rosa e Ziebell (2001) estudaram os efeitos de transporte radial de partículas nos perfis de deposição de potência e na geração de correntes por ondas EC e LH. Consideraram um plasma de tokamak sob a ação combinada de ondas LH, ondas EC, colisões e transporte espacial de elétrons através das superfícies

magnéticas, e consideraram situações nas quais a localização dos picos de perfil de deposição de potência para ondas EC e LH não é a mesma. Seus resultados, encontrados por solução numérica da equação de difusão, indicaram uma significativa modificação no perfil de deposição de potência LH e mostraram evidências de um sinergismo não local entre as ondas LH e EC quando o transporte está presente, conduzindo a uma forte melhora da eficiência de geração de corrente por RF.

Esses trabalhos fornecem uma boa idéia do que já foi feito neste tema. Procuramos agora, contribuir com este esforço fazendo um estudo da influência de uma variação radial no coeficiente de difusão espacial sobre a geração de corrente, sem nos preocuparmos com o mecanismo físico causador do transporte radial de partículas. Como se sabe, a difusão espacial pode ser atribuída a diferentes causas, como a turbulência eletrostática ou a turbulência magnética. Consideramos que a análise dos mecanismos geradores da difusão está fora do escopo deste trabalho.

Em nosso estudo usamos a teoria quase-linear para descrever a evolução no tempo da função distribuição de elétrons, em cada ponto da geometria de lâmina proposta, sob a ação de ondas do tipo híbrida inferior, colisões e transporte.

Para o termo de transporte, utilizamos cinco formas totalmente arbitrárias para a dependência de posição do coeficiente de difusão espacial ou de transporte e a situação sem difusão, para verificar a sensibilidade da eficiência da geração de corrente com efeitos de transporte.



# 3 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM PLASMAS

## 3.1 Introdução

Neste capítulo, faremos uma breve revisão das propriedades de plasmas dando ênfase a um tratamento microscópico. Analisaremos o sistema de Vlasov-Maxwell como uma ferramenta para o estudo de propagação de ondas em plasmas. Veremos, então a relação de dispersão de ondas em plasmas em equilíbrio seguindo um procedimento bem conhecido da literatura (Krall; Trivelpiece, 1973) para um plasma uniformemente magnetizado sem campo elétrico, perturbado por pequena amplitude de onda.

## 3.2 Propriedades do plasma

Lembrando a definição de plasma de Chen (1974), temos que *um plasma é um gás quase-neutro de partículas carregadas e neutras, o qual exibe um comportamento coletivo.*

O comportamento de quase-neutralidade pode ser entendido a partir do fato de que se ocorre, por exemplo, uma concentração de cargas em um plasma, o campo gerado por essas cargas atrairá cargas opostas e estas blindarão o campo. Essa blindagem é efetiva em distâncias maiores que o chamado comprimento de Debye  $\lambda_D$  (Chen, 1974). Assim, se a dimensão  $L$  do sistema for muito maior do que  $\lambda_D$ , qualquer surgimento de concentração de carga local ou potencial externo introduzido no sistema, é blindado em uma distância curta comparada com  $L$ .

O comportamento coletivo, por sua vez, deve ser entendido do fato de que partículas carregadas movendo-se geram concentrações de carga positiva ou

negativa, as quais dão origem a campos elétricos. Esse movimento também gera correntes e estas geram campos magnéticos. Estes campos afetam o movimento de outras partículas distantes.

Percebemos, assim, que apesar do plasma constituir-se em um meio eletricamente neutro em média, as interações eletromagnéticas entre as partículas são de grande importância, o que também ocorre se o plasma é totalmente ionizado. Se o plasma também for não relativístico, com  $v/c \rightarrow 0$ , podemos tratar essa interação como puramente eletrostática (Akhiezer et al., 1975).

Devido ao comportamento coletivo, explicado acima, temos que na interação de duas partículas no plasma, deve-se levar em consideração o efeito das outras partículas. Como as partículas, em movimento no plasma, apresentam um caráter dinâmico, essa interação não é trivial.

Existem duas abordagens convencionais para se estudar este caráter dinâmico do movimento de partículas em um plasma, quais sejam: a descrição macroscópica (Termodinâmica, Fluido) e a descrição microscópica (Cinética, Estatística) (Krall; Trivelpiece, 1973).

A abordagem macroscópica é baseada na descrição quantitativa de grandezas tais como a velocidade média e a temperatura, em função da posição e do tempo. Este tratamento somente é válido quando a condição  $\omega\tau \ll 1$  é satisfeita (onde  $\tau$  é o tempo médio entre colisões binárias entre partículas e  $\omega$  é a frequência de oscilação do plasma) ou quando o plasma é suficientemente frio, de modo que a distribuição de velocidades pode ser considerada deltiforme.

A abordagem microscópica é baseada em uma teoria de caráter estatístico, denominada *teoria cinética de plasmas*, onde se trata com a configuração existente no espaço de fases, envolvendo conceitos tais como as distribuições no espaço de velocidades, as correlações entre as partículas e os microcampos produzidos por estas. As quantidades microscópicas são mais difíceis de serem medidas

diretamente, mas freqüentemente participam de uma maneira dominante nas determinações das propriedades macroscópicas do plasma.

A descrição adotada neste trabalho é a microscópica. Nesta abordagem tem-se uma descrição completa do plasma em função das posições  $\vec{x}_i(t)$  e velocidades  $\vec{v}_i(t)$  de cada partícula em função do tempo através da função

$$N_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) = \sum_{1 \leq i \leq N_\alpha} \delta[\vec{x} - \vec{x}_i(t)] \delta[\vec{v} - \vec{v}_i(t)], \quad (3.1)$$

que especifica completamente o sistema microscópico das partículas de espécie  $\alpha$ .

Definindo, convenientemente, uma variável hexa-dimensional  $\vec{X} = (\vec{x}, \vec{v})$  tal que

$$N_\alpha(\vec{X}, t) = \sum_i \delta[\vec{X} - \vec{X}_i(t)]$$

e

$$d\vec{X} = d\vec{x}d\vec{v},$$

temos que

$$\bar{N}_\alpha = \int d\vec{X} N_\alpha(\vec{X}, t)$$

é o número total de partículas do tipo  $\alpha$  no sistema.

Os campos elétricos e magnéticos, devido às partículas, são descritos pelas equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E}^M = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int d^3v N_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}^M = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{E}^M = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^M}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \vec{B}^M = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^M}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int d^3v \vec{v} N_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad (3.5)$$

onde o superescrito M enfatiza que esses campos são microscópicos. As equações de movimento, para cada uma das partículas, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_i}{dt} &= \vec{v}_i, \\ \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \frac{q_i}{m_i} (\vec{E}^M + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^M}{c})'. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O superíndice ' indica que no cálculo das forças atuando na partícula  $i$ , os auto-campos  $\vec{E}^M$  e  $\vec{B}^M$  são omitidos. Note-se que essa equação, embora exata, não é muito prática para a utilização no caso de um grande número de partículas.

Há conservação de partículas no espaço de fase, portanto,  $\frac{dN_\alpha}{dt} = 0$ . Utilizando as Equações (3.6), temos a *equação de Klimontovich-Dupree* (Krall; Trielpiece, 1973) que fornece a evolução temporal de  $N_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)$ .

$$\frac{\partial N_\alpha(\vec{X}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla N_\alpha(\vec{X}, t) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E}^M + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^M}{c})' \cdot \nabla_{\vec{v}} N_\alpha(\vec{X}, t) = 0. \quad (3.7)$$

Como já fora citado, adotamos neste trabalho a descrição microscópica, i.e., estatística, que é bastante adequada para a análise de um sistema de muitos corpos. Desta forma, começemos introduzindo uma expressão que fornece a probabilidade de encontrar a partícula designada por  $\alpha_1$  com coordenadas entre  $\vec{X}_{\alpha_1}$  e  $\vec{X}_{\alpha_1} + d\vec{X}_{\alpha_1}$ , a partícula  $\alpha_2$  com coordenadas entre  $\vec{X}_{\alpha_2}$  e  $\vec{X}_{\alpha_2} + d\vec{X}_{\alpha_2}$ , e assim por diante,

$$F_N(\vec{X}_{\alpha_1}, \dots, \vec{X}_{\alpha_{\bar{N}_\alpha}}; \vec{X}_{\beta_1}, \dots, \vec{X}_{\beta_{\bar{N}_\beta}}; \dots, t) d\vec{X}_{todas}, \quad (3.8)$$

onde

$$d\vec{X}_{todas} = \prod_{i=\alpha, \beta, \dots} d\vec{X}_{i1} \dots d\vec{X}_{i\bar{N}_i}. \quad (3.9)$$

A função  $F_N$  pode ser interpretada como a densidade de probabilidade do sistema no espaço de fase de dimensão  $6N$ . Essa função satisfaz a equação de Liouville para um sistema de  $N$  corpos (Krall; Trivelpiece, 1973),

$$\frac{DF_N}{Dt} \equiv \frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial F_N}{\partial x_i} + \sum_i a_i \frac{\partial F_N}{\partial v_i} = 0, \quad (3.10)$$

correspondendo à conservação de probabilidade.

Como  $F_N$  é uma probabilidade, sua normalização é dada por

$$\int F_N d\vec{X}_{\alpha 1} \dots d\vec{X}_{\alpha \bar{N}_\alpha} d\vec{X}_{\beta 1} \dots d\vec{X}_{\beta \bar{N}_\beta} d\vec{X}_{\gamma 1} \dots d\vec{X}_{\gamma \bar{N}_\gamma} \equiv \int F_N d\vec{X}_{todas} = 1. \quad (3.11)$$

Distribuições reduzidas podem ser obtidas a partir de (3.8), pela integração de  $F_N$  sobre todas as coordenadas a menos das coordenadas de uma, duas, três, ... partículas. As distribuições reduzidas são funções de menos variáveis do que  $F_N$ , e são simples para estudo, contudo, essas distribuições fornecem uma descrição muito menos completa do que a densidade de probabilidade total  $F_N$ . A função distribuição para uma partícula é definida como

$$f_\alpha(\vec{x}_{\alpha 1}, \vec{v}_{\alpha 1}, t) = V \int F_N \frac{d\vec{X}_{todas}}{d\vec{X}_{\alpha 1}}, \quad (3.12)$$

onde  $V$  é o volume do sistema.

Desde que a função  $F_N$  descreve a densidade de probabilidade de cada partícula ter um certo conjunto de coordenadas, podemos definir a média sobre todas as configurações microscópicas possíveis, para qualquer função  $G(N_\alpha, \dots, N_\gamma)$ ,

$$\langle G(N_\alpha, \dots, N_\gamma) \rangle \equiv \int F_N G(N_\alpha, \dots, N_\gamma) d\vec{X}_{todas}. \quad (3.13)$$

A relação entre  $f_\alpha$  e a média de  $N_\alpha$  é

$$\langle N_\alpha(\vec{X}, t) \rangle = \bar{n}_\alpha f_\alpha, \quad (3.14)$$

onde a densidade média é dada por  $\bar{n}_\alpha \equiv N_\alpha/V$ . Podemos obter a equação para a evolução temporal  $f_\alpha$  através da média da equação de Klimontovich-Dupree (3.7).

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{\bar{n}_\alpha m_\alpha} \langle (\vec{E}^M + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^M}{c})' \cdot \nabla_{\vec{v}} N_\alpha \rangle = 0. \quad (3.15)$$

Assim, reescrevendo a equação (3.15) como abaixo, a dependência da equação estatística na interação das partículas fica enfatizada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} [ \langle (\vec{E}^M + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^M}{c})' \cdot \nabla_{\vec{v}} \frac{N_\alpha}{\bar{n}_\alpha} \rangle - (\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha ]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Note-se que o lado direito desta equação desaparece se as partículas forem não interagentes.

A equação (3.16) não é uma equação fechada em função de  $f_\alpha$ , pois ela envolve a média do produto  $\langle N_\alpha N_\beta \rangle$  que representa as interações das partículas e médias de produtos superiores. Isso pode mais facilmente ser visto no tratamento subsequente de forma simplificada.

Para tanto, vamos considerar a aproximação de Coulomb, a qual despreza efeitos de retardamento. Com essa restrição, o estado do sistema a um determinado instante  $t$  é determinado pelas coordenadas e velocidades das partículas carregadas, todas no mesmo instante  $t$ . Essa restrição é válida se a temperatura do plasma é tal que  $v_T \ll c$ , onde  $v_T$  é a velocidade térmica da partícula carregada.

Uma simplificação adicional é a de desprezar os efeitos magnéticos, tomando  $\vec{B}^M = 0$ . Essa simplificação é usada nas seguintes derivações para melhorar

a claridade, sendo os efeitos magnéticos reintroduzidos nas equações finais. Assim,

$$\vec{E}^M = -\nabla\phi^M, \quad \nabla \times \vec{E}^M = 0 \quad (3.17)$$

e  $\nabla \cdot \vec{E}^M = 4\pi \sum_{\alpha} \int N_{\alpha} q_{\alpha} d\vec{v}$  pode ser integrado por técnicas padrões e dar

$$\phi^M(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} \int \frac{N_{\alpha}(\vec{x}', \vec{v}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' d\vec{v}'. \quad (3.18)$$

Assim, a equação (3.16) fica

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_{\alpha} \\ & - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \sum_{\beta} q_{\beta} \bar{n}_{\beta} \int d^3 x' d^3 v' \nabla \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \cdot \nabla_{\vec{v}} (f_{\alpha}(v) f_{\beta}(v')) \\ & = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \sum_{\beta} q_{\beta} \bar{n}_{\beta} \int d^3 x' d^3 v' \nabla \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \cdot \nabla_{\vec{v}} (f_{\alpha} f_{\beta} - f_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde supomos as partículas como descorrelacionadas.

Portanto, temos uma cadeia infinita de equações estatísticas correlacionadas impossível de ser resolvida analiticamente. É então necessário quebrar essa cadeia de equações. Fazemos isto, escrevendo as funções distribuições utilizando expansões de Mayer (Krall; Trivelpiece, 1973),

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= f_{\alpha} f_{\beta} + g_{\alpha\beta}, \\ f_{\alpha\beta\gamma} &= f_{\alpha} f_{\beta} f_{\gamma} + f_{\alpha} g_{\beta\gamma} + f_{\beta} g_{\alpha\gamma} + f_{\gamma} g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta\gamma} \\ & \vdots, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde introduzimos os termos de correlação  $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta\gamma}, \dots$ , que representam correlações entre duas partículas, três partículas, e assim por diante.

Podemos, então, quebrar a cadeia de equações quando desprezamos equações com termos de correlação de ordem mais alta que são menores que uma

certa potência do parâmetro de plasma  $g$ . O parâmetro de plasma  $g$  é definido como a razão entre a média da energia potencial entre duas partículas e a média da energia cinética

$$g = \frac{\langle U \rangle}{\langle K \rangle} = \frac{e^2 / \langle r \rangle}{\langle mv^2 \rangle / 2}, \quad (3.21)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  indica a média. Lembrando que  $\langle r \rangle \approx n^{-1/3}$  e  $\langle mv^2 \rangle \approx T$  (onde  $T$  é a temperatura expressa em unidades de energia), podemos escrever o parâmetro de plasma como

$$g = \frac{e^2 n^{1/3}}{T}. \quad (3.22)$$

Como o comprimento de Debye é dado por

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi n e^2}}, \quad (3.23)$$

podemos reescrever (3.22) como:

$$g = \frac{1}{n \lambda_D^3}. \quad (3.24)$$

Tomaremos, por hipótese, que o plasma seja suficientemente quente e rarefeito de forma que a média da energia potencial entre duas partículas seja muito menor que a média da energia cinética das partículas ( $\langle U \rangle \ll \langle K \rangle$ ). Assim, podemos considerar que o parâmetro de plasma  $g$  é muito pequeno ( $g \ll 1$ ),  $f_\alpha$  seja de ordem unitária, a correlação entre pares  $g_{\alpha\beta}$  da ordem do parâmetro de plasma  $g$  (o que pode ser demonstrado no caso de equilíbrio termodinâmico – Krall; Trivelpiece, 1973), a correlação de três partículas  $g_{\alpha\beta\gamma}$  da ordem de  $g^2$ , e assim por diante.

$$\begin{aligned} f_\alpha &\simeq O(1), \\ g_{\alpha\beta} &\simeq O(g), \\ g_{\alpha\beta\gamma} &\simeq O(g^2), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.25)$$



A partir dessas expansões para ( $g \ll 1$ ), podemos desprezar todos os termos de ordem  $g$ , obtendo a equação de ordem zero da cadeia de equações cinéticas, conhecida como *equação de Vlasov* ou *equação de Boltzmann sem colisões*. Mantendo os termos de ordem  $g$ , obtemos a equação cinética de primeira ordem. Observe-se que as nomenclaturas de "ordem zero" e "primeira ordem" se referem às ordens de grandeza do parâmetro de plasma  $g$  que foram consideradas na cadeia de equações cinéticas.

### 3.3 Equação de Vlasov

A equação de Vlasov juntamente com as equações de Maxwell para os campos médios

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0, \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d\vec{v} + 4\pi \rho_{ext}, \quad (3.27)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \vec{v} f_\alpha d\vec{v} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{ext}, \quad (3.28)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.30)$$

descrevem o estado de plasma estacionário, ondas em plasma, instabilidades e outros aspectos da dinâmica de plasmas, para escalas de tempo curto ( $\tau_{coletivo} \ll \tau_{colisão}$ ) em termos da função distribuição  $f_\alpha(\vec{X}, t)$ . Desde que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dependem da função de distribuição, o sistema de equações de Vlasov-Maxwell é não linear e conseqüentemente difícil de ser resolvido. Usaremos, então um procedimento aproximado, que é válido no caso de perturbações de um determinado estado de equilíbrio. Este procedimento consiste em linearizar o sistema de equações de Vlasov-Maxwell, escrevendo-se a função distribuição e os campos em termos de um valor de equilíbrio

mais uma perturbação i.e.,

$$\begin{aligned} f_\alpha &= f_{\alpha 0} + \epsilon f_{\alpha 1}, \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 + \epsilon \vec{E}_1, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \epsilon \vec{B}_1, \end{aligned} \quad (3.31)$$

com  $\epsilon \ll 1$ .

Substitui-se, essas quantidades, no sistema de Vlasov-Maxwell e desprezando os termos não lineares, de ordem  $\epsilon^2$ , temos as equações perturbadas linearizadas. O estado de equilíbrio do plasma é, por hipótese, conhecido e deve satisfazer o sistema de equações de Vlasov-Maxwell em ordem zero; i.e.,

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_{\alpha 0} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E}_0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0} = 0, \quad (3.32)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = 4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 0} d\vec{v} + 4\pi \rho_{0,ext}, \quad (3.33)$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \vec{v} f_{\alpha 0} d\vec{v} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{0,ext}, \quad (3.34)$$

$$\nabla \times \vec{E}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}, \quad (3.35)$$

Subtraindo-se as equações de equilíbrio das equações perturbadas linearizadas, tem-se as equações de Vlasov-Maxwell linearizadas para a função distribuição perturbada  $f_{\alpha 1}$  e os campos perturbados  $\vec{E}_1$  e  $\vec{B}_1$ .

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E}_0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 1} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E}_1 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_1}{c}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0}, \quad (3.36)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = 4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 1} d\vec{v}, \quad (3.37)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \vec{v} f_{\alpha 1} d\vec{v}, \quad (3.38)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}. \quad (3.39)$$

Este conjunto de equações linearizadas para as quantidades perturbadas pode ser resolvido por métodos convencionais para investigar propriedades do plasma para intervalos de tempo menores do que tempos de colisão binárias. Uma aplicação dessas equações linearizadas consiste na investigação de propriedades de ondas de plasma de pequena amplitude cujos períodos de oscilação são muito menores que o tempo de colisões binárias. Nesse problema, a distribuição  $f_{\alpha 0}$  e os campos auto-consistentes,  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$ , representam o estado estacionário do plasma, e a distribuição  $f_{\alpha 1}$  representa o desenvolvimento da perturbação inicial. Como na teoria de fluido de plasmas, pequenas perturbações no estado estacionário desenvolvem ondas no plasma, assim, em muitos casos  $f_{\alpha 1}(\vec{X}, t)$  também irá se desenvolver como onda. As propriedades da onda de plasma dependem do estado de equilíbrio do plasma e, portanto, das grandezas  $f_{\alpha 0}$ ,  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$ .

### 3.4 Relação de dispersão de ondas em um plasma em equilíbrio

Como vimos na seção anterior, a equação de Vlasov linearizada para um plasma em equilíbrio é uma equação diferencial dada pela eq. (3.36), que será repetida abaixo.

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \vec{E}_0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 1} = - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \vec{E}_1 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0}. \quad (3.40)$$

Vamos resolver essa equação diferencial pelo método das características, conhecido também como "integração sobre órbitas não perturbadas" (Krall; Trivelpiece, 1973). O procedimento consiste em considerar que a função  $f_{\alpha 1}[\vec{x}'(t'), \vec{v}'(t'), t']$  satisfaz a equação

$$\frac{df_{\alpha 1}}{dt'} \equiv \frac{\partial f_{\alpha 1}(\vec{x}', \vec{v}', t')}{\partial t'} + \frac{d\vec{x}'}{dt'} \cdot \nabla_{\vec{x}'} f_{\alpha 1}(\vec{x}', \vec{v}', t') + \frac{d\vec{v}'}{dt'} \cdot \nabla_{\vec{v}'} f_{\alpha 1}(\vec{x}', \vec{v}', t'), \quad (3.41)$$

utilizando-se as equações de movimento das órbitas não perturbadas,

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \vec{v}', \quad (3.42)$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\vec{E}_0(\vec{x}', t') + \frac{\vec{v}' \times \vec{B}_0(\vec{x}', t')}{c}]. \quad (3.43)$$

Toma-se as seguintes condições para o contorno de órbitas não perturbadas,

$$\vec{x}'(t' = t) = \vec{x}, \quad (3.44)$$

$$\vec{v}'(t' = t) = \vec{v}, \quad (3.45)$$

que indicam que para  $t' = t$ ,

$$f_{\alpha 1}(\vec{x}', \vec{v}', t') = f_{\alpha 1}(\vec{x}, \vec{v}, t). \quad (3.46)$$

Tem-se, então a equação

$$\frac{df_{\alpha 1}}{dt'} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E}_1 + \frac{\vec{v}' \times \vec{B}_1}{c}) \cdot \nabla_{\vec{v}'} f_{\alpha 0}. \quad (3.47)$$

Integrando-se diretamente a eq. (3.47) de  $t' = -\infty$  a  $t' = t$  e supondo que a solução seja do tipo ondas planas, i.e., fazendo-se a transformada de Fourier-Laplace,

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1} &= f_{\alpha, \vec{k}, \omega} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)], \\ E_{\alpha 1} &= E_{\vec{k}, \omega} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)], \\ B_{\alpha 1} &= B_{\vec{k}, \omega} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)], \end{aligned} \quad (3.48)$$

tem-se

$$f_{\alpha, \vec{k}, \omega} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^0 (\vec{E}_{\vec{k}, \omega} + \frac{\vec{v}' \times \vec{B}_{\vec{k}, \omega}}{c}) \cdot \nabla_{\vec{v}'} f_{\alpha 0}(\vec{v}') \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{X} - \omega \tau)] d\tau \quad (3.49)$$

para valores positivos da parte imaginária de  $\omega$ ,  $\Im(\omega) > 0$ , onde  $\tau = (t' - t)$ ,  $\vec{X} = (\vec{x}' - \vec{x})$  e  $\vec{E}_{\vec{k}, \omega}$  e  $\vec{B}_{\vec{k}, \omega}$  são as amplitudes vetoriais dos campos, constantes no

espaço e no tempo. A solução  $f_{\alpha, \vec{k}}$  para  $\Im(\omega) < 0$  é obtida pela continuação analítica da eq. (3.49) acima.

As órbitas não perturbadas são definidas pelos campos de equilíbrio. Vamos considerar aqui o equilíbrio como sendo de um plasma uniformemente magnetizado sem campo elétrico ( $\vec{E}_0 = 0$  e  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_3$ ), perturbado por uma onda de pequena amplitude. Assim, temos que as órbitas não perturbadas descrevem trajetórias helicoidais com frequência de cíclotron  $\omega_{c\alpha} = \frac{q_\alpha B_0}{m_\alpha c}$ .

Com a simetria do problema podemos fazer a restrição de que a função distribuição inicial  $f_{\alpha 0}$  tem simetria axial com o campo magnético –  $f_{\alpha 0} = \hat{f}_{\alpha 0}(v_\perp^2, v_\parallel)$ . Definimos sem perda de generalidade o sistema de coordenadas tal que o vetor de onda  $\vec{k}$  é tal que  $k_x = k_\perp$ ,  $k_y = 0$  e  $k_z = k_\parallel$ .

As órbitas podem, portanto, serem expressas em coordenadas cilíndricas no espaço de fase ( $v_x = v_\perp \cos \phi$ ,  $v_y = v_\perp \sin \phi$  e  $v_z = v_\parallel$ ):

$$\begin{aligned} v'_x &= v_\perp \cos(\phi - \omega_c \tau), \\ v'_y &= v_\perp \sin(\phi - \omega_c \tau), \\ v'_z &= v_\parallel, \\ x' &= x - \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(\phi - \omega_c \tau) + \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(\phi), \\ y' &= y + \frac{v_\perp}{\omega_c} \cos(\phi - \omega_c \tau) - \frac{v_\perp}{\omega_c} \cos(\phi), \\ z' &= v_\parallel \tau + z, \end{aligned} \tag{3.50}$$

onde as constantes de integração são escolhidas tal que, para  $\tau \rightarrow 0$ ,  $v' \rightarrow v$  e  $x' \rightarrow x$ .

Para reescrever a equação (3.49) notemos que:

- $i\vec{k} \times \hat{E}_1 = i\frac{\omega}{c} \hat{B}_1$ ,
- $\nabla_{\vec{v}} f_0 = 2(\vec{v} - v_\parallel \vec{e}_3) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} + 2v_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel^2} \vec{e}_3$ ,

- $v_{\perp}^2$  e  $v_{\parallel}$  são constantes de movimento, então, os termos  $\partial f_0/\partial v_{\perp}^2$  e  $\partial f_0/\partial v_{\parallel}^2$  podem ser removidos da integral,
- os termos restantes na integral são da forma  $\int_{-\infty}^0 (v'_x, v'_y, 1) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{X} - \omega\tau)] d\tau$ , onde  $v'_x, v'_y$  e  $\vec{x}'$  (de  $\vec{X} = (\vec{x}' - \vec{x})$ ) são dados pelas equações da órbita (3.50).

Usando a identidade

$$\exp\left[i\frac{k_{\perp}v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\phi - \omega_c\tau)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{k_{\perp}v_{\perp}}{\omega_c}\right) \exp[in(\phi - \omega_c\tau)] \quad (3.51)$$

e suas derivadas para cálculo da integral em (3.49) ( $J_n$  função de Bessel ordinária de primeira espécie) obtemos então

$$f_{\alpha, \vec{k}, \omega} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \sum_{n,l} \left[ \frac{2Zv_{\parallel} J_l\left(\frac{k_{\perp}v_{\perp}}{\omega_{c\alpha}}\right) + Xv_{\perp}(J_{l+1} + J_{l-1}) - iYv_{\perp}(J_{l+1} + J_{l-1})}{i(\omega - l\omega_c - k_{\parallel}v_{\parallel})} \right] \times J_n\left(\frac{k_{\perp}v_{\perp}}{\omega_{c\alpha}}\right) \exp[i(n-l)\phi]. \quad (3.52)$$

onde

$$\begin{aligned} X &= E_x \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}}{\omega} (k_{\parallel} E_x - k_{\perp} E_z) \left( \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{v_{\perp}^2} \right) \\ Y &= E_y \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}}{\omega} k_{\parallel} E_y \left( \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{v_{\perp}^2} \right) \\ Z &= E_z \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

A corrente perturbada  $\hat{J}_{\vec{k}, \omega}$  pode ser calculada de  $f_{\alpha, \vec{k}, \omega}$  e substituída nas equações de Maxwell. O resultado é:

$$-\vec{k} \times \vec{k} \times \hat{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{E}_1 + \frac{i\omega}{c^2} 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int_L \vec{v} f_{\alpha, \vec{k}, \omega} d^3v, \quad (3.54)$$

onde  $L$  é o contorno de Landau. Usando (3.52) em (3.54), temos, então a seguinte equação analítica

$$[\vec{k}\vec{k} + (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \overset{\leftrightarrow}{1} + \frac{4\pi i\omega}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\sigma}_{\vec{k},\omega}] \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega} = 0, \quad (3.55)$$

onde  $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_{\vec{k},\omega}$  representa o tensor condutividade do plasma. Omitindo-se detalhes dos cálculos, podemos expressar a forma geral do tensor condutividade como (Krall; Trivelpiece, 1973)

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_{\vec{k},\omega} = -\frac{i}{4\pi} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{v} v_{\perp} \frac{\Phi(f_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} \vec{\Pi}_{in}^* \vec{\Pi}_{jn} + \delta_{iz} \delta_{jz} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \int d\vec{v} v_{\parallel} L(f_{\alpha 0}), \quad (3.56)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi(f_{\alpha 0}) &\equiv (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}}, \\ L(f_{\alpha 0}) &\equiv \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}}, \\ D_{n\alpha} &\equiv \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{c\alpha}, \\ b_{\alpha} &\equiv \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{c\alpha}}, \\ \vec{\Pi}_{xn} &\equiv \frac{n J_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}}, \\ \vec{\Pi}_{yn} &\equiv i J'_n(b_{\alpha}), \\ \vec{\Pi}_{zn} &\equiv \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(b_{\alpha}), \\ \omega_{p\alpha}^2 &\equiv \frac{4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

sendo que  $\omega_{p\alpha}$  representa a frequência angular de plasma para partículas do tipo  $\alpha$ .

A equação (3.55) representa um sistema homogêneo que só possui solução não trivial para valores em que o determinante dos coeficientes for nulo,

$$|\overset{\leftrightarrow}{\Lambda}| = 0, \quad (3.58)$$

sendo essa condição conhecida como relação de dispersão, onde

$$\begin{aligned}\vec{\Lambda} &= \vec{k}\vec{k} - k^2 \mathbf{1} + \frac{\omega^2}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}, \\ \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} &= \mathbf{1} + \frac{4i\pi}{\omega} \overset{\leftrightarrow}{\sigma}_{\vec{k},\omega},\end{aligned}$$

onde  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$  é conhecido como tensor dielétrico do plasma. Usando (3.56), obtemos (Krall; Trivelpiece, 1973):

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{v} v_{\perp} \frac{\Phi(f_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} \vec{\Pi}_{in}^* \vec{\Pi}_{jn} + \delta_{iz} \delta_{jz} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \int d\vec{v} v_{\parallel} L(f_{\alpha 0}). \quad (3.59)$$

Podemos também escrever a equação (3.58) sob outra forma, de modo que a solução da relação de dispersão é obtida a partir do cálculo da seguinte equação analítica:

$$\det[\Lambda_{ij}] = \det[N_i N_j - N^2 \delta_{ij} + \epsilon_{ij}] = 0, \quad (3.60)$$

onde  $N_i$  é o componente  $i$  do vetor índice de refração  $\vec{N} = c\vec{k}/\omega$  e  $N^2 = \sum_{i=1}^3 N_i^2$  é o índice de refração ao quadrado.

### 3.5 Relação de dispersão de plasma frio

Em nosso trabalho, a relação de dispersão de ondas do tipo híbrida inferior será obtida considerando-se o plasma frio e magnetizado. Essa relação, por sua vez, é obtida fazendo o limite  $T_{\alpha} \rightarrow 0$  na (3.60). Nesse limite, a função distribuição é deltiforme, então podemos usar a aproximação de pequeno raio de Larmor nas funções de Bessel:

$$\lim_{T_{\alpha} \rightarrow 0} J_n(b_{\alpha}) \rightarrow \frac{1}{n!} \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{2\omega_{c\alpha}} \right)^2. \quad (3.61)$$



Portanto, (Krall; Trivelpiece, 1973),

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_1 &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{1 - Y_{\alpha}^2}, \\ \epsilon_{yx} = -\epsilon_{xy} &= i\epsilon_2 = i \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}Y_{\alpha}}{1 - Y_{\alpha}^2}, \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_3 &= 1 - \sum_{\alpha} X_{\alpha},\end{aligned}\tag{3.62}$$

onde  $X_{\alpha} = (\omega_{p\alpha}/\omega)^2$  e  $Y_{\alpha} = \omega_{c\alpha}/\omega$ .

Resolvendo (3.60) temos uma equação biquadrática em  $N_{\perp}$ ,

$$AN_{\perp}^4 + BN_{\perp}^2 + C = 0,\tag{3.63}$$

onde

$$\begin{aligned}A &= \epsilon_1, \\ B &= \epsilon_2^2 - (\epsilon_1 - N_{\parallel}^2)(\epsilon_1 + \epsilon_3), \\ C &= \epsilon_3[(\epsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2 - \epsilon_2^2].\end{aligned}\tag{3.64}$$

A equação (3.63) admite duas soluções para o quadrado do índice de refração perpendicular:

$$N_{\perp}^2(\pm) = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A},\tag{3.65}$$

determinando dois modos de propagação da onda.

Ocorre ressonância da onda com o plasma quando  $N_{\perp}^2(\pm) \rightarrow \pm\infty$ , dependendo de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , i.e., a ressonância ocorre quando  $A \rightarrow 0$ .

## 4 TEORIA QUASE-LINEAR

### 4.1 Introdução

No capítulo anterior, fizemos uma revisão da teoria de oscilação linear para ondas em plasmas. Escrevemos a função distribuição e os campos em termos do valor de equilíbrio mais uma perturbação e obtivemos assim as equações de Vlasov-Maxwell de ordem zero e primeira ordem. Através dessas últimas equações determinamos a relação de dispersão para um plasma em equilíbrio. Durante este procedimento consideramos que a parte não oscilante (valor de equilíbrio) não estava conectada com a parte oscilante do plasma (perturbação). Entretanto, a oscilação do plasma afeta a parte de equilíbrio da função distribuição e este efeito aumenta com o crescimento da amplitude da oscilação. Para analisar fenômenos onde este efeito é considerado, podemos usar a *Teoria Quase-Linear* ou *Teoria de Turbulência Fraca*. Este será o foco deste capítulo.

### 4.2 Teoria quase-linear de um plasma não magnetizado

Quando estudamos oscilações de pequena amplitude (lineares) em um plasma dividimos a função distribuição em dois termos: uma parte não oscilante (a função distribuição inicial) e uma pequena correção a qual oscila com a frequência da oscilação existente no plasma. Assumimos, então, que a parte não oscilante não está conectada com as oscilações ocorrendo no plasma. Entretanto, na realidade, as oscilações do plasma afetam a parte não oscilante da função distribuição e esse efeito cresce com o crescimento da amplitude das oscilações.

Quando a amplitude de oscilação cresce até certo ponto, pode ser violada uma propriedade básica das oscilações lineares – a independência da propagação das oscilações com diferentes vetores de onda e frequências (princípio da superposição). Isso ocorre quando os processos envolvendo interações entre diferentes oscilações começam a dominar.

Estudaremos aqui esses processos não lineares. O caso mais simples de processos não lineares, que abordaremos inicialmente, é a ação da oscilação do plasma na parte não oscilante da função distribuição. Assumiremos que a amplitude de oscilação seja tão pequena que possamos desprezar as interações entre ondas e a violação do princípio de superposição.

Como a amplitude das oscilações é pequena por hipótese, podemos, na aproximação quase-linear, considerar a influência da oscilação do plasma somente na distribuição das partículas ressonantes, i.e., para partículas para os quais o componente de velocidade  $v_{\parallel}$  ao longo da direção de propagação é próxima à velocidade de fase das ondas,

$$v_{\parallel} \approx \frac{\omega(\vec{k})}{k},$$

onde  $\omega(\vec{k})$  é a frequência da oscilação da onda com vetor de onda  $\vec{k}$ . Essas partículas ressonantes são importantes, tanto para o amortecimento, quanto para o aumento da oscilação do plasma. As partículas não ressonantes praticamente não trocam energia com a onda, e sua distribuição não é afetada pela oscilação do plasma.

Para obter a equação básica da teoria quase-linear, seguiremos os procedimentos adotados na literatura (Akhiezer et al., 1975; Tozawa, 1998), retornando à equação cinética (3.26) para a função distribuição  $f_{\alpha} = f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t)$  com um campo auto-consistente  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ ,

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\vec{E} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha}) = 0, \quad (4.1)$$

sendo o plasma constituído de partículas do tipo  $\alpha$  com carga  $q_\alpha$  e massa  $m_\alpha$  e onde assumimos por simplicidade oscilações eletrostáticas, i.e.,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi, \\ \nabla^2\varphi &= -4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \left( \int f_{\alpha} d\vec{v} - n_0 \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Desde que assumimos por hipótese que o princípio de superposição é válido para o campo elétrico, podemos escrever este campo como um pacote de ondas,

$$\vec{E} = \sum_{\vec{k}, \omega} \vec{E}_{\vec{k}, \omega}(t) \exp i[\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})t], \quad (4.3)$$

onde a frequência de oscilação  $\omega(\vec{k})$  é determinada pela relação de dispersão da teoria linear (Seção. 3.4), enquanto  $\vec{E}_{\vec{k}}$  é a amplitude complexa da oscilação, a qual varia lentamente com o tempo. Essa variação pode ser causada pelo amortecimento Landau ou por um aumento associado com a natureza não-monotônica da mudança da função distribuição inicial. Em todo caso, vamos requerer que a taxa de amortecimento ou de aumento das oscilações  $\gamma(\vec{k})$  seja suficientemente pequena.

$$|\gamma(\vec{k})| \ll \omega(\vec{k}), \quad |\gamma(\vec{k})| \ll kv_T,$$

onde  $v_T$  é a velocidade térmica média das partículas. Além de supor que  $|\gamma|$  é pequeno, fazemos mais duas hipóteses sobre a natureza do pacote de onda (4.3). Primeiramente, vamos supor que as fases  $\delta(\vec{k})$  de amplitudes complexas diferentes  $\vec{E}_{\vec{k}}$  são independentes e aleatórias. Isso significa que a média sobre todo o espaço de fase de cada amplitude desaparece,

$$\langle \vec{E}_{\vec{k}, \omega}(t) \rangle = 0,$$

onde o sinal  $\langle \dots \rangle$  indica média sobre  $\delta(\vec{k})$ . Além disso, segue dessa hipótese que

$$\langle (\vec{E}_{\vec{k},\omega}(t) \cdot \vec{E}_{\vec{k}',\omega'}^*(t)) \rangle = |\vec{E}_{\vec{k},\omega}(t)|^2 \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\omega\omega'}.$$

Uma formulação similar é válida para as amplitudes do potencial  $\varphi_{\vec{k}}(t)$ :

$$\langle \varphi_{\vec{k},\omega}(t) \rangle = 0, \quad \langle (\varphi_{\vec{k},\omega}(t) \cdot \varphi_{\vec{k}',\omega'}^*(t)) \rangle = |\varphi_{\vec{k},\omega}(t)|^2 \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\omega\omega'}.$$

A segunda hipótese é que o pacote de onda (4.3) seja suficientemente estreito (no espaço de fase  $\vec{k}$ ) de modo que o número de partículas ressonantes, interagindo com o pacote de onda, é consideravelmente menor que o número total de partículas

$$\int_{\Delta v_{\parallel}} dv_{\parallel} \int d^2 v_{\perp} f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) \ll n_0,$$

onde  $\Delta v_{\parallel} = \Delta(\omega(\vec{k})/k)$  é a região da velocidade de fase correspondendo à região de  $\Delta\vec{k}$  no pacote de onda (4.3). Essas suposições são feitas a fim de que possamos supor que a frequência  $\omega(\vec{k})$  é formalmente determinada pela mesma relação de dispersão como na teoria linear (Cap. 3).

Agora vamos substituir o campo (4.3) na equação cinética (3.26) e faremos a média sobre todas as fases. Separaremos, então, a função distribuição, como na teoria linear, em termos de uma função distribuição do plasma de fundo,  $f_0$ , que é a parte não oscilante,

$$f_{\alpha 0} \equiv \langle f_{\alpha 1} \rangle, \quad (4.4)$$

e a parte oscilante  $f_{\alpha 1}$ ,

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}. \quad (4.5)$$

Como  $\langle f_{\alpha 1} \rangle = 0$ , teremos a seguinte equação para  $f_{\alpha 0}$ :

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_{\alpha 0} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \langle (\vec{E} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 1}) \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Já  $f_{\alpha 1}$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\vec{E} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0}) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\vec{E} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 1}) - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \langle (\vec{E} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 1}) \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Nessa equação, podemos desprezar os dois últimos termos que são responsáveis pela interação não linear entre ondas, pois a aproximação quase-linear não leva em conta esses efeitos não lineares. A equação (4.7) assume, portanto, a seguinte forma

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\vec{E} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0}) = 0. \quad (4.8)$$

Considerando por hipótese, que o plasma seja uniforme, de forma que a função distribuição de fundo seja independente das coordenadas de posição, a equação (4.6) fica como

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \langle (\vec{E} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 1}) \rangle = 0. \quad (4.9)$$

O problema agora consiste em expressar  $f_{\alpha 1}$  em função de  $f_{\alpha 0}$  na equação (4.9),  $f_{\alpha 1} = f(f_{\alpha 0})$ . Substituindo essa expressão em (4.9) obtemos uma equação contendo somente  $f_{\alpha 0}$ . Apresentaremos agora essa derivação que torna a equação (4.9) expressa como segue,

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j}, \quad (4.10)$$

onde  $D_{ij} = D_{ij}(\vec{v}, t)$  é uma função de velocidade e de tempo. A equação (4.10) tem a forma de uma equação de difusão no espaço de velocidade e cada componente  $D_{ij}$  desempenha o papel de um coeficiente de difusão no espaço de velocidade.

Nosso problema consiste, então, em encontrar o coeficiente de difusão, sob as hipóteses mencionadas até agora acerca do pacote de onda (4.3). Para tanto,

expandiremos a função  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  em série de Fourier-Laplace:

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) = \sum_{\vec{k}, \omega} f_{\vec{k}, \omega}(\vec{v}, t) \exp\{i[\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})t]\}, \quad (4.11)$$

onde a amplitude da função  $f_{\vec{k}, \omega}(\vec{v}, t)$  varia lentamente com o tempo. Assim, a equação (4.8) toma a forma

$$\frac{\partial f_{\vec{k}, \omega}}{\partial t} + i[(\vec{k} \cdot \vec{v}) - \omega(\vec{k})]f_{\vec{k}, \omega} = i \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \varphi_{\vec{k}, \omega}(t) (\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0}). \quad (4.12)$$

Integrando essa equação e supondo que seja nula a perturbação inicial da função distribuição  $f_{\vec{x}}(\vec{v}, t)$ , temos

$$f_{\vec{k}}(\vec{v}, t) = i \frac{q_\alpha}{m_\alpha} e^{i[\omega(\vec{k}) - (\vec{k} \cdot \vec{v})]t} \int_0^t dt' e^{i[\omega(\vec{k}) - (\vec{k} \cdot \vec{v})]t'} \varphi_{\vec{k}, \omega}(t') (\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0}). \quad (4.13)$$

Depois de substituir essa expressão na equação de Poisson, obtemos

$$\varphi_{\vec{k}, \omega}(t) = \sum_{\alpha} \frac{4\pi i e^2}{m_\alpha k} \int_0^t dt' I_\alpha(t, t') \varphi_{\vec{k}, \omega}(t'), \quad (4.14)$$

onde

$$I_\alpha(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \exp\{i[kv_{\parallel} - \omega(\vec{k})](t' - t)\} \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, t')}{\partial v_{\parallel}}, \quad (4.15)$$

e

$$f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, t') = \int d^2 v_{\perp} f_{\alpha 0}(\vec{v}, t'). \quad (4.16)$$

A principal contribuição da integração em (4.14), para valores suficientemente grandes de  $t$  ( $\omega t \gg 1$ ), vem dos valores de  $t'$  próximos de  $t$ :

$$t \leq t' \leq t + \Delta t, \quad \Delta t \ll t.$$

De fato, a contribuição das partículas não ressonantes na integral  $I_\alpha(t, t')$  para valores de  $t'$  não próximos de  $t$  ( $|\omega - kv_{\parallel}|(t - t') \gg 1$ ) será pequena em razão da oscilação

rápida do integrando. A contribuição das partículas ressonantes para  $t'$  não próximo de  $t$ , será proporcional à região  $\Delta v_{\parallel}$  ocupada por essas partículas no espaço  $v_{\parallel}$  e pode ser desprezada, pois o número de partículas ressonantes é pequeno. Portanto, precisamos considerar somente valores de  $t'$  próximos de  $t$  para a integração em  $t'$ .

Escolhendo o intervalo de  $\Delta t$  em  $t'$  tal que

$$\omega(\vec{k})\Delta t \gg 1, kv_{T\alpha}\Delta t \gg 1, |\gamma(\vec{k})|\Delta t \ll 1, \Delta t \ll \tau(v_{\parallel}), \quad (4.17)$$

onde

$$\gamma(\vec{k}) \equiv \frac{\partial}{\partial t'} \ln \varphi_{\vec{k},\omega}(t'), \frac{1}{\tau(v_{\parallel})} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, t)}{\partial v_{\parallel}}, \quad (4.18)$$

temos

$$\begin{aligned} & \int_{t-\Delta t}^t dt' \varphi(t') \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, t')}{\partial v_{\parallel}} \exp\{i[kv_{\parallel} - \omega(\vec{k})](t' - t)\} \\ \approx & \varphi(t) \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, t')}{\partial v_{\parallel}} \int_{t-\Delta t}^t dt' \exp\{i[kv_{\parallel} - \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k}) - \frac{i}{\tau(v_{\parallel})}](t' - t)\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usando a aproximação acima, temos

$$\begin{aligned} & \int_{t-\Delta t}^t dt' \exp\{i[kv_{\parallel} - \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k}) - \frac{i}{\tau(v_{\parallel})}](t' - t)\} \\ = & \frac{-i}{kv_{\parallel} - \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k}) - \frac{i}{\tau(v_{\parallel})}} [1 - \exp\{-i[kv_{\parallel} - \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k}) - \frac{i}{\tau(v_{\parallel})}]\Delta t\}] \\ \approx & P \frac{-i}{kv_{\parallel} - \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k}) - \frac{i}{\tau(v_{\parallel})}} + \pi \delta[\omega(\vec{k}) - kv_{\parallel}], \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde o símbolo  $P$  representa o valor principal. Procedendo com a equação (4.14)

temos

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k} P \int \frac{1}{kv_{\parallel} - \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k}) - \frac{i}{\tau(v_{\parallel})}} \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, t)}{\partial v_{\parallel}} dv_{\parallel} \\ - \sum_{\alpha} i\pi \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k^2} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \Big|_{v_{\parallel}=\omega(\vec{k})/k} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$



Como a quantidade  $\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\parallel}$  é praticamente independente do tempo, a contribuição principal da integração em  $v_{\parallel}$  vem das partículas não ressonantes, de modo que podemos desprezar a quantidade  $1/\tau(v_{\parallel})$  da equação (4.21). A equação que obtemos é a mesma que a equação de dispersão para oscilação longitudinal em plasmas não magnetizados.

Com as hipóteses feitas ( $|\gamma| \ll \omega$ ,  $|\gamma| \ll kv_{T\alpha}$ ) podemos usar a relação de dispersão da teoria linear, substituindo a função distribuição inicial pela função distribuição de fundo.

Substituindo  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  e  $f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t)$  no lado direito da equação (4.9) pelas suas representações de Fourier-Laplace e usando a equação (4.13), podemos escrever a (4.9) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} [\nabla_{\vec{v}} \cdot \langle \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \vec{k} \varphi_{\vec{k}, \omega}^*(t) \int_0^t dt' \exp\{i[(\vec{k} \cdot \vec{v}) - \omega(\vec{k}')] (t' - t)\} \\ \times \varphi_{\vec{k}', \omega}(\vec{k}' \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0}(\vec{v}, t)) \rangle]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Fazendo-se, então, a média sobre todas as fases e mudando a soma para uma integral, temos

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}(\vec{v}, t)}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} J_i, \quad (4.23)$$

onde

$$\begin{aligned} J_i(\vec{v}, t) = \sum_j \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \int d^2 k_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} k_i k_j \varphi_{\vec{k}, \omega}^*(t) \\ \times \int_0^t dt' \exp\{i[k_{\parallel} v - \omega(\vec{k})] (t' - t)\} \varphi_{\vec{k}, \omega}(t') \frac{\partial f_{\alpha 0}(\vec{v}, t)}{\partial v_j}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde  $k_{\perp}$  e  $k_{\parallel}$  são os componentes do vetor de onda perpendicular e paralelo, respectivamente, à velocidade de partícula  $\vec{v}$ .

A principal contribuição da integral (4.24) vem somente dos valores de  $t'$  próximos de  $t$ . De fato, se  $t'$  não for próximo de  $t$ , a principal contribuição na integração em  $k_{\parallel}$  vem dos valores de  $k_{\parallel}$  próximos de  $k_0$ , onde o vetor de onda  $k_{\parallel} = k_0$  é determinado pela equação  $k_{\parallel}v = \omega(\vec{k})$ . Expandindo em série a expressão da exponencial em (4.24), em torno de  $k_{\parallel} = k_0$ , encontramos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} k_i k_j \varphi_{\vec{k},\omega}^*(t) \varphi_{\vec{k},\omega}(t') \exp\{i[k_{\parallel}v - \omega(\vec{k})](t' - t)\} \\ & \approx \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k_{\parallel} k_i k_j \varphi_{\vec{k},\omega}^*(t) \varphi_{\vec{k},\omega}(t') \exp\left[i\left(v - \frac{\partial\omega(\vec{k})}{\partial k_{\parallel}}\Big|_{k_{\parallel}=k_0}\right)\Delta k_{\parallel}(t' - t)\right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como  $t'$  não é próximo de  $t$  a integral é desprezivelmente pequena devido a oscilação rápida do integrando ( $|v - \partial\omega(\vec{k})/\partial k_{\parallel}|_{k_{\parallel}=k_0}\Delta k_{\parallel}(t' - t) \gg 1$ ).

Falta ainda calcular a integral em  $t'$  em (4.24) quando  $t' \approx t$ . Escolhendo para o caso em que a região de  $\Delta t$  satisfaz a condição (4.17) podemos, na integral (4.20), colocar

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \varphi_{\vec{k},\omega}(t') \frac{\partial f_{\alpha 0}(\vec{v}, t')}{\partial v_j} \exp\{i[k_{\parallel}v - \omega(\vec{k})](t' - t)\} \\ & \approx \varphi_{\vec{k},\omega}(t) \frac{\partial f_{\alpha 0}(\vec{v}, t)}{\partial v_j} \left( P \frac{-i}{(\vec{k} \cdot \vec{v}) - \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k}) - i/\tau(\vec{k})} + \pi \delta[\omega(\vec{k}) - (\vec{k} \cdot \vec{v})] \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde

$$\frac{1}{\tau(\vec{v})} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial f_{\alpha 0}(\vec{v}, t)}{\partial v_j}. \quad (4.27)$$

Substitui-se essa expressão no lado direito da equação (4.24) e usa-se o fato que o valor principal da integral desaparece com  $\gamma(\vec{k}) \rightarrow 0$  e  $\tau(\vec{k}) \rightarrow \infty$ . Como o integrando é uma função ímpar, encontramos que a equação (4.23) tem a mesma forma da equação (4.10), onde os coeficientes de difusão  $D_{ij}$  são determinados pela equação

$$D_{ij} = \pi \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \int d^3k k_i k_j |\varphi_{\vec{k}}(t)|^2 \delta[(\vec{k} \cdot \vec{v}) - \omega(\vec{k})],$$

ou, podemos escrever da forma

$$D_{ij}(\vec{v}, t) = \pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int d^2 k_\perp \frac{k_i k_j |\varphi_{\vec{k}}(t)|^2}{|v - \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial k_\parallel}|_{k_\parallel v = \omega(\vec{k})}}. \quad (4.28)$$

A equação (4.10) determina a variação da função distribuição das partículas ressonantes sob a influência das oscilações de frequência alta. O fato de que se refere somente às partículas ressonantes está conectado com a presença da função delta na equação (4.28). A equação que determina a amplitude de campo é

$$\frac{d|\vec{E}_{\vec{k}}(t)|^2}{dt} = 2\gamma(\vec{k})|\vec{E}_{\vec{k}(t)}|^2, \quad (4.29)$$

onde a taxa de aumento (ou amortecimento) da oscilação é, conforme a equação (4.21), determinada pela equação

$$\gamma(\vec{k}) = - \sum_\alpha \frac{\pi q_\alpha^2}{m_\alpha k} \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \Big|_{v_\parallel = \omega(\vec{k})/k} \left[ \sum_\beta \frac{q_\beta^2}{m_\beta} \frac{\partial}{\partial \omega(\vec{k})} P \int \frac{\partial f_{\beta 0}}{\partial v_\parallel} \frac{dv_\parallel}{kv_\parallel - \omega(\vec{k})} \right]^{-1}. \quad (4.30)$$

Os conjuntos de equações (4.10), (4.21) e (4.29) para as funções  $f_{\alpha 0}(\vec{v}, t)$  e  $|\vec{E}_{\vec{k}}(t)|^2$  determinam a variação na função distribuição de fundo e também o aumento (ou amortecimento) da oscilação na aproximação quase-linear (Akhiezer et al., 1975).

### 4.3 Teoria quase-linear de um plasma magnetizado

Mostramos com algum detalhe, na seção anterior, o desenvolvimento da teoria quase-linear para oscilações de um plasma não magnetizado. Consideraremos agora a teoria quase-linear para plasmas magnetizados. Nesse caso se faz necessário estudar as reações das oscilações do plasma nas partículas ressonantes em um campo

magnético. A natureza da interação das partículas ressonantes num plasma magnetizado é apreciavelmente diferente daquela no caso do plasma não magnetizado, pois a presença do campo magnético gera fenômenos novos, como a ressonância de onda ciclotron.

Embora a derivação seja mais complexa, o desenvolvimento será similar àquele apresentado no caso não magnetizado, de modo que serão omitidos alguns detalhes (Akhiezer et al., 1975). Como na seção anterior, consideraremos a interação das partículas ressonantes com um pacote de ondas com fases aleatórias, cuja amplitude é pequena e aumenta (ou amortece) lentamente com o tempo. Suporemos novamente que o número de partículas ressonantes seja pequeno. Contudo, não nos restringiremos, como na seção anterior, apenas ao caso de oscilações longitudinais (ondas eletrostáticas), mas consideraremos o caso mais geral de ondas eletromagnéticas.

Consideraremos, por hipótese, o plasma imerso em um campo magnético uniforme em uma dada direção  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_3$ , e escreveremos  $f_\alpha$  como uma soma de dois termos

$$f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) = f_{\alpha 0}(\vec{v}, t) + f_{\alpha 1}(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad (4.31)$$

onde  $f_{\alpha 0} = \langle f_\alpha \rangle$  é a média da função distribuição independente das coordenadas espaciais e  $f_{\alpha 1}$  é a parte oscilante da função distribuição ( $\langle f_{\alpha 1} \rangle = 0$ ). Expandiremos a função  $f_{\alpha 1}$  e as intensidades do campo elétrico e magnético em série de Fourier-Laplace na coordenada espacial e no tempo:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) &= \sum_{\vec{k}, j} f_{\vec{k}, \omega}^j(\vec{v}, t) \exp i[(\vec{k} \cdot \vec{x}) - \omega^j(\vec{k})t], \\ \vec{E}(\vec{x}, t) &= \sum_{\vec{k}, j} \vec{E}_{\vec{k}, \omega}^j(t) \exp i[(\vec{k} \cdot \vec{x}) - \omega^j(\vec{k})t], \\ \vec{B}(\vec{x}, \vec{v}, t) &= \sum_{\vec{k}, j} \vec{B}_{\vec{k}, \omega}^j(t) \exp i[(\vec{k} \cdot \vec{x}) - \omega^j(\vec{k})t], \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde os somatórios são sobre todos os valores do vetor de onda  $\vec{k}$  e todas as ramificações  $j$  das oscilações, onde  $\omega^j(\vec{k})$  é a auto-freqüência do  $j$ -ésimo ramo da oscilação com vetor de onda  $\vec{k}$ .

Para obtermos a equação para a função distribuição de fundo  $f_{\alpha 0}(\vec{v}, t)$  consideramos a reação das oscilações nas partículas ressonantes e também as equações que determinam a variação com o tempo das amplitudes  $\vec{E}_{\vec{k}, \omega}^j(t)$  e  $\vec{B}_{\vec{k}, \omega}^j(t)$ . Substituindo a expressão (4.31) na equação cinética (3.26) temos

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_{\alpha} - \omega_{c\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \phi} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} ([\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha}) = 0, \quad (4.33)$$

onde  $\phi$  é o ângulo azimutal no espaço de velocidade.

Fazendo-se a média sobre todas as fases, obtemos

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} - \omega_{c\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \phi} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \langle ([\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \vec{v}}) \rangle. \quad (4.34)$$

A parte oscilante  $f_{\alpha 1}$  da função distribuição é determinada através da equação

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} ([\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{\alpha 0}) - \omega_{c\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \phi} = 0, \quad (4.35)$$

onde foram desprezados os termos não lineares responsáveis pela interação não linear entre ondas.

Ao desenvolver a equação (4.34) seguindo os procedimentos adotados na literatura (Akhiezer et al., 1975), chega-se a uma equação geral que descreve a evolução quase-linear da função distribuição, para um plasma magnetizado, dada

por

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{\pi q_{\alpha}^2}{2} \sum_{j, \vec{k}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_{\perp}} \hat{R}[p_{\perp} | \vec{E}_{\vec{k}}^j \cdot \vec{\Pi}|^2 (\hat{R} f_{\alpha 0}) \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} - l \frac{\omega_{c\alpha}}{\gamma} - \omega^j(\vec{k}))], \quad (4.36)$$

$$\vec{\Pi} = -l \frac{J_l(\lambda_{\alpha})}{\lambda_{\alpha}} \vec{e}_1 + i J'_l(\lambda_{\alpha}) \vec{e}_2 + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_l(\lambda_{\alpha}) \vec{e}_3, \quad (4.37)$$

$$\hat{R} = [1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha} \omega^j(\vec{k})}] \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega^j(\vec{k})} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}, \quad (4.38)$$

$$\lambda_{\alpha} = \frac{k_{\perp} v_{\perp} \gamma}{\omega_{c\alpha}}. \quad (4.39)$$

A última relação (4.39) é proporcional à razão entre o raio de Larmor e o comprimento de onda. A equação (4.36) leva em conta efeitos relativísticos ( $\gamma$ ,  $p_{\parallel} = \gamma m_{\alpha} v_{\parallel}$  e  $p_{\perp} = \gamma m_{\alpha} v_{\perp}$ ).

## 4.4 Obtenção do coeficiente de difusão quase-linear para elétrons sob o efeito de ondas LH

Nesta seção, a fim de obtermos uma expressão útil para o nosso estudo sobre o efeito da aplicação de ondas do tipo LH aos elétrons de um tokamak, aproximaremos a forma geral da equação de difusão quase-linear obtida para o caso magnetizado (4.36).

Ao considerarmos elétrons sob o efeito de uma onda do tipo LH (frequência de oscilação da onda na região  $\omega_{ci} \ll \omega \ll |\omega_{ce}|$ ), estamos restringindo o espectro de onda a ser considerado na equação (4.36) de modo que o somatório em  $j$  desaparece. Desta forma, analisando o termo que inclui a função delta de Dirac na equação (4.36), concluímos que o único valor de  $l$  que satisfaz a frequência da onda nessa faixa de valores é  $l = 0$ , restando na equação os termos para esse valor.

Ao fazer a aproximação de pequeno raio de Larmor,

$$|\lambda_e| = \frac{k_\perp v_\perp}{|\omega_{ce}|} \gamma \ll 1, \quad (4.40)$$

as funções de Bessel serão, respectivamente,

$$J_0(|\lambda|) \approx 1 + O(|\lambda|), \quad (4.41)$$

e

$$J'_0(|\lambda|) = -J_1(|\lambda|) \approx O(|\lambda|). \quad (4.42)$$

Aplicando as condições citadas e fazendo as aproximações acima, para valores de  $\vec{k}$  tomados no espectro contínuo ( $\sum_{\vec{k}} \rightarrow \int d^3k$ ), temos a seguinte equação da função de distribuição eletrônica:

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \frac{\pi e^2}{2} \int d^3k \frac{1}{p_\perp} \hat{R} [p_\perp |\vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{\Pi}|^2 (\hat{R} f_{e0}) \frac{1}{|v_\parallel|} \delta(k_\parallel - \frac{\omega(\vec{k})}{v_\parallel})], \quad (4.43)$$

onde

$$\vec{\Pi} \approx \frac{p_\parallel}{p_\perp} \vec{e}_3 \quad (4.44)$$

e

$$\hat{R} \approx \frac{k_\parallel p_\perp}{\gamma m_e \omega} \frac{\partial}{\partial p_\parallel}. \quad (4.45)$$

Definindo

$$\vec{E}_{\vec{k}}(k_\parallel) \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \vec{E}_{\vec{k}}(k_\perp, k_\parallel), \quad (4.46)$$

e integrando a equação (4.43) em coordenadas cilíndricas, temos

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \frac{\pi e^2}{2} \int_{-\infty}^\infty dk_\parallel \frac{1}{p_\perp} \hat{R} \left[ \frac{p_\parallel^2}{p_\perp} |\vec{E}_{\parallel\vec{k}}(k_\parallel)|^2 (\hat{R} f_{e0}) \frac{1}{|v_\parallel|} \delta(k_\parallel - \frac{\omega}{v_\parallel}) \right]. \quad (4.47)$$

Considerando a forma explícita do operador  $\hat{R}$ , (4.45), na equação (4.47), podemos usar a seguinte propriedade,

$$\begin{aligned} & \int dx f(x) \partial_y [g(y) h(x) \delta(x - y)] \\ &= \partial_y \int dx f(x) g(y) h(x) \delta(x - y) \\ &= \partial_y [f(y) g(y) h(y)], \end{aligned}$$

obtendo uma expressão mais compacta para a equação quase-linear

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \frac{\pi e^2}{2} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \left[ \left( \frac{|\vec{E}_{\parallel}(k_{\parallel})|^2}{|v_{\parallel}|} \right)_{k_{\parallel} = \frac{\omega}{v_{\parallel}}} \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\parallel}} \right]. \quad (4.48)$$

Podemos mencionar que estamos considerando casos não relativísticos,

$$\gamma \approx 1,$$

$$p_{\parallel} \approx m_e v_{\parallel},$$

$$p_{\perp} \approx m_e v_{\perp}.$$

Vamos agora normalizar o tempo pela frequência de colisão de elétrons  $\nu_e$  ( $\tau = t\nu_e$ ), dada por

$$\nu_e = \frac{2\pi e^4 n_0 \Lambda_0}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}}, \quad (4.49)$$

onde  $\Lambda_0$  é o logaritmo de Coulomb,  $n_0$  é a densidade do plasma no centro do tokamak,  $T_e$  é a temperatura dos elétrons do plasma, e definir a razão entre o componente paralelo da velocidade dos elétrons e a velocidade térmica de elétrons  $v_{te}$ ,

$$u_{\parallel} = \frac{v_{\parallel}}{v_{te}}, \quad (4.50)$$

onde

$$v_{te} = \left( \frac{T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (4.51)$$



Assim, a equação (4.48) será dada por

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} (D(u_{\parallel}) \frac{\partial f_{e0}}{\partial u_{\parallel}}), \quad (4.52)$$

onde

$$D(u_{\parallel}) = \left( \frac{|E_{\parallel}(k_{\parallel})|^2}{4e^2 n_0 \omega \Lambda |u_{\parallel}|} \right)_{k_{\parallel} = \frac{\omega}{v_{\parallel}}}. \quad (4.53)$$

Escrevendo em termos do componente paralelo do índice de refração,  $N_{\parallel}$ , temos a seguinte transformação de variáveis:

$$k_{\parallel} \rightarrow \frac{c}{\omega} k_{\parallel} = N_{\parallel}. \quad (4.54)$$

Redefinimos a função distribuição como função de  $k_{\parallel}$ ,  $f(k_{\parallel})$ ,

$$f(k_{\parallel}) \rightarrow \frac{c}{\omega} f(N_{\parallel}). \quad (4.55)$$

Portanto, o coeficiente dado pela equação (4.53) terá a seguinte forma

$$D(u_{\parallel}) = \left( \frac{c |E_{\parallel}(N_{\parallel})|^2}{4e^2 n_0 \omega \Lambda |u_{\parallel}|} \right)_{N_{\parallel} = \frac{\mu_e^{1/2}}{u_{\parallel}}}, \quad (4.56)$$

onde

$$\mu_e = \frac{m_e c^2}{T_e}. \quad (4.57)$$

O coeficiente de difusão paralelo causado pelo pacote de onda híbrida inferior na frequência  $\omega$  é deduzido através do componente paralelo do campo elétrico  $E_{\parallel}(k_{\parallel})$ . Para valores de  $\omega$  na faixa de ondas do tipo LH os efeitos térmicos são desprezíveis e, portanto, podemos usar as aproximações de plasma frio e de pequeno raio de Larmor<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Estamos considerando que o raio de órbita das partículas é bem menor que o comprimento de onda das ondas incidentes.

Com isso, os componentes do tensor dielétrico tomam a seguinte forma.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{22} &\sim \epsilon_{11} \quad (\epsilon_{11} \text{ não depende de } N_{\perp}), \\
 \epsilon_{12} &= -\epsilon_{21} \quad (\epsilon_{12} \text{ não depende de } N_{\perp}), \\
 \epsilon_{13} &\sim N_{\perp}\chi_{13} \quad (\chi_{13} \text{ não depende de } N_{\perp}), \\
 \epsilon_{23} &\sim N_{\perp}\chi_{23} \quad (\chi_{23} \text{ não depende de } N_{\perp}), \\
 \epsilon_{33} &\sim \epsilon_{330} + N_{\perp}^2\chi_{33} \quad (\chi_{33} \text{ não depende de } N_{\perp}), \\
 \epsilon_{13} &= \epsilon_{31}, \\
 \epsilon_{23} &= -\epsilon_{23}, \\
 \chi_{13} &= \chi_{23} = \chi_{33} = 0, \\
 \epsilon_{13} &= \epsilon_{23} = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_{33} = \epsilon_{330}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a relação de dispersão é dada por

$$\det \overset{\leftrightarrow}{D} = \epsilon_{11}N_{\perp}^4 + N_{\perp}^2[N_{\parallel}^2(\epsilon_{11} + \epsilon_{330}) - \epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{11}\epsilon_{330}] + \epsilon_{330}[(\epsilon_{11} - N_{\parallel}^2)^2 + \epsilon_{12}^2] = 0, \quad (4.58)$$

onde  $N_{\perp}$  é o componente do índice de refração da onda normal ao campo  $\vec{B}_0$  e os  $\epsilon_{ij}$  são os componentes do tensor dielétrico de plasma frio.  $\vec{E}_{\parallel}$  é obtido através da equação

$$\overset{\leftrightarrow}{D} \cdot \vec{E} = (\vec{N}\vec{N} - N^2 \overset{\leftrightarrow}{1} + \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}) \cdot \vec{E} = 0. \quad (4.59)$$

Ao resolver a equação (4.59), obtemos

$$E_{\parallel} = |\vec{E}| \frac{(D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2)}{A^{1/2}}, \quad (4.60)$$

onde  $E$  é a amplitude do campo e

$$A = |D_{13}D_{22} - D_{12}D_{23}|^2 + |D_{23}D_{11} - D_{12}^*D_{13}|^2 + |D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2|^2, \quad (4.61)$$

onde  $D_{ij} = N_iN_j - N^2\delta_{ij} + \epsilon_{ij}$ .

Introduzimos agora a definição do espectro de fluxo de energia (Fidone et al., 1984):

$$S(N_{\parallel}) = \frac{c}{16\pi} \frac{|\vec{E}|^2 |\partial D / \partial \vec{N}|}{|B|}, \quad (4.62)$$

onde

$$B = D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2 + D_{11}D_{33} - |D_{13}|^2 + D_{22}D_{33} - |D_{23}|^2. \quad (4.63)$$

Assim, usando a equação (4.60) na equação (4.62), podemos escrever  $E_{\parallel}$ ,

$$E_{\parallel}^2 = \frac{16\pi}{c} S(N_{\parallel}) \left| \frac{B}{A} \right| \frac{|D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2|}{|\partial D / \partial \vec{N}|}. \quad (4.64)$$

Substituindo (4.64) em (4.56), o coeficiente de difusão pode ser escrito em uma forma conhecida na literatura (Fidone et al., 1984),

$$D_{\parallel}(u_{\parallel}) = \frac{4\pi}{e^2 n_0 \omega \Lambda |u_{\parallel}|} \left[ \left| \frac{B}{A} \right| \frac{|D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2|^2}{|\partial D / \partial \vec{N}|} S(N_{\parallel}) \right]_{N_{\parallel} = \frac{u_{\parallel}^{1/2}}{u_{\parallel}}}. \quad (4.65)$$

## 5 MODELO TEÓRICO

### 5.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar o modelo teórico utilizado em nossa investigação sobre o efeito do transporte radial de partículas na eficiência da geração de corrente por ondas do tipo híbrida inferior em tokamaks. Apresentamos aqui o modelo do tokamak e do pacote de onda LH, bem como o modelo, ou melhor, a equação de evolução no tempo da função distribuição de elétrons. Essa equação de difusão é a seguinte

$$\frac{\partial f_e}{\partial \tau_e} = \left(\frac{\partial f_e}{\partial \tau_e}\right)_{LH} + \left(\frac{\partial f_e}{\partial \tau_e}\right)_{COL} + \left(\frac{\partial f_e}{\partial \tau_e}\right)_T. \quad (5.1)$$

Vemos, então, que a variação no tempo da função distribuição de elétrons depende de três termos. O primeiro representa a ação das ondas do tipo híbrida inferior (LH) e foi derivado neste trabalho pela teoria quase-linear, o segundo representa o efeito de colisões e o último o efeito de transporte radial de partículas, e é neste que inserimos cinco modelos para demonstrarmos a influência dos efeitos de transporte na geração de corrente.

### 5.2 Modelo do tokamak

Em nosso estudo o tokamak é representado por uma lâmina de plasma não homogêneo, com perfil de densidade, temperatura e campo magnético toroidal dados pelas bem conhecidas expressões que aparecem na literatura (Fidone et al.,

1983):

$$\begin{aligned} n_e(s, \tau_e = 0) &= n_{e0}(1 - s^2), \\ T_e(s) &= T_{e0}(1 - s^2)^2, \\ B_0(s) &= B_0(0)(1 + sa/R)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nessas expressões,  $n_{e0}$ ,  $T_{e0}$  e  $B_0(0)$  são respectivamente a densidade de elétrons, a temperatura de elétrons e o campo magnético toroidal ambiente, no centro do plasma,  $a$  e  $R$  são respectivamente o raio menor e o raio maior do tokamak, ver Fig. (5.1), e  $s$  é a coordenada radial normalizada no plano equatorial dada por  $s = x/a$ , onde  $x$  é a coordenada radial no plano equatorial. Podemos definir também a distância ao centro do plasma  $r = |x|$  e  $\tau_e$  como o tempo normalizado ao tempo de colisão  $\tau_e = \nu_e t$ . Os perfis de temperatura, campo magnético toroidal e densidade são constantes.

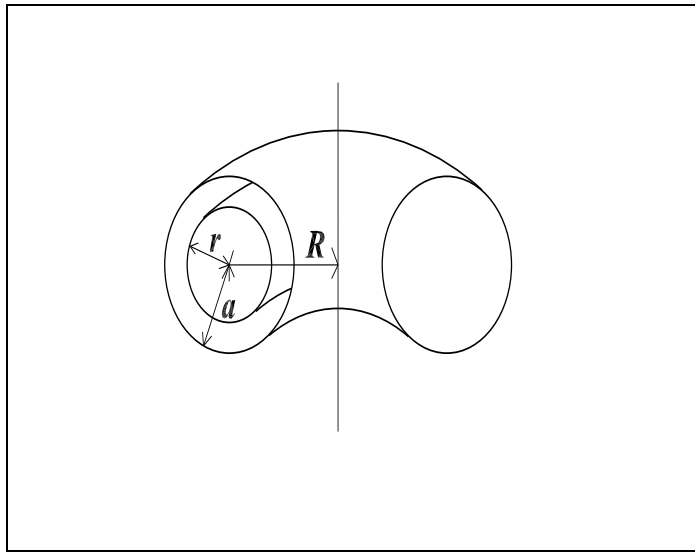


Figura 5.1 Figura esquemática do tokamak.

### 5.3 Modelo do pacote de ondas híbridas

Consideramos que as ondas LH estão se propagando no tokamak, com uma distribuição gaussiana centrada em  $N_{\parallel} = \bar{N}_{\parallel}$ , onde  $N_{\parallel}$  é o componente de  $\vec{N} = c\vec{k}/\omega$  paralela ao campo magnético ambiente ( $\vec{k}$  é o vetor de onda, e  $\omega$  é a frequência angular da onda). Vamos considerar, também, que a semi-largura do espectro gaussiano é dada por  $\Delta N_{\parallel}$  e que a intensidade de potência local da onda é dada por:

$$S_0(r, t) = \int dN_{\parallel} S(r, t, N_{\parallel}), \quad (5.3)$$

onde

$$S(r, t, N_{\parallel}) = S_0(r, t) \frac{e^{-(N_{\parallel} - \bar{N}_{\parallel})/(\Delta N_{\parallel})^2}}{\sqrt{\pi}(\Delta N_{\parallel})}. \quad (5.4)$$

A quantidade  $N_{\parallel}$  é uma constante ao longo da propagação da onda na lâmina de plasma, o que torna a propagação da onda um processo simples e evita a necessidade de procedimentos de *ray tracing*. A amplitude local do campo elétrico está relacionada com o fluxo de energia da onda e pode ser dada por:

$$E_0(r, t, N_{\parallel}) = \left( \frac{16\pi}{(4\pi\epsilon_0)c} \frac{|B|}{|\partial D/\partial \vec{N}|} S(r, t, N_{\parallel}) \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Desde que a amplitude do campo elétrico é dependente da quantidade  $S(r, t, N_{\parallel})$ , é essencial conhecer a intensidade da potência da onda  $S_0$  em cada posição na lâmina. Se a potência da onda em cada posição  $r$  é definida como  $W_0(r, t)$ , a magnitude de  $S_0(r, t)$  pode ser estimada como o quociente entre a potência da onda e  $A_{\omega}(r)$ , a área afetada pela onda na superfície magnética. Para o cálculo desse quociente, consideramos as superfícies magnéticas como cilindros de raio  $r$  e comprimento  $2\pi R$ . Isso não é inconsistente com o modelo de lâmina de plasma, desde que servirá somente para estimar a intensidade da onda em cada posição, a qual é usada no modelo de lâmina. Procedemos, então, como segue. A semi-largura ao longo do eixo  $z$  ocupada pelo pacote de onda propagando-se com semi-largura

espectral  $\Delta N_{\parallel}$  pode ser aproximadamente estimada como  $\Delta z = 2c/(\omega(\Delta N_{\parallel}))$ . Se tomarmos a largura poloidal  $\Delta\theta$  como largura do pacote de onda, então a área afetada pela onda na superfície magnética de raio  $r$  é dada por  $A_{\omega}(r) = 2(\Delta z)(\Delta\theta)r$ , conforme Fig. (5.2). Portanto,

$$S_0(r, t) \equiv \frac{W_0(r, t)}{A_{\omega}(r)} = \frac{W_0(r, t)}{2(\Delta z)(\Delta\theta)r} . \quad (5.6)$$

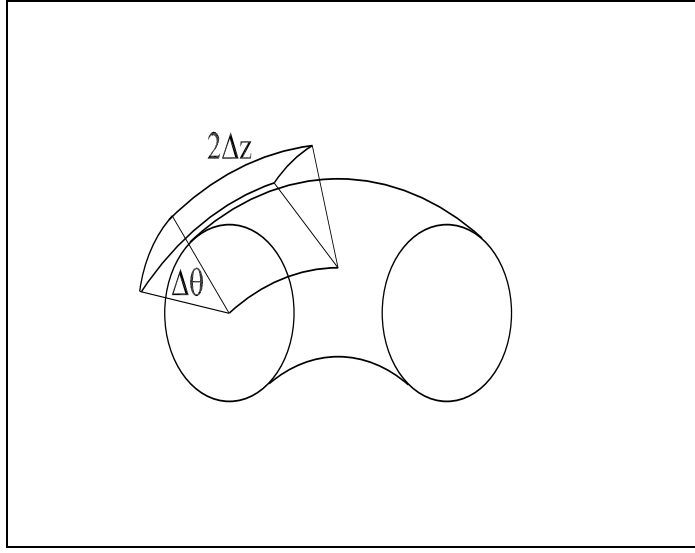


Figura 5.2 Detalhe da superfície magnética no tokamak.

Por outro lado, a área da superfície magnética será  $A(r) = 4\pi^2 r R$ , e portanto a fração de uma dada superfície magnética que é afetada pela onda pode ser estimada como

$$\gamma(r) \equiv \frac{A_{\omega}(r)}{A(r)} = \frac{\Delta z \Delta\theta}{2\pi^2 R} . \quad (5.7)$$

Essa quantidade também pode ser considerada como uma estimativa da fração de tempo na qual a partícula movendo-se na superfície magnética de raio  $r$  permanece sob a influência da onda.

A fim de utilizar esse modelo, os parâmetros relevantes para as ondas LH serão  $\omega$ ,  $\bar{N}_{\parallel}$  e  $\Delta N_{\parallel}$ , e o valor constante da potência da onda no limite do plasma,  $W_0(a)$ . Um outro parâmetro necessário é  $\Delta\theta$ , o qual será assumido como

sendo  $\Delta\theta = \pi/4$  para todos os casos considerados, como no artigo de Karney, 1979. Para um dado valor de  $\omega$  e  $N_{\parallel}$ , a relação de dispersão para ondas LH (4.58) deve ser resolvida a fim de se obter  $N_{\perp}$ .

## 5.4 Termo quase-linear para ondas do tipo híbrida inferior

Como vemos na equação (4.52), o termo quase-linear para a ação de ondas do tipo híbrida inferior sobre a função distribuição de elétrons em um dado ponto na geometria proposta de lâmina é dado por

$$\frac{\partial f_e}{\partial \tau_e} = \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} [D_{LH}(s, \tau_e, u_{\parallel}) \frac{\partial f_e}{\partial u_{\parallel}}], \quad (5.8)$$

onde  $u_{\parallel}$  é definido como  $u\mu$ ,  $u = v/v_{te}$ ,  $v_{te} = \sqrt{T_e/m_e}$  e onde  $D_{LH}(s, \tau_e, u_{\parallel})$  é o coeficiente de difusão da híbrida inferior, o qual no caso de um espectro de ondas LH como introduzido pode ser tomado da seguinte forma

$$D_{LH}(s, \tau_e, u_{\parallel}) = \frac{16\pi^2}{m_e \omega_{pe0}^2 \omega \Lambda_0 |u_{\parallel}|} \gamma \left[ \left| \frac{B}{A} \right| \frac{|D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2|^2}{|\partial D / \partial \vec{N}|} S(N_{\parallel}) \right]_{N_{\parallel} = \frac{\mu_e^{1/2}(0)}{u_{\parallel}}}. \quad (5.9)$$

que corresponde a equação (4.65) no sistema SI, e onde  $\gamma$  é dado por (5.7). Na expressão acima  $\omega$  é a frequência da onda híbrida inferior,  $\omega_{pe}$  é a frequência de plasma de elétrons,  $u_{\parallel} = u\mu$ ,  $\mu_e \equiv m_e c^2 / T_e$  e  $S(N_{\parallel})$  é o fluxo de energia das ondas do tipo LH. O fator  $D_{ij}$  é definido por  $D_{ij} = N_i N_j - N^2 \delta_{ij} + \epsilon_{ij}$ , onde os  $N_i$  são os componentes do vetor  $\vec{N} = c\vec{k}/\omega$ , e os  $\epsilon_{ij}$  são os componentes do tensor dielétrico de plasma frio. As quantidades  $A$  e  $B$  estão definidas pelas equações (4.61) e (4.63), enquanto  $\det \overset{\leftrightarrow}{D} = 0$  é a relação de dispersão para ondas LH, dada pela equação (4.58).



## 5.5 Termo de colisão

O termo de colisão, ou coeficiente de Fokker-Planck, adotado corresponde a uma forma simplificada que descreve a interação dos elétrons da cauda eletrônica com elétrons e íons do corpo das distribuições correspondentes, já que a velocidade dos elétrons da cauda é muito maior que as velocidades térmicas de íons e elétrons. Esse termo, cuja derivação se encontra no Apêndice A-1, é dado por

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial \tau_e}\right)_{COL} = \frac{Z^2 + 1}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu}] + \frac{2}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} f_e + f_e \right), \quad (5.10)$$

onde  $\mu = \cos \theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo entre o momentum da partícula e o campo magnético do ambiente (*pitch angle*) e  $Z$  a carga iônica efetiva.

## 5.6 Termo de transporte

O termo de transporte pretende demonstrar a natureza e magnitude dos efeitos de transporte e é dado pela seguinte expressão

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial \tau_e}\right)_T = \frac{\partial}{\partial s} [D_T(s) \frac{\partial f_e}{\partial s}], \quad (5.11)$$

com dependência espacial do coeficiente de difusão espacial. Em uma publicação recente, um termo similar foi empregado, com  $D_T(s)$  como uma constante uniforme ao longo da coordenada radial (Peeters; Westerhof, 1996).

A fim de investigar o efeito de diferentes formas do coeficiente de difusão espacial, consideramos, no que segue, os seguintes perfis para  $D_T(s)$ ,

$$\begin{aligned}
 D_T(s) &= D_0, & \text{perfil\#1} \\
 D_T(s) &= D_0 s^2, & \text{perfil\#2} \\
 D_T(s) &= D_0(1 - s^2), & \text{perfil\#3} \\
 D_T(s) &= D_0 4s^2(1 - s^2), & \text{perfil\#4} \\
 D_T(s) &= D_0 \sin^2(2\pi s), & \text{perfil\#5.}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

O perfil # 1 representa um coeficiente para o transporte espacial o qual é uniforme ao longo da lâmina de plasma. O perfil # 2 é parabólico, com máximo nos limites da lâmina. O perfil # 3 também é parabólico, proporcional a densidade de partícula inicial. O perfil # 4 desaparece no centro e nos limites da lâmina de plasma, com um máximo entre esses pontos. O perfil # 5 também é considerado que desaparece no centro e nos limites da lâmina de plasma, mas apresenta outros mínimos entre o centro e os limites, com máximos entre esses pontos. Esses perfis são completamente arbitrários e pretendem verificar a sensibilidade do processo de geração de corrente sobre as características do termo de difusão. A Fig. (5.3) mostra os cinco diferentes perfis utilizados na presente investigação. Para o termo de transporte, consideramos os valores de  $D_0 = 0,0$  (caso sem difusão espacial) e  $D_0 = 2,0 \times 10^{-4}$ . Com esses valores de  $D_0$ , o termo devido ao transporte pode ser ainda considerado como uma pequena perturbação na equação cinética, portanto o tempo necessário para ser atingido o estado estacionário no espaço de velocidade (quando a corrente é constante dentro de um fator menor que um por cento) é muito mais curto que o tempo necessário para atingir a solução assintótica no espaço de configuração.

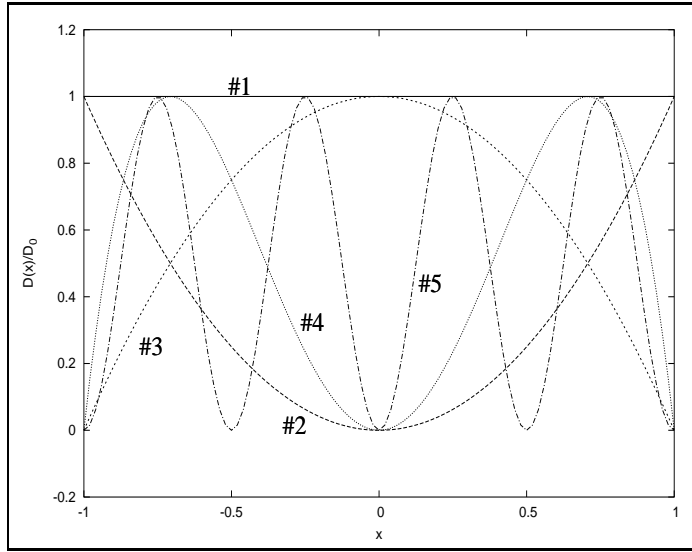


Figura 5.3 Perfis utilizados para o coeficiente de transporte, como função da posição radial normalizada.

## 5.7 Equação de difusão

A equação (5.1) está normalizada ao tempo de colisão de elétrons  $\tau_e = t\nu_e$ , onde  $\nu_e$  é a frequência de colisão de elétrons. Mas o tempo de colisão depende da posição radial na lâmina de plasma. Desta forma, resolveu-se normalizar essa equação ao tempo de colisão no centro do plasma, i.e., normalizar a  $\tau_{e0} = t\nu_{e0}$  onde  $\nu_{e0}$  é dado por  $\nu_{e0} = 2\pi e^4 n_{e0} \Lambda_0 / m_e^{1/2} T_{e0}^{3/2}$ .  $m_e$  é a massa do elétron,  $-e$  a carga do elétron e  $\Lambda_0$  o logaritmo de Coulomb na posição  $s = 0$ . Também é importante renormalizar o momentum à velocidade térmica no centro do plasma.

Assim, usando as seguintes definições

$$\begin{aligned} \tau_{e0} &\equiv t\nu_{e0} = \frac{\nu_{e0}}{\nu_e} \tau_e, \\ u_0 &\equiv \frac{v}{v_{t0}} = \frac{v_t}{v_{t0}} u, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $v_{i0} \equiv \sqrt{T_{e0}/m_e}$ , chegamos à seguinte equação de difusão (retirando-se o subscrito 0 de  $u_0$ )

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(u, \mu, s) = a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \mu} + a_3 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + a_4 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + b_1 \frac{\partial f}{\partial u} + b_2 \frac{\partial f}{\partial \mu} + b_3 \frac{\partial f}{\partial s}. \quad (5.14)$$

Os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  são dados por uma contribuição de cada termo (LH, COL ou T) e estão escritos abaixo.

$$\begin{aligned} a_{1,COL} &= \frac{n_e \Lambda T_e}{n_{e0} \Lambda_0 T_{e0}} \frac{2}{u^3}, \\ a_{2,COL} &= 0, \\ a_{3,COL} &= \frac{n_e \Lambda}{n_{e0} \Lambda_0} \frac{(Z^2 + 1)(1 - \mu^2)}{u^3}, \\ b_{1,COL} &= \frac{2}{u^4} \frac{n_e \Lambda}{n_{e0} \Lambda_0} \left(u^2 - \frac{T_e}{T_{e0}}\right), \\ b_{2,COL} &= -\frac{2\mu(Z^2 + 1)}{u^3} \frac{n_e \Lambda}{n_{e0} \Lambda_0}, \\ a_{1,LH} &= \mu^2 D_{LH}, \\ a_{2,LH} &= \frac{2\mu(1 - \mu^2)}{u} D_{LH}, \\ a_{3,LH} &= \frac{(1 - \mu^2)^2}{u^2}, \\ b_{1,LH} &= \frac{(1 - \mu^2)}{u} D_{LH} + \mu^2 \frac{\partial D_{LH}}{\partial u} + \frac{\mu(1 - \mu^2)}{u} \frac{\partial D_{LH}}{\partial \mu}, \\ b_{2,LH} &= (1 - \mu^2) \left(-\frac{3\mu}{u^2} D_{LH} + \frac{\mu}{u} \frac{\partial D_{LH}}{\partial u} + \frac{(1 - \mu^2)}{u^2} \frac{\partial D_{LH}}{\partial \mu}\right), \\ a_{4,T} &= D_T(s), \\ b_{3,T} &= \frac{\partial D_T(s)}{\partial s}. \end{aligned}$$

Apresentaremos, agora, um pouco de detalhe das transformações de coordenadas dos termos de colisão e de ação das ondas tipo híbrida inferior para se obter a equação (5.14) normalizada.

Para normalizar a equação (5.10), consideremos as seguintes relações:

$$\frac{\nu_e}{\nu_{e0}} = \frac{n_e \Lambda T_{e0}^{3/2}}{n_{e0} \Lambda_0 T_e^{3/2}}, \quad (5.15)$$

$$\frac{v_t}{v_{t0}} = \sqrt{\frac{T_e}{T_{e0}}}. \quad (5.16)$$

Retomando (5.13), temos

$$\tau = \frac{n_e \Lambda T_{e0}^{3/2}}{n_{e0} \Lambda_0 T_e^{3/2}} \tau_{e0}, \quad (5.17)$$

$$u = \sqrt{\frac{T_{e0}}{T_e}} u_0. \quad (5.18)$$

Ficamos, então, com

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \sqrt{\frac{T_e}{T_{e0}}} \frac{\partial f}{\partial u_0}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &= \frac{T_e}{T_{e0}} \frac{\partial^2 f}{\partial u_0^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Podemos agora normalizar (5.10). Primeiramente, escrevemos essa equação mudando  $\tau$  para  $\tau_{e0}$  e expandindo as derivadas

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \tau_{e0}} \right)_{COL} = \frac{\nu_e}{\nu_{e0}} \left[ 2\mu \frac{(1+Z^2)}{u^3} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{(1+Z^2)(1-\mu^2)}{u^3} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + \left( \frac{2}{u^2} - \frac{2}{u^4} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{2}{u^3} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right]. \quad (5.20)$$

Resta, então, expressar  $u$  em função de  $u_0$  e obtemos os termos de COL na equação (5.14).

Para normalizar a equação (5.8), escrevemos a seguinte mudança de coordenadas

$$u = \sqrt{u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2}, \quad (5.21)$$

$$\mu = \frac{u_{\parallel}}{u}, \quad (5.22)$$

de modo que as derivadas parciais  $\partial_{u_{\parallel}}$  serão dadas por

$$\partial_{u_{\parallel}} = \mu \partial_u + \frac{1}{u} (1 - \mu^2) \partial_{\mu}. \quad (5.23)$$

Portanto, reescrevendo em termos de  $\mu$  as derivadas em  $u_{\parallel}$  que aparecem em (5.8), obtemos os termos de LH na equação (5.14).

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 6.1 Introdução

Neste Capítulo resolvemos numericamente a equação quase-linear (5.14) através do método implícito em direções alternadas (ADI), descrito no Apêndice A-3, a fim de obter a evolução temporal da função distribuição de elétrons rápidos. Com isso, pretendemos analisar o efeito de uma variação radial do coeficiente de difusão espacial na geração de corrente por ondas do tipo híbrida inferior considerando, também, a ação de colisões através do termo de colisões descrito no Apêndice A-1, como já dissemos no modelo apresentado no Capítulo 5.

A equação (5.14) está escrita em função das variáveis  $u$ ,  $\mu$  e  $s$ , com o espaço  $(u, \mu, s)$  descrito por uma grade discreta de  $151 \times 31 \times 20$  pontos. Os limites da variável  $u$  nessa grade são  $u = 0$  e  $u = u_{lim} = 12$  ( $u_{lim}$  consideravelmente acima do limite superior do espectro de ondas LH), os limites para a variável  $\mu$  são  $\mu = \pm 1$  e, finalmente, os limites para a variável  $s$  são  $s = 0$  e  $s = 1$ .

Para as estimativas numéricas, consideramos o caso de um tokamak de grande porte, com parâmetros similares aos do JET. Esses parâmetros são:  $n_{e0} = 3,5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ,  $T_{e0} = 5,0 \text{ keV}$  e  $B_0(0) = 3,0 \text{ T}$ . O raio menor foi escolhido como  $a = 1,2 \text{ m}$ , enquanto o maior como  $R = 3,0 \text{ m}$ . Para descrever as ondas LH, consideramos a potência  $W_0(a) = 1 \text{ MW}$  e escolhemos  $\bar{N}_{||}$  tal que a condição de ressonância no centro do pacote LH entre a onda e os elétrons seja satisfeita na posição  $s = 0$  para  $u = 3,5$  (com essa condição espera-se boa eficiência na geração de corrente - (Rosa; Ziebell, 1992)) e  $\Delta N_{||} = 0,2$ . Por razões práticas, assumimos que o pacote LH Gaussiano é não nulo entre  $\bar{N}_{||} - 2\Delta N_{||}$  e  $\bar{N}_{||} + 2\Delta N_{||}$ , tornando-se nulo fora desses limites. Numericamente, o espectro LH é descrito por uma rede de 61 pontos.

Resolvemos então a equação quase-linear considerando a propagação da onda em direção ao centro do plasma e usando um passo no espaço dado por  $\Delta s = 0,05$ . Começamos em  $s = 0,95$  devido a não haver interações significativas entre partículas e onda antes dessa posição. Para o passo no tempo usamos  $\Delta\tau_e = 1,0 \times 10^{-3}$ , rodando o código até o estado estacionário ser aproximadamente atingido, com os efeitos da onda sobre a função distribuição aproximadamente balanceados pelos efeitos de colisão.

## 6.2 Implementação do modelo

Para diagnóstico dos resultados obtidos, definimos uma série de quantidades auxiliares que estão expressas a seguir. Começemos com a função distribuição paralela e a função distribuição perpendicular que são definidas como:

$$f_{e\parallel}(u_{\parallel}, \tau_e, s) = 2\pi \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp} f_e(u_{\parallel}, u_{\perp}, \tau_e, s), \quad (6.1)$$

e

$$f_{e\perp}(u_{\perp}, \tau_e, s) = \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} f_e(u_{\parallel}, u_{\perp}, \tau_e, s). \quad (6.2)$$

A densidade de corrente em uma dada posição em um determinado instante, pode ser obtida como segue

$$J(\tau, s) = -\frac{ecn_e}{\sqrt{\mu_{e0}}} \int d^3u u_{\parallel} f_e(u, \mu, \tau_e, s). \quad (6.3)$$

A corrente total pode ser facilmente obtida por integração da densidade de corrente

$$I(\tau) = 2\pi a^2 \int_0^1 ds s J(\tau, s). \quad (6.4)$$

No caso limite de uma densidade de corrente homogênea,  $J_0$ , essa integral resultaria no valor  $I = \pi a^2 J_0$ , como esperado.



A fim de calcular a potência total dissipada pelas ondas LH, começamos definindo a média da densidade de energia cinética para elétrons,

$$\langle E_e \rangle = \int d^3u \frac{m_e v^2}{2} f_e, \quad (6.5)$$

cuja variação no tempo gera a densidade de potência média dissipada por ondas LH (expressa em W/m<sup>3</sup>),

$$\rho(s, \tau) \equiv \frac{d}{dt} \langle E_e \rangle = 1,6 \times 10^{-16} T_e(0) \nu_e(0) n_e(s) \int d^3u \frac{u^2}{2} (\partial_\tau f_e)_{LH}, \quad (6.6)$$

onde  $T_e(0)$  é dado em keV. Para detalhes do cálculo dessa quantidade, ver Apêndice A-2. Da densidade de potência, pode-se obter a potência dissipada em uma casca toroidal,

$$P_s(s, \tau) = \rho(s, \tau) (2\pi s a^2 \Delta s) (2\pi R). \quad (6.7)$$

A potência total dissipada em um tokamak com raio maior R pode ser obtida por integração da densidade de potência,

$$P(\tau) = \int_0^1 ds a(2\pi R) (2\pi s a) \rho(s, \tau). \quad (6.8)$$

## 6.3 Análise dos resultados numéricos

Realizamos um estudo da evolução no tempo da distribuição de elétrons sob o efeito das ondas híbrida inferior, colisões e termo de difusão espacial. Neste estudo consideramos duas situações básicas:

- perfil de densidade é mantido constante ao longo do tempo,
- permite-se que o perfil de densidade varie no tempo.

No primeiro caso, mantivemos o perfil de densidade apresentado na Seção 5.2 e fazemos a normalização local da função distribuição a 1, de modo que a integral de  $f_e$  no espaço de velocidade continua sendo uma probabilidade localmente. Ou seja, admitimos que a função distribuição possa ser afetada pela difusão radial, com conseqüente modificação dos perfis de corrente e potência dissipada, mas desprezamos a variação da densidade, considerando que a difusão ocorre principalmente para partículas de mais alta energia, sem afetar significativamente o corpo da distribuição. Os resultados desse caso estão apresentados na Sub-Seção 6.3.1. No segundo caso, permitimos que o perfil de densidade varie no tempo a partir do perfil inicial dado na Seção 5.2, e renormalizamos a densidade localmente, após um determinado número de iterações, de modo que o número de partículas permaneça constante conforme é previsto pela teoria quase-linear. Uma discussão sobre este caso é encontrada na Sub-Seção 6.3.2.

### 6.3.1 Perfil de densidade constante

Vamos proceder à análise numérica seguindo a evolução no tempo da distribuição de elétrons sob o efeito das ondas híbrida inferior, colisões e termo de difusão espacial. A distribuição evolui pelo desenvolvimento da cauda estendida, até o estado estacionário ser atingido. Na Fig. (6.1) apresentamos a quantidade  $-\ln f_{e\parallel}$ , como função de  $u_{\parallel}|u_{\parallel}|$ , para as posições na lâmina de plasma de  $s = 0, 05, 0, 2, 0, 4, 0, 6$ , para  $\tau_e = 100$ , para os cinco diferentes perfis e o caso sem difusão espacial. Se representada, a distribuição Maxwelliana apareceria como uma letra V com a mesma abertura das funções já representadas. Quanto mais aberto o V, mais quente está o plasma. De fato, as posições mais interiores no plasma, apresentam maior abertura. Percebe-se claramente a assimetria causada pela onda LH para o lado positivo de  $u_{\parallel}$ . Essas características da função distribuição de elétrons sob o efeito de ondas LH são bem conhecidos na literatura (Fidone et al., 1984, Rosa; Ziebell, 1992, Tozawa, 1998). Temos, então, que nas posições (a), (b) e (c), onde

o plasma é mais quente, quase não se nota diferença entre a ação dos diferentes perfis. Essa diferença somente é notada em posições mais na borda do plasma, como (d), onde percebemos que o perfil que mais influencia a formação da cauda é o perfil #1. Na Fig. (6.2) mostramos uma ampliação  $-\ln f_{e\parallel}$ , como função de  $u_{\parallel}|u_{\parallel}|$ , na posição (d), mostrando a ordem de influência dos perfis (sem dif.  $\#5 < \#2 < \#4 < \#3 < \#1$ ).

Embora a onda LH espalhe partículas ao longo da direção paralela, a distribuição perpendicular também é afetada pela difusão colisional, como podemos ver na Fig. (6.3), que mostra  $\ln f_{e\perp}$ , como função de  $u_{\perp}^2/2$ , para as posições  $s = 0, 05, 0, 2, 0, 4, 0, 6$ , e para  $\tau_e = 100$ , para os cinco diferentes perfis e o caso sem difusão espacial. Novamente, o perfil que apresenta maior efeito é o #1. A Fig. (6.4), mostra com mais detalhe a posição  $s = 0, 6$ . Percebe-se que há maior influência dos perfis que possuem máximo na posição central da lâmina (perfis #1 e #3).

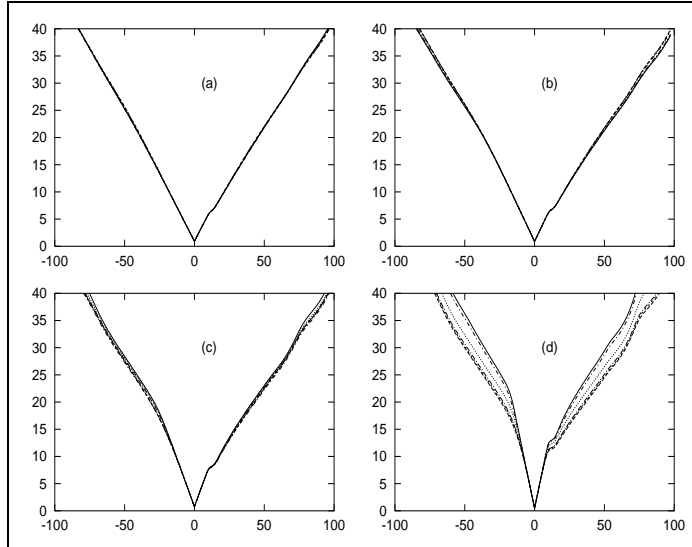


Figura 6.1  $-\ln f_{e\parallel}$  vs.  $u_{\parallel}|u_{\parallel}|$  em (a)  $s = 0, 05$ , (b)  $s = 0, 2$ , (c)  $s = 0, 4$  e (d)  $s = 0, 6$  para parâmetros do JET e  $\tau_e = 100$ .

Ao longo da evolução no tempo, a corrente gerada e a potência dissipada são calculadas de acordo com as equações (6.4) e (6.8), e a potência real da onda em cada posição é calculada auto-consistentemente levando em conta a

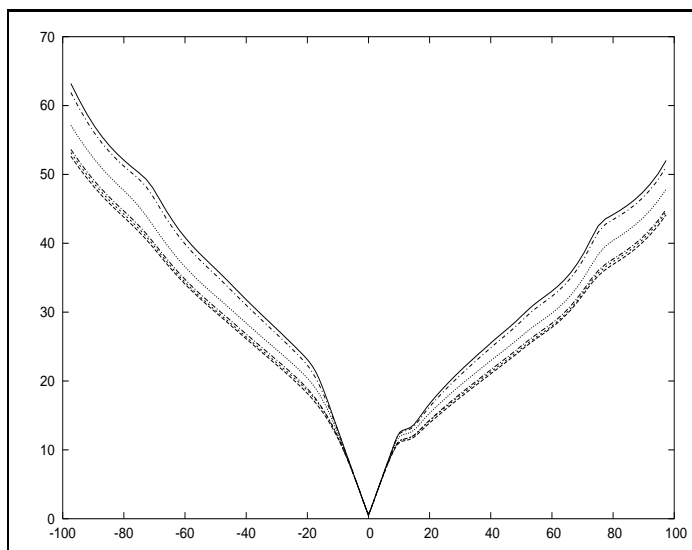


Figura 6.2 –  $-\ln f_{e||}$  vs.  $u_{||}|u_{||}|$  em  $s = 0,6$  para parâmetros do JET e  $\tau_e = 100$ . De cima para baixo tem-se a seguinte ordem dos perfis: sem dif., #5, #2, #4, #3, #1.

quantidade de potência da onda depositada ao longo da trajetória da radiação. A Fig. (6.5) mostra a razão entre a potência dissipada e a corrente gerada como função do tempo normalizado para os cinco diferentes perfis e o caso sem difusão espacial. O valor absoluto da razão  $P/I$  inicialmente cresce para valores muito grandes, mas rapidamente converge para um valor pequeno o que é uma indicação da eficiência da geração de corrente por ondas LH. Na escala da Fig. (6.5) as seis diferentes curvas obtidas parecem muito similares. A fim de melhorar a resolução e distinguir entre os diferentes casos, mostramos na Fig. (6.6) uma vista ampliada da parte final da evolução no tempo do valor absoluto de  $I/P$ , como uma função do tempo normalizado. Nessa escala expandida, as curvas que apresentam maior valor para a quantidade  $|I|/P$ , a qual representa a eficiência na geração de corrente, são as denominadas por #1 e #3, que tem em comum o fato de terem um valor máximo no centro do plasma, enquanto os outros casos correspondem a perfis que desaparecem no centro da lâmina.

Também é interessante considerar diretamente a quantidade de corrente gerada em cada caso. Por exemplo, mostramos na Fig. (6.7) a quantidade

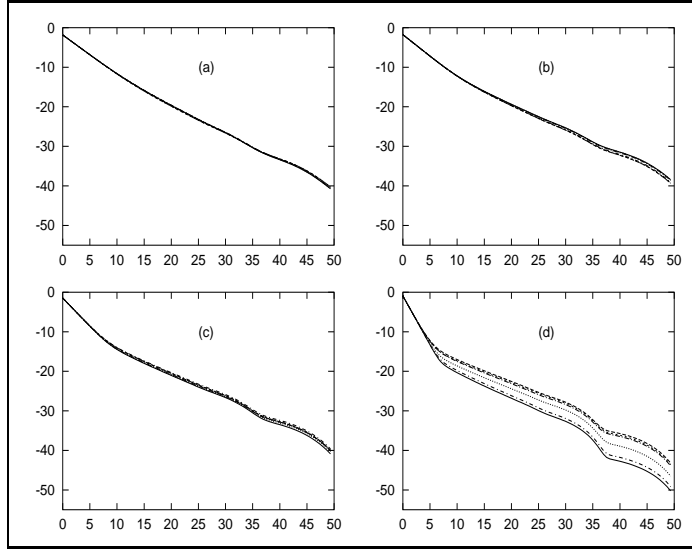


Figura 6.3  $\ln f_{e\perp}$  vs.  $u_{\perp}^2/2$  em (a)  $s = 0,05$ , (b)  $s = 0,2$ , (c)  $s = 0,4$  e (d)  $s = 0,6$  para parâmetros do JET e  $\tau_e = 100$ .

$I(\text{perfil})/I(\text{sem dif.})$ , que é a razão entre a corrente gerada na presença do termo de transporte e a corrente gerada no caso sem transporte, para os mesmos parâmetros usados para o caso das Figs. (6.5) e (6.6). Vê-se que os casos de perfis #1 e #3 são aqueles com maior valor de corrente. A corrente gerada atinge, para o perfil #1, um valor em torno de 2% maior que o caso sem transporte, o que é muito pouco. Portanto, mesmo estando de acordo com a Fig. (6.6), na ordem crescente de influência ( $\#2 < \#5 < \#4 < \#3 < \#1$ ), a intensidade da influência do perfil do coeficiente de transporte é muito pequena. A ordem de influência está de acordo com o encontrado em (Oliveira; Ziebell, 2001).

Nas Fig. (6.8) e Fig. (6.9), temos o valor da potência da onda LH absorvida como uma função de  $\tau$ , para os cinco diferentes casos do coeficiente de difusão, bem como para o caso sem transporte. Todos os casos de perfis apresentam o mesmo comportamento, o valor inicial alto da potência absorvida cai rapidamente para um valor mínimo depois de poucos tempos de colisão e depois cresce lentamente para um valor assintótico. Destaque-se que, como vemos na Fig. (6.8), não há muita diferença entre o efeito dos diferentes perfis. Mesmo assim, na Fig. (6.9) fazemos

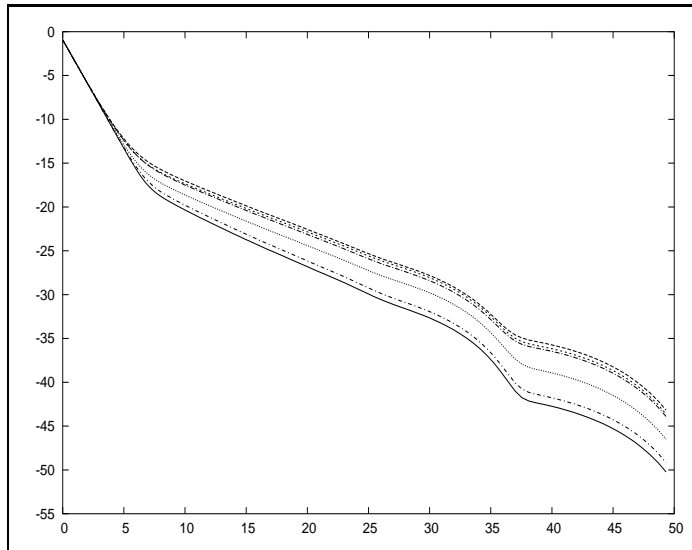


Figura 6.4  $\ln f_{e\perp}$  vs.  $u_{\perp}^2/2$  em  $s = 0,6$  para parâmetros do JET e  $\tau_e = 100$ . De cima para baixo tem-se a seguinte ordem dos perfis: #1, #3, #4, #2, #5, sem difusão.

uma ampliação da parte final do gráfico e percebemos que o perfil que mais influencia a absorção de potência da onda é o perfil #5.

Finalmente, as Figs. (6.10) e (6.12) exibem os perfis de densidade de corrente  $J$  e densidade de potência absorvida  $\rho$ , em estado assintótico, para os cinco diferentes perfis do coeficiente de difusão e o caso sem transporte. As Figs. (6.11) e (6.13) apresentam uma ampliação desses gráficos na região de  $s$  entre 0,4 e 0,6. O aspecto qualitativo mais notável que pode ser observado é que para todos os casos a densidade de corrente gerada está concentrada na região central da lâmina,  $|s| < 0,4$ . Novamente, todos os perfis apresentam aproximadamente o mesmo comportamento, i.e., apresentam um duplo pico no perfil de  $J$ . Note-se também que não aparece o aumento na densidade de corrente próximo a borda do plasma, como aparecia em (Oliveira; Ziebell, 2001)<sup>1</sup>. Considerando o perfil da densidade de potência absorvida, mostrado na Fig. (6.12), vemos que a dissipação de energia da onda pelas partículas ocorre principalmente para  $|s| < 0,4$ , com máximo em torno de  $s = 0,15$ .

<sup>1</sup>Esta e outras discordâncias com o referido artigo serão discutidas na Sub-Seção 6.3.3.

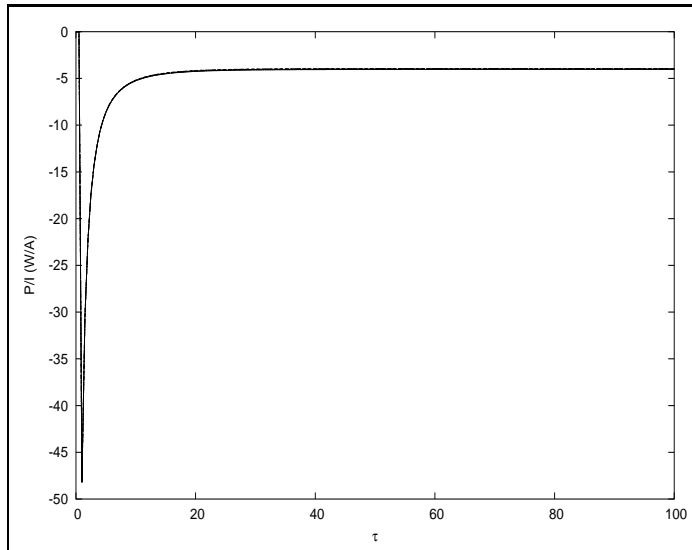


Figura 6.5 Razão  $P/I$ , para parâmetros do JET.

Os resultados obtidos na análise numérica apresentada aqui mostram que, na escala de tempo necessária para atingir um estado estacionário efetivo entre as ondas LH e colisões, pode ocorrer transporte radial de partículas em um plasma não homogêneo, mas o perfil do coeficiente de transporte não afeta a intensidade da geração de corrente.

### 6.3.2 Considerações sobre o perfil de densidade de elétrons

Ao apresentar o modelo de tokamak empregado neste trabalho (Seção 5.2), apresentamos um perfil de densidade de elétrons que permanece constante durante toda a evolução no tempo. Esse é um modelo que não é o mais realista. Uma outra opção é considerar os perfis de temperatura e campo magnético toroidal constantes, enquanto o perfil de densidade pode mudar com o tempo devido ao transporte de partículas e é dado por

$$n_e(s, \tau) = \int d^3u f(u, \mu, \tau, s). \quad (6.9)$$

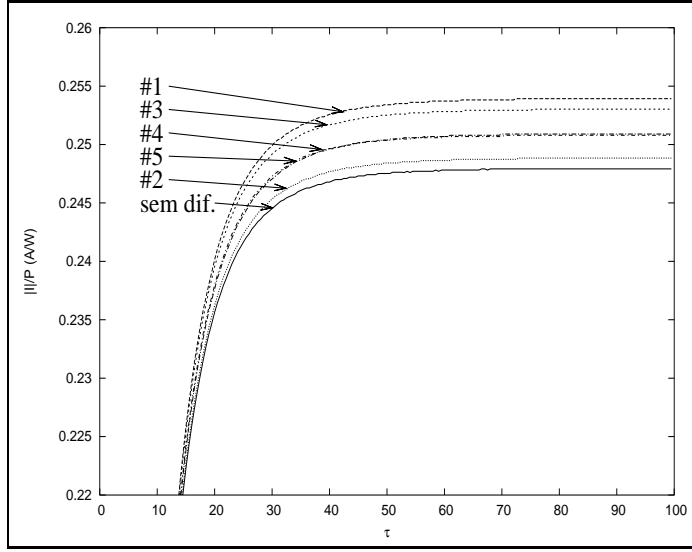


Figura 6.6 Razão  $|I|/P$ , para parâmetros do JET.

Mas mantém-se a condição de que a quantidade de partículas total no tokamak permanece constante, através de uma normalização da densidade de elétrons local, após um determinado número de iterações, da forma<sup>2</sup>

$$n_e(s) \rightarrow n_e(s) \frac{\int_0^a n_{e0}(s)(2\pi s)(2\pi R)ds}{\int_0^a n_e(s)(2\pi s)(2\pi R)ds}. \quad (6.10)$$

Entretanto, erros numéricos podem estar causando a perda indesejada de partículas.

Esse modelo também foi testado durante a execução deste trabalho. Entretanto, como pode ser visto na Fig. (6.14), o perfil de densidade apresenta variações mesmo para o caso sem transporte. Testando o código numérico na ausência tanto de difusão espacial quanto de ondas LH, verificamos modificação no perfil de densidade. Ficou evidenciado que a modificação decorre da imprecisão no tratamento do termo de colisões, pois nessa circunstância a distribuição deveria manter o estado Maxwelliano, sem alteração da densidade, ao longo de toda lâmina. Tentou-se, então, corrigir o problema usando um valor mais alto para a velocidade crítica, a partir da qual tem efeito o termo de colisões. Entretanto, mesmo para  $u_{\text{crit}} = 2, 5$ ,

<sup>2</sup>Esta normalização pode ser entendida percebendo-se que a integral no numerador é o número inicial de partículas e a do denominador o número de partículas no instante da iteração.



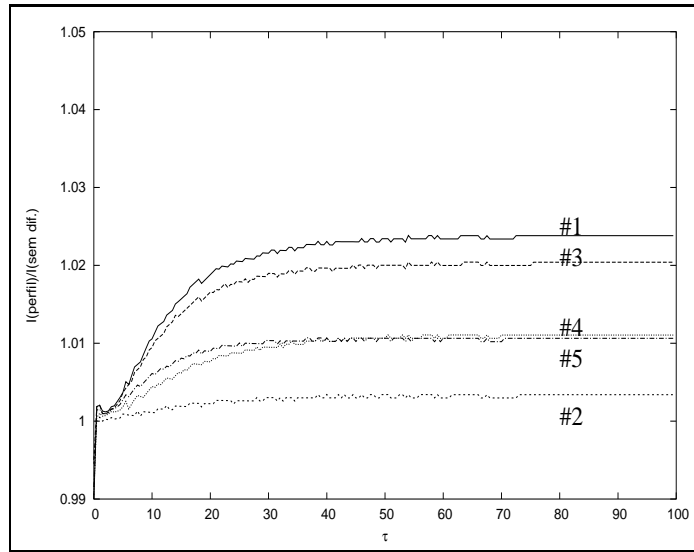


Figura 6.7 Razão  $I(\text{perfil})/I(\text{sem dif.})$ , para parâmetros do JET.

percebe-se na Fig. (6.15) que a influência do efeito da aproximação do termo de colisões é muito maior que o efeito do termo de transporte, mostrado no gráfico para o perfil #2. Portanto, com a aproximação do termo de colisões adotado não é possível estudar de forma confiável o efeito do termo de transporte para a situação em que se permite a variação do perfil de densidade, mas mantém-se o número de partículas fixo. Uma eventual continuidade desse trabalho deverá portanto requerer um aperfeiçoamento do tratamento do termo de colisões.

### 6.3.3 Considerações sobre resultados anteriores

Apresentamos um estudo preliminar sobre a influência do perfil do coeficiente de transporte na eficiência da geração de corrente por ondas do tipo LH no 6º Encontro Brasileiro de Física de Plasmas em 2001 (Oliveira; Ziebell, 2001). Entretanto, os resultados então apresentados possuem uma certa discordância dos atuais. A principal discordância é a ocorrência de crescimento próximo à borda da lâmina ( $s = 0,95$ ) para todos os perfis nos gráficos da densidade de corrente e da densidade de potência, coisa que não aparece nos resultados aqui apresentados.

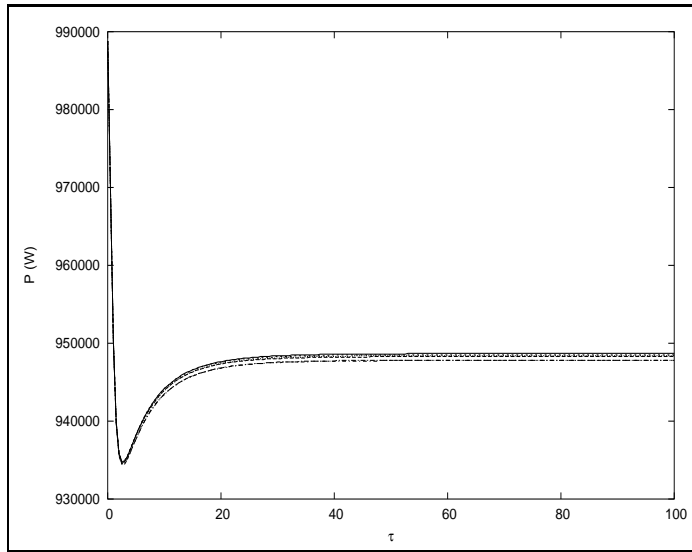


Figura 6.8 Potência da onda LH absorvida  $P$  vs.  $\tau$ , para parâmetros do JET.

A diferença ocorreu devido a uma incorreção nas condições de contorno para a variável espacial  $s$ , no código numérico usado para obter os resultados apresentados em (Oliveira; Ziebell, 2001). Em particular, não havia a declaração da  $f$  nos pontos 0 e  $N_s + 1$ . Esses pontos são usados no momento em que se calcula as derivadas espaciais nas bordas. Destaque-se, ainda, que os resultados apresentados no referido encontro foram obtidos com perfil de densidade constante e com normalização local da função distribuição.

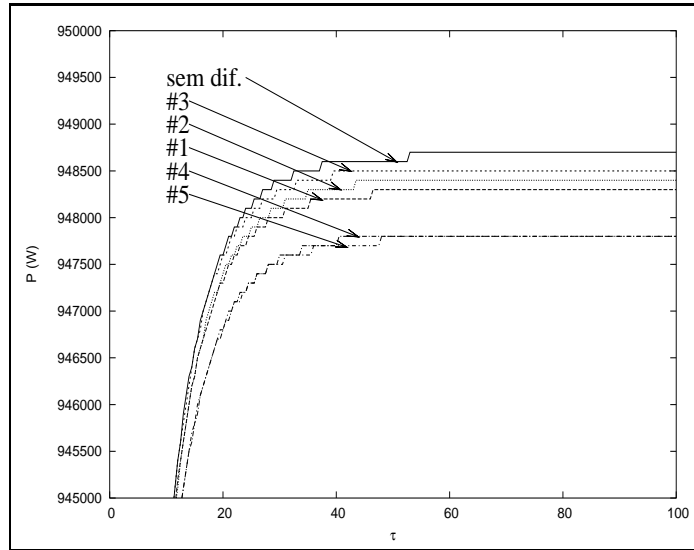


Figura 6.9 Potência da onda LH absorvida  $P$  vs.  $\tau$  (ampliado), para parâmetros do JET.

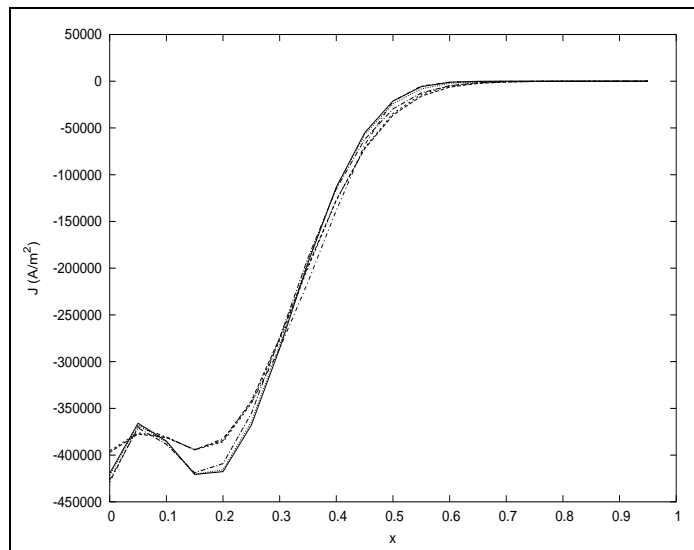


Figura 6.10 Densidade de corrente  $J$  no final da evolução vs. posição espacial normalizada  $s$ , para parâmetros do JET.

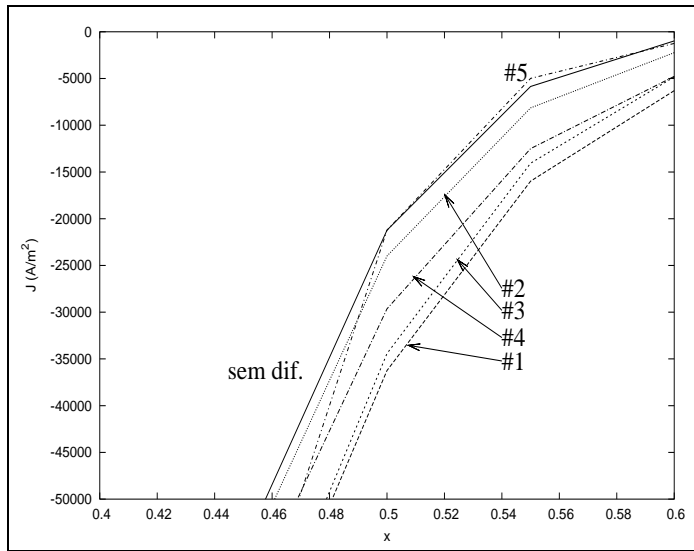


Figura 6.11 Densidade de corrente  $J$  no final da evolução vs. posição espacial normalizada  $s$  (ampliado), para parâmetros do JET.

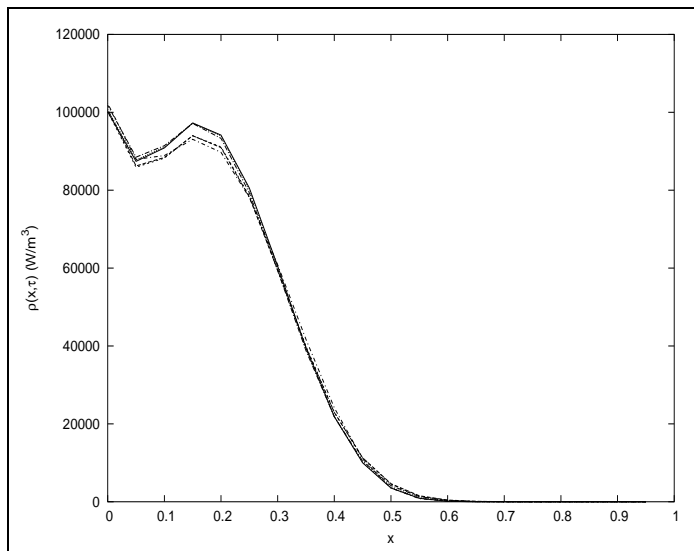


Figura 6.12 Densidade de potência  $\rho$  no final da evolução vs. posição espacial normalizada  $s$ , para parâmetros do JET.

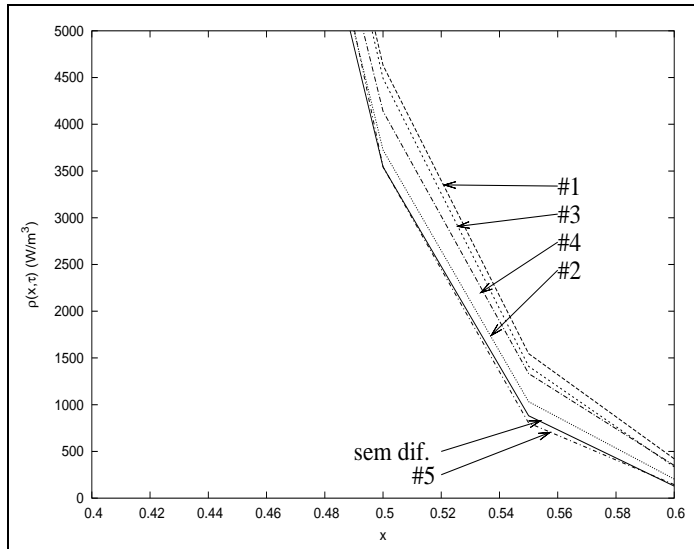


Figura 6.13 Densidade de potência  $\rho$  no final da evolução vs. posição espacial normalizada  $s$  (ampliado), para parâmetros do JET.

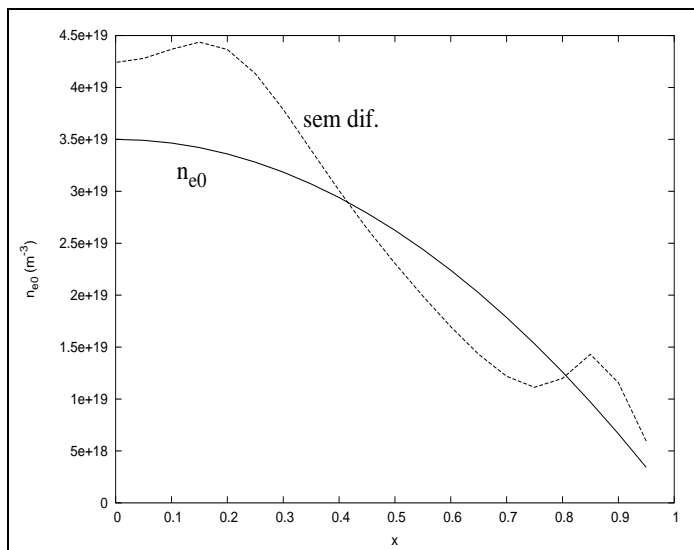


Figura 6.14 Densidade de elétrons inicial e final sem difusão vs. posição espacial normalizada  $s$ , para  $u_{\text{crit}} = 1, 0$  e para parâmetros do JET.

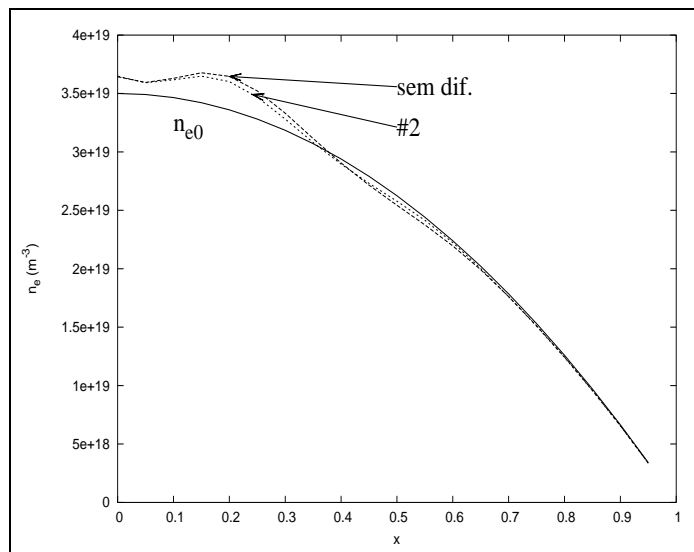


Figura 6.15 Densidade de elétrons inicial, final sem difusão e final do perfil #2 vs. posição espacial normalizada  $s$ , para  $u_{\text{crit}} = 2, 5$  e para parâmetros do JET.

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho fez-se um estudo da influência de diferentes perfis do termo de transporte radial na eficiência da geração de corrente por ondas do tipo híbrida inferior. Como equação básica considerou-se a equação de difusão quase-linear com três termos, a saber, de ação das ondas do tipo híbrida inferior, de colisões e de transporte.

Desenvolveu-se, este estudo, através das seguintes etapas: revisão de trabalhos publicados sobre geração de corrente por ondas LH, revisão sobre a descrição de ondas eletromagnéticas em plasmas, escolha de um modelo do tokamak e do pacote de ondas, resolução numérica da equação de difusão e análise dos resultados.

Com a análise dos resultados obtidos para os cinco perfis testados, concluiu-se que os perfis que apresentam valor máximo no centro da lâmina foram os que tiveram maior efeito sobre a geração de corrente. Entretanto, a intensidade desse efeito é muito pequena, para os valores utilizados do coeficiente de difusão.

Constatou-se que ocorrem diferenças nos resultados se o perfil de densidade é considerado constante ou se permitimos que esse perfil varie, mantendo o número de partículas constante. Entretanto, não foi possível realizar-se um estudo do segundo caso, em princípio mais realista, uma vez que verificamos que o erro gerado pela aproximação usada para o termo de colisões é maior do que a intensidade do efeito de transporte, que pretendemos investigar. Esse é portanto um aspecto que precisa ser aperfeiçoado, para permitir continuidade dessa investigação.

## ANEXO A-1      COEFICIENTE DE FOKKER-PLANCK

Neste apêndice, vamos apresentar a derivação do coeficiente de Fokker-Planck presente na equação quase-linear empregada neste trabalho. A derivação segue os procedimentos adotados na literatura (Gaffey, 1976; Tozawa, 1998).

O termo de colisão de Fokker-Planck representa o efeito de colisões coulombianas sobre a função distribuição de velocidades. Este termo é representado aqui por  $\theta(f_i, f_j)$  (onde  $f_i$  e  $f_j$  são funções de distribuição de velocidades de partículas do tipo  $i$  e  $j$ , respectivamente). A função distribuição de velocidades evolui no tempo de acordo com a seguinte equação:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_i + \frac{q_i}{m_i} (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}} = \sum_j \theta(f_i, f_j). \quad (\text{A-1.1})$$

Partindo da forma de Landau do operador de colisão de Fokker-Planck (Gaffey, 1976), o efeito de colisões entre partículas da espécie  $i$  e partículas da espécie  $j$  é dado por:

$$\theta(f_i, f_j) = 2\pi q_i^2 q_j^2 \ln \Lambda \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \int d^3 v_j \overset{\leftrightarrow}{w} \cdot \left( \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_j} \right) f_i f_j, \quad (\text{A-1.2})$$

onde

$$\overset{\leftrightarrow}{w} = \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_i} = \frac{1}{g^3} (g^2 \overset{\leftrightarrow}{1} - \vec{g} \vec{g}), \quad (\text{A-1.3})$$

e

$$g = |\vec{g}| = |\vec{v}_i - \vec{v}_j| \quad (\text{A-1.4})$$

é a velocidade relativa, sendo  $\ln \Lambda$  o fator de corte coulombiano usual.



Integrando por partes o segundo termo da equação (A-1.2) e usando a relação

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \overleftrightarrow{w} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}_j} \cdot \overleftrightarrow{w}, \quad (\text{A-1.5})$$

temos

$$\theta(f_i, f_j) = \frac{2\pi q_i^2 q_j^2 \ln \Lambda}{m_i^2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}_i} \cdot \int d^3 v_j \overleftrightarrow{w} f_j - \frac{m_i}{m_j} f_i \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \int d^3 v_j \overleftrightarrow{w} f_j \right]. \quad (\text{A-1.6})$$

Usando a definição (A-1.3) temos:

$$\theta(f_i, f_j) = \frac{2\pi q_i^2 q_j^2 n_{0j} \ln \Lambda v_{Tj}}{m_i^2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}_i} \cdot \frac{\partial^2 F(x_{ij})}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_i} - \frac{m_i}{m_j} f_i \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \frac{\partial^2 F(x_{ij})}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_i} \right], \quad (\text{A-1.7})$$

onde

$$F(x_{ij}) = \frac{1}{n_{0j} v_{Tj}} \int d^3 v_j f_j g_{ij} \quad (\text{A-1.8})$$

e  $x_{ij} \equiv v_i/v_{Tj}$ , sendo  $v_{Tj}$  a velocidade térmica definida como no artigo de Gaffey (1976), dada por:

$$v_{Tj} = \left( \frac{2T_j}{m_j} \right)^{1/2}, \quad (\text{A-1.9})$$

e  $n_{0j}$  é a densidade das partículas do tipo  $j$ .

Abaixo temos uma lista de relações que são úteis no tratamento da equação (A-1.7):

$$\frac{\partial x_{ij}}{\partial \vec{v}_i} = \frac{1}{v_{Tj}} \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad (\text{A-1.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \frac{\partial x_{ij}}{\partial \vec{v}_i} = \frac{2}{v_{Tj} v_i}, \quad (\text{A-1.11})$$

$$\frac{\partial^2 x_{ij}}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_i} = \frac{1}{v_{Tj} v_i^3} (v_i^2 \overleftrightarrow{1} - \vec{v}_i \vec{v}_i), \quad (\text{A-1.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \frac{\partial^2 x_{ij}}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_i} = -\frac{2}{v_{Tj}} \frac{\vec{v}_i}{v_i^3}, \quad (\text{A-1.13})$$

$$\frac{\partial x_{ij}}{\partial \vec{v}_i} \cdot \frac{\partial^2 x_{ij}}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_i} = 0. \quad (\text{A-1.14})$$

Com essas relações podemos escrever a equação (A-1.7) como:

$$\begin{aligned} \theta(f_i, f_j) = \Gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_i} F'(x_{ij}) + \frac{\vec{v}_i \vec{v}_i}{v_i^3} x_{ij} F''(x_{ij}) \right) \right. \\ \left. + 2 \frac{m_i}{m_j} f_i \frac{\vec{v}_i}{v_i^3} \left( F'(x_{ij}) - x_{ij} F''(x_{ij}) - \frac{x_{ij}^2}{2} F'''(x_{ij}) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A-1.15})$$

onde

$$\Gamma_{ij} = \frac{2\pi q_i^2 q_j^2 n_{0j} \ln \Lambda v_{Tj}}{m_i^2}. \quad (\text{A-1.16})$$

O operador colisão, equação (A-1.15), é um operador diferencial parcial em três dimensões de quarta ordem (o símbolo ( $'$ ) representa derivada em relação ao parâmetro  $x_{ij}$ ). A fim de simplificá-lo, fazemos a hipótese que a densidade de partículas em estudo é pequena em relação à densidade do plasma de fundo, de modo que as colisões entre partículas em estudo são desprezíveis frente a colisões com as partículas do plasma de fundo. Também fazemos a hipótese de que a função distribuição das partículas em estudo é axialmente simétrica em relação ao campo magnético.

A função  $F$  definida em (A-1.8) pode ser calculada analiticamente para a distribuição Maxwelliana (Gaffey, 1976) de modo que obtemos:

$$F(x_{ij}) = \left(x_{ij} + \frac{1}{2x_{ij}}\right)\Phi(x_{ij}) + \frac{1}{2}\Phi'(x_{ij}), \quad (\text{A-1.17})$$

onde  $\Phi(x_{ij})$  é a função erro e  $\Phi'(x_{ij})$  a sua derivada,

$$\begin{aligned} \Phi(x_{ij}) &\equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp^{-t^2} dt, \\ \Phi'(x_{ij}) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp^{-x^2}. \end{aligned} \quad (\text{A-1.18})$$

Podemos definir a função  $\Psi$

$$\Psi(x) \equiv \Phi(x) - x\Phi'(x), \quad (\text{A-1.19})$$

a fim de reescrever a equação (A-1.15) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \theta(f_i, f_j) = \Gamma_{ij} & \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left( 2 \frac{m_i}{m_j} \Psi(x_{ij}) \frac{\vec{v}_i}{v_i^3} f_i \right) + \right. \\ & \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left\{ \left[ \left( \Phi(x_{ij}) - \frac{1}{2x_{ij}^2} \Psi(x_{ij}) \right) \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_i} \right] \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}_i} \right\} \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left[ \left( \frac{1}{x_{ij}^2} \Psi(x_{ij}) \frac{\vec{v}_i \vec{v}_i}{v_i^2} \right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}_i} \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-1.20})$$

Para resolver essa equação é conveniente utilizar-se a seguinte relação para uma função  $G(x)$ , onde  $x = v/v_T$ ,

$$\frac{\partial G(x)}{\partial \vec{v}} = \frac{dG(x)}{dx} \frac{\partial x}{\partial \vec{v}} = G'(x) \frac{\partial x}{\partial \vec{v}} = G'(x) \frac{\vec{v}}{v_T v}. \quad (\text{A-1.21})$$

Com a utilização dessa relação (A-1.21), e outras apresentadas na literatura (Gaffey, 1976), o primeiro e o terceiro termos da equação (A-1.21) podem ser escritos somente como função de  $v$ . O segundo termo pode ser escrito utilizando a simetria axial do problema

$$\mu = \cos \theta = \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{e}_3. \quad (\text{A-1.22})$$

Após algumas manipulações analíticas, chegamos ao seguinte operador colisão geral, em função de  $v$  e  $\mu$ ,

$$\begin{aligned} \theta(f_i, f_j) = \Gamma_{ij} & \left[ \frac{1}{v_i^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial f_i}{\partial \mu} \right) \left( \Phi(x_{ij}) - \frac{1}{2x_{ij}^2} \Psi(x_{ij}) \right) \right. \\ & + \left( \frac{1}{x_{ij}^2} \Psi(x_{ij}) \right) \frac{1}{v_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial v_i^2} + \left( -\frac{1}{x_{ij}^2} \Psi(x_{ij}) + 2x_{ij} \Phi'(x_{ij}) \right) \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial f_i}{\partial v_i} \\ & \left. + 2 \frac{m_i}{m_j} \left( \Psi(x_{ij}) \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial f_i}{\partial v_i} + 2 \frac{x_{ij}^3}{v_i^3} \Phi'(x_{ij}) f_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-1.23})$$

Usaremos agora uma nova definição para velocidade térmica e velocidade adimensional, no intuito de adaptar ao nosso trabalho

$$v_{tj} = \left(\frac{T_j}{m_j}\right)^{1/2}, \quad (\text{A-1.24})$$

$$u_{ij} = \frac{v_i}{v_{tj}}, \quad (\text{A-1.25})$$

onde  $i$  e  $j$  denotam os tipos de partículas. Então a relação entre  $u_{ij}$  e  $x_{ij}$  é:

$$\frac{x_{ij}}{u_{ij}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}. \quad (\text{A-1.26})$$

O termo de colisão para um tipo de partícula  $b$  é definido como

$$\left(\frac{\partial f_b}{\partial t}\right)_{COL} = \sum_j \theta(f_b, f_j). \quad (\text{A-1.27})$$

Analisaremos, agora, o termo de colisão para elétrons (o  $b$  será referente aos elétrons, colidindo com partículas do tipo  $j$ ). Neste trabalho, as partículas envolvidas nas colisões são os elétrons e os íons. Por hipótese, as temperaturas dos elétrons e dos íons são iguais.

A normalização (A-1.25) implica na seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} u_{bj} &= \frac{v_b}{v_{tj}}, \\ \frac{\partial}{\partial v_b} &= \frac{1}{v_{tj}} \frac{\partial}{\partial u_{bj}}, \\ \frac{\partial^2}{\partial v_b^2} &= \frac{1}{v_{tj}^2} \frac{\partial^2}{\partial u_{bj}^2}. \end{aligned}$$

O tempo é normalizado pelo tempo de colisão eletrônica, definido como o inverso da frequência de colisão local

$$\tau = t\nu_b, \quad (\text{A-1.28})$$

o que implica em

$$\frac{\partial}{\partial t} = \nu_b \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (\text{A-1.29})$$

A frequência de colisão é definida como

$$\nu_b = \frac{\Gamma_{bb}}{v_{tb}^3} = \frac{2\pi e^4 n_0 \ln \Lambda}{m_b^2 v_{tb}^3}. \quad (\text{A-1.30})$$

Como estamos tratando com elétrons rápidos da cauda da função distribuição do plasma, podemos fazer aproximações de acordo com o regime de velocidade dos elétrons rápidos, que é

$$v_b \gg v_{te} \gg v_{ti}, \quad (\text{A-1.31})$$

o que corresponde a  $x_{be} \gg 1$  e  $x_{bi} \gg 1$ . Nesse limite, a função erro e sua derivada serão aproximadamente

$$\Phi(x) \approx 1, \quad (\text{A-1.32})$$

$$\Phi'(x) \approx 0, \quad (\text{A-1.33})$$

e

$$\Psi(x) \approx 1. \quad (\text{A-1.34})$$

Desprezaremos termos de ordem  $O(x^{-2})$ . Com isso, o operador de Fokker-Planck será

$$\theta(f_b, f_j) = \Gamma_{bj} \left[ \frac{1}{x_{bj}^2 v_b} \frac{\partial^2 f_b}{\partial v_b^2} + 2 \frac{m_b}{m_j} \frac{1}{v_b^2} \frac{\partial f_b}{\partial v_b} + \frac{1}{v_b^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f_b}{\partial \mu} \right]. \quad (\text{A-1.35})$$

Normalizando para a velocidade adimensional definida em (A-1.25), o operador colisão elétron-elétron é então

$$\theta(f_e, f_e) = \frac{\Gamma_{ee}}{v_{te}^3} \left[ \frac{2}{u_{ee}^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u_{ee}^2} + \frac{2}{u_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial u_{ee}} + \frac{1}{u_{ee}^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right]. \quad (\text{A-1.36})$$

Analogamente, o operador colisão elétron-íon é dado por

$$\theta(f_e, f_i) = \frac{\Gamma_{ei}}{v_{te}^3} \left[ \frac{2}{u_{ee}^3} \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u_{ee}^2} + \frac{2}{u_{ee}^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial f_e}{\partial u_{ee}} + \frac{1}{u_{ee}^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right], \quad (\text{A-1.37})$$

onde agora usamos o índice  $i$  para identificar os íons.

Como a razão  $m_e/m_i$  é da ordem de  $10^{-3}$ , desprezamos termos contendo esta razão no operador (A-1.37).

Portanto, o termo de colisão para elétrons, desprezando termos de ordem  $O(u^{-2})$  é

$$\left( \frac{\partial f_e}{\partial \tau_e} \right)_{COL} = \frac{Z^2 + 1}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] + \frac{2}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} f_e + f_e \right), \quad (\text{A-1.38})$$

É comum encontra-se na literatura (como em (Fidone et al., 1984)) esse termo escrito em função de  $\theta$  como

$$\left( \frac{\partial f_e}{\partial \tau_e} \right)_{COL} = \frac{Z^2 + 1}{u^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f_e \right) + \frac{2}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} f_e + f_e \right), \quad (\text{A-1.39})$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o momentum da partícula e o campo magnético do ambiente,  $Z$  é a carga iônica efetiva e  $u = u_{ee}$ .

## ANEXO A-2      CÁLCULO DA POTÊNCIA DISSIPADA POR ONDAS LH

Apresentaremos o cálculo da potência dissipada através do mesmo procedimento adotado por Tozawa, em 1998 (Tozawa, 1998). A potência dissipada é definida como a variação temporal da média da energia cinética das partículas, i.e.,

$$\begin{aligned} \langle E_\alpha \rangle &= \int d^3u \frac{m_\alpha v^2}{2} f_\alpha, \\ Pot_\alpha &\equiv \frac{d}{dt} \langle E_\alpha \rangle = \frac{T_\alpha \nu_\alpha}{2} \int d^3u u^2 \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \right)_{LH}, \end{aligned} \quad (A-2.1)$$

onde o índice  $LH$  corresponde ao tipo de onda híbrida inferior (LH). Introduzimos acima a velocidade normalizada  $\vec{u} = \vec{v}/v_{t_\alpha}$  e o tempo normalizado  $\tau_\alpha = t\nu_\alpha$ . A quantidade à direita da equação (A-2.1) representa a ação das ondas LH e é dada por

$$\left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \right)_{LH} = \frac{\partial}{\partial u_\parallel} (D_{LH} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_\parallel}). \quad (A-2.2)$$

A partir da equação (A-2.1), podemos obter a expressão normalizada para a potência dissipada por ondas do tipo LH

$$Pot_\alpha \equiv \frac{d}{d\tau_\alpha} \langle \frac{E_\alpha}{T_\alpha} \rangle = \frac{1}{2} \int d^3u u^2 (\partial_{\tau_\alpha} f_\alpha). \quad (A-2.3)$$

A função distribuição  $f$  do nosso problema tem simetria axial, portanto podemos utilizar coordenadas cilíndricas. Temos a seguinte mudança de coordenadas

$$u = \sqrt{u_\perp^2 + u_\parallel^2}, \quad (A-2.4)$$

$$\mu = \frac{u_\parallel}{u}, \quad (A-2.5)$$

de modo que as derivadas parciais serão respectivamente

$$\partial_{u_{\parallel}} = \mu \partial_u + \frac{1}{u}(1 - \mu^2) \partial_{\mu}, \quad (\text{A-2.6})$$

$$\partial_{u_{\perp}} = (1 - \mu^2)^{1/2} [\partial_u - \frac{\mu}{u} \partial_{\mu}]. \quad (\text{A-2.7})$$

A função  $f$  tem as seguintes condições de contorno e continuidade

$$\partial_u f(u = \infty) = 0; \partial_u f(u = 0) = 0, \quad (\text{A-2.8})$$

$$\partial_{\mu} f(\mu = -1) = 0; \partial_{\mu} f(\mu = 1) = 0. \quad (\text{A-2.9})$$

Aplicando em (A-2.2) as mudanças de coordenadas (A-2.4), (A-2.5), (A-2.6) e (A-2.7), temos

$$(Pot)_{LH} = \frac{1}{2} \int d^3u u^2 \left[ \mu \partial_u + \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right] D_{LH} \left[ \mu \partial_u + \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right] f_e, \quad (\text{A-2.10})$$

onde o índice  $e$  se refere à função distribuição de elétrons e o elemento de volume é dado por  $d^3u = -u^2 du d\mu d\varphi$ .

Fazendo integração por partes nas coordenadas cilíndricas e aplicando as condições de contorno (A-2.8) e (A-2.9), temos

$$\begin{aligned} (Pot)_{LH} = & -4\pi \int_{-1}^1 d\mu \mu \int_0^{\infty} du u^3 D_{LH}(u, \mu) \left[ \mu \partial_u + \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right] f_e \\ & + 2\pi \int_0^{\infty} du u^3 \int_{-1}^1 d\mu \mu D_{LH}(u, \mu) \left[ \mu \partial_u + \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right] f_e \end{aligned} \quad (\text{A-2.11})$$



Integramos novamente por partes, aplicando as condições de contorno e continuidade. Temos desta forma

$$\begin{aligned}
 (Pot)_{LH} = & 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty du u^2 [3\mu^2 D_{LH}(u, \mu) + \mu^2 u \partial_u D_{LH}(u, \mu)] f_e \\
 & + 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty du u^2 [(1 - \mu^2) D_{LH}(u, \mu) - 2\mu^2 D_{LH}(u, \mu) \\
 & + \mu(1 - \mu^2) \partial_\mu D_{LH}(u, \mu)] f_e, \quad (\text{A-2.12})
 \end{aligned}$$

ou na forma mais compacta

$$(Pot)_{LH} = \int d^3u [D_{LH}(u, \mu) + \mu^2 u \partial_u D_{LH}(u, \mu) + \mu(1 - \mu^2) \partial_\mu D_{LH}(u, \mu)] f_e. \quad (\text{A-2.13})$$

# ANEXO A-3 APLICAÇÃO DO MÉTODO ADI PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

## A-3.1 INTRODUÇÃO

A equação de difusão, estudada neste trabalho, incluindo os termos da híbrida, de colisão e de transporte, tem a seguinte forma

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_{LH} + \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_{COL} + \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_T. \quad (\text{A-3.1})$$

O primeiro termo da equação (A-3.1) do lado direito indica a ação das ondas do tipo híbrida inferior (LH), o segundo termo representa o efeito de colisões e o último termo o efeito de transporte. A equação (A-3.1) se constitui em uma equação tri-dimensional diferencial parcial linear de segunda ordem da forma escrita abaixo onde se acrescentou os termos lineares para deixar de uma forma mais geral:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(u, \mu, s) = a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \mu} + a_3 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + a_4 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + b_1 \frac{\partial f}{\partial u} + b_2 \frac{\partial f}{\partial \mu} + b_3 \frac{\partial f}{\partial s} + c_1 f + d_1. \quad (\text{A-3.2})$$

Em comparação com a equação (5.14), esta equação possui os termos  $c_1 f$  e  $d_1$  para torná-la mais geral.

A aplicação do método ADI para solução da equação de difusão já foi usado em outras teses e dissertações no Instituto de Física da UFRGS, particularmente em Rosa (1993) e Tozawa (1998), e está sendo descrita em detalhe aqui com a finalidade de tornar o trabalho "auto-contido" em seus aspectos principais.

## A-3.2 DIFERENÇAS FINITAS

Para descrever o método ADI e como ele foi utilizado neste trabalho, começaremos fazendo uma revisão de diferenças finitas conforme a literatura (Carnahan; Luther; Wilkes, 1969).

A função, que estamos estudando, depende de quatro variáveis, a saber:  $u$  o momentum normalizado;  $\mu = \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo de inclinação ou *pitch angle*, i.e., o ângulo entre o momentum do elétron e o campo magnético ambiente  $\vec{B}_0$ ;  $s$  a coordenada radial normalizada no plano equatorial (varia de 0 a 1) e o tempo normalizado  $\tau$ . Para calcularmos essa função numericamente, discretizamos as coordenadas definindo uma rede de pontos e transformamos as derivadas parciais em diferenças finitas. Por conveniência, mostraremos aqui como se faz este processo para uma função de duas variáveis, já que a equação para quatro variáveis possui termos semelhantes e pode ser facilmente obtida por analogia.

Consideremos, então, que a função  $f = f(u, \mu)$  possui um número suficiente de derivadas parciais, e assim, os valores de  $f$  em dois pontos  $(u, \mu)$  e  $(u + h, \mu + k)$  estão relacionados pela expansão de Taylor:

$$\begin{aligned} f(u + h, \mu + k) = & f(u, \mu) + \left(h \frac{\partial}{\partial u} + k \frac{\partial}{\partial \mu}\right) f(u, \mu) + \\ & \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial u} + k \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 f(u, \mu) + \dots + \\ & \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial u} + k \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^{n-1} f(u, \mu) + R_n, \end{aligned} \quad (\text{A-3.3})$$

onde o termo restante é dado por

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial u} + k \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^n f(u + \epsilon h, \mu + \epsilon k), \quad (\text{A-3.4})$$

para  $0 < \epsilon < 1$ .

Isto é,

$$R_n = O[(|h| + |k|)^n], \quad (\text{A-3.5})$$

onde (A-3.5) significa que existe uma constante positiva  $H$  tal que  $|R_n| \leq K(|h| + |k|)^n$  quando ambos  $h$  e  $k$  tendem a zero. Pode-se, então, desprezar esse termo restante.

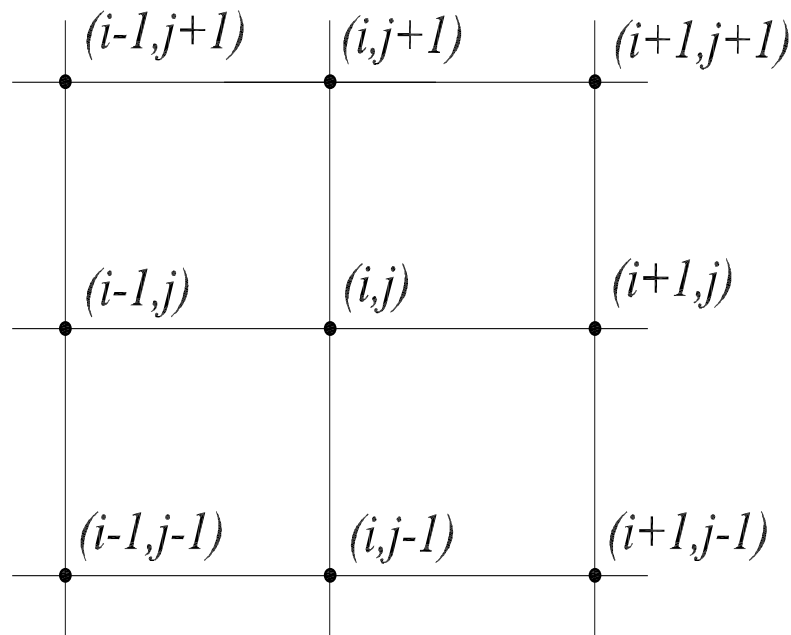


Figura A-3.1 Disposição dos pontos de grade.

O ponto na rede  $(i\Delta u, j\Delta\mu)$ , também chamado de ponto de grade  $(i, j)$ , é cercado por uma vizinhança de pontos de grade como mostrado na Fig.(A-3.1). Expandindo em séries de Taylor para  $f_{i-1,j}$  e  $f_{i+1,j}$  em torno do valor central  $f_{i,j}$ , obtemos

$$f_{i-1,j} \doteq f_{i,j} - \Delta u f_u + \frac{(\Delta u)^2}{2!} f_{uu} - \frac{(\Delta u)^3}{3!} f_{uuu} + \frac{(\Delta u)^4}{4!} f_{uuuu} + \dots, \quad (\text{A-3.6})$$

$$f_{i+1,j} \doteq f_{i,j} + \Delta u f_u + \frac{(\Delta u)^2}{2!} f_{uu} + \frac{(\Delta u)^3}{3!} f_{uuu} + \frac{(\Delta u)^4}{4!} f_{uuuu} + \dots \quad (\text{A-3.7})$$

Aqui  $f_u \equiv \partial f / \partial u$ ,  $f_{uu} \equiv \partial^2 f / \partial u^2$ , etc., e todas as derivadas são calculadas no ponto de grade  $f_{i,j}$ . Por definição, temos as seguintes fórmulas de diferenças finitas para as derivadas de primeira ordem e segunda ordem para  $f$  no ponto  $(i, j)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta u} + O(\Delta u), \quad (\text{A-3.8})$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta u} + O(\Delta u), \quad (\text{A-3.9})$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta u} + O[(\Delta u)^2], \quad (\text{A-3.10})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{(\Delta u)^2} + O[(\Delta u)^2]. \quad (\text{A-3.11})$$

As fórmulas (A-3.8), (A-3.9) e (A-3.10) são conhecidas como diferença finita avançada, recuada e central, respectivamente. Existem formas similares para  $\partial f / \partial \mu$ ,  $\partial^2 f / \partial \mu^2$ . Veremos na próxima seção uma forma conveniente para se escrever a derivada mista.

## A-3.3 MÉTODO EXPLÍCITO E MÉTODO IMPLÍCITO

Introduziremos, agora, os conceitos dos métodos explícito e implícito na resolução de equações diferenciais parciais. Para tanto, tomemos como exemplo a seguinte equação diferencial para a função unidimensional  $f(u, \tau)$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad (\text{A-3.12})$$

para  $0 < u < 1$ ,  $0 < \tau < T$  com condições de contorno  $g_0(\tau)$  e  $g_1(\tau)$ , e condição inicial  $f_0(u)$

$$\begin{aligned} f(0, \tau) &= g_0(\tau), & 0 < \tau \leq T \\ f(1, \tau) &= g_1(\tau), & 0 < \tau \leq T, \\ f(u, 0) &= f_0(u), & 0 \leq u \leq 1. \end{aligned} \tag{A-3.13}$$

Construímos uma grade de valores para a função  $f$ ,  $(i\Delta u, n\Delta\tau)$  com espaçamento de grade  $\Delta u = 1/M$ ,  $\Delta\tau = T/N$ , onde  $M$  e  $N$  são valores inteiros arbitrários. Para pontos de grade  $(i, n)$  que não sejam para  $i = 0$  ou  $i = M$ , as derivadas de (A-3.12) são substituídas por diferenças finitas, (A-3.11) e análoga a (A-3.8) em  $\tau$ . Temos então

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta\tau} = \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{(\Delta u)^2}. \tag{A-3.14}$$

Podemos, então, calcular explicitamente o valor de  $f_i^{n+1}$  no instante  $\tau^{n+1}$  através dos valores de  $f_i^n$  no instante  $\tau^n$  para  $1 \leq i \leq M - 1$ ,

$$f_i^{n+1} = \lambda f_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) f_i^n + \lambda f_{i+1}^n, \tag{A-3.15}$$

onde

$$\lambda = \frac{\Delta\tau}{(\Delta u)^2}. \tag{A-3.16}$$

Usando os valores iniciais de  $f$  em  $\tau = 0$ ,

$$f_i^0 = f_0(u_i). \tag{A-3.17}$$

Para os pontos de borda,  $i = 0$ ,  $i = M$ , usamos as condições de contorno

$$\begin{aligned} f_0^{n+1} &= g_0(\tau^{n+1}) \\ f_M^{n+1} &= g_1(\tau^{n+1}). \end{aligned} \tag{A-3.18}$$

Cabe, ainda, ressaltar que para assegurar a estabilidade, a seguinte restrição entre o incremento de tempo e o de espaço deve ser seguida (Carnahan; Luther; Wilkes, 1969)

$$\Delta\tau \leq \frac{(\Delta u)^2}{2}, \quad (\text{A-3.19})$$

ou seja,  $0 \leq \lambda \leq 1/2$ .

Por outro lado, o método implícito trata a equação (A-3.12), representando a derivada segunda de  $f$  em relação a  $u$ , como a forma diferencial para um nível de tempo avançado  $\tau^{n+1}$ , em vez de  $\tau^n$  como no método explícito. Desta forma, podemos expressar a equação (A-3.12) como

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta\tau} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{(\Delta u)^2}. \quad (\text{A-3.20})$$

Lembrando a definição (A-3.16) temos

$$-\lambda f_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) f_i^{n+1} - \lambda f_{i+1}^{n+1} = f_i^n. \quad (\text{A-3.21})$$

As condições de contorno e a condição inicial são as mesmas que do método explícito, ou seja,

$$\begin{aligned} f_0^{n+1} &= g_0(\tau^{n+1}), \\ f_M^{n+1} &= g_1(\tau^{n+1}), \\ f_i^0 &= f_0(u_i). \end{aligned} \quad (\text{A-3.22})$$

Assim, para o nível de tempo  $\tau^n$ , a equação (A-3.21) é escrita uma vez para cada ponto  $1 \leq i \leq M - 1$ , resultando em um sistema de  $M - 1$  equações

simultâneas com  $M - 1$  incógnitas  $f_i^{n+1}$ .

$$\begin{aligned}
 (1 + 2\lambda)f_1^{n+1} - \lambda f_2^{n+1} &= f_1^n + \lambda g_0(\tau^{n+1}), \\
 &\dots \\
 -\lambda f_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)f_i^{n+1} - \lambda f_{i+1}^{n+1} &= f_i^n \text{ para } 2 \leq i \leq M - 2, \quad (\text{A-3.23}) \\
 &\dots \\
 -\lambda f_{M-2}^{n+1} + (1 + 2\lambda)f_{M-1}^{n+1} &= f_{M-1}^n + \lambda g_1(\tau^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Com os coeficientes de  $f_{i-1}^{n+1}$ ,  $f_i^{n+1}$  e  $f_{i+1}^{n+1}$ , formamos uma matriz tri-diagonal que permite que o sistema (A-3.23) seja resolvido pelo método de eliminação Gaussiana que é descrito em (Carnahan; Luther; Wilkes, 1969).

Faltou ainda, na seção anterior (não tínhamos os conceitos de derivadas explícita e implícita), apresentar uma forma conveniente de escrever a derivada mista a fim de que se continue a ter uma matriz tridiagonal. Para fazer isso, vamos proceder da seguinte forma. Primeiramente calculamos a derivada em  $u$  como a média entre as derivadas centrais explícita e implícita, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n + f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{4\Delta u} \quad (\text{A-3.24})$$

Posteriormente, calculamos a derivada em  $\mu$  como a diferença finita avançada da explícita e recuada da implícita. Ficamos, então, com a seguinte expressão para a derivada mista.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \mu} &= \frac{(f_{i+1,j+1}^n - f_{i-1,j+1}^n) - (f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n)}{4\Delta u \Delta \mu} + \\
 &\frac{(f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}) - (f_{i+1,j-1}^{n+1} - f_{i-1,j-1}^{n+1})}{4\Delta u \Delta \mu} + O[(\Delta u + \Delta \mu)^2]. \quad (\text{A-3.25})
 \end{aligned}$$



## A-3.4 MÉTODO IMPLÍCITO EM DIREÇÕES ALTERNADAS

Até aqui falamos em uma equação com uma dimensão, mais o tempo. Agora, vamos apresentar um procedimento que pode ser usado para duas ou mais dimensões – método implícito em direções alternadas (ADI). Para um melhor entendimento vamos nos fixar a duas dimensões. Nesse caso, o método consiste basicamente em dividir cada intervalo de tempo  $\Delta\tau$  em dois subintervalos  $\frac{1}{2}\Delta\tau$  e, no primeiro intervalo, encontrar a função procurada implicitamente em uma direção, e explicitamente na outra direção. Já no subintervalo seguinte, encontrá-la explicitamente naquela direção e implicitamente nesta direção.

A Fig.(A-3.2) procura ilustrar este procedimento, onde no primeiro subintervalo o tempo varia de  $\tau$  a  $\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau$ , correspondendo a uma variação no tempo discretizado dada por:  $n$  a  $n + 1/2$ , e no segundo subintervalo, o tempo varia de  $\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau$  a  $\tau + \Delta\tau$ , correspondendo a uma variação no tempo discretizado dada por:  $n + 1/2$  a  $n + 1$ .

Em nosso problema, temos uma dimensão espacial que consiste na distância radial ao centro do plasma. Aplicaremos o método ADI nas direções  $u$  e  $\mu$  e resolvemos explicitamente na direção  $s$ .

Poderíamos ter feito uma generalização do método ADI, fazendo em três subintervalos. No primeiro, explícito nas direções  $s$  e  $\mu$ , implícito em  $u$ . No segundo subintervalo, explícito em  $s$  e  $u$ , implícito em  $\mu$ . Finalmente, no terceiro subintervalo, fazer explícito em  $u$  e  $\mu$  e implícito em  $s$ . Esse método, entretanto, apresenta o inconveniente de aumentar o tempo computacional. Como já obtemos bons resultados com o método ADI mais a resolução explícita na terceira dimensão, não o adotamos.

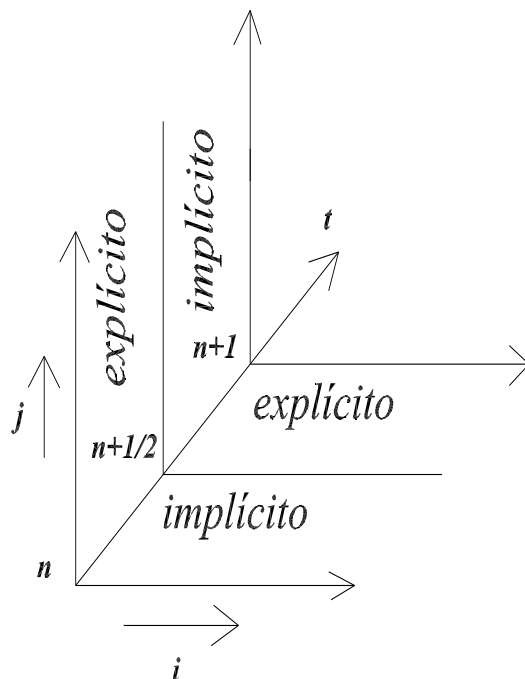


Figura A-3.2 Esquema ilustrativo do método ADI

Vejamos, então, como fica a equação (A-3.2) com a aplicação desse método. No primeiro subintervalo para pontos fora de região de contorno:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j,k}^n}{\Delta\tau/2} &= \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
 &+ \frac{a_{i,j}^3}{(\Delta\mu)^2} (f_{i,j+1,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j-1,k}^n) \\
 &+ \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\
 &+ \frac{b_{i,j}^1}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
 &+ \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta\mu} (f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n) \\
 &+ \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) \\
 &+ c_{i,j} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + d_{i,j} \\
 &+ a_{i,j}^2 \partial_\mu \partial_u f.
 \end{aligned} \tag{A-3.26}$$

O termo de derivada mista na equação (A-3.26)<sup>1</sup> não está escrito explicitamente. Vamos escrever esse termo como fizemos em (A-3.25).

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_u f = \frac{1}{4\Delta\mu\Delta u} & [(f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n) - (f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n) \\ & + (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) - (f_{i+1,j-1,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j-1,k}^{n+\frac{1}{2}})] \end{aligned} \quad (\text{A-3.27})$$

Observemos que os dois últimos termos estão calculados no instante  $n + \frac{1}{2}$ . Isto não gera problemas porque esses termos se referem a um ponto em  $j - 1$ , que já é conhecido ao procurarmos a solução para o ponto em  $j$ . Para  $j = 1$ , veremos adiante que esse termo desaparece.

Retornemos à equação (A-3.26) e observemos que para  $k = 1$  e  $k = N_s$ , i.e., no primeiro e no último ponto espacial, não temos a definição, respectivamente, de  $f$  para  $f_{k-1}$  e  $f_{k+1}$ . Esta dificuldade é resolvida considerando que a  $f$  é simétrica radialmente e, portanto, sua derivada no primeiro ponto espacial, i.e., no centro, é nula. Já para a  $f$  no último ponto vamos considerar a condição de contorno de não haver partículas em  $N_s + 1$  e tomar a função nula neste ponto.

Vamos, agora, separar no membro direito tudo que é conhecido, qual seja, a parte explícita e os termos calculados no instante  $n$ . Deixamos do lado esquerdo a parte desconhecida. Temos, então, um sistema tridiagonal de equações como já havíamos nos referido.

$$\alpha_1 f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_1 f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_1 f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \psi_{i,j}^{1,n}, \quad (\text{A-3.28})$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta u} \left( -\frac{a_{i,j}^1}{\Delta u} + \frac{b_{i,j}^1}{2} + \frac{a_{i,j}^2}{4\Delta u} \right), \quad (\text{A-3.29})$$

$$\beta_1 = \left( \frac{2}{\Delta\tau} + \frac{2a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} - c_{i,j} \right), \quad (\text{A-3.30})$$

---

<sup>1</sup>Nessa equação escrevemos os subscritos dos coeficientes como sobreescritos para não carregar a notação.

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\Delta u} \left( \frac{a_{i,j}^1}{\Delta u} + \frac{b_{i,j}^1}{2} + \frac{a_{i,j}^2}{4\Delta\mu} \right), \quad (\text{A-3.31})$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{1,n} &= \frac{2}{\Delta\tau} f_{i,j,k}^n + \frac{a_{i,j}^3}{(\Delta\mu)^2} (f_{i,j+1,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j-1,k}^n) \\ &+ \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta\mu} (f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n) + \frac{a_{i,j}^2}{4\Delta u \Delta\mu} [(f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n) \\ &\quad - (f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n) + (-f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n)] \\ &\quad + \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) + d_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{A-3.32})$$

Para os pontos com  $j = 1$  e  $j = N_j$ , temos, respectivamente,  $\mu = 1$  e  $\mu = -1$ , assim os coeficientes  $a^2$  e  $a^3$  são nulos. Desse modo, as equações para as diferenças finitas não envolvem o termo de derivada mista. Além disso, fazemos a derivada "avançada" em  $\mu$  para  $j = 1$  e "retardada" para  $j = N_j$ , já que não existem, respectivamente, os pontos  $j = 0$  e  $j = N_{j+1}$ .

A equação (A-3.26), para  $j = 1$ , fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j,k}^n}{\frac{\Delta\tau}{2}} &= \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + \frac{b_{i,j}^1}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta\mu} (f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j,k}^n) \\ &\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + c_{i,j} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + d_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{A-3.33})$$

Organizando os termos conhecidos do lado direito do sinal de igualdade e os não conhecidos do lado esquerdo, temos a estrutura tridiagonal dada pela equação (A-3.28), onde os coeficientes são dados abaixo.

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta u} \left( -\frac{a_{i,j}^1}{\Delta u} + \frac{b_{i,j}^1}{2} \right), \quad (\text{A-3.34})$$

$$\beta_1 = \left( \frac{2}{\Delta \tau} + \frac{2a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} - c_{i,j} \right), \quad (\text{A-3.35})$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\Delta u} \left( \frac{a_{i,j}^1}{\Delta u} + \frac{b_{i,j}^1}{2} \right), \quad (\text{A-3.36})$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{1,n} &= \frac{2}{\Delta \tau} f_{i,j,k}^n + \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta \mu} (f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n) \\ &\quad + \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) + d_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{A-3.37})$$

Para  $j = N_j$ , a equação (A-3.26) fica:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j,k}^n}{\frac{\Delta \tau}{2}} &= \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + \frac{b_{i,j}^1}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta \mu} (f_{i,j,k}^n - f_{i,j-1,k}^n) \\ &\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + c_{i,j} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + d_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{A-3.38})$$

Reorganizando os termos, temos (A-3.28) com os seguintes coeficientes

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta u} \left( -\frac{a_{i,j}^1}{\Delta u} + \frac{b_{i,j}^1}{2} \right), \quad (\text{A-3.39})$$

$$\beta_1 = \left( \frac{2}{\Delta \tau} + \frac{2a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} - c_{i,j} \right), \quad (\text{A-3.40})$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\Delta u} \left( \frac{a_{i,j}^1}{\Delta u} + \frac{b_{i,j}^1}{2} \right), \quad (\text{A-3.41})$$

$$\begin{aligned} \psi 1_{i,j}^n &= \frac{2}{\Delta \tau} f_{i,j,k}^n \\ &+ \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta \mu} (f_{i,j,k}^n - f_{i,j-1,k}^n) \\ &\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) + d_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{A-3.42})$$

No segundo subintervalo vamos considerar implícitas as derivadas na coordenada  $\mu$ , correspondentes ao índice  $j$ , calculando as diferenças finitas no instante  $n + 1$ , enquanto mantemos explícitas as derivadas nas coordenadas  $u$  (correspondentes a  $i$ ) e  $s$  (correspondentes a  $k$ ), calculando as diferenças finitas no instante

$n + \frac{1}{2}$ . Assim, para pontos dentro do contorno, temos

$$\begin{aligned}
\frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta\tau}{2}} &= \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{a_{i,j}^3}{(\Delta\mu)^2} (f_{i,j+1,k}^{n+1} - 2f_{i,j,k}^{n+1} + f_{i,j-1,k}^{n+1}) \\
&\quad \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\
&\quad + \frac{b_{i,j}^1}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta\mu} (f_{i,j+1,k}^{n+1} - f_{i,j-1,k}^{n+1}) \\
&\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) + \\
&\quad \quad \quad + c_{i,j} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + d_{i,j} \\
&+ \frac{a_{i,j}^2}{4\Delta u \Delta\mu} [(f_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i+1,j-1,k}^{n+\frac{1}{2}}) - (f_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j-1,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + (f_{i,j+1,k}^{n+1} - f_{i,j-1,k}^{n+1}) - (f_{i-1,j+1,k}^{n+1} - f_{i-1,j-1,k}^{n+1})]. \tag{A-3.43}
\end{aligned}$$

Novamente a derivada mista, último termo da equação (A-3.43), foi calculada como na equação (A-3.25). Ressaltamos que ao escrevermos a equação (A-3.43) para um dado  $i$ , mesmo os termos em  $n + 1$  são conhecidos, já que foram calculados ao resolvermos o sistema para pontos em  $i - 1$ .

Reorganizando a parte não conhecida e conhecida como em (A-3.28) obtemos

$$\alpha_2 f_{i,j-1,k}^{n+1} + \beta_2 f_{i,j,k}^{n+1} + \gamma_2 f_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} = \psi_{i,j}^{2,n+\frac{1}{2}}, \tag{A-3.44}$$

onde

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Delta\mu} \left( -\frac{a_{i,j}^3}{\Delta\mu} + \frac{b_{i,j}^2}{2} + \frac{a_{i,j}^2}{4\Delta u} \right) \tag{A-3.45}$$

$$\beta_2 = \left( \frac{2}{\Delta\tau} + \frac{2a_{i,j}^3}{(\Delta\mu)^2} - c_{i,j} \right) \tag{A-3.46}$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{\Delta\mu} \left( \frac{a_{i,j}^3}{\Delta\mu} + \frac{b_{i,j}^2}{2} + \frac{a_{i,j}^2}{4\Delta u} \right), \tag{A-3.47}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j}^{2,n+\frac{1}{2}} &= \frac{2}{\Delta\tau} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{a_{i,j}^2}{4\Delta u\Delta\mu} [(f_{i+1,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i+1,j-1,k}^{n+\frac{1}{2}}) - (f_{i,j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j-1,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + (f_{i,j+1,k}^{n+1} - f_{i,j-1,k}^{n+1}) - (f_{i-1,j+1,k}^{n+1} - f_{i-1,j-1,k}^{n+1})] \\
&+ \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\
&\quad + \frac{b_{i,j}^1}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) \\
&\quad + d_{i,j,k}.
\end{aligned} \tag{A-3.48}$$

Para  $j = 1$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta\tau}{2}} &= \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\
&\quad + \frac{b_{i,j}^1}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta\mu} (f_{i,j+1,k}^{n+1} - f_{i,j-1,k}^{n+1}) \\
&\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) \\
&\quad + c_{i,j} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + d_{i,j}.
\end{aligned} \tag{A-3.49}$$

Montando a estrutura tridiagonal (A-3.44), obtemos

$$\alpha_2 = 0, \tag{A-3.50}$$

$$\beta_2 = \left( \frac{2}{\Delta\tau} + \frac{b_{i,j}^2}{(\Delta\mu)} - c_{i,j} \right), \tag{A-3.51}$$



$$\gamma_2 = -\frac{b_{i,j}^2}{\Delta\mu}, \quad (\text{A-3.52})$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{2,n+\frac{1}{2}} &= \frac{2}{\Delta\tau} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + \frac{b_{i,j}^1}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) + \\ &\quad \quad \quad + d_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (\text{A-3.53})$$

Para  $j = N_j$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta\tau}{2}} &= \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad + \frac{b_{i,j}^1}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{b_{i,j}^2}{2\Delta\mu} (f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j-1,k}^{n+1}) \\ &\quad + \frac{b_k^3}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) \\ &\quad \quad \quad + c_{i,j} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + d_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{A-3.54})$$

Procedendo da mesma forma para obter a estrutura tridiagonal, temos

$$\alpha_2 = \frac{b_{i,j}^2}{\Delta\mu}, \quad (\text{A-3.55})$$

$$\beta_2 = \left( \frac{2}{\Delta\tau} + \frac{b_{i,j}^2}{(\Delta\mu)^2} - c_{i,j} \right), \quad (\text{A-3.56})$$

$$\gamma_2 = 0, \quad (\text{A-3.57})$$

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j}^{2,n+\frac{1}{2}} &= \frac{2}{\Delta\tau} f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{a_{i,j}^1}{(\Delta u)^2} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2f_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{a_k^4}{(\Delta s)^2} (f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n) \\
&\quad + \frac{b1_{i,j}}{2\Delta u} (f_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \frac{b3_k}{2\Delta s} (f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n) \\
&\quad + d_{i,j,k}. \quad (\text{A-3.58})
\end{aligned}$$

## REFERÊNCIAS

AKHIEZER, A. I. et al. *Plasma eletrodynamics*. Oxford: Pergamon, 1975. v.2, cap. 9, p. 47-53.

ANDRADE, M. C. R. de et al. Interaction of lower hybrid waves with fast ions in JET. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 36, n. 7, p. 1171-1188, July 1994.

BARBATO, E.; SANTINI, F. Quase-linear absorption of lower hybrid waves by fusion generated alpha particles. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 31, n. 4, p. 673-685, Apr. 1991.

BARBATO, E. Recent progress in lower hybrid current drive theory and experiments. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 40, p. A63-A76, Aug. 1998. Supplement.

BARTIROMO, R. et al. Fast electron confinement during lower hybrid experiments in ASDEX. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 33, n. 10, p. 1483-1492, Oct. 1993.

BELIKOV, V. S.; SILIVRA, O. A. Alpha-particle losses in a tokamak reactor with current driven by lower hybrid waves. *Plasma Physics Report*, Woodbury, v. 19, n.8, p.491-495, Aug. 1993.

BONOLI, P. T. et al. Numerical modelling of lower hybrid RF heating and current drive experiments in the Alcator-C tokamak. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 28, n. 6, p. 991-1012, June 1988.

BRUSATI, M. et al. Determination of the suprathermal electron distribution function during lower hybrid current drive in JET. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 34, n. 1, p. 23-42, Jan. 1994.

CAIRNS, R. A. et al. Spatial diffusion of fast particles in lower hybrid current drive. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 35, n. 11, p. 1413-1417, Nov. 1995.

CARNAHAN, B.; LUTHER, H.; WILKES, J. *Applied numerical methods*. New York: John Wiley, 1969.

CHEN, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 2. ed. New York: Plenum, 1974. v. 2.

COLBORN, J. A. et al. Current drive and magnetic turbulence experiments with electron cyclotron and lower hybrid waves on the Versator-II tokamak. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 38, n. 6, p. 783-794, June 1998.

DUMONT, R.; GIRUZZI, G.; BARBATO, E. Combined kinetic and transport modelling of radiofrequency current drive. *Physics of Plasmas*, Melville, v. 7, n. 12, p. 4972-4982, Dec. 2000.

FIDONE, I.; MEYER, R. L.; GRANATA, G. Quasilinear saturation effects on electron cyclotron wave damping of the ordinary mode in tokamak plasmas. *Physics of Fluids*, New York, v. 26, n. 11, p. 3292-3299, Nov. 1983.

FIDONE, I. et al. Current drive by the combined effects of electron-cyclotron and Landau wave damping in tokamak plasmas. *Physics of Fluids*, Woodburg, v. 27, n. 10, p. 2468-2476, Oct. 1984.

FISCH, N. J. Theory of current drive in plasmas. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v.59, n. 1, p. 175-234, Jan. 1987.

FUCHS, V. et al. Simulations of current density profile control using lower hybrid current drive in the TdeV tokamak. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 35, n. 1, p. 1-22, Jan. 1995.

GAFFEY Jr., J. D. Energetic ion distribution resulting from neutral beam injection in tokamaks. *Journal of Plasma Physics*, London, v. 16, n. 2, p. 149-169, Oct. 1976.

GIRUZZI, G.; FIDONE, I.; MEYER, R. L. Central current profile control by electron cyclotron waves and lower hybrid waves in tokamak plasmas. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 29, n.8, p. 1381-1384, Aug. 1989.

HAGLER, M. O.; KRISTIANSEN, M. *An introduction to controlled thermonuclear fusion*. Lexington: Lexington Books, 1977.

HEIKKINEN, J. A.; SIPILÄ, S. K. Current driven by lower hybrid heating of thermonuclear alpha particles in tokamak reactors. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 36, n. 10, p. 1345-1355, Oct. 1996.

IGNAT, D. W.; VALEO, E. J.; JARDIN, S. C. Dynamic modelling of lower hybrid current drive. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 34, n. 6, p. 837-852, June 1994.

KARNEY, C. F. F. Stochastic ion heating by lower hybrid wave: II. *Physics of Fluids*, New York, v. 22, n. 11, p. 2188-2209, Nov. 1979.

KNOWLTON, S.; PORKOLAB, M.; TAKASE, Y. Experimental studies of the radial diffusion of energetic electrons in lower-hybrid wave heated plasmas in the Alcator-C tokamak. *Physics of Plasmas*, Woodbury, v. 1, n. 4, p. 891-900, Apr. 1994.

KRALL, N. A.; TRIVELPIECE, A. W. *Principles of plasma physics*. New York: McGraw-Hill, 1973.

KUPFER, K.; BERS, A. Fast electron transport in lower-hybrid current drive. *Physics of Fluids B*, Woodburg, v. 3, n. 10, p. 2783-2795, Oct. 1991.

MOREAU, D.; GORMEZANO, C. Lower hybrid current drive in Tore Supra and JET *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 33, n. 13, p. 1621-1638, Nov. 1991.

NAKAMURA, M. et al. Particle confinement of lower hybrid current driven plasmas and electron cyclotron heated plasmas in the WT-3 tokamak. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 31, n. 8, p. 1485-1494, Aug. 1991.

OLIVEIRA, C. I. de; ZIEBELL, L. F. Effect of radial transport of particles on the efficiency of lower hybrid current generation in tokamaks. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE FÍSICA DE PLASMAS, 6., 2001, Campos do Jordão, SP. *Programas e resumos*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Física, 2001. p. 57.

PEETERS, A. G.; WESTERHOF, E. Impact of radial transport on the quasilinear plateau formation due to electron cyclotron wave absorption. *Physics of Plasmas*, Woodbury, v. 3, n. 5, p. 1628-1633, May 1996.

RIBE, F. L. Fusion reactor systems. *Reviews of Modern Physics*, New York, v. 47, n. 1, p. 7-41, Jan. 1975.

ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. Quasilinear studies on lower hybrid current generation in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 34, n. 4, p. 533-548, Apr. 1992.

ROSA, P. R. da S. Evolução quase-linear do coeficiente de absorção de cíclotron para plasmas de tokamaks. 1993. 131 f. Tese (Doutorado em Ciências). Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1993.

ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. Quasi-linear evolution of electron cyclotron absorption by an RF-generated extended tail in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 35, n. 4, p. 511-529, Apr. 1993.

ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. Quasi-linear effects on the absorption of electron cyclotron waves by lower hybrid produced electron tails in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 38, n. 3, p. 375-388, Mar. 1996.

ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. Electron cyclotron absorption by RF driven current-carrying plasmas with fast particle losses. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v. 27, n. 4, p. 499-509, Dec. 1997.

ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. Effects of radial particle diffusion on the electron cyclotron absorption coefficient in tokamak plasmas in the presence of lower hybrid waves. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 41, n. 4, p. 525-540, Apr. 1999.

ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. A non-local synergism between electron cyclotron waves and lower hybrid waves induced by transport. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 43, n. 11, p. 1485-1502, Nov. 2001.

SHKAROFSKY, I. P.; SHOUCRI, M. M. Modelling of lower hybrid current drive in the presence of spatial radial diffusion. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 37, n. 4, p. 539-547, Apr. 1997.

SPADA, M.; BORNATICI, M.; ENGELMANN, F. Absorption of lower hybrid slow waves by fusion alpha particles. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 31, n. 3, p. 447-458, Mar. 1991.



TAKASE, H.; OKANO, K. Analysis of the lower hybrid current drive by the two-dimensional relativistic Fokker-Planck code combined with the ray-tracing code. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 34, n. 10, p. 1563-1576, Oct. 1992.

TOZAWA, L. M. Difusão estocástica de íons energéticos em tokamaks sob a ação de ondas do tipo híbrida inferior. 1998. 84 f. Dissertação (Mestrado em Física). Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1998.

UEHARA, K.; NEMOTO, M.; NAGASHIMA, T. Parameters for lower hybrid current drive in tokamaks. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 29, n. 5, p. 753-760, May 1989.

USHIGUSA, K. et al. Simultaneous heating by high power lower hybrid waves and neutral beams in the JT-60 tokamak. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 29, n. 2, p. 265-276, Feb. 1989.

USHIGUSA, K. et al. Direct loss of energetic electrons during lower hybrid current drive in JT-60U. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 32, n. 11, p. 1977-1983, Nov. 1992.