

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**CUSTOMIZAÇÃO DO SOFTWARE ANSYS PARA ANÁLISE  
DE LAJES DE CONCRETO PROTENDIDO PELO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Igor Carlos Alarcón Ayala**

Porto Alegre  
2017

IGOR CARLOS ALARCÓN AYALA

**CUSTOMIZAÇÃO DO SOFTWARE ANSYS PARA ANÁLISE  
DE LAJES DE CONCRETO PROTENDIDO PELO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia

Porto Alegre  
2017

---

Ficha Catalográfica

---

- A321c Alarcón Ayala, Igor Carlos  
Customização do software ANSYS para análise de lajes de concreto protendido pelo método dos elementos finitos / Igor Carlos Alarcón Ayala. – 2017.  
178 f. : il. color.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2017.  
Orientador: Américo Campos Filho.  
Coorientador: Alexandre Rodrigues Pacheco.
1. Lajes de concreto protendido. 2. Concreto armado. 3. ANSYS (programa de computador). I. Campos Filho, Américo, orient. II. Pacheco, Alexandre Rodrigues, coorient. III. Título.

CDU: 624.012.45(043)

---

**IGOR CARLOS ALARCON AYALA**

**CUSTOMIZAÇÃO DO SOFTWARE ANSYS PARA ANÁLISE  
DE LAJES DE CONCRETO PROTENDIDO PELO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de ESTRUTURAS, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 10 de março de 2017

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São  
Paulo  
Orientador

Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco  
Ph.D. pela Pennsylvania State  
University  
Co-orientador

Prof. Carlos Torres Formoso  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Samir Maghous (UFRGS)**  
Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées

Dedico este trabalho a meu filho Benjamín

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela bolsa de estudos que possibilitou a minha total dedicação aos meus estudos.

Agradeço ao pessoal técnico e administrativo do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul por abrir as portas a mim e fazer este sonho realidade.

Agradeço aos Professores Américo Campos Filho e Alexandre Rodrigues Pacheco, orientadores deste trabalho, pela paciência, disponibilidade e motivação que sempre tiveram para o desenvolvimento do mesmo.

Agradeço aos meus colegas Felipe e Wilson pela amizade e ajuda desinteressada.

Agradeço a minha família, minha mãe Marlene, minha esposa Verónica e meu irmão Saúl pelo apoio incondicional.

## RESUMO

ALARCON, A. I. C. **Customização do software ANSYS para análise de lajes de concreto protendido pelo método dos elementos finitos**. 2017. Dissertação de mestrado (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A necessidade por aprimorar sistemas e materiais na indústria da construção civil derivou no uso da protensão como uma alternativa de reforço para estruturas de concreto. As vantagens técnicas e econômicas encontradas no projeto e execução de estruturas de concreto fizeram com que este sistema venha ganhando preferência frente ao sistema convencional de concreto armado. Nesse contexto, este trabalho visa contribuir desenvolvendo um modelo computacional no software ANSYS, versão 16.0, por meio da ferramenta de customização UPF (*User Performance Features*), para o estudo de lajes de concreto armado e protendido, com ou sem aderência. A implementação do modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, tem ênfase na não-linearidade física dos materiais através de um modelo elasto-viscoplástico que inclui dois procedimentos de análise: a resposta instantânea da estrutura considera um comportamento elastoplástico e a resposta diferida da estrutura assume um comportamento viscoelástico. A modelagem das lajes é feita a partir da ideia de elementos reforçados, assim, são utilizados elementos finitos de casca de ordem superior SHELL281 como elementos base de concreto. Enquanto que a armadura passiva é modelada com elementos de reforço REINF264, considerando-as como uma linha de material mais rígido com aderência perfeita no interior dos elementos de casca, ou seja, como armadura incorporada. Por sua vez, para modelar a armadura ativa não-aderente utiliza-se elementos finitos unidimensionais LINK180 que funcionam como armadura discreta, a condição de não-aderência é satisfeita pelo comando CP. Destaca-se que a não-linearidade geométrica é inerente nos elementos finitos utilizados e que os mesmos são compatíveis entre si e com a ferramenta de customização UPF. Para validar a eficiência do modelo computacional, comparam-se resultados numéricos com valores experimentais disponíveis na literatura. A comparação dos resultados mostra que os modelos representam corretamente o comportamento das lajes ensaiadas experimentalmente. O baixo custo computacional de tempo, a boa precisão dos resultados e as ferramentas de processamento do ANSYS tornam-no em uma alternativa eficiente.

Palavras-chave: ANSYS; concreto armado; concreto protendido; lajes.

## ABSTRACT

AYALA, I.C.A. **ANSYS software customization for analysis of Prestressed Concrete Slabs by Finite Element Method**. 2017. Dissertação de mestrado (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The need for improvement of systems and materials of the construction industry resulted in the use of prestressing as an alternative to reinforce concrete structures. The technical and economic advantages found in the design of concrete structures caused that this system has been gaining preference against the conventional system of reinforced concrete. In this sense, this work aims to contribute developing a computational model in ANSYS software, version 16.0, through the customization tool UPF (User Performance Features), to the study of reinforced and, bonded or unbonded, prestressed concrete slabs. The computational model implementation, based on the finite element method, has emphasis on the physical materials nonlinearity with an elasto-viscoplastic model that includes two analysis procedures: the instantaneous response of the structure considers an elastoplastic behavior and the delayed response of the structure assumes a viscoelastic behavior. The slab models are based in reinforcement elements, thus higher order shell finite elements SHELL281 are used as base elements of concrete. The reinforcement is modeled with reinforcing elements REINF264, as a line of more rigid material with perfect bonding inside the concrete elements, it is, as incorporated reinforcement. On the other hand, the finite elements LINK180 that work as discrete reinforcement are used to simulate prestressing tendons, CP command satisfies the absence of non-adherence. It is noteworthy that the geometrical nonlinearity is inherent to the finite element used and that they are compatible between them and with the customization tool UPF. To validate the computational model efficiency, numerical results are compared with experimental values available in the literature. The results comparison shows that the models represent correctly the behavior of experimentally tested slabs. The low computational cost of time, the good precision of results and the ANSYS processing tools make it an efficient alternative.

Keywords: ANSYS; reinforced concrete; prestressed concrete; slabs.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>23</b>
1.1	GENERALIDADES .....	23
1.2	JUSTIFICATIVA.....	28
1.3	OBJETIVOS .....	29
1.4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	29
1.5	BREVE DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO .....	32
<b>2</b>	<b>MODELAGEM COMPUTACIONAL NO ANSYS.....</b>	<b>34</b>
2.1	ANSYS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	34
2.1.1	Ferramentas para análise de elementos de concreto estrutural .....	35
2.2	USER PROGRAMMABLE FEATURE (UPF).....	37
2.2.1	Procedimento de solução do ANSYS .....	37
2.2.2	USERMAT e suas sub-rotinas.....	39
2.2.3	Usando a sub-rotina USERMAT .....	40
2.2.4	Documentação fornecida pelo código USERMAT .....	40
2.3	MODIFICAÇÕES PARA IMPLEMENTAR OS MODELOS.....	44
2.3.1	Modelo constitutivo para concreto .....	44
2.3.1.1	Modelo para concreto comprimido .....	44
2.3.1.2	Modelo para concreto tracionado .....	51
2.3.2	Fluência e retração do concreto .....	55
2.3.2.1	Modelo de camadas superpostas .....	56
2.3.2.2	Inclusão da fluência no modelo.....	61
2.3.2.3	Inclusão da retração no modelo.....	65
2.3.3	Modelo constitutivo para armadura .....	67
2.3.4	Relaxação da armadura protendida.....	68
2.4	MODELAGEM POR ELEMENTOS REFORÇADOS.....	71
2.4.1	SHELL281 .....	72

2.4.2	REINF264.....	74
2.4.3	LINK180.....	76
2.4.4	MODELO COMPUTACIONAL PROPOSTO .....	76
2.5	CONTROLES DE ANÁLISE NÃO-LINEAR .....	77
2.6	FLUXOGRAMA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL .....	78
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE LAJES EM CONCRETO ARMADO .....</b>	<b>82</b>
3.1	LAJES DE TAYLOR, MAHER E HAYES (1966).....	82
3.1.1	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	82
3.1.2	Modelo de elementos finitos.....	83
3.1.3	Comparação de resultados .....	84
3.2	LAJES DE ABDUL-WAHAB E KHALIL (2000).....	93
3.2.1	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	93
3.2.2	Modelo de elementos finitos.....	95
3.2.3	Comparação de resultados .....	96
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE LAJES EM CONCRETO PROTENDIDO.....</b>	<b>113</b>
4.1	LAJE DE SCORDELIS, PISTER E LIN (1956) .....	113
4.1.1	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	113
4.1.2	Modelo de elementos finitos.....	116
4.1.3	Comparação de resultados .....	117
4.1.3.1	Representação gráfica dos resultados de flechas.....	118
4.1.3.2	Representação gráfica dos resultados de tensões e momentos.....	120
4.2	LAJE DE SCORDELIS, LIN E ITAYA (1959) .....	125
4.2.1	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	125
4.2.2	Modelo de elementos finitos.....	127
4.2.3	Comparação de resultados .....	128
4.2.3.1	Representação gráfica dos resultados de flechas.....	129
4.2.3.2	Representação gráfica dos resultados de tensões e momentos.....	130

4.3	LAJES DE NAWY E CHAKRABARTI (1976) .....	136
4.3.1	Características geométricas e propriedades dos materiais .....	136
4.3.2	Modelo de elementos finitos.....	138
4.3.3	Comparação de resultados .....	139
4.3.3.1	Representação gráfica dos resultados de flechas.....	139
4.3.3.2	Representação gráfica dos resultados de tensões .....	142
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>151</b>
5.1	CONCLUSÕES.....	151
5.2	SUGESTÕES .....	152
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>154</b>
	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>160</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Espessura da laje em função do comprimento do vão .....	23
Figura 1.2 – Configuração das fissuras nas vigas .....	25
Figura 1.3 – Esquemas de lajes lisas: (a) maciça; (b) com engrossamento de pilares; (c) com vigas faixa.....	27
Figura 1.4 – Esquemas de lajes nervuradas: (a) com vigas faixa; (b) com engrossamento dos pilares.....	28
Figura 1.5 – Barril de madeira sob protensão circular do aro metálico.....	30
Figura 2.1 – Esquema do programa principal.....	38
Figura 2.2 – Bloco de código 1.....	41
Figura 2.3 – Bloco de código 2.....	41
Figura 2.4 – Bloco de código 3.....	42
Figura 2.5 – Bloco de código 4.....	42
Figura 2.6 – Bloco de código 5.....	42
Figura 2.7 – Bloco de código 6.....	43
Figura 2.8 – Bloco de código 7.....	43
Figura 2.9 – Bloco de código 8.....	43
Figura 2.10 – Modelos constitutivos implementados .....	44
Figura 2.11 – Características das superfícies de ruptura: (a) meridianos de superfície de ruptura; (b) seções dos planos desviadores .....	45
Figura 2.12 – Superfícies de ruptura e carregamento.....	48
Figura 2.13 – Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido .....	49
Figura 2.14 – Diagrama tensão-deformação do concreto tracionado.....	52
Figura 2.15 – Evolução da deformação por fluência para uma tensão constante aplicada em $t'$ .....	55
Figura 2.16 – Curva de deformação por retração .....	56
Figura 2.17 – Elemento de Maxwell .....	56
Figura 2.18 – Modelo de Maxwell generalizado .....	56
Figura 2.19 – Modelo de camadas superpostas .....	57
Figura 2.20 – Modelo elastoplástico para armaduras passivas: (a) elastoplástico perfeito; (b) elastoplástico com endurecimento linear.....	68
Figura 2.21 – Modelo elastoelástico com endurecimento linear para armaduras ativas .....	68
Figura 2.22 – Modelagem por elementos reforçados .....	72

Figura 2.23 – Elemento SHELL281 .....	73
Figura 2.24 – Elemento REINF264 .....	75
Figura 2.25 – Elemento LINK180 .....	76
Figura 2.26 – Compatibilidade elementos finitos – modelos constitutivos.....	77
Figura 2.27 – Método de Newton-Raphson puro .....	78
Figura 2.28 – Fluxograma do programa principal .....	79
Figura 2.29 – Determinação dos parâmetros da cadeia de Maxwell para concreto e aço .....	80
Figura 2.30 – Atualização da matriz de rigidez e das tensões .....	81
Figura 3.1 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: geometria e seção transversal das lajes .....	82
Figura 3.2 – Laje S1 de Taylor, Maher e Hayes: discretização em elementos finitos .....	84
Figura 3.3 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: curvas carga-flecha .....	85
Figura 3.4 – Lajes S1 a S6 de Abdul-Wahab e Khalil: geometria básica e detalhe de armaduras .....	93
Figura 3.5 – Laje S2 de Abdul-Wahab e Khalil: a) malha de elementos de casca; b) vistas bidimensionais do modelo; c) vista tridimensional do modelo .....	96
Figura 3.6 – Lajes de Abdul-Wahab e Khalil: curvas carga-flecha.....	98
Figura 4.1 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: plano e seções da laje mostrando arranjo da armadura.....	114
Figura 4.2 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: detalhe em planta e elevação dos apoios .....	114
Figura 4.3 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: a) detalhe elementos MPC184 e Comando CP; b) discretização em elementos finitos .....	117
Figura 4.4 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: pontos de controle.....	118
Figura 4.5 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: curvas carga-flecha .....	118
Figura 4.6 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: plano e elevação da laje mostrando arranjo da armadura.....	125
Figura 4.7 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: perfil dos cabos de protensão.....	126
Figura 4.8 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: a) perfil dos cabos de protensão; b) vista tridimensional do modelo .....	128
Figura 4.9 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: curvas carga-flecha .....	129
Figura 4.10 – Lajes de Nawy e Chakrabarti: plano e elevação da laje mostrando arranjo da armadura.....	136
Figura 4.11 – Lajes de Nawy e Chakrabarti: perfil dos cabos de protensão .....	137
Figura 4.12 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: a) perfil dos cabos de protensão; b) vista tridimensional do modelo .....	138

Figura 4.13 – Laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: curvas carga-flecha .....	140
--	-----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resumo das sub-rotinas USERMAT .....	39
Tabela 2.2 – Valores das propriedades para concreto C12 a C50 .....	49
Tabela 2.3 – Valores das propriedades para concreto C55 a C120 .....	50
Tabela 2.4 – Valores do coeficiente $\alpha_s$ , $\alpha_{ds1}$ e $\alpha_{ds2}$ .....	66
Tabela 2.5 – Valores do coeficiente $\alpha_s$ , $\alpha_{ds1}$ e $\alpha_{ds2}$ .....	70
Tabela 3.1 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: parâmetros mecânicos e geométricos .....	83
Tabela 3.2 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: carga de ensaio .....	83
Tabela 3.3 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: parâmetros mecânicos e geométricos	94
Tabela 3.4 – Lajes S7 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: parâmetros mecânicos e geométricos	94
Tabela 3.5 – Lajes de Abdul-Wahab e Khalil: carga de ensaio.....	95
Tabela 4.1 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: parâmetros mecânicos e geométricos .....	115
Tabela 4.2 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: parâmetros mecânicos e geométricos .....	127
Tabela 4.3 – Lajes de Nawy e Chakrabarti: parâmetros mecânicos e geométricos.....	137

## LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: deformadas finais (em cm).....	86
Quadro 3.2 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: evolução da componente de tensão principal $\sigma_1$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	87
Quadro 3.3 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: evolução da componente de tensão principal $\sigma_3$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	88
Quadro 3.4 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: distribuição de momentos M11 dos modelos (em kN-cm).....	89
Quadro 3.5 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: distribuição de momentos M22 dos modelos (em kN-cm).....	90
Quadro 3.6 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: distribuição de momentos M12 dos modelos (em kN-cm).....	91

Quadro 3.7 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: evolução das tensões na armadura longitudinal (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	92
Quadro 3.8 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: deformadas finais (em cm) .....	99
Quadro 3.9 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: deformadas finais (em cm) .....	100
Quadro 3.10 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução da componente de tensão principal $\sigma_1$ dos elementos da mesa de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	101
Quadro 3.11 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução da componente de tensão principal $\sigma_1$ dos elementos da mesa de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	102
Quadro 3.12 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução da componente de tensão principal $\sigma_3$ dos elementos da mesa de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	103
Quadro 3.13 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução da componente de tensão principal $\sigma_3$ dos elementos da mesa de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	104
Quadro 3.14 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos M11 dos modelos (em kN-cm) .....	105
Quadro 3.15 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos M11 dos modelos (em kN-cm) .....	106
Quadro 3.16 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos M22 dos modelos (em kN-cm) .....	107
Quadro 3.17 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos M22 dos modelos (em kN-cm) .....	108
Quadro 3.18 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos M12 dos modelos (em kN-cm) .....	109
Quadro 3.19 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos M12 dos modelos (em kN-cm) .....	110
Quadro 3.20 – Lajes S1 a S3 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução das tensões na armadura das nervuras (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	111
Quadro 3.21 – Lajes S1 a S3 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução das tensões na armadura das nervuras (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	111
Quadro 4.1 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: evolução dos deslocamentos uz (em cm) .....	119
Quadro 4.2 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: evolução da componente de tensão principal $\sigma_1$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	121
Quadro 4.3 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: evolução da componente de tensão principal $\sigma_3$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	122

Quadro 4.4 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: distribuição de momentos M11, M22 e M12 do modelo (em kN-cm).....	123
Quadro 4.5 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: evolução das tensões na armadura de protensão (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	124
Quadro 4.6 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: evolução dos deslocamentos uz (em cm).....	130
Quadro 4.7 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: evolução da componente de tensão principal $\sigma_1$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	132
Quadro 4.8 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: evolução da componente de tensão principal $\sigma_3$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	133
Quadro 4.9 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: distribuição de momentos M11, M22 e M12 do modelo (em kN-cm).....	134
Quadro 4.10 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: evolução das tensões na armadura de protensão (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	135
Quadro 4.11 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução das deformações (em cm).....	140
Quadro 4.12 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução das deformações (em cm).....	141
Quadro 4.13 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução da componente de tensão principal $\sigma_1$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	143
Quadro 4.14 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução da componente de tensão principal $\sigma_1$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	144
Quadro 4.15 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução da componente de tensão principal $\sigma_3$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	145
Quadro 4.16 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução da componente de tensão principal $\sigma_3$ dos elementos de concreto (em kN/cm <sup>2</sup> ) .....	146
Quadro 4.17 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: distribuição de momentos M11, M22 e M12 do modelo (em kN-cm) .....	147
Quadro 4.18 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: distribuição de momentos M11, M22 e M12 do modelo (em kN-cm) .....	148
Quadro 4.19 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução das tensões na armadura de protensão (em kN/cm <sup>2</sup> ).....	149
Quadro 4.20 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução das tensões na armadura de protensão (em kN/cm <sup>2</sup> ).....	150



## LISTA DE SIGLAS

ANSYS – *Analysis Systems Incorporated*

APDL – *ANSYS Parametric Design Language*

BISO – *Bilinear Isotropic Hardening*

*fib* – *Fédération Internationale du Béton*

DLL – *Dynamic-link library*

MEF – Método dos Elementos Finitos

PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UPF – *User Programmable Features*

## LISTA DE SIMBOLOS

### LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$A_c$ : área da seção transversal

$C_1, C_2, C_3$ : parâmetros usados na regra de fluxo plástico

$E_c$ : módulo de elasticidade do concreto

$E_s$ : módulo de elasticidade do aço

$E_{ci}$ : módulo secante correspondente à máxima tensão de compressão

$E_p$ : módulo de elasticidade longitudinal do aço de protensão

$E_\mu$ : módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto

$F$ : função de plastificação

$G_c$ : módulo de elasticidade transversal do concreto

$G_0$ : módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado

$H_s$ : parâmetro de endurecimento do aço

$I_1$ : primeiro invariante do tensor desviador

$J$ : função de fluência

$J_2$ : segundo invariante do tensor desviador

$J_3$ : terceiro invariante do tensor desviador

$R$ : função de relaxação

$\tilde{R}$ : pontos discretos da função de relaxação

$RH$ : umidade relativa do ar

$RH_T$ : parâmetro usado para definir o limite máximo de  $\beta_{RH}$

$T$ : temperatura

#### LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$a, b, c$ : parâmetros usados na regra de endurecimento e na relaxação da armadura de protensão

$a$ : vetor de fluxo plástico

$a_1, a_2, a_3$ : parâmetros usados na regra de fluxo plástico

$c_1, c_2$ : parâmetros do material no critério de ruptura do concreto

$e$ : espessura total do elemento de concreto, número de Euler

$e_i$ : espessura da camada de concreto

$f_{2c}$ : parâmetro usado no critério de ruptura do concreto

$f_{c2cm}$ : resistência a compressão biaxial do concreto

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto

$f_{cm}$ : resistência a compressão uniaxial do concreto

$f_{ctm}$ : resistência uniaxial a tração do concreto

$f_{ptk}$ : tensão de ruptura do aço de protensão

$f_t$ : resistência a tração uniaxial do concreto

$h$ : espessura fictícia

$k, h, x, y$ : parâmetros usados no critério de ruptura do concreto

$k$ : número plástico, parâmetro usado no cálculo do valor da relaxação do aço

$s$ : parâmetro dependente do tipo de cimento usado no concreto

$s_x, s_y, s_z$ : tensões desviadoras

$t$ : tempo, idade atual

$t'$ : idade de aplicação da carga

$u$ : perímetro em contato com a atmosfera

## LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

$\Delta$ : incremento

$\Sigma$ : somatório

$\Omega$ : termo residual da função de minimização

## LETRAS GRIEGAS MINÚSCULAS

$\alpha, \beta$ : parâmetros do material no critério de ruptura do concreto

$\alpha$ : parâmetro do modelo *tension stiffening* do concreto, parâmetro usado no cálculo de  $\beta_h$

$\alpha_{ds1}, \alpha_{ds2}$ : parâmetros dependentes do tipo de cimento

$\alpha_{st}$ : parâmetro para ajuste de  $\beta_{ds}$  por efeitos da temperatura

$\beta$ : fator de redução do modelo de transferências de tensões de corte no concreto

$\beta, \beta_{bc}, \beta_{dc}$ : parâmetros usados no cálculo de  $\varphi_{bc}$  e  $\varphi_{dc}$

$\beta_{as}$ : parâmetro usado no cálculo de  $\varepsilon_{cas}$

$\beta_{cc}$ : parâmetro usado no cálculo do módulo de elasticidade do concreto para qualquer idade

$\beta_{ds}$ : parâmetro usado no cálculo de  $\varepsilon_{cds}$

$\beta_H, \gamma$ : parâmetros usados no cálculo de  $\beta_{dc}$

$\beta_{h,T}$ : parâmetro  $\beta_h$  ajustado por efeitos da temperatura

$\beta_{RH}$ : parâmetro que considera o efeito da umidade relativa

$\beta_{s1}$ : parâmetro usado para definir o valor máximo de  $\beta_{RH}$

$\beta_{s1,T}$ : parâmetro usado no cálculo de  $RH_T$

$\beta_{st}$ : parâmetro usado no ajuste de  $\beta_{RH}$

$\beta_T$ : parâmetro de correção por efeitos da temperatura

$\varepsilon$ : deformação específica total

$\varepsilon_c$ : deformação de compressão

$\varepsilon_{c1}$ : deformação na máxima tensão de compressão

$\varepsilon_{cas}$ : deformação por retração autógena

$\varepsilon_{cas0}$ : coeficiente de retração autógena fictícia

$\varepsilon_{cc}$ : deformação por fluência do concreto

$\varepsilon_{cds}$ : deformação por retração por secagem

$\varepsilon_{cds0}$ : coeficiente de retração por secagem fictício

$\varepsilon_{ci}$ : deformação instantânea do concreto

$\varepsilon_{c,lim}$ : deformação última de compressão

$\varepsilon_{cn}$ : deformação independente da tensão

$\varepsilon_{cs}$ : deformação por retração

$\varepsilon_{cT}$ : deformação térmica

$\varepsilon_{cTU}$ : parâmetro que indica a deformação limite onde a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada

$\varepsilon_{c\sigma}$ : deformação dependente da tensão

$\varepsilon_n$ : deformação axial inelástica

$\varepsilon_p$ : componente plástica da deformação de compressão do concreto

$\varepsilon_{ref}$ : deformação de tração máxima alcançada transversalmente à fissura em questão

$\varepsilon_T$ : deformação específica normal de tração do concreto

$\varepsilon_{tot}$ : deformação total

$\eta$ : parâmetro usado na regra de endurecimento do concreto

$\eta_\mu$ : coeficiente de viscosidade da camada de concreto

$\theta$ : ângulo de similaridade do concreto

$\lambda$ : coeficiente que depende do ângulo  $\theta$

$\lambda_c$ : parâmetro analisado sobre o meridiano de compressão

$\lambda_t$ : parâmetro analisado sobre o meridiano de tração

$\mu$ : número de unidade da cadeia de Maxwell

$\rho_c$ : meridiano de compressão

$\rho_t$ : meridiano de tração, valor da relaxação do aço

$\sigma$ : tensão normal no concreto

$\sigma_1$ : tensão principal de tração do concreto

$\sigma_c$ : tensão constante

$\sigma_{com}, \tau_{com}$ : parâmetros usados no critério de ruptura do concreto

$\sigma_{ef}$ : tensão efetiva do concreto

$\sigma_{p0}$ : tensão inicial de protensão

$\sigma_{Ptot}$ : tensão total que atua na armadura protendida

$\sigma_{ref}$ : tensão interpolada correspondente à deformação  $\varepsilon_{ref}$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ : tensões principais do concreto

$\sigma_\mu$ : tensão da camada de concreto

$\tau$ : tempo no qual os incrementos de tensão são aplicados

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ : tensões de corte do concreto

$\tau_\mu$ : tempo de relaxação da camada de concreto

$\nu$ : módulo de Poisson

$\varphi$ : coeficiente de fluência

$\varphi_{bc}$ : coeficiente de fluência básico

$\varphi_{bc,T}$ : coeficiente de fluência básico ajustado por efeitos da temperatura

$\varphi_{dc}$ : coeficiente de fluência por secagem

$\varphi_{dc,T}$ : coeficiente de fluência por secagem ajustado por efeitos da temperatura

$\varphi_T$ : parâmetro de correção por efeitos da temperatura

$\phi$ : função de minimização (3.10)

$\psi_{60}$ : relaxação das barras de protensão após 1000 horas a 20°C tracionadas a 60% da tensão de ruptura

$\psi_{70}$ : relaxação das barras de protensão após 1000 horas a 20°C tracionadas a 70% da tensão de ruptura

$\psi_{80}$ : relaxação das barras de protensão após 1000 horas a 20°C tracionadas a 80% da tensão de ruptura

$\psi_{1000}$ : relaxação das barras de protensão após 1000 horas a 20°C

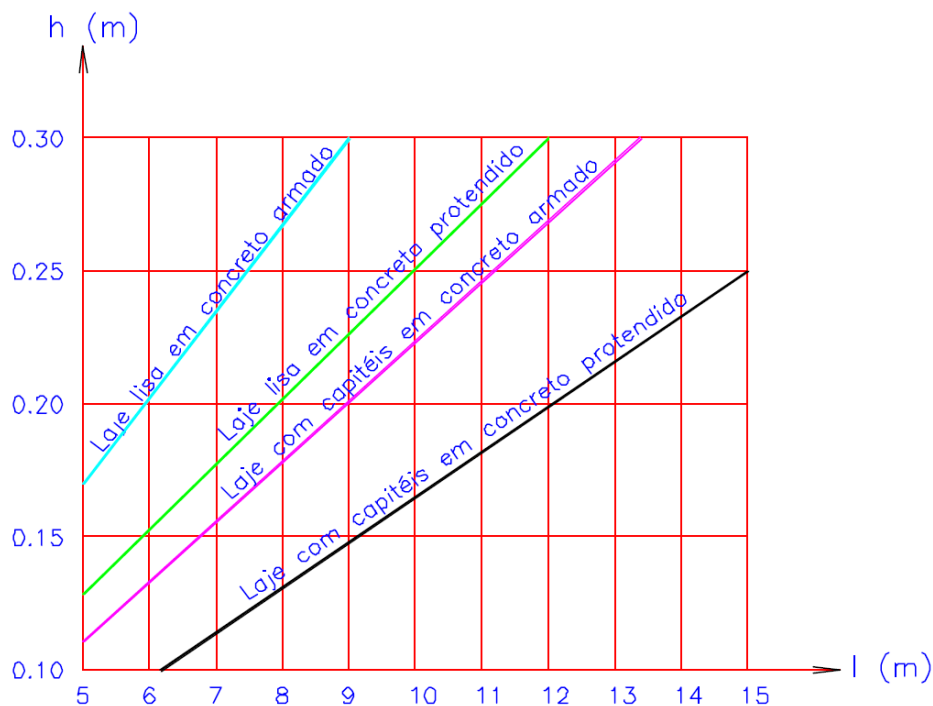
$\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ : pesos para o termo residual



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 GENERALIDADES

No decorrer da história da humanidade, o desenvolvimento da indústria da construção civil foi motivado pela necessidade de aprimorar sistemas e materiais de construção, que derivou no uso da protensão como uma alternativa de reforço para estruturas de concreto, trazendo as seguintes vantagens (RITZ et al., 1985):



(fonte: adaptado por Faria, 2004)

Figura 1.1 – Espessura da laje em função do comprimento do vão

- Seções transversais mais esbeltas, quando comparadas a estruturas de concreto armado.
- Menores flechas que em estruturas de aço e concreto armado.
- Bom comportamento em fissuração e, portanto, melhor proteção do aço contra corrosão.
- Condições de serviço praticamente inalteradas, mesmo quando a sobrecarga é considerável, pelo fechamento das fissuras na remoção da sobrecarga.
- Maior resistência à fadiga, já que a amplitude da variação de tensões da protensão sob cargas alternadas é pequena.

- f) Em lajes, segundo a figura 1.1, vãos de maiores dimensões e mais esbeltos são possíveis em concreto protendido. Lajes mais esbeltas resultam na redução do peso próprio e, conseqüentemente, tem um efeito benéfico sobre pilares e fundações, fazendo que a altura total dos edifícios seja menor e permitindo por vezes o acréscimo de andares adicionais com referência a uma altura dada.
- g) Maior resistência ao puncionamento em lajes, obtida pelo traçado adequado dos cabos.
- h) Redução considerável no tempo de construção em lajes, como resultado da facilidade na manipulação das formas.

As vantagens encontradas pelo uso do sistema de protensão, ganhou preferência em uma grande variedade de aplicações, motivo para poder diferenciá-lo quanto ao mecanismo de aderência, nível de protensão, posicionamento dos cabos, momento de aplicação, tipos de ancoragem. No caso deste trabalho, faz-se ênfase, conforme a norma NBR 6118:2014, na classificação do tipo de sistema de protensão de acordo aos mecanismos de aderência entre concreto e armadura interna, expostos a seguir:

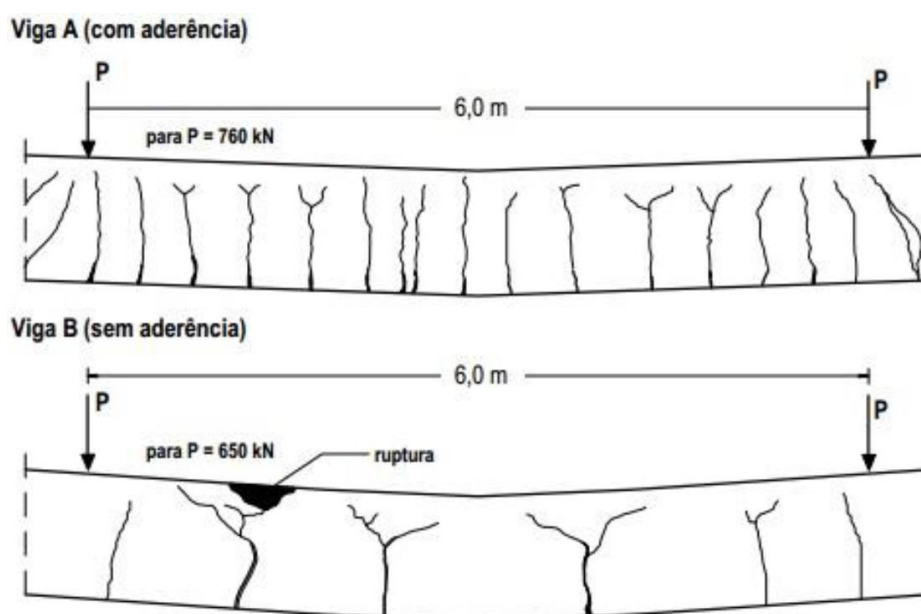
- a) Protensão com aderência inicial: A armadura ativa é pré-tracionada ou pré-alongada através de apoios independentes do elemento estrutural, antes de lançamento do concreto. A armadura é cortada após o endurecimento do concreto, sendo que a ancoragem no concreto se realiza somente por aderência. Este tipo de protensão é mais observado na produção de elementos pré-fabricados.
- b) Protensão com aderência posterior: A armadura ativa é pós-tracionada, ou seja, o seu pré-alongamento é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas como apoios, partes do próprio elemento estrutural. A aderência com o concreto é criada posteriormente através da injeção de nata de cimento no interior das bainhas. Este tipo de protensão era o mais empregado em lajes até o surgimento de cordoalhas engraxadas.
- c) Protensão sem aderência: A armadura ativa é pós-tracionada, seu pré-alongamento é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizados como apoios, partes próprias do elemento estrutural. Não existe aderência com o concreto, desde que a armadura fique ligada apenas em pontos localizados. Os cabos são compostos por cordoalhas, graxa de proteção contra corrosão e bainhas plásticas de polietileno de alta densidade. Este tipo de protensão é amplamente utilizado na atualidade.

Em virtude dos mecanismos de aderência, os ensaios realizados por Leonhardt (1979) em vigas de concreto protendido, demonstraram que a influência da aderência é de grande importância,



tanto na capacidade de resistência no estado limite último, como em relação à fissuração no estado limite de serviço.

Na viga com cabos não-aderentes da Figura 1.2, as fissuras aparecem em menor quantidade e com maiores aberturas, quando comparada à viga com cabos aderentes cujo comportamento, semelhante às vigas de concreto armado, admite a formação de um número maior de fissuras com menores aberturas. Portanto, a aderência dos cabos de protensão é vantajosa em termos de aspecto estético e de durabilidade.



(fonte: LEONHARDT, 1979)

Figura 1.2 – Configuração das fissuras nas vigas

Assim mesmo, observa-se que, o incremento do carregamento até a ruptura das vigas ensaiadas, faz com que os cabos aderentes sofram grandes acréscimos de tensão, devido aos alongamentos ocorridos nas seções com fissuras abertas, contribuindo adequadamente para o momento resistente e, por sua vez, como os cabos não-aderentes geram um menor número de fissuras, então experimentam menores acréscimos de tensão, fato que repercute em uma menor contribuição para o momento resistente. Em consequência, a falta de aderência dos cabos repercute em uma diminuição da carga limite (VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998).

Em contraste às vantagens da protensão aderente citadas anteriormente, o uso da protensão não-aderente oferece as seguintes vantagens (RITZ et al., 1985):

- a) Posicionamento dos cabos com maiores excentricidades, de especial importância em lajes finas.
- b) Proteção contra corrosão, inclusive antes da execução.
- c) Maior facilidade e rapidez de colocação dos cabos nas formas.
- d) No caso da protensão não aderente, perdas por atrito muito baixas.
- e) Eliminação da operação de injeção.
- f) Em geral, mais econômico.

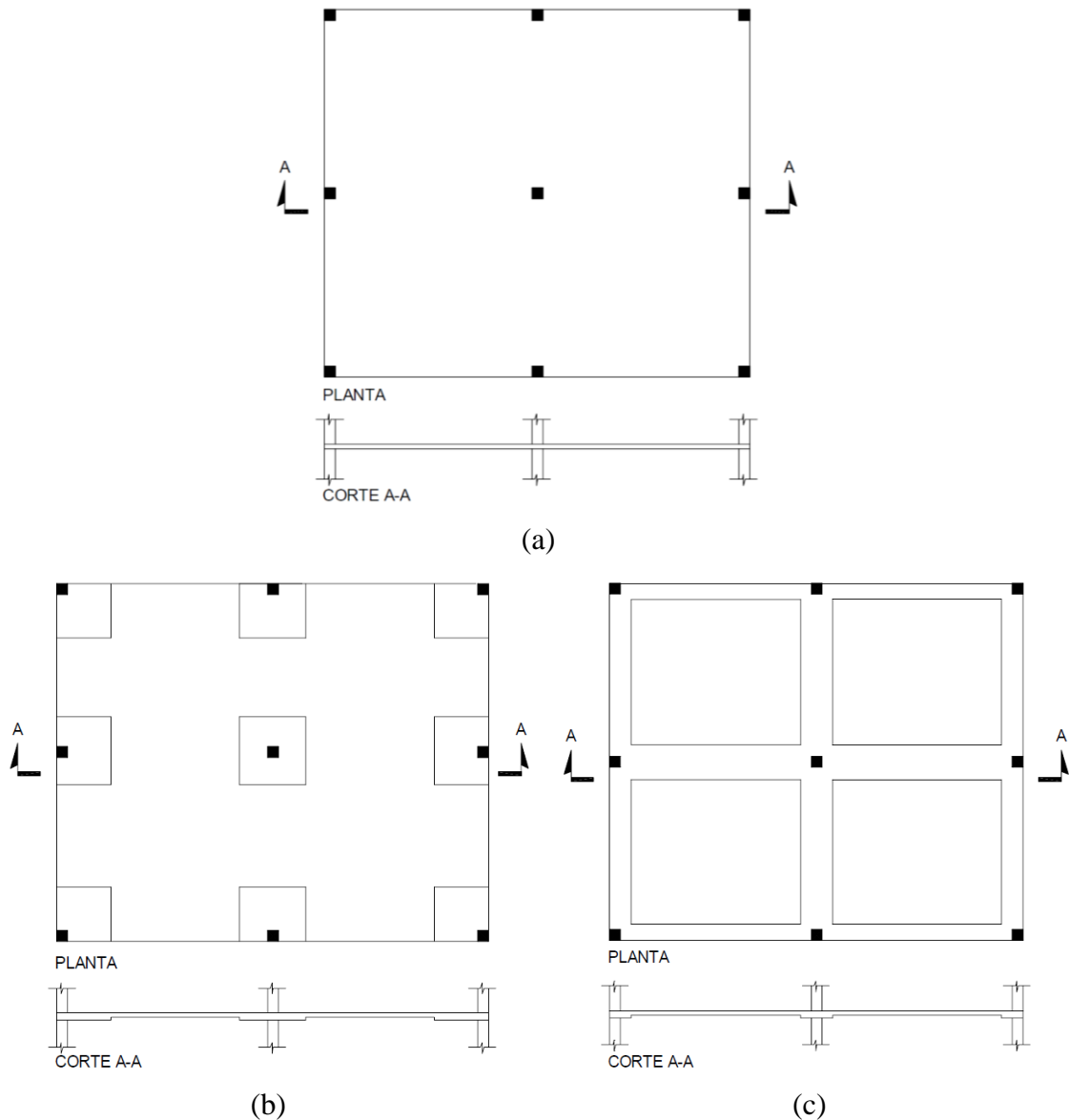
Independentemente do tipo de protensão quanto à aderência, o simples fato de protender um cabo induz o acionamento dos macacos, a liberação dos cabos e a transferência da força de protensão que, entre outros fatores, originam uma série de efeitos que conduzem a uma diminuição da força de protensão. Desta forma, tem-se as chamadas perdas de protensão, classificadas como instantâneas e progressivas. As perdas instantâneas, são aquelas que ocorrem durante a operação de protensão e imediatamente após a ancoragem no cabo. Já as perdas progressivas, ocorrem ao longo do tempo, dependendo da retração e fluência do concreto e da relaxação do aço (VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998).

A retração do concreto é um fenômeno que ocorre em função do equilíbrio higrotérmico do concreto com o meio ambiente. O concreto perde parte da água de amassamento nas primeiras idades, gradativamente, até atingir uma umidade relativamente estável. Essa perda produz uma diminuição de volume e um conseqüente encurtamento da peça que se manifesta ao longo do tempo. A fluência decorre da atuação de cargas de longa duração, onde os esforços de compressão, introduzidos pela protensão, produzirão um encurtamento da peça de concreto que se manifestará gradativamente. Os cabos protendidos em seu interior também se encurtaram e conseqüentemente a força de protensão diminuirá (VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998).

A armadura estirada e mantida com comprimento constante sofre um alívio de tensão ao longo do tempo. Este fenômeno é conhecido como relaxação e depende do tipo de cordoalhas que compõem o cabo de protensão. Assim, a perda de protensão por relaxação é menor em cordoalhas de baixa relaxação que em cordoalhas de relaxação normal (VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998).

Aliás, já foi mencionado anteriormente que o sistema de protensão para reforço de estruturas de concreto ganhou preferência em uma grande variedade de aplicações, pelas vantagens descritas no decorrer desta seção. No caso de lajes de concreto protendido, as aplicações

abrangem uma série de estruturas entre as quais tem-se pontes, radiers e pavimentos de edifícios. Conforme Emerick (2005), os principais esquemas adotados para estruturas de pavimento de edifícios em concreto protendido podem ser classificados como lajes lisas e lajes nervuradas.

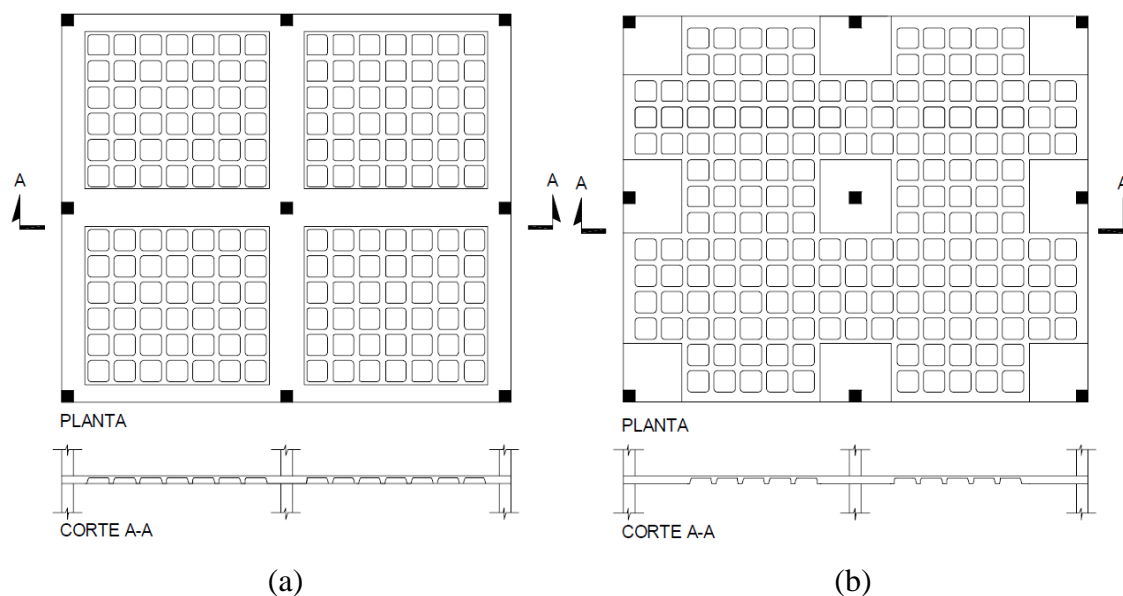


(fonte: Emerick, 2005)

Figura 1.3 – Esquemas de lajes lisas: (a) maciça; (b) com engrossamento de pilares; (c) com vigas faixa

O esquema mais simples é a laje lisa maciça (figura 1.3a), cuja capacidade resistente é em geral ditada pelo cisalhamento, o engrossamento da laje na região dos pilares (figura 1.3b) pode melhorar sua resistência ao puncionamento, como também, o uso de vigas faixa protendidas (figura 1.3c). A outra alternativa é a laje nervurada com faixas protendidas (figura 1.4a), ou

com engrossamento na região dos pilares (figura 1.4b), sendo que as nervuras podem ou não ser protendidas.



(fonte: Emerick, 2005)

Figura 1.4 – Esquemas de lajes nervuradas: (a) com vigas faixa; (b) com engrossamento dos pilares

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A relação da indústria da construção civil com a sociedade acadêmica é refletida na busca do aperfeiçoamento da tecnologia de materiais e sistemas construtivos que tornem-se soluções econômicas e seguras quando se projetam estruturas de dimensões e configurações cada vez mais desafiantes. Nesse contexto, o foco da engenharia estrutural procura estimar as propriedades dos materiais para analisar o comportamento das estruturas, por métodos aproximados, quando submetidas a ações externas, que não são conhecidas com precisão.

Uma solução que vem sendo amplamente utilizada na construção de prédios no Brasil é o sistema de protensão com e sem aderência, como foi visto anteriormente, a utilização deste sistema em lajes apresenta vantagens técnicas e econômicas em relação ao sistema convencional em concreto armado. Entretanto, aproveitando o auge computacional, vê-se necessário acompanhar o aprimoramento deste sistema através da divulgação de soluções numéricas que permitam analisar melhor seu comportamento. Para tal efeito, este trabalho é baseado no método dos elementos finitos, um método de solução aproximado e reconhecido pela eficácia em sua implementação computacional.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal do trabalho é desenvolver um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, no *software* ANSYS versão 16.0 para representar o comportamento à flexão de lajes de concreto armado e concreto protendido, com e sem aderência, fazendo ênfase na não-linearidade física dos materiais envolvidos e elementos finitos de casca.

Para atingir este objetivo, propõem-se os seguintes objetivos secundários:

- a) Estudar os recursos disponibilizados no *software* ANSYS para analisar peças de concreto estrutura.
- b) Identificar as limitações, vantagens e desvantagens destes recursos.
- c) Adaptar os modelos constitutivos desenvolvidos por Lazzari (2015), através da ferramenta *User Performance Features* do *software* ANSYS, para trabalhar com elementos finitos de casca.
- d) Verificar o desempenho do modelo computacional pela comparação com resultados experimentais.

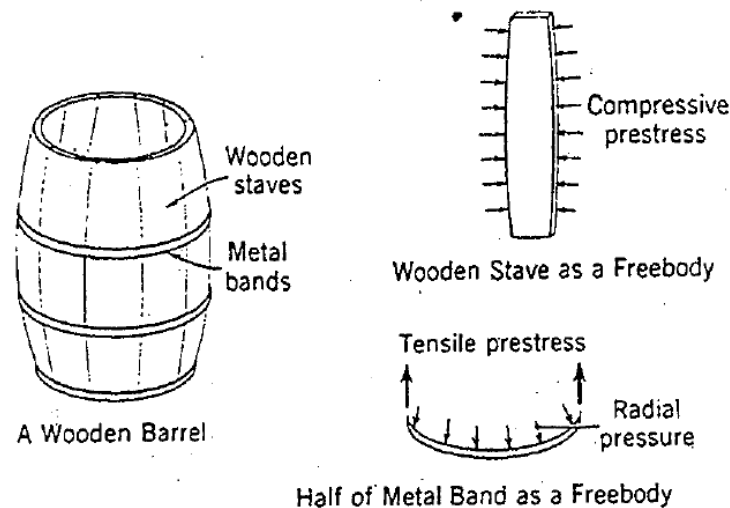
### 1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como muitos fatos da ciência, a ideia da protensão se desenvolveu a partir de uma outra ideia, a qual foi orientada à confecção de barris. Conforme ilustrado na figura 1.5, gomos de madeira são apertados por cintas metálicas para formar barris. Quando as cintas metálicas são forçadas por uma operação mecânica a uma posição correspondente a um diâmetro maior, elas ficam submetidas a esforços de tração comprimindo transversalmente os gomos de madeira, permitindo-lhes resistir à pressão interna do líquido dentro do barril. Em outras palavras, as cintas e os gomos são pre-esforçados antes de serem submetidos a qualquer carregamento (LIN, 1981).

Baseado no mesmo princípio, recém em 1886 o engenheiro norte-americano P. H. Jackson patenteou um sistema que utilizava um tirante de união em pedras artificiais e arcos de concreto para usar como lajes. Logo em 1888, na Alemanha, C. E. W. Doehring obteve a patente para lajes de concreto protendidas com fios metálicos (LIN, 1981).

Posteriormente nos Estados Unidos, em 1908 C. R. Steiner sugeriu reajustar as barras da armadura após determinado tempo, por causa da fluência e retração do concreto, a fim de

recuperar algumas perdas. Assim mesmo, foi em 1925 que R. E. Dill, de Nebraska, estudou a influência de barras de aço de alta resistência, revestidos para evitar aderência no concreto, a fim de compensar perdas de protensão (LIN, 1981).



(fonte: LIN, 1981)

Figura 1.5 – Barril de madeira sob protensão circular do aro metálico

A partir de 1928, na França, o engenheiro Eugène Freyssinet começou a apresentar estudos sobre retração e fluência do concreto para justificar a utilização de aço de alta resistência para protensão; logo em 1940, desenvolveu o sistema de ancoragem em cunha cônica de doze cabos (LIN, 1981).

Foi em 1949, que no Brasil se utilizou o sistema de protensão não-aderente na construção da Ponte de Galeão, no Rio de Janeiro, sendo na época a maior ponte em concreto protendido do mundo com 380 m de comprimento, onde o próprio Freyssinet orientou o projeto (ALMEIDA FILHO, 2002).

Na década 50, nos Estados Unidos, Austrália e Canadá, foram projetadas e executadas as primeiras lajes protendidas com o método construtivo *Lift Slab*, onde as lajes eram moldadas no terreno e, posteriormente, içadas e ancoradas nas suas posições finais (SILVA, 1998). Além disso, nos Estados Unidos também começou a construção de lajes protendidas sem aderência, em meados de 1956 e 1957, com a construção de escolas em Nevada (ALMEIDA FILHO, 2002).

Na década 60, foi quando houve maior desenvolvimento na utilização de lajes protendidas, devido às enormes contribuições de F. Leonhardt na Alemanha, V. Mikhailov na Rússia e T. Y. Lin nos Estados Unidos, sendo que estes desmitificaram as dúvidas inerentes ao comportamento do concreto protendido, realizando melhorias e simplificações nos processos construtivos da protensão (SILVA, 1998).

No Brasil, deve-se destacar a colaboração de José E. Rudloff Manns e engenheiro José Carlos de Figueiredo Ferraz que, entre 1957 e 1973, desenvolveram sistemas de protensão utilizados em obras como o Museu das Artes de São Paulo, a Ponte da Cidade Universitária e o Viaduto Beneficência Portuguesa, em São Paulo (SILVA, 1998).

Assim mesmo, uma importante referência foi apresentada em 1983, um documento do PTI (*Post-Tensioning Institute*) denominado *Design of Post-Tensioned Slabs*, que incluiu os trabalhos de diversos autores sobre ensaios em flexão e punção de lajes com protensão não-aderente (ALMEIDA FILHO, 2002).

Cabe ressaltar também, que a utilização da protensão não-aderente no Brasil iniciou em 1997, com a fabricação de cordoalhas engraxadas e plastificadas pela Companhia Siderúrgica Belgo-Mineira (ALMEIDA FILHO, 2002).

A partir de então, esta nova tecnologia vem ganhando espaço no mercado da construção civil, diversos tipos de estruturas são a evidencia no território brasileiro tais como edifícios, barragens, pontes e viadutos, pistas de aeroportos, piscinas, estações de tratamento de esgoto, reservatórios de água, silos, tirantes para contenção, pré-fabricados de concreto, estacas para fundações, postes para redes de energia elétrica, vigotas para laje, entre outras possibilidades.

Analogamente, no meio acadêmico este sistema vem ganhando atenção, destacando-se, os trabalhos de Souza e Cunha (1998), que estudaram os conceitos de lajes em concreto armado e protendido; Silva (1998), que abordou os princípios principais com respeito ao projeto de lajes maciças protendidas; tanto Corrêa, Melo e Martins (2001) como Melges, Pinheiro e Duarte (2001), que realizaram estudos relacionados ao funcionamento de lajes lisas; Fernandes (2001), que descreveu os procedimentos básicos sobre o projeto e dimensionamento das lajes de concreto com protensão sem aderência atribuída; Almeida Filho (2002), que estudou a utilização da protensão não-aderente em edifícios residenciais e comerciais de concreto; Moura (2002), que analisou diferentes sistemas estruturais e comparou os custos entre eles e em relação à aderência de um mesmo sistema; Silva e Melo (2003), que analisaram a punção em lajes

protendidas com cordoalha não-aderente e pilares de várias dimensões; Faria (2004), que analisou modelos de lajes lisas protendidas pela comparação de dois métodos de cálculo; Mello (2005), que apresentou o processo de cálculo de cabos para protensão parcial e limitada em lajes lisas de concreto.

Neste contexto, o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul vem desenvolvendo diversos trabalhos focados no estudo do comportamento de estruturas pelo método dos elementos finitos. Machado (2002), por exemplo, estudou o comportamento, ao longo do tempo, de estruturas de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão; Jost (2006), baseado no trabalho de Machado (2002), estendeu tal estudo para elementos finitos isoparamétricos tridimensionais utilizados na análise de peças fletidas com protensão não-aderente; Siqueira (2014), adaptou estes estudos para a análise do comportamento diferido de cascas de concreto armado; e Lazzari (2015), aproveitando as informações anteriores desenvolveu um modelo computacional pela customização do *software* ANSYS, para simulação numérica de estruturas de concreto armado e protendido sob estados planos de tensão.

Enquanto às aplicações em lajes de concreto protendido, vê-se evidência nos trabalhos de Barbieri (2003), que implementou um modelo numérico utilizando o elemento finito do tipo híbrido para pórticos planos, para análise à flexão de elementos com protensão aderente e não-aderente; e Milani (2006), que apresentou um modelo numérico para o cálculo de lajes planas lisas protendidas. Portanto, seguindo a tendência iniciada por Lazzari (2015), é pertinente abordar e vencer as limitações do *software* ANSYS, adaptando estudos anteriores, para a modelagem e análise de lajes de concreto armado e concreto protendido, com ou sem aderência, submetidas a cargas de curta e longa duração.

## **1.5 BREVE DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO**

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos. Neste primeiro capítulo, além dos objetivos e a justificativa, são descritas as considerações que desembocaram no conteúdo abordado no decorrer do texto. No capítulo 2 são apresentadas as limitações, vantagens e desvantagens das ferramentas, padrão e customizáveis, disponíveis no ANSYS para análise estrutural; expõe-se depois, a interação do ANSYS com as ferramentas de customização, a compatibilidade dos elementos finitos utilizados, bem como a documentação padrão fornecida e os ajustes a serem realizados para implementar as novas sub-rotinas do modelo elasto-



viscoplástico. Os capítulos 3 e 4 apresentam resultados obtidos pelo modelo computacional, comparando-os com resultados experimentais, respectivamente, para lajes de concreto armado e concreto protendido. Finalmente, no capítulo 5, encerra-se o texto destacando as conclusões atingidas e as pertinentes recomendações para futuros trabalhos.

## 2 MODELAGEM COMPUTACIONAL NO ANSYS

### 2.1 ANSYS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A ideia principal do método dos elementos finitos consiste na discretização do meio contínuo em um número finito de elementos definidos por funções de interpolação e conectados por nós. Na solução deste método, as matrizes de rigidez dos elementos são integradas sobre volumes e superfícies e, em seguida, invertidas para calcular os deslocamentos de cada elemento. Para a integração numérica em cada elemento, uma série de pontos são calculados. Esses pontos, cujas posições são conhecidas, também são chamados pontos de Gauss. Cada um desses pontos é multiplicado por uma função de peso e logo adicionados em conjunto para calcular a integração. Enquanto mais pontos de Gauss sejam definidos, a solução se tornará mais precisa, mas um aumento de pontos de Gauss também significa um aumento no tempo de solução.

Sun (2006) descreve que a utilização da integração completa em elementos de placa baseados na teoria de Mindlin-Reissner pode ocasionar um problema numérico chamado travamento por cortante ou *shear locking*. Isto acontece devido ao desenvolvimento de deformações de cisalhamento transversal, por exemplo, um elemento finito com funções de interpolação lineares que não pode assumir forma curva faz com que a energia de deformação no elemento gere deformações de corte em vez de deformações de flexão. O fenômeno de travamento por cortante então torna um elemento muito rígido sob um momento de flexão.

A fim de prevenir o bloqueio numérico, a integração reduzida pode ser aplicada para resolver o problema. O esquema de integração reduzida trabalha com menos pontos de Gauss, e, assim, o tempo de solução irá ser menor, mas a precisão também será menor. Em alguns casos, a integração reduzida pode causar instabilidade devido à matriz de rigidez ser próxima de zero, esta singularidade é conhecida como modo espúrio. Os modos espúrios são causados por um elemento deformado no qual as tensões são iguais a zero. Isto normalmente ocorre quando é usada uma única camada de elementos com funções de interpolação lineares, os elementos individuais são severamente deformados, enquanto que a malha geral não é deformada. As variantes para evitar que isto aconteça incluem utilizar o esquema de integração completa, refinar a malha de elementos finitos, utilizar duas ou mais camadas, ou inserir uma rigidez artificial para estes modos de deformação.

Aliás, para analisar o comportamento de estruturas por este método existem dois tipos de análise, a distinção pode ser feita entre análises de tipo linear e não-linear. Na análise linear os deslocamentos são assumidos pequenos ou na configuração de referência, as deformações sempre são proporcionais às tensões conforme a lei de Hooke, as cargas são independentes dos deslocamentos e os apoios permanecem inalterados durante o carregamento.

A análise não-linear pode ser subdividida em não-linearidade geométrica, não-linearidade material e não-linearidade de contato. A não-linearidade geométrica tem em conta o efeito de grandes deslocamentos, portanto o ângulo das solicitações externas mudará no transcurso do tempo de carregamento. A não-linearidade material, também chamada não-linearidade física, decorre do fato que o material não apresenta uma relação inteiramente linear entre tensões e deformações, atribuindo comportamentos elástico, plástico, viscoso ou uma combinação dos mesmos. Finalmente a não-linearidade de contato considera que as condições de contorno são dependentes dos deslocamentos, este tipo de não-linearidade usualmente é encontrado em problemas de contato, onde uma força somente pode ter influência na estrutura quando se tem uma superfície de contato.

A propósito do método dos elementos finitos como ferramenta para análise de estruturas, o *software* ANSYS (*Analysis System Incorporated*) vem sendo um dos maiores expoentes no meio acadêmico, destacando-se a interface do sistema APDL (*ANSYS Parametric Design Language*), cuja característica diferenciável, como *software*, é que a entrada de dados de um modelo pode ser feita através da leitura de um arquivo no formato texto (arquivos com extensão *.txt*). Este arquivo pode conter informações sobre propriedades mecânicas e geométricas, condições de contorno, carregamentos e controles de análise não-linear, através da listagem de comandos do ANSYS.

### **2.1.1 Ferramentas para análise de elementos de concreto estrutural**

Dado que o concreto é um material complexo de modelar, vê-se que o melhor método para modelar estruturas de concreto por elementos finitos depende da finalidade do cálculo.

Quando o objetivo da análise estrutural é para projeto, se assume uma análise linear. O comportamento do concreto deve ser descrito por um modelo constitutivo elástico linear, nesse caso, ANSYS disponibiliza um modelo padrão de material elástico, linear e isotrópico disponível para uma grande variedade de elementos finitos. Neste tipo de análise, os parâmetros do material são estimados diretamente pela norma vigente no país, a NBR 6118:2014.

Como o foco da análise para projeto é calcular esforços e não detalhar tensões, dispensa-se a rigidez da armadura no modelo de elementos finitos. Os diagramas de forças e momentos são utilizados para determinar a armadura necessária para suportar os esforços em tração e, ao mesmo tempo, para conferir a resistência do concreto em compressão.

No entanto, quando o objetivo demanda uma análise não-linear, tem-se a segunda alternativa que é considerar o comportamento complexo do concreto, caracterizado por um limite elástico, a partir do qual o concreto fatura em tração, provocando amolecimento em tração e esmagamento em compressão. O modelo constitutivo geralmente utilizado, e objeto de estudo em pesquisa, aborda uma resposta de tensão-deformação não-linear e superfícies de ruptura. O ANSYS disponibiliza duas opções de modelagem, por um lado, tem-se o modelo de cinco parâmetros de Willam e Warnke (1975) identificado pelo comando TB,CONCR e apenas compatível com os elementos SOLID65, SOLID164 e SOLID168 e, por outro lado, tem-se um modelo de microplanos baseado no trabalho de Bazant e Gambarova (1984), identificado pelo comando TB,MPLANE e compatível com o elemento SOLID185.

A rigidez da armadura, dependendo da idealização, pode ser incluída no modelo de elementos finitos de forma incorporada, distribuída ou discreta, enquanto que o modelo para descrever seu comportamento usualmente aborda uma resposta de tensão-deformação bilinear. Os recursos disponíveis no ANSYS incluem o modelo constitutivo BISO (*Bilinear Isotropic Hardening*) compatível com uma grande variedade de elementos finitos; elementos unidimensionais podem ser modelados como armadura discreta fazendo coincidir seus nós com nós de elementos SOLID65, SOLID164 ou SOLID168, enquanto que existem elementos REINF para modelar armaduras incorporada e distribuída no interior de elementos SOLID185.

Com tudo, tem-se que para modelar estruturas de concreto, uma vantagem do modelo de Willam e Warnke é sua facilidade de ilustrar fissuras e suas direções, no entanto, a discretização da malha de elementos finitos sempre será condicionada à posição da armadura; no caso do modelo de Bazant e Gambarova cuja teoria não é atingida neste trabalho, tem a vantagem, atribuída pelo elemento base, de permitir armadura incorporada ou distribuída na malha de elementos finitos.

Destaca-se também que os dois modelos constitutivos para concreto descritos acima, estando limitados a modelar estruturas de concreto com elementos do tipo SOLID, influem na eficiência das soluções comprometendo o esforço computacional e o grau de refinamento de malha de

elementos finitos. Assim mesmo, embora o modelo constitutivo BISO seja adequado para representar os efeitos instantâneos das armaduras passiva e ativa, evidencia-se a falta de um modelo constitutivo que considere as perdas progressivas da armadura ativa.

A fim de propor um modelo computacional, com elementos finitos de casca, para análise não-linear de lajes de concreto armado e concreto protendido, este trabalho é desenvolvido no *software* ANSYS APDL versão 16.0. A não-linearidade física do modelo é abordada pela adaptação dos modelos constitutivos desenvolvidos por Lazzari (2015) para concreto e armadura protendida, tarefa a ser realizada na ferramenta de customização *User Programmable Feature* (UPF). Aproveitando o modelo constitutivo existente para armadura passiva, os elementos finitos escolhidos para ser compatíveis com os novos modelos constitutivos também são compatíveis com os elementos REINF. Enquanto que a não-linearidade geométrica do modelo é inerente nos elementos finitos a ser utilizados.

## **2.2 USER PROGRAMMABLE FEATURE (UPF)**

O ANSYS fornece um conjunto de rotinas customizáveis que podem ser empregadas para adicionar procedimentos ao código existente; coletivamente estas rotinas são referidas como *User Programmable Feature* (UPF).

As rotinas UPF são fornecidas como arquivos, em linguagem FORTRAN, editáveis para recriar uma característica padrão do ANSYS. Estas rotinas podem então ser customizadas para conseguir o comportamento desejado sempre que sejam compiladas e ligadas com o ANSYS.

Existe uma grande variedade de rotinas UPF das quais, neste trabalho, interessam aquelas que permitem modificar e controlar a relação tensão-deformação do modelo constitutivo de um material, em ambos regimes elástico e plástico. Estas ferramentas melhor conhecidas como sub-rotinas USERMAT são de particular atenção, uma vez que servem para implementar os novos modelos constitutivos.

### **2.2.1 Procedimento de solução do ANSYS**

Antes de explicar o funcionamento da USERMAT, é apropriado descrever os procedimentos de solução do ANSYS e onde são usadas estas sub-rotinas dentro dele (figura 2.1). Neste sentido, o ANSYS divide sua hierarquia de solução em três níveis: etapas de carga, incrementos de carga e iterações de equilíbrio.

As etapas de carga (*steps*) são definidas pelo usuário, e separam a solução em fases sucessivas que refletem os detalhes da carga aplicada sobre o sistema a ser modelado; neste trabalho são abordadas duas etapas de carga que são utilizadas separadamente. O primeiro caso de carregamento visa determinar a resposta da estrutura ao longo do tempo através de um processo incremental do tempo real, portanto, esta etapa refere-se ao comportamento viscoelástico dos materiais; já o segundo caso de carregamento procura obter a resposta da estrutura submetida a um carregamento instantâneo, esta fase corresponde, portanto, ao comportamento elastoplástico dos materiais.

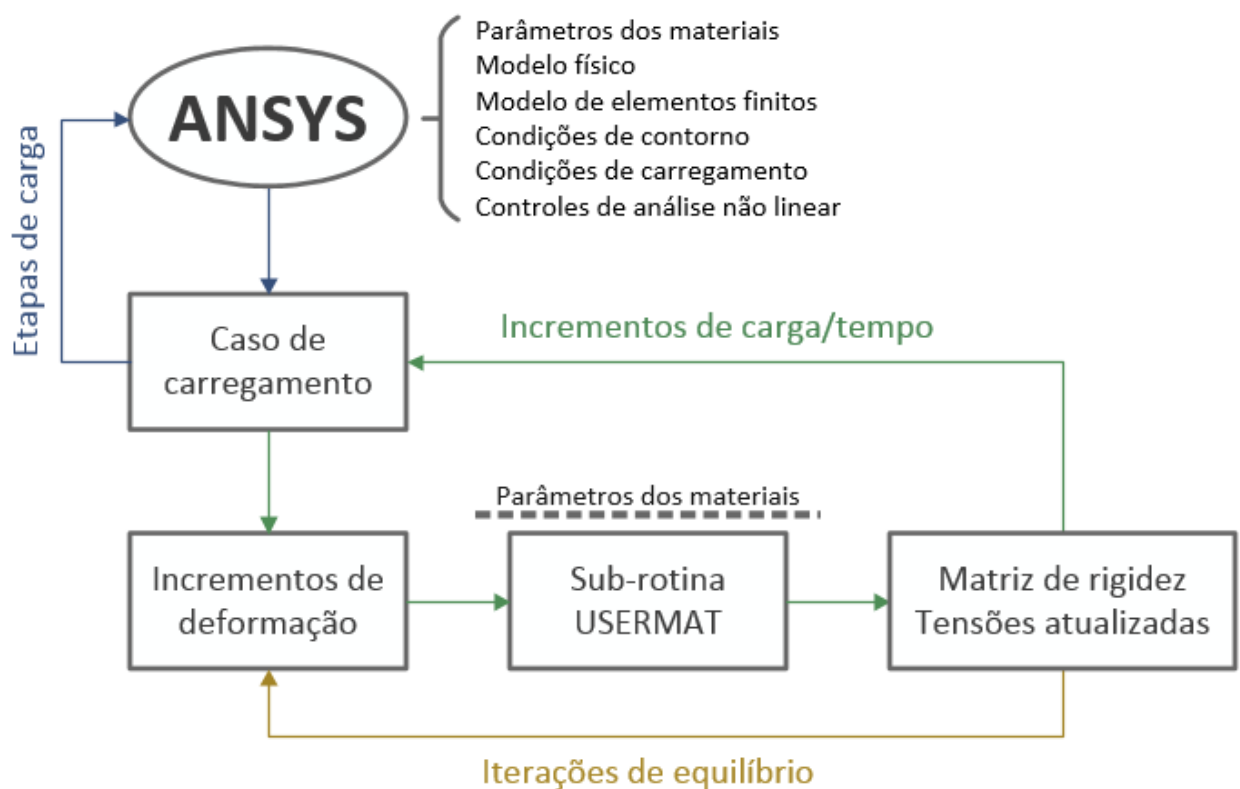


Figura 2.1 – Esquema do programa principal

Os incrementos de carga (*sub-steps*) dividem as etapas de carga em períodos mais curtos, então as cargas aplicadas são alteradas para alcançar uma progressão gradual entre valores iniciais e finais definidos em cada etapa de carga.

Dependendo do tipo de resposta que se procura analisar, os modelos constitutivos desenvolvidos por Lazzari (2015) e utilizados neste trabalho identificam se a etapa de carga corresponde a uma análise elastoplástica ou viscoelástica, dessa maneira os incrementos chegam a se desenvolver de duas maneiras:

- Análise elastoplástica: A carga é considerada de curta duração ou instantânea, então utiliza-se um intervalo de tempo total igual a um dia para dividir a carga em períodos mais curtos.
- Análise viscoelástica: A carga é de longa duração, utilizam-se intervalos de tempo fixos iguais a um dia.

Valores mínimo, máximo e sugeridos de incrementos podem ser definidos pelo usuário, e devem ser suficientes para capturar os detalhes das cargas.

Durante cada incremento de carga, o ANSYS emprega uma série de iterações para atingir o equilíbrio do sistema. Em cada iteração tem-se incrementos de deformação como dados de entrada, os quais são utilizados na USERMAT para devolver dados de saída que consistem em tensões atualizadas e matrizes Jacobianas de tensão-deformação, ou seja, matrizes de rigidez multiaxiais que são utilizadas no cálculo do próximo conjunto de incrementos de deformação. Tal como acontece com os materiais padrão, a USERMAT é chamada para cada ponto de integração durante cada iteração de equilíbrio.

### 2.2.2 USERMAT e suas sub-rotinas

As sub-rotinas da USERMAT são identificadas de acordo ao tipo de elemento finito utilizado e seu número de componentes de deformação. Essa variedade está listada na tabela 2.1 junto com a sub-rotina relacionada. Note-se que o número de componentes de deformação cisalhante será igual à diferença entre o número de componentes total de deformação e o número de componentes de deformação normal.

Tabela 2.1 – Resumo das sub-rotinas USERMAT

<b>Tipo de elemento</b>	<b>Componentes totais de deformação</b>	<b>Componentes de deformação normal</b>	<b>Sub-rotina chamada</b>
Unidimensional	1	1	USERMAT1D
Viga tridimensional	3	1	USERMATBM
Estado plano de tensão	3	2	USERMATPS
Estado plano de deformação	4	3	USERMAT3D
Tridimensional	6	3	USERMAT3D

Das sub-rotinas listadas acima, neste trabalho, são utilizadas as sub-rotinas desenvolvidas por Lazzari (2015) para o caso elementos em estados planos de tensão. Para representar o Customização do software ANSYS para análise de lajes de concreto protendido pelo método de elementos finitos

comportamento do concreto a USERMAT3D é chamada dentro da USERMATPS, já para representar o comportamento da armadura protendida tem-se sub-rotina USERMAT1D. A adaptação feita nessas sub-rotinas para funcionar com elementos de casca foi a adição da variável padrão `tsstif` que funciona como rigidez transversal de corte ou rigidez artificial para controlar modos espúrios.

### 2.2.3 Usando a sub-rotina USERMAT

Tal como Lazzari (2015) expõe, a compilação e ligação da USERMAT com o ANSYS é feita através da criação de uma *Dynamic-Link Library* (DLL), uma pasta contendo o executável ANSUSERSHARED.bat e o arquivo USERMAT customizado, este último disponibilizado quando é feita a instalação do pacote de UPFs denominada ANSYS *Customization Files for User Programmable Features*.

As sub-rotinas USERMAT são ativadas da mesma maneira que um material padrão, utilizando-se comandos em um arquivo no formato texto. O número de parâmetros de entrada e seus valores são definidos pelos comandos TB,USER e TBDATA, respectivamente. Existe também, o número de variáveis de estado que devem ser especificados no comando TB,STATE (ANSYS, 2016). As variáveis de estado padrão salvam a informação referida a deformação plástica equivalente, componentes de deformação plástica e tensões atualizadas, no entanto, é possível adicionar mais variáveis de estado na medida dos requisitos da USERMAT customizada.

Assim mesmo, as sub-rotinas USERMAT antes listadas são compatíveis com a família de elementos finitos padrão denominada 18X, caracterizados por ter o segundo dígito de sua identificação igual a oito, destacando-se os seguintes: LINK180, SHELL181, PLANE182, PLANE183, SOLID185, SOLID186, SOLID187, BEAM188 e BEAM189.

### 2.2.4 Documentação fornecida pelo código USERMAT

Como foi mencionado anteriormente, as sub-rotinas USERMAT são fornecidas em linguagem FORTRAN. Para fins de exposição, aproveitando que as matrizes e vetores da sub-rotina USERMAT1D só têm uma componente, apresenta-se sua documentação padrão dividida convenientemente em oito blocos de códigos. Vale ressaltar também que como as outras sub-rotinas abrangem mais componentes de deformação, os cálculos contidos são mais elaborados quando comparadas à sub-rotina USERMAT1D.



No bloco 1, os parâmetros de entrada do material, `prop`, proporcionam valores a variáveis locais, assim mesmo, são calculados os valores do módulo plástico equivalente `dsigdep` e o módulo de elasticidade transversal `twoG`. Também se calcula o valor de `tsstif`, necessário para o cálculo da rigidez artificial que controla os modos espúrios no ANSYS, e a matriz de rigidez elástica `dsdeEl`, que neste exemplo unidimensional, somente tem uma componente. Assim mesmo tem-se as variáveis auxiliares de dupla precisão `ZERO` e `HALF` definidos com valores de 0.0 e 0.5 respectivamente.

```

keycut      = 0
cutFactor   = 0.d0
dsigdep     = ZERO
pleq_t      = ustatev(1)
pleq        = pleq_t
c *** get Young's modulus and Poisson's ratio, initial yield stress and
others
  young      = prop(1)
  posn       = prop(2)
  sigy0      = prop(3)
c *** calculate plastic slope
  dsigdep    = young*prop(4)/(young-prop(4))
  twoG       = young / (ONE+posn)
c *** define tsstif(1) since it is used for calculation of hourglass
stiffness
  tsstif(1)  = HALF * twoG
c
c *** calculate elastic stiffness matrix
c
  dsdeEl(1,1) = young

```

Figura 2.2 – Bloco de código 1

O bloco 2 usa a matriz de rigidez elástica `dsdeEl` como valor inicial da matriz de rigidez plástica `dsdePl`, a qual é usada como matriz Jacobiana, se ocorrerem deformações plásticas, `dsdeEl` será modificada no bloco 6. O incremento de tensão elástica, `sigElp`, é calculada a partir vetor de incremento de deformações, `dStrain`, e a matriz de rigidez elástica.

```

c *** calculate the trial stress and
c   copy elastic moduli dsdeEl to material Jacobian matrix
  sigElp(1)  = stress(1)
  dsdePl(1,1) = dsdeEl(1,1)
  sigElp(1)  = sigElp(1) + dsdeEl(1,1) * dStrain(1)
c *** sign of predicted stress
  signTens = sign (ONE, sigElp(1))
c *** compute von-mises equivalent stress
  qEl = abs(sigElp(1))
c *** compute current yield stress
  sigy   = sigy0 + dsigdep * pleq

```

Figura 2.3 – Bloco de código 2

Assim mesmo, se define a tensão equivalente de von Mises,  $q_{E1}$ , e seu sinal  $signTens$ , sendo positivo para tração e negativo para compressão. Logo, a tensão de plastificação,  $sigy$ , é calculada a partir da tensão de escoamento do material  $sigy0$ , do módulo plástico equivalente  $dsigdep$  e da deformação plástica equivalente  $pleq$ .

No bloco 3 se avalia o critério de plastificação. Se a tensão equivalente de von Mises,  $q_{E1}$ , é menor à tensão de plastificação,  $sigy$ , então o comportamento do material ainda é elástico e o código continuará no sétimo bloco; caso contrário, o código abordará a parte da plasticidade do modelo.

```

fratio = qE1 / sigy - ONE
c *** check for yielding
IF (sigy .LE. ZERO.or.fratio .LE. -SMALL) GO TO 500

```

Figura 2.4 – Bloco de código 3

Dessa forma, no bloco 4, os valores da tensão de plastificação  $sigy$  e da deformação plástica equivalente  $pleq$  são atualizados a partir do cálculo do incremento de deformação plástica equivalente  $dpleq$ , o qual é estimado pela divisão da diferença das tensões de referência e da adição do módulo de elasticidade do material  $young$  e do módulo plástico equivalente  $dsigdep$ .

```

sigy_t = sigy
c *** initial guess of incremental equivalent plastic strain
dpleq = (qE1 - sigy) / (young + dsigdep)
pleq = pleq_t + dpleq
sigy = sigy0 + dsigdep * pleq

```

Figura 2.5 – Bloco de código 4

Com os dados calculados anteriormente, o bloco 5 atualiza os valores da deformação plástica  $epsPl$  e da tensão elástica  $stress$ , com base no incremento de deformação plástica equivalente  $dpleq$  e no sinal da tensão equivalente de von Mises  $signTens$ .

```

c *** update plastic strains, stresses
epsPl(1) = epsPl(1) + dpleq * signTens
stress(1) = signTens * sigy

```

Figura 2.6 – Bloco de código 5

No bloco 6, o valor da deformação plástica equivalente,  $pleq$ , é copiado duas vezes. Primeiro para a variável global,  $epseq$ , que funciona no programa principal do ANSYS e, logo, para a variável de estado  $ustatev(1)$ , que por sua vez, dá o valor à deformação plástica equivalente

no começo da seguinte iteração `pleq_t`. Também tem-se o cálculo do incremento de energia plástica `sedPl`, cuja estimativa baseia-se na regra do trapézio.

```

c *** update plastic strains
  epseq = pleq
c *** Update state variables
  ustatev(1) = pleq
  ustatev(2) = epsPl(1)
c *** Update plastic work
  sedPl = sedPl + HALF * (sigy_t + sigy) * dpleq
c
c *** Material Jacobian matrix
c
  dsdePl(1,1) = dsdeEl(1,1) * dsigdep / (dsdeEl(1,1) + dsigdep)
c *** Allow a small number for Jacobian matrix if it is an ideal plasticity
  if(dsdePl(1,1).LE.ZERO) dsdePl(1,1) = SMALL*dsdeEl(1,1)
c
  goto 600

```

Figura 2.7 – Bloco de código 6

No bloco 7, simplesmente se atualiza o valor da tensão, cuja informação é calculada no segundo bloco.

```

500 continue

c *** Update stress in case of elastic/unloading
  stress(1) = sigElp(1)

```

Figura 2.8 – Bloco de código 7

O bloco 8 funciona para ambos comportamentos do modelo: elástico e plástico. O incremento de energia elástica, `sedEl`, é calculado como a área do triângulo representado pelas tensões e deformações elásticas. Finalmente, a terceira variável de estado é atualizada com o valor da tensão de plastificação.

```

600 continue
c *** elastic strain energy
  sedEl = HALF * stress(1) * (Strain(1)+dStrain(1)-epsPl(1))
c *** update state variables
  ustatev(nStatev) = sigy
c
  return
end

```

Figura 2.9 – Bloco de código 8

## 2.3 MODIFICAÇÕES PARA IMPLEMENTAR OS MODELOS

Os modelos constitutivos desenvolvidos por Lazzari (2015) nas sub-rotinas USERMAT descrevem o comportamento viscoelastoplástico dos materiais em duas etapas: viscoelástico e elastoplástico. A partir dos blocos 1, 2 e 7 da USERMAT padrão, as sub-rotinas implementadas por Lazzari foram baseadas na seguinte informação (figura 2.10).

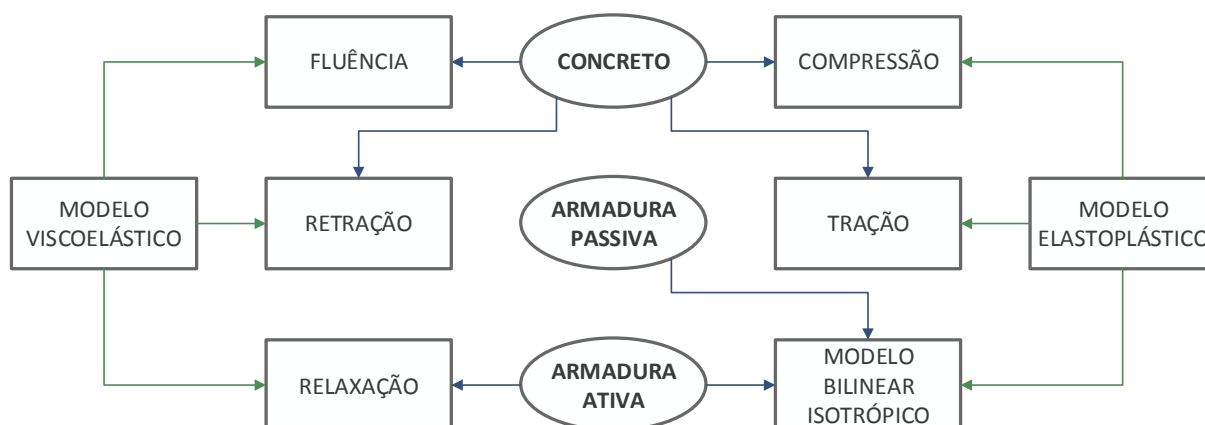


Figura 2.10 – Modelos constitutivos implementados

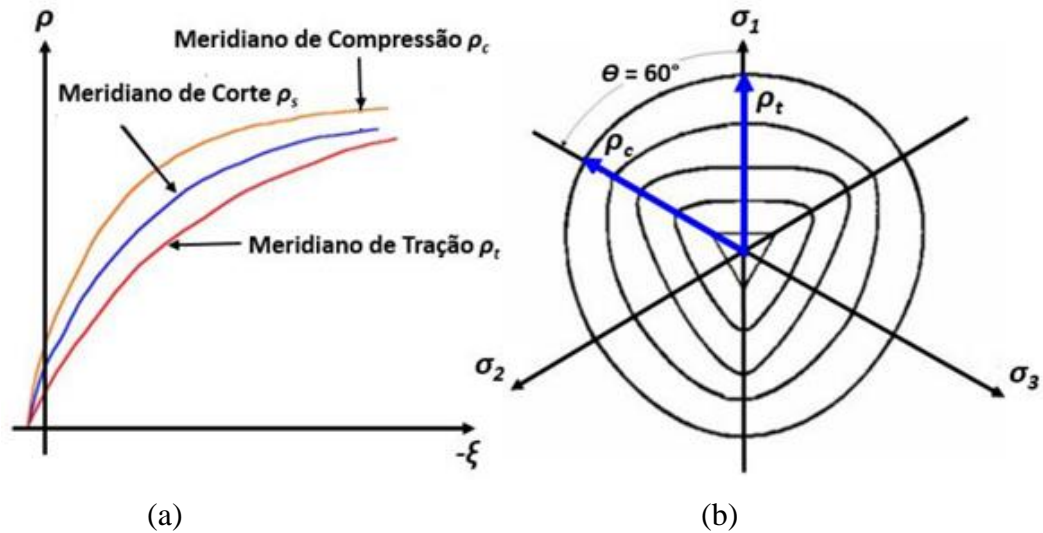
### 2.3.1 Modelo constitutivo para concreto

Dado que o concreto é um material que possui sua resistência à tração muito menor que sua resistência a compressão, seu comportamento pode ser identificado em três fases. Inicialmente apresenta um comportamento elástico-linear, conhecido como estágio I; a partir da ruptura, para o concreto tracionado ocorre a fissuração, também denominada estágio II, já para o concreto sob compressão acontece a plastificação ou estágio III. O modelo constitutivo implementado para o concreto aborda um modelo elastoplástico com endurecimento para descrever a plastificação no concreto comprimido e para o concreto tracionado, antes de fissurar, emprega-se um modelo elástico linear e, após a fissuração, utiliza o modelo de fissuras distribuídas.

#### 2.3.1.1 Modelo para concreto comprimido

O comportamento do concreto comprimido é caracterizado por ser dúctil, muitas fissuras pequenas são desenvolvidas e sua capacidade resistente é maior que em tração. O modelo elastoplástico para descrever este comportamento, baseado na teoria da plasticidade, requiere de três leis essenciais e descritos a seguir: o critério de ruptura, a regra de endurecimento e a regra de fluxo plástico.

O **critério de ruptura** é usado para definir o limite elástico do concreto, conseqüentemente para identificar o início da fissuração ou a ocorrência do esmagamento. Este critério é governado por uma superfície de ruptura, também conhecida como superfície de escoamento, é descrita por seus meridianos e suas seções transversais (figura 2.11).



(fonte: CHEN; HAN, 2007)

Figura 2.11 – Características das superfícies de ruptura: (a) meridianos de superfície de ruptura; (b) seções dos planos desviadores

O critério de ruptura adotado neste trabalho e recomendado pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012), é o modelo de Ottosen (1977) cuja função, que define a superfície de ruptura, vem dada pela expressão (2.1):

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (2.1)$$

onde  $\lambda$  é um coeficiente que depende do ângulo de similaridade  $\theta$  do concreto, definidos pelas expressões (2.2) e (2.3):

$$\lambda = c_1 \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \cdot \arccos(c_2 \cdot \cos 3\theta) \right] \quad (2.2)$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (2.3)$$

sendo  $I_1$  o primeiro invariante do tensor de tensões,  $J_2$  e  $J_3$  o segundo e terceiro invariantes do tensor desviador de tensões, respectivamente, e calculados pelas seguinte expressões:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2.4)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \cdot [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \quad (2.5)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} s_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

nas quais,  $s_{xx}$ ,  $s_{yy}$  e  $s_{zz}$  são as tensões desviadoras determinadas por:

$$s_{xx} = \frac{(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{3} \quad (2.7)$$

$$s_{yy} = \frac{(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz})}{3} \quad (2.8)$$

$$s_{zz} = \frac{(2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{3} \quad (2.9)$$

Os parâmetros do material  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $c_2$  dependem dos seguintes valores: resistência a compressão uniaxial  $f_{cm}$ , resistência uniaxial a tração  $f_{ctm}$ , resistência a compressão biaxial  $f_{c2cm}$  e resistência a compressão triaxial no meridiano de compressão ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ) descrito por  $\sigma_{com}$  e  $\tau_{com}$ .

Para determinar os parâmetros materiais  $\alpha$  e  $\beta$  tem-se as expressões (2.10) e (2.11):

$$\alpha = \frac{h \cdot \beta - \sqrt{2}}{y} \quad (2.10)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2} - \frac{3 \cdot y}{k \cdot f_{2c}}}{h - \frac{9 \cdot y}{f_{2c} - k}} \quad (2.11)$$

com:

$$k = \frac{f_{ctm}}{f_{cm}} \quad f_{2c} = \frac{f_{c2cm}}{f_{cm}} \quad x = \frac{\sigma_{com}}{f_{cm}} \quad y = \frac{\tau_{com}}{f_{cm}} \quad h = -\frac{\sqrt{2} \cdot x + y}{\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}} \quad (2.12)$$

que representam coeficientes definidos a partir dos valores de resistência antes mencionados, somando-se a essa lista a resistência característica à compressão do concreto  $f_{ck}$ , tem-se suas correspondentes expressões:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [MPa]} \quad (2.13)$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3} \text{ para concreto } \leq C50 \quad (2.14)$$

$$f_{c2cm} = \left(1,2 - \frac{f_{cm}}{1000}\right) \cdot f_{cm} \quad (2.15)$$

$$\tau_{com} = \left[185 - 180 \cdot \frac{f_{cm}}{100} + 260 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{100}\right)^2 - 84 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{100}\right)^3\right] \quad (2.16)$$

Tem-se também, as equações (2.17) e (2.18) para calcular os parâmetros materiais  $c_1$  e  $c_2$  como segue:

$$c_1 = [2 \cdot \cos\theta - 1] \cdot \lambda_t + 4 \cdot [1 - \cos\theta] \cdot \lambda_c$$

$$c_1 = \frac{\lambda_c}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot \arccos(c_2)\right)} \quad (2.17)$$

$$c_2 = 1$$

$$c_2 = \cos\left\{3 \cdot \arctan\left[\frac{\left(2 \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda_t} - 1\right)}{\sqrt{3}}\right]\right\} \quad (2.18)$$

que na mesma vez dependem dos valores  $\lambda_c$  e  $\lambda_t$  dados pelas expressões (2.19) e (2.20):

$$\lambda_c = \lambda(\theta = 60^\circ) = \left(1 - \frac{h}{3 \cdot y}\right) \cdot \sqrt{3} \cdot \beta + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot y} \quad (2.19)$$

$$\lambda_t = \lambda(\theta = 0^\circ) = \left(2 \cdot \sqrt{3} - \frac{f_{2c} \cdot h}{\sqrt{3} \cdot y}\right) \cdot \beta + \frac{\sqrt{3}}{f_{2c}} + \frac{\sqrt{2} \cdot f_{2c}}{\sqrt{3} \cdot y} \quad (2.20)$$

A **regra de endurecimento**, empregada para determinar a movimentação da superfície de plastificação (superfície de carregamento). Admitindo que o concreto tem endurecimento isotrópico, a superfície de plastificação se expande equitativamente em todas as direções,

mantendo seu centro fixo. Nesse entendimento, adota-se que a superfície de plastificação é gerada pelo critério de Von Mises particularizando o critério de Ottosen na equação (2.1). Portanto, precisa-se fazer os parâmetros  $\beta$  e  $c_2$  iguais a zero, considerar a tensão uniaxial equivalente ou tensão efetiva  $\sigma_{ef}$  igual a  $f_{cm}$  e finalmente isolar este último valor da expressão antes citada, ficando a seguinte equação:

$$F = (3J_2)^{1/2} = \sigma_{ef} \quad (2.21)$$

Considerando a tensão de plastificação inicialmente nula, o domínio plástico ocorre para valores de  $\sigma_{ef}$  dentro do intervalo  $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$ , conforme ilustra a figura 2.12.

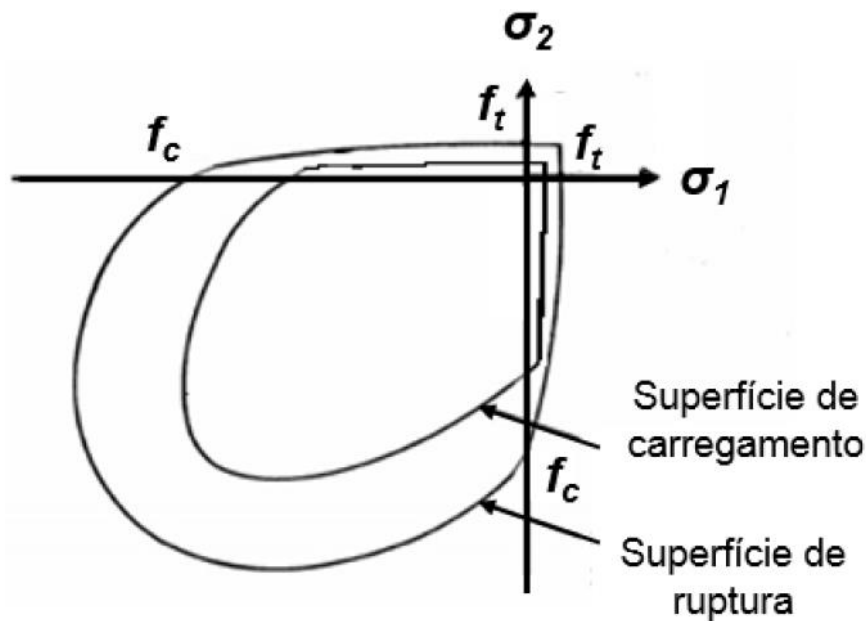


Figura 2.12 – Superfícies de ruptura e carregamento

O desenvolvimento da superfície de plastificação (carregamento), no espaço multiaxial de tensões, pode ser extrapolada dos resultados simples de um ensaio uniaxial, avaliando a relação tensão efetiva-deformação efetiva. Para plasmar este fato, adota-se o diagrama tensão-deformação uniaxial proposto pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012), traçado na figura 2.13 e apresentado na seguinte expressão:

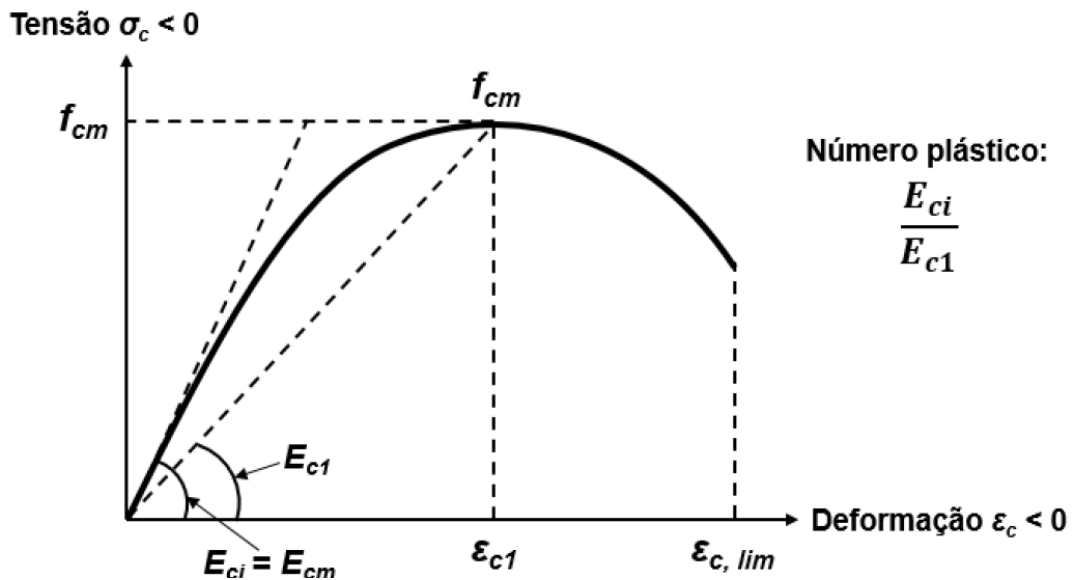
$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = - \left[ \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \right] \text{ para } |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,lim}| \quad (2.22)$$



onde,  $k$  é o número plástico e  $\eta$  é um coeficiente dados nas equações (2.23) e (2.24), respectivamente, e conforme as tabelas 2.2 e 2.3. Os mesmos dependem dos valores de: deformação de compressão  $\varepsilon_c$ , deformação na máxima tensão de compressão  $\varepsilon_{c1}$ , deformação última de compressão  $\varepsilon_{c,lim}$ , módulo de elasticidade do concreto  $E_c$  e módulo secante correspondente à máxima tensão de compressão  $E_{ci}$ .

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (2.23)$$

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \quad (2.24)$$



(fonte: Código Modelo *fib* 2010, 2012)

Figura 2.13 – Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido

Tabela 2.2 – Valores das propriedades para concreto C12 a C50

Concreto	C12	C16	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50
$E_{ci}$ (MPa)	27100	28800	30300	32000	33600	35000	36300	37500	38600
$E_{c1}$ (MPa)	11100	12200	13300	14900	16500	18200	20000	21600	23200
$\varepsilon_{c1}$ (%)	-1,9	-2	-2,1	-2,2	-2,3	-2,3	-2,4	-2,5	-2,6
$\varepsilon_{c,lim}$ (%)	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,4
k	2,44	2,36	2,28	2,15	2,04	1,92	1,82	1,74	1,66

(fonte: Código Modelo *fib* 2010, 2012)

Tabela 2.3 – Valores das propriedades para concreto C55 a C120

Concreto	C55	C60	C70	C80	C90	C100	C110	C120
$E_{ci}$ (MPa)	39700	40700	42600	44400	46000	47000	48900	50300
$E_{c1}$ (MPa)	24700	26200	28900	31400	33800	36000	39300	42700
$\epsilon_{c1}$ (%)	-2,6	-2,7	-2,7	-2,8	-2,9	-3	-3	-3
$\epsilon_{c,lim}$ (%)	-3,4	-3,3	-3,2	-3,1	-3	-3	-3	-3
k	1,66	1,55	1,47	1,41	1,36	1,32	1,24	1,18

(fonte: Código Modelo fib 2010, 2012)

Para se obter uma relação  $\sigma_c = \sigma_c(E_{ci}, k, f_{cm}, \epsilon_{c1}, \epsilon_p)$ , substitui-se, a equação (2.25) na expressão (2.22) resultando as expressões (2.26) a (2.29).

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_{ci}} + \epsilon_p \quad (2.25)$$

$$\sigma_c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad (2.26)$$

$$a = \frac{1}{\epsilon_{c1} \cdot E_{ci}} \cdot \left( \frac{k-2}{f_{cm}} + \frac{1}{\epsilon_{c1} \cdot E_{ci}} \right) \quad (2.27)$$

$$b = \frac{1}{f_{cm}} \cdot \left[ 1 + \frac{\epsilon_p \cdot (k-2)}{\epsilon_{c1}} \right] - \frac{1}{\epsilon_{c1} \cdot E_{ci}} \cdot \left( k - \frac{2 \cdot \epsilon_p}{\epsilon_{c1}} \right) \quad (2.28)$$

$$c = -\frac{\epsilon_p}{\epsilon_{c1}} \cdot \left( k - \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{c1}} \right) \quad (2.29)$$

A **regra de fluxo plástico** é utilizada para determinar a direção do vetor de fluxo plástico. Não havendo muitas evidências experimentais disponíveis, considera-se, por motivos práticos, a plasticidade associada no modelo implementado (OWEN; HINTON, 1980). Neste caso a superfície de plastificação coincide com a superfície de ruptura e, portanto, a direção do vetor de fluxo plástico sempre será perpendicular à superfície de plastificação, conforme a expressão (2.30):

$$a = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 \quad (2.30)$$

os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são determinados pelas equações (2.31), (2.32) e (2.33) e, por sua vez, tem-se as equações (2.34), (2.35) e (2.36) para calcular os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , respectivamente.

$$a_1 = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} \quad (2.31)$$

$$a_2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{xz}\} \quad (2.32)$$

$$a_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \left( s_{yy}s_{zz} - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left( s_{xx}s_{zz} - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left( s_{xx}s_{yy} - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ \left. 2(\tau_{xz}\tau_{xy} - s_{xx}\tau_{yz}), 2(\tau_{xy}\tau_{yz} - s_{yy}\tau_{xz}), 2(\tau_{yz}\tau_{xz} - s_{zz}\tau_{xy}) \right\} \quad (2.33)$$

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} \quad (2.34)$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (2.35)$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (2.36)$$

Nas expressões acima, os invariantes  $I_1$  e  $J_2$  foram definidos nas expressões (2.4) e (2.5) e as tensões desviadoras  $s_{xx}$ ,  $s_{yy}$  e  $s_{zz}$  foram apresentadas nas expressões (2.7), (2.8) e (2.9), respectivamente, o ângulo de similaridade  $\theta$  do concreto foi definida na equação (2.3) e finalmente  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  são as tensões totais de corte.

### 2.3.1.2 Modelo para concreto tracionado

O comportamento do concreto tracionado é caracterizado por ser frágil, grandes fissuras são formadas e a perda de sua resistência depende da contribuição do concreto entre fissuras na rigidez total da estrutura. O modelo proposto para descrever este comportamento, considera o material sendo elástico-linear até a ruptura, a partir da qual, utiliza-se o modelo de fissuras distribuídas. Este modelo também foi caracterizado por três leis: o critério de fissuração, o efeito do enrijecimento à tração (*tension stiffening*) e o modelo para transferência das tensões de corte nos planos das fissuras

O critério de ruptura é utilizado para avaliar se o nível de tensão dos pontos de integração dos elementos atingiu a superfície de ruptura. Como o ponto pode alcançar a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o **critério de fissuração** proposto pelo boletim nº 156 do CEB (1983) para distinguir estas situações:

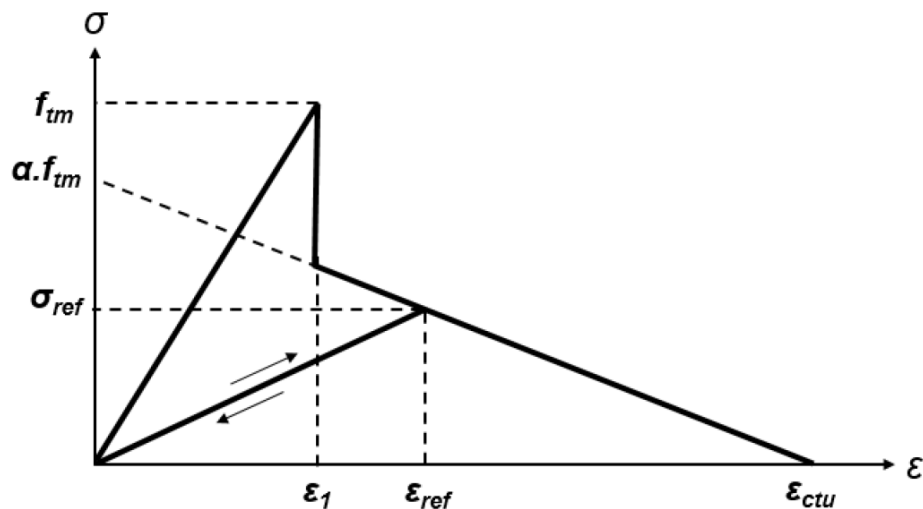
- a) Se  $\sigma_1 \geq f_{tm}/2$ , o ponto de integração fissurou;
- b) Se  $\sigma_1 < f_{tm}/2$ , o ponto de integração esmagou.

onde  $\sigma_1$  é a tensão principal de tração, que pode ser determinada pela expressão (2.37).

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\theta + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (2.37)$$

Para um ponto fissurado, o concreto, que inicialmente é considerado isotrópico, torna-se ortotrópico depois da fissuração. Admite-se que uma primeira fissura tenha se formado em um plano ortogonal à tensão principal de tração  $\sigma_1$ , e que os eixos materiais locais coincidam com as direções principais de tensão. Para carregamentos posteriores, uma segunda fissura pode ocorrer no ponto já fissurado, a direção do primeiro conjunto de fissuras permanece fixa e a tensão de tração é avaliada perpendicularmente ao plano já existente. Se a tensão exceder a resistência do concreto à tração, então um novo plano de fissuras será formado, perpendicular ao já existente, e todas as componentes de tensão serão zeradas.

Quando ocorre a fissuração, a aderência do concreto entre fissuras às barras de armadura, permite que o material ainda seja capaz de suportar um certo nível de tensão, contribuindo significativamente à rigidez total da estrutura. Este fenômeno é conhecido como “**efeito de rigidez à tração**” ou *tension stiffening*, sendo de fundamental importância na análise de peças fletidas de concreto. Este efeito é incorporado no modelo pela modificação da curva tensão-deformação do concreto.



(fonte: Martinelli, 2003)

Figura 2.14 – Diagrama tensão-deformação do concreto tracionado

Hinton (1988) propõe que a degradação da aderência, que ocasiona perdas de resistência à tração, é considerada através da introdução de um ramo descendente suave na curva tensão-deformação, esta curva depende da forma da curva adotada e do valor dos parâmetros a serem usados. Isto significa dizer que o concreto é um material com amolecimento a tração.

A relação constitutiva adotada neste trabalho, desenvolvida por Martinelli (2003), vem dada pela equação (2.38) e ilustrada na figura 2.14. Nesta expressão,  $\alpha$  é um parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente e  $\varepsilon_{cTU}$  é um parâmetro que indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. Adotaram-se os valores de 0,6 e 0,001 para  $\alpha$  e  $\varepsilon_{cTU}$ , respectivamente.

$$\sigma = \alpha \cdot f_{tm} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cTU}} \right) \quad (2.38)$$

A redistribuição de tensões devido à fissuração em outros pontos de integração, pode eventualmente forçar algum ponto previamente fissurado a fechar total ou parcialmente. Neste caso, se a deformação específica atual  $\varepsilon$  é pequena quando comparada com a deformação de tração máxima alcançada transversalmente à fissura em questão  $\varepsilon_{ref}$ , a tensão normal à fissura  $\sigma$ , é calculada pela equação (2.39):

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \cdot \varepsilon \quad (2.39)$$

onde  $\sigma_{ref}$  é a tensão interpolada correspondente à deformação  $\varepsilon_{ref}$ .

A trajetória desta “descarga” secante devido ao fechamento da fissura pode ser vista na figura 2.14. A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até ser excedido o valor  $\varepsilon_{ref}$ , após a qual segue a trajetória descendente definida pela equação (2.38).

De maneira geral, as primeiras fissuras que aparecem no concreto sob tração, formam-se perpendicularmente à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto  $\sigma_1$ . As direções principais se modificam, por mudanças no carregamento ou por não-linearidades na estrutura, produzindo deslocamentos relativos entre as faces rugosas da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura, cujo valor depende das condições locais desta fissura.

No concreto as tensões de corte podem ser transmitidas através das fissuras, sendo que o aumento da abertura das mesmas implica na diminuição da capacidade de **transferência de corte**. São dois os mecanismos principais de transferência de esforços transversais, os quais estão apresentados a seguir:

- a) Engrenamento dos agregados, o principal mecanismo de transferência de esforços transversais e depende do tipo e da granulometria dos agregados.
- b) Efeito de pino da armadura (*dowell effect*), depende do diâmetro das barras, da taxa de armadura e da inclinação das barras em relação ao plano da fissura.

Os mecanismos mencionados acima não podem ser incluídos diretamente no modelo de fissuras distribuídas. Por isso, utilizou-se uma aproximação também adotada por Hinton (1988), que consiste em se adotar um valor reduzido para o módulo de elasticidade transversal do concreto correspondente ao plano fissurado.

Sendo  $G_0$  o módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado e  $\beta$  o fator de redução que varia entre 0 e 1, o novo valor para o módulo de elasticidade transversal,  $G_C$ , é dado pela equação (2.40):

$$G_C = \beta \cdot G_0 \quad (2.40)$$

onde o fator de redução  $\beta$  se relaciona com a deformação específica normal de tração do concreto,  $\varepsilon_T$ , através da equação (2.41). O módulo de deformação por corte no concreto não fissurado  $G_0$  é dado pela equação (2.42), com  $E_c$  como o módulo de elasticidade longitudinal do concreto e  $\nu$  como o coeficiente de Poisson.

$$\beta = 1 - \left( \frac{\varepsilon_T}{0,005} \right)^{0,3} \quad (2.41)$$

$$G_0 = \frac{E_c}{1 + 2 \cdot \nu} \quad (2.42)$$

Nas expressões acima, pode-se observar que, quanto maior a deformação específica  $\varepsilon_T$ , menor será o módulo  $G_C$  e, conseqüentemente, menor será a tensão de corte transferida através da fissura. Caso a fissura feche, o módulo inicial  $G_0$  novamente é adotado.

### 2.3.2 Fluência e retração do concreto

O modelo constitutivo do concreto descrito anteriormente também considera as propriedades dos materiais dependentes do tempo, segundo o Código Modelo *fib* 2010 (2012), a deformação total  $\varepsilon_c(t)$ , no tempo  $t$ , de uma peça em concreto uniaxialmente carregada a partir de um tempo  $t'$ , com uma tensão constante  $\sigma_c(t')$ , pode ser expressa como:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t) + \varepsilon_{cn}(t) \quad (2.43)$$

onde identificam-se duas parcelas de deformação, a deformação dependente da tensão  $\varepsilon_{c\sigma}(t)$  e a deformação independente da tensão  $\varepsilon_{cn}(t)$ , apresentadas a seguir:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{ci}(t') + \varepsilon_{cc}(t) \quad (2.44)$$

$$\varepsilon_{cn}(t) = \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (2.45)$$

A parcela de deformação dependente da tensão que considera a adição da deformação instantânea  $\varepsilon_{ci}(t')$ , devida a efeitos de curta duração e calculada pelo modelo elastoplástico, e a deformação por fluência  $\varepsilon_{cc}(t)$ , cuja principal característica consiste no aumento das deformações com o decorrer do tempo mesmo sob tensões constantes (figura 2.15). Assim mesmo, a parcela de deformação independente da tensão considera as componentes da deformação térmica  $\varepsilon_{cT}(t)$  e da deformação por retração  $\varepsilon_{cs}(t)$ , provocada pela perda de volume resultante da evaporação do resíduo de água contida nos vasos capilares do concreto (figura 2.16).

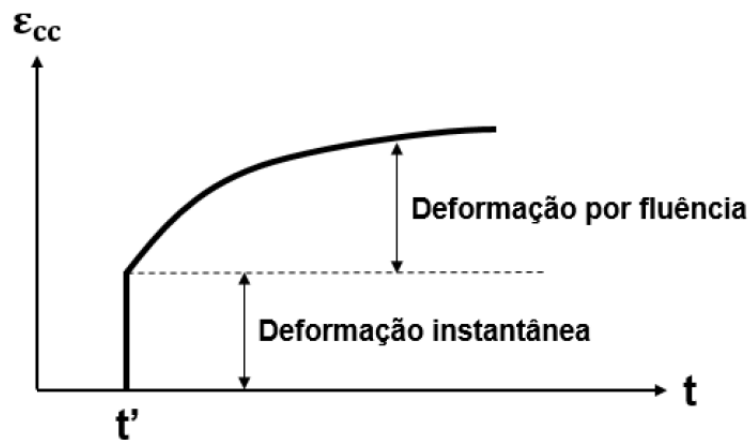


Figura 2.15 – Evolução da deformação por fluência para uma tensão constante aplicada em  $t'$

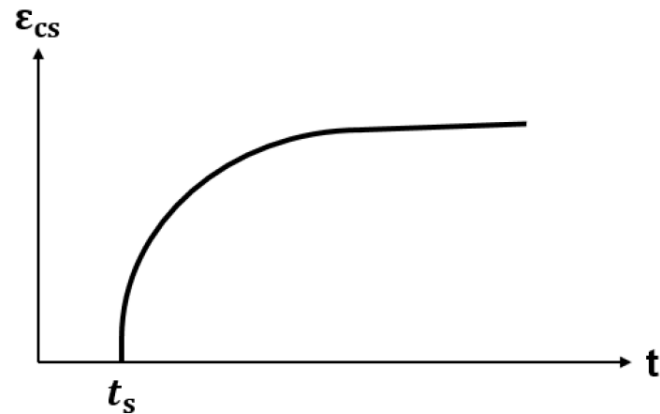


Figura 2.16 – Curva de deformação por retração

Para representar as parcelas da deformação total descritas nas expressões (2.43) a (2.45) emprega-se um modelo viscoelástico. A configuração típica para representar este modelo consiste de elementos de Maxwell, sendo cada um desses composto por dois elementos reológicos básicos: elementos elásticos (mola) em série com elementos viscosos (amortecedor), conforme apresentado na figura 2.17.



Figura 2.17 – Elemento de Maxwell

### 2.3.2.1 Modelo de camadas superpostas

Neste trabalho, o modelo viscoelástico do concreto é formulado pelo **modelo de camadas superpostas** de Bazant e Wu (1974) adotando uma cadeia de cinco elementos de Maxwell em paralelo (figura 2;18).

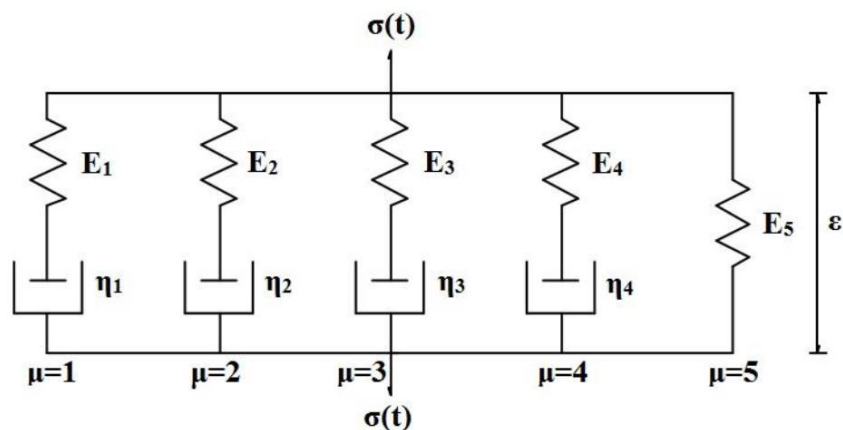


Figura 2.18 – Modelo de Maxwell generalizado



Este modelo supõe que o sólido analisado é composto por várias camadas, superpostas entre si, sendo que cada camada possui tanto espessuras quanto propriedades mecânicas diferentes, conforme apresenta a figura 2.19. As camadas sofrem a mesma deformação total produzindo um campo de tensão diferente, que contribui para o campo de tensão total, conforme a sua espessura  $e_i$ .

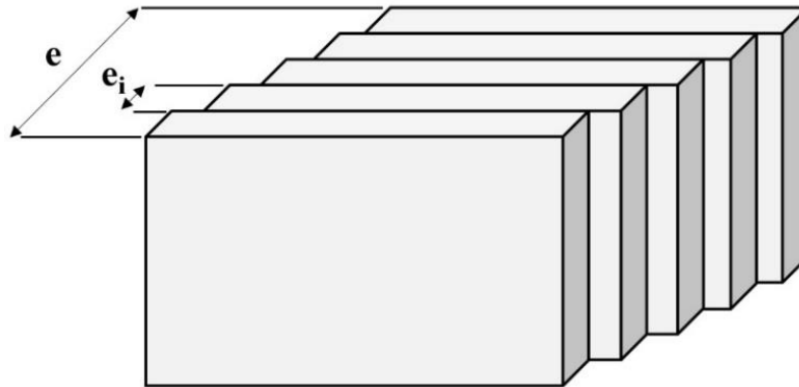


Figura 2.19 – Modelo de camadas superpostas

As unidades  $\mu$  da cadeia são compostas por molas elásticas, com módulo de elasticidade  $E_\mu(t)$ , dependente da idade  $t$  do material, e amortecedores viscosos, com coeficientes de viscosidade  $\eta_\mu(t)$ . Pode-se notar que este modelo não possui componente plástica, ou seja, os elementos de atrito possuem tensão de plastificação nula.

O campo de tensão  $\sigma(t)$  aplicado na cadeia, pode ser expresso como:

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^5 \sigma_\mu(t) \quad (2.46)$$

no qual  $\sigma_\mu(t)$  representa a tensão em um elemento da cadeia de Maxwell e  $\sigma(t)$  a tensão total atuante, ambos dependentes da idade  $t$  do concreto.

Estando a mola e o amortecedor conectados em série, pode-se escrever a **equação diferencial que relaciona tensões e deformações** por:

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}_\mu(t)}{E_\mu(t)} + \frac{\sigma_\mu(t)}{\eta_\mu(t)} \quad (2.47)$$

onde  $\varepsilon(t)$  é a deformação total,  $E_\mu(t)$  é o módulo de elasticidade da mola  $\mu$  e  $\eta_\mu(t)$  é o coeficiente de viscosidade da unidade  $\mu$ , todos eles dependentes da idade  $t$  do concreto. Logo, os coeficientes de viscosidade,  $\eta_\mu(t)$ , são determinados por:

$$\eta_\mu(t) = E_\mu(t)\tau_\mu \quad (2.48)$$

sendo  $\tau_\mu$  o tempo de relaxação da unidade  $\mu$ , considerado constante no tempo  $t$ . Os tempos de relaxação de cada unidade  $\mu$ , de acordo com o período de tempo que se deseja descobrir, após a aplicação da carga, são obtidos por:

$$\tau_\mu = 10^{\mu-1} \text{ com } \mu = 1, \dots, 4 \quad (2.49)$$

$$\tau_5 = 10^{30}$$

a unidade  $\mu = 5$ , cuja mola não está acoplada a nenhum amortecedor, é considerada com  $\tau_5 \rightarrow \infty$  e  $\eta_5 \rightarrow \infty$ , a fim de tornar a deformação assintoticamente convergente para uma certa data, conforme o comportamento real do concreto.

A solução da equação diferencial (2.47) representa a tensão resultante para o elemento de Maxwell no tempo  $t$ , devido a um carregamento  $t'$ , sendo expressa por:

$$\sigma(t, t') = \sigma_\mu(t')e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu}} \quad (2.50)$$

Assim, pode-se encontrar a função de relaxação  $R(t, t')$  do modelo, que representa a tensão resultante para uma deformação unitária, imposta em  $t$  igual a  $t'$  e mantida constante para  $t$  maior que  $t'$ , pela seguinte expressão:

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^5 E_\mu(t')e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu}} \quad (2.51)$$

A **determinação dos parâmetros**  $E_\mu(t')$  desta função é feita a partir da função de relaxação  $\tilde{R}_i(t_i, t')$ , cujos valores discretos no tempo  $t_i$ , são conhecidos. Bazant (1982) propõe um algoritmo que determina automaticamente os parâmetros  $E_\mu(t)$ . A solução consiste em determinar a equação da curva de relaxação, para uma idade  $t'$ , pelo método dos mínimos quadrados, a partir dos pontos conhecidos  $\tilde{R}(t_i, t')$ . A aplicação deste método é feita através da minimização da soma dos quadrados do desvio  $\phi$ , ou seja:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} [R(t_i, t') - \tilde{R}(t_i, t')]^2 + \Omega \quad (2.52)$$

onde  $\Omega$  é o termo residual para melhorar o ajuste da função, definido por:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} [R(t_i, t') - \tilde{R}(t_i, t')]^2 + \Omega \quad (2.53)$$

onde  $\bar{\omega}_1 = 0,01$  e  $\bar{\omega}_2 = 0,08$  representam os pesos adotados para o termo residual.

Substituindo a equação (2.51), que representa a função de relaxação para o modelo de Maxwell, na expressão (52) sem o termo residual, tem-se:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} \left[ \sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_{\mu}}} - \tilde{R}(t_i, t') \right]^2 + \Omega \quad (2.54)$$

onde, as incógnitas  $E_{\mu}(t')$  são obtidas através das condições de minimização, ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial E_{\mu}} = 0 \text{ com } \mu = 1, \dots, 5 \quad (2.55)$$

A equação (2.55) forma um sistema de cinco equações com cinco incógnitas. A resolução deste sistema conduz a valores positivos de  $E_{\mu}(t')$ , pois a inclinação da curva de relaxação é sempre positiva,  $E_{\mu}(t')$ . A solução  $j$  deste sistema é indicada na equação (2.56).

$$\sum_{i=1}^{30} \left[ \sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_{\mu}}} - \tilde{R}(t_i, t') \right] \sum_{i=1}^{30} e^{\frac{-(t-t')}{\tau_j}} = 0 \quad (2.56)$$

Esta expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{30} \left[ \sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_{\mu}} + \frac{t-t'}{\tau_j}\right)} - \tilde{R}(t_i, t') \right] = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_j}} \quad (2.57)$$

Matricialmente é possível representar a equação (2.57) pela relação (2.58):

$$[A]\{E\} = \{B\} \quad (2.58)$$

onde:

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^{30} e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_\mu} + \frac{t-t'}{\tau_j}\right)} \quad (k = 1, \dots, 5) \quad (2.59)$$

$$E_j = E_j(t')$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau_j}}$$

Inserindo o termo residual  $\Omega$ , de ajuste da função, nas equações da expressão (2.55), os elementos  $A_{jk}$  da matriz  $[A]$  devem ser corrigidos conforme as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= A_{1,1} + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 & A_{3,1} &= A_{3,1} + \bar{\omega}_2 & (2.60) \\ A_{1,2} &= A_{1,2} - \bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 & A_{3,2} &= A_{3,2} - \bar{\omega}_1 + 4\bar{\omega}_2 \\ A_{1,3} &= A_{1,3} + \bar{\omega}_2 & A_{3,3} &= A_{3,3} + 2\bar{\omega}_1 + 5\bar{\omega}_2 \\ A_{2,1} &= A_{2,1} - \bar{\omega}_1 - 2\bar{\omega}_2 & A_{3,4} &= A_{3,4} - \bar{\omega}_1 - 2\bar{\omega}_2 \\ A_{2,2} &= A_{2,2} + 2\bar{\omega}_1 + 5\bar{\omega}_2 & A_{4,3} &= A_{4,3} - \bar{\omega}_1 - 2\bar{\omega}_2 \\ A_{2,3} &= A_{2,3} - \bar{\omega}_1 - 4\bar{\omega}_2 & A_{4,4} &= A_{4,4} + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \\ A_{2,4} &= A_{2,4} + \bar{\omega}_2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações da expressão (2.60), determinam-se os valores dos módulos de elasticidade da cadeia de Maxwell  $E_\mu(t')$ , para os valores de  $t'$  nos quais são dados os pontos discretos  $\tilde{R}(t_i, t')$ . Já, para qualquer idade  $t$ , os valores de  $E_\mu(t')$  são interpolados pela seguinte expressão:

$$E_\mu(t) = \frac{E_\mu(t'_{i-1})[\log(t'_i) - \log(t)] + E_\mu(t'_i)[\log(t) - \log(t'_{i-1})]}{\log(t'_i) - \log(t'_{i-1})} \quad (2.61)$$

Conhecidos os valores de  $E_\mu$ , para as cinco camadas, obtêm-se os respectivos valores de  $\eta_\mu$ , através da equação (2.48). Assim sendo, com este modelo, tais valores de  $E_\mu$  e  $\eta_\mu$  podem ser obtidos para qualquer idade  $t$  do concreto na fase viscoelástica.

### 2.3.2.2 Inclusão da fluência no modelo

Neste trabalho, adota-se a formulação apresentada pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012) que aceita a superposição linear de deformações quando se trabalha com níveis de tensão menores que 40% do valor da resistência média à compressão do concreto. A **função de fluência**  $J(t, t')$  válida para concretos submetidos a uma tensão máxima menor que  $0,4f_{cm}$  e sob um carregamento aplicado no tempo  $t'$  vem dada pela equação (2.62).

$$J(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\varphi(t, t')}{E_c} \quad (2.62)$$

onde  $\varphi(t, t')$  é o coeficiente de fluência e  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias de idade, que pode ser determinado a partir da resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias  $f_{cm}$ , e pelo tipo de agregado presente no concreto, através da equação (2.63).

$$E_c = 25800 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{cm} \text{ em Mpa, para agregados do tipo basalto;} \quad (2.63)$$

$$E_c = 21500 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{cm} \text{ em Mpa, para agregados do tipo quartzo;}$$

$$E_c = 19400 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{cm} \text{ em Mpa, para agregados do tipo calcário;}$$

$$E_c = 15100 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{cm} \text{ em Mpa, para agregados do tipo arenito}$$

Com base no valor de  $E_c$  é possível estimar o  $E_c(t')$  para uma idade  $t'$  qualquer, através da equação (2.64).

$$E_c(t') = \beta_{cc}(t')^{1/2} E_c \quad (2.64)$$

sendo a variável  $\beta_{cc}(t')$  definida por:

$$\beta_{cc}(t') = \exp \left\{ s \cdot \left[ 1 - \left( \frac{28}{t'_T} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (2.65)$$

onde  $t'_T$  é o ajuste no tempo, em função dos efeitos providos de temperatura diferentes de 20°C, com limite entre 0°C e 80°C; e  $s$  é o parâmetro dependente do tipo de cimento utilizado no concreto, assumindo o valor de 0,20 para cimento de endurecimento rápido e alta resistência

inicial; 0,25 para cimento de endurecimento rápido e normal; e 0,38 para cimento de endurecimento lento. Para concretos com  $f_{cm} > 60MPa$ ,  $s = 0,20$ .

O **coeficiente de função de fluência**  $\varphi(t, t')$ , vem dado pela adição do coeficiente de fluência básico  $\varphi_{bc}(t, t')$  e o coeficiente de fluência por secagem  $\varphi_{dc}(t, t')$ , conforme a seguinte expressão:

$$\varphi(t, t') = \varphi_{bc}(t, t') + \varphi_{dc}(t, t') \quad (2.66)$$

O coeficiente de fluência básico  $\varphi_{bc}(t, t')$  é obtido por:

$$\varphi_{bc}(t, t') = \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta_{bc}(t, t') \quad (2.67)$$

com as variáveis  $\beta_{bc}(f_{cm})$  e  $\beta_{bc}(t, t')$  calculadas de acordo com as equações (2.68) e (2.69), respectivamente:

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{1,8}{(f_{cm})^{0,7}} \quad (2.68)$$

$$\beta_{bc}(t, t') = \ln \left[ \left( \frac{30}{t_{0,adj}} + 0,035 \right)^2 \cdot (t - t') + 1 \right] \quad (2.69)$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência à compressão média do concreto aos 28 dias.

Por sua vez, o coeficiente de fluência por secagem  $\varphi_{dc}(t, t')$ , que é uma variável dependente principalmente da umidade do ar e da espessura fictícia da peça, é calculado através da equação (2.70):

$$\varphi_{dc}(t, t') = \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta(RH) \cdot \beta_{dc}(t') \cdot \beta_{dc}(t, t') \quad (2.70)$$

com as variáveis  $\beta_{bc}(f_{cm})$ ,  $\beta(RH)$  e  $\beta_{dc}(t')$  calculadas de acordo com as equações (2.71) a (2.73), respectivamente.

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1,4}} \quad (2.71)$$

$$\beta(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{0,1 \frac{h}{100}}} \quad (2.72)$$

$$\beta_{dc}(t') = \frac{1}{0,1 + t_{0,adj}^{0,2}} \quad (2.73)$$

O desenvolvimento da fluência por secagem no tempo é descrito por:

$$\beta_{dc}(t, t') = \left[ \frac{(t - t')}{\beta_h + (t - t')} \right]^{\gamma(t')} \quad (2.74)$$

nas expressões acima  $RH$  é a umidade relativa do ar e  $h$  é a espessura fictícia dada pela equação:

$$h = \frac{2A_c}{u} \quad (2.75)$$

sendo  $A_c$  a área da seção transversal e  $u$  o perímetro em contato com a atmosfera, e por sua vez  $\gamma(t')$  e  $\beta_h$  são variáveis calculadas de acordo com seguintes equações:

$$\gamma(t') = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t_{0,adj}}}} \quad (2.76)$$

$$\beta_h = 1,5 \cdot h + 250 \cdot \alpha_{f_{cm}} \leq 1500 \cdot \alpha_{f_{cm}} \quad (2.77)$$

onde o coeficiente  $\alpha_{f_{cm}}$  definido pela seguinte expressão:

$$\alpha_{f_{cm}} = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,5} \quad (2.78)$$

Os **efeitos do tipo de cimento e da variação da temperatura** ao longo do tempo, sobre as deformações por fluência, são considerados através de correções dos coeficientes e funções descritos anteriormente.

Os efeitos de altas ou baixas temperaturas e da maturidade do concreto, devem ser considerados, ajustando-se o valor do tempo  $t'$ , conforme a equação:

$$t_{0,adj} = t'_T \cdot \left[ \frac{9}{2 + (t'_T)^{1/2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ dias} \quad (2.79)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro dependente do tipo de cimento utilizado na elaboração do concreto, sendo admitidos os valores de 1 para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial, 0 para cimento de endurecimento rápido e normal, e -1 para cimento de endurecimento lento; e  $t'_T$  é o ajuste no tempo, em função dos efeitos providos de temperatura diferentes de 20°C, com limite entre 0°C e 80°C, determinado pela seguinte expressão:

$$t'_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left[ 13,65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)} \right] \quad (2.80)$$

sendo  $\Delta t_i$  o número de dias em que a temperatura  $T$  prevaleceu,  $T(\Delta t_i)$  a temperatura média atuante por um período de  $\Delta t_i$  dias e  $n$  o número total de dias.

O efeito da temperatura no desenvolvimento do tempo da fluência é levado em conta através da expressão:

$$\beta_{h,T} = \beta_h \cdot \beta_T \quad (2.81)$$

onde  $\beta_{h,T}$  é o coeficiente dependente da temperatura que substitui o coeficiente  $\beta_h$  na equação (2.77), e  $\beta_T$  é o coeficiente de correção expresso por:

$$\beta_T = \exp \left[ \frac{1500}{273 + T} - 5,12 \right] \quad (2.82)$$

Também, o efeito da temperatura no coeficiente de fluência é considerado através das expressões (2.83) e (2.84):

$$\varphi_{bc,T} = \varphi_{bc} \cdot \varphi_T \quad (2.83)$$

$$\varphi_{dc,T} = \varphi_{dc} \cdot \varphi_T^{1,2} \quad (2.84)$$

onde  $\varphi_{bc,T}$  e  $\varphi_{dc,T}$  são coeficientes dependentes da temperatura que substituem os coeficientes  $\varphi_{bc}$  e  $\varphi_{dc}$ , respectivamente, na equação (2.66); e  $\varphi_T$  é o coeficiente de correção dado por:

$$\varphi_T = \exp[0,015(T - 20)] \quad (2.85)$$



Há também, uma consideração do efeito da temperatura sobre a resistência média à compressão  $f_{cm}$  e sobre o módulo de elasticidade  $E_c$ , considerados na temperatura padrão de 20°C, respectivamente através das equações (2.86) e (2.87):

$$f_{cm}(T) = f_{cm}(1,06 - 0,003 \cdot T) \quad (2.86)$$

$$E_c(T) = E_c(1,06 - 0,003 \cdot T) \quad (2.87)$$

onde  $f_{cm}(T)$  é a resistência à compressão e  $E_c(T)$  é o módulo de elasticidade, avaliados na temperatura  $T$ .

### 2.3.2.3 Inclusão da retração no modelo

As deformações por retração do concreto são tratadas como deformações impostas à estrutura, tal como na inclusão do fenômeno da fluência, uma vez que, em ambos os casos, não há acréscimo de tensões no concreto. Para tanto, na avaliação da tensão em cada ponto de integração, a deformação total passa a ser reduzida desta parcela relativa a retração. Conforme o Código Modelo *fib* 2010 (2012), a deformação total por retração pode ser calculada como:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s) \quad (2.88)$$

onde a retração é subdividida em uma retração autógena  $\varepsilon_{cas}(t)$ :

$$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) \cdot \beta_{as}(t) \quad (2.89)$$

e a retração por secagem  $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$ :

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_s) \quad (2.90)$$

onde  $t$  é a idade do concreto em dias,  $t_s$  é a idade de início da consideração da retração do concreto em dias, e  $(t - t_s)$  é a duração deste efeito dentro da faixa de tempo considerada.

A componente da retração autógena  $\varepsilon_{cas}(t)$  é calculada por meio do coeficiente de retração autógena fictícia  $\varepsilon_{cas0}(f_{cm})$  e a função dependente do tempo  $\beta_{as}(t)$ :

$$\varepsilon_{cas0}(f_{cm}) = -\alpha_{as} \left( \frac{f_{cm}/10}{6 + f_{cm}/10} \right)^{2,5} \cdot 10^{-6} \quad (2.91)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2 \cdot \sqrt{t}) \quad (2.92)$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência à compressão do concreto aos 28 dias em MPa e  $\alpha_{as}$  é um coeficiente que depende do tipo de cimento, conforme a tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Valores do coeficiente  $\alpha_{as}$ ,  $\alpha_{ds1}$  e  $\alpha_{ds2}$

Classe de resistência do cimento	$\alpha_{as}$	$\alpha_{ds1}$	$\alpha_{ds2}$
32,5 N	800	3	0,013
32,5 R; 42,5 N	700	4	0,012
42,5 R; 52,5 N; 52,5 R	600	6	0,012

(fonte: Código Modelo *fib* 2010, 2012)

Por sua vez, a componente da retração por secagem  $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$  é calculada por meio do coeficiente de retração por secagem fictício  $\varepsilon_{cds0}(f_{cm})$ , do coeficiente  $\beta_{RH}(RH)$  que tem em conta o efeito da umidade relativa e da função  $\beta_{ds}(t - t_s)$  dependente do tempo:

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = [(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp(-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm})] \cdot 10^{-6} \quad (2.93)$$

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] & \text{para } 40 \leq RH \leq 99\% \cdot \beta_{s1} \\ 0,25 & \text{para } RH \geq 99\% \cdot \beta_{s1} \end{cases} \quad (2.94)$$

$$\beta_{ds}(t - t_s) = \left[ \frac{(t - t_s)}{0,035 \cdot h^2 + (t - t_s)} \right]^{0,5} \quad (2.95)$$

$$\beta_{s1} = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,1} \leq 1,0 \quad (2.96)$$

onde  $\alpha_{ds1}$  e  $\alpha_{ds2}$  são coeficientes, dependentes do tipo de cimento, conforme a tabela 3,  $RH$  é a umidade relativa do ambiente em %,  $h$  é a espessura fictícia dada pela equação (2.75).

Quando o efeito da temperatura é considerado, precisa-se fazer algumas correções nas componentes da retração. A retração autógena é principalmente afetada no desenvolvimento do tempo, portanto, a idade do concreto  $t$  na expressão (2.92) deve ser substituída pela idade efetiva do concreto  $t'_T$  ajustada em função dos efeitos providos de temperaturas diferentes de 20°C, com limite entre 0°C e 80°C, conforme (2.80).

Em quanto o concreto encontra-se secando, o efeito de uma temperatura constante e diferente de 20°C afeta a retração por secagem, este efeito é considerado pela substituição do termo  $0,035h^2$ , na equação (2.95), pelo termo apresentado a seguir:

$$\alpha_{st}(T) = 0,035 \cdot h^2 \cdot e^{-0,06[T-20]} \quad (2.97)$$

Assim mesmo, o efeito da temperatura na magnitude da retração por secagem é considerado nas expressões (2.98) a (102):

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH} \cdot \beta_{st} \quad (2.98)$$

onde o valor de  $\beta_{RH}$ , da equação (107), precisa ser alterado para  $\beta_{RH,T}$  que é calculado conforme (2.99) e (2.100):

$$\beta_{st} = 1 + \left( \frac{4}{103 - RH} \right) \cdot \left[ \frac{T - 20}{40} \right] \quad (2.99)$$

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] & \text{para } 40 \leq RH \leq RH_T \\ 0,25 & \text{para } RH \geq RH_T \end{cases} \quad (2.100)$$

com

$$RH_T = 99\% \cdot \beta_{s1} + \beta_{s1,T} \leq 100\% \quad (2.101)$$

$$\beta_{s1,T} = \left( \frac{T - 20}{25} \right)^3 \quad (2.102)$$

sendo os valores de  $\beta_{s1}$  e  $\beta_{s1,T}$  dados nas expressões (2.96) e (2.102), respectivamente.

### 2.3.3 Modelo constitutivo para armadura

O comportamento das armaduras é assumido por um modelo uniaxial considerando que as barras resistem apenas esforços axiais. O aço é representado como um material elastoplástico e que apresenta o mesmo comportamento em tração e compressão. A representação se dá por um diagrama tensão-deformação bilinear.

Para as armaduras passivas, as barras seguem dois comportamentos, dependendo do processo de fabricação do material. Para aços com patamar de escoamento bem definido, adota-se o modelo elastoplástico perfeito, ilustrado na figura 10a. Para os aços encruados a frio, utiliza-se um comportamento elastoplástico com endurecimento linear a partir de 0,85 da tensão de escoamento, conforme a figura 10b. Para as armaduras ativas, o material tem um comportamento elástico-linear até atingir 90% do valor da tensão de ruptura e após atingido

este valor, apresenta um comportamento com endurecimento linear, conforme apresentado na figura 11.

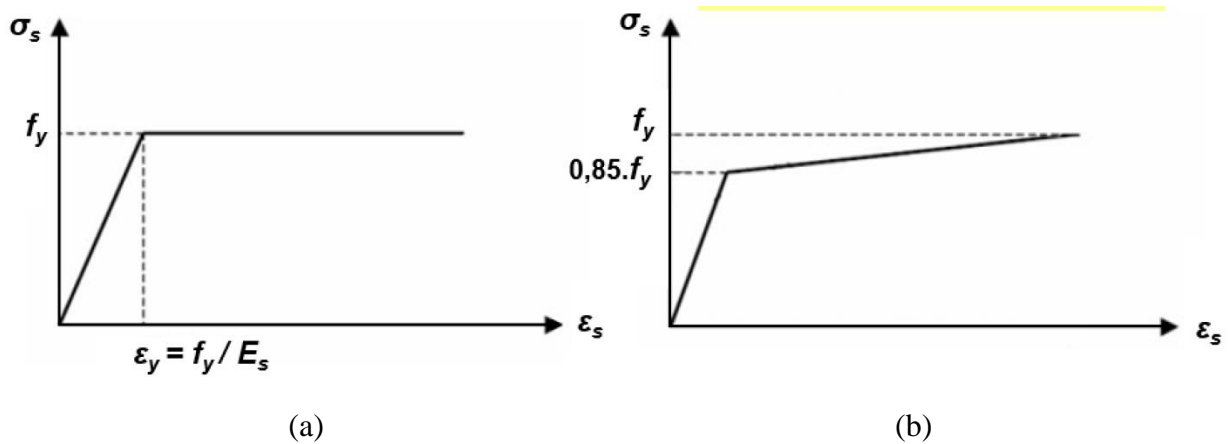


Figura 2.20 – Modelo elastoplástico para armaduras passivas: (a) elastoplástico perfeito; (b) elastoplástico com endurecimento linear

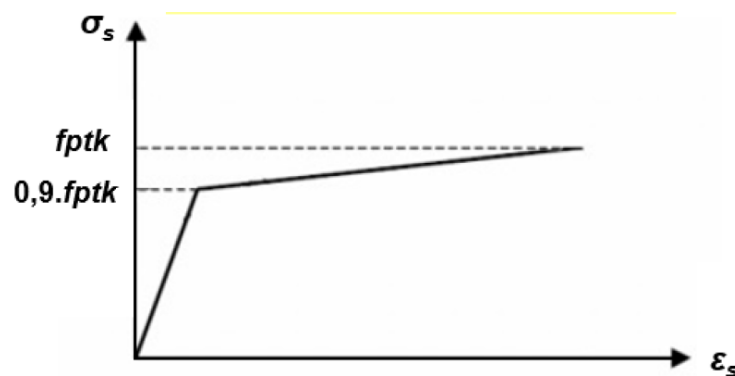


Figura 2.21 – Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras ativas

O parâmetro de endurecimento utilizado é fornecido pela expressão (2.103).

$$H_s = \frac{0,15 \cdot f_y}{10\% - \frac{f_y}{E_s}} \quad (2.103)$$

### 2.3.4 Relaxação da armadura protendida

O efeito de relaxação do aço protendido provoca uma perda de tensão das barras ao longo do tempo. Para a representação deste comportamento, utiliza-se o modelo reológico com 5 elementos tipo Maxwell, que representa cada uma das camadas do material.

Este modelo segue o mesmo processo utilizado para o efeito da fluência do concreto. A determinação da função de relaxação  $R(t, t')$  é obtida a partir dos termos  $E_\mu(t')$  que pode ser feita a partir de uma função de relaxação  $\tilde{R}_i(t_i, t')$ , cujos valores discretos nos tempos  $t_i$  são conhecidos.

Ao contrário do que ocorre para o concreto, existem formulações específicas para a obtenção do efeito da relaxação na armadura protendida. Desta forma, para a determinação dos pontos discretos  $\tilde{R}_i(t_i, t')$ , dispensa-se o uso das curvas de fluência, como no caso do concreto.

Conforme o Código Modelo *fib* 2010 (2012), o valor da relaxação do aço, para qualquer tempo  $t$ , em dias, é dado por:

$$\rho_t = \psi_{1000} \left( \frac{3t}{125} \right)^k \quad (2.104)$$

onde  $\psi_{1000}$  é a relaxação das barras após 1000 horas a 20°C,  $t$  é o tempo em horas e o valor de  $k$  é igual a 0,12 para relaxação normal e 0,25 para relaxação baixa. A determinação de  $\psi_{1000}$  é feita através dos coeficientes  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$ ,  $\psi_{80}$ , que são resultados de medidas de tensão, após 1000 horas, a 20°C, de amostras de aço mantidas com comprimento constante e submetidas, inicialmente a tensões de tração de 60%, 70% e 80% da tensão de ruptura  $f_{ptk}$ , respectivamente. Sendo assim, determina-se  $\psi_{1000}$  pela seguinte equação:

$$\psi_{1000} = a \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right)^2 + b \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right) c \quad (2.105)$$

com:

$$a = 50\psi_{60} - 100\psi_{70} + 50\psi_{80} \quad (2.106)$$

$$b = -75\psi_{60} + 140\psi_{70} - 65\psi_{80} \quad (2.107)$$

$$c = 28\psi_{60} - 48\psi_{70} + 21\psi_{80} \quad (2.108)$$

onde  $\sigma_{p0}$  representa a tensão inicial de protensão e os valores de  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$ , para cordoalhas, são dados pela NBR 6118/2014 e mostrados na tabela 2.5.

Tabela 2.5 – Valores do coeficiente  $\alpha_{as}$ ,  $\alpha_{ds1}$  e  $\alpha_{ds2}$ 

Classe de resistência do cimento	$\alpha_{as}$	$\alpha_{ds1}$	$\alpha_{ds2}$
32,5 N	800	3	0,013
32,5 R; 42,5 N	700	4	0,012
42,5 R; 52,5 N; 52,5 R	600	6	0,012

(fonte: Código Modelo *fib* 2010, 2012)

A função de relaxação dos pontos discretos  $\tilde{R}_i(t_i, t')$  é determinada a partir da seguinte expressão:

$$\tilde{R}_i(t_i, t') = E_p \left[ 1 - \psi_{1000} \left( \frac{3(t_i - t')}{125} \right)^k \right] \quad (2.109)$$

onde  $E_p$  é o módulo de elasticidade longitudinal e os valores de duração de carga  $(t_i - t')$  são escolhidos da mesma forma que para o efeito de fluência, em escala logarítmica, ficando:

$$(t_i - t') = 10^{\frac{1}{10}}(t_{i-1} - t') \quad (i = 2, \dots, 40) \quad (2.110)$$

onde  $(t_1 - t') = 3,52$  dias,  $(t_{40} - t') = 22241,2$  dias e  $t' = 2,8$  dias.

Uma vez conhecidos os pontos discretos  $\tilde{R}_i(t_i, t')$ , pode-se calcular os valores de  $E_\mu$  através do procedimento mostrado no item 2.3.2, adotando-se os valores dos fatores peso  $\bar{w}_1$  e  $\bar{w}_2$  como 0,08 e 0,25; respectivamente. Os módulos  $E_\mu$  permanecem constantes ao longo do tempo, portanto os valores obtidos pela resolução do sistema da expressão (2.58) são utilizados para qualquer idade de análise. Os coeficientes de viscosidade  $\eta_\mu$  dos elementos da cadeia de Maxwell são calculados pela equação (2.48) e os tempos de relaxação são considerados constantes e definidos pela equação (2.49).

O incremento de tensão, em cada intervalo de tempo, para cada elemento da cadeia de Maxwell, é dado por:

$$\Delta\sigma_\mu = E_\mu(\Delta\varepsilon_{tot} - \Delta\varepsilon_{v\mu}) \quad (2.111)$$

onde  $\Delta\varepsilon_{tot}$  é o incremento de deformação total da armadura e  $\Delta\varepsilon_{v\mu}$  é o incremento de deformação viscoelástica da unidade  $\mu$  da armadura, obtido pela expressão (2.112):

$$\Delta\varepsilon_{v\mu} = \frac{\sigma_{\mu}}{\eta_{\mu}} \Delta t \quad (2.112)$$

sendo  $\sigma_{\mu}$  o somatório de todos os incrementos de tensão da unidade  $\mu$  em todos os incrementos de tempo e  $\Delta t$  o valor do incremento de tempo considerado.

A tensão total que atua na armadura protendida, até um tempo  $t$ , é escrita como:

$$\sigma_{Ptot} = \sigma_{P0} + \sum_{i=0}^t (\Delta\sigma_{Ptot}) \quad (2.113)$$

onde  $\sigma_{P0}$  é a tensão inicial de protensão após as perdas iniciais e  $\Delta\sigma_{Ptot}$  é o incremento de tensão da armadura ativa, que representa a perda de tensão pelo efeito da relaxação.

Decorrido um certo período de tempo, a deformação viscoelástica total (soma de todos os incrementos de deformação viscoelástica) de uma unidade  $\mu$ , pode vir a ultrapassar o valor da deformação total (soma de todos os incrementos de deformação total). Neste caso, a partir deste instante de tempo, a unidade  $\mu$  não contribuirá mais com a parcela de incremento de tensão  $\Delta\sigma_{\mu}$  para a obtenção do incremento de tensão total  $\Delta\sigma_{Ptot}$ . Desta forma:

$$\Delta\sigma_{Ptot} = \sum_{\mu=1}^N \Delta\sigma_{\mu} \quad (2.114)$$

sendo  $N$  o número de unidades ativas do modelo reológico de Maxwell, que contribuem com uma parcela de tensão.

## 2.4 MODELAGEM POR ELEMENTOS REFORÇADOS

A ideia básica de modelar peças de concreto estrutural por elementos reforçados (figura 2.22) consiste em acoplar elementos base para o concreto com elementos REINF para a armadura, os quais devem ser compatíveis entre si.

Para representar o modelo estrutural de uma peça, o ANSYS fornece uma grande variedade de elementos finitos padrão. No caso das lajes de concreto que se caracterizam por ter uma dimensão, a espessura, muito menor que as outras dimensões, dispõe-se a família de elementos SHELL que oferece vantagens no esforço computacional frente à família de elementos SOLID,

que também resulta ser uma alternativa para modelar este tipo de peças. Por esse motivo e considerando que os elementos finitos a ser escolhidos devem ser compatíveis entre si e com as sub-rotinas USERMAT, define-se o elemento de casca SHELL281 como elemento base.

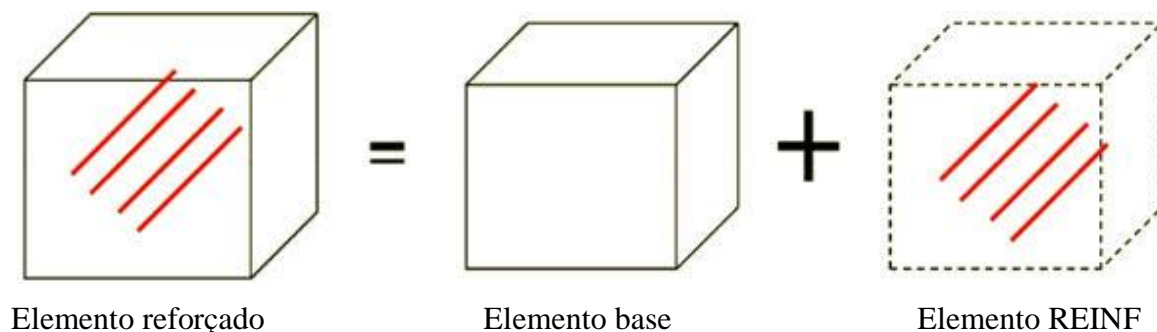


Figura 2.22 – Modelagem por elementos reforçados

Por outra parte, é sabido que em uma peça de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais, portanto é necessário apenas um modelo uniaxial para descrever o seu comportamento. Os elementos de reforço, propriamente ditos e compatíveis com o elemento SHELL281, são denominados REINF264 e REINF265 para referir às armaduras incorporada e distribuída, respectivamente. A armadura incorporada é representada por uma linha de material mais rígido no interior do elemento base de concreto; por sua vez, a armadura distribuída é representada por um modelo de discretização em camadas, onde o concreto é uniformemente armado dentro de cada elemento finito.

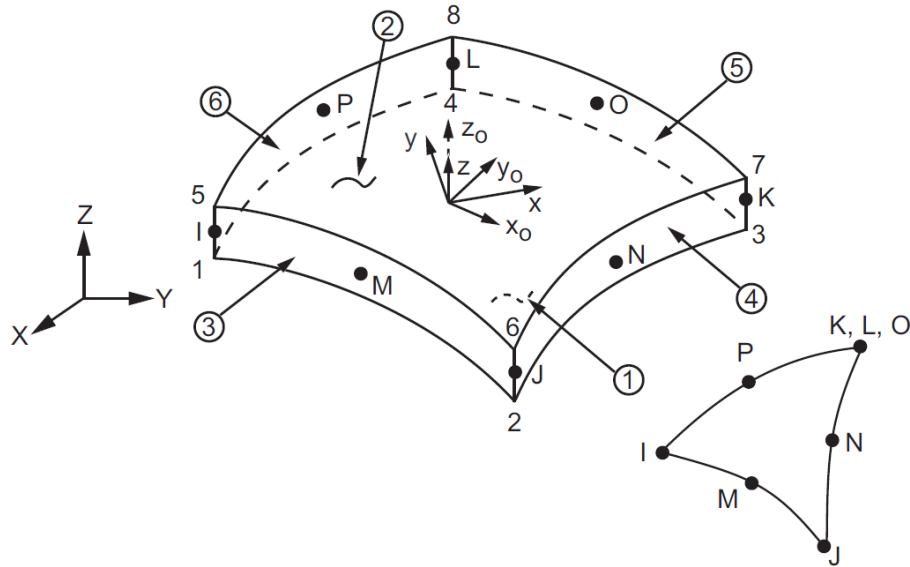
Para simular a falta de aderência entre concreto e armadura, os elementos de reforço são modelados como armadura discreta, mesmo quando este modo de representação fica limitado à malha de elementos finitos, opta-se por elementos unidimensionais tipo treliça como o elemento LINK180.

### 2.4.1 SHELL281

O elemento finito SHELL281 é apropriado para analisar estruturas por camadas, com especial foco para cascas compósitas finas até moderadamente espessas, admitindo comportamentos lineares, não-lineares e grandes deformações. Trata-se de um elemento com funções de interpolação quadráticas, baseado na teoria de Mindlin-Reissner, a teoria de deformação de corte de primeira ordem na qual as seções planas normais permanecem planas com relação à superfície média, mas não necessariamente normais durante e após a flexão, tal rotação da seção origina deformação de cisalhamento transversal constante na direção da espessura.



Este elemento possui oito nós (figura 2.23) e seis graus de liberdade (três translações e três rotações) em cada nó. O sexto grau de liberdade é a rotação no plano da casca, também conhecida como *drilling*, e está associada com uma rigidez fictícia para prevenir singularidades numéricas da matriz de rigidez. Desta forma, para calcular a rigidez fictícia, o elemento SHELL281 utiliza o método das penalidades que relaciona os graus de liberdade da rotação no plano da casca com a translação no mesmo plano.



(fonte: ANSYS, 2016)

Figura 2.23 – Elemento SHELL281

As funções de interpolação, como as demais informações do elemento SHELL281 encontram-se no manual do ANSYS (2016) e vem dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 u = \frac{1}{4} & [u_I(1-s)(1-t)(-s-t-1) + u_J(1+s)(1-t)(s-t-1) \\
 & + u_K(1+s)(1+t)(s+t-1) \\
 & + u_L(1-s)(1+t)(-s+t-1)] \\
 & + \frac{1}{2} [u_M(1-s^2)(1-t) + u_N(1+s)(1-t^2) \\
 & + u_O(1-s^2)(1+t) + u_P(1-s)(1-t^2)]
 \end{aligned} \tag{2.115}$$

$$v = \frac{1}{4} [v_I(1-s) \dots \text{análogo a (2.1)}] \tag{2.116}$$

$$w = \frac{1}{4}[w_I(1-s) \dots \text{análogo a (2.1)}] \quad (2.117)$$

$$\theta_x = \frac{1}{4}[\theta_x(1-s) \dots \text{análogo a (2.1)}] \quad (2.118)$$

$$\theta_y = \frac{1}{4}[\theta_y(1-s) \dots \text{análogo a (2.1)}] \quad (2.119)$$

$$\theta_z = \frac{1}{4}[\theta_z(1-s) \dots \text{análogo a (2.1)}] \quad (2.120)$$

Segundo Bathe (1996) a ordem de integração 3x3 é recomendada para elementos finitos quadriláteros de oito nós, tal o caso do elemento SHELL281, no entanto, este elemento trabalha com um esquema de integração reduzida de 2x2 no plano. O esquema de integração reduzida do elemento SHELL281, conforme Sun (2006) evitaria o problema do travamento de corte (*shear locking*) e na mesma vez poderia causar a singularidade conhecida como modo espúrio (*hourglass effect*). Não obstante, o modelo constitutivo para concreto, desenvolvido por Lazzari (2015) através da ferramenta UPF, foi adaptado para funcionar com o elemento de casca SHELL281 pela inclusão do variável padrão `tsstif`, descrita no item 2.2.4 do presente trabalho.

Cabe ressaltar também que cada elemento permite até 255 camadas, cujas respectivas propriedades mecânicas e geométricas podem ser fornecidas por comandos. O elemento é definido pelo comando ET. São admitidas várias formas de seção transversal, sendo necessário atribuir dados de espessura, material, ângulo de referência ao sistema de coordenadas do elemento e número de pontos de integração ao longo da espessura através dos comandos SECTYPE e SECDATA. Se for o caso, a excentricidade dos nós de um elemento pode ser especificada no comando SECOFFSET, como por exemplo para considerar a excentricidade entre mesa e nervuras em lajes nervuradas. Assim mesmo, se for necessário, o comando SECONTROLS permite substituir propriedades padrão como a rigidez de corte transversal, a rigidez fictícia associada à rotação no plano do elemento ou os fatores de ponderação para controlar modos espúrios.

#### 2.4.2 REINF264

O elemento REINF264 é um elemento utilizado para simular fibras de reforço com orientação arbitrária em um elemento base da biblioteca do ANSYS, neste caso, no elemento SHELL281.

As fibras de reforço são modeladas separadamente em cada elemento como uma barra que possui apenas rigidez axial, como consequência, os dados de saída deste elemento são limitados a deslocamentos nodais e tensões e deformações axiais. O elemento de reforço tem suas coordenadas nodais, graus de liberdade e conectividades idênticas às do elemento base (figura 2.24).

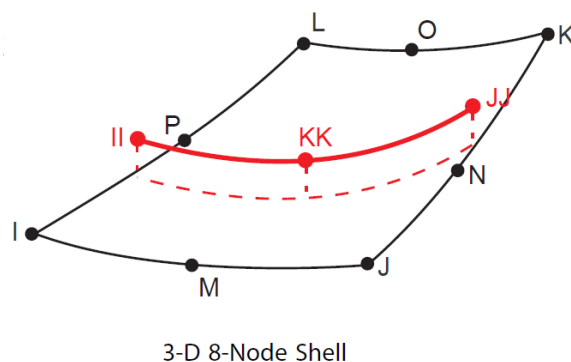
Ao igual que as anteriores informações, o manual ANSYS (2016) indica que quando o elemento base é um elemento de casca de oito nós com funções de interpolação quadráticas, como o elemento SHELL281, o elemento de reforço REINF264 tem um ponto de integração ao longo de sua espessura e dois pontos de integração em todo o comprimento. Assim mesmo, tem-se que suas funções de interpolação são quadráticas e vem dadas por as seguintes expressões:

$$u = \frac{1}{2} [u_I(-s + s^2) + u_J(s + s^2)] + u_K(1 - s^2) \quad (2.121)$$

$$v = \frac{1}{2} [v_I(-s + s^2) + v_J(s + s^2)] + v_K(1 - s^2) \quad (2.122)$$

$$w = \frac{1}{2} [w_I(-s + s^2) + w_J(s + s^2)] + u_w(1 - s^2) \quad (2.123)$$

No intuito de fornecer as propriedades mecânicas e geométricas do elemento de reforço, torna-se necessário definir no comando SECTYPE, para cada seção transversal, que a armadura é do tipo incorporada. Dados do tipo de material, área da seção transversal e posição da barra dentro do elemento base são definidos pelo comando SECDATA. Logo, o elemento de reforço é gerado automaticamente através do comando EREINF, portanto dispensa-se o uso do comando ET.



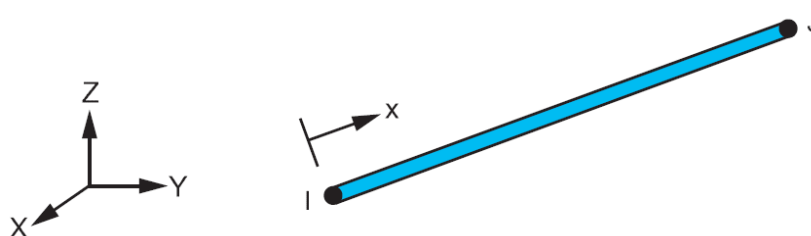
(fonte: ANSYS, 2016)

Figura 2.24 – Elemento REINF264

Uma limitação do uso deste elemento é que somente pode ser modelado entre duas fases opostas do elemento base, por exemplo, na figura 2.24 o elemento REINF264 não poderia ser introduzido entre as faces das linhas definidas pelos nós I-P-L e L-O-K.

### 2.4.3 LINK180

Quando é necessário simular fibras de reforço sem aderência no interior de um elemento base, o elemento de treliça LINK180 torna-se uma boa opção porque admite comportamentos lineares, não-lineares e grandes deformações. Trata-se de um elemento com funções de interpolação lineares. A teoria deste elemento, uma simplificação da teoria de Timoshenko, considera apenas dois nós (figura 2.25) com três graus de liberdade por nó (três translações), um ponto de integração e dispensa os efeitos de corte e flexão.



(fonte: ANSYS, 2016)

Figura 2.25 – Elemento LINK180

O manual do ANSYS (2016) indica que a função de interpolação do elemento LINK180 vem dada pela seguinte expressão:

$$u = \frac{1}{2} [u_I(1 - s) + u_J(1 + s)] \quad (2.124)$$

O elemento é definido pelo comando ET. São admitidas várias formas de seção transversal, sendo apenas necessário especificar as respectivas áreas pelos comandos SECTYPE e SECDATA. No entanto, a principal limitação do uso deste elemento deve-se a que os nós do mesmo têm que coincidir com os nós do elemento base na direção adjacente, limitando a discretização da malha de elementos finitos.

### 2.4.4 MODELO COMPUTACIONAL PROPOSTO

Em resumo (figura 2.30), neste trabalho, para a modelagem das lajes de concreto com elementos de casca escolheu-se o elemento SHELL281 por ser compatível com a sub-rotina USERMAT

e na mesma vez com os elementos de reforço REINF; assim, o modelo desenvolvido por Lazzari (2015) na USERMATPS foi adaptado para funcionar com o elemento de casca SHELL281. Para a modelagem da armadura adotam-se duas alternativas de combinação, para a armadura passiva precisa-se do elemento de reforço REINF264, compatível com o modelo constitutivo padrão BISO, assim, esta armadura é acrescentada como armadura incorporada no interior dos elementos de casca garantindo a compatibilidade de deslocamentos. Para a armadura ativa sem aderência tem-se o novo modelo constitutivo USERMAT1D compatível com o elemento de treliça LINK180, nesse caso a armadura é modelada como armadura discreta e consequentemente significa uma limitação na discretização da malha de elementos finitos; a condição de não aderência em trechos de cabos que ficam fora do plano do elemento de casca é satisfeita utilizando o comando CP, este comando permite acoplar os graus de liberdade dos nós adjacentes nos elementos de casca e elementos de reforço antes descritos.

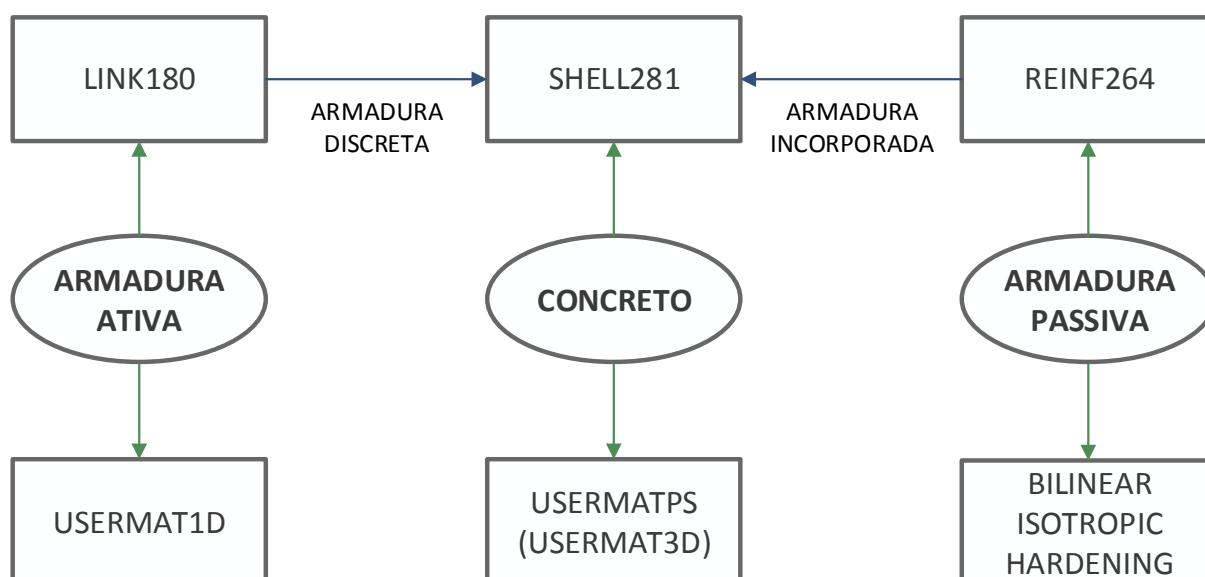


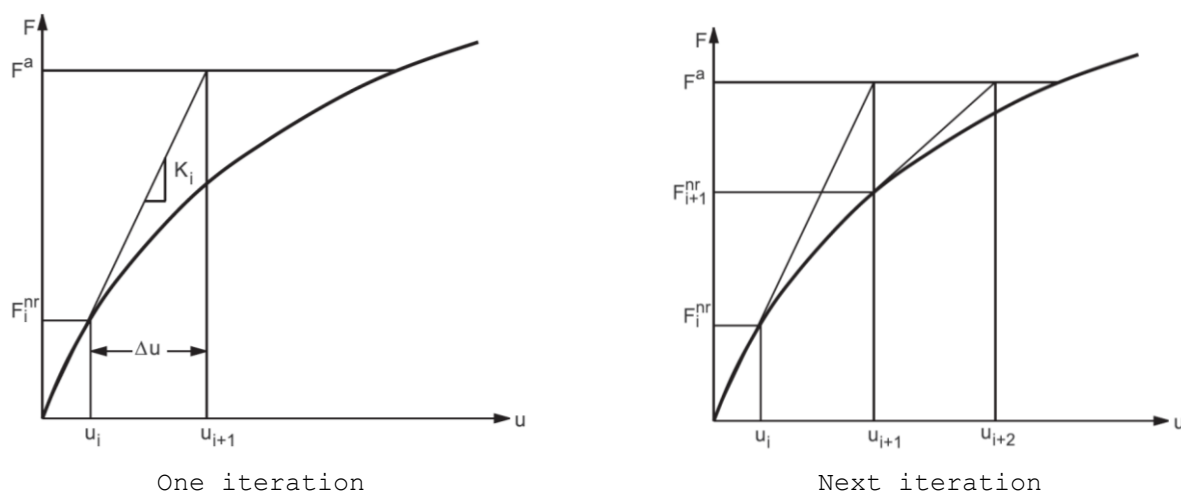
Figura 2.26 – Compatibilidade elementos finitos – modelos constitutivos

## 2.5 CONTROLES DE ANÁLISE NÃO-LINEAR

Continuando a descrição das ferramentas do ANSYS para análise não-linear de estruturas, o ANSYS utiliza o método de *Newton-Raphson* para solucionar o sistema de equações não-lineares formado em cada iteração de equilíbrio.

Neste método, o problema não-linear é interpretado como um problema linear resolvido por um processo incremental iterativo. Em cada iteração, calculam-se incrementos de deslocamentos e

rotações até que os vetores de forças e momentos não equilibrados, também chamados residuais, sejam minimizados com base em um critério de convergência.



(fonte: ANSYS, 2016)

Figura 2.27 – Método de Newton-Raphson puro

O critério de convergência é um valor escalar definido por valores de tolerância e referência. Para poder comparar o vetor de forças e momentos residuais com um valor escalar, precisa-se um valor da norma do vetor. O ANSYS oferece três valores de norma, sendo a norma L2 escolhida por padrão. Todos estes dados podem ser definidos pelo usuário no comando CNVTOL.

Assim mesmo, o ANSYS tem três alternativas para aplicar o método de *Newton-Raphson* em análises não-lineares. No caso do elemento de casca SHELL281, o ANSYS recomenda utilizar o método de *Newton-Raphson* puro onde a matriz de rigidez é atualizada em cada iteração, conforme a figura 2.27. As outras alternativas são o método de *Newton-Raphson* modificado, onde a matriz de rigidez não é atualizada, e o método de *Newton-Raphson* misto, onde a matriz de rigidez somente é atualizada em cada incremento de carga. Um exemplo de rotina de pós-processamento está descrito no Apêndice A.2.

## 2.6 FLUXOGRAMA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

Traduzindo o esquema da interação entre o programa principal do ANSYS e as sub-rotinas USERMAT, apresentado na figura 2.10, para o fluxograma do algoritmo computacional, tem-se a figura 2.28.

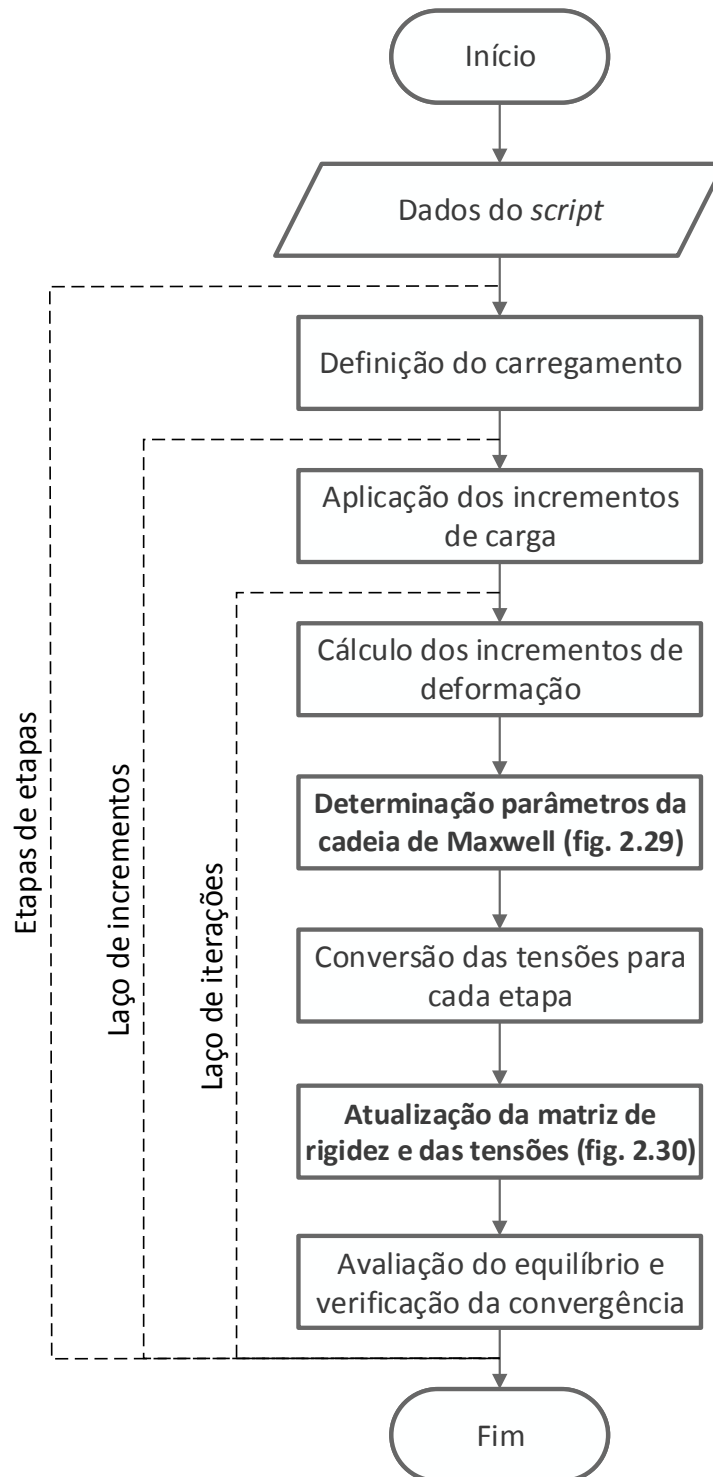


Figura 2.28 – Fluxograma do programa principal

Como foi mencionado antes, a entrada de dados no programa principal em formato de *script* inclui propriedades mecânicas e geométricas, condições de contorno, carregamentos e controles de análise não-linear do modelo de elementos finitos. A partir desses dados, o programa

principal reconhece as condições de cada caso de carregamento, e conseqüentemente, identifica o intervalo de tempo que deve ser considerado.

Posteriormente o equilíbrio da estrutura é avaliado pela matriz de rigidez elástica, então, os resultados dos incrementos de deformação ingressam como dados na sub-rotina.

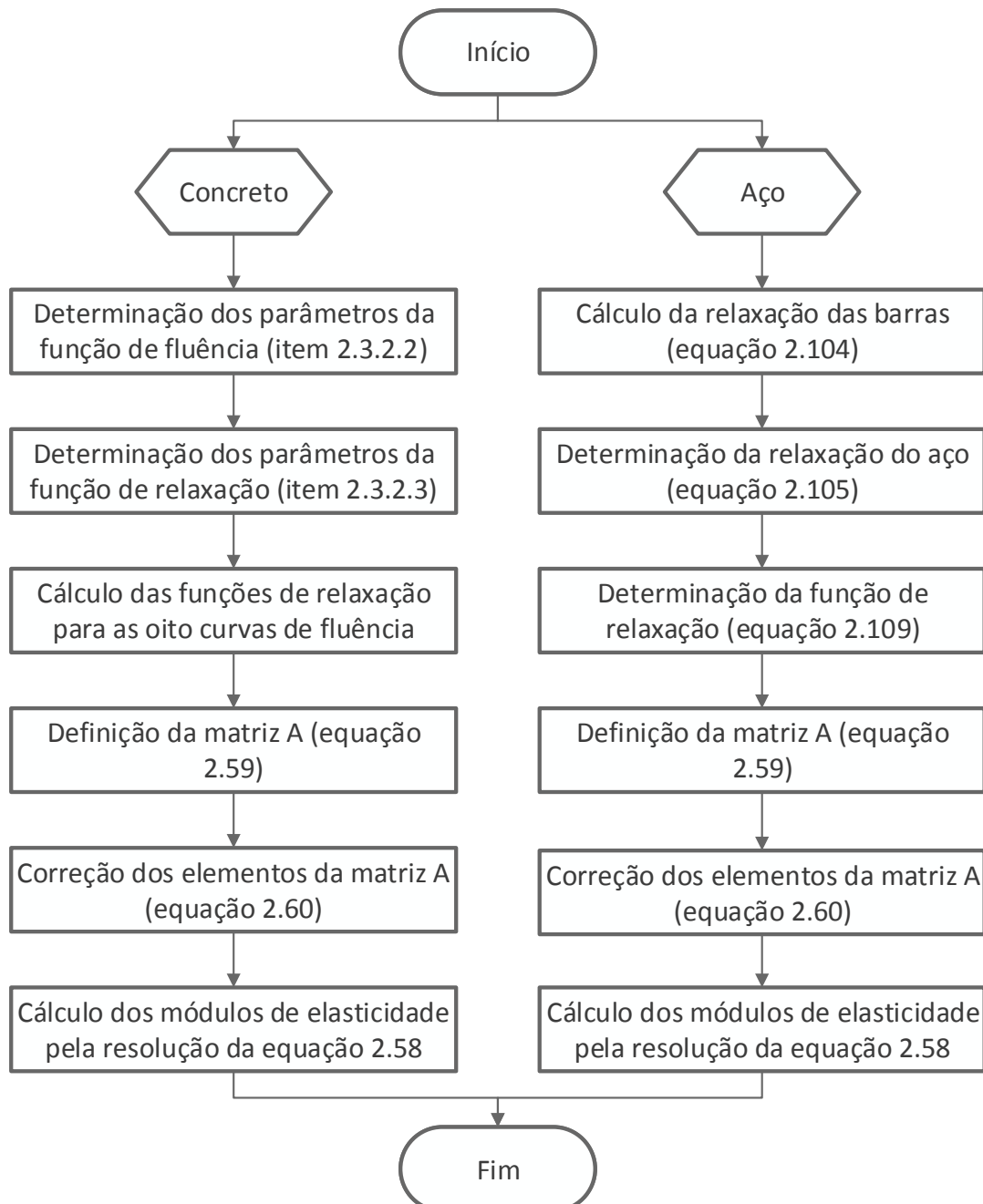


Figura 2.29 – Determinação dos parâmetros da cadeia de Maxwell para concreto e aço

Uma vez dentro da sub-rotina, dependendo da formulação do material, concreto ou aço, são determinados os parâmetros da cadeia de Maxwell (figura 2.29). Quando for o caso, a sub-



rotina transforma as tensões de uma etapa para outra. Seguindo a sequência, dependendo da formulação do material, são atualizados os valores das tensões e da matriz de rigidez elástica (figura 2.30).

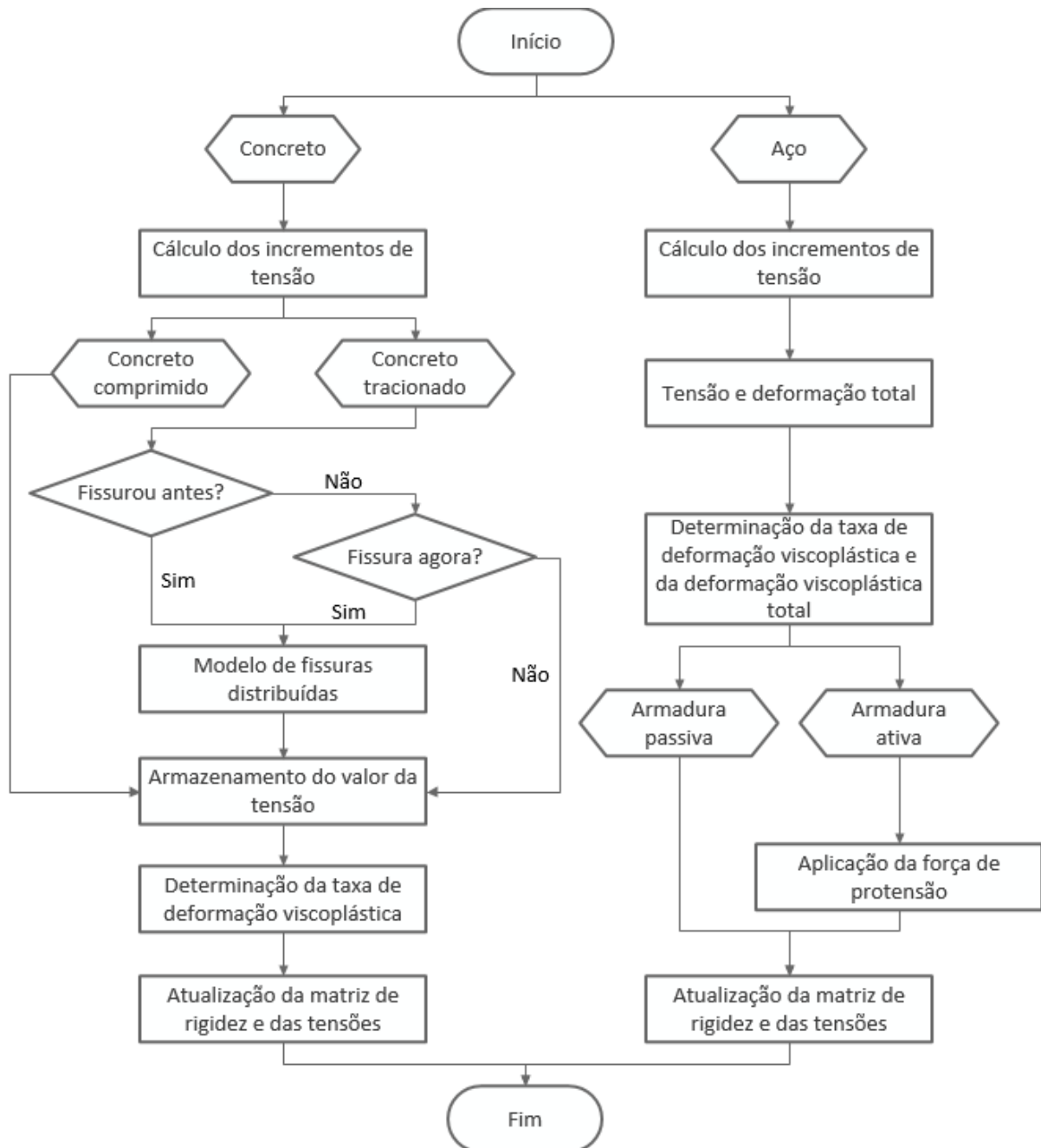


Figura 2.30 – Atualização da matriz de rigidez e das tensões

Logo, o programa principal recebe as tensões atualizadas e a matriz de rigidez atualizada para avaliar o equilíbrio da estrutura em iterações, tomando critérios de convergência, valores escalares limites de tolerância e referência, para ser comparados com a norma dos vetores de deslocamento, força e/ou momento em cada iteração.

### 3 ANÁLISE DE LAJES EM CONCRETO ARMADO

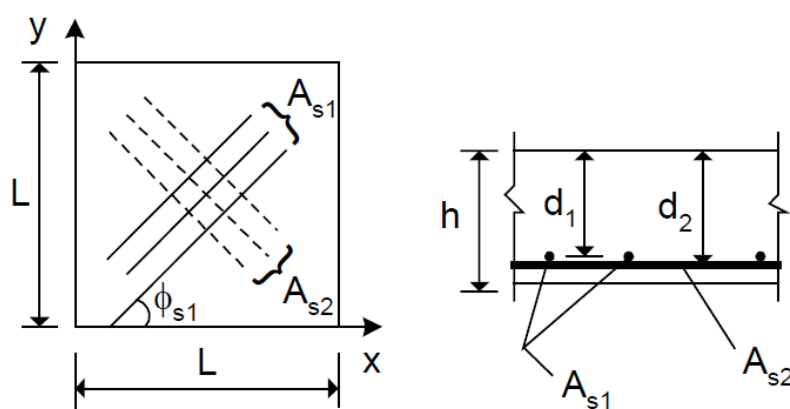
Nesta seção propõe-se validar a eficiência do modelo constitutivo implementado para o concreto. Para tal efeito, apresentam-se ensaios experimentais, encontrados na literatura, de lajes maciças e nervuradas de concreto armado para compará-los com resultados do modelo computacional. Em todas as análises desta seção, os valores do módulo de elasticidade do concreto  $E_c$  foram calculados pela expressão (2.63). Seguindo as recomendações da norma NBR 6118 (2014), o módulo de elasticidade do aço,  $E_s$ , foi adotado igual a 210000 MPa, assim mesmo, os coeficientes de Poisson  $\mu$ , para concreto e aço, foram adotados com valores de 0,20 e 0,30 respectivamente.

#### 3.1 LAJES DE TAYLOR, MAHER E HAYES (1966)

Taylor, Maher e Hayes (1966) apresentaram ensaios experimentais de dez lajes quadradas maciças de concreto armado, das quais foram selecionadas três modelos, denominados S1, S7 e S9. As lajes foram simplesmente apoiadas nos quatro lados do contorno, submetidas a uma carga uniformemente distribuída e armadas por malhas ortogonais com barras de 4,76 mm de diâmetro.

##### 3.1.1 Características geométricas e propriedades dos materiais

As características geométricas e a posição das malhas de armadura são mostradas na figura 3.1, enquanto que, as dimensões e as propriedades dos materiais usados na análise são especificadas na tabela 3.1.



(fonte: Araújo, 2003)

Figura 3.1 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: geometria e seção transversal das lajes

Tabela 3.1 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: parâmetros mecânicos e geométricos

Parâmetros			Espécimes			
			S1	S7	S9	
Geométricos	LAJE – SHELL281					
	Comprimento	(cm)	$L$	183	183	183
	Espessura	(cm)	$h_f$	5,10	4,40	7,60
	ARMADURA – REINF264					
	Área da armadura, direção leste-oeste	(cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s1}$	2,34	2,80	1,46
	Altura útil	(cm)	$d_1$	4,38	3,69	6,88
	Espaçamento	(cm)	$s_1$	7,60	6,35	12,18
	Ângulo com o eixo X	(°)	$\phi_{s1}$	0	0	0
	Área da armadura, direção norte-sul	(cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s2}$	2,80	3,18	1,56
	Altura útil	(cm)	$d_2$	3,91	3,21	6,41
	Espaçamento	(cm)	$s_2$	6,35	5,60	11,40
Mecânicos	CONCRETO – USERMATPS					
	Resistência última à compressão	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_c$	3,50	3,82	3,32
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_c$	2774,7	2856,8	2726,3
	Coefficiente de Poisson		$\mu_c$	0,20	0,20	0,20
	AÇO DA ARMADURA – BISO					
	Tensão de escoamento	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_y$	37,6	37,6	37,6
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_s$	21000	21000	21000
		$\mu_s$	0,30	0,30	0,30	

### 3.1.2 Modelo de elementos finitos

Conforme indica a figura 3.2, a discretização em elementos finitos do espécime S1, a fim de reduzir o custo computacional, considerou uma dupla simplificação de simetria, ficando a quarta parte inferior e esquerda da laje.

Os planos do contorno foram restringidos por apoios na direção vertical. Nas faces que coincidem com os planos de simetria foram restringidos o deslocamento na direção normal e o giro em torno da direção ortogonal à face de simetria. O carregamento uniformemente distribuído foi aplicado no plano de todos os elementos finitos de concreto até que foi atingida a falha de cada espécime (tabela 3.2).

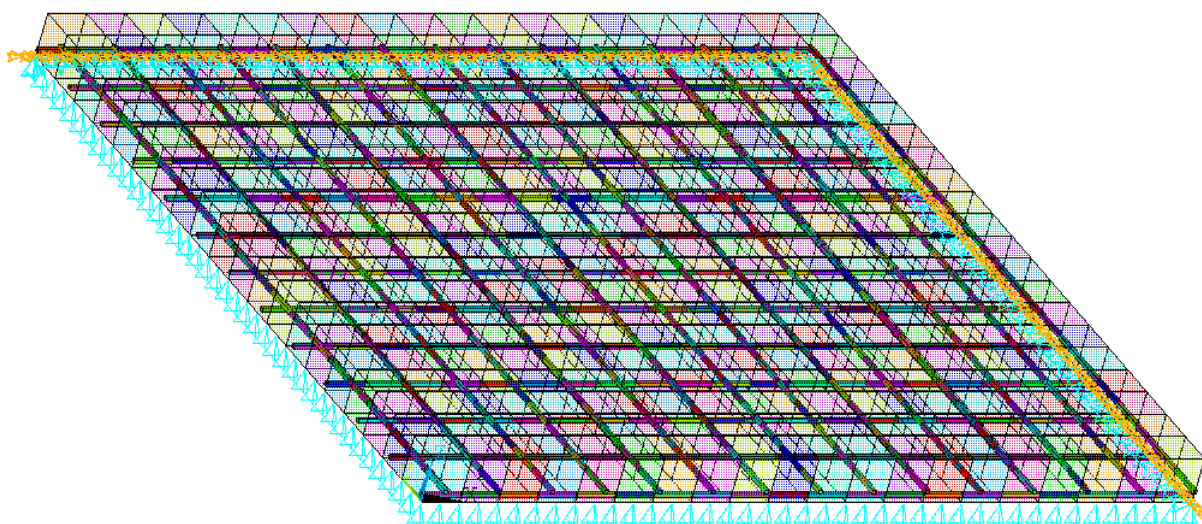
Tabela 3.2 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: carga de ensaio

Carga de ensaio	Espécimes		
	S1	S7	S9
Escoamento do aço (kN)	80	80	80
Ruptura do concreto (kN)	144	131	128

(fonte: Taylor, Maher e Hayer, 1966)

Para atingir a melhor solução numérica, se estudou a influência da discretização alternando o tamanho dos elementos finitos, número de camadas, critérios de convergência, e número de pontos de integração ao longo da espessura. Viu-se que a partir de malhas de 5x5 elementos de casca SHELL281, os resultados dos três espécimes, se mostraram parecidos, então para visualizar melhor os resultados foram adotados malhas de 20x20. Cada elemento tem quatro pontos de integração em seu plano, a espessura foi considerada por uma camada com cinco pontos de integração, fazendo um total de vinte pontos de integração por elemento.

A armadura foi considerada com comportamento elastoplástico perfeito e foi introduzida como armadura incorporada REINF264 no interior de cada elemento de casca.



LAJE S1 DE TAYLOR (1966)

Figura 3.2 – Laje S1 de Taylor, Maher e Hayes: discretização em elementos finitos

### 3.1.3 Comparação de resultados

Nos resultados comparados a seguir, não está sendo considerado o peso próprio. A figura 3.3 indica que o modelo computacional reproduz corretamente o comportamento experimental da relação entre a carga total aplicada e flecha no médio do vão.

Note-se que na curva da laje S7, a partir da fissuração existe um leve afastamento crescente em termos de deslocamentos; no caso da laje S9, que possui uma taxa de armadura mais baixa, a falha a partir da fissuração é brusca e a solução numérica acompanha os resultados experimentais até certo nível de carga próximo à ruptura.

Embora as três lajes tenham atingidos estágios de carregamentos finais parecidos, a laje S7, que é a mais esbelta e com a maior taxa de armadura, atingiu uma flecha maior quando comparada

à laje S1, que é menos esbelta e com menor taxa de armadura e, também, quando comparada à laje S9, a menos esbelta e com a menor taxa de armadura.

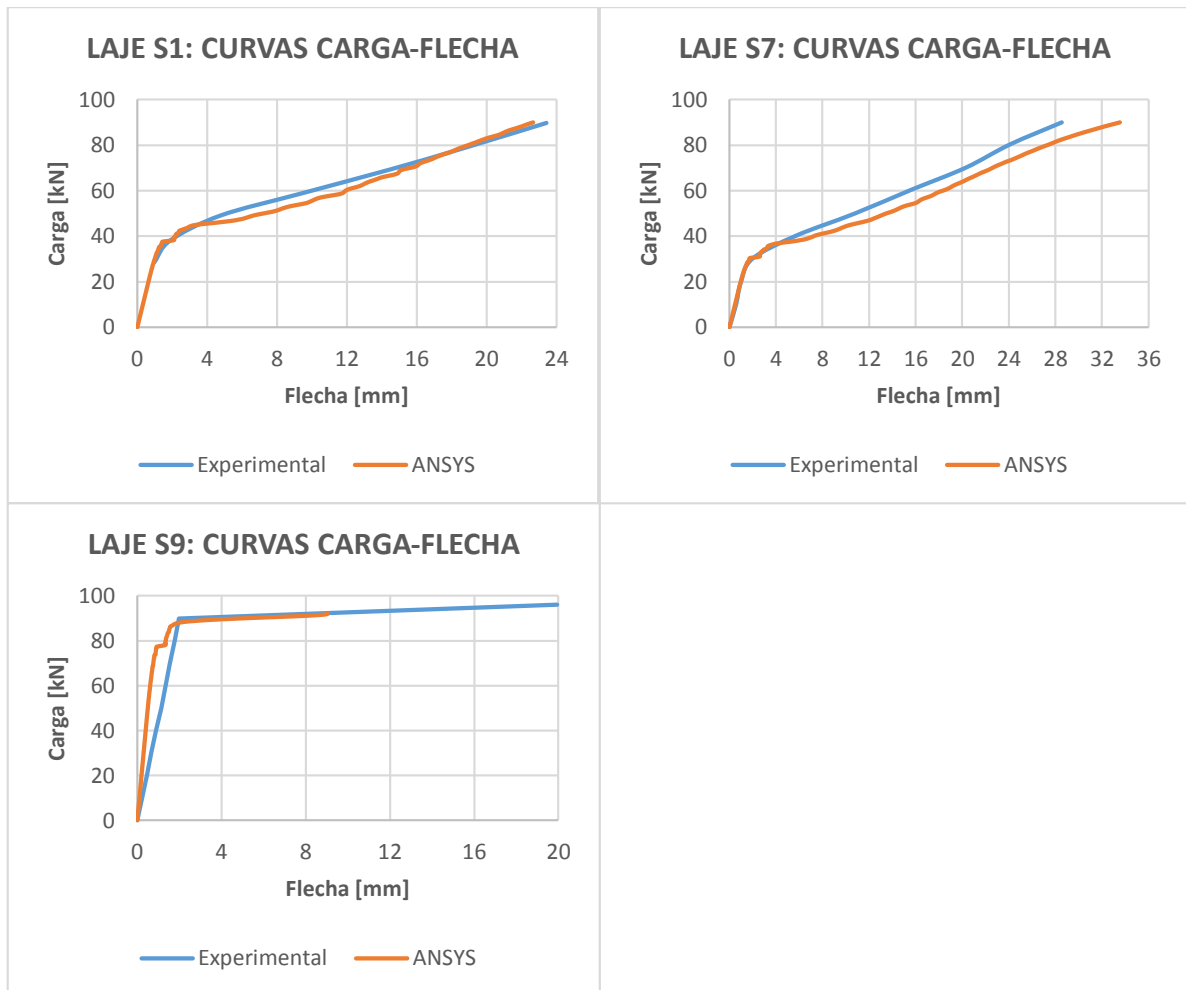


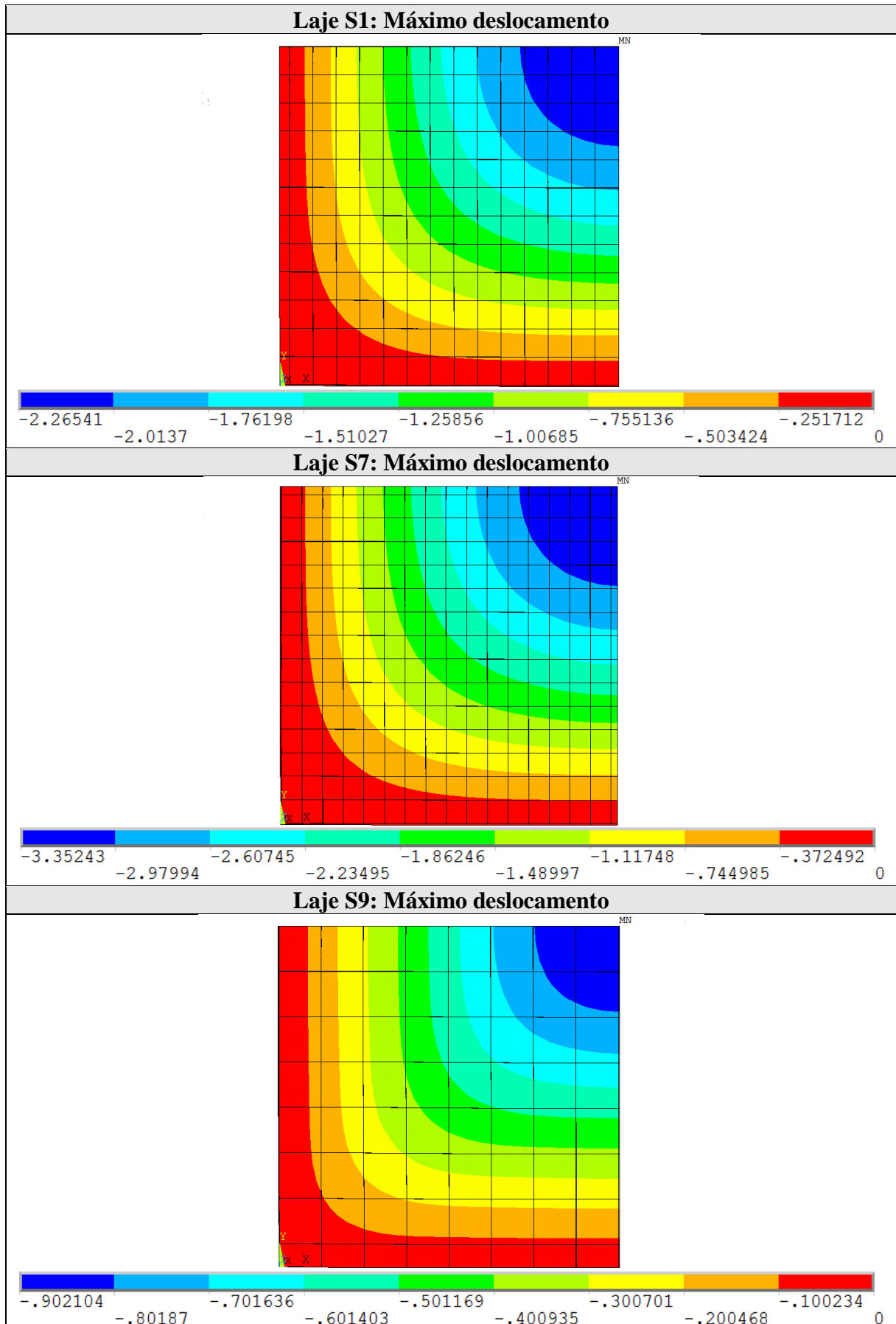
Figura 3.3 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: curvas carga-flecha

No quadro 3.1 são apresentadas as deformadas dos modelos numéricos para o estágio final de carregamento, podendo-se perceber que os maiores valores das flechas foram atingidos na região próxima ao médio do vão.

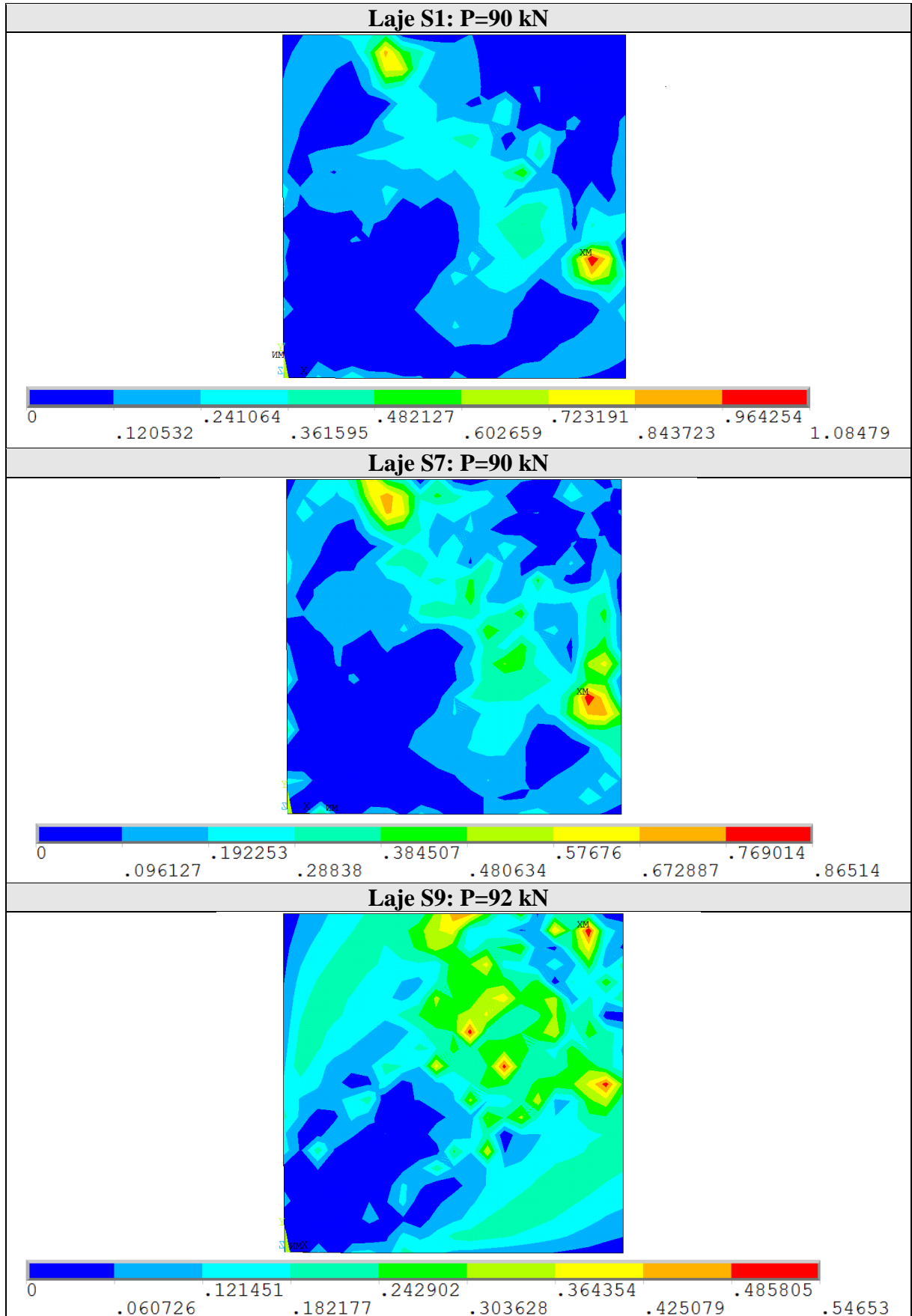
Nos quadros 3.2 e 3.3 tem-se os acréscimos finais das componentes de tensão de concreto e que a ruptura dos espécimes foi induzida por flexão. No diagrama de tensões axiais da armadura, quadro 3.7, pode-se observar que quando os espécimes atingem a ruptura as armaduras das nervuras já se encontram no patamar de escoamento.

Assim mesmo tem-se nos quadros 3.4, 3.5 e 3.6 que as distribuições de momentos dos espécimes têm valores próximos a zero conforme a configuração das restrições impostas.

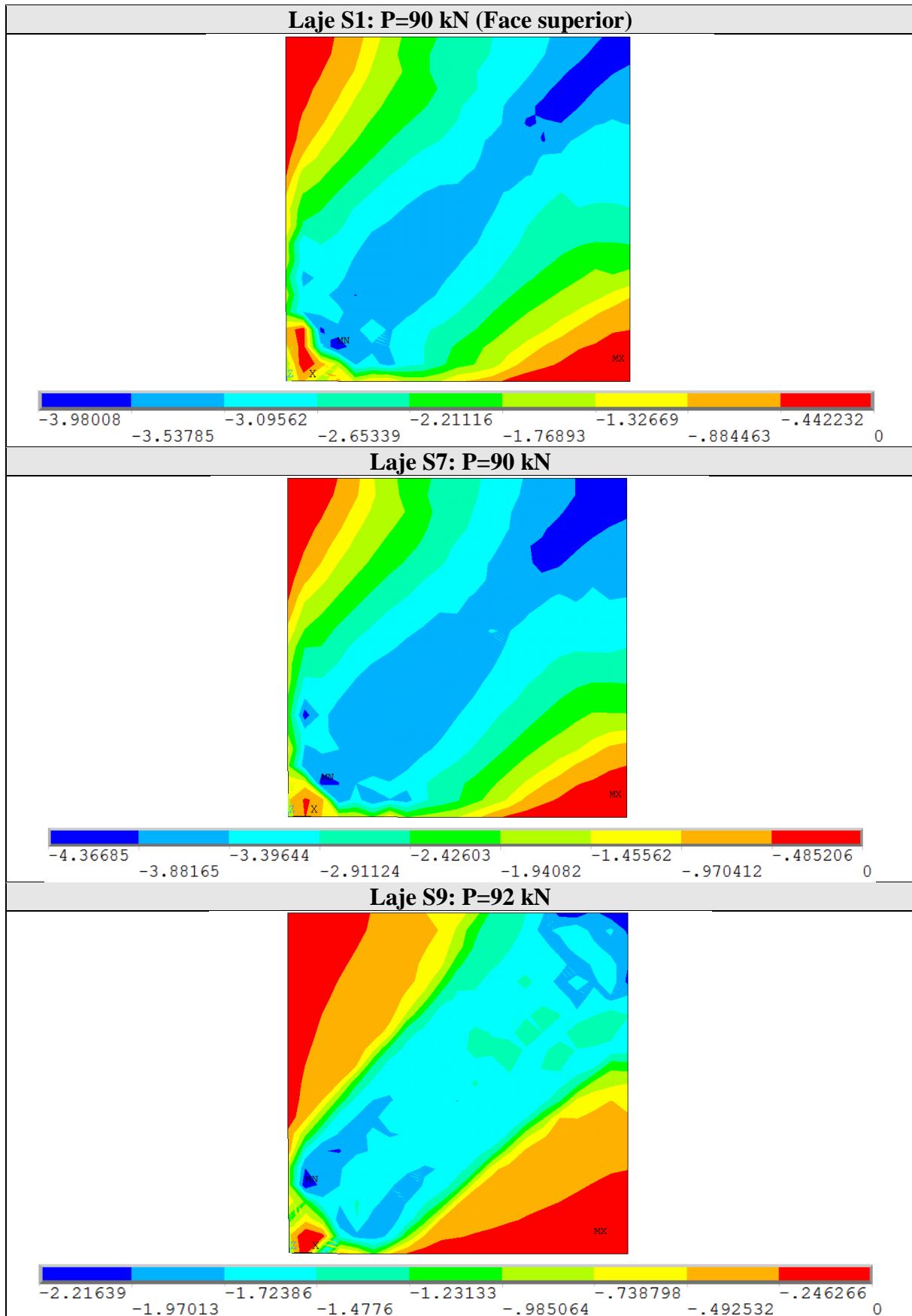
Quadro 3.1 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: deformadas finais (em cm)



Quadro 3.2 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_1$  dos elementos de concreto (em kN/cm<sup>2</sup>)

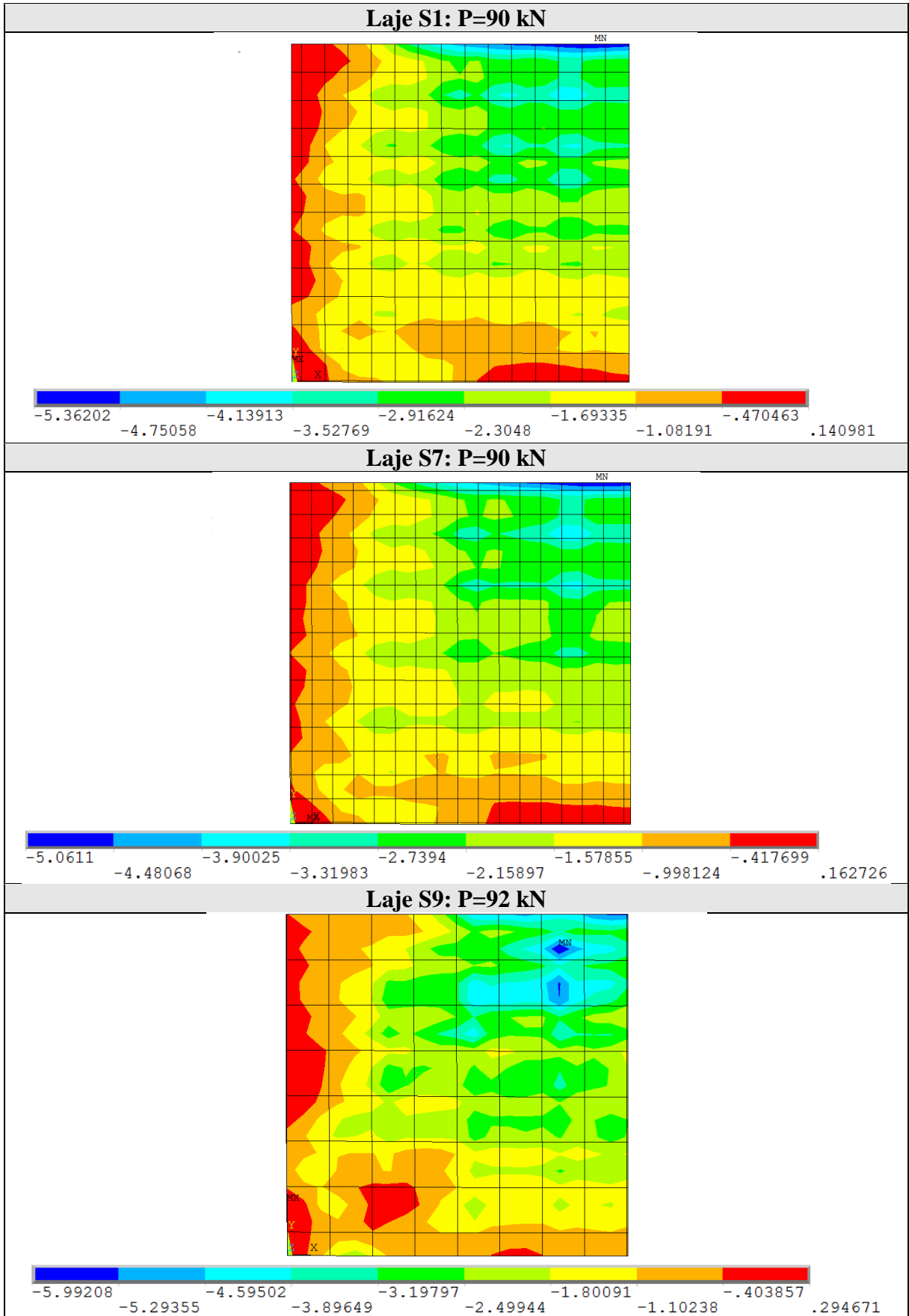


Quadro 3.3 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_3$  dos elementos de concreto (em kN/cm<sup>2</sup>)

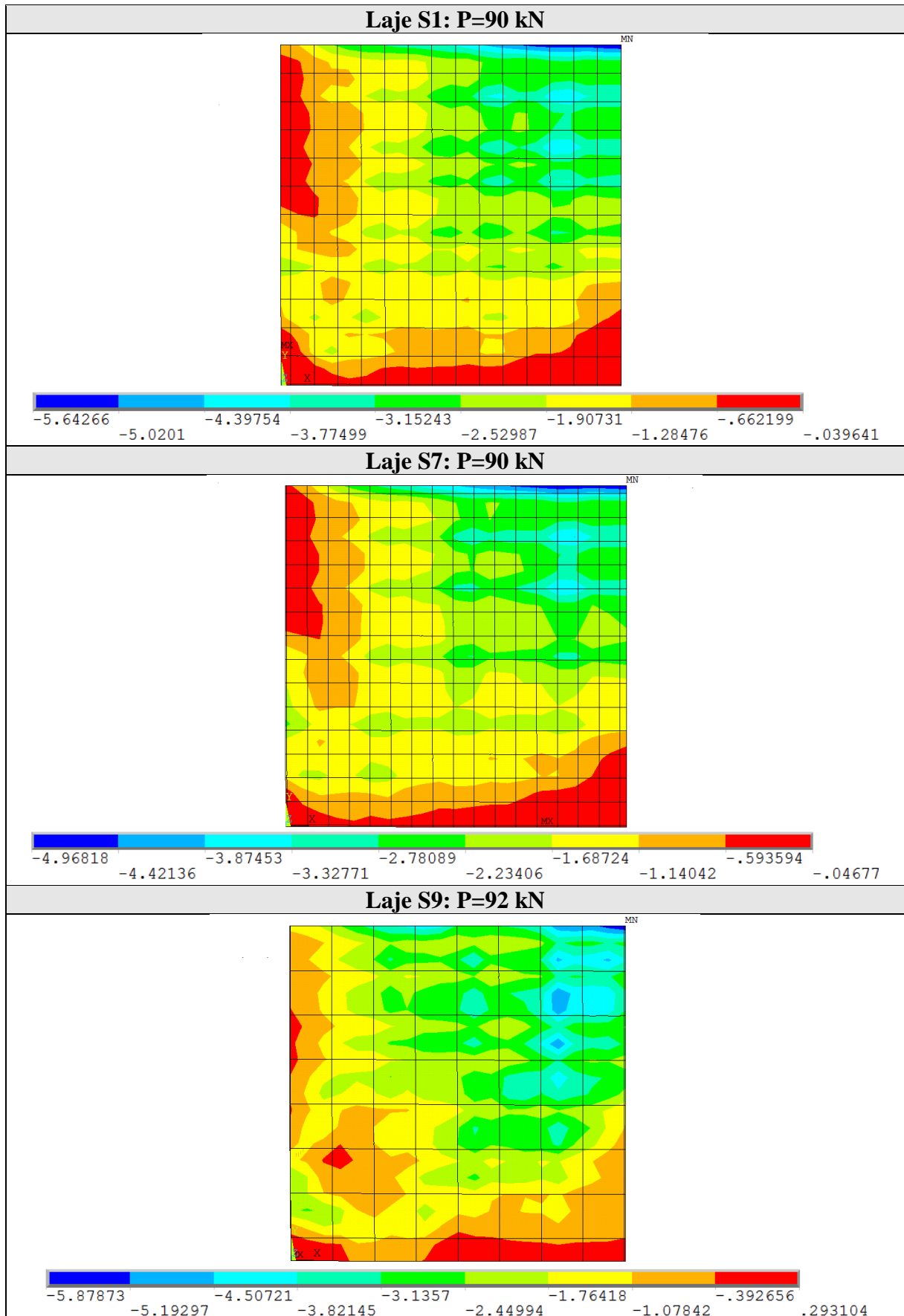




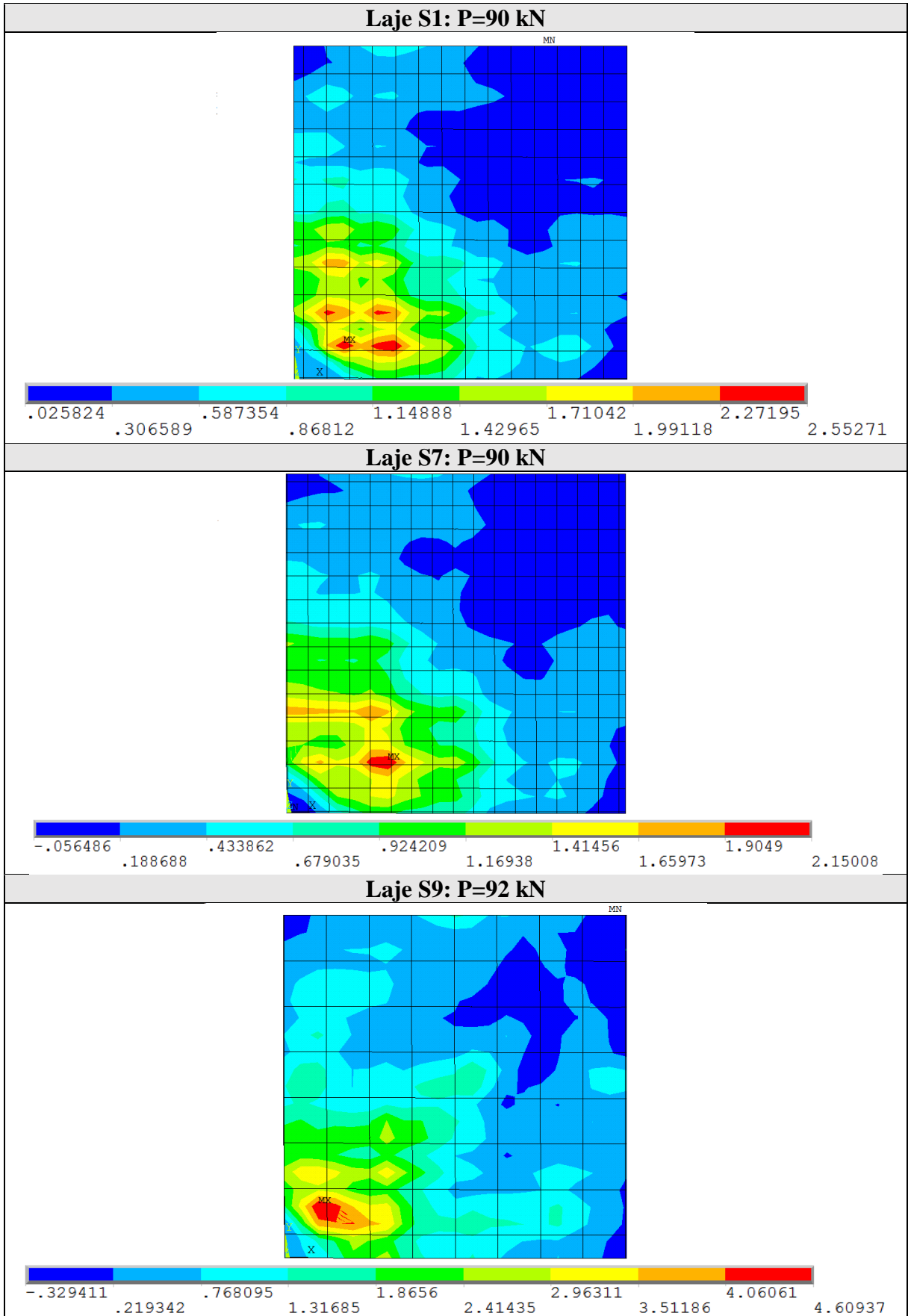
Quadro 3.4 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: distribuição de momentos  $M_{11}$  dos modelos (em kN-cm)



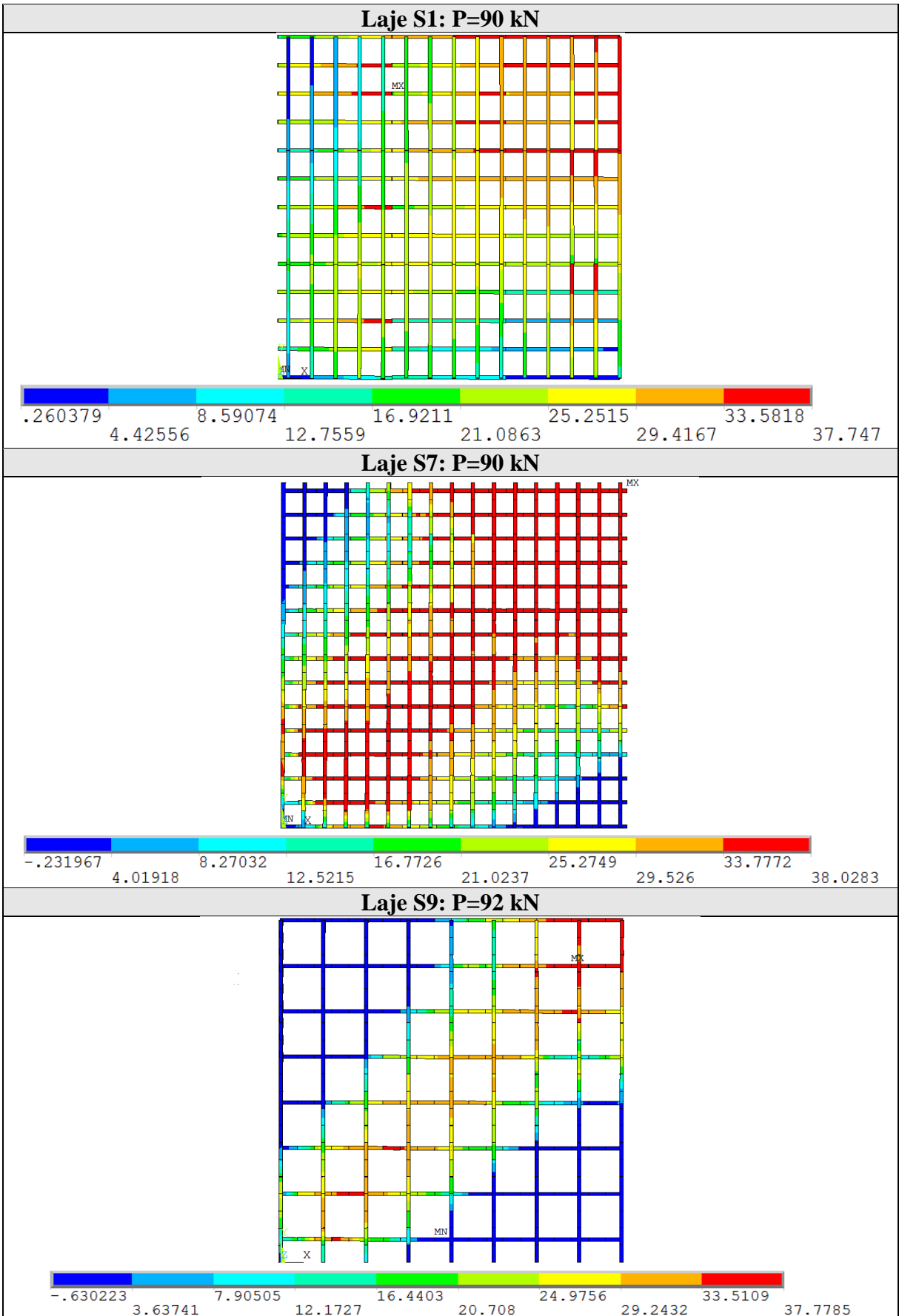
Quadro 3.5 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: distribuição de momentos  $M_{22}$  dos modelos (em kN-cm)



Quadro 3.6 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: distribuição de momentos  $M_{12}$  dos modelos (em kN-cm)



Quadro 3.7 – Lajes de Taylor, Maher e Hayes: evolução das tensões na armadura longitudinal (em kN/cm<sup>2</sup>)



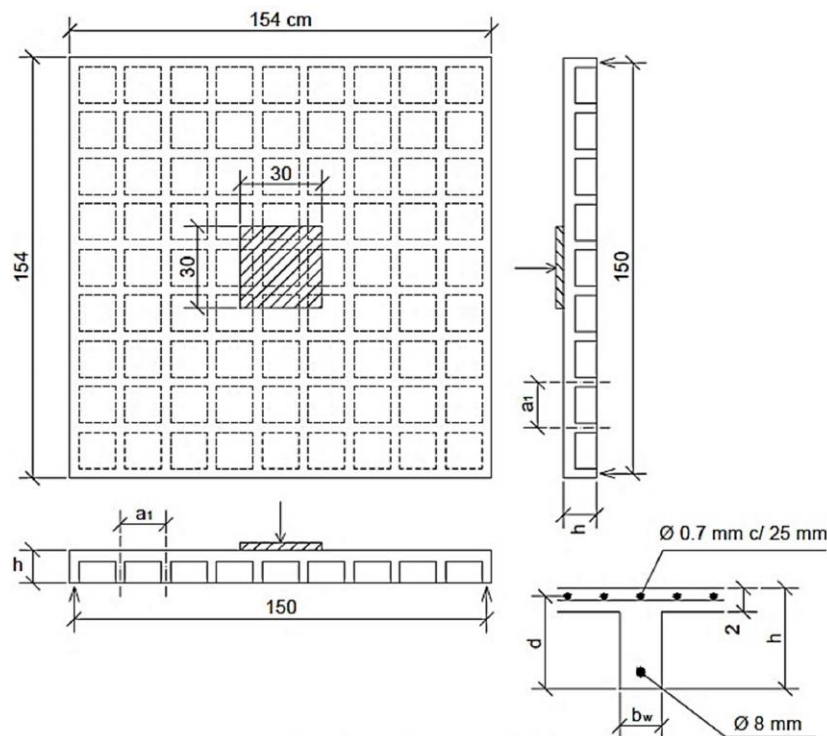
## 3.2 LAJES DE ABDUL-WAHAB E KHALIL (2000)

O estudo experimental de Abdul-Wahab e Khalil (2000) apresentou ensaios em oito lajes quadradas de concreto armado simplesmente apoiadas e submetidas a uma carga uniformemente distribuída sobre uma placa de 30x30 cm.

As lajes denominadas S1 a S6 foram seis lajes nervuradas, enquanto que as lajes S7 e S8 foram duas lajes maciças. A laje nervurada de referência foi a laje S2, sendo que as outras foram variações em espaçamento e dimensões das nervuras. No caso das lajes maciças, a laje S7 foi definida com espessura equivalente e a laje S8 teve uma espessura igual à laje S2.

### 3.2.1 Características geométricas e propriedades dos materiais

A figura 3.4 ilustra a geometria básica da laje S2, sendo que as características estruturais de cada espécime, S1 a S6, são especificadas na tabela 3.3. Cada nervura foi armada com uma barra de 8 mm de diâmetro com recobrimento de 8 mm da superfície inferior e a mesa foi armada com um conjunto de barras de 0,7 mm de diâmetro. Já as lajes maciças S7 e S8 seguem o esquema apresentado anteriormente na figura 3.2 e os dados expostos na tabela 3.4. Em todas as lajes a carga ensaiada foi uniformemente distribuída sobre uma placa de 30x30x2 cm.



(fonte: Abdul-Wahab e Khalil, 2000)

Figura 3.4 – Lajes S1 a S6 de Abdul-Wahab e Khalil: geometria básica e detalhe de armaduras

Tabela 3.3 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: parâmetros mecânicos e geométricos

Parâmetros			Espécimes				
			S1	S2	S3	S4	
Geométricos	MESA – SHELL281						
	Comprimento	(cm)	$L$	150	150	150	150
	Espessura	(cm)	$h_f$	2,00	2,00	2,00	2,00
	NERVURAS – SHELL281						
	Base	(cm)	$b_w$	5,20	5,20	5,20	5,20
	Altura	(cm)	$h_w$	7,50	7,50	7,50	7,50
	Separação	(cm)	$a_1$	13,63	16,67	21,43	30,00
	ARMADURA – REINF264						
	Área da armadura	(cm <sup>2</sup> /m)	$A_s$	3,70	3,00	2,30	1,70
	Altura útil média	(cm)	$d$	8,30	8,30	8,30	8,30
Espaçamento	(cm)	$s$	2,03	2,50	3,26	4,41	
Mecânicos	CONCRETO – USERMATPS						
	Resistência últ. à compr.	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_c$	3,13	3,20	3,14	2,89
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_c$	2673	2693	2676	2603
	Coefficiente de Poisson		$\mu_c$	0,20	0,20	0,20	0,20
	AÇO DA ARMADURA – BISO						
	Tensão de escoamento	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_y$	39,8	39,8	39,8	39,8
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_s$	21000	21000	21000	21000
	Coefficiente de Poisson		$\mu_s$	0,30	0,30	0,30	0,30

Tabela 3.4 – Lajes S7 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: parâmetros mecânicos e geométricos

Parâmetros			Espécimes				
			S5	S6	S7	S8	
Geométricos	MESA – SHELL281						
	Comprimento	(cm)	$L$	150	150	150	150
	Espessura	(cm)	$h_f$	2,00	2,00	7,50	9,50
	NERVURAS – SHELL281						
	Base	(cm)	$b_w$	5,70	4,70		
	Altura	(cm)	$h_w$	10,50	4,50		
	Separação	(cm)	$a_1$	16,67	16,67		
	ARMADURA – REINF264						
	Área da armadura	(kN/cm <sup>2</sup> )	$A_s$	3,00	3,00	3,00	3,00
	Altura útil	(kN/cm <sup>2</sup> )	$d$	11,30	5,30	6,30	8,30
Espaçamento		$s$	2,50	2,50	2,50	2,50	
Mecânicos	CONCRETO – USERMATPS						
	Resistência últ. à compr.	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_c$	2,99	2,91	3,60	2,85
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_c$	2633	2609	2801	2591
	Coefficiente de Poisson		$\mu_c$	0,20	0,20	0,20	0,20
	AÇO DA ARMADURA – BISO						
	Tensão de escoamento	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_y$	39,8	39,8	39,8	39,8
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_s$	21000	21000	21000	21000
Coefficiente de Poisson		$\mu_s$	0,30	0,30	0,30	0,30	

### 3.2.2 Modelo de elementos finitos

Para verificar a influência da discretização e assim atingir a melhor solução numérica, foram analisados modelos alternando o tamanho dos elementos finitos, número de camadas, critérios de convergência, e número de pontos de integração ao longo da espessura.

Para as lajes nervuradas S1 a S6, os modelos contemplaram a laje inteira onde os planos do contorno foram simplesmente apoiados. O carregamento aplicado foi uniformemente distribuído sobre uma placa, essa placa definiu-se como uma pequena região de elementos de casca SHELL281 (figura 3.5a), os modelos foram analisados até que cada espécime atingiu a falha (tabela 3.5).

Tabela 3.5 – Lajes de Abdul-Wahab e Khalil: carga de ensaio

Carga de ensaio	Espécimes							
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
Fissuração (kN)	30	20	20	20	40	20	30	50
Ruptura do concreto (kN)	105	81	65	48	120	48	65	100

A discretização das malhas de elementos finitos adotou, tanto para as mesas como para as nervuras, um elemento de casca SHELL281 em cada trecho da laje entre nervuras, com exceção no trecho do meio da laje onde foram utilizados dois elementos de casca, conforme a figura 3.5.a. Cada elemento tem quatro pontos de integração em seu plano e uma camada de cinco pontos de integração ao longo da espessura. Um exemplo de script para entrada de dados da laje S2 está descrito no Apêndice A.1.

Assim mesmo, conforme apresenta Silva (2010), quando os planos da mesa e das nervuras são modelados com elementos de casca, a consideração da excentricidade entre eles evita resultados superestimados, dessa maneira os modelos das lajes S1 a S6 consideraram a excentricidade como o topo da viga chegando ao fundo da mesa (figura 3.5b) através do comando SECOFFSET.

No caso dos espécimes de lajes maciças S7 e S8, empregou-se a condição de dupla simetria, ficando a quarta parte inferior e esquerda, malhas de 10x10 elementos finitos e, consequentemente, os planos do contorno foram restringidos por apoios na direção vertical e o giro em torno da direção ortogonal à face de simetria.

A armadura, de todos os espécimes, foi considerada com comportamento elastoplástico perfeito e foi introduzida como armadura incorporada REINF264 no interior de cada elemento de casca, conforme ilustra o exemplo da laje S2 nas figuras 3.5b e 3.5c.

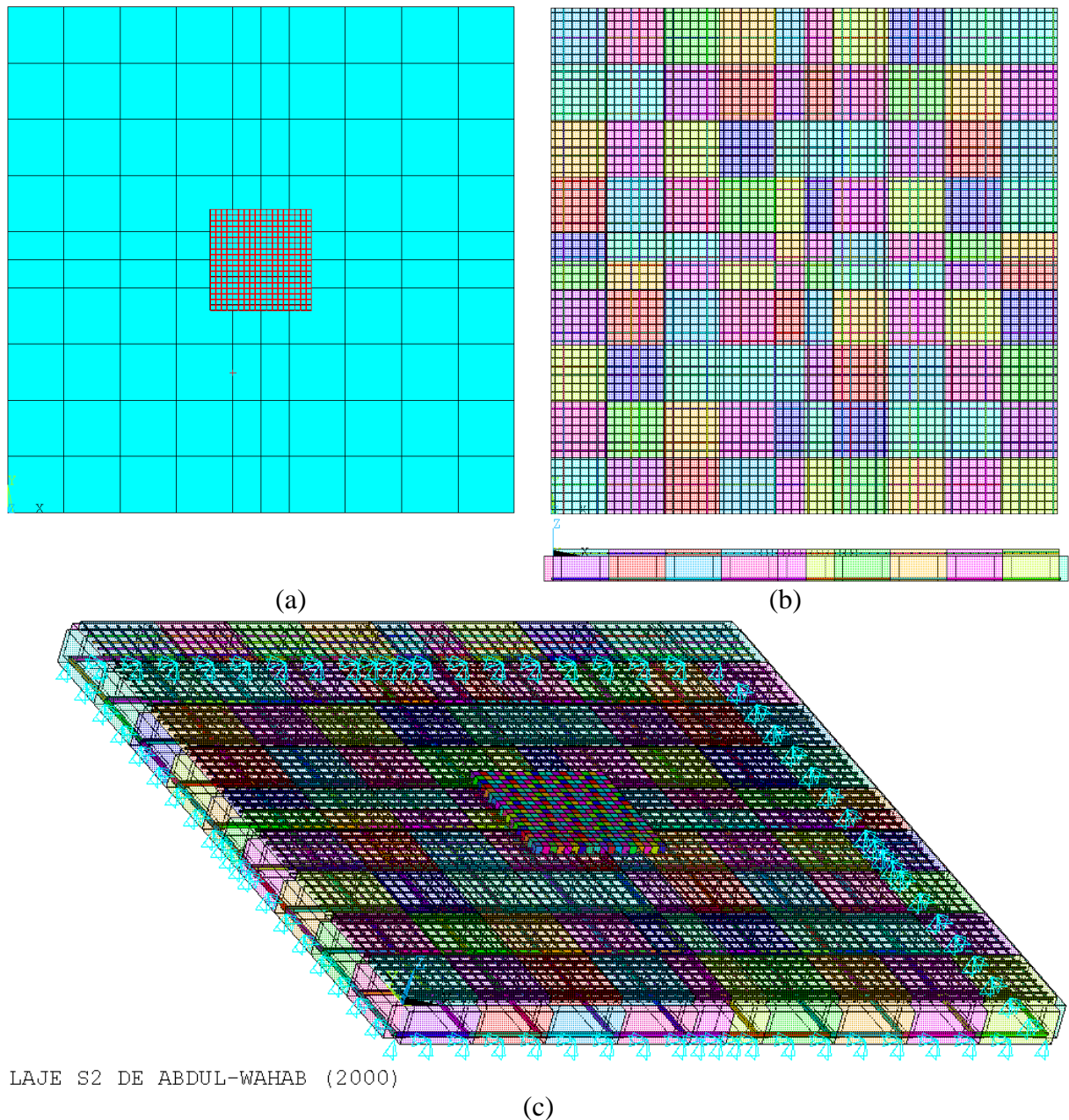
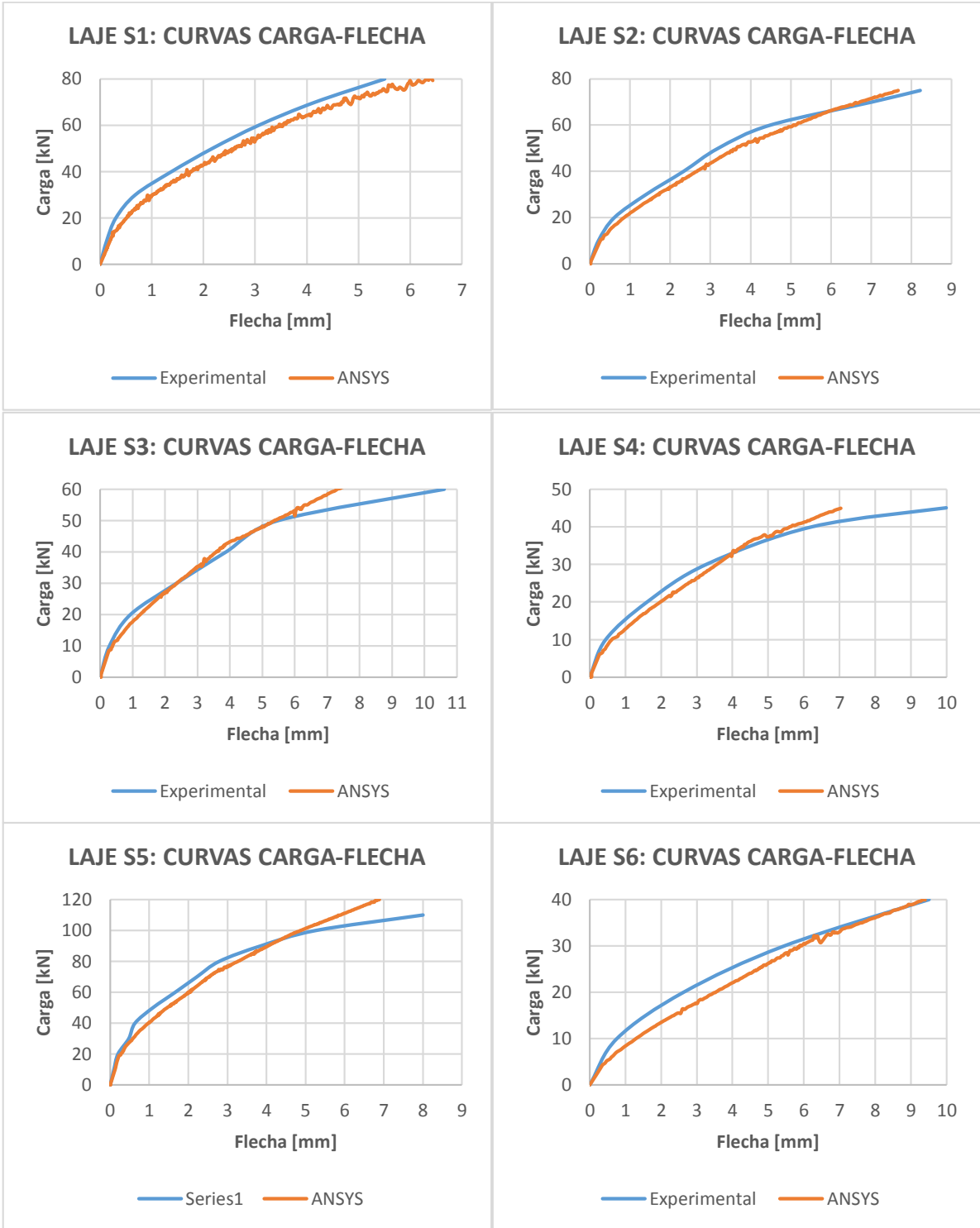


Figura 3.5 – Laje S2 de Abdul-Wahab e Khalil: a) malha de elementos de casca; b) vistas bidimensionais do modelo; c) vista tridimensional do modelo

### 3.2.3 Comparação de resultados

Na figura 3.6 são comparados os resultados obtidos numericamente de curvas carga-flecha com os resultados experimentais, sem considerar o peso próprio. Em geral o modelo computacional reproduziu uma boa correlação dos resultados.





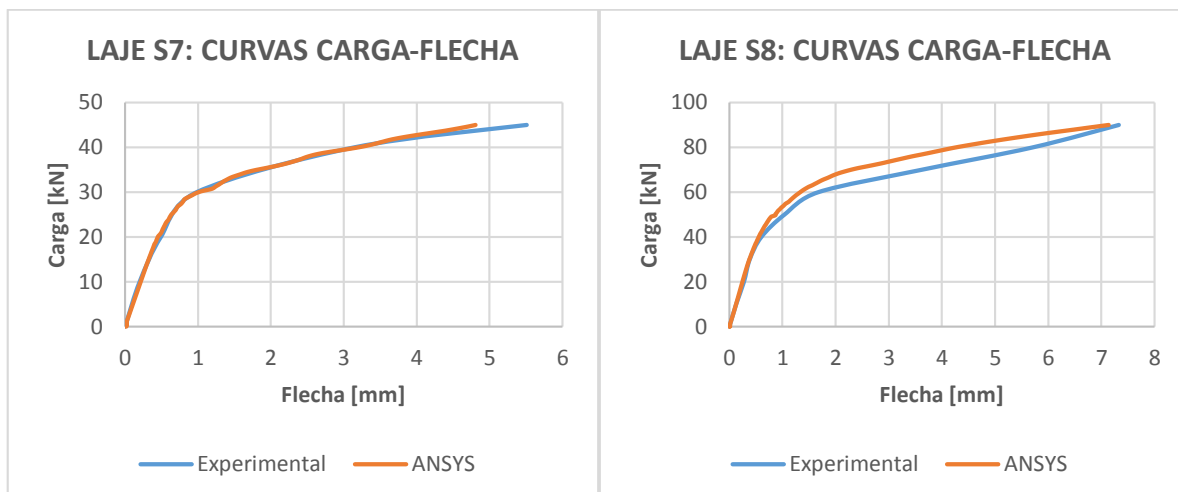


Figura 3.6 – Lajes de Abdul-Wahab e Khalil: curvas carga-flecha

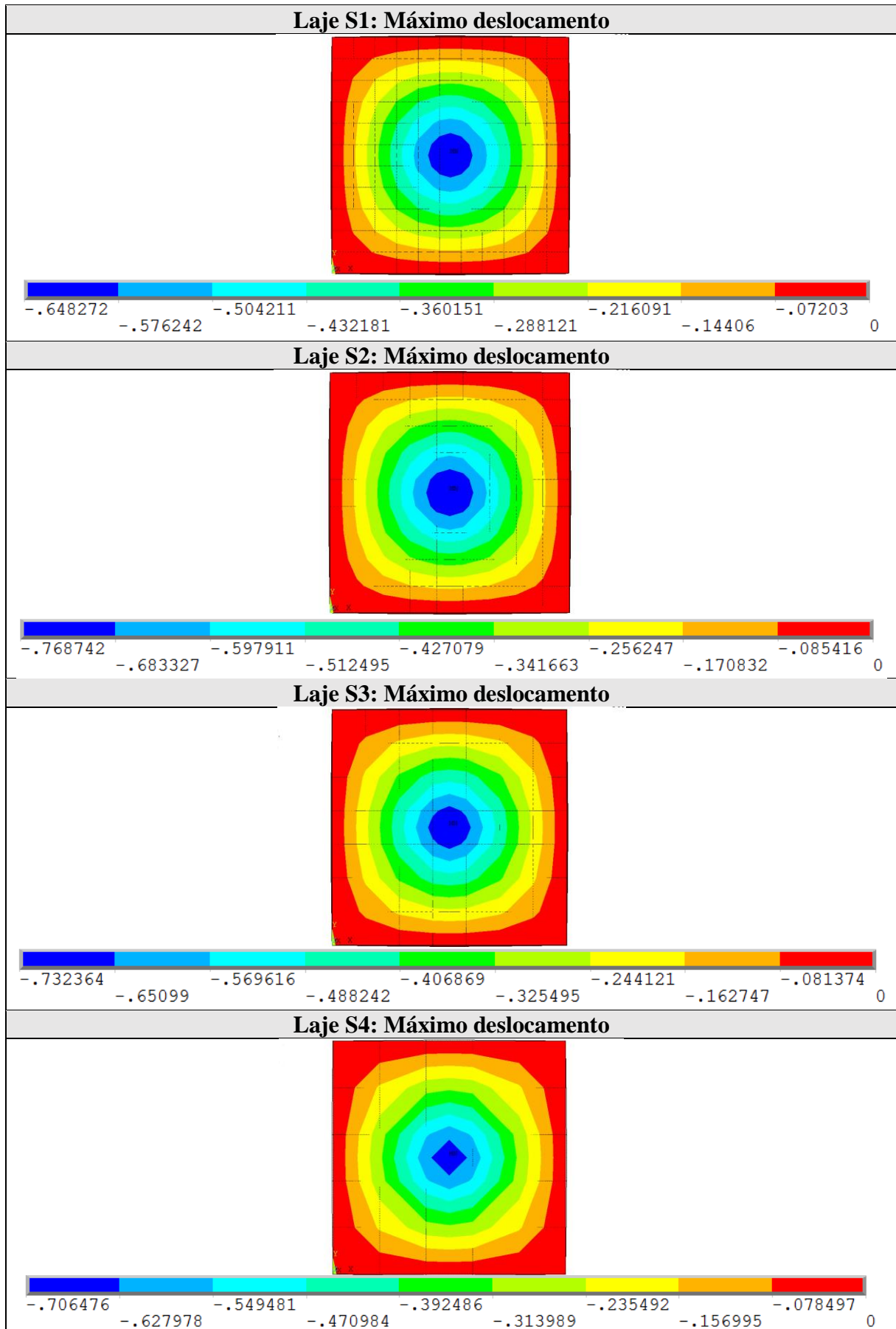
Nota-se que a laje S1 exibe um leve afastamento constante em termos de deslocamentos; embora que nas lajes S3, S4, S5 e S7 esse afastamento é apreciável nos estágios finais de carregamento, a resposta numérica acompanha o desenvolvimento experimental das flechas.

Nos quadros 3.8 e 3.9 são apresentadas as deformadas para o estágio final de carregamento. Podendo-se perceber que quanto maior o número de nervuras ou menor seu espaçamento, maior foi a rigidez e menor foi a flecha. Assim mesmo, quanto menor foi a altura das nervuras, maior flecha foi exibida e, como esperado, quanto maior foi a espessura da laje houve um aumento notável na rigidez, bem como na carga última.

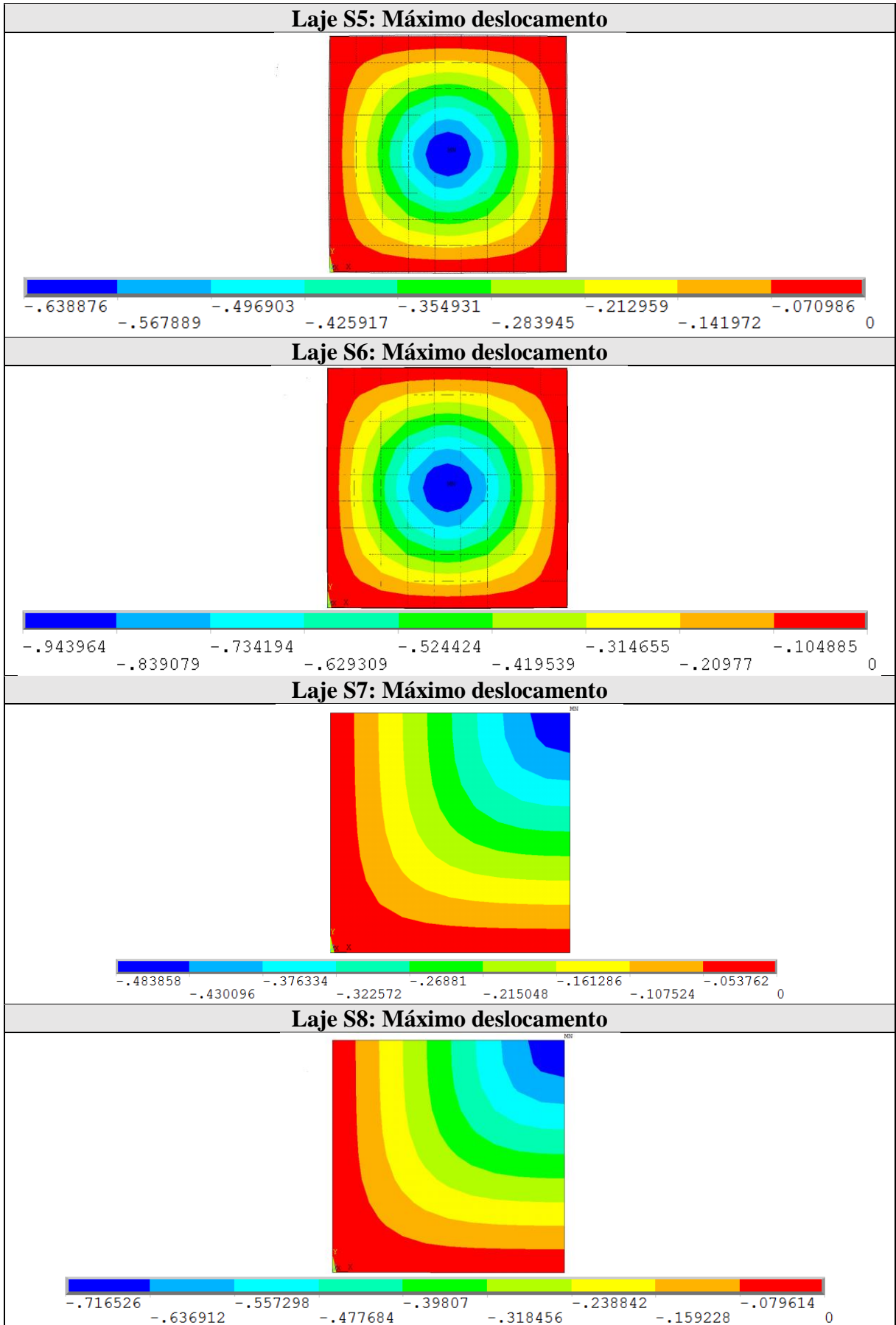
Os quadros 3.10 a 3.13, mostram os acréscimos finais das componentes de tensão das mesas de concreto. Já nos quadros 3.20 e 3.21 tem-se as tensões das armaduras nas nervuras. Como também nos quadros 3.14 a 3.19 são ilustradas as distribuições de momentos dos espécimes.

Desde que na maioria destas lajes as tensões nas mesas tenderam a se propagar em direção aos cantos, a falha aconteceu por flexão e foi caracterizada pelo escoamento da armadura das nervuras na área do carregamento. Embora no caso da laje S5, onde as distribuições de tensões e momentos indicam que a falha ocorreu por punção súbita, conforme reportaram os autores.

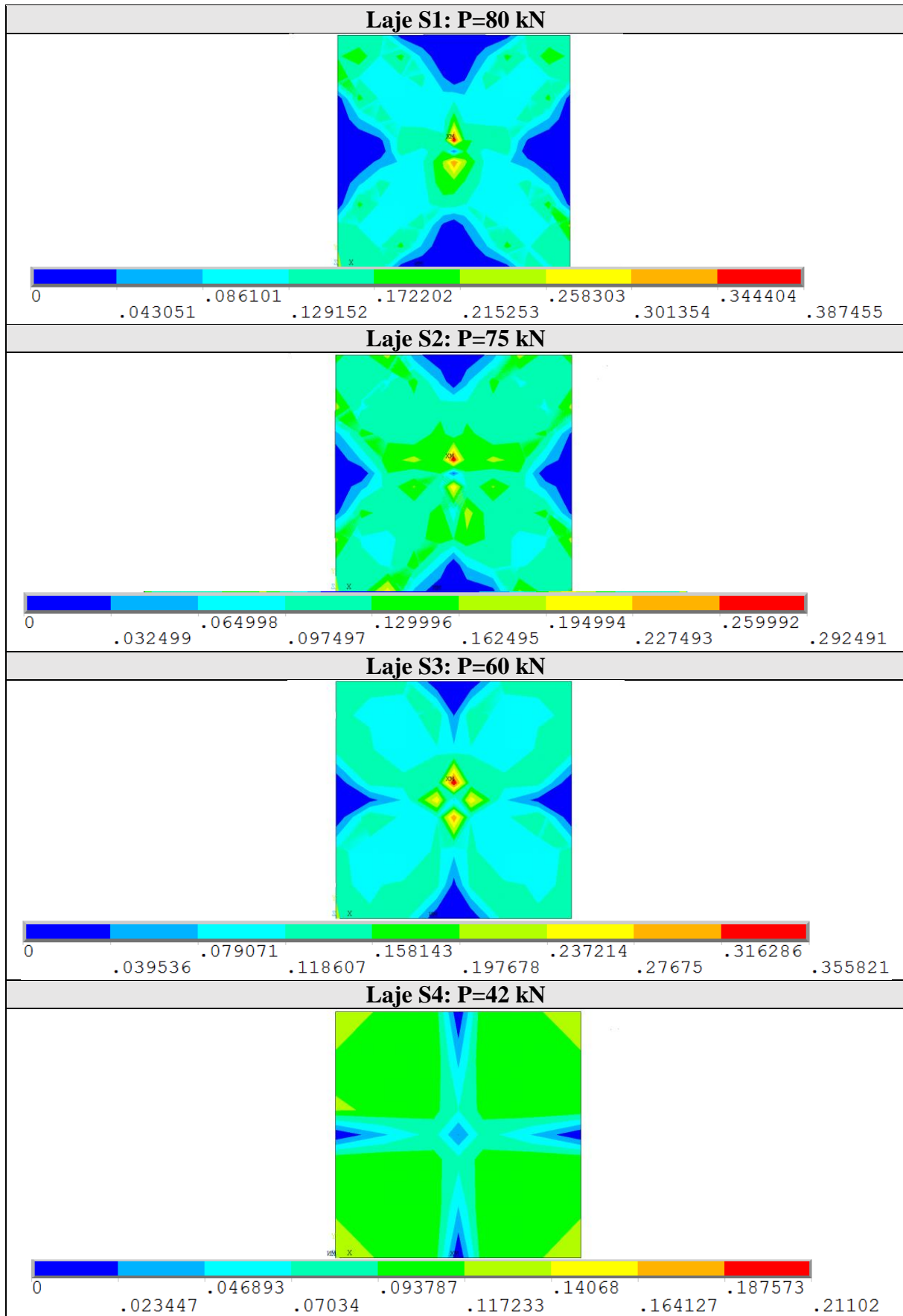
Quadro 3.8 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: deformadas finais (em cm)



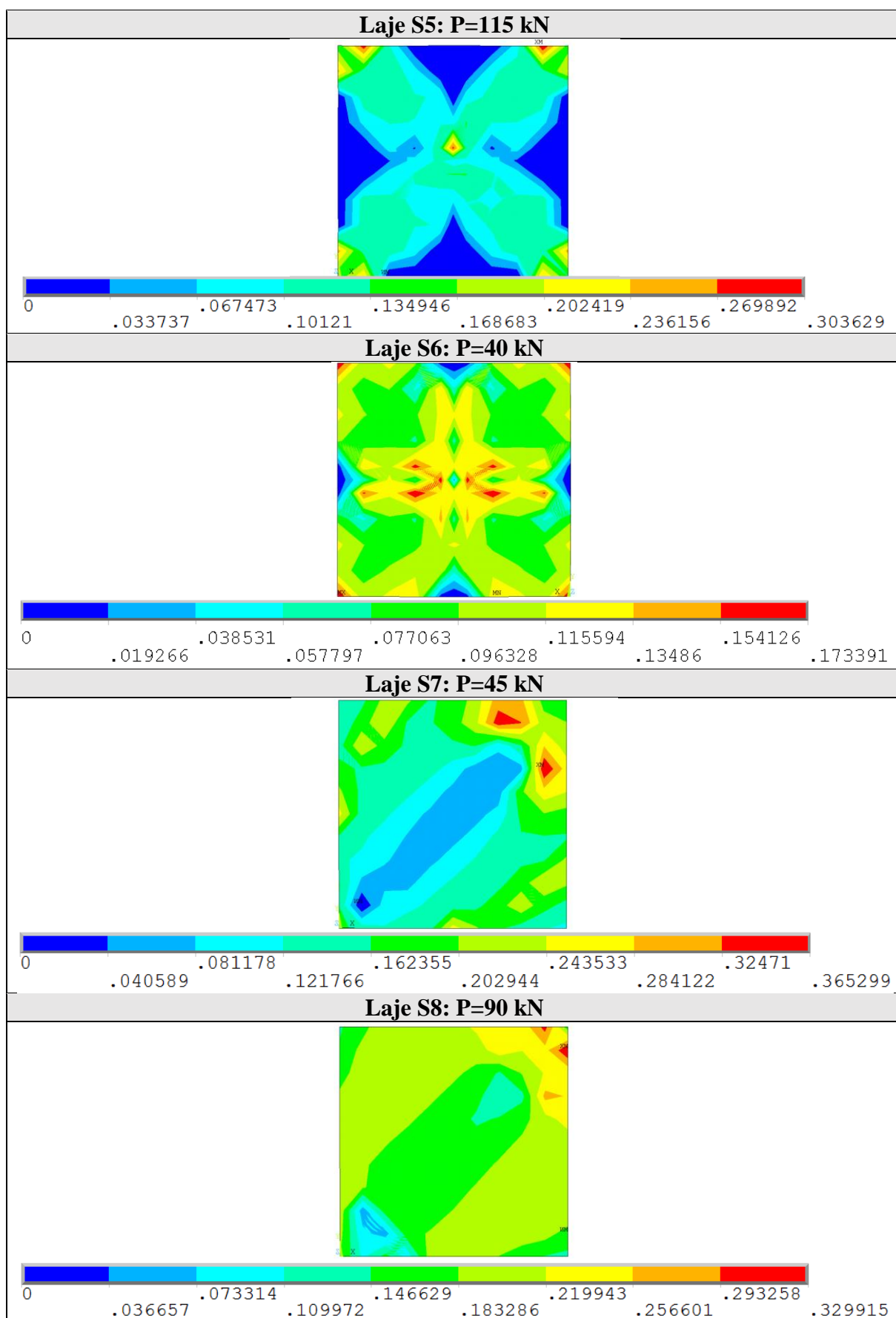
Quadro 3.9 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: deformadas finais (em cm)



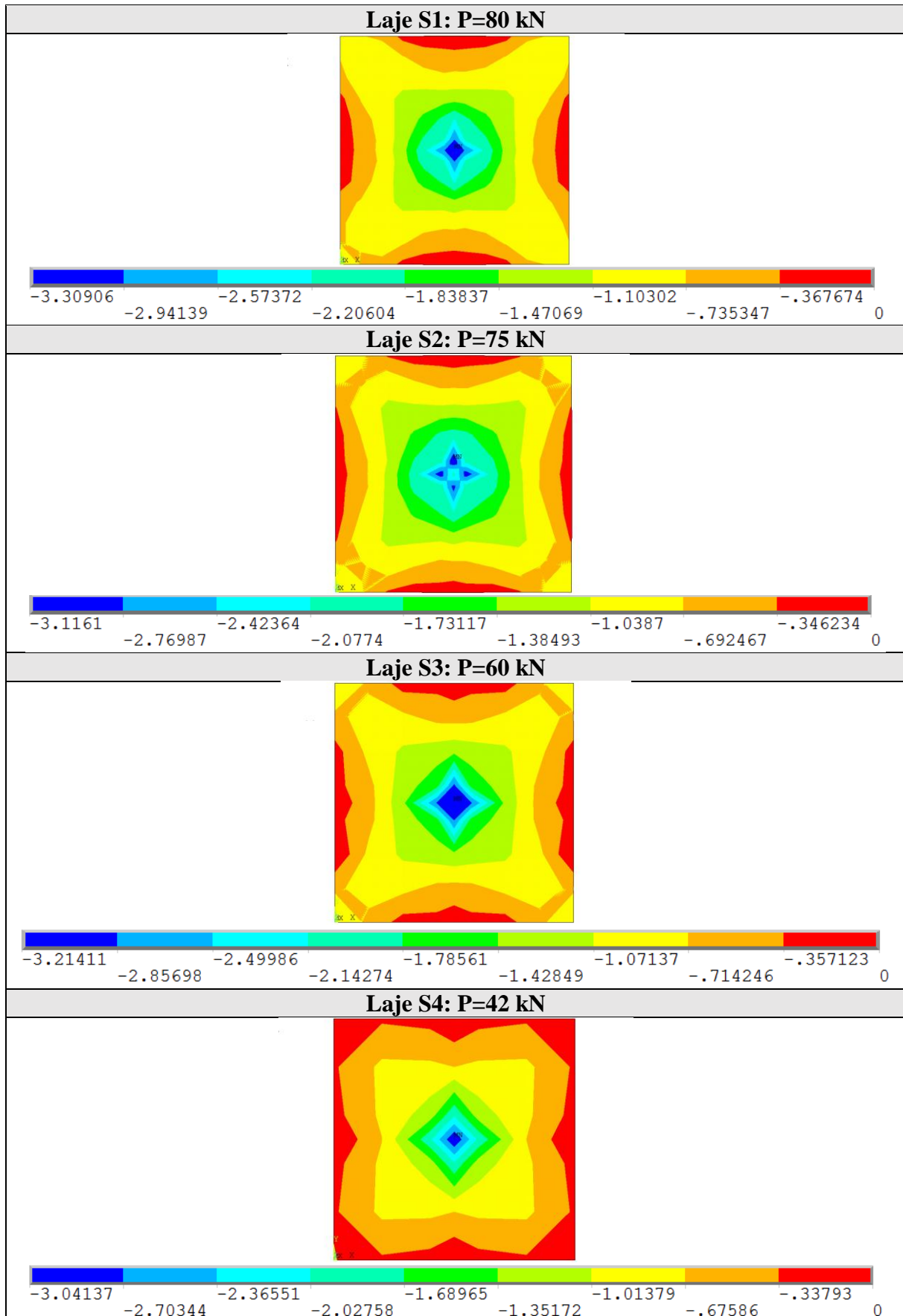
Quadro 3.10 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_1$  dos elementos da mesa de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )



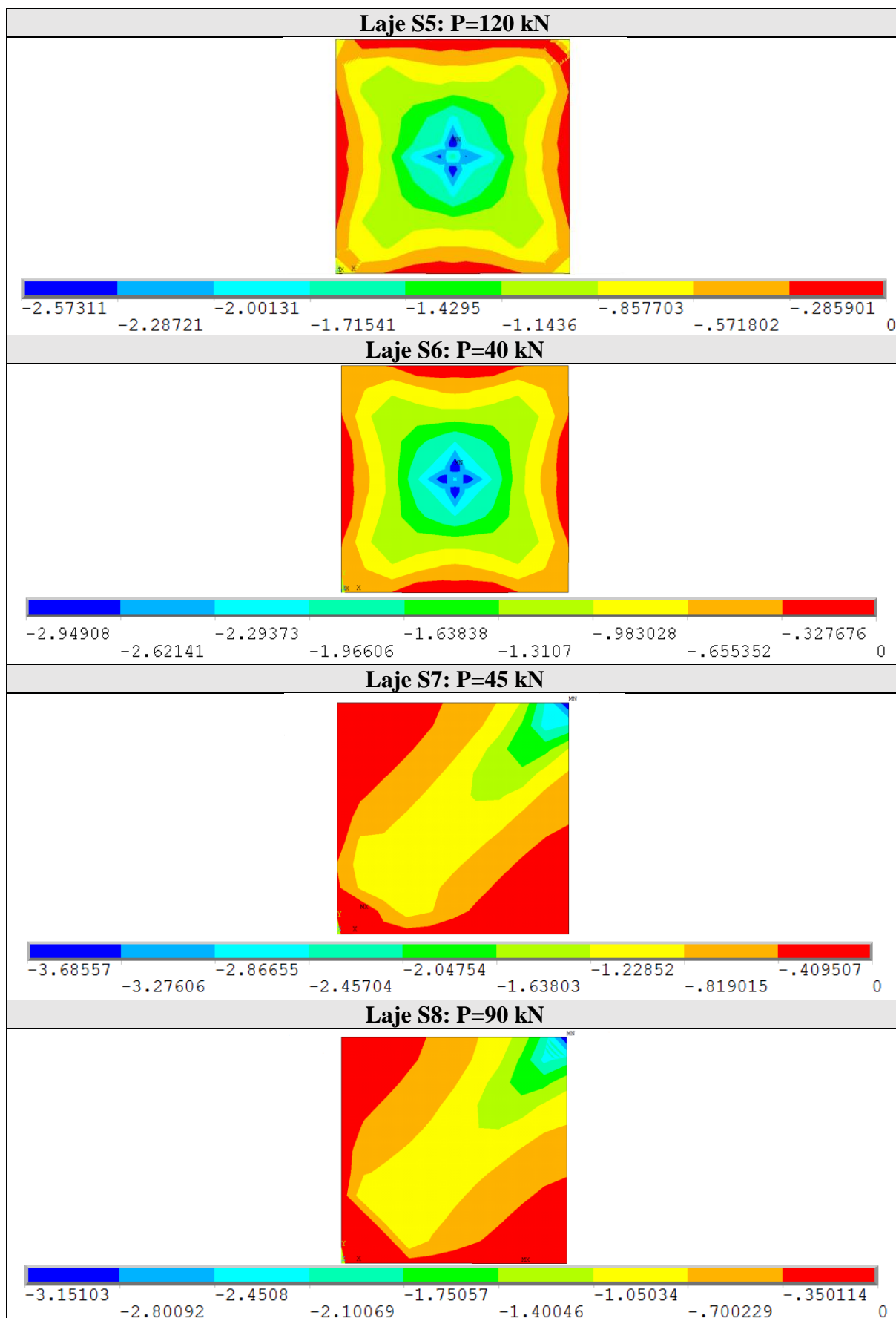
Quadro 3.11 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_1$  dos elementos da mesa de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )



Quadro 3.12 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_3$  dos elementos da mesa de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )

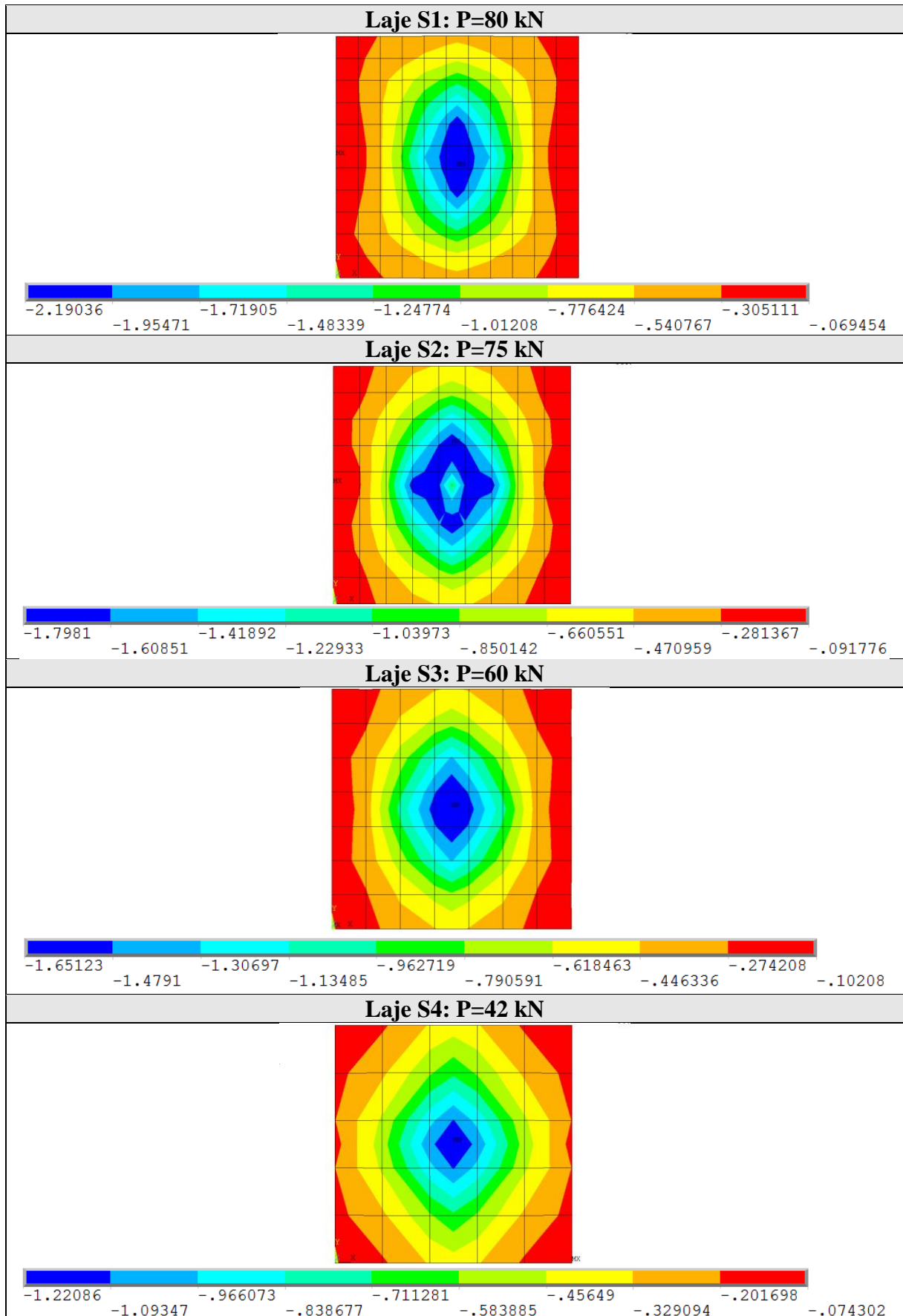


Quadro 3.13 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_3$  dos elementos da mesa de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )

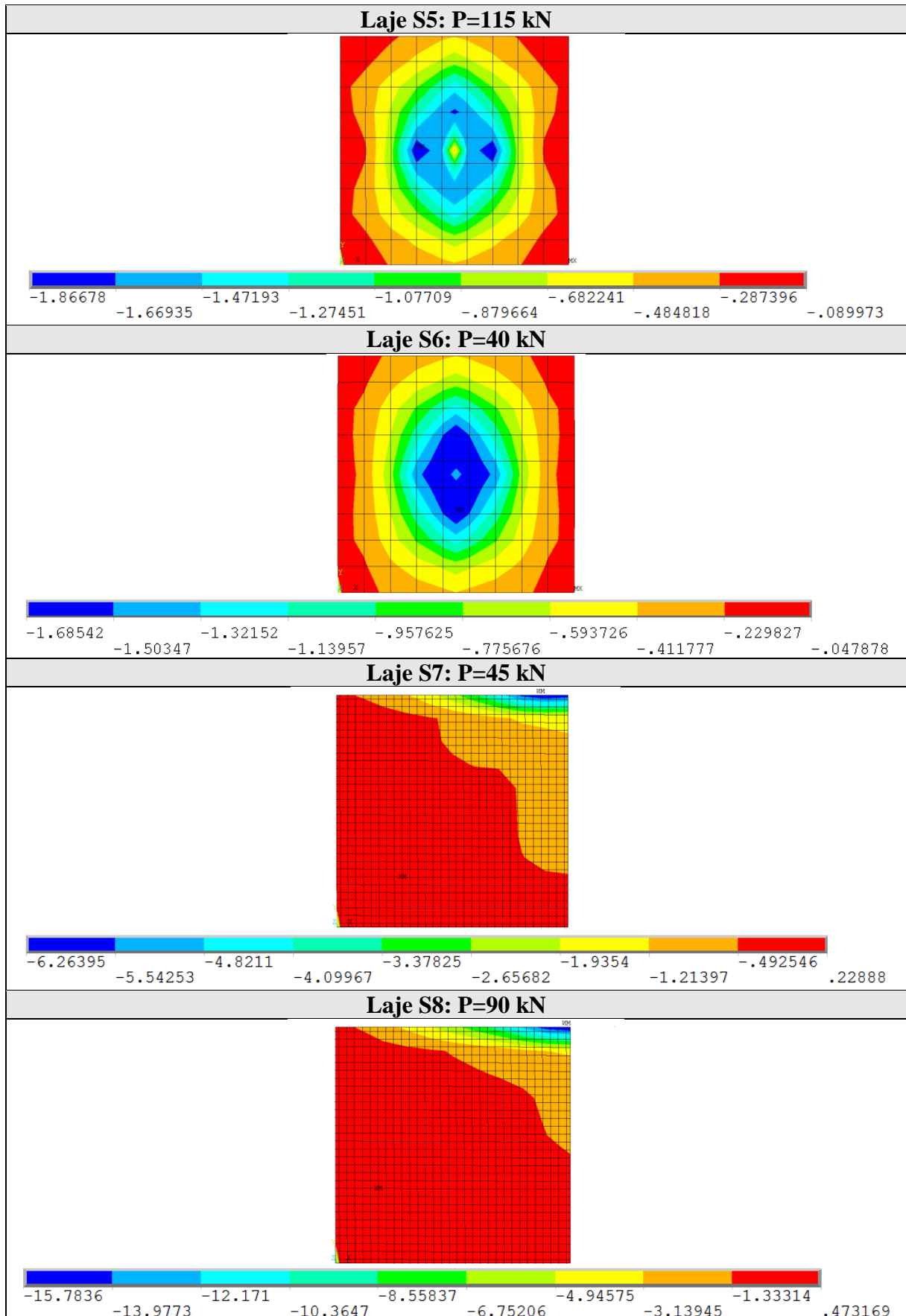




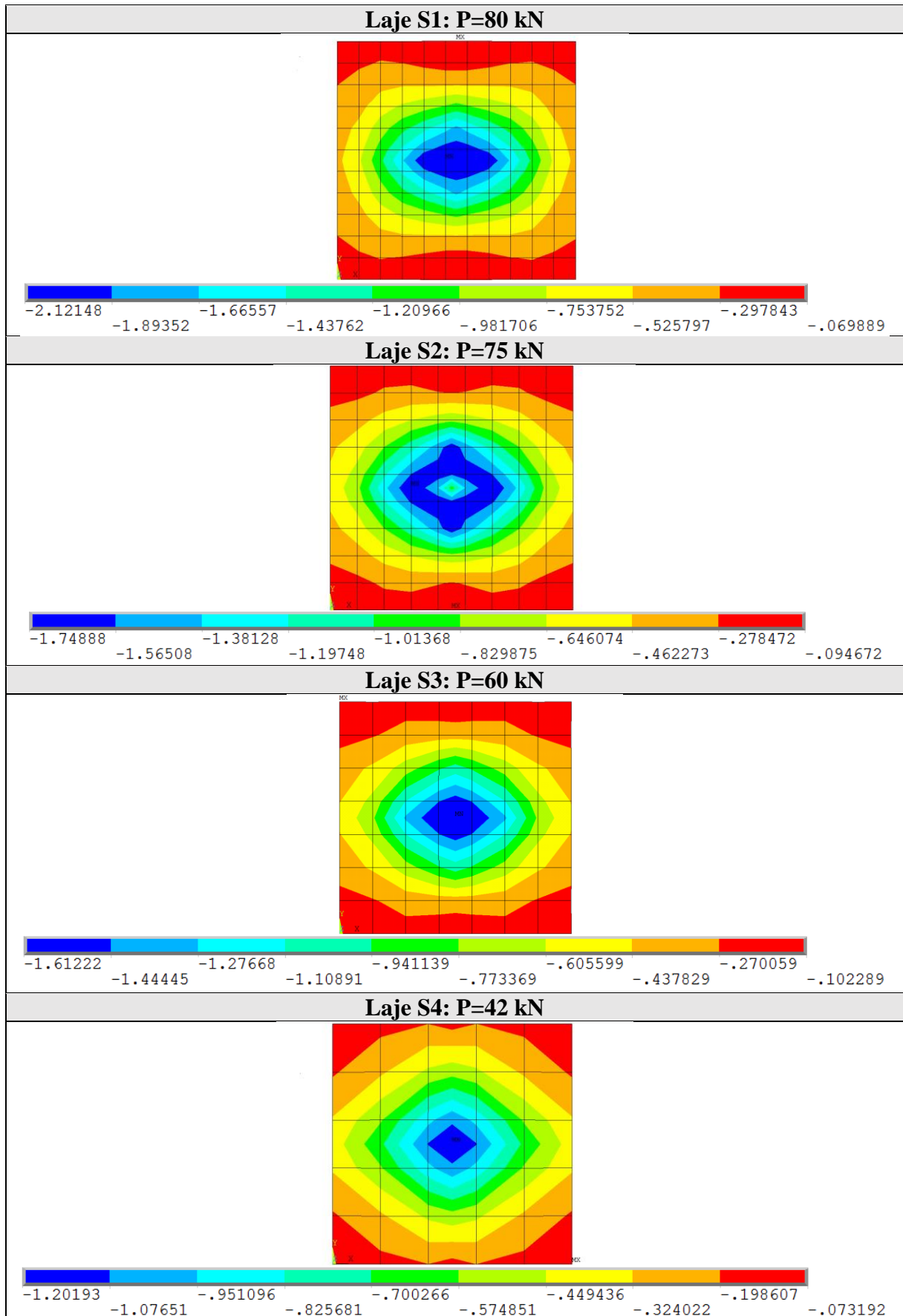
Quadro 3.14 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos  $M_{11}$  dos modelos (em kN-cm)



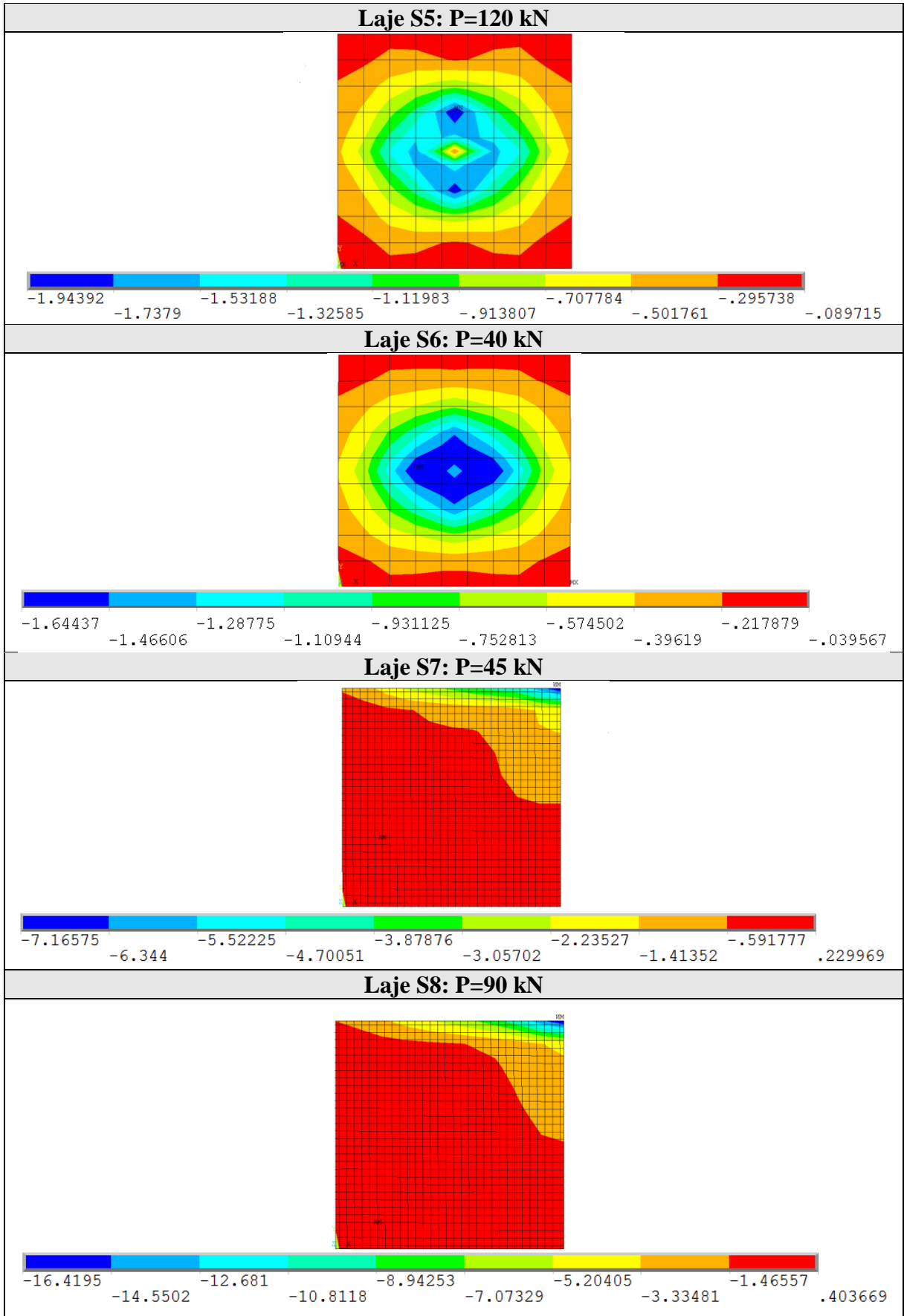
Quadro 3.15 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos  $M_{11}$  dos modelos (em kN-cm)



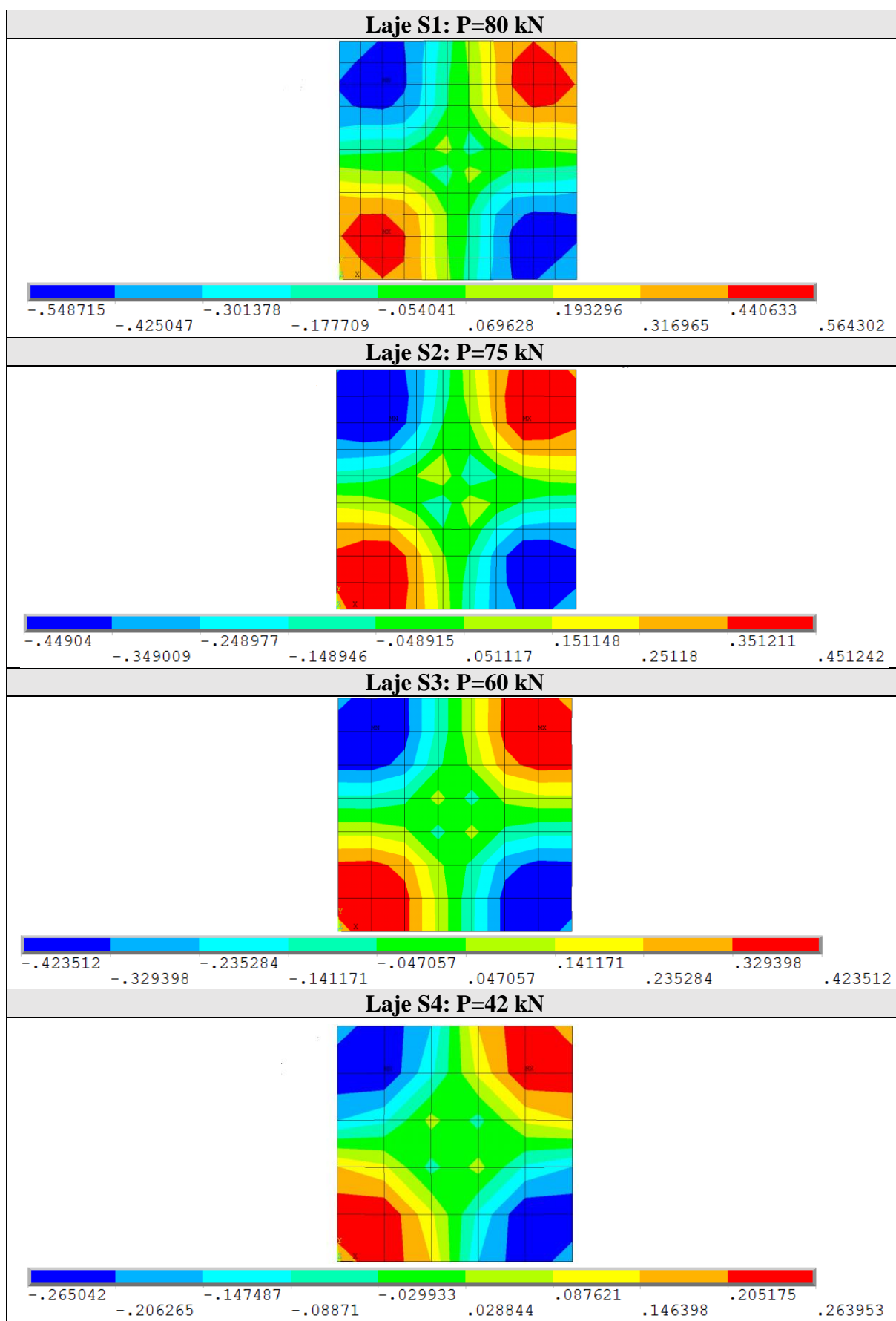
Quadro 3.16 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos  $M_{22}$  dos modelos (em kN-cm)



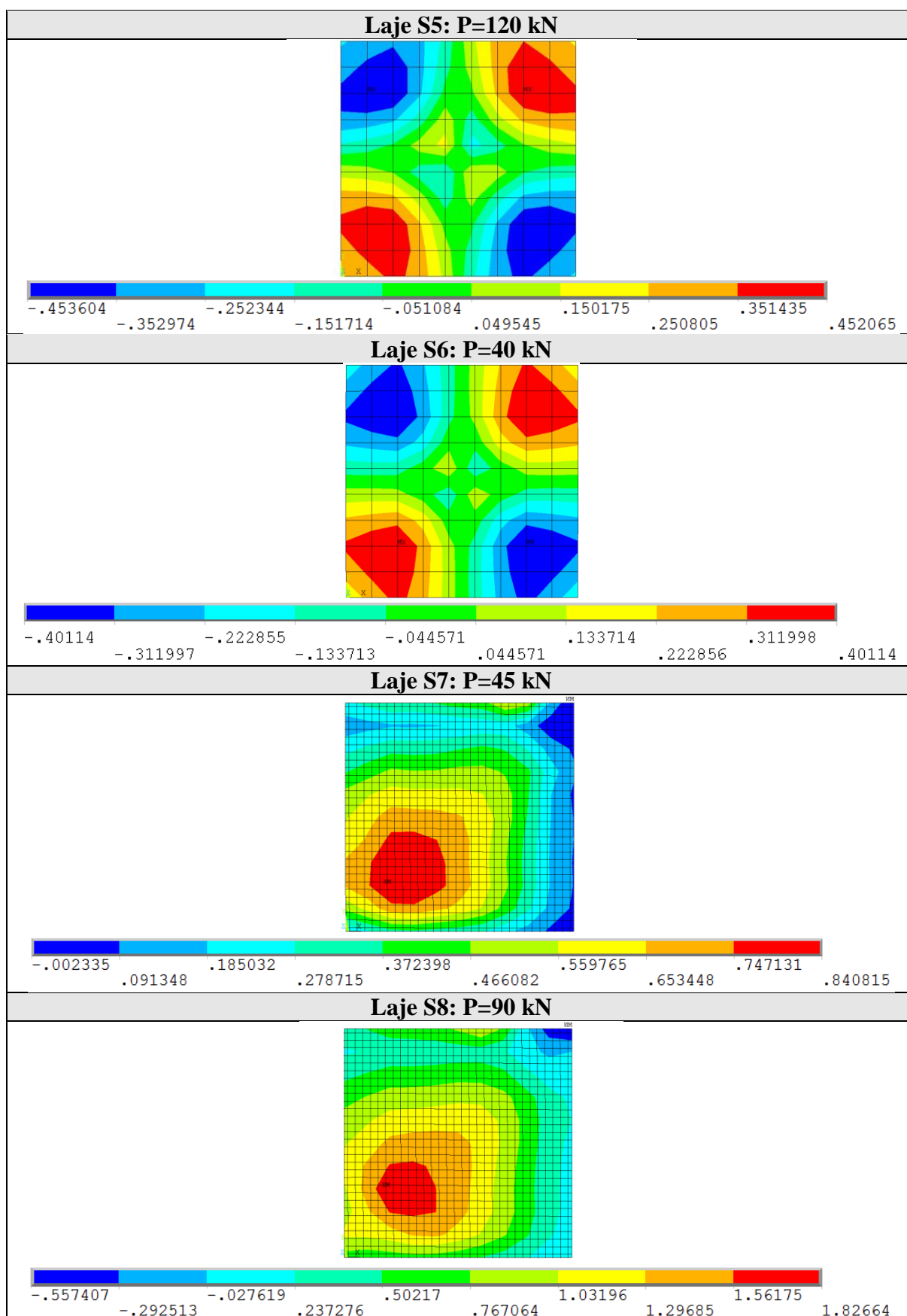
Quadro 3.17 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos  $M_{22}$  dos modelos (em kN-cm)



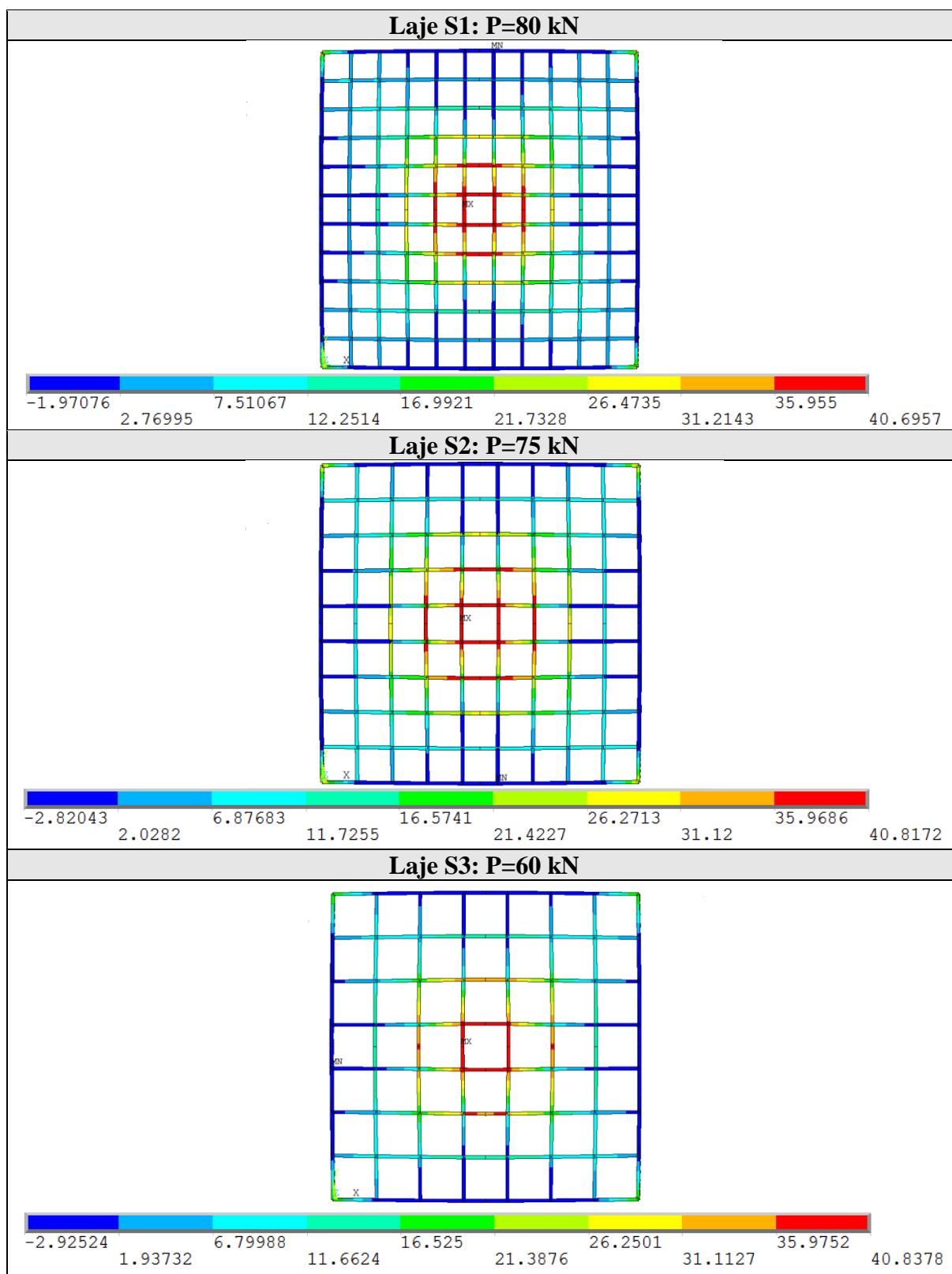
Quadro 3.18 – Lajes S1 a S4 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos  $M_{12}$  dos modelos (em kN-cm)



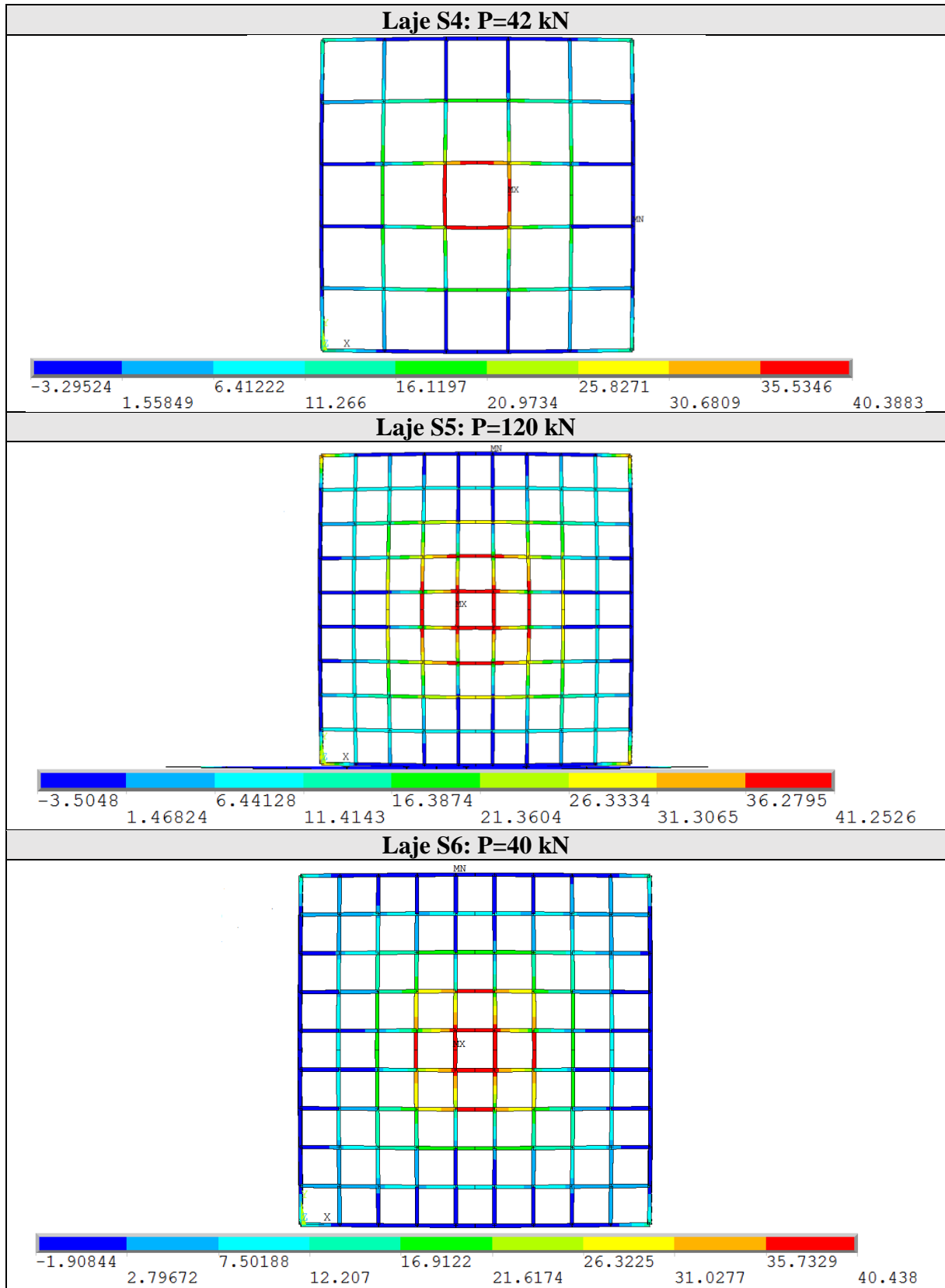
Quadro 3.19 – Lajes S5 a S8 de Abdul-Wahab e Khalil: distribuição de momentos  $M_{12}$  dos modelos (em kN-cm)



Quadro 3.20 – Lajes S1 a S3 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução das tensões na armadura das nervuras (em  $\text{kN/cm}^2$ )



Quadro 3.21 – Lajes S1 a S3 de Abdul-Wahab e Khalil: evolução das tensões na armadura das nervuras (em  $\text{kN/cm}^2$ )





## **4 ANÁLISE DE LAJES EM CONCRETO PROTENDIDO**

Nesta seção, procura-se validar a eficiência dos modelos constitutivos implementados para o concreto e para a armadura protendida. Para tal fim, procede-se à comparação de resultados obtidos numericamente com resultados experimentais, encontrados na bibliografia, de lajes maciças de concreto com protensão não-aderente.

### **4.1 LAJE DE SCORDELIS, PISTER E LIN (1956)**

Um dos primeiros trabalhos difundidos sobre ensaios em lajes bidirecionais de concreto protendido foi conduzido por Scordelis, Pister e Lin em 1956. Este trabalho foi desenvolvido para estudar o comportamento, prévio e posterior ao limite elástico, de uma laje de concreto, maciça e quadrada, com protensão não-aderente nas duas direções, submetida a um carregamento uniformemente distribuído e apoiada em quatro pontos.

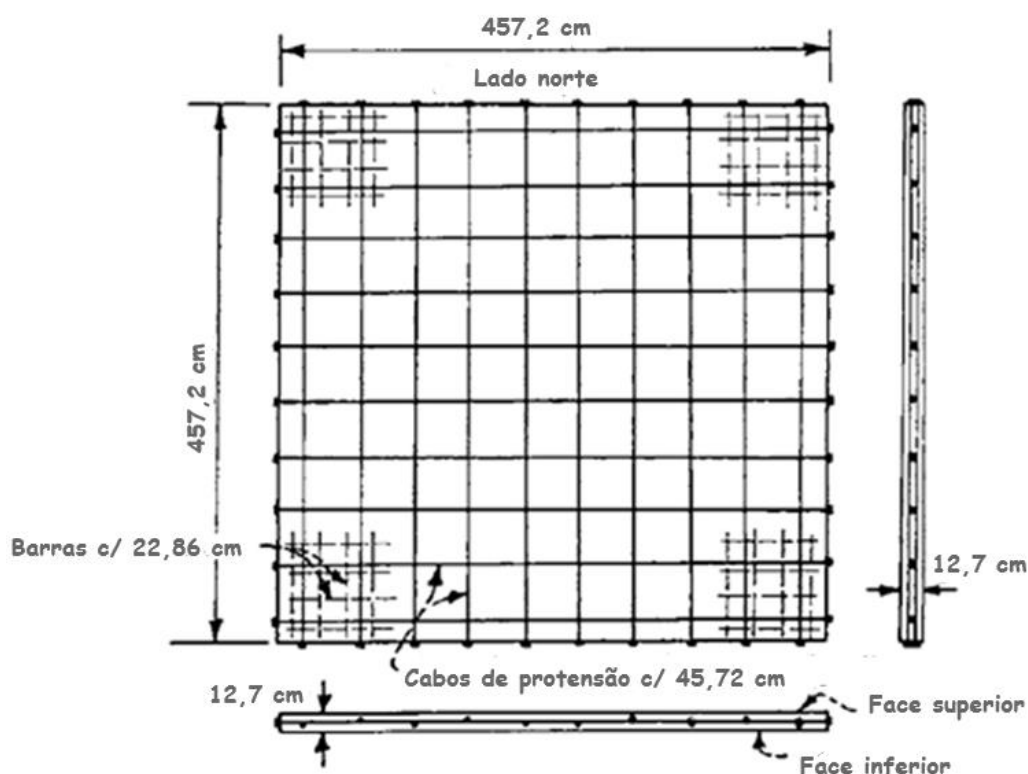
O programa experimental consistiu em quatro ciclos separados de carga, o primeiro ciclo serviu para registrar o comportamento da laje antes da fissuração; o segundo ciclo foi aplicado para examinar os resultados do primeiro ciclo e para levar o carregamento após a fissuração; o terceiro ciclo determinou o comportamento da laje depois de que foi fissurada; e o quarto ciclo para levar a capacidade resistente da laje até o colapso.

#### **4.1.1 Características geométricas e propriedades dos materiais**

O espécime mostrado na figura 4.1 teve dimensões de 457,2x457,2 cm no plano e 12,7 cm de espessura. Os apoios foram localizados nos cantos a 426,72 m de distância em ambas direções. Um arranjo de balancim e roletes, conforme a figura 4.2, foram utilizados para permitir deslocamentos horizontais e rotações necessários nos apoios.

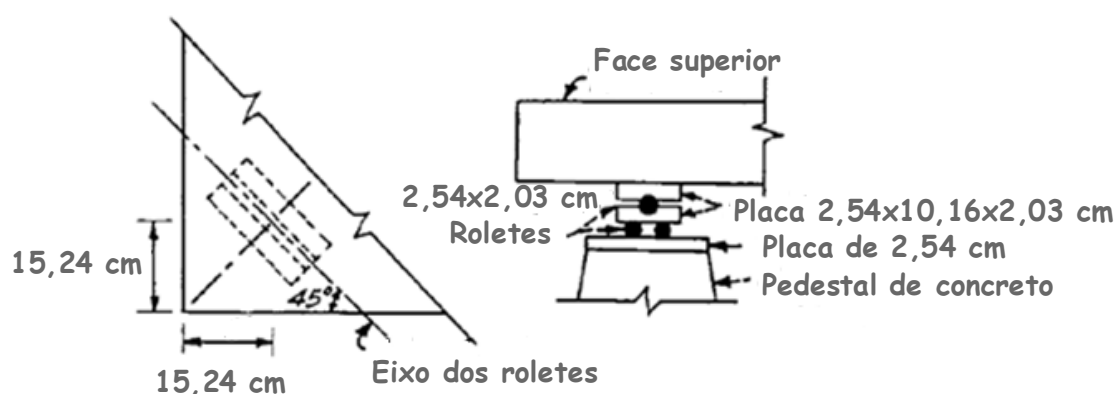
A laje foi protendida com dez cabos em cada direção. Todos os cabos foram colocados em linha reta. Cada cabo consistiu em seis fios de 0,635 cm de diâmetro com botões encruados ao frio nos extremos dos fios. Os fios foram untados e embrulhados em papel e posteriormente ancorados no concreto com fixadores Prescon. O diâmetro dos cabos foi de 1,905 cm. Foi desejado aproximar uma condição de protensão uniforme nas duas direções. Os dez cabos na direção leste-oeste foram colocados no plano médio da laje e espaçados 45,72 cm. Na direção

norte-sul, dez cabos também espaçados 45,72 cm, foram colocados de forma alternada um imediatamente acima e outro imediatamente abaixo dos cabos da direção leste-oeste. Os centros destes cabos estiveram a 4,445 cm da face superior e inferior da laje. Para preservar a simetria seis cabos ficaram abaixo e quatro cabos ficaram acima dos cabos da direção leste-oeste, conforme a figura 4.1.



(fonte: Scordelis, Pister e Lin, 1956)

Figura 4.1 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: plano e seções da laje mostrando arranjo da armadura



(fonte: Scordelis, Pister e Lin, 1956)

Figura 4.2 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: detalhe em planta e elevação dos apoios

Em adição à armadura protendida, uma pequena quantidade de armadura convencional foi colocada em cada canto da laje para minimizar possíveis falhas locais nos apoios. Esta armadura consistiu em quatro barras de 0,95 cm de diâmetro e 91,44 cm de comprimento, espaçadas 22,86 cm no plano meio da laje e nas duas direções em cada canto.

O concreto para a laje foi dosificado para possuir uma resistência mínima à compressão de 3,45 kN/cm<sup>2</sup> aos 28 dias. Valores adicionais do concreto, como o módulo de elasticidade, são detalhados na tabela 4.1 junto com as informações das propriedades mecânicas das armaduras.

Tabela 4.1 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: parâmetros mecânicos e geométricos

Parâmetros			Espécime	
Geométricos	LAJE – SHELL281			
	Comprimento	(cm)	$L$	457,2
	Espessura	(cm)	$h_f$	12,7
	ARMADURA PROTENDIDA – LINK180			
	Área da armadura	(cm <sup>2</sup> )	$A_p$	1,897
	Altura útil	(cm)	$d_p$	Variável
	Espaçamento	(cm)	$s_p$	45,72
	ARMADURA PASSIVA – REINF264			
	Área da armadura	(cm <sup>2</sup> )	$A_s$	0,71
	Altura útil	(cm)	$d$	6,35
Espaçamento	(cm)	$s$	22,86	
Mecânicos	CONCRETO – USERMATPS			
	Resistência última à compressão	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_c$	3,45
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_c$	2889
	Coefficiente de Poisson		$\mu_c$	0,20
	AÇO DA ARMADURA PROTENDIDA – USERMAT1D			
	Tensão de ruptura	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_{ptk}$	147,55
	Tensão inicial após perdas	(kN/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{p0}$	88,25
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_p$	19581
	Coefficiente de Poisson		$\mu_p$	0,30
	AÇO DA ARMADURA PASSIVA – BISO			
	Tensão de escoamento	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_y$	27,58
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_s$	21000
Coefficiente de Poisson		$\mu_s$	0,30	

Quando o concreto atingiu uma idade de 11 dias, a protensão foi aplicada inicialmente com 103,42 kN/cm<sup>2</sup>. Perdas de protensão devidas à fluência e retração do concreto e relaxação do aço não foram reportadas porque experiências prévias em laboratório, para o mesmo tipo de

aço e concreto, serviram para estimar que estas perdas chegam a ser de 15%. A tensão de protensão inicial efetiva foi, portanto, considerada como 88,25 kN/cm<sup>2</sup>.

#### **4.1.2 Modelo de elementos finitos**

O modelo de elementos finitos considerou a laje inteira, as condições de contorno foram configuradas girando os eixos dos nós vinculados aos apoios, permitindo os deslocamentos na direção diagonal da laje e os giros na direção perpendicular à diagonal da laje. Além dos efeitos da protensão e do carregamento uniformemente distribuído, a análise considerou o peso próprio como uma carga de curta duração.

O estudo da influência da discretização desenvolvido, além de alternar o tamanho dos elementos finitos, número de camadas e número de pontos de integração ao longo da espessura dos elementos de casca para o concreto, também se estendeu ao tamanho dos elementos de treliça utilizados para modelar os cabos de protensão.

Sabendo que a armadura de protensão é considerada como armadura discreta, a discretização da malha de elementos finitos ficou condicionada à localização dos cabos, assim, a laje de concreto foi modelada com dois elementos de casca SHELL281 em cada trecho delimitado por cabos de protensão nas duas direções. Cada elemento de casca precisou apenas de uma camada de 5 pontos de integração ao longo da espessura, fazendo um total de vinte pontos de integração por elemento.

A excentricidade em cada ponto das ancoragens, nas duas direções, respeito à face inferior da laje foi modelada com vínculos rígidos (figura 4.3a), elemento MPC184. Para utilizar o elemento MPC184, precisa-se apenas definir o tipo de vínculo a ser utilizado através do comando KEYOPT e um modelo constitutivo que neste caso foi o aço de protensão.

Para representar a condição de não-aderência entre cabos e concreto, a ligação entre elementos de casca e elementos de treliça foi feita com o comando CP (figura 4.3a), utilizado para acoplar graus de liberdade, desvinculando o grau de liberdade na direção longitudinal do cabo. Foi visto que o número mínimo de elementos de treliça LINK180 teve que ser igual ao número de elementos de casca, fazendo coincidir os nós adjacentes na direção vertical.

Tal como em modelos anteriores, a armadura passiva foi considerada com comportamento elastoplástico perfeito e foi modelada como armadura incorporada REINF264 no interior dos elementos de casca localizados nos cantos da laje (figura 4.3b).

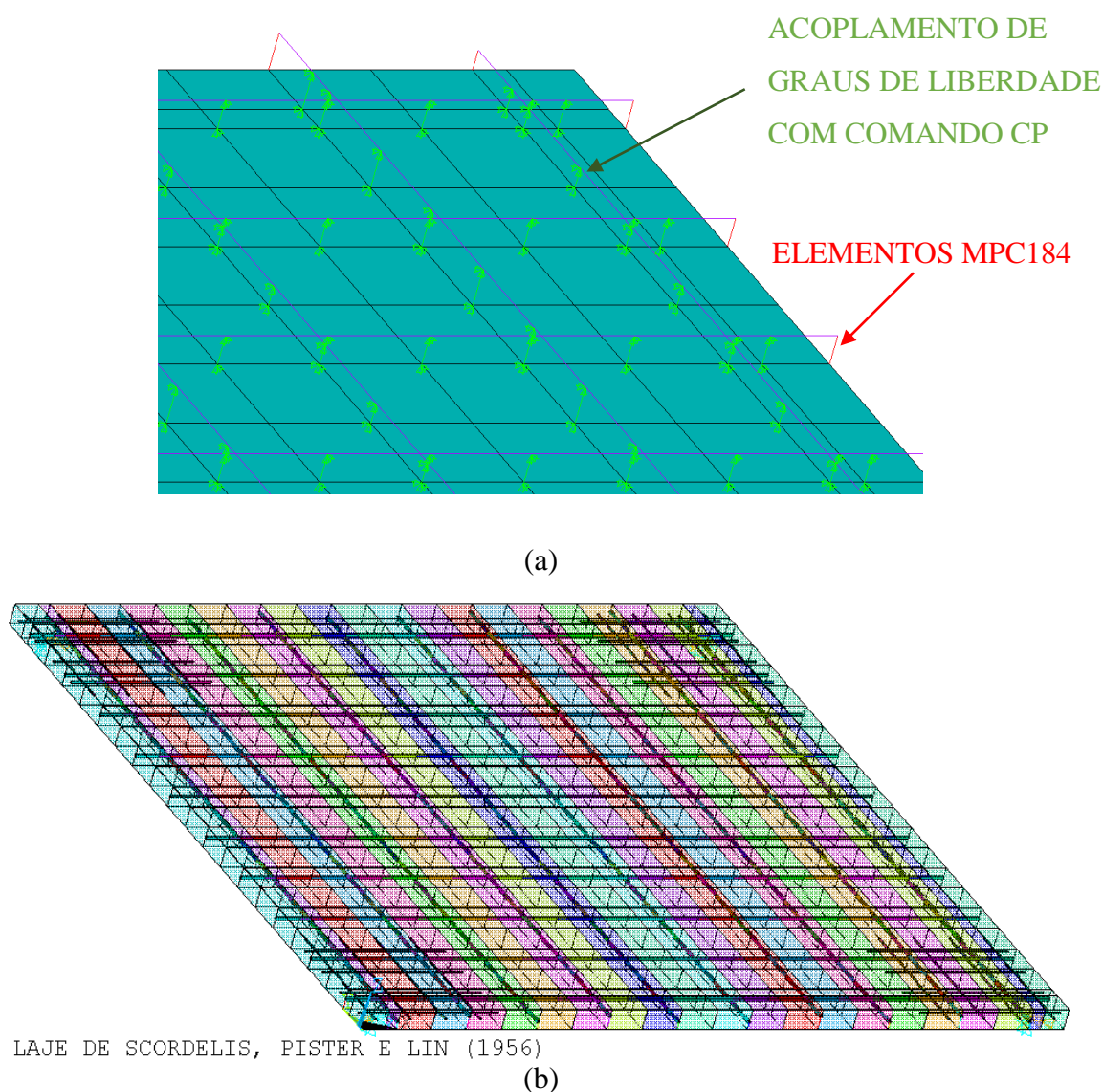


Figura 4.3 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: a) detalhe elementos MPC184 e Comando CP; b) discretização em elementos finitos

### 4.1.3 Comparação de resultados

Dado que o programa experimental contemplou quatro ciclos de carga e descarga, a análise numérica reproduz corretamente o comportamento da laje até o segundo ciclo, onde se estudou o comportamento da laje após a fissuração até uma carga distribuída igual a  $5,99 \text{ kN/m}^2$ .

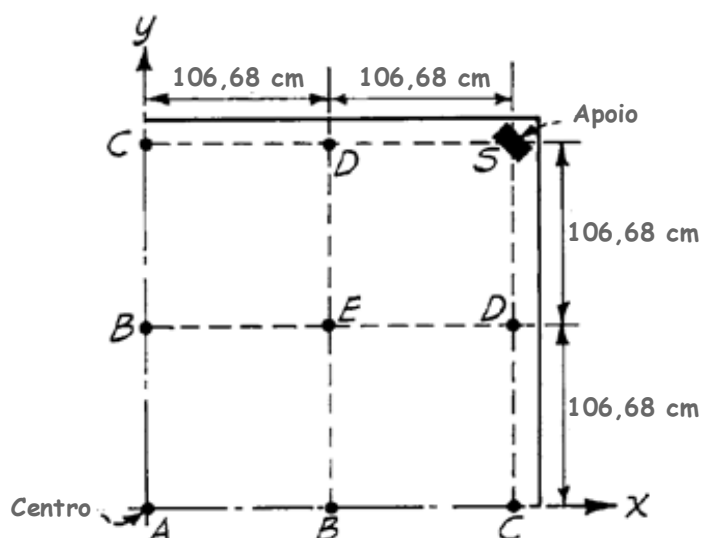
Nesse entendimento, para comparar com os valores experimentais, os valores obtidos computacionalmente são os valores líquidos, ou seja, são descontadas as parcelas correspondentes ao peso próprio.

O parâmetro de endurecimento da protensão foi definido com comportamento elastoplástico perfeito conforme à expressão (4.1).

$$H_s = \frac{0,1 \cdot f_{ptk}}{10\% - \frac{f_{ptk}}{E_p}} \quad (4.1)$$

#### 4.1.3.1 Representação gráfica dos resultados de flechas

A figura 4.4 mostra os pontos de controle que foram considerados para registrar medições. O ponto A corresponde às medições feitas no meio do vão e, por sua vez, o ponto C indica as medições no ponto situado no meio da linha dos apoios da borda superior.



(fonte: Scordelis, Pister e Lin, 1956)

Figura 4.4 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: pontos de controle

Os resultados da figura 4.5 apresentam boa correlação entre resultados numéricos e experimentais da variação do deslocamento com o carregamento aplicado nos pontos A e C da figura acima, embora exista um erro nos últimos incrementos de carga do ensaio.

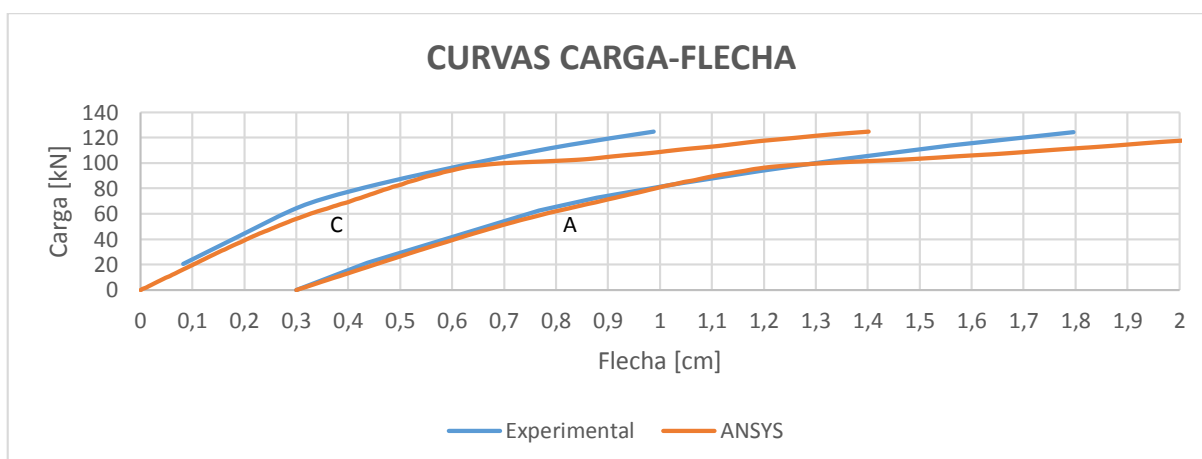
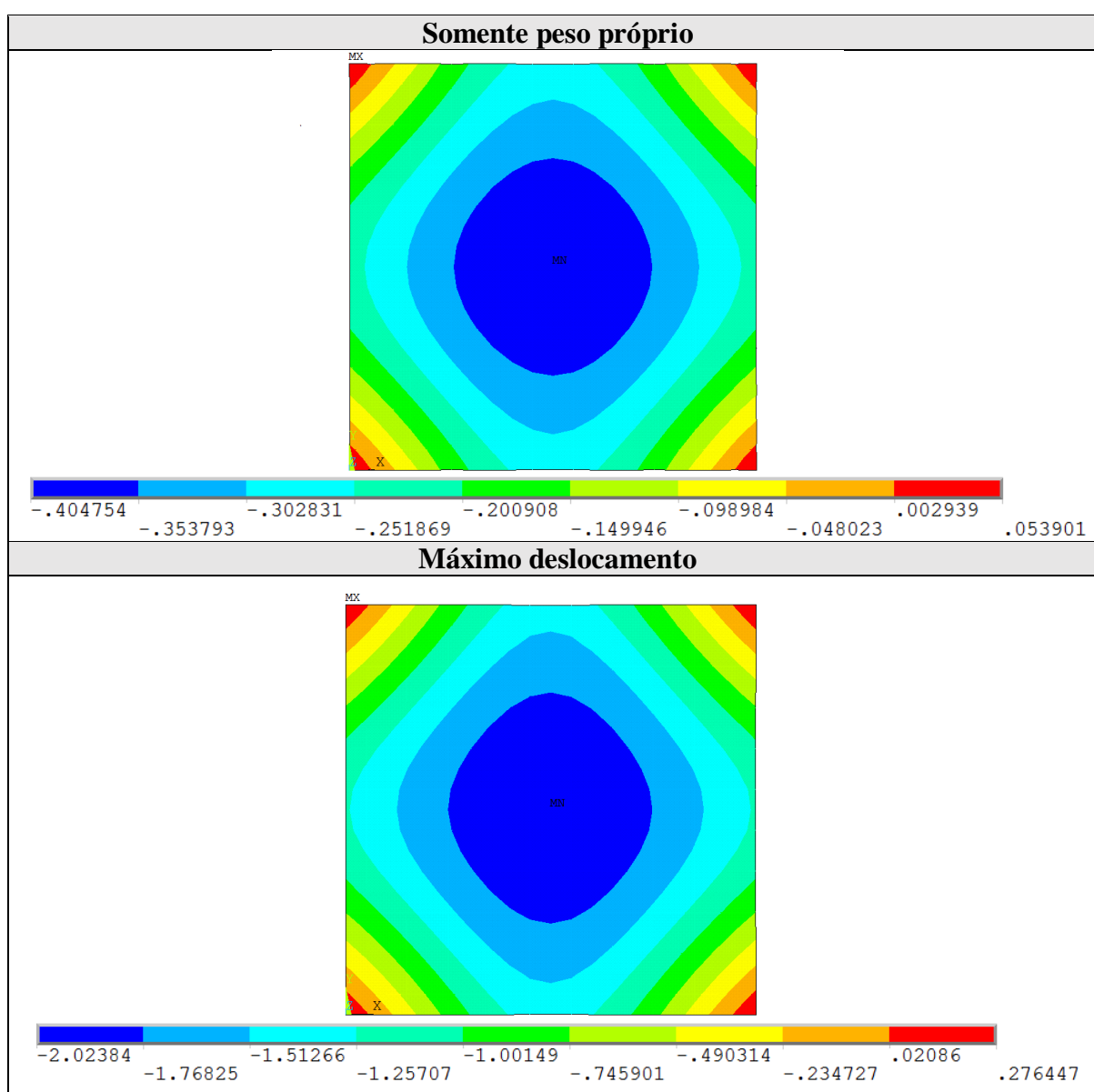


Figura 4.5 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: curvas carga-flecha

Os autores também apresentam uma solução analítica, aproximada pela teoria desenvolvida por Marcus em 1932, para lajes apoiadas por forças concentradas nos cantos e sob carregamento uniforme. Assim, a carga teórica de fissuração foi estimada para um valor de 154 kN, dado que o peso próprio da laje foi de 63 kN, a fissuração deveria ocorrer para uma carga viva de  $154 - 63 = 91$  kN. Sendo que no ensaio a primeira fissura foi observada, no ponto designado como (C) a uma carga de 104 kN, este valor coincide com o resultado computacional segundo a figura 4.5.

Quadro 4.1 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: evolução dos deslocamentos  $u_z$  (em cm)



No entanto, dado que a falha aconteceu para uma carga de 205 kN e uma tensão de protensão de  $131 \text{ kN/cm}^2$  no quarto ciclo de carregamento, vê-se que o estágio de carregamento atingido

no segundo ciclo constitui uma boa primeira aproximação para validar o modelo computacional proposto. Motivo pelo qual no decorrer deste capítulo são apresentados ensaios com históricos de deformação mais completos.

Logo no quadro 4.1 são ilustrados os deslocamentos na direção perpendicular ao plano do painel para os estágios inicial e final de carregamento, podendo-se perceber que, embora a laje na direção norte-sul tem mais cabos de protensão embaixo do plano médio que acima, a influência do peso próprio foi suficiente para induzir uma flecha negativa neste estágio de carregamento inicial, o qual foi evoluindo até o nível de carregamento aplicado, após a fissuração e antes de atingir o colapso.

#### **4.1.3.2 Representação gráfica dos resultados de tensões e momentos**

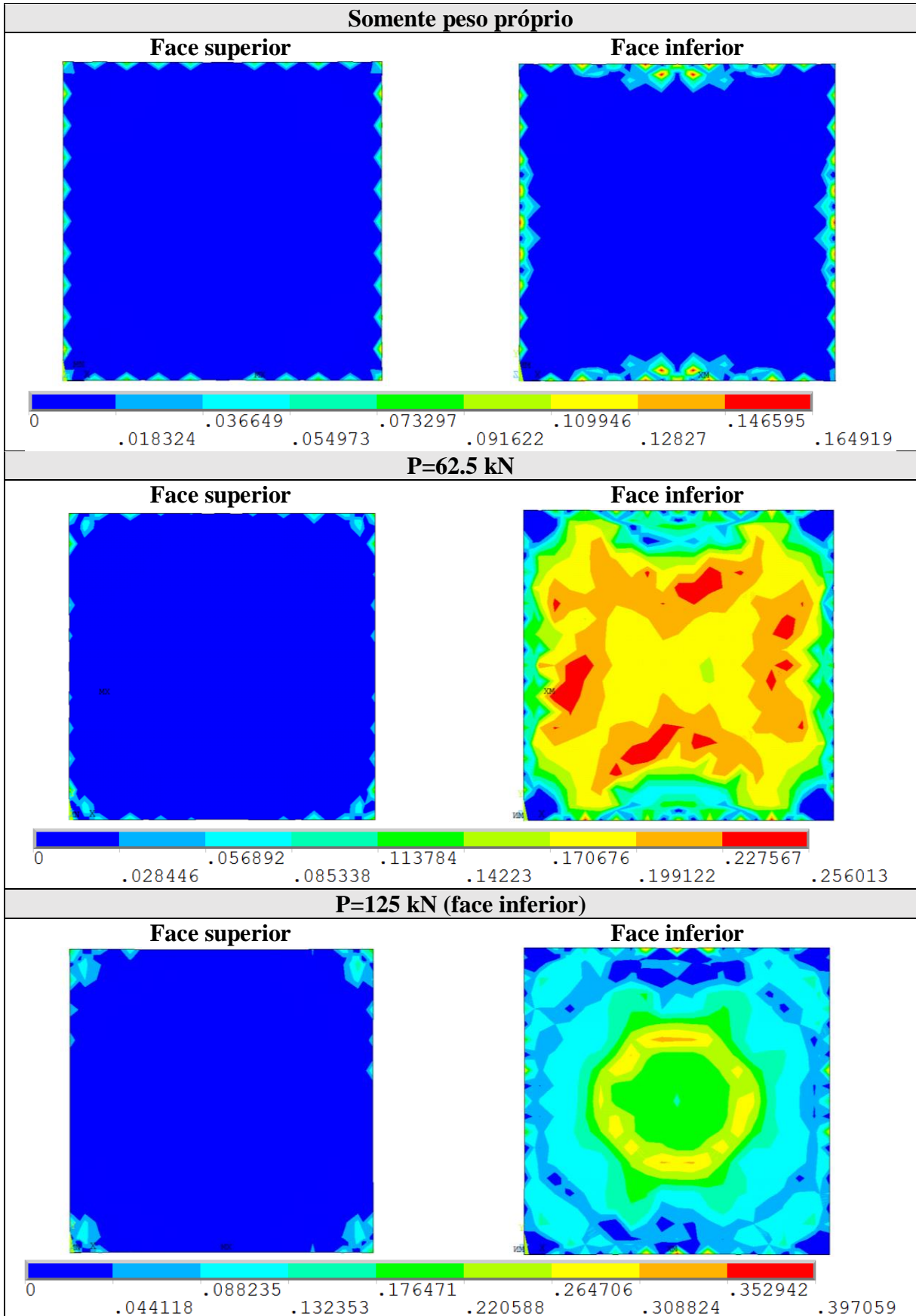
Nos quadros 4.2 e 4.3 é apresentada a evolução dos acréscimos das componentes de tensões nos elementos de concreto ao longo da aplicação do carregamento. Pode-se notar que no estágio inicial de carregamento, onde atuaram os efeitos da protensão inicial e do peso próprio, o peso próprio foi predominante então a face superior da laje encontrou-se comprimida e a face inferior se exibiu tracionada. Assim mesmo, pode-se observar que houve picos de compressão, em ambas faces, localizados nos pontos das ancoragens. Logo, nos estágios posteriores de carregamento, quando a carga de ensaio foi aplicada, as tensões se desenvolveram de maneira que a face superior e os pontos das ancoragens continuaram atingindo valores de compressão cada vez maiores, enquanto que a evolução das tensões na face inferior continuou em tração.

O quadro 4.4 fornece resultados da distribuição de momentos no estágio final de carregamento, assim como nos quadros de tensões, tem-se que os efeitos dos seis cabos localizados embaixo do plano meio da laje na direção norte-sul foram predominantes frente aos quatro cabos acima do plano médio na mesma direção.

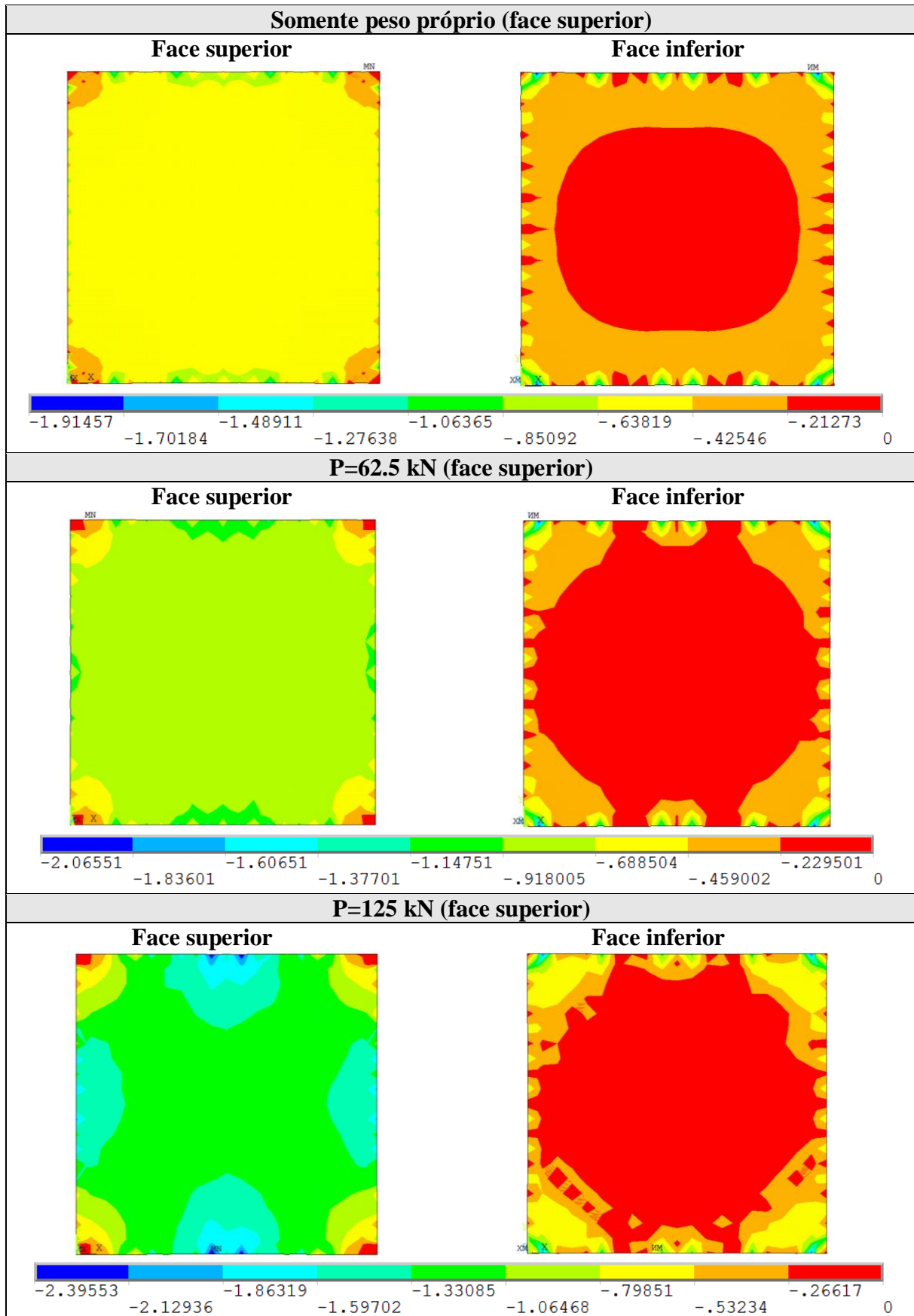
No quadro 4.5 pode-se examinar que a armadura de protensão reproduziu corretamente a condição de não-aderência com a matriz de concreto, devido a que as tensões sempre se aproximaram a um estado de valores uniformes; assim, teve-se que tanto para o estágio inicial de carregamento como para os subsequentes incrementos, as tensões se mantiveram com valores próximos à protensão efetiva inicial. Dado que os autores justificaram a utilização de pequenas parcelas de armadura adicional a fim de minimizar possíveis falhas locais nos apoios, se conferiu que, mesmo depois da fissuração, os valores de tensão destes elementos foram menores que a tensão de escoamento do aço.



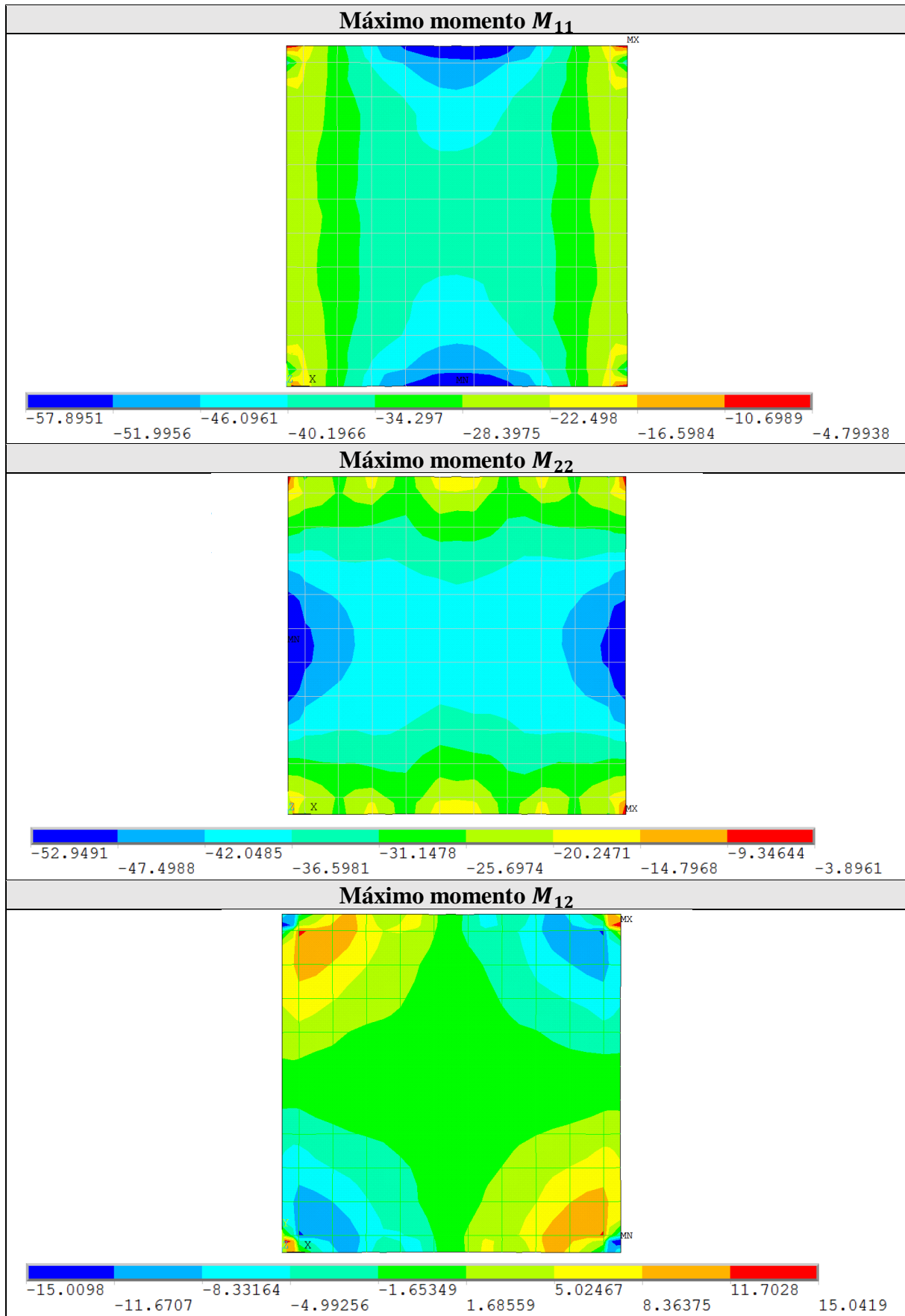
Quadro 4.2 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_1$  dos elementos de concreto (em kN/cm<sup>2</sup>)



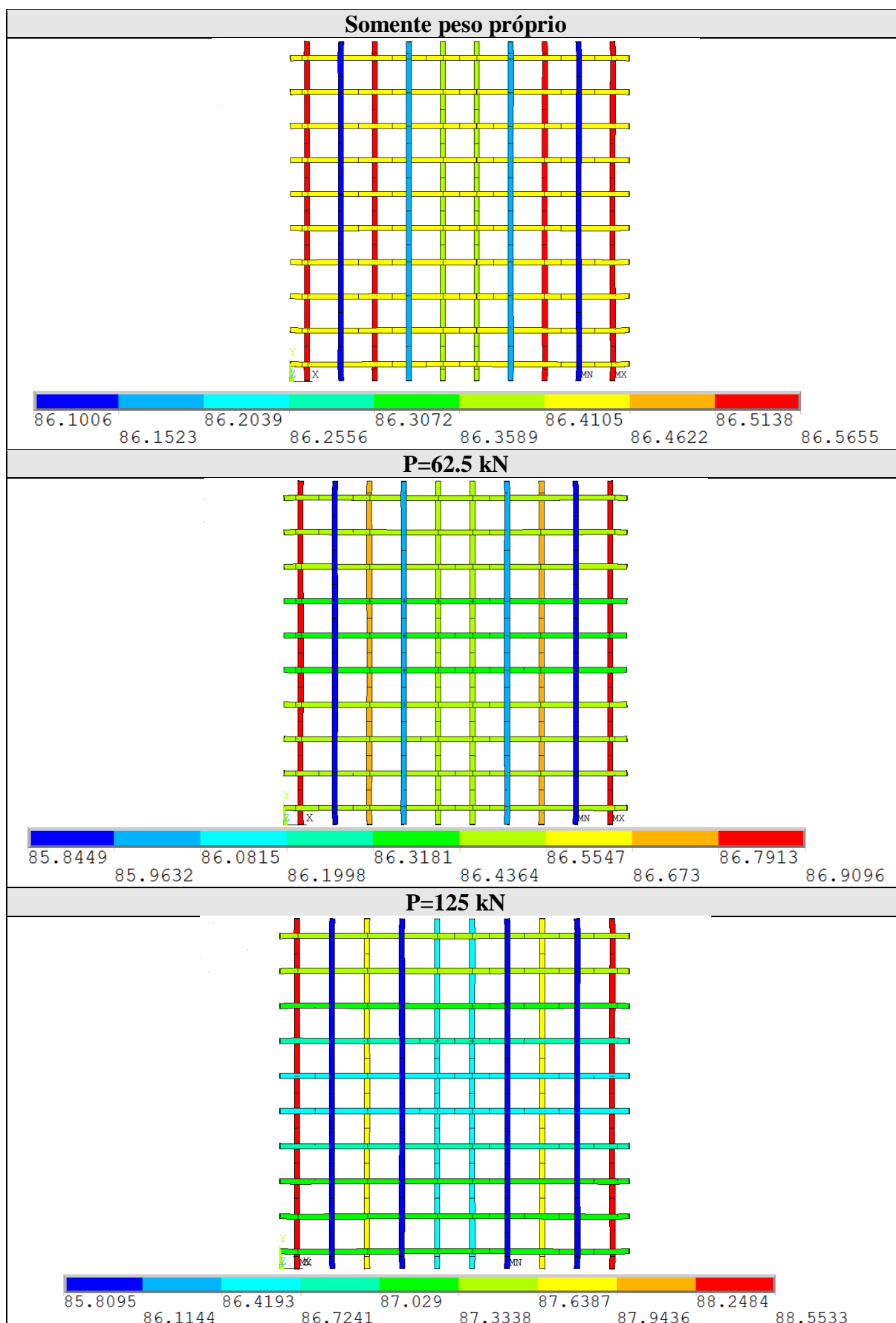
Quadro 4.3 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_3$  dos elementos de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )



Quadro 4.4 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: distribuição de momentos  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  e  $M_{12}$  do modelo (em kN-cm)



Quadro 4.5 – Laje de Scordelis, Pister e Lin: evolução das tensões na armadura de protensão (em  $\text{kN/cm}^2$ )

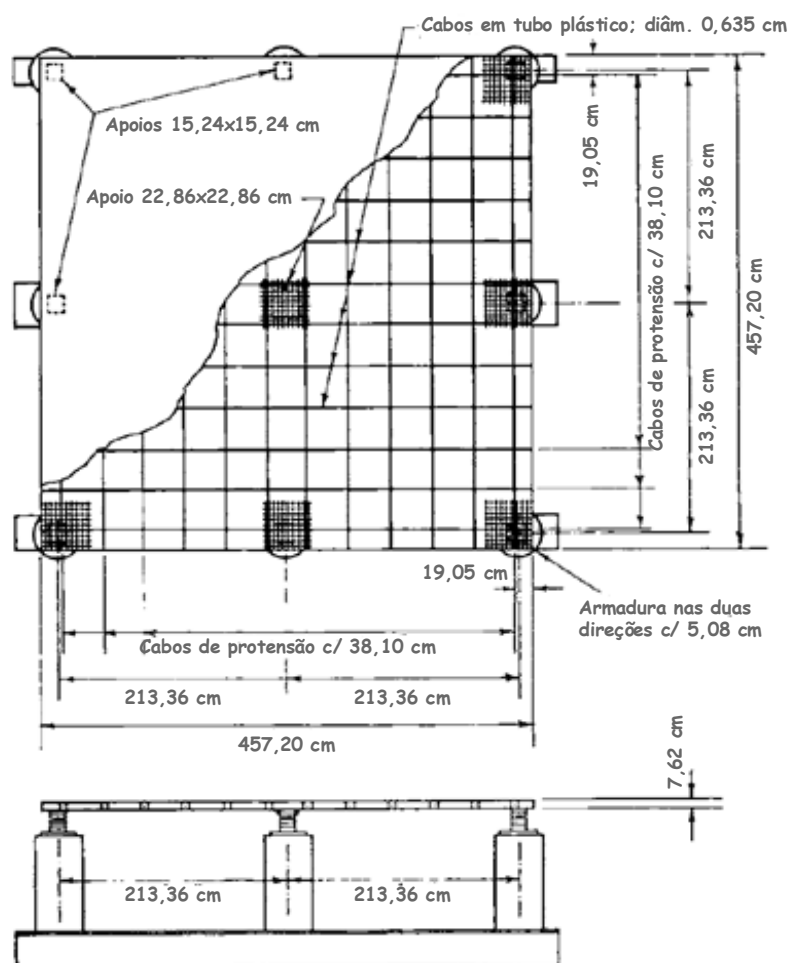


## 4.2 LAJE DE SCORDELIS, LIN E ITAYA (1959)

Devido ao crescente uso do sistema protendido bidirecional em lajes de concreto na época, Scordelis, Lin e Itaya (1959) apresentaram uma pesquisa cujo propósito foi estudar o comportamento, prévio e posterior ao limite elástico, de uma laje de concreto, maciça e quadrada, dividida em quatro painéis, com protensão não-aderente nas duas direções, submetida a um carregamento uniformemente distribuído e apoiada em nove pontos.

### 4.2.1 Características geométricas e propriedades dos materiais

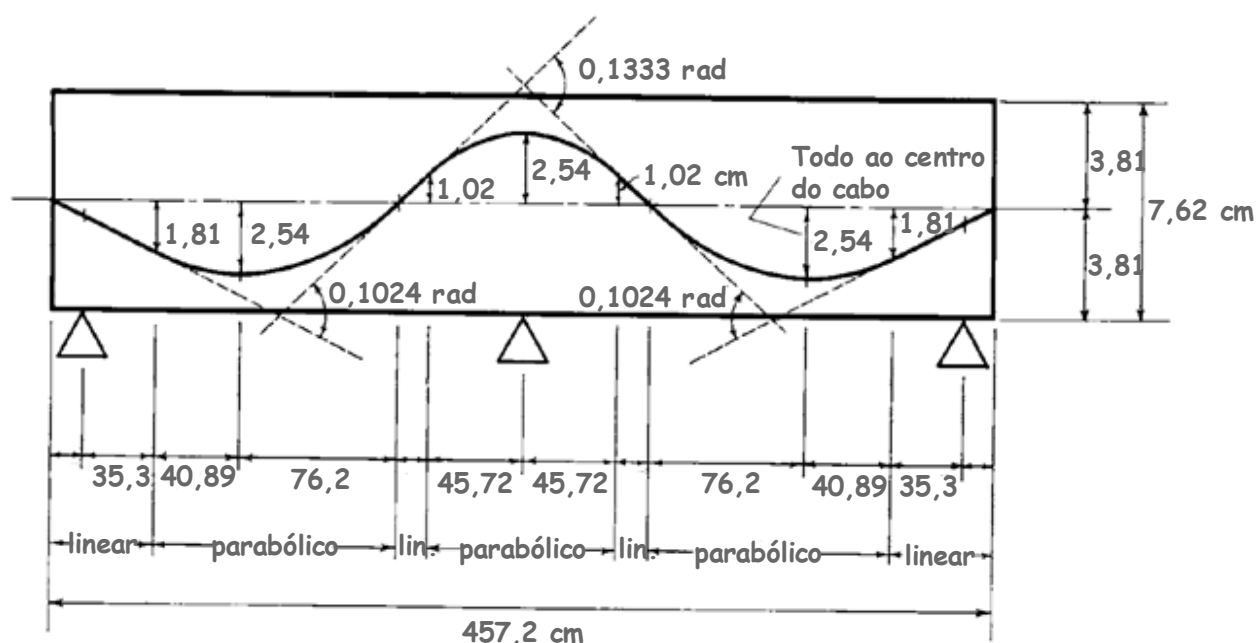
O espécime, figura 4.6, teve medidas em plano de 457,2x457,2 cm no plano e 7,62 cm de espessura. Os apoios foram distanciados em 213,36 cm nas duas direções. O espécime foi uma representação, das lajes de uso geral na época, em escala de um terço. Um arranjo de balancim e roletes em cada ponto de apoio permitiram os deslocamentos e rotações necessários.



(fonte: Scordelis, Lin e Itaya, 1959)

Figura 4.6 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: plano e elevação da laje mostrando arranjo da armadura

A laje foi protendida com doze cabos em cada direção, espaçados 38.10 cm. Cada cabo consistiu de um único fio de alta resistência, de 0.635 cm de diâmetro e contido no interior de um tubo para prover o efeito de não-aderência. O perfil de todos os cabos nas duas direções é mostrado na figura 4.7.



(fonte: Scordelis, Lin e Itaya, 1959)

Figura 4.7 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: perfil dos cabos de protensão

Em adição à armadura protendida, pequenas parcelas de armadura passiva foram colocadas na região de cada apoio para cobrir uma área de 45,72x45,72 cm. Esta armadura adicional foi incluída para ajudar a prevenir falhas locais nos apoios.

O concreto da laje foi proporcionado para ter uma resistência mínima à compressão de 3,45 kN/cm<sup>2</sup> aos 28 dias. Dados adicionais como o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são incluídos na tabela 4.2 junto com as informações das propriedades mecânicas das armaduras.

O programa experimental foi projetado com vários estágios de carregamento em ordem cronológica, sendo abordados diferentes casos de carregamento e protensão. O modelo analisado considerou o caso da protensão uniforme gradualmente aplicada em todos os cabos até atingir um valor efetivo de 96,53 kN/cm<sup>2</sup> aos 28 dias e o posterior ensaio de uma carga uniformemente distribuída, nos quatro painéis, até culminar no colapso do espécime.

Tabela 4.2 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: parâmetros mecânicos e geométricos

Parâmetros			Espécime	
Geométricos	LAJE – SHELL281			
	Comprimento	(cm)	$L$	457,2
	Espessura	(cm)	$h_f$	7,62
	ARMADURA PROTENDIDA – LINK180			
	Área da armadura	(cm <sup>2</sup> )	$A_p$	0,317
	Altura útil	(cm)	$d_p$	Variável
	Espaçamento	(cm)	$s_p$	38,10
	ARMADURA PASSIVA – REINF264			
	Área da armadura	(cm <sup>2</sup> )	$A_s$	0,031
	Altura útil	(cm)	$d$	3,81
	Espaçamento	(cm)	$s$	5,08
Mecânicos	CONCRETO – USERMATPS			
	Resistência última à compressão	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_c$	3,45
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_c$	2861
	Coefficiente de Poisson		$\mu_c$	0,20
	AÇO DA ARMADURA PROTENDIDA – USERMAT1D			
	Tensão de ruptura	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_{ptk}$	150,31
	Tensão inicial após perdas	(kN/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{p0}$	96,53
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_p$	19581
	Coefficiente de Poisson		$\mu_p$	0,30
	AÇO DA ARMADURA PASSIVA – BISO			
	Tensão de escoamento	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_y$	27,58
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_s$	21000
	Coefficiente de Poisson		$\mu_s$	0,30

#### 4.2.2 Modelo de elementos finitos

Para a malha de elementos finitos admitiu-se a geometria da laje inteira. A vinculação dos nós na borda da laje foi configurada de maneira a permitir o deslocamento no plano em direção ao médio do vão e restringir o deslocamento na direção vertical, já para o nó do apoio localizado no médio da laje foram restringidos os deslocamentos no plano e na direção vertical. Quanto às condições de carregamento, além dos efeitos da protensão e da carga do ensaio, foi considerado o efeito do peso próprio como uma carga de curta duração.

O estudo da influência da discretização definiu adotar, para a laje de concreto, dois elementos de casca SHELL281 em cada trecho delimitado por cabos de protensão nas duas direções. Foram definidos vinte pontos de integração em cada elemento, quatro pontos de integração no plano e uma camada de cinco pontos de integração ao longo da espessura. No caso dos cabos parabólicos de protensão, foram considerados como armadura discreta e modelados com

trechos retos do elemento LINK180 fazendo coincidir seus nós com os nós dos elementos de casca na direção vertical (figura 4.8a).

A excentricidade das ancoragens, em relação à face inferior da laje, foi admitida e modelada com vínculos rígidos do elemento MPC184. A condição de não-aderência entre cabos e matriz de concreto foi assimilada pela aplicação o comando CP, liberando o grau de liberdade na direção longitudinal dos cabos, e evitando a coincidência de nós em pontos de interseção.

A armadura foi considerada com comportamento elastoplástico perfeito e foi modelada como armadura incorporada REINF264 no interior dos elementos de casca próximos aos apoios. Todos estes detalhes são ilustrados na figura 4.8b e o correspondente script para entrada de dados está descrito no Apêndice A.3.

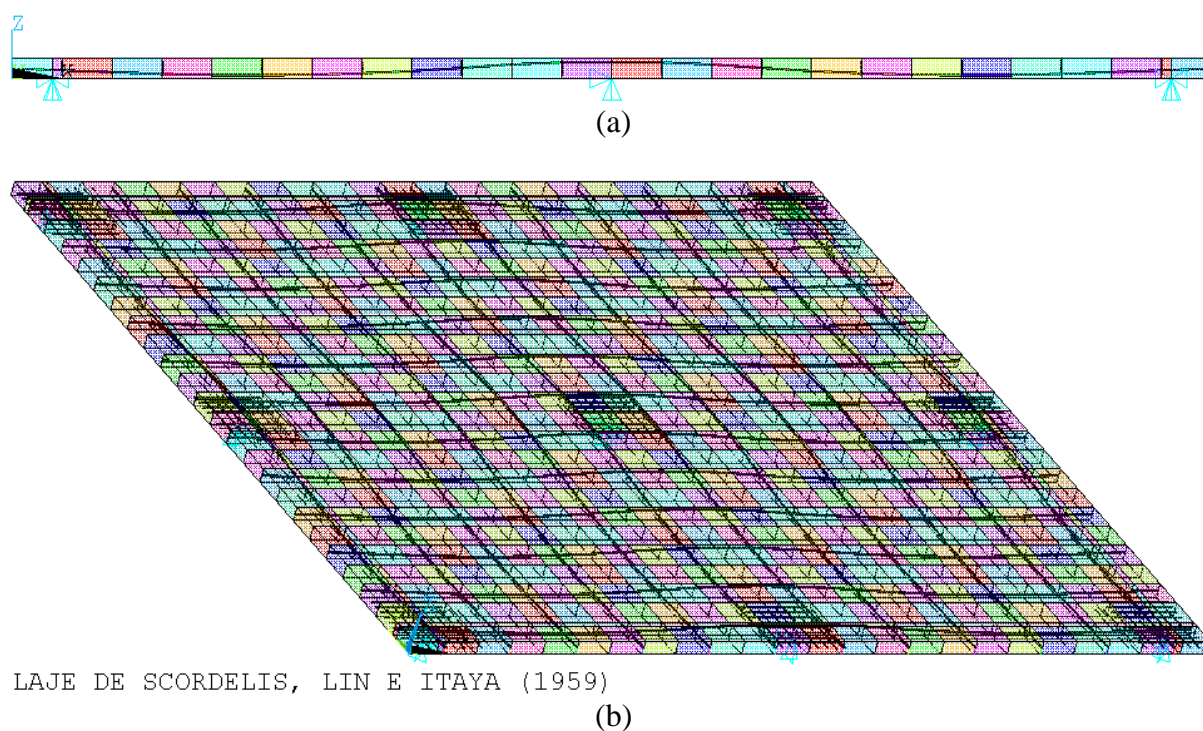


Figura 4.8 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: a) perfil dos cabos de protensão; b) vista tridimensional do modelo

### 4.2.3 Comparação de resultados

A análise feita considerou duas etapas de carregamentos instantâneos, na primeira etapa foi aplicada a protensão junto com o peso próprio e, na segunda etapa, a carga uniformemente distribuída. Para comparar os resultados obtidos por aproximação numérica com valores experimentais, foram descontadas as parcelas correspondentes ao peso próprio.



Além disso, para conseguir o comportamento desejado a partir da fissuração, os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\varepsilon_{cTU}$ , próprios do efeito de enrijecimento à tração da expressão (2.38) foram definidos como 0,95 e 0,001 respectivamente. Por sua vez, o parâmetro de endurecimento da protensão foi definido conforme à expressão (4.1).

#### 4.2.3.1 Representação gráfica dos resultados de flechas

Os resultados da figura 4.9 mostram boa correlação entre resultados numéricos e experimentais da relação entre carga total e flecha medida no médio do vão nos quatro painéis. Pode-se notar que os resultados experimentais do painel 3 diferem com os resultados dos outros painéis, esta situação se explica por variabilidades comuns inerentes ao ensaio experimental que terminam repercutindo no afastamento apreciável com os resultados numéricos do painel mencionado.

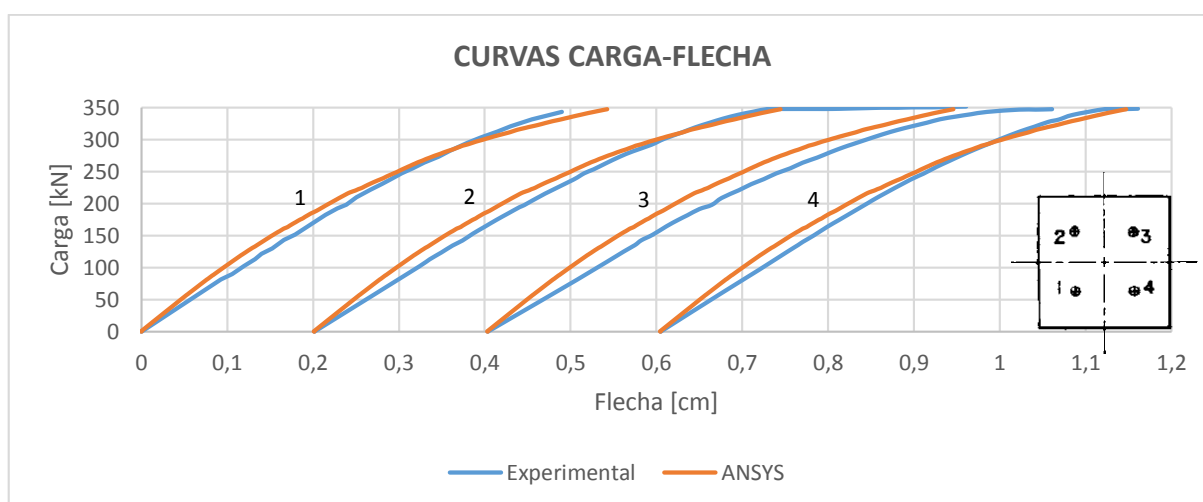
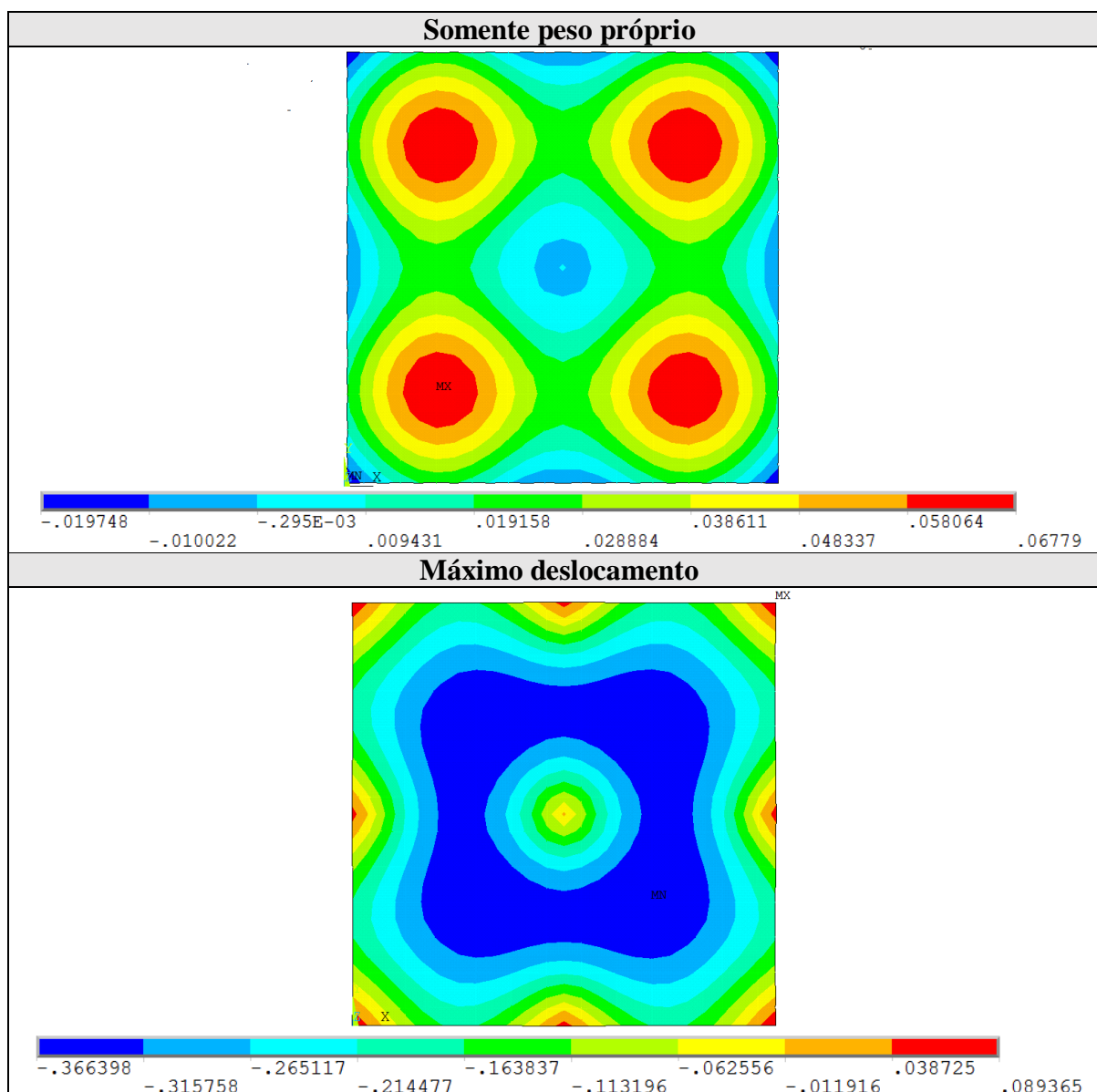


Figura 4.9 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: curvas carga-flecha

Os autores também expõem que a laje foi desenhada com a teoria elástica de vigas, sendo que a carga total teórica de fissuração foi estimada para um valor de 194 kN. A carga total teórica de colapso da laje foi deduzida pela teoria da linha elástica de lajes encontrando que com uma carga permanente de 38 kN a carga de ruptura foi de 347 kN.

No quadro 4.6 são apresentados os deslocamentos na direção perpendicular aos painéis para os estágios inicial e final de carregamento. Pode-se examinar que no estágio inicial de carregamento, quando a laje foi submetida apenas à força da armadura de protensão e ao peso próprio, foram formadas flechas positivas no médio dos painéis. Como resultado da aplicação de carga uniformemente distribuída até a ruptura, se evidencia a inversão da flecha.

Quadro 4.6 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: evolução dos deslocamentos  $u_z$  (em cm)

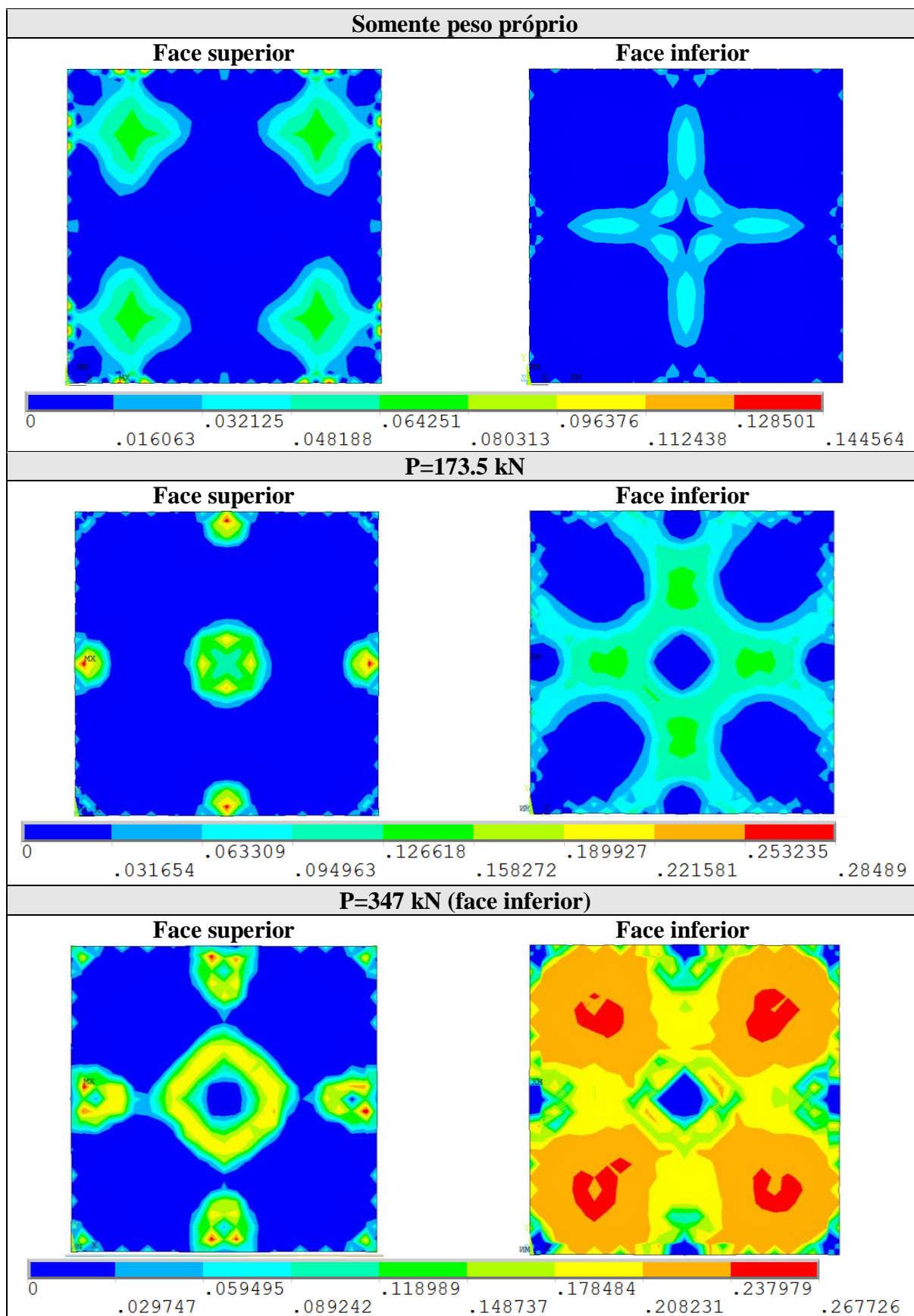
#### 4.2.3.2 Representação gráfica dos resultados de tensões e momentos

No quadro 4.7 e 4.8 tem-se a evolução dos acréscimos das componentes de tensão dos elementos de concreto, junto com a distribuição de momentos no quadro 4.9. Pode-se constatar que no estágio inicial de carregamento o efeito da protensão foi predominante frente ao peso próprio, os painéis ficaram tracionados na face superior e comprimidos na face inferior. Do mesmo modo, evidenciam-se tensões de compressão significativas nos pontos das ancoragens em ambas faces. Com a atuação da carga uniformemente distribuída, destaca-se que os vãos dos painéis viraram para ficar comprimidos na face superior e tracionados na face inferior e, como era de se esperar, as tensões nos apoios tornaram-se contrárias aos vãos. A falha ocorreu no apoio localizado no centro da laje após uma excessiva deformação de fissuração por flexão

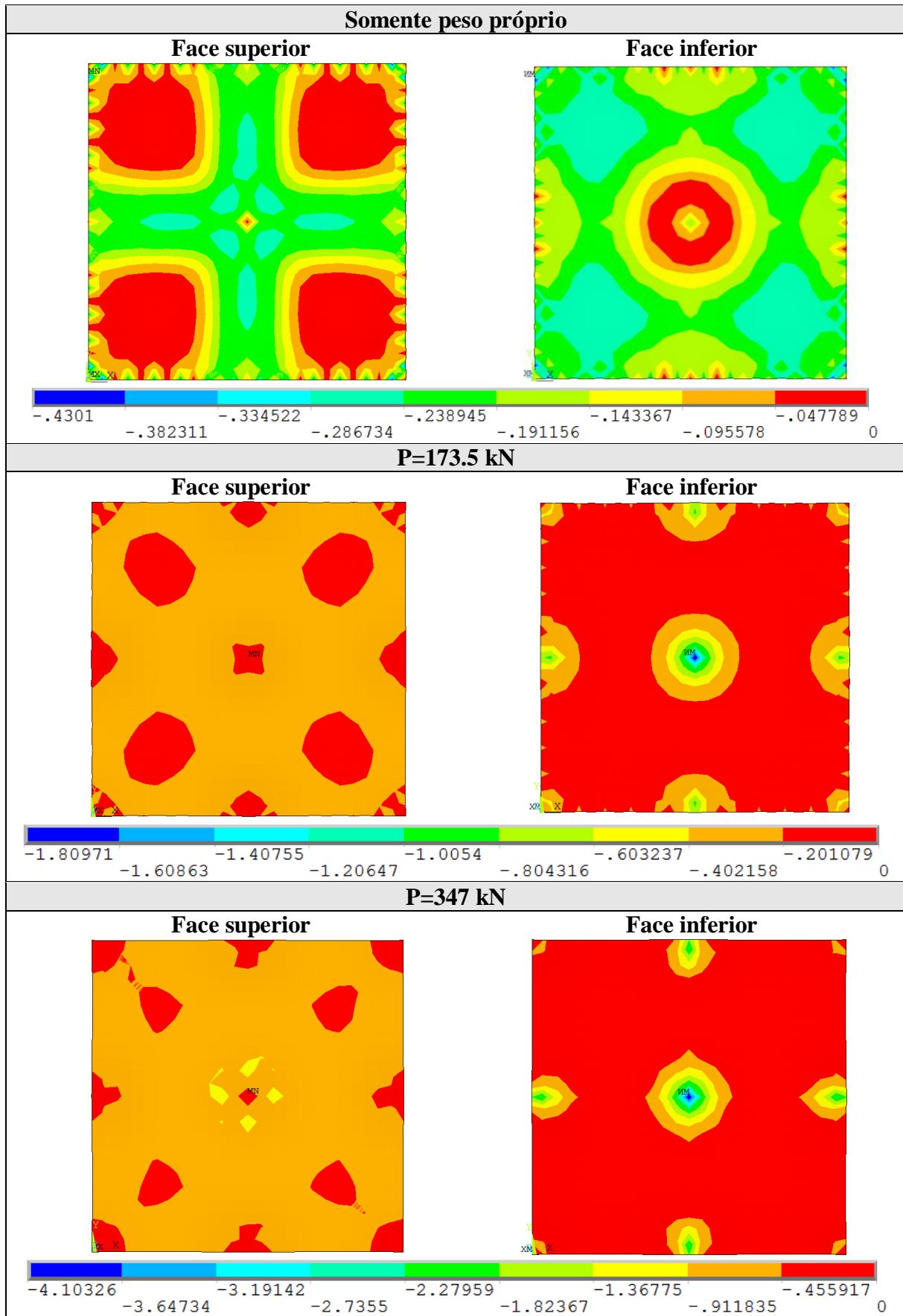
em torno de 365 kN da carga total; note-se que o valor da tensão neste ponto ultrapassou o valor limite da resistência à compressão do concreto, essa variação é resultante do processo de suavização das tensões adotado pelo ANSYS onde as tensões calculadas nos pontos de integração são extrapoladas para os nós.

De acordo com o quadro 4.10, a condição de não-aderência entre os cabos de protensão e a matriz de concreto foi cumprida, as tensões das armaduras protendidas foram uniformes nas diferentes etapas de carregamento sendo que na falha da laje se atingiram valores menores que a tensão de ruptura do aço. Tal como os autores manifestaram, a armadura passiva adicional foi utilizada a fim de prevenir falhas locais nos apoios, fazendo com que as tensões atingidas no último estágio de carregamento foram menores que a tensão de escoamento.

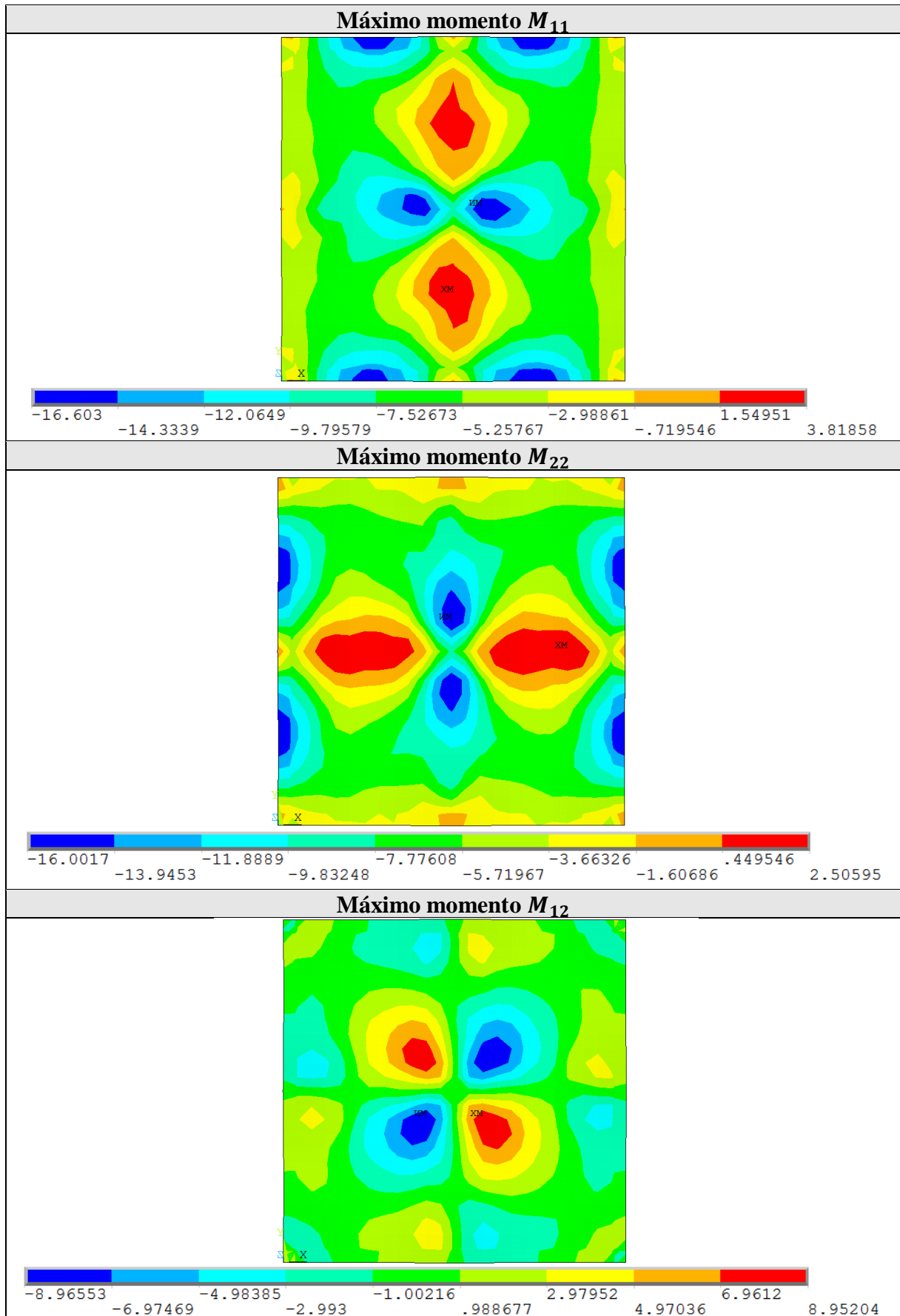
Quadro 4.7 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_1$  dos elementos de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )



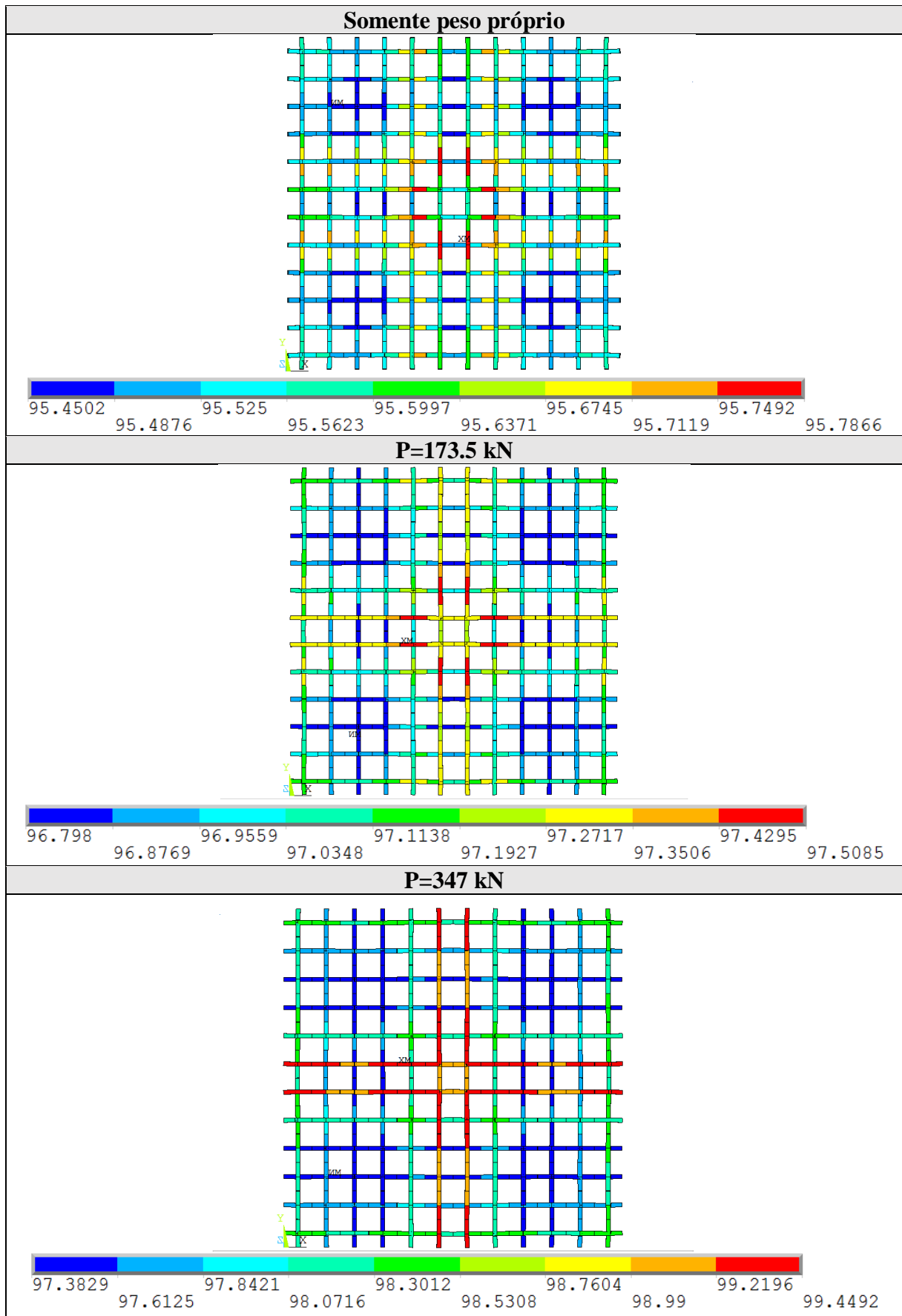
Quadro 4.8 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_3$  dos elementos de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )



Quadro 4.9 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: distribuição de momentos  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  e  $M_{12}$  do modelo (em kN-cm)



Quadro 4.10 – Laje de Scordelis, Lin e Itaya: evolução das tensões na armadura de protensão (em  $\text{kN/cm}^2$ )

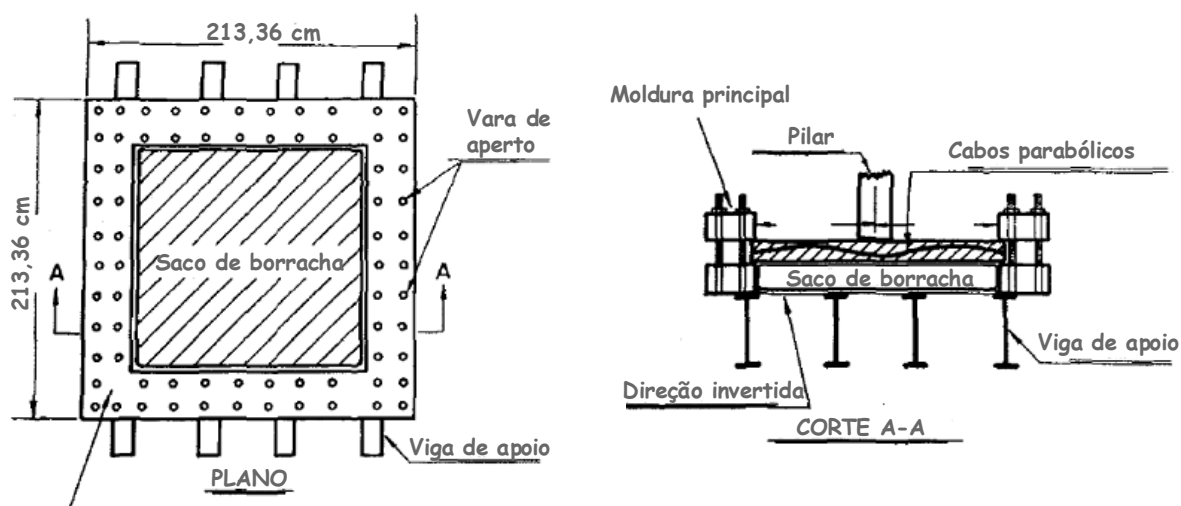


### 4.3 LAJES DE NAWY E CHAKRABARTI (1976)

Consequência dos consideráveis avanços que houveram no projeto e construção de sistemas de protensão bidirecional em lajes de concreto, Nawy e Chakrabarti (1976) prestaram atenção no estudo do comportamento das deflexões. Os resultados reportados da pesquisa foram conduzidos experimentalmente em quatro espécimes, denominados RP-1 a RP-4, lajes apoiadas em um pilar no médio e simplesmente apoiadas no contorno, submetidas a carregamento uniformemente distribuído e com variações no espaçamento dos cabos de protensão não-aderente nas duas direções. Para propósitos do presente trabalho, é analisado o espécime RP-1.

#### 4.3.1 Características geométricas e propriedades dos materiais

Todos os espécimes tiveram as mesmas dimensões geométricas, uma laje de 160,02x160,02 cm com vão livre de 154,2 cm e 3,30 cm de espessura. Conforme o esquema base apresentado na figura 4.10, uma bolsa especial permitiu aplicar a carga uniforme, um pilar de 10,16x10,16 cm de área foi localizado no médio do vão da laje para servir como apoio e, assim mesmo, os bordos foram impedidos a se deslocarem na direção vertical.

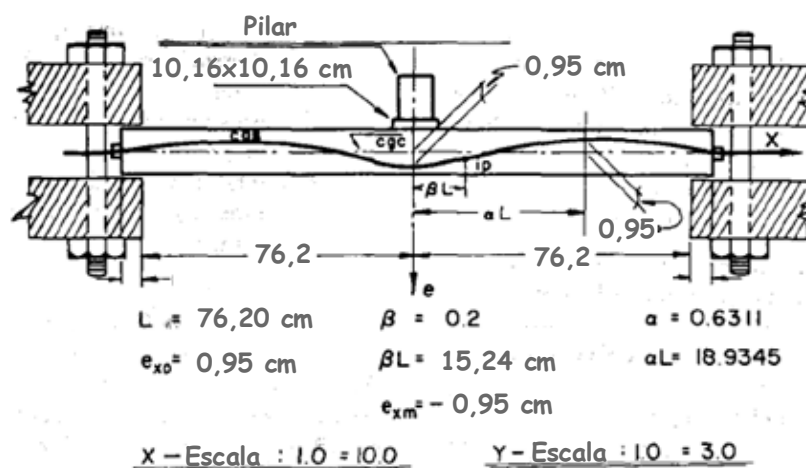


(fonte: Nawy e Chakrabarti, 1976)

Figura 4.10 – Lajes de Nawy e Chakrabarti: plano e elevação da laje mostrando arranjo da armadura

A laje RP-1 foi protendida com doze cabos uniformemente distribuídos em cada direção, cujos perfis são ilustrados na figura 4.11, e, a fim de evitar falhas locais nos apoios, foram reforçadas com duas capas de fios de aço na região do pilar de apoio para cobrir uma área de 35,56x35,56 cm.





(fonte: Nawy e Chakrabarti, 1976)

Figura 4.11 – Lajes de Nawy e Chakrabarti: perfil dos cabos de protensão

As propriedades mecânicas do concreto e das armaduras do espécime RP-1 são detalhadas na tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Lajes de Nawy e Chakrabarti: parâmetros mecânicos e geométricos

		Parâmetros		Espécime RP-1
Geométricos	LAJE – SHELL281			
	Comprimento	(cm)	$L$	152,4
	Espessura	(cm)	$h_f$	3,30
	ARMADURA PROTENDIDA – LINK180			
	Área da armadura	(cm <sup>2</sup> )	$A_p$	0,072968
	Altura útil	(cm)	$d_p$	Variável
	Espaçamento	(cm)	$s_p$	12,70
	ARMADURA PASSIVA – REINF264			
	Área da armadura	(cm <sup>2</sup> )	$A_s$	0,054645
	Altura útil no pilar/na mesa	(cm)	$d$	2,30/-
Espaçamento no pilar/na mesa	(cm)	$s$	3,18/-	
Mecânicos	CONCRETO – USERMATPS			
	Resistência última à compressão	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_c$	2,76
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_c$	2482
	Coefficiente de Poisson		$\mu_c$	0,17
	AÇO DA ARMADURA PROTENDIDA – USERMAT1D			
	Tensão de ruptura	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_{ptk}$	187,54
	Tensão inicial após perdas	(kN/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{p0}$	106,53
	Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_p$	20684
	Coefficiente de Poisson		$\mu_p$	0,30
	AÇO DA ARMADURA PASSIVA – BISO			
	Tensão de escoamento	(kN/cm <sup>2</sup> )	$f_y$	51,71
Módulo de elasticidade	(kN/cm <sup>2</sup> )	$E_s$	19995	
Coefficiente de Poisson		$\mu_s$	0,30	

### 4.3.2 Modelo de elementos finitos

A influência da discretização foi estudada considerando a geometria inteira da laje. A região do apoio do pilar foi restringida na direção vertical e no plano, por sua vez, as bordas foram restringidas na direção vertical, conforme apresentado na figura 4.12. A fim de manter a mesma convenção de visualização em modelos anteriores, o esquema da figura 4.10 foi modelado no sentido contrário, assim, a carga uniformemente distribuída foi aplicada na face superior da laje junto com o peso próprio e os efeitos devidos à protensão.

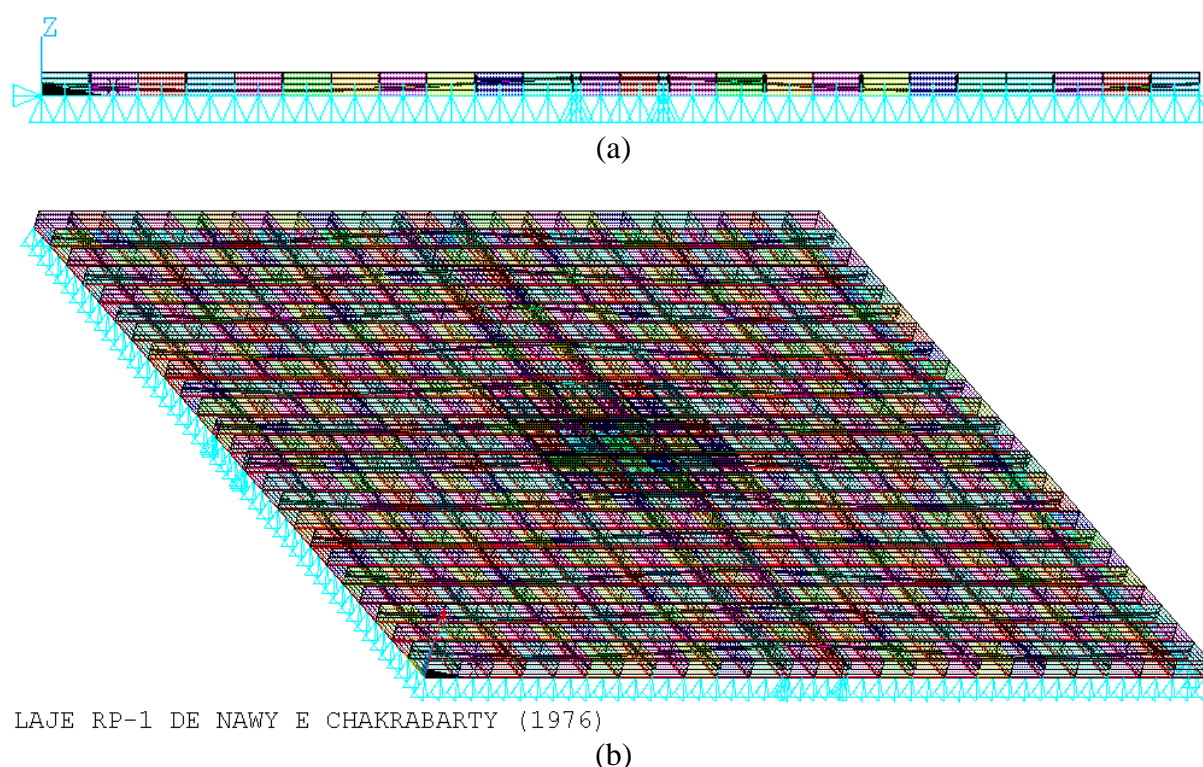


Figura 4.12 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: a) perfil dos cabos de protensão; b) vista tridimensional do modelo

Foi proposto trabalhar dois modelos para o espécime RP-1. Sendo que o requisito mínimo do ANSYS para desenvolver análises não-lineares com elementos finitos de casca SHELL281 em uma camada exige cinco pontos de integração ao longo de sua espessura, esta configuração reproduziu bons resultados em modelos anteriormente analisados e foi adotada como Modelo B, considerando ademais, o apoio do pilar apenas em um ponto. Chamou-se Modelo A à malha de elementos de casca definidos em quatro camadas, com um ponto de integração ao longo da espessura de cada camada, e cuja discretização considerou a região do pilar de apoio.

Em ambos modelos foram adotados dois elementos de casca em cada trecho entre cabos de protensão e, conseqüentemente, os cabos de protensão foram modelados, como armadura discreta por trechos retos de elementos de treliça LINK180, tendo a mesma dimensão no plano que os elementos de casca para coincidir seus nós na direção vertical.

Uma vez mais, a excentricidade dos pontos das ancoragens foi admitida e modelada com elementos rígidos MPC184. A condição de não-aderência entre cabos de protensão e a matriz de concreto foi satisfeita através do comando CP, evitando o acoplamento do grau de liberdade na translação no sentido longitudinal dos cabos.

A armadura passiva foi admitida tendo comportamento elastoplástico perfeito e foi modelada como armadura incorporada REINF264 no interior dos elementos de casca.

### **4.3.3 Comparação de resultados**

Para comparar com os valores experimentais, os valores obtidos computacionalmente são os valores líquidos, ou seja, são descontadas as parcelas correspondentes ao peso próprio.

O parâmetro de endurecimento da protensão foi definido com comportamento elastoplástico perfeito conforme à expressão (4.1).

Além disso, viu-se que a altura útil da armadura passiva no pilar afetava sensivelmente na inclinação da curva carga-flecha antes da fissuração e, do mesmo jeito, o número de camadas superior a um afetava na inclinação da mencionada curva após a fissuração.

#### **4.3.3.1 Representação gráfica dos resultados de flechas**

A figura 4.13 mostra os diagramas da relação entre carga total aplicada e flechas medidas em diferentes pontos de um dos painéis. Pode-se observar que os resultados numéricos obtidos pelo Modelo A se aproximaram mais aos resultados experimentais.

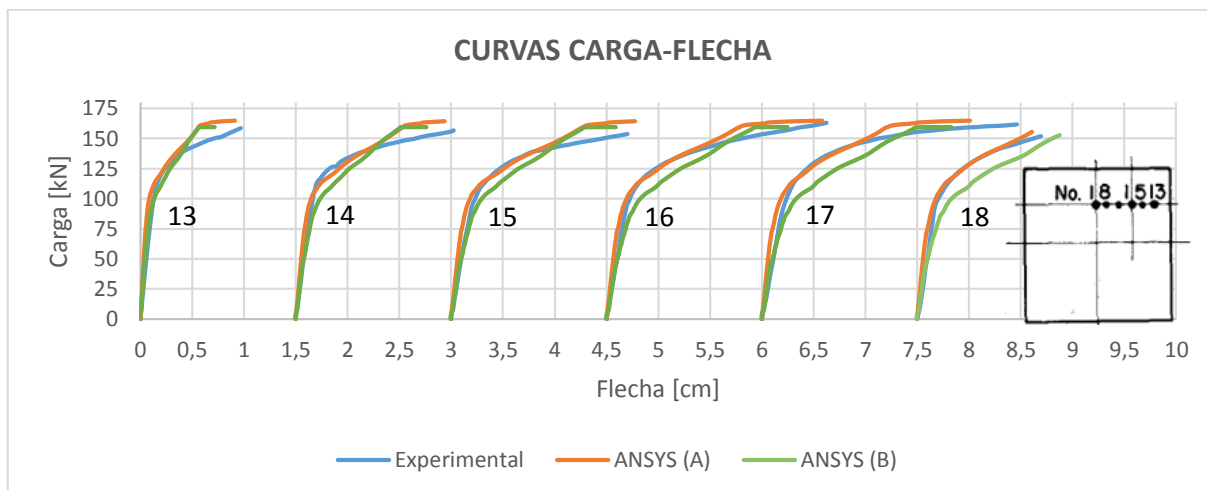
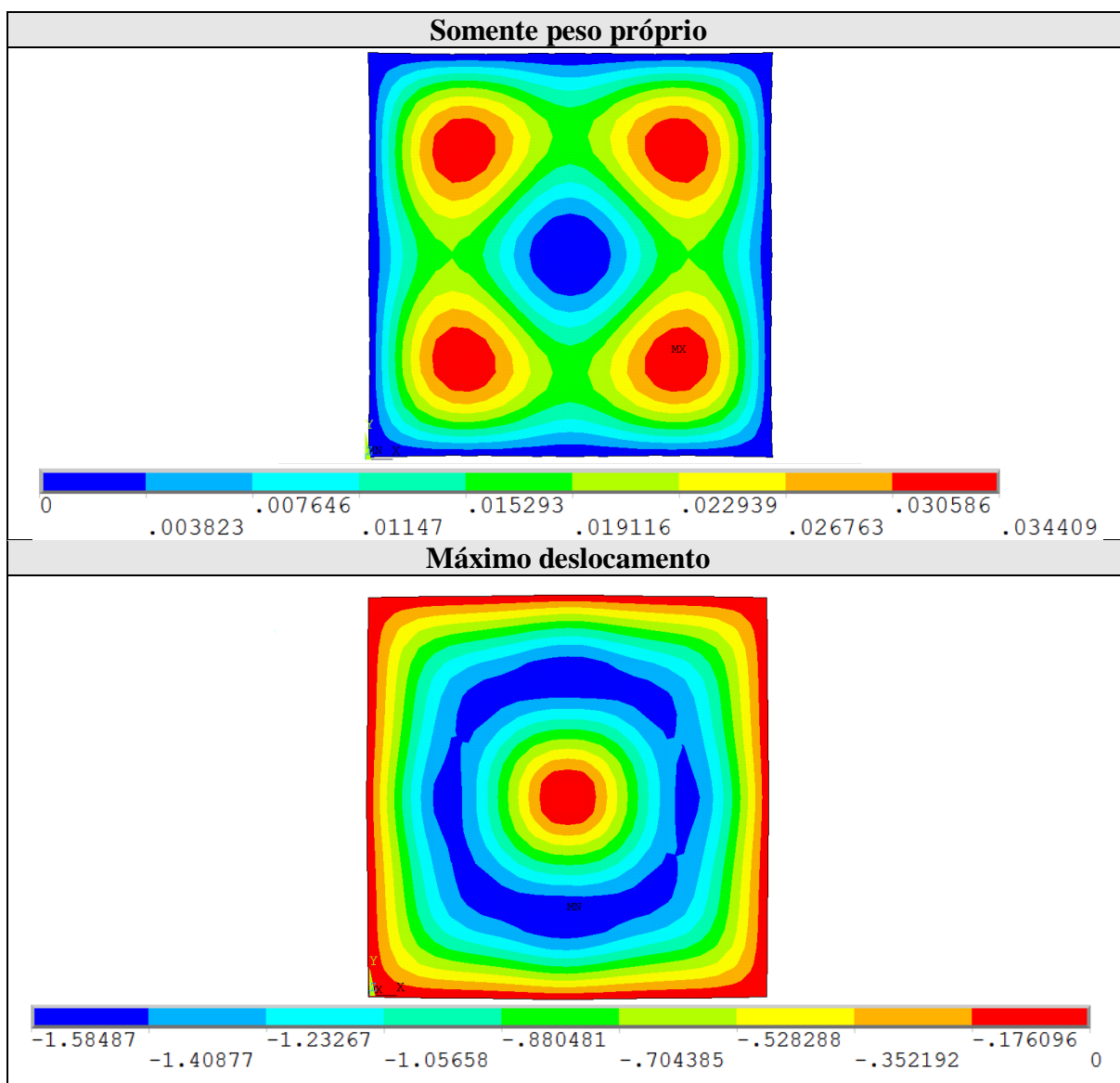
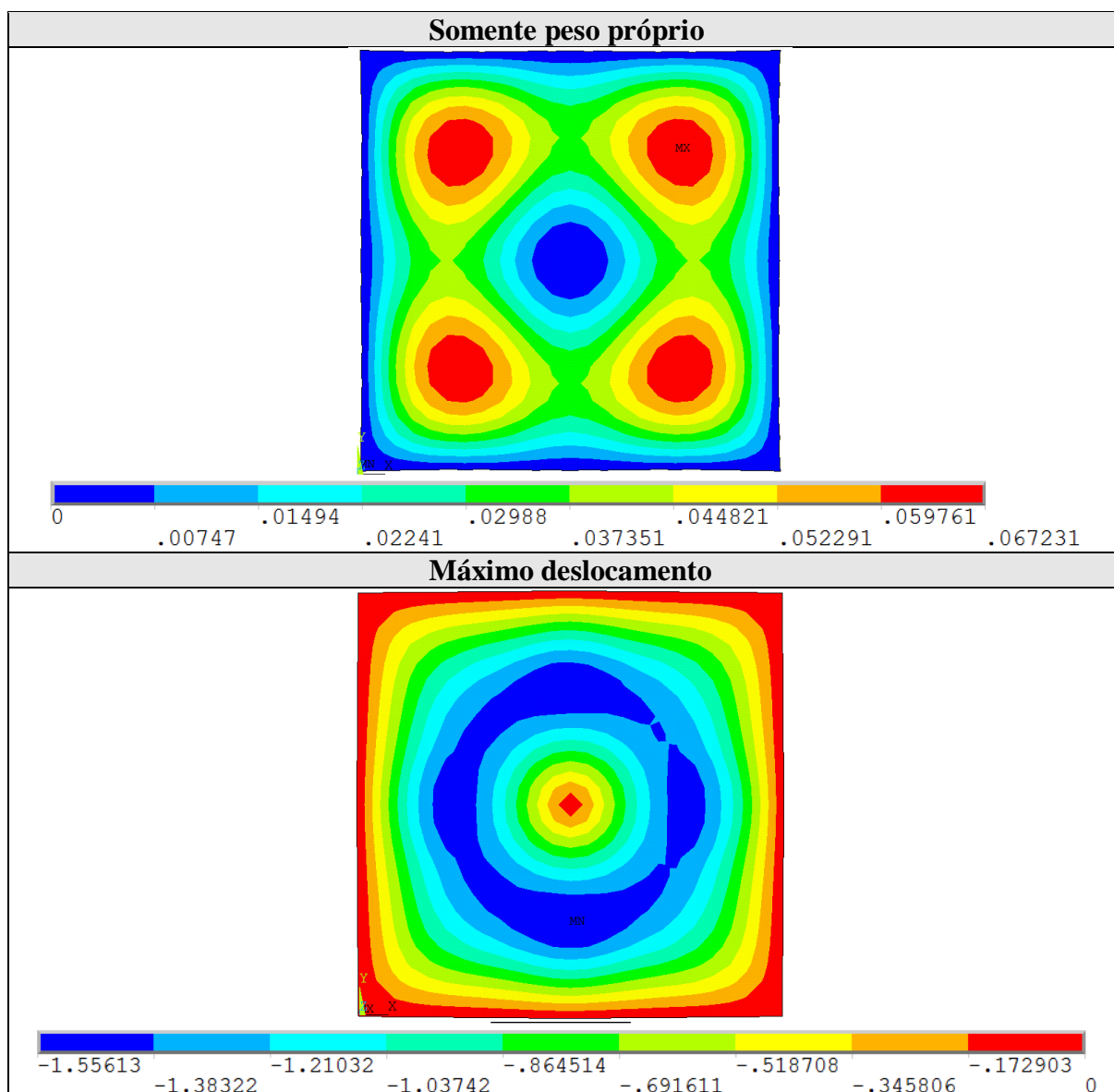


Figura 4.13 – Laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: curvas carga-flecha

Quadro 4.11 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução das deformações (em cm)



Quadro 4.12 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução das deformações (em cm)



Além dos Modelos A e B foi testado um terceiro modelo considerando a geometria do pilar de apoio, como no Modelo A, mas, com a discretização da malha de elementos finitos do Modelo B, conferiu-se que as flechas ficaram com valores notavelmente menores que os experimentais após a fissuração, motivo pelo qual esse último modelo não foi apresentado nos resultados.

Logo, nos quadros 4.11 e 4.12, tem-se os resultados das deformações dos painéis do espécime, obtidos por ambos modelos, para os estágios inicial e final de carregamento. Pode-se perceber que no estágio de carregamento inicial, quando foi aplicada a protensão junto com o peso próprio, os vãos de ambos espécimes ficaram com flechas positivos e, no decorrer do carregamento, tem-se que no estágio final os vãos se mostraram com flechas negativas.

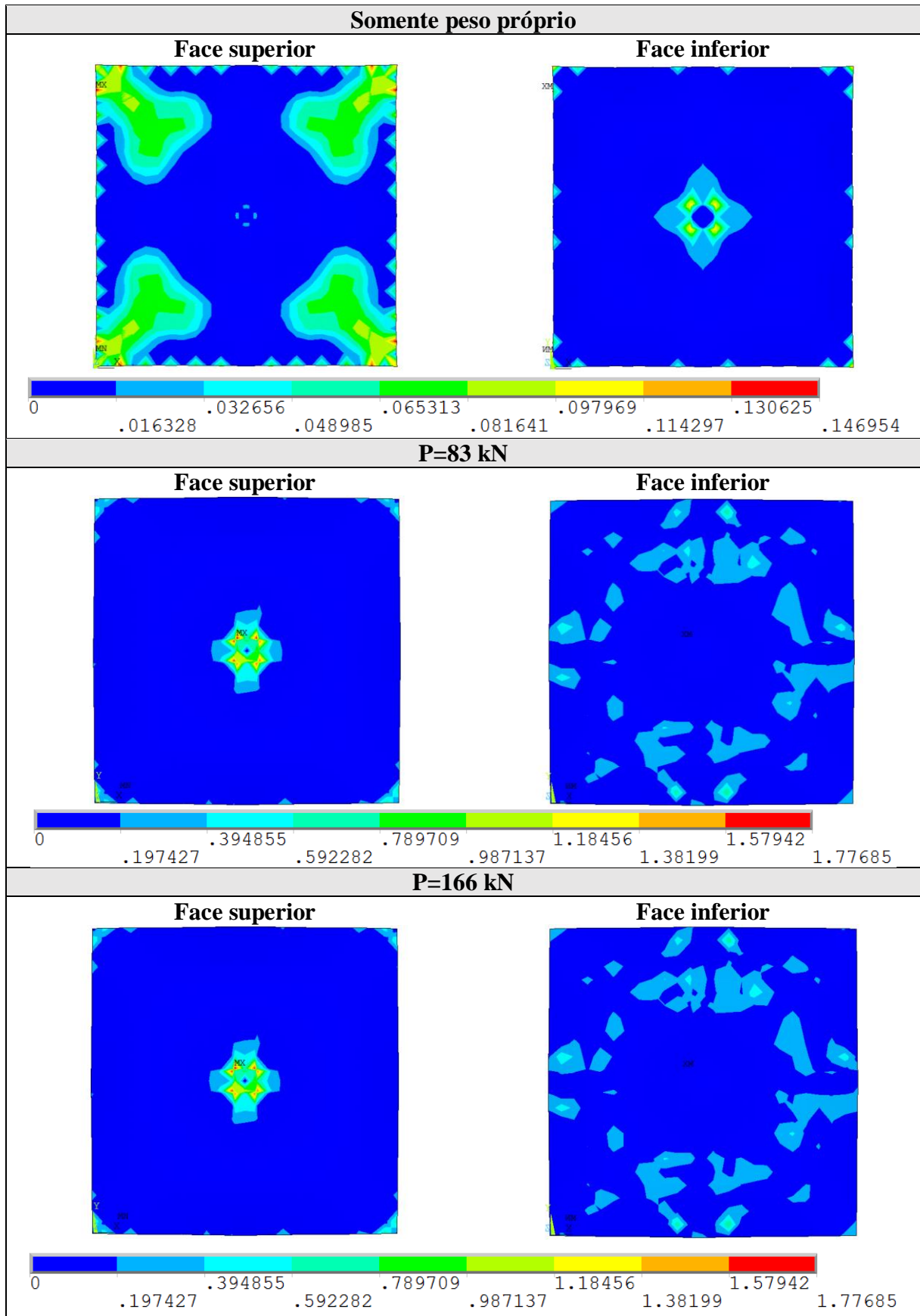
#### 4.3.3.2 Representação gráfica dos resultados de tensões

Os quadros 4.13 a 4.16 apresentam a evolução dos acréscimos das componentes de tensão dos elementos de concreto e os quadros 4.17 e 4.18 ilustram a distribuição de momentos. Pode-se verificar que no estágio inicial de carregamento, os efeitos da protensão foram predominantes frente ao peso próprio, assim, os vãos das faces superiores ficaram tracionados e, por sua vez, as faces inferiores estiveram comprimidas; logo, com a aplicação da carga instantânea de ensaio ocorreu a inversão do sentido de flexão dos vãos, então as faces superiores passaram a ser comprimidas e as faces inferiores ficaram tracionadas. Adicionalmente, pode-se observar que quando os vãos dos painéis ficaram comprimidos a região do pilar ficou tracionada e, do mesmo jeito, a região do pilar ficou comprimida toda vez que os vãos estavam tracionados.

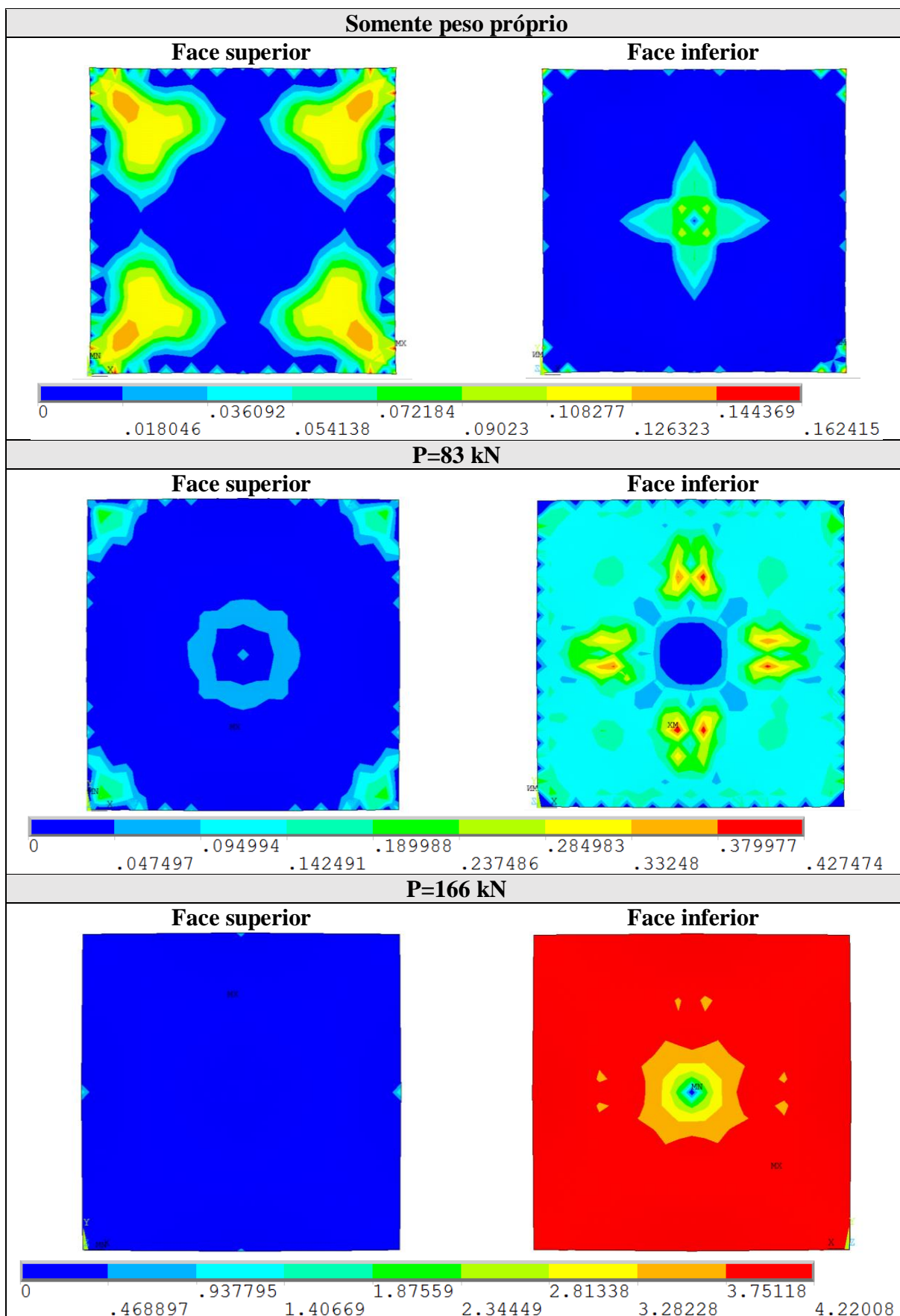
O detalhe mais importante, que levou a analisar dois modelos para o espécime RP-1, foi o valor das tensões nos elementos de concreto nos estágios finais de carregamento. As condições adotadas no Modelo B reproduziram valores que ultrapassaram notavelmente o valor da resistência à compressão. Então a fim de aliviar aqueles valores das tensões, foi necessário considerar a restrição vertical em toda a geometria do pilar do apoio e, principalmente, considerar mais de uma camada nos elementos de casca. Conseqüentemente, observou-se que mesmo definindo camadas para terem só três pontos de integração ao longo da espessura de cada camada, as tensões ainda ficavam com valores muito altos, portanto, era inevitável definir apenas um ponto de integração ao longo de espessura de cada camada. Embora a discretização do espécime com mais de uma camada e com um ponto de integração ao longo da espessura de cada camada resolveu a suavização das tensões, a configuração denominada Modelo A se aproximou melhor aos resultados experimentais.

Logo, os quadros 4.19 e 4.20 ilustram a evolução dos acréscimos das tensões da armadura de protensão, podendo-se apreciar que nos estágios finais do carregamento as tensões não ficaram completamente uniformes.

Quadro 4.13 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_1$  dos elementos de concreto (em kN/cm<sup>2</sup>)

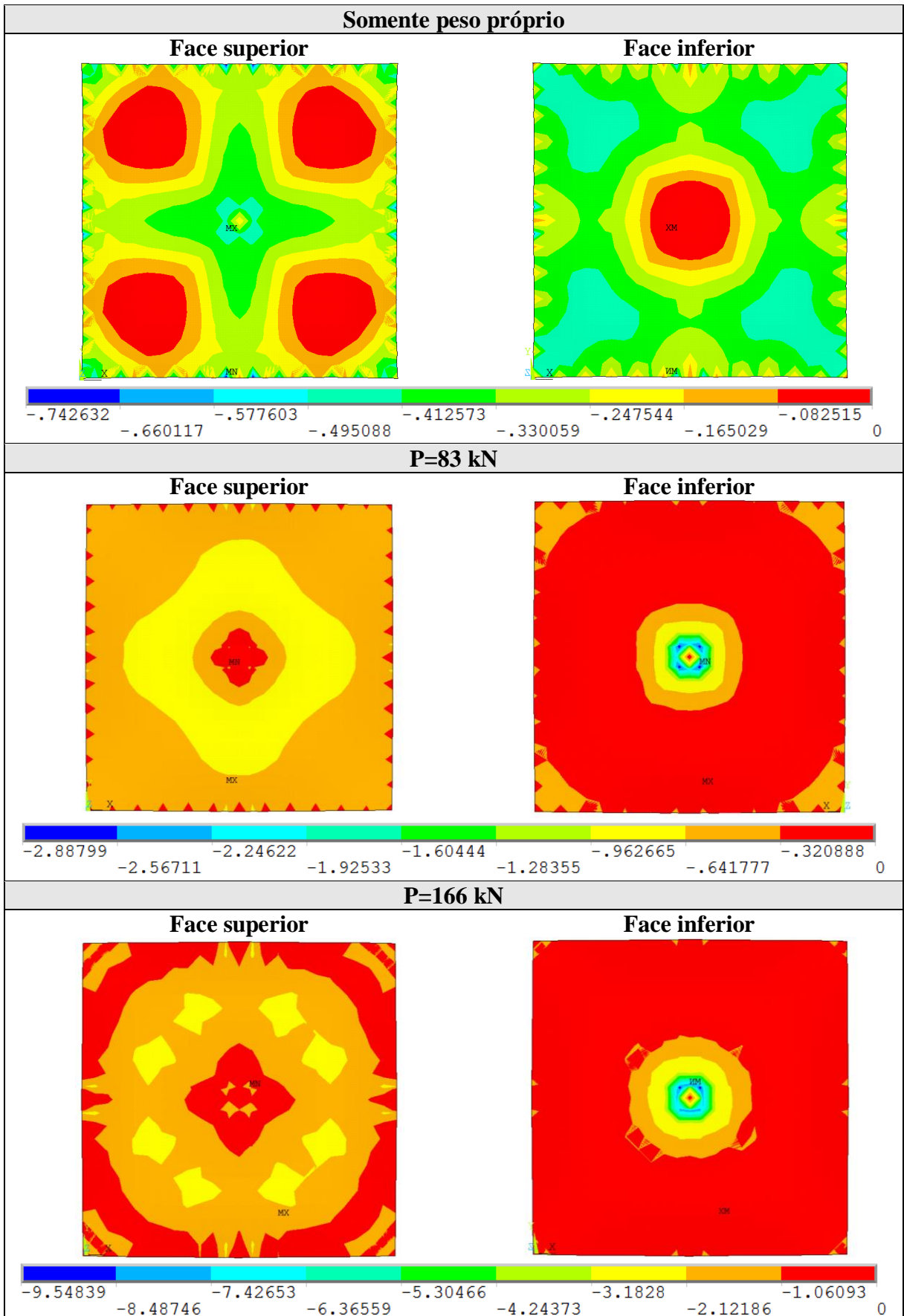


Quadro 4.14 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_1$  dos elementos de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )

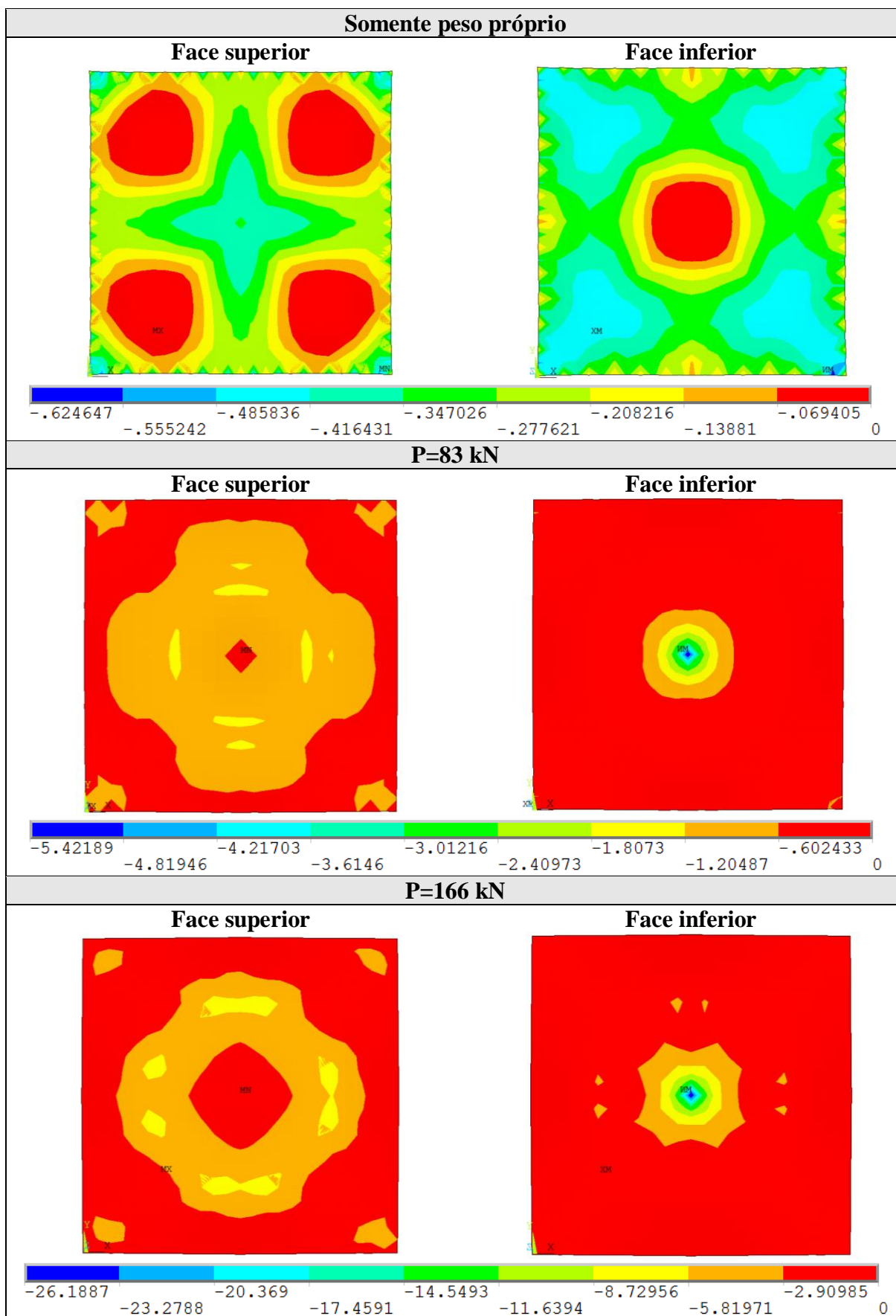




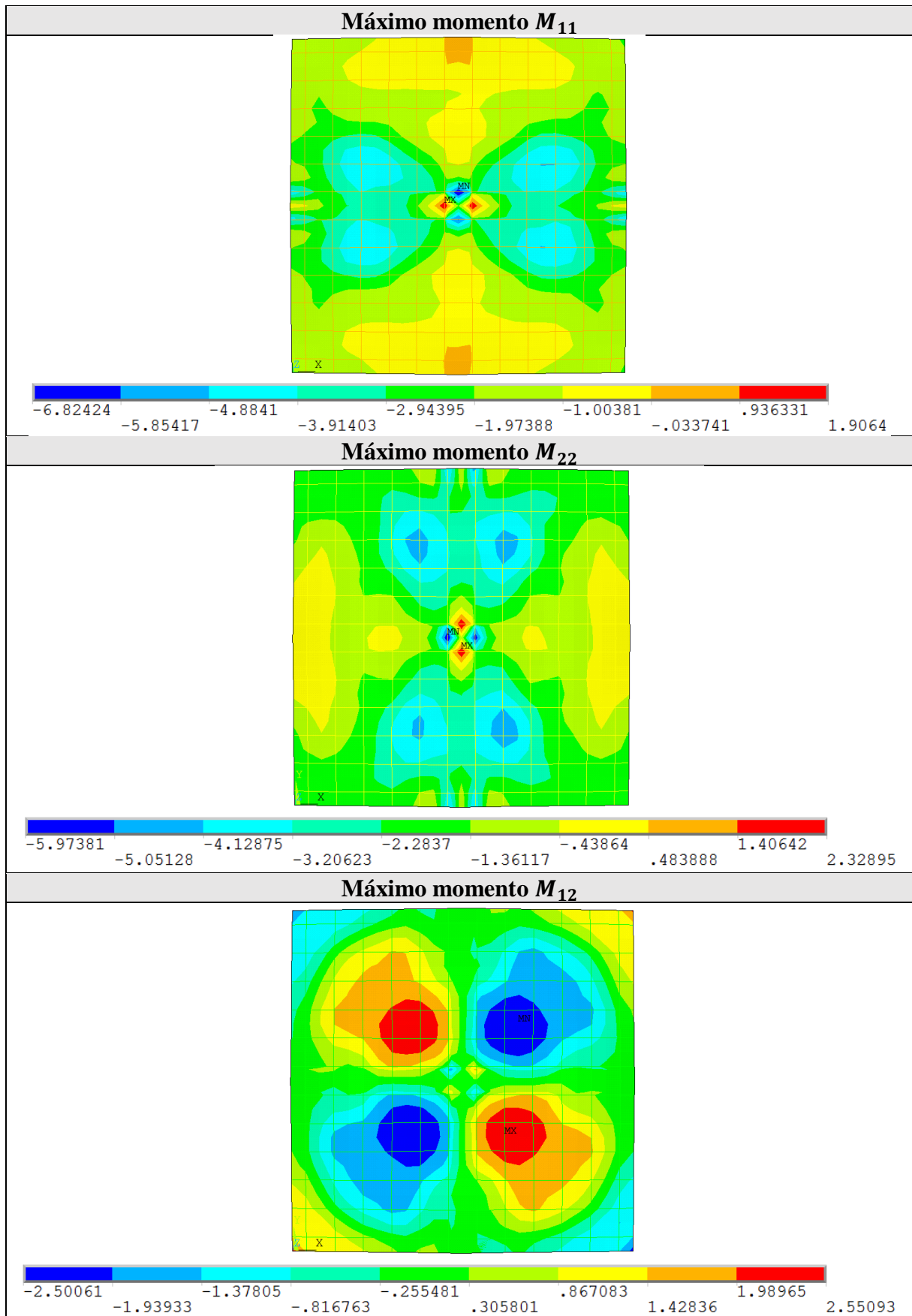
Quadro 4.15 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_3$  dos elementos de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )



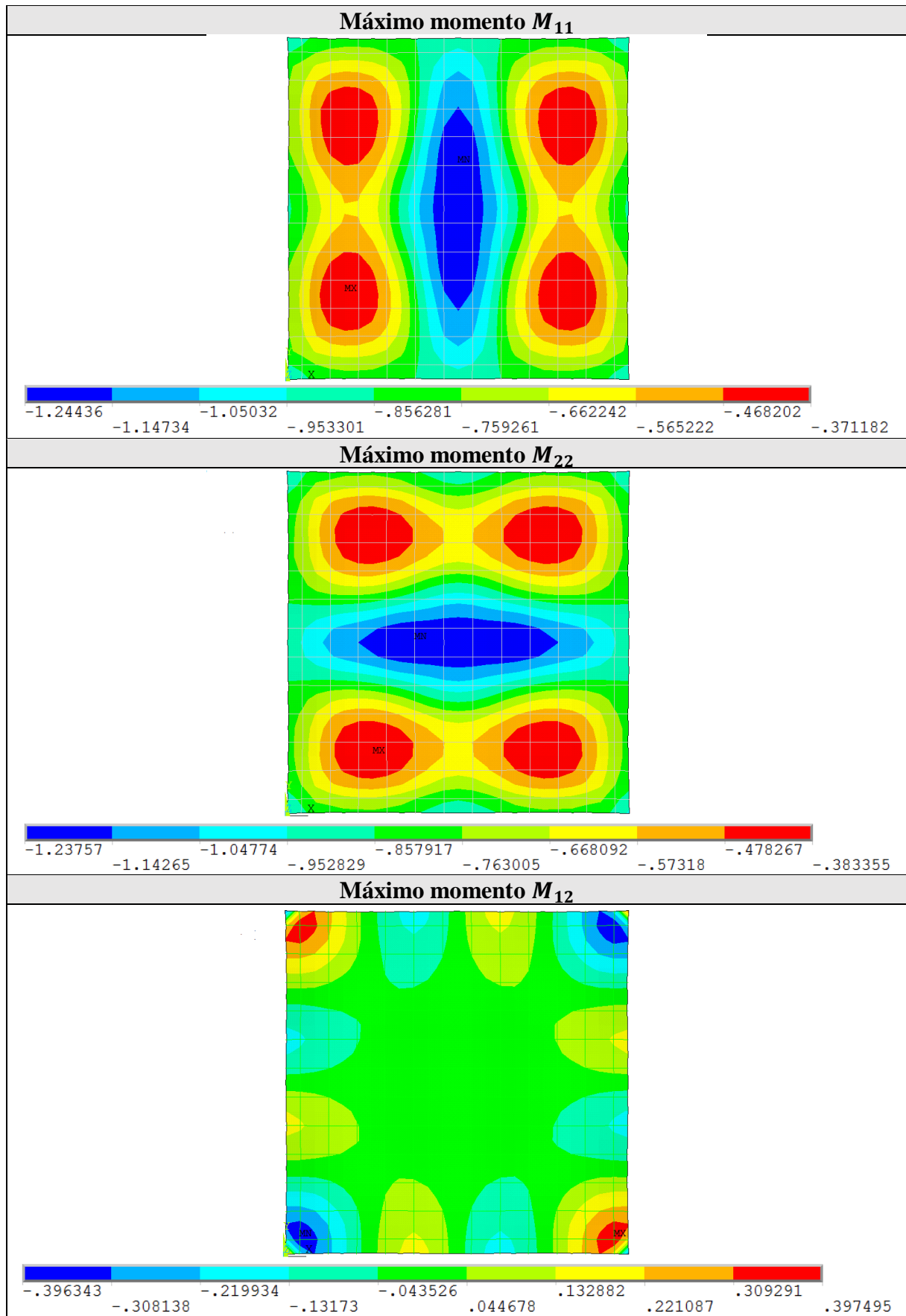
Quadro 4.16 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução da componente de tensão principal  $\sigma_3$  dos elementos de concreto (em  $\text{kN/cm}^2$ )



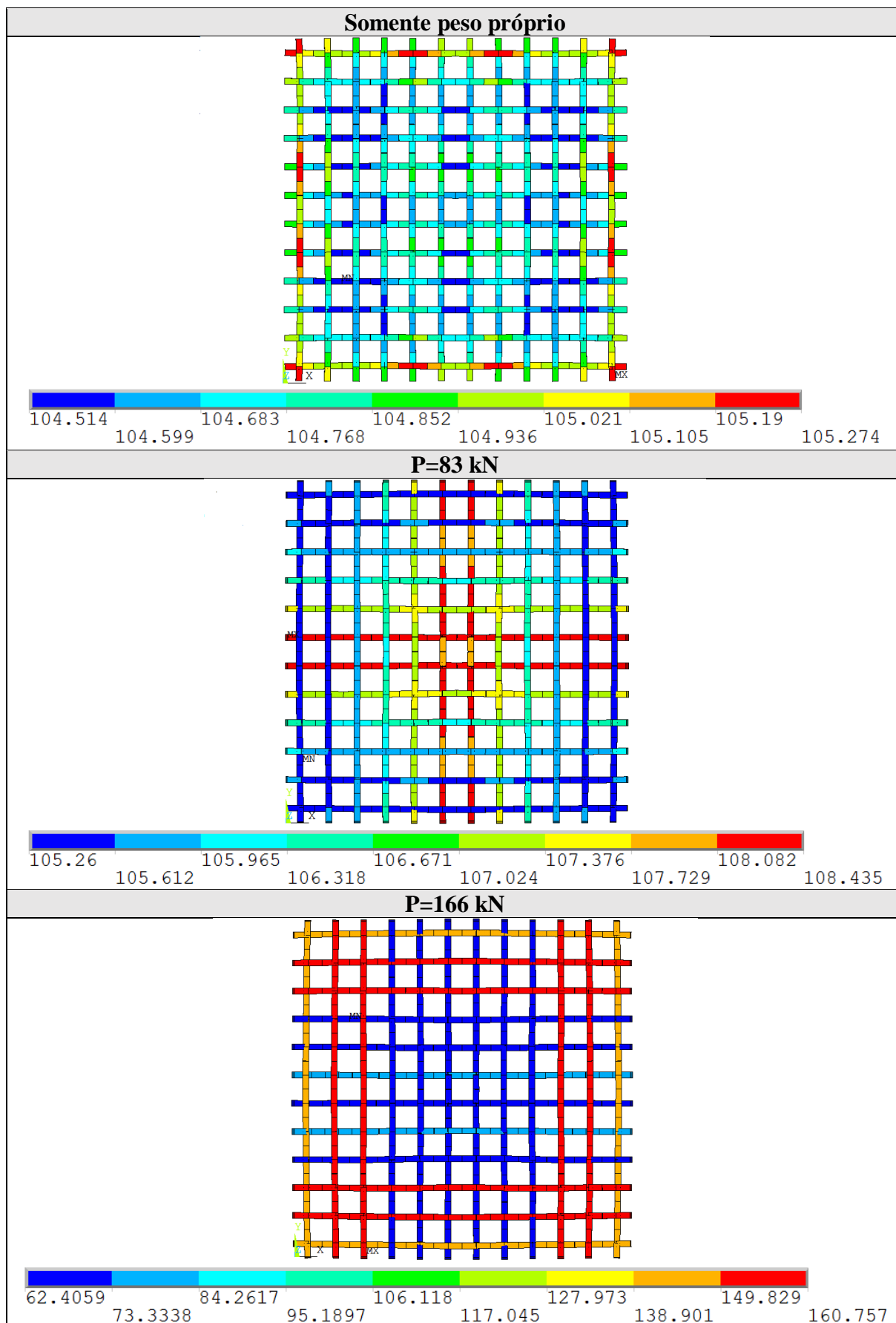
Quadro 4.17 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: distribuição de momentos  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  e  $M_{12}$  do modelo (em kN-cm)



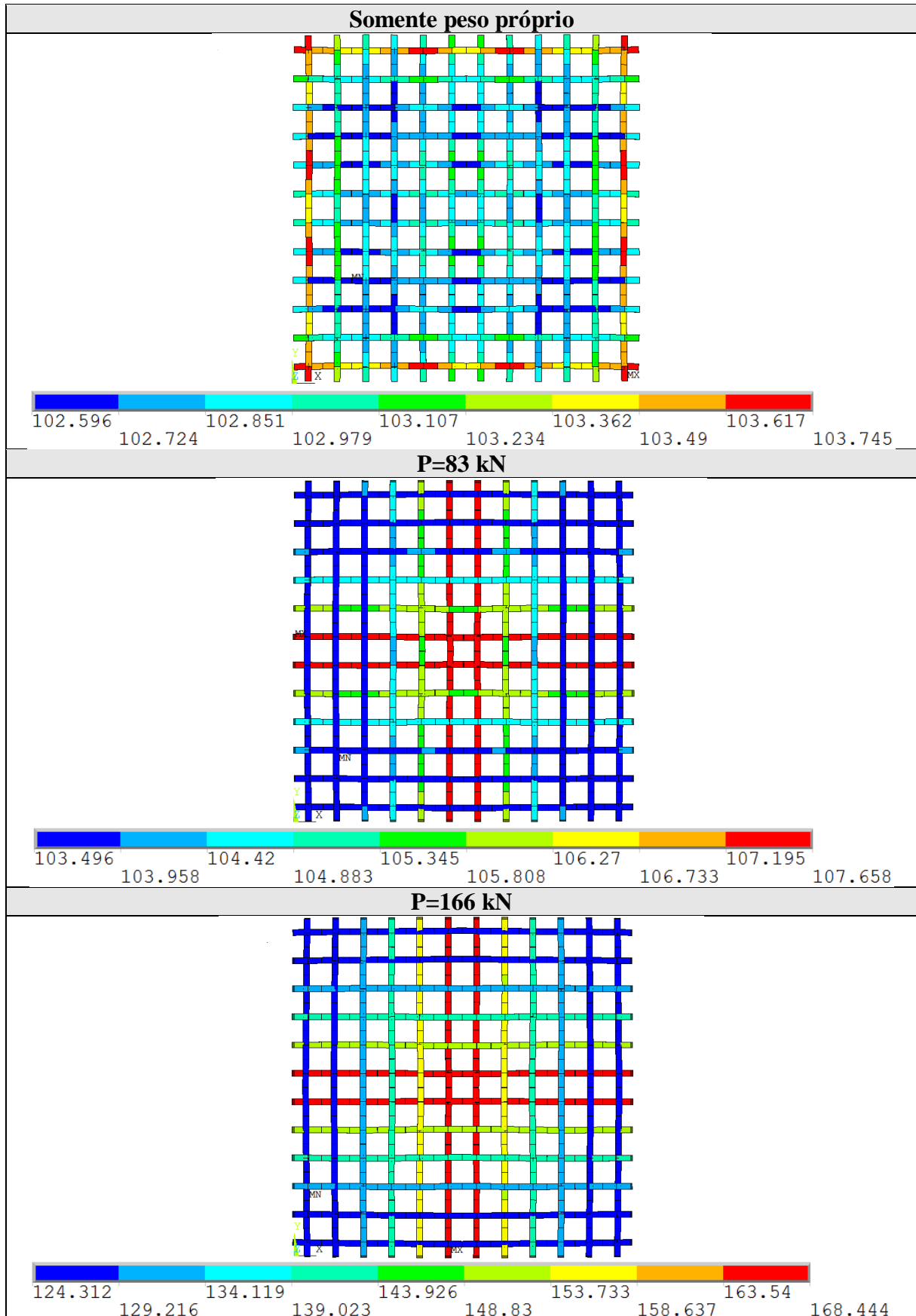
Quadro 4.18 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: distribuição de momentos  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  e  $M_{12}$  do modelo (em kN-cm)



Quadro 4.19 – Modelo A da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução das tensões na armadura de protensão (em  $\text{kN/cm}^2$ )



Quadro 4.20 – Modelo B da laje RP-1 de Nawy e Chakrabarti: evolução das tensões na armadura de protensão (em  $\text{kN/cm}^2$ )



## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 5.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve o objetivo de apresentar uma alternativa de análise não-linear com elementos finitos de casca, para lajes de concreto armado e concreto protendido submetidas a cargas de curta e longa duração, no *software* ANSYS APDL versão 16.0. Embora o *software* disponibilize dois modelos constitutivos padrão para considerar a não-linearidade física do concreto, estes somente são compatíveis com uma variedade limitada de elementos finitos tipo SOLID, então viu-se a necessidade de adaptar os modelos constitutivos desenvolvidos por Lazzari (2015). A compatibilidade desses modelos constitutivos, implementados em sub-rotinas de formato FORTRAN no ANSYS através da ferramenta de customização UPF, com a família de elementos finitos denominada 18X permitiu implementar o modelo computacional proposto. As sub-rotinas utilizadas no presente trabalho foram baseadas nas informações que vem sendo desenvolvidas e revisadas nesta linha de pesquisa do PPGEC/UFRGS, sendo que a atualização feita por Lazzari (2015) abordou os comportamentos viscoelástico e elastoplástico dos materiais conforme o Código modelo *fib* 2010 (2012).

Toda vez que o modelo computacional foi implementado, avaliou-se sua eficiência pela comparação de resultados obtidos numericamente com resultados experimentais encontrados na bibliografia. Assim, numa primeira etapa foram analisadas lajes concreto armado, entre as quais foram escolhidas três lajes lisas do conjunto estudado por Taylor, Maher e Hayes (1966) e, na mesma vez, estudaram-se o conjunto de espécimes apresentados por Abdul-Wahab e Khalil (2000) sendo seis lajes nervuradas e duas lajes lisas; os modelos abrangeram variantes tanto nas dimensões dos espécimes como nas taxas das armaduras, resultando, segundo foi o caso, em falhas por flexão e puncionamento dos espécimes. Na segunda etapa foram analisadas lajes maciças de concreto protendido, destacando a laje, com cabos retos, ensaiada por Scordelis, Pister e Lin (1956), a laje com cabos parabólicos de Scordelis, Lin e Itaya (1959) e uma das lajes de Nawy e Chakrabarti (1976); nesta vez, os modelos consideraram a não-aderência dos cabos fora do plano médio dos elementos de casca.

Aproveitando a modelagem por elementos reforçados, a armadura passiva sempre foi modelada como armadura incorporada no interior dos elementos de casca, enquanto que a armadura

protendida, modelada como armadura discreta, limitou a discretização das malhas de elementos finitos. No entanto, foi conferido que o modelo computacional proposto não exigiu malhas de elementos finitos muito refinadas, significando em ganho de tempo de processamento. Um aspecto importante observado para garantir a condição de não-aderência na modelagem das lajes de concreto protendido foi a utilização do comando CP, este comando, capaz de acoplar os graus de liberdade de vários nós, foi a solução para conectar os nós dos cabos fora do plano médio da laje.

A grande vantagem que trouxe trabalhar no *software* ANSYS, foi a versatilidade de suas ferramentas de pré-processamento e pós-processamento. Tem-se por exemplo nos apêndices, exemplos de alguns scripts que foram utilizados neste trabalho, os mesmos facilitaram de sobremaneira a modelagem no pré-processamento. Já no pós-processamento, além dos diagramas de carga-flecha que serviram de comparação para validar os resultados do modelo com resultados experimentais, também foi possível visualizar a distribuição de tensões e momentos, em todos os elementos e em diferentes estágios de carregamento, fazendo possível entender o comportamento das lajes em cada modelo.

Os resultados obtidos permitem concluir que o modelo computacional proposto, que esteve enfatizado na utilização de elementos finitos de casca e na não-linearidade física dos materiais, simulou satisfatoriamente o comportamento das lajes de concreto armado e concreto protendido pelo método dos elementos finitos, ressaltando o baixo custo computacional de tempo e a boa precisão dos resultados aproximados.

## 5.2 SUGESTÕES

Destacando que a bibliografia consultada para validar a eficiência do modelo computacional proposto teve ênfase em ensaios experimentais de lajes de concreto armado e concreto protendido submetidas a cargas de curta duração, sugere-se estender o estudo a ensaios experimentais de lajes submetidas a carga de longa duração, como também, a outras estruturas de parede delgada como silos e cúpulas.

Outra questão que merece atenção no futuro é a aproximação para modelar cabos de protensão com forma parabólica, dado que no presente trabalho foram utilizados trechos retos do elemento LINK180, seria interessante aproveitar a ferramenta de customização UPF do ANSYS para implementar um novo elemento finito de treliça com forma geométrica curva que seja



compatível com os modelos constitutivos da USERMAT e, assim, ter modelos ainda mais próximos à realidade.

Dado que o modelo proposto esteve limitado a assimilar somente uma fase de carga nas diferentes etapas de carregamento, faz-se pertinente implementar um algoritmo capaz de identificar quando um ponto de integração está tendo carregado ou descarregado junto com o modelo constitutivo em descarga, já que, conforme visto no artigo de Scordelis, Pister e Lin (1956), a influência de ciclos de carga e descarga após o limite elástico traz consigo a diminuição de rigidez da laje.

Do mesmo modo, sendo que o foco do presente trabalho esteve em propor um modelo computacional capaz de reproduzir resultados experimentais, uma limitação do modelo proposto foi que não tem um algoritmo para identificar o limite de deformação por esmagamento do concreto e dessa maneira deter as iterações da solução do *software*. Fato que foi motivo pelo qual as análises foram feitas até a carga de falha dos ensaios, portanto, recomenda-se continuar esta pesquisa cuidando implementar o algoritmo mencionado para prestar atenção no projeto de estruturas focado em confiabilidade.

Vê-se interessante também, estudar a possibilidade de aprimorar as sub-rotinas já implementadas para propor um modelo computacional de análise termo-hidro-químico-mecânico e, assim, estudar problemas de campo em estruturas submetidas a temperaturas elevadas ou a corrosão por cloretos nas primeiras idades.

## REFERÊNCIAS

ABDUL-WAHAB, H. M. S.; KHALIL, M. H. **Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 126, n. 2, p.219-227, 2000.

ALMEIDA FILHO, F. M. **Estruturas de Pisos de Edifícios com a Utilização de Cordoalhas Engraxadas**. 2002. 284p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

ANSYS, Inc. **Theory Reference** (Version 16.0), 2016.

ARAÚJO, J. M. **Análise não-linear de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n. 52, p.43-52, Lisboa, Setembro, 2003.

ARAÚJO, J. M. **Modelo bilinear para análise de lajes de concreto armado**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n. 8, p.11-19, Abril, 2006.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BARBIERI, R. A. **Modelo Numérico para a Análise à Flexão de Elementos com Protensão Aderente e Não Aderente**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 2003, 305p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA, 1996.

BAZANT, Z. P.; OH, B. H. **Microplane Model for Progressive Fracture of Concrete and Rock**. Journal of Structural Engineering. 111, 1985.

BAZANT, Z. P.; GAMBAROVA, P. G. **Crack Shear in Concrete: Crack Band Microplane Model**. Journal of Structural Engineering. 110, 1984.

BAZANT, Z. P.; WU, S. T. **Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain**. Matériaux et Constructions, v. 7, n. 34, p.50-60, 1974.

BAZANT, Z. P. **Mathematical models for creep and shrinkage of concrete**. In: International Symposium on Fundamental Research on Shrinkage of Concrete, 1980, Lausanne Papers, Chichester: John Wiley, 1982, cap. 7, p.163-256.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. Fort Lauderdale: J. Ross Publishing. 606p. 2007.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Concrete under multiaxial states of stress – constitutive equations for practical design**. State-of-the-art report, Bulletin d'Information N° 156, 1983.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **RC elements under cycling loading**. State-of-the-art-report, Bulletin d'Information N° 230, 1996.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 2010**. Bulletin N° 65, 2012.

CORRÊA, M. R. S.; MELO G. S.; MARTINS P. C. **Comportamento ao puncionamento em lajes cogumelo protendidas com cabos não aderentes**. 43° Congresso Brasileiro do Concreto – IBRACON, Foz do Iguaçu, 16 p. 2001.

CREUS, G. J. **Viscoelasticity: basic theory applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 169 f.

EMERICK, A. **Projeto e execução de lajes protendidas**. Rio de Janeiro, editora Interciência, 2005.

FARIA, E. L. **Projeto de lajes planas protendidas via método dos elementos finitos e pórticos equivalentes**, 2004. 260 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

FERNANDES, C. F. C. **Análise de lajes com protensão sem aderência**, 2001. 151 p. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica de São Paulo – USP, São Paulo, 2001.

GIBSON, M. C. **Determination of residual stress distributions in autofrettaged thick-walled cylinders**. 2008. Ph.D. Thesis. Grandfield University, 2008.

GONGCHEN, D.; XUEGANG, T. **Contrainte ultime dans câbles non-adhérents de poutres en béton a précontrainte partielle**. Annales de L'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n. 642, p.75-88, 1988.

HANAI, J. B. **Fundamentos do concreto protendido**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 116 f. São Carlos, 2005.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press Limited, 550p. 1988.

HINTON, E.; OWEN, D. R. J. **Finite Element Software for plates and shells**. Swansea: Pineridge, 1984, 403p.

JOST, D. T. **Análise de peças fletidas com protensão não aderente pelo método dos elementos finitos**. 2006. 152 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

LAZZARI, B. M. **Análise por Elementos Finitos de Peças de Concreto Armado e Protendido sob Estados Planos de Tensão**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto: princípios básicos da construção de pontes de concreto**. Rio de Janeiro: Interciência. 1979.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. **Beiträge zur behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. Beton und Stahlbetonbau**. v. 57, n. 7, p.161-173, Juli 1962.

LIN, T. Y.; BURNS, N. H. **Design of Prestressed Concrete Structures**. 3 ed., New York: John Wiley & Sons, 1981.

MACHADO, M. A. S. **Aplicação do método dos elementos finitos para análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 2002, 150p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGECC, 168p., 2003.

MELGES, J. L. P.; PINHEIRO M. L.; DUARTE E. P. **Análise experimental da punção em lajes protendidas por pós-tração**. 43° Congresso Brasileiro do Concreto – IBRACON, Foz do Iguaçu, 2001.

MELLO, A. L. V. **Cálculo de lajes lisas com protensão parcial e limitada**. 2005. 138 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

MILANI, A. C. **Análise de Lajes Planas Protendidas pelo Método dos Elementos Finitos**. 2006. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

MOURA J. R. B. **Recomendações para sistemas estruturais em edificações com a utilização de protensão com cordoalha engraxada**. XXX Jornadas Sul-americanas de Engenharia Estrutural. Brasília. 16 p. 2002.

NAWY, E. G.; CHAKRABARTI P. **Deflection of Prestressed Concrete Flat Plates**. PCI Journal, v. 21, n. 2, p.86-102, 1976.

OÑATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 2. Beams, Plates and Shells**. First edition, Barcelona: Springer, 2013.

OTTOSEN, N. S. **A failure criterion for concrete**. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n. 4, p.527-535, 1977.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite Elements in Plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1980.

POST-TENSIONING INSTITUTE. **Post-tensioned Commercial and Industrial Floors**. Phoenix: PTI, 35p, 1983.

RAHMAN, S. M. **Finite Element Analysis and Related Numerical Schemes for Ratcheting Simulation**. 2006. Dissertation. North Carolina State University, North Carolina, 2006.

RITZ, P.; MATT, P.; TELLENBACH, CH.; SCHLUB, P.; AEBERHARD H. U. **VSL Report Series 4.2**. Berne/Switzerland, January 1985. 44p.

SCORDELIS, A. C.; LIN, T. Y.; ITAYA, R. **Behavior of a Continuous Slab Prestressed in Two Directions**. Journal of American Concrete Institute, v. 31, n. 6, Dec. 1959 (Proceedings v. 56).

SCORDELIS, A. C.; PISTER, K. S.; LIN T. Y. **Strength of a Concrete Slab Prestressed in Two Directions**. Journal of American Concrete Institute, v. 28, n. 3, Sept. 1956 (Proceedings v. 53).

SILVA, H. B. S. **Análise numérica da influência da excentricidade na ligação placa-viga em pavimentos usuais de edifícios**. 2010. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

SILVA, R. L. **Projeto de Lajes Maciças Protendidas de Edifícios**. 1998. 151p. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica de São Paulo, São Paulo, 1998.

SILVA, R. J. C.; MELO G. S. **Resistência à punção de lajes cogumelo protendidas com cabos engraxados e pilares de várias dimensões**. 43º Congresso Brasileiro do Concreto – IBRACON, Vitória, 2003.

SIQUEIRA, H. C. **Análise do comportamento diferido de cascas de concreto armado**. 2014. 135 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A. J. P. **Lajes em concreto armado e protendido**. Niterói: EDUFF, 1998.

SUN, E. Q. **Shear Locking and Hourglassing in MSC Nastran, ABAQUS and ANSYS**. MSC Software Users Meeting, 2006.

TAYLOR, R.; MAHER, D. R. H.; HAYES, B. **Effect of the arrangement of reinforcement on the behavior of reinforced concrete slabs**. Magazine of Concrete Research, v. 18, n. 55, p.85-94, 1966.

VERÍSSIMO, G. S.; CÉSAR JR. K. M. L. **Concreto Protendido**. 5 ed. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Suporte bibliográfico para a disciplina de concreto protendido. 78 f. 1998.

WILLAM, K. J.; WARNKE E. D. **Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete**. International Association for Bridge and Structural Engineering. v. 19, Italy, 1975.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. 6 ed., Oxford, Butterworth-Heinemann, 2005.

## APÊNDICE A

### A.1 Exemplo de *script* para laje S2 de Abdul-Wahab e Khalil (2000)

```

!*****
!* Programador: Igor Ayala
!* Arquivo: LAJE S2 DE ABDUL WAHAB
!* Unidades: kN,cm
!*****

! Inicializando
! -----
/NOPR
FINISH
/CLEAR,NOSTART
/NOPR
/PMETH,OFF,0
/TITLE,LAJE S2 DE ABDUL-WAHAB (2000)

! Endereço de armazenamento
! -----
ADDRESS = 'C:\Users\pc\Desktop\ABDULS2'
/CWD,ADDRESS

!=====
! 1. ENTRADA DE DADOS
!=====

! Dados: Pavimento
! -----
*SET,L,150                !comprimento
*SET,hf,2.0              !espessura
*SET,hp,2.0              !espessura placa
*SET,lp,30               !comprimento placa
*SET,load,75             !carga total

! Dados: Nervuras
! -----
*SET,bw,5.2              !base
*SET,hw,7.5              !altura
*SET,nv,9                !número de vazios
*SET,a1,L/nv             !separação

! Dados: Armadura
! -----
*SET,Asm,3.0             !área da armadura por metro
*SET,As,0.075           !área barra
*SET,d,8.3              !altura útil média
*SET,sep,((As/Asm)*100)/a1 !espaçamento
*SET,coorz1,1-(hf+hw-d+.07)/hf !cobrimento
*SET,coorz2,1-(hf+hw-d-.07)/hf !cobrimento

! Dados: Concreto
! -----
*SET,Ec1,2693           !módulo de elasticidade
*SET,v1,0.2             !coeficiente de Poisson
*SET,fc1,3.2           !resistência à compressão

! Dados: Aço da armadura
! -----
*SET,Es2,21000          !módulo de elasticidade
*SET,v2,0.3             !coeficiente de Poisson

```



```

*SET,fy2,39.8           !tensão de escoamento
*SET,Es22,ES2/100      !parâmetro de endurecimento
*SET,Es3,21000         !módulo de elasticidade placa

!=====
! 2. PARÂMETRO DOS ELEMENTOS E MATERIAIS
!=====
/PREP7                 !pré-processamento

! Elemento: Pavimento
! -----
ET,1,281               !elemento de casca
KEYOPT,1,8,2          !armazena resultados em todas as camadas
SECTYPE,1,SHELL       !associa o tipo de elemento definido
SECDATA,hf,1,,5       !espessura,material,, número de pontos de integração
SECOFFSET,BOT         !offset na face inferior
SECCONTROL,,,,,,,,    !controles de propriedades padrão

! Elemento: Nervura
! -----
ET,2,281               !elemento de casca
KEYOPT,2,8,2          !armazena resultados em todas as camadas
SECTYPE,2,SHELL       !associa o tipo de elemento definido
SECDATA,bw,1,,5       !espessura,material,, número de pontos de integração
SECOFFSET,MID         !offset no plano médio da laje
SECCONTROL,,,,,,,,    !controles de propriedades padrão

! Elemento: Placa
! -----
ET,3,281               !elemento de casca
KEYOPT,3,8,2          !armazena resultados em todas as camadas
SECTYPE,3,SHELL       !associa o tipo de elemento definido
SECDATA,hp,1,,5       !espessura,material,, número de pontos de integração
SECOFFSET,BOT         !offset na face inferior
SECCONTROL,,,,,,,,    !controles de propriedades padrão

! Material: Concreto
! -----
TB,USER,1,2,5          !modelo da usermat,temperaturas,constantes
TBTEMP,1.0            !primeira temperatura
TBDATA,1,Ec1,v1,fc1,2,21.002 !temperatura,Ec,v,fc,agregado,etapas cálculo
TB,STATE,1,,8        !variáveis de estado

! Material: Aço da armadura
! -----
MPTEMP,1,0            !define temperatura
MPDATA,EX ,2,,Es2     !módulo de elasticidade,material,,Es
MPDATA,PRXY,2,,v2     !coeficiente de Poisson,material,,v
TB,BISO,2,1,2,        !modelo bilinear,material,temp.,constantes
TBTEMP,0              !primeira temperatura
TBDATA,,fy2,Es22,,,, !fy,Es

! Material: Aço da placa
! -----
MPTEMP,1,0            !define temperatura
MPDATA,EX ,3,,Es3     !módulo de elasticidade,material,,Es
MPDATA,PRXY,3,,v2     !coeficiente de Poisson,material,,v

!=====
! 3. GEOMETRIA E MESH
!=====
/VIEW,1,,-1           !controle de visualização
/ANG,1                 !controle de visualização
/ANG,1,30,XS,1        !controle de visualização
/ANG,1,30,YS,1        !controle de visualização

! Geometria: Pavimento
! -----

```

```

BLC4,0,0,a1*(nv-1)/2,a1*(nv-1)/2 !define área
BLC4,0,a1*(nv-1)/2,a1*(nv-1)/2,a1 !define área
BLC4,0,a1*(nv+1)/2,a1*(nv-1)/2,a1*(nv-1)/2 !define área
BLC4,a1*(nv-1)/2,0,a1,a1*(nv-1)/2 !define área
BLC4,a1*(nv-1)/2,a1*(nv-1)/2,a1,a1 !define área
BLC4,a1*(nv-1)/2,a1*(nv+1)/2,a1,a1*(nv-1)/2 !define área
BLC4,a1*(nv+1)/2,0,a1*(nv-1)/2,a1*(nv-1)/2 !define área
BLC4,a1*(nv+1)/2,a1*(nv-1)/2,a1*(nv-1)/2,a1 !define área
BLC4,a1*(nv+1)/2,a1*(nv+1)/2,a1*(nv-1)/2,a1*(nv-1)/2 !define área

! Geometria: Nervura
! -----
KSEL,S,KP,,1,2,1 !seleciona keypoints
KSEL,A,KP,,25,26,1 !seleciona keypoints
KSEL,A,KP,,4 !seleciona keypoints
KSEL,A,KP,,9,12,3 !seleciona keypoints
KGEN,2,ALL,,,,-(hw),,1 !copia keypoints

A,1,2,38,37 !define área
A,2,25,42,38 !define área
A,25,26,43,42 !define área
ASEL,S,AREA,,10,12,1 !seleciona áreas
AGEN,nv+1,ALL,,,a1,,,1 !copia áreas

A,1,37,39,4 !define área
A,4,39,40,9 !define área
A,9,40,41,12 !define área
ASEL,S,AREA,,10+(nv+1)*3,12+(nv+1)*3,1 !seleciona áreas
AGEN,nv+1,ALL,,,a1,,,,1 !copia áreas

! Geometria: Placa
! -----
BLC4,(L-lp)/2,(L-lp)/2,lp,lp !define área

! Mesh: Pavimento
! -----
TYPE,1 !seleciona elemento
MAT,1 !seleciona material
REAL,1 !seleciona constante real
ESYS,0 !define sistema de coordenadas
SECTYPE,1 !define conjunto de seções

LSEL,S,LINE,,1,4,1 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,9,12,1 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,25,28,1 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,33,36,1 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,5,7,2 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,14,16,2 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,29,31,2 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,22,24,2 !seleciona linhas
LESIZE,ALL,,, (nv-1)/2,,,,,1 !divide linhas
LSEL,S,LINE,,6,8,2 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,13,15,2 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,17,20,1 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,21,23,2 !seleciona linhas
LSEL,A,LINE,,28,30,2 !seleciona linhas
LESIZE,ALL,,,2,,,,,1 !divide linhas
ASEL,S,AREA,,1,9,1 !seleciona áreas
MSHAPE,0,2D !define elementos 2D
MSHKEY,1 !define discretização mapeada
ASEL,S,AREA,,1,9,1 !seleciona áreas
AMESH,ALL !discretiza as áreas selecionadas

! Mesh: Nervura
! -----
TYPE,2 !seleciona elemento
MAT,1 !seleciona material
REAL,2 !seleciona constante real

```

```

ESYS, 0 !define sistema de coordenadas
SECNUM,2 !define conjunto de seções

ASEL,S,AREA,,10,10+nv*3,3 !seleciona áreas
ASEL,A,AREA,,12,12+nv*3,3 !seleciona áreas
ASEL,A,AREA,,10+(nv+1)*3,10+(nv+1)*3+nv*3,3 !seleciona áreas
ASEL,A,AREA,,12+(nv+1)*3,12+(nv+1)*3+nv*3,3 !seleciona áreas
AESIZE,ALL,a1 !divide áreas
MSHAPE,0,2D !define elementos 2D
MSHKEY,1 !define discretização mapeada
ASEL,S,AREA,,10,10+nv*3,3 !seleciona áreas
ASEL,A,AREA,,12,12+nv*3,3 !seleciona áreas
ASEL,A,AREA,,10+(nv+1)*3,10+(nv+1)*3+nv*3,3 !seleciona áreas
ASEL,A,AREA,,12+(nv+1)*3,12+(nv+1)*3+nv*3,3 !seleciona áreas
AMESH,ALL !discretiza as áreas selecionadas

ASEL,S,AREA,,11,11+nv*3,3 !seleciona áreas
ASEL,A,AREA,,11+(nv+1)*3,11+(nv+1)*3+nv*3,3 !seleciona áreas
AESIZE,ALL,a1/2 !divide áreas
MSHAPE,0,2D !define elementos 2D
MSHKEY,1 !define discretização mapeada
ASEL,S,AREA,,11,11+nv*3,3 !seleciona áreas
ASEL,A,AREA,,11+(nv+1)*3,11+(nv+1)*3+nv*3,3 !seleciona áreas
AMESH,ALL !discretiza as áreas selecionadas

! Mesh: Placa
! -----
TYPE, 3 !seleciona elemento
MAT, 3 !seleciona material
REAL, 3 !seleciona constante real
ESYS, 0 !define sistema de coordenadas
SECNUM,3 !define conjunto de seções

LSEL,S,LINE,,9*4+nv*10*2+2*8,9*4+nv*10*2+2*8+3,1 !seleciona linhas
LESIZE,ALL,,,,nv*2,,,,,1 !divide linhas
ASEL,S,AREA,,12+(nv+1)*3+nv*3+1 !seleciona áreas
MSHAPE,0,2D !define elementos 2D
MSHKEY,1 !define discretização mapeada
ASEL,S,AREA,,12+(nv+1)*3+nv*3+1 !seleciona áreas
AMESH,ALL !discretiza as áreas selecionadas

! Mesh: Armadura pavimento
! -----
*SET,Isecao,3 !define variável auxiliar
*SET,aux1,1 !define variável auxiliar
*SET,aux2,1 !define variável auxiliar
*DO,i,1,L/((As/Asm)*100),1 !inicia automatização para definir armadura
  *SET,coorx,sep/2+(i-1)*sep
  *IF,coorx,LT,(nv+1)/2,THEN
    *SET,Ielem,1
  *ELSE
    *SET,Ielem,(nv+1)/2
  *ENDIF
  *IF,coorx,LT,1,THEN
    *SET,Isecao,Isecao+1
  *ELSE
    *DO,j,1,10,1
      *SET,coorx,coorx-1
      *SET,Ielem,Ielem+(nv-1)/2
      *IF,coorx,LT,1,EXIT
    *ENDDO
    *IF,Ielem,EQ,(nv-1)/2*(nv-1)/2+1,OR,Ielem,EQ,(nv-1)/2*(nv-1)/2+1+(nv-
1)/2,THEN
      *SET,coorx,coorx*2
      *IF,coorx,GT,1,THEN
        *DO,j,1,10,1
          *SET,coorx,coorx-1
          *SET,Ielem,Ielem+(nv-1)/2

```

```

*IF, coorx, LT, 1, EXIT
*ENDDO
*ENDIF
*ENDIF
*SET, Isecao, Isecao+1
*ENDIF
*IF, aux1, NE, Ielem, THEN
*SET, aux1, Ielem
*SET, aux2, aux2+1
*ENDIF
SECTYPE, Isecao, REINF, DISC
SECDATA, 2, As, EDGo, 1, coorx, coorz1, coorx, coorz1
ESEL, S, ELEM, , Ielem, Ielem+(nv-1)/2-1, 1
ESEL, A, ELEM, , Ielem+(nv+1)*(nv-1)/2-(aux2-1)*((nv-1)/2-2), Ielem+(nv+1)*(nv-
1)/2-(aux2-1)*((nv-1)/2-2)+1, 1
ESEL, A, ELEM, , Ielem+(nv+1)*((nv-1)/2+2), Ielem+(nv+1)*((nv-1)/2+2)+(nv-1)/2-1, 1
SECNUM, Isecao
EREINF
*ENDDO !termina automatização para definir armadura

*DO, i, 1, L/((As/Asm)*100), 1 !inicia automatização para definir armadura
*SET, coory, sep/2+(i-1)*sep
*IF, coory, LT, (nv-1)/2, THEN
*SET, Ielem, 1
*ELSEIF, coory, GT, (nv-1)/2, AND, coory, LT, (nv+1)/2, THEN
*SET, Ielem, nv*(nv-1)/2+1
*ELSEIF, coory, GT, (nv+1)/2, THEN
*SET, Ielem, nv*((nv+1)/2+1)+2
*ENDIF
*IF, coory, LT, 1, THEN
*SET, Isecao, Isecao+1
*ELSE
*DO, j, 1, 10, 1
*SET, coory, coory-1
*SET, Ielem, Ielem+1
*IF, coory, LT, 1, EXIT
*ENDDO
*IF, Ielem, EQ, (nv+1)*(nv-1)/2+1, OR, Ielem, EQ, (nv+1)*(nv-1)/2+2, THEN
*SET, coory, coory*2
*IF, coory, GT, 1, THEN
*DO, j, 1, 10, 1
*SET, coory, coory-1
*SET, Ielem, Ielem+1
*IF, coory, LT, 1, EXIT
*ENDDO
*ENDIF
*ENDIF
*SET, Isecao, Isecao+1
*ENDIF
SECTYPE, Isecao, REINF, DISC
SECDATA, 2, As, EDGo, 2, coory, coorz2, coory, coorz2
*IF, Ielem, EQ, (nv+1)*(nv-1)/2+1, OR, Ielem, EQ, (nv+1)*(nv-1)/2+2, THEN
ESEL, S, ELEM, , Ielem, Ielem+nv*2, 2
*ELSE
ESEL, S, ELEM, , Ielem, Ielem+nv*(nv-1)/2, (nv-1)/2
*ENDIF
SECNUM, Isecao
EREINF
*ENDDO !termina automatização para definir armadura

! Mesh: Armadura nervura
! -----
SECTYPE, L/((As/Asm)*100)*2+4, REINF, DISC
SECDATA, 2, .503, EDGo, 1, (hw-.8)/hw, .50, (hw-.8)/hw, .50
ESEL, S, ELEM, , (nv+1)*(nv+1)+1, (nv+1)*(nv+1)+(nv+1)*(nv-1), 1
ESEL, A, ELEM, , (nv+1)*(nv+1)+(nv+1)*(nv-1)*2+1, (nv+1)*(nv+1)+(nv+1)*(nv-
1)*2+(nv+1)*2, 1
SECNUM, L/((As/Asm)*100)*2+4

```

```

EREINF

SECTYPE,L/((As/Asm)*100)*2+5,REINF,DISC
SECDATA,2,.503,EDGO,2,.893,.50,.893,.50
ESEL,S,ELEM,,(nv+1)*(nv+1)+(nv+1)*(nv-1)+1,(nv+1)*(nv+1)+(nv+1)*(nv-1)*2,1
ESEL,A,ELEM,,(nv+1)*(nv+1)+(nv+1)*(nv-1)*2+(nv+1)*2+1,(nv+1)*(nv+1)+(nv+1)*(nv-1)*2+(nv+1)*4,1
SECNUM,L/((As/Asm)*100)*2+5
EREINF

!=====
! 4. CONDIÇÕES DE CONTORNO
!=====

! Merge/renumeração
! -----
NUMMRG,NODE,,,,LOW           !merge de nós
NUMCMP,NODE                   !renumeração de nós

NOMV=NODE(L/2,L/2,0)         !define nó no médio do vão

! Restrições nodais
! -----
NSEL,S,LOC,X,0               !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw             !seleciona nós
NSEL,A,LOC,Y,0               !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw             !seleciona nós
NSEL,A,LOC,X,L               !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw             !seleciona nós
NSEL,A,LOC,Y,L               !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw             !seleciona nós
D,ALL,UZ                      !define restrições

NSEL,S,LOC,X,0               !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw             !seleciona nós
NSEL,U,LOC,Y,0               !seleciona nós
NSEL,U,LOC,Y,L               !seleciona nós
D,ALL,UY                      !define restrições

NSEL,S,LOC,X,L               !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw             !seleciona nós
NSEL,U,LOC,Y,0               !seleciona nós
NSEL,U,LOC,Y,L               !seleciona nós
D,ALL,UY                      !define restrições

NSEL,S,LOC,Y,0               !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw             !seleciona nós
NSEL,U,LOC,X,0               !seleciona nós
NSEL,U,LOC,X,L               !seleciona nós
D,ALL,UX                      !define restrições

NSEL,S,LOC,Y,L               !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw             !seleciona nós
NSEL,U,LOC,X,0               !seleciona nós
NSEL,U,LOC,X,L               !seleciona nós
D,ALL,UX                      !define restrições

! 1ro caso de carga
! -----
ESEL,S,SEC,,3                 !seleciona elementos por seção
SFE,ALL,2,PRES,,0.00001      !aplica carga distribuída

ALLSEL                         !seleccionada todo
ANTYPE,0                       !define análise estática
NROPT,FULL                      !define método de Newton-Raphson
NSUBST,28,28,28                !define os incrementos de carga
NCNV,2,,4000                    !define cómo terminar a análise
NEQIT,100                       !define o número de iterações de equilíbrio

```

```

CNVTOL,M,,0.04,2,1      !define valores de controle de convergência
CNVTOL,F,,0.04,2,1      !define valores de controle de convergência
CNVTOL,U,,0.04,2,      !define valores de controle de convergência

OUTRES,ALL,ALL          !controle dos resultados salvados
OUTPR,ALL,ALL           !controle dos resultados visualizados

TIME,28                 !tempo prescrito
ERESX,NO                !extrapolação dos resultados
LSWRITE,1,              !salva primeiro caso de carregamento

! 2do caso de carga
! -----
ESEL,S,SEC,,3           !seleciona elementos por seção
SFE,ALL,2,PRES,,load/(lp*lp) !aplica carga distribuída

ALLSEL                  !selecionada todo
ANTYPE,0                !define análise estática
NROPT,FULL              !define método de Newton-Raphson
NSUBST,load*10,load*50,load*10 !define os incrementos de carga
NCNV,2,,4000           !define cómo terminar a análise
NEQIT,100              !define o número de iterações de equilíbrio

CNVTOL,M,,0.8,2,1      !define valores de controle de convergência
CNVTOL,F,,0.8,2,1      !define valores de controle de convergência
CNVTOL,U,,0.8,2,      !define valores de controle de convergência

OUTRES,ALL,ALL          !controle para resultados salvados
OUTPR,ALL,ALL           !controle para resultados visualizados

TIME,1                  !tempo prescrito
ERESX,NO                !extrapolação dos resultados
LSWRITE,2,              !salva segundo caso de carregamento

!=====
! 5. VISUALIZAÇÃO (3D)
!=====
/RGB,INDEX,100,100,100,0 !controle de visualização
/RGB,INDEX,80,80,80,13   !controle de visualização
/RGB,INDEX,60,60,60,14   !controle de visualização
/RGB,INDEX,0,0,0,15      !controle de visualização

ESEL,S,SEC,,1,2,1        !seleciona elementos por seção
/TRLCY,ELEM,0.9          !controle de visualização
/NUMBER,1                !controle de visualização
/PNUM,ELEM,1             !controle de visualização

ESEL,ALL                 ;seleciona todos os elementos
ESEL,U,SEC,,1,2,1        !desmarca elementos por seção
/TRLCY,ELEM,0            !controle de visualização
/NUMBER,1                !controle de visualização
/PNUM,ELEM,1             !controle de visualização

ESEL,ALL                 !seleciona todos os elementos
/ESHAPE,1                !controle de visualização
/REPLOT                  !controle de visualização

!=====
! 6. SOLUÇÃO E PÓS-PROCESAMENTO
!=====
/SOLU                    !inicia processo de solução
SOLCONTROL,ON,,INCP     !define controles para análise não-linear
NLDIAG,NRRE,1           !salva forças e momentos residuais
OUTRES,LOCI             !salva coordenadas dos pontos de integração
LSSOLVE,1,2,1,          !define etapas de carregamento
FINISH                   !termina processo de solução

```

## A.2 Exemplo de *script* para traçado de curva carga-flecha da laje S2 de Abdul-Wahab e Khalil (2000)

```

/POST26                                !pós-processamento
NSOL,2,NOMV,U,Z,UZ                     !armazena valores de deslocamento em Z
NSEL,S,LOC,X,0                          !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw                        !seleciona nós
NSEL,A,LOC,Y,0                          !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw                        !seleciona nós
NSEL,A,LOC,X,150                        !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw                        !seleciona nós
NSEL,A,LOC,Y,150                        !seleciona nós
NSEL,R,LOC,Z,-hw                        !seleciona nós
*GET,NUMNOD,NODE,0,COUNT                 !seleciona nós nas reações de apoio
*GET,CURNOD,NODE,0,NUM,MIN               !seleciona coordenadas dos nós nas reações de apoio
*DO,I,1,NUMNOD
    RFORCE,4,CURNOD,F,Z                 !salva a força total de reação
    ADD,3,3,4,SOMA                       !soma variáveis
    CURNOD=NDNEXT(CURNOD)               !atualiza a variável
*ENDDO
*SET,FATOR1,-1.00                       !variável auxiliar
PROD,2,2,,,,,FATOR1                    !ajuste do sinal dos deslocamentos
/GTHK,CURVE,2                           !controle de visualização
/GROPT,FILL,OFF                          !controle de visualização
/AXLAB,Y,CARGA FZ [kN]                  !controle de visualização
/AXLAB,X,FLECHA UZ [cm]                 !controle de visualização
XVAR,2                                   !eixo X do diagrama
PLVAR,3                                  !eixo Y do diagrama
PRVAR,2,3                                !quadro dos resultados
FINISH                                   !termina pós-processamento

```

### A.3 Exemplo de *script* para laje de Scordelis, Lin e Itaya (1959)

```

!*****
!* Programador: Igor Ayala
!* Arquivo: LAJE DE SCORDELIS, LIN E ITAYA
!* Unidades: kN,cm
!*****

! Inicializando
! -----
/NOPR
FINISH
/CLEAR,NOSTART
/NOPR
/PMETH,OFF,0
/TITLE,LAJE DE SCORDELIS, LIN E ITAYA (1959)

! Endereço de armazenamento
! -----
ADDRESS = 'C:\Users\pc\Desktop\SLI59'
/CWD,ADDRESS

!=====
! 1. ENTRADA DE DADOS
!=====

! Dados: Pavimento
! -----
*SET,L,15*30.48           !comprimento
*SET,hf,3*2.54           !espessura
*SET,load,370*0.00004788026 !carga distribuída
*SET,nv0,30              !discretização
*SET,a0,L/nv0            !separação
*SET,a2,a0/4             !separação

! Dados: Armadura protendida
! -----
*SET,As,0.317            !área barra
*SET,d1,hf/2             !altura útil 1
*SET,d2,hf/2+0.1        !altura útil 2
*SET,nb,12               !número de barras
*SET,nv,24               !discretização
*SET,a1,L/nv             !separação
*SET,sep,2*a1            !espaçamento

! Dados: Armadura passiva
! -----
*SET,Asm,0.0314159265358959 !área de aço por barra
*SET,sepm,2*2.54/a1       !espaçamento barras
*SET,coorz1,.50           !cobrimento
*SET,coorz2,.50           !cobrimento

! Dados: Concreto
! -----
*SET,Ecl,4150*0.6894757   !módulo de elasticidade
*SET,v1,0.14              !coeficiente de Poisson
*SET,fc1,5*0.6894757     !resistência à compressão

! Dados: Aço da armadura protendida
! -----
*SET,Es2,29400*0.6894757  !módulo de elasticidade
*SET,v2,0.3               !coeficiente de Poisson
*SET,fptk,170*0.6894757  !tensão de escoamento
*SET,sigma0,140*0.6894757 !tensão inicial de protensão
*SET,tp,28                !data de protensão

```



```

! Dados: Aço da armadura passiva
! -----
*SET,Es3,21000                !módulo de elasticidade
*SET,v3,0.3                  !coeficiente de Poisson
*SET,fy3,40*0.6894757       !tensão de escoamento
*SET,Es33,Es3/100           !módulo de elasticidade placa

!=====
! 2. PARÂMETRO DOS ELEMENTOS E MATERIAIS
!=====
/PREP7                        !pré-processamento

! Elemento: Pavimento
! -----
ET,1,281                      !elemento de casca
KEYOPT,1,8,2                 !armazenamento de resultados em todas as camadas
SECTYPE,1,SHELL              !associa o tipo de elemento definido
SECDATA,hf,1,,5             !espessura,material,,número de pontos de integração
SECOFFSET,BOT                !offset na face inferior
SECCONTROL,,,,,,,,          !controles de propriedades padrão

! Elemento: Armadura de protensão
! -----
ET,2,180                     !elemento de treliça
KEYOPT,2,3,1                 !opção de só tração
SECTYPE,2,LINK               !associa o tipo de elemento definido
SECDATA,As                   !área da seção transversal

! Elemento: Ancoragem
! -----
ET,3,184                     !elemento de conector rígido
KEYOPT,3,1,1                 !comportamento do elemento tipo viga rígida
KEYOPT,3,2,1                 !método de redução por multiplicadores de Lagrange

! Material: Concreto
! -----
TB,USER,1,2,5                !modelo da usermat,temperaturas,constantes
TBTEMP,1.0                   !primeira temperatura
TBDATA,,Ec1,v1,fc1,2,23.002 !temperatura,Ec,v,fc,agregado,etapas cálculo
TB,STATE,1,,8               !variáveis de estado
MPTEMP,1,0                   !define temperatura
MPDATA,DENS,1,,2.5484E-8    !define densidade

! Material: Aço da armadura protendida
! -----
TB,USER,2,2,5                !modelo da usermat
TBTEMP,1.0                   !primeira temperatura
TBDATA,,Es2,v2,fptk,sigma0,tp !Es,v,fptk,sigma inicial,tp
TB,STATE,1,,8               !variáveis de estado

! Material: Aço da armadura passiva
! -----
MPTEMP,1,0                   !primeira temperatura
MPDATA,EX,3,,Es3            !módulo de elasticidade,material,,Es
MPDATA,PRXY,3,,v3           !coeficiente de Poisson,material,,v
TB,BISO,3,1,2,              !modelo bilinear,material,temperaturas,constantes
TBTEMP,0                     !primeira temperatura
TBDATA,,fy3,Es33,,,,        !fy,Es

!=====
! 3. GEOMETRIA E MESH
!=====
/VIEW,1,,-1                  !controle de visualização
/ANG,1                        !controle de visualização
/ANG,1,30,XS,1               !controle de visualização
/ANG,1,30,YS,1               !controle de visualização

```

```

! Geometria: Pavimento
! -----
*DO,i,1,nv+2,1 !inicia automatização para definir áreas
  *IF,i,LT,2,THEN
    *SET,sep1,a0
    *SET,coorx,0
  *ELSEIF,i,LT,3,THEN
    *SET,sep1,a2
    *SET,coorx,a0
  *ELSEIF,i,LT,nv+1,THEN
    *SET,sep1,a1
    *SET,coorx,a0+a2+(i-3)*a1
  *ELSEIF,i,LT,nv+2,THEN
    *SET,sep1,a2
    *SET,coorx,a0+a2+(i-3)*a1
  *ELSE
    *SET,sep1,a0
    *SET,coorx,a0+a2+(i-4)*a1+a2
  *ENDIF
*DO,j,1,5,1
  *IF,j,LT,2,THEN
    *SET,sep2,a0
    *SET,coory,0
  *ELSEIF,j,LT,3,THEN
    *SET,sep2,a2
    *SET,coory,a0
  *ELSEIF,j,LT,4,THEN
    *SET,sep2,(nb-1)*2*a1
    *SET,coory,a0+a2
  *ELSEIF,j,LT,5,THEN
    *SET,sep2,a2
    *SET,coory,a0+a2+(nb-1)*2*a1
  *ELSE
    *SET,sep2,a0
    *SET,coory,a0+a2+(nb-1)*2*a1+a2
  *ENDIF
  BLC4,coory,coorx,sep2,sep1
*ENDDO
*ENDDO !termina automatização para definir áreas

! Geometria: Armadura de protensão
! -----
*DO,i,1,nb,1 !inicia automatização para definir keypoints
*DO,j,1,nv/2+2,1
  *IF,j,LT,3,THEN
    coorA=(a0*(j-1))/2.54
  *ELSEIF,j,LT,4,THEN
    coorA=(a0+a2)/2.54
  *ELSE
    coorA=(a0+a2+(j-3)*a1)/2.54
  *ENDIF
  *IF,coorA,LT,19.9,THEN
    coorC=-0.035778895*coorA
  *ELSEIF,coorA,LT,66,THEN
    coorC=0.0010919813*coorA**2-0.0784708314*coorA+0.4011947459
  *ELSEIF,coorA,LT,72,THEN
    coorC=0.0667*coorA-4.4023
  *ELSE
    coorC=-0.0017546043*coorA**2+0.3149424606*coorA-13.132554636
  *ENDIF
  coorB=a0+a2+(i-1)*2*a1
  K,1000+j+(i-1)*(nv+4),coorA*2.54,coorB,coorC*2.54+d1
  K,2000+j+(i-1)*(nv+4),coorB,coorA*2.54,coorC*2.54+d2
  *IF,j,LT,nv/2+2,THEN
    K,1000-j+(nv+4)+(i-1)*(nv+4),L-coorA*2.54,coorB,coorC*2.54+d1
    K,2000-j+(nv+4)+(i-1)*(nv+4),coorB,L-coorA*2.54,coorC*2.54+d2
  *ENDIF
*ENDDO

```

```

*ENDDO                                !termina automatização para definir keypoints

*SET,aux1,1                            !inicia automatização para definir linhas
*DO,i,1,nb,1
*DO,j,1,nv+2,1
  *IF,aux1,EQ,i,THEN
    LSTR,1000+j+(i-1)*(nv+4),1000+j+1+(i-1)*(nv+4)
    LSTR,2000+j+(i-1)*(nv+4),2000+j+1+(i-1)*(nv+4)
  *ELSE
    aux1=i
    LSTR,1000+j+(i-1)*(nv+4),1000+j+1+(i-1)*(nv+4)
    LSTR,2000+j+(i-1)*(nv+4),2000+j+1+(i-1)*(nv+4)
  *ENDIF
*ENDDO
*ENDDO                                !termina automatização para definir linhas

! Mesh: Pavimento
! -----
TYPE, 1                                !seleciona elemento
MAT, 1                                 !seleciona material
REAL, 1                                !seleciona constante real
ESYS, 0                                !define sistema de coordenadas
SECTNUM,1                              !define conjunto de seções

ASEL,ALL                               !seleciona todas as áreas
AESIZE,ALL,a1                          !divide áreas
MSHAPE,0,2D                            !define elementos 2D
MSHKEY,1                                !define discretização mapeada
ASEL,ALL                               !seleciona todas as áreas
AMESH,ALL                              !discretiza as áreas selecionadas

! Mesh: Armadura protendida
! -----
TYPE, 2                                !seleciona elemento
MAT, 2                                 !seleciona material
REAL, 2                                !seleciona constante real
ESYS, 0                                !define sistema de coordenadas
SECTNUM,2                              !define conjunto de seções

LSEL,ALL                               !seleciona todas as linhas
LSEL,U,LINE,,1,(nv+2)*5*4,1           !desmarca linhas
LESIZE,ALL,,,,1,,,,1                 !divide linhas
LMESH,ALL                              !discretiza as linhas selecionadas

NUMMRG,NODE,,,,LOW                    !merge de nós
NUMCMP,NODE                            !renumeração de nós

! Mesh: Ancoragem
! -----
TYPE,3                                  !seleciona elemento
MAT, 2                                 !seleciona material
REAL,3                                  !seleciona constante real
ESYS,0                                  !define sistema de coordenadas
SECTNUM,3                              !define conjunto de seções

*DO,i,1,nb,1                            !inicia automatização para definir elementos
  NOMA=NODE(a0+a2+(i-1)*2*a1,0,0)
  NOMB=NODE(a0+a2+(i-1)*2*a1,0,d2)
  NOMC=NODE(a0+a2+(i-1)*2*a1,L,0)
  NOMD=NODE(a0+a2+(i-1)*2*a1,L,d2)
  E,NOMA,NOMB
  E,NOMC,NOMD
  NOME=NODE(0,a0+a2+(i-1)*2*a1,0)
  NOMF=NODE(0,a0+a2+(i-1)*2*a1,d1)
  NOMG=NODE(L,a0+a2+(i-1)*2*a1,0)
  NOMH=NODE(L,a0+a2+(i-1)*2*a1,d1)
  E,NOME,NOMF
  E,NOMG,NOMH

```

```

*ENDDO                                     !termina automatização para definir elementos

! Mesh: Acoplamento de nós
! -----
*DO, i, 1, nb/2, 1                         !inicia automatização para acoplar graus de
liberdade
    coorA=(a0+a2+(i-1)*2*a1)/2.54
    *IF, coorA, LT, 19.9, THEN
        coorC1=-0.035778895*coorA
    *ELSEIF, coorA, LT, 66, THEN
        coorC1=0.0010919813*coorA**2-0.0784708314*coorA+0.4011947459
    *ELSEIF, coorA, LT, 72, THEN
        coorC1=0.0667*coorA-4.4023
    *ELSE
        coorC1=-0.0017546043*coorA**2+0.3149424606*coorA-13.132554636
    *ENDIF
*DO, j, 1, nb/2, 1
    coorB=(a0+a2+(j-1)*2*a1)/2.54
    *IF, coorB, LT, 19.9, THEN
        coorC2=-0.035778895*coorB
    *ELSEIF, coorB, LT, 66, THEN
        coorC2=0.0010919813*coorB**2-0.0784708314*coorB+0.4011947459
    *ELSEIF, coorB, LT, 72, THEN
        coorC2=0.0667*coorB-4.4023
    *ELSE
        coorC2=-0.0017546043*coorB**2+0.3149424606*coorB-13.132554636
    *ENDIF
    NOM1=NODE (coorA*2.54, coorB*2.54, 0)
    NOM2=NODE (coorA*2.54, coorB*2.54, coorC1*2.54+d1)
    NOM3=NODE (coorA*2.54, coorB*2.54, coorC2*2.54+d2)
    NOM4=NODE (L-coorA*2.54, coorB*2.54, 0)
    NOM5=NODE (L-coorA*2.54, coorB*2.54, coorC1*2.54+d1)
    NOM6=NODE (L-coorA*2.54, coorB*2.54, coorC2*2.54+d2)
    NOM7=NODE (coorA*2.54, L-coorB*2.54, 0)
    NOM8=NODE (coorA*2.54, L-coorB*2.54, coorC1*2.54+d1)
    NOM9=NODE (coorA*2.54, L-coorB*2.54, coorC2*2.54+d2)
    NOM10=NODE (L-coorA*2.54, L-coorB*2.54, 0)
    NOM11=NODE (L-coorA*2.54, L-coorB*2.54, coorC1*2.54+d1)
    NOM12=NODE (L-coorA*2.54, L-coorB*2.54, coorC2*2.54+d2)
    CP, NEXT, UZ, NOM1, NOM2, NOM3
    CP, NEXT, UZ, NOM4, NOM5, NOM6
    CP, NEXT, UZ, NOM7, NOM8, NOM9
    CP, NEXT, UZ, NOM10, NOM11, NOM12
    CP, NEXT, UY, NOM1, NOM2
    CP, NEXT, UX, NOM1, NOM3
    CP, NEXT, UY, NOM4, NOM5
    CP, NEXT, UX, NOM4, NOM6
    CP, NEXT, UY, NOM7, NOM8
    CP, NEXT, UX, NOM7, NOM9
    CP, NEXT, UY, NOM10, NOM11
    CP, NEXT, UX, NOM10, NOM12
*ENDDO
*ENDDO                                     !termina automatização para acoplar graus de
liberdade

*DO, i, 1, nb/2+1, 1                       !inicia automatização para acoplar graus de
liberdade
    *IF, i, LT, 2, THEN
        coorA=(a0)/2.54
    *ELSE
        coorA=(a0+a2+a1+(i-2)*2*a1)/2.54
    *ENDIF
    *IF, coorA, LT, 19.9, THEN
        coorC1=-0.035778895*coorA
    *ELSEIF, coorA, LT, 66, THEN
        coorC1=0.0010919813*coorA**2-0.0784708314*coorA+0.4011947459
    *ELSEIF, coorA, LT, 72, THEN
        coorC1=0.0667*coorA-4.4023

```

```

*ELSE
    coorC1=-0.0017546043*coorA**2+0.3149424606*coorA-13.132554636
*ENDIF
*DO, j, 1, nb/2, 1
    coorB=(a0+a2+(j-1)*2*a1)/2.54
    *IF, coorB, LT, 19.9, THEN
        coorC2=-0.035778895*coorB
    *ELSEIF, coorB, LT, 66, THEN
        coorC2=0.0010919813*coorB**2-0.0784708314*coorB+0.4011947459
    *ELSEIF, coorB, LT, 72, THEN
        coorC2=0.0667*coorB-4.4023
    *ELSE
        coorC2=-0.0017546043*coorB**2+0.3149424606*coorB-13.132554636
    *ENDIF
    NOM1=NODE (coorA*2.54, coorB*2.54, 0)
    NOM2=NODE (coorA*2.54, coorB*2.54, coorC1*2.54+d1)
    NOM7=NODE (coorA*2.54, L-coorB*2.54, 0)
    NOM8=NODE (coorA*2.54, L-coorB*2.54, coorC1*2.54+d1)
    CP, NEXT, UZ, NOM1, NOM2
    CP, NEXT, UZ, NOM7, NOM8
    CP, NEXT, UY, NOM1, NOM2
    CP, NEXT, UY, NOM7, NOM8
    *IF, i, LT, nb/2+1, THEN
        NOM4=NODE (L-coorA*2.54, coorB*2.54, 0)
        NOM5=NODE (L-coorA*2.54, coorB*2.54, coorC1*2.54+d1)
        NOM10=NODE (L-coorA*2.54, L-coorB*2.54, 0)
        NOM11=NODE (L-coorA*2.54, L-coorB*2.54, coorC1*2.54+d1)
        CP, NEXT, UZ, NOM4, NOM5
        CP, NEXT, UZ, NOM10, NOM11
        CP, NEXT, UY, NOM4, NOM5
        CP, NEXT, UY, NOM10, NOM11
    *ENDIF
*ENDDO
*ENDDO                                     !termina automatização para acoplar graus de
liberdade
*DO, i, 1, nb/2, 1                           !inicia automatização para acoplar graus de
liberdade
    coorA=(a0+a2+(i-1)*2*a1)/2.54
    *IF, coorA, LT, 19.9, THEN
        coorC1=-0.035778895*coorA
    *ELSEIF, coorA, LT, 66, THEN
        coorC1=0.0010919813*coorA**2-0.0784708314*coorA+0.4011947459
    *ELSEIF, coorA, LT, 72, THEN
        coorC1=0.0667*coorA-4.4023
    *ELSE
        coorC1=-0.0017546043*coorA**2+0.3149424606*coorA-13.132554636
    *ENDIF
*DO, j, 1, nb/2+1, 1
    *IF, j, LT, 2, THEN
        coorB=(a0)/2.54
    *ELSE
        coorB=(a0+a2+a1+(j-2)*2*a1)/2.54
    *ENDIF
    *IF, coorB, LT, 19.9, THEN
        coorC2=-0.035778895*coorB
    *ELSEIF, coorB, LT, 66, THEN
        coorC2=0.0010919813*coorB**2-0.0784708314*coorB+0.4011947459
    *ELSEIF, coorB, LT, 72, THEN
        coorC2=0.0667*coorB-4.4023
    *ELSE
        coorC2=-0.0017546043*coorB**2+0.3149424606*coorB-13.132554636
    *ENDIF
    NOM1=NODE (coorA*2.54, coorB*2.54, 0)
    NOM3=NODE (coorA*2.54, coorB*2.54, coorC2*2.54+d2)
    NOM4=NODE (L-coorA*2.54, coorB*2.54, 0)
    NOM6=NODE (L-coorA*2.54, coorB*2.54, coorC2*2.54+d2)
    CP, NEXT, UZ, NOM1, NOM3

```

```

CP, NEXT, UZ, NOM4, NOM6
CP, NEXT, UX, NOM1, NOM3
CP, NEXT, UX, NOM4, NOM6
*IF, j, LT, nb/2+1, THEN
    NOM7=NODE (coorA*2.54, L-coorB*2.54, 0)
    NOM9=NODE (coorA*2.54, L-coorB*2.54, coorC2*2.54+d2)
    NOM10=NODE (L-coorA*2.54, L-coorB*2.54, 0)
    NOM12=NODE (L-coorA*2.54, L-coorB*2.54, coorC2*2.54+d2)
    CP, NEXT, UZ, NOM7, NOM9
    CP, NEXT, UZ, NOM10, NOM12
    CP, NEXT, UX, NOM7, NOM9
    CP, NEXT, UX, NOM10, NOM12
*ENDIF
*ENDDO
*ENDDO !termina automatização para acoplar graus de
liberdade

! Mesh: Armadura passiva
! -----
*SET, Isecao, 3 !define variável auxiliar
*DO, i, 1, 9, 1 !inicia automatização para definir armadura
    aux1=2*2.54*i
    *IF, aux1, LT, a0, THEN
        *SET, coorx, aux1/a0
    *ELSEIF, aux1, LT, a0+a2, THEN
        *SET, coorx, 1+(aux1-a0)/a2
    *ELSE
        *SET, coorx, 2+(aux1-a0-a2)/a1
    *ENDIF
    Ielem=1
    *IF, coorx, LT, 1, THEN
        Isecao=Isecao+1
    *ELSE
        *DO, j, 1, 20, 1
            coorx=coorx-1
            Ielem=Ielem+nv+2
            *IF, coorx, LT, 1, EXIT
        *ENDDO
        Isecao=Isecao+1
    *ENDIF
    SECTYPE, Isecao, REINF, DISC
    SECDATA, 3, Asm, EDGO, 1, coorx, coorz1, coorx, coorz1
    ESEL, S, ELEM, , Ielem, , Ielem+2, , 1
    ESEL, A, ELEM, , Ielem+(nv+2)/2-1, Ielem+(nv+2)/2, 1
    ESEL, A, ELEM, , Ielem+(nv+2-3), Ielem+(nv+2-1), 1
    SECNUM, Isecao
    EREINF
*ENDDO !termina automatização para definir armadura

*DO, i, 1, 9, 1 !inicia automatização para definir armadura
    aux1=2*2.54*i
    *IF, aux1, LT, a0, THEN
        *SET, coorx, aux1/a0
    *ELSEIF, aux1, LT, a0+a2, THEN
        *SET, coorx, 1+(aux1-a0)/a2-0.000000001
    *ELSE
        *SET, coorx, 2+(aux1-a0-a2)/a1
    *ENDIF
    Ielem=1+(nv+2)*(nv+1)
    *IF, coorx, LT, 1, THEN
        Isecao=Isecao+1
        coorx=1-coorx
    *ELSE
        *DO, j, 1, 20, 1
            coorx=coorx-1
            Ielem=Ielem-nv-2
            *IF, coorx, LT, 1, THEN
                coorx=1-coorx

```

```

                *ENDIF
                *IF, coorx, LT, 1, EXIT
            *ENDDO
            Isecao=Isecao+1
        *ENDIF
        SECTYPE, Isecao, REINF, DISC
        SECADATA, 3, Asm, EDGo, 1, coorx, coorz1, coorx, coorz1
        ESEL, S, ELEM, , Ielem, , Ielem+2, , 1
        ESEL, A, ELEM, , Ielem+(nv+2)/2-1, Ielem+(nv+2)/2, 1
        ESEL, A, ELEM, , Ielem+(nv+2-3), Ielem+(nv+2-1), 1
        SECNUM, Isecao
        EREINF
*ENDDO !termina automatização para definir armadura

*DO, i, 1, 9, 1 !inicia automatização para definir armadura
    aux1=2*2.54*i
    *IF, aux1, LT, a0, THEN
        *SET, coory, aux1/a0
    *ELSEIF, aux1, LT, a0+a2, THEN
        *SET, coory, 1+(aux1-a0)/a2
    *ELSE
        *SET, coory, 2+(aux1-a0-a2)/a1
    *ENDIF
    Ielem=1
    *IF, coory, LT, 1, THEN
        Isecao=Isecao+1
    *ELSE
        *DO, j, 1, 20, 1
            coory=coory-1
            Ielem=Ielem+1
            *IF, coory, LT, 1, EXIT
        *ENDDO
        Isecao=Isecao+1
    *ENDIF
    SECTYPE, Isecao, REINF, DISC
    SECADATA, 3, Asm, EDGo, 2, coory, coorz1, coory, coorz1
    ESEL, S, ELEM, , Ielem, , Ielem+1+(nv+2)*2, , nv+2
    ESEL, A, ELEM, , Ielem+(nv+2-14)*(nv+2), Ielem+(nv+2-14)*(nv+2)+(nv+2)*1, , nv+2
    ESEL, A, ELEM, , Ielem+(nv+2-3)*(nv+2), Ielem+1+(nv+2-3)*(nv+2)+(nv+2)*2, , nv+2
    SECNUM, Isecao
    EREINF
*ENDDO !termina automatização para definir armadura

*DO, i, 1, 9, 1 !inicia automatização para definir armadura
    aux1=2*2.54*i
    *IF, aux1, LT, a0, THEN
        *SET, coory, aux1/a0
    *ELSEIF, aux1, LT, a0+a2, THEN
        *SET, coory, 1+(aux1-a0)/a2-0.000000001
    *ELSE
        *SET, coory, 2+(aux1-a0-a2)/a1
    *ENDIF
    Ielem=1+(nv+2)-1
    *IF, coory, LT, 1, THEN
        Isecao=Isecao+1
        coory=1-coory
    *ELSE
        *DO, j, 1, 20, 1
            coory=coory-1
            Ielem=Ielem-1
            *IF, coory, LT, 1, THEN
                coory=1-coory
            *ENDIF
            *IF, coory, LT, 1, EXIT
        *ENDDO
        Isecao=Isecao+1
    *ENDIF
    SECTYPE, Isecao, REINF, DISC

```

```

SECDATA,3,Asm,EDGo,2,coory,coorz1,coory,coorz1
ESEL,S,ELEM,,Ielem,Ielem+1+(nv+2)*2,nv+2
ESEL,A,ELEM,,Ielem+(nv+2-14)*(nv+2),Ielem+(nv+2-14)*(nv+2)+(nv+2)*1,nv+2
ESEL,A,ELEM,,Ielem+(nv+2-3)*(nv+2),Ielem+1+(nv+2-3)*(nv+2)+(nv+2)*2,nv+2
SECNUM,Isecao
EREINF
*ENDDO !termina automatização para definir armadura

*DO,i,1,9,1 !inicia automatização para definir armadura
coorx=(a1-1.27)/a1+2*2.54*(i-1)/a1
Ielem=1+(nv+2)*11
*IF,coorx,LT,1,THEN
Isecao=Isecao+1
*ELSE
*DO,j,1,20,1
coorx=coorx-1
Ielem=Ielem+nv+2
*IF,coorx,LT,1,EXIT
*ENDDO
Isecao=Isecao+1
*ENDIF
SECTYPE,Isecao,REINF,DISC
SECDATA,3,Asm,EDGo,1,coorx,coorz1,coorx,coorz1
ESEL,S,ELEM,,Ielem+12,Ielem+12+1,1
ESEL,A,ELEM,,Ielem,Ielem+2,1
ESEL,A,ELEM,,Ielem+(nv+2)-3,Ielem+(nv+2)-1,1
SECNUM,Isecao
EREINF
*ENDDO !termina automatização para definir armadura

*DO,i,1,9,1 !inicia automatização para definir armadura
coory=(a1-1.27)/a1+2*2.54*(i-1)/a1
Ielem=1+(nv+2)*12
*IF,coory,LT,1,THEN
Isecao=Isecao+1
*ELSE
*DO,j,1,20,1
coory=coory-1
Ielem=Ielem+1
*IF,coory,LT,1,EXIT
*ENDDO
Isecao=Isecao+1
*ENDIF
SECTYPE,Isecao,REINF,DISC
SECDATA,3,Asm,EDGo,2,coory,coorz1,coory,coorz1
ESEL,S,ELEM,,Ielem+11,Ielem+11+(nv+2),nv+2
ESEL,A,ELEM,,Ielem+(nv+2)*11+11,Ielem+(nv+2)*13+11,nv+2
ESEL,A,ELEM,,Ielem-(nv+2)*12+11,Ielem-(nv+2)*10+11,nv+2
SECNUM,Isecao
EREINF
*ENDDO !termina automatização para definir armadura

!=====
! 4. CONDIÇÕES DE CONTORNO
!=====

! Restrições nodais
! -----
NOMV01=NODE(a0+a2+5*a1,a0+a2+5*a1,0) !define nó no médio do painel 1
NOMV02=NODE(a0+a2+5*a1,a0+a2+17*a1,0) !define nó no médio do painel 2
NOMV03=NODE(a0+a2+17*a1,a0+a2+5*a1,0) !define nó no médio do painel 3
NOMV04=NODE(a0+a2+17*a1,a0+a2+17*a1,0) !define nó no médio do painel 4

NOMV11=NODE(a0,a0,0) !define nó de um apoio
NOMV12=NODE(a0,L/2,0) !define nó de um apoio
NOMV13=NODE(a0,-L-a0,0) !define nó de um apoio
NOMV21=NODE(L/2,a0,0) !define nó de um apoio
NOMV22=NODE(L/2,L/2,0) !define nó de um apoio

```



```

NOMV23=NODE (L/2 ,L-a0,0)      !define nó de um apoio
NOMV31=NODE (L-a0,a0 ,0)      !define nó de um apoio
NOMV32=NODE (L-a0,L/2 ,0)     !define nó de um apoio
NOMV33=NODE (L-a0,L-a0,0)     !define nó de um apoio

NMODIF,NOMV11,,,,45,,        !gira as coordenadas do nó em 45 graus
NMODIF,NOMV13,,,,45,,        !gira as coordenadas do nó em 45 graus
NMODIF,NOMV31,,,,45,,        !gira as coordenadas do nó em 45 graus
NMODIF,NOMV33,,,,45,,        !gira as coordenadas do nó em 45 graus

D,NOMV11,UY                   !define restrições
D,NOMV11,UZ                   !define restrições
D,NOMV12,UY                   !define restrições
D,NOMV12,UZ                   !define restrições
D,NOMV13,UX                   !define restrições
D,NOMV13,UZ                   !define restrições
D,NOMV21,UX                   !define restrições
D,NOMV21,UZ                   !define restrições
D,NOMV22,UX                   !define restrições
D,NOMV22,UY                   !define restrições
D,NOMV22,UZ                   !define restrições
D,NOMV23,UX                   !define restrições
D,NOMV23,UZ                   !define restrições
D,NOMV31,UX                   !define restrições
D,NOMV31,UZ                   !define restrições
D,NOMV32,UY                   !define restrições
D,NOMV32,UZ                   !define restrições
D,NOMV33,UY                   !define restrições
D,NOMV33,UZ                   !define restrições

! 1ro caso de carga
! -----
ESEL,S,SEC,,1                 !seleciona elementos por seção
ACEL,0,0,981                  !aplica peso próprio

ALLSEL                         !selecionada todo
ANTYPE,0                      !define análise estática
NROPT,FULL                    !define método de Newton-Raphson
NSUBST,10,100,10             !define os incrementos de carga
NCNV,2                        !define cómo terminar a análise
NEQIT,100                    !define o número de iterações de equilíbrio

CNVTOL,M,,0.2,2,1            !define valores controle de convergência
CNVTOL,F,,0.2,2,1            !define valores controle de convergência
CNVTOL,U,,0.2,2,             !define valores controle de convergência

OUTRES,ALL,ALL                !controle dos resultados salvados
OUTPR,ALL,ALL                 !controle dos resultados visualizados

TIME,1                        !tempo prescrito
ERESX,NO                      !extrapolação dos resultados
LSWRITE,1,                    !salva primeiro caso de carregamento

! 2do caso de carga
! -----
ESEL,S,SEC,,1                 !seleciona elementos por seção
SFE,ALL,2,PRES,,load,,,      !aplica carga distribuída

ALLSEL                         !selecionada todo
ANTYPE,0                      !define análise estática
NROPT,FULL                    !define método de Newton-Raphson
NSUBST,740,5000,740         !define os incrementos de carga
NCNV,2,,5000                 !define cómo terminar a análise
NEQIT,100                    !define o número de iterações de equilíbrio

CNVTOL,M,,0.8,2,1            !define valores controle de convergência
CNVTOL,F,,0.8,2,1            !define valores controle de convergência
CNVTOL,U,,0.8,2,             !define valores controle de convergência

```

```

OUTRES,ALL,ALL           !controle dos resultados salvados
OUTPR,ALL,ALL           !controle dos resultados visualizados

TIME,1                  !tempo prescrito
ERESX,NO                !extrapolação dos resultados
LSWRITE,2,              !salva segundo caso de carregamento

!=====
! 5. VISUALIZAÇÃO (3D)
!=====
/RGB,INDEX,100,100,100,0 !controle de visualização
/RGB,INDEX,80,80,80,13  !controle de visualização
/RGB,INDEX,60,60,60,14  !controle de visualização
/RGB,INDEX,0,0,0,15     !controle de visualização

ESEL,S,SEC,,1           !seleciona elementos por seção
/TRLCY,ELEM,0.9         !controle de visualização
/NUMBER,1               !controle de visualização
/PNUM,ELEM,1           !controle de visualização

ESEL,S,SEC,,2,3,1       !seleciona elementos por seção
/TRLCY,ELEM,0           !controle de visualização
/NUMBER,1               !controle de visualização
/PNUM,ELEM,1           !controle de visualização

ESEL,ALL                !seleciona todos os elementos
/ESHAPE,1               !controle de visualização
/REPLOT                 !controle de visualização

!=====
! 6. SOLUÇÃO E PÓS-PROCESAMENTO
!=====
/SOLU                   !inicia processo de solução
SOLCONTROL,ON,,INCP    !define controles para análise não linear
NLDIAG,NRRE,1          !salva forças e momentos residuais
OUTRES,LOCI            !salva coordenadas dos pontos de integração
LSSOLVE,1,2,1,         !define etapas de carregamento
FINISH                  !termina processo de solução

```