

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Quebra da integrabilidade para um modelo
de tunelamento quântico de três poços**

Karin Wittmann Wilsmann

Porto Alegre
Maio, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Quebra da integrabilidade para um modelo de
tunelamento quântico de três poços*

Karin Wittmann Wilsmann

Dissertação realizada sob orientação da
Prof^a. Dr^a. Angela Foerster e apresen-
tada ao Instituto de Física da UFRGS em
preenchimento parcial dos requisitos para
a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre

Maio, 2017

*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Agradecimentos

- À Prof^a. Dr^a. Angela Foerster, pela estimada orientação e por sua postura serena, objetiva e encorajadora.
- Aos pesquisadores Arlei Tonel, Leandro Ymai e Jon Links pela colaboração no projeto que deu origem à essa dissertação.
- Aos colegas de grupo e amigos, pelas longas e construtivas discussões.
- Aos professores da UFRGS, que contribuíram para a formação do meu conhecimento.
- À minha amada família, Fernando, Thomas e Óliver!

Muito Obrigada!

Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar e investigar um modelo integrável que descreve o tunelamento de bósons entre três condensados de Bose-Einstein acoplados em linha. Aqui, entendemos como modelo integrável, aquele que tem solução exata pelo método algébrico do *Ansatz* de Bethe. Inicialmente, verificamos a integrabilidade do modelo através desse método, o que exigiu uma abordagem mais sofisticada do que a usual, para obtenção de todas as quantidades conservadas. Posteriormente, exploramos a quebra da integrabilidade adicionando um termo ao Hamiltoniano. Esta quebra é analisada através dos níveis de energia e da distribuição estatística dos espaçamentos entre energias, cujo histograma gerou uma distribuição do tipo Wigner-Dyson. Estudamos algumas possíveis dinâmicas quânticas do sistema e apresentamos uma configuração esquemática que lembra um transistor.

Abstract

In this work we present and investigate an integrable model that describes the tunneling of bosons between three coupled aligned Bose-Einstein condensates. Here, integrability means that the model can be exactly solved by the Bethe Ansatz method. Initially we verify the integrability of the model through this method, which requires a more sophisticated approach than usual in order to obtain all conserved quantities. Subsequently, we explore what happens when the integrability is broken by adding a special term to the Hamiltonian. This break is analyzed by means of the energy levels and the statistical energy level spacing distribution, generating a Wigner Dyson distribution. Finally we study the quantum dynamics of the system and present a schematic configuration that resembles a transistor.

Sumário

1	Introdução	6
2	Modelo para três condensados de Bose-Einstein alinhados	10
2.1	Modelo integrável	10
2.1.1	Hamiltoniano	10
2.1.2	Método algébrico do <i>Ansatz</i> de Bethe	12
2.2	Quebra da integrabilidade	17
2.2.1	Hamiltoniano	17
3	Distribuições de energias	20
3.1	Níveis de energia	20
3.2	Distribuição dos espaçamentos dos níveis de energia	22
3.2.1	Caso integrável	22
3.2.2	Caso não integrável	23
3.2.3	Transição de Poisson para Wigner-Dyson	24
3.2.4	Metodologia	26
4	Dinâmica quântica e modelo do tipo transistor	29
4.1	Metodologia	29
4.2	Transistor	30
4.3	Outras dinâmicas	33
4.3.1	Hamiltoniano integrável	33
4.3.2	Hamiltoniano não integrável	35
5	Conclusão	41
5.1	Considerações finais	41
5.2	Perspectiva para o futuro	42
A	Representação matricial do Hamiltoniano e diagonalização exata	43

B	Integrabilidade	46
B.1	Integrabilidade clássica	46
B.2	Integrabilidade quântica	46
C	Álgebra de Yang-Baxter	48
D	Método algébrico de <i>Ansatz</i> de Bethe	52
D.1	<i>Ansatz</i> de Bethe:	54
D.2	Equação de Bethe	56
D.3	Energias	56
E	Modelo para 3 poços ligados em anel	60

Capítulo 1

Introdução

Em 1924, Albert Einstein previu o fenômeno de condensação de bósons. O condensado seria um estado da matéria onde uma grande fração de átomos atingiria o mesmo estado quântico, o estado fundamental. Isso ocorreria a temperaturas próximas do zero absoluto, quando o gás atingisse uma certa densidade crítica e o efeito poderia ser visto em escala macroscópica (entendido posteriormente como uma mudança de fase ou separação de fases) [1]. Essa previsão de Einstein foi inspirada nos estudos desenvolvidos pelo físico indiano Satyendra Nath Bose sobre a mecânica estatística do gás de fótons (partículas idênticas) [2]. Bose havia obtido a Fórmula de Planck para a radiação do corpo negro sem recorrer à física clássica. Seu grande trunfo foi “enxergar” a radiação como um gás de fótons tal que pudesse ser tratada através dos métodos da mecânica estatística de Maxwell, Boltzmann e Gibbs. Einstein generalizou estas ideias para partículas idênticas que pudessem ter massa, o que resultou na equação de estado de um gás ideal quântico, *gás de Bose* e que pode ser explicado através da distribuição estatística de Bose-Einstein [3, 4]. É relevante salientar que o Condensado de Bose-Einstein (CBE) refere-se a partículas não interagentes. O interessante é que em gases reais, o fenômeno clássico de condensação somente acontece se as partículas interagem; presenciamos tal fenômeno no dia-a-dia quando um gás se liquefaz ¹; caso contrário, eles não condensam. Então, como a previsão considera partículas classicamente não interagentes, caso fosse comprovada fisicamente estaria sendo revelado um novo mecanismo físico, um mecanismo de interação puramente quântico: uma correlação entre partículas imposta pela simetria da função de onda [4].

O fenômeno de condensação de Bose-Einstein só foi confirmado em 1995, em um experimento com vapor de rubídio, ⁸⁷Rb, arrefecido a 170 nK, realizado por Eric Cornell, Carl Wieman e colegas [5] que usaram o método de resfriamento desenvolvido por Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji e William D. Phillips, que receberam o Prêmio

¹Einstein apresentou uma analogia clássica entre a condensação gás-líquido de partículas interagentes e não interagentes do CBE. Detalhes podem ser lidos em [4]

Nobel da Física em 1997 [6]. Quatro meses depois, Wolfgang Ketterle do MIT produziu um condensado formado por sódio, ^{23}Na , de forma independente [7, 8]. Cabe acrescentar que no mesmo período, o grupo do Prof. R. Hulet também obteve evidências da formação de um condensado, mas este era formado por um gás de átomos de ^7Li com spin polarizado [9]. Em 2001, Eric Cornell, Carl Wieman e Wolfgang Ketterle ganharam o Prêmio Nobel da Física por esses grandes feitos.

Mais de vinte anos após a descoberta dos condensados de Bose-Einstein, o estudo de átomos ultrafrios continua a prosperar e várias linhas de pesquisas novas se estabeleceram neste contexto. Com o avanço rápido nas técnicas experimentais, diferentes sistemas ultrafrios foram realizados, entre eles estão os condensados moleculares, condensados de átomos de espécies diferentes, condensados espinoriais, condensados de sistemas com poucas partículas, sistemas com dois condensados, gases de férmions degenerados quânticos e muitos outros. Um dos sistemas mais estudado é o modelo de Bose-Hubbard de dois sítios. Este modelo descreve o fenômeno de tunelamento e autoaprisionamento de átomos entre dois condensados [10, 11, 12, 13, 14]. Um modelo simples do tipo Bose-Hubbard (ou *canonical Josephson Hamiltonian*), que descreve dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento Josephson, proposto por Leggett, é dado por [12]:

$$H = \frac{K}{8}(N_1 - N_2)^2 - \frac{\Delta\mu}{2}(N_1 - N_2) - \frac{\epsilon_J}{2}(a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2) \quad (1.1)$$

onde a_i^\dagger e a_i são, respectivamente, os operadores de criação e destruição de partículas e $N_i = a_i^\dagger a_i$, $i = 1, 2$, são os operadores número de átomos de cada condensado i . O parâmetro K é a amplitude de espalhamento de onda-s entre átomos de um mesmo condensado (*bulk modulus*)² enquanto que $\Delta\mu$ refere-se ao potencial externo e ϵ_J é a amplitude de tunelamento de átomos entre os condensados. Apesar de parecer simples, este modelo é relevante porque ele prevê interações lineares e não-lineares entre as partículas, se aproximando mais de comportamentos físico reais [15, 16]. As previsões deste modelo estão de acordo qualitativo com os resultados experimentais [17]. Neste tipo de experimento os parâmetros de interação são controláveis, o que facilitou o estudo do tunelamento quântico e a aplicação do modelo em junções Josephson [18] [19]. Além do mais, verificou-se que este modelo é exatamente solúvel pelo método algébrico do *Ansatz* de Bethe [15].

Historicamente, modelos exatamente solúveis surgiram a partir de 1931, quando Hans Albrecht Bethe desenvolveu o método do *Ansatz* de Bethe para encontrar os autovalores e os autovetores de um modelo quântico unidimensional de muitos corpos [20], o modelo de Heisenberg. Em 1967, C.N. Yang encontrou soluções exatas para o

²Genericamente, *bulk modulus* refere-se ao grau de incompressibilidade: $\sim \frac{\partial\mu}{\partial N}$ [12]

problema de muitos corpos em uma dimensão com interação repulsiva [21, 22]. Posteriormente, em 1978, foi solucionado o modelo de 8-vértices, por R.J.Baxter [23, 24]. Além destes, também o russo Faddeev e o armênio Takhtajam e os teóricos Lieb e Wu [25], entre outros, contribuíram muito para o desenvolvimento desta área. Uma das principais relevâncias dos modelos exatamente solúveis, reside no fato de que muitas vezes não se consegue aplicar com eficiência teorias de campo médio ou teorias da perturbação, devido às grandes flutuações quânticas do sistema. Nessa lógica, o crescente interesse experimental impulsionou a procura por novos modelos integráveis generalizados no cenário de átomos ultrafrios e diferentes modelos foram propostos e investigados.

Neste seguimento, o próximo grande desafio seria encontrar uma generalização do modelo (1.1), como por exemplo um modelo integrável para 3 poços. A razão deste interesse em particular, residia essencialmente em questões como [15]:

1. A possibilidade de ser aplicado em um transistor ultrafrio do tipo CBE.
2. Seria o caminho mais natural para sistemas multi-poços.
3. As conquistas no campo experimental, principalmente na possibilidade do controle de micro armadilhas.

Uma das primeiras tentativas neste sentido, foi um modelo para três poços alinhados e conectados por tunelamento, como segue [15]:

$$H = \Omega_2(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2) + \Omega(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1) + \mu N_1 + \mu N_3 + \mu_2 N_2$$

onde a_i^\dagger e a_i são os operadores de criação e destruição de partícula por poço e N_1 , N_2 e N_3 , são os operadores número de partículas respectivos aos poços 1 (da esquerda), 2 (do meio) e 3 (da direita). O parâmetro Ω_2 denota o tunelamento entre os poços vizinhos e Ω é o parâmetro de tunelamento entre os poços dos extremos, poços 1 e 3. Podemos verificar que apesar deste modelo apresentar termos de tunelamento entre os poços, ele não contempla interação entre partículas, o que é fundamental para uma discussão física do problema. Assim, a busca por modelos integráveis com mais de 2 poços ainda continuava como um campo de estudo em aberto.

Com o propósito de propulsionar a pesquisa nesta área de átomos ultrafrios, nessa dissertação apresentamos e analisamos um modelo quântico unidimensional de três poços de potenciais alinhados, conectados por tunelamento do tipo Josephson, integrável. Para inferir a integrabilidade do Hamiltoniano proposto, utilizamos o método algébrico do *Ansatz* de Bethe [26]. Posteriormente, investigamos o que acontece quando a integrabilidade deste modelo é quebrada e por fim, discutimos algumas das dinâmicas quânticas possíveis e propomos um modelo do tipo transistor. Vale salientar que o

assunto sobre sistemas integráveis e não integráveis passou a ser recentemente bastante discutido e explorado, especialmente após o experimento do grupo do Prof. D. Weiss [27] com condensados de Bose-Einstein de ^{87}Rb , aprisionados em armadilhas dispostas em linha (1D). Neste experimento, foi discutida a questão da não termalização de modelos integráveis. Além do experimento de Weiss, entre outros exemplos, a quebra da integrabilidade também foi investigada em redes de spin e propriedades de transporte [28], bem como no modelo de Lieb-Liniger [29, 30]. Também foi analisada a quebra e suas consequências nas distribuições dos níveis de energia em um modelo atômico-molecular em condensados de Bose-Einstein acoplados, conforme artigo [31].

A dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos o Hamiltoniano para 3 poços e analisamos sua integrabilidade pelo método algébrico do *Ansatz* de Bethe comparando os resultados com a diagonalização exata. Também apresentamos as quantidades conservadas necessárias para integrabilidade do modelo - para isto, utilizamos um método mais sofisticado do que o usual. Em seguida discutimos a quebra da integrabilidade do Hamiltoniano em questão. No capítulo 3 analisamos as distribuições de energia e dos espaçamentos entre energias vizinhas em função das distribuições de Poisson e Wigner-Dyson. Essas distribuições são assinaturas de modelos integráveis e não integráveis, respectivamente. No quarto capítulo estudamos e analisamos as dinâmicas quânticas. Também, é onde apresentamos um modelo do tipo transistor. Nos Apêndices, primeiro apresentamos de modo ilustrativo, os cálculos da diagonalização para alguns casos simples. Em seguida, apresentamos a Álgebra de Yang-Baxter e o Método Algébrico do *Ansatz* de Bethe. No último apêndice, mostramos um possível modelo para 3 condensados de Bose-Einstein dispostos em anel.

Boa parte dos resultados apresentados nesta dissertação é original e constitui a principal contribuição do autor para a área. Estes resultados estão sendo preparados para serem submetidos para publicação em breve, no artigo:

Breaking the integrability in a triple well Bose-Einstein condensate model,
by K. W. Wilsmann, L. H. Ymai, A. P. Tonel, J. Links and A. Foerster (2017).

Capítulo 2

Modelo para três condensados de Bose-Einstein alinhados

2.1 Modelo integrável

2.1.1 Hamiltoniano

Iniciamos apresentando um Hamiltoniano para três condensados de Bose-Einstein alinhados, acoplados por tunelamento:

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + \mu(N_1 - N_2 + N_3) + t_1(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + t_3(a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger), \quad (2.1)$$

onde a_i^\dagger e a_i são respectivamente os operadores de criação e destruição de bósons e $N_i = a_i^\dagger a_i$, ($i = 1, 2, 3$) são os operadores número de bósons de cada condensado i , sendo o número total de bósons $N = N_1 + N_2 + N_3$. Podemos observar que a troca dos índices 1 e 3 deixa o Hamiltoniano acima invariante. O parâmetro U é devido ao acoplamento (amplitude de espalhamento de onda-s) entre os bósons de um mesmo condensado e também entre bósons de condensados diferentes. Já μ é o potencial externo e $t_i = t\alpha_i$, $i = 1$ e 3 , é a amplitude de tunelamento entre os condensados vizinhos, como ilustrado esquematicamente na Figura 2.1. Vale esclarecer que poderíamos ter optado por um sistema de 3 poços dispostos em anel, mas ele não nos pareceu atraente experimentalmente, pois não configura um modelo do tipo transistor (ver apêndice E para maiores detalhes).

Este Hamiltoniano atua do espaço de Fock varrido pelos vetores (não normalizados),

$$|n_1, n_2, n_3\rangle = (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} (a_3^\dagger)^{n_3} |0, 0, 0\rangle, \quad (2.2)$$

onde $|0, 0, 0\rangle$ é o vácuo do espaço de Fock. Assim temos:

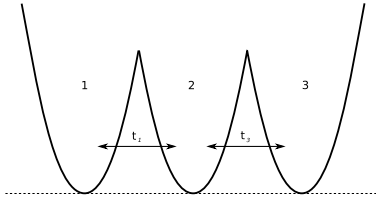


Figura 2.1: Representação esquemática do Hamiltoniano (2.1). As setas t_1 e t_3 representam os acoplamentos para tunelamento entre os poços.

$$\begin{aligned} N_1|n_1, n_2, n_3\rangle &= n_1|n_1, n_2, n_3\rangle, \\ N_2|n_1, n_2, n_3\rangle &= n_2|n_1, n_2, n_3\rangle, \\ N_3|n_1, n_2, n_3\rangle &= n_3|n_1, n_2, n_3\rangle. \end{aligned}$$

Como os vetores de base são determinados univocamente pelos números quânticos n_1 , n_2 e n_3 , ou seja, pelo número de bósons no poço 1, 2 e 3 respectivamente, podemos concluir que nosso modelo tem três graus de liberdade ¹ e portanto, este Hamiltoniano deverá ter três quantidades conservadas para ser integrável. Duas quantidades conservadas já são conhecidas:

N: número total de bósons,

E: energia total, pois o Hamiltoniano não depende do tempo.

Pode-se mostrar que existe uma terceira quantidade conservada independente que é dada por (maiores detalhes serão apresentados na seção 2.1.2):

$$Q = \alpha_1^2 N_3 + \alpha_3^2 N_1 - \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1) \quad (2.3)$$

Assim, para este modelo temos que:

$$[H, N] = 0, \quad [H, Q] = 0, \quad [N, Q] = 0, \quad (2.4)$$

isto é, as três quantidades conservadas comutam entre si.

Mostraremos na próxima seção que o modelo proposto é integrável através do método algébrico do *Ansatz* de Bethe. Este método foi desenvolvido pela escola russa e apresentado primeiramente em 1979, no artigo de Faddeev, [32] (ver também artigos [33, 34, 22]), sendo conhecido também por QISM, *Quantum Inverse Scattering Method*, ou MEQI, Método de Espalhamento Quântico Inverso.

¹Observe que qualquer vetor poderá ser escrito como uma combinação linear de três vetores da base: $\{|1, 0, 0\rangle, |0, 1, 0\rangle, |0, 0, 1\rangle\}$

2.1.2 Método algébrico do *Ansatz* de Bethe

De forma sucinta, este método consiste em:

- 1) Encontrar uma Matriz R que satisfaça a equação de Yang-Baxter;
- 2) Encontrar a matriz de monodromia (T), associada aos operadores Lax, que satisfaça a álgebra de Yang-Baxter para T e a partir da qual se possa definir a matriz de transferência τ . Se a matriz de transferência comutar para valores diferentes do parâmetro espectral, teremos a completa integrabilidade do sistema [22]. Nesse caso, dizemos que o modelo é integrável e que é possível obter solução exata do sistema.
- 3) Encontrar as equações do *Ansatz* de Bethe e as energias (autovalores) do modelo, a partir das quais é possível obter os autovetores do sistema.

I) Iniciaremos definindo a matriz R com invariância $SU(2)$:

$$R(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sendo $b(u) = u/(u + \eta)$ e $c(u) = \eta/(u + \eta)$. Acima, u é o parâmetro espectral e η um parâmetro arbitrário. Podemos verificar que a matriz R satisfaz a equação de Yang-Baxter:

$$R_{12}(u - v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u - v). \quad (2.5)$$

Esta equação atua no produto direto de três espaços $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.

A partir de agora iremos adotar a notação usual, onde $R_{ij}(u)$ denota a matriz R agindo não trivialmente sobre os i -ésimos e j -ésimos espaços e como identidade no espaço restante.

II) Tendo definido a matriz R , a próxima etapa é encontrar a matriz de monodromia $T(u)$,

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

de tal forma que a álgebra de Yang-Baxter para esta matriz seja satisfeita, isto é,

$$R_{12}(u - v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u - v), \quad (2.7)$$

para tanto, vamos introduzir os operadores de Lax [35]:

$$L_a = \begin{pmatrix} uI + \eta(N_1 + N_3) & A_\alpha \\ A_\alpha^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$L_b = \begin{pmatrix} uI + \eta N_2 & a_2 \\ a_2^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

onde I representa o operador identidade, ω é um parâmetro a ser definido posteriormente e

$$A_\alpha = k(\alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3), \quad A_\alpha^\dagger = k(\alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger), \quad k = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2}} \quad (2.10)$$

Adotaremos $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1$ por definição. Os operadores componentes do operador Lax satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [N_i, a_j] &= -a_j \delta_{ij}, & [N_i, a_j^\dagger] &= a_j^\dagger \delta_{ij}, & [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij}, & [A_\alpha, A_\alpha^\dagger] &= 1, \\ [N_1 + N_3, A_\alpha] &= -A_\alpha, & [N_1 + N_3, A_\alpha^\dagger] &= A_\alpha^\dagger. \end{aligned}$$

Agora, definimos a matriz de monodromia como

$$T(u) = L_a(u + \omega)L_b(u - \omega) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{aligned} A(u) &= ((u + \omega)I + \eta(N_1 + N_3))((u - \omega)I + \eta N_2) + A_\alpha a_2^\dagger \\ B(u) &= ((u + \omega)I + \eta(N_1 + N_3))a_2 + \eta^{-1}A_\alpha \\ C(u) &= A_\alpha^\dagger((u - \omega)I + \eta N_2) + \eta^{-1}a_2^\dagger \\ D(u) &= A_\alpha^\dagger a_2 + \eta^{-2}I. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Podemos mostrar que a matriz de monodromia assim definida satisfaz a equação de Yang-Baxter 2.7.

Da equação (2.7), podemos obter várias relações de comutação dos operadores componentes de T . Entre eles, usaremos as relações algébricas seguintes (Apêndice C):

$$\begin{aligned} A(u)C(v) &= \frac{u - v + \eta}{u - v} C(v)A(u) - \frac{\eta}{u - v} C(u)A(v) \\ D(v)C(u) &= -\frac{u - v + \eta}{u - v} C(u)D(v) + \frac{\eta}{u - v} C(v)D(u). \end{aligned}$$

III) Finalmente, vamos definir a matriz de transferência da maneira tradicional,

como traço da matriz de monodromia expandido, isto é:

$$\tau(u) = \text{Tr} [T(u)] = A(u) + D(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2, \quad (2.13)$$

onde c_i , $i = 0, 1, 2$, são as constantes identificadas como

$$\begin{aligned} c_0 &= t \tau(0) = \frac{H}{t} + (\eta^2 \frac{N^2}{4} - \omega^2 + \eta^{-2}) I \\ c_1 &= \frac{d}{du} \tau(u)|_{u=0} = 2\eta N \\ c_2 &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} \tau(u)|_{u=0} = I, \end{aligned}$$

onde I é o operador identidade, $N = N_1 + N_2 + N_3$ é o número total de bósons e H é o Hamiltoniano (2.1). Pode-se ver que as relações de comutação entre as constantes são satisfeitas: $[c_i, c_j] = 0 \quad \forall \quad i, j = 0, 1, 2$. As seguintes identificações para as constantes de acoplamento foram feitas:

$$U = -\frac{t}{4}\eta^2, \quad \mu = -t\eta\omega.$$

Pela equação (2.7), segue que a matriz de transferência comuta para diferentes valores do parâmetro espectral,

$$[\tau(u), \tau(v)] = 0,$$

e conseqüentemente o modelo derivado da matriz de transferência é integrável pelo método algébrico do *Ansatz* de Bethe.

Agora, usando a expressão (2.13) e as constantes definidas acima, podemos escrever o Hamiltoniano em termos da matriz de transferência $\tau(u)$:

$$H = t(\tau(u) + (\omega^2 - u^2 - \eta^{-2})I - u\tau'(0) - \frac{\tau'(0)^2}{4}), \quad (2.14)$$

onde $\tau'(0)$ é a derivação em função do parâmetro espectral u . Segue que o espectro de energias é dado por

$$E = t(\lambda_l(u) + \omega^2 - u^2 - \eta^{-2} - u\eta N - \frac{\eta^2 N^2}{4}), \quad l = 0, \dots, N \quad (2.15)$$

onde $\lambda_l(u)$ são os autovalores da matriz de transferência, que estudaremos com mais detalhes na próxima seção.

Pseudovácuo e a álgebra do *Ansatz* de Bethe

Para aplicar o método algébrico do *Ansatz* de Bethe é preciso determinar o pseudovácuo. Iniciamos definindo o operador Γ :

$$\Gamma = k(\alpha_3 a_1 - \alpha_1 a_3), \quad k = 1 \quad (2.16)$$

que juntamente com o operador A_α (2.10):

$$A_\alpha = k(\alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3), \quad k = 1$$

satisfaz os seguintes comutadores:

$$\begin{aligned} [\Gamma, A_\alpha] &= 0, & [\Gamma, a_2] &= 0, \\ [\Gamma^\dagger, A_\alpha] &= 0, & [\Gamma^\dagger, a_2] &= 0, \\ [N_1 + N_3, (\Gamma^\dagger)^l] &= l(\Gamma^\dagger)^l, & [N_2, (\Gamma^\dagger)^l] &= 0, \\ [\Gamma^\dagger, B(u)] &= -\eta\Gamma^\dagger a_2, & [\Gamma, B(u)] &= \eta\Gamma a_2, \\ [\Gamma^\dagger, C(u)] &= 0, & [\Gamma, C(u)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Seja $|0\rangle$ o estado do vácuo bosônico

$$|0\rangle = |0, 0, 0\rangle = |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle \otimes |0_3\rangle$$

definido pela propriedade

$$a_j|0\rangle = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Então, o pseudovácuo (de fato serão vários pseudovácuos, cada um associado a um l diferente), para o cálculo algébrico do *Ansatz* de Bethe, pode ser definido como

$$|\phi_l\rangle = (\Gamma^\dagger)^l|0\rangle, \quad l \leq N \quad (2.18)$$

que satisfaz as condições necessárias para o método (veja apêndice D),

$$\begin{aligned} A(u)|\phi_l\rangle &= (u + \omega + \eta l)(u - \omega)|\phi_l\rangle \\ B(u)|\phi_l\rangle &= 0 \\ C(u)|\phi_l\rangle &\neq 0 \\ D(u)|\phi_l\rangle &= \eta^{-2}|\phi_l\rangle \end{aligned}$$

Vamos então definir os estados de Bethe a partir dos pseudovácuos por

$$|\psi_l\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i)|\phi_l\rangle, & \text{se } l < N \\ |\phi_N\rangle, & \text{se } l = N \end{cases} \quad (2.19)$$

Queremos resolver o problema de autovalores da matriz de transferência: Os autovalores $\lambda_l(u)$ da matriz de transferência são dados por:

$$\tau(u)|\psi_l\rangle = \lambda_l(u)|\psi_l\rangle. \quad (2.20)$$

Para $l = N$, obtemos os seguintes autovalores da matriz de transferência:

$$\lambda_N(u) = (u + \omega + \eta N)(u - \omega) + \eta^{-2}, \quad l = N \quad (2.21)$$

enquanto que para $l < N$, os autovalores são dados por:

$$\lambda_l(u) = (u + \omega + \eta l)(u - \omega) \prod_{j=1}^{N-l} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-l} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j}. \quad (2.22)$$

Apresentamos agora a equação do *Ansatz* de Bethe, cujas soluções fornecem os parâmetros v_j 's (mais detalhes no apêndice D):

$$\eta^2(v_i + \omega + \eta l)(v_i - \omega) = \prod_{j=1}^{N-l} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad l < N. \quad (2.23)$$

O espectro de energias pode ser calculado através de (2.15). Em particular, para $l = 0$ a expressão (2.15) reduz-se às equações do *Ansatz* de Bethe do modelo de dois poços, ou modelo Bose-Hubbard de dois sítios [15]. Quando $l = N$, a expressão (2.15) resulta em:

$$E = \mu N + U N^2. \quad (2.24)$$

A equação (2.24) nos mostra que existe uma classe de autoestados que admite uma forma simples de energia que não depende do parâmetro de tunelamento, t_i , $i = 1, 3$. Enfim, usando vários pseudovácuos, obtemos todos os autovalores de energia para esse modelo de três poços integrável.

Operador adicional conservado

O modelo que estamos apresentado contém três modos, então a integrabilidade requer três operadores conservados independentes. Entretanto, o método algébrico do *Ansatz* de Bethe apresentado acima fornece somente dois operadores conservados, H (energia) e

N (número total de bósons), pela matriz de transferência. Isso significa que deve existir pelo menos mais um operador independente conservado. Para encontrá-lo, utilizamos o operador Γ e seu conjugado, o mesmo Γ definido na seção anterior quando encontramos os pseudovácuos:

$$Q = \Gamma^\dagger \Gamma = \alpha_1^2 N_3 + \alpha_3^2 N_1 - \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (2.25)$$

Podemos verificar facilmente que o operador Q satisfaz as relações de comutação

$$[H, Q] = 0, \quad [N, Q] = 0. \quad (2.26)$$

Logo, os operadores H , N e Q formam um conjunto de três operadores conservados e linearmente independentes, do modelo. Além disso, o operador Q também satisfaz a relação de comutação

$$[Q, C(u)] = 0 \quad (2.27)$$

o que significa dizer que cada estado de Bethe $|\phi_l\rangle$ definido acima é simultaneamente autoestado do novo operador Q , ou seja,

$$Q|\phi_l\rangle = l|\phi_l\rangle. \quad (2.28)$$

2.2 Quebra da integrabilidade

Basicamente, estudar sistemas não integráveis equivale a estudar modelos caóticos. A “teoria do caos” – o estudo da desordem ordenada, surgiu em 1960, quando um meteorologista do M.I.T, Edward Lorenz desenvolveu modelos computacionais dos padrões do tempo. Desde então, fenômenos da Natureza vêm sendo associados a modelos caóticos. No âmbito da teoria quântica, a quebra da integrabilidade passou a ser recentemente bastante discutido e explorado, especialmente após o experimento do grupo do Prof. D. Weiss [27], onde ele discute a questão da termalização. Além da termalização, tem aumentado o interesse por modelos com quebra de simetria em várias áreas, como por exemplo, na área da informação quântica [28]. Então, nesta seção e no próximo capítulo iremos analisar a quebra da integrabilidade do nosso modelo de 3 poços alinhados.

2.2.1 Hamiltoniano

Propomos para a quebra da integrabilidade do Hamiltoniano (2.1), a soma de um termo a ele, tal que uma das quantidades conservadas (a quantidade conservada não trivial) não comutasse mais com as demais.

Nosso novo Hamiltoniano ficou definido como:

$$H = H_0 + H_1, \quad (2.29)$$

onde

$$H_1 = \delta N_3. \quad (2.30)$$

Assim,

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + \mu(N_1 - N_2 + N_3) + t_1(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) + t_3(a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2) + \delta N_3, \quad (2.31)$$

que resulta nos seguintes comutadores:

$$\begin{aligned} [H_0, H_1] &= \delta t_3(a_2^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_2) \\ [H, Q] &= \delta \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_1) \\ [H, N] &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Portanto, temos agora apenas duas quantidades conservadas, H e N. Quando $\delta = 0$, recuperamos o modelo integrável. Observe que mesmo para $\delta \neq 0$, o Hamiltoniano acima ainda pode ser integrável, desde que $\alpha_3 = 0$. Daqui para frente assumiremos que $\alpha_3 \neq 0$.

É natural ponderar que essa escolha de quebra não é única. Na verdade, poderíamos ter optado por diversos outros termos de quebra, tais como

$$\begin{aligned} H_1 &= t_{13}(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1), \text{ ou} \\ H_1 &= t_{13}(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1 + N_3), \text{ ou} \\ H_1 &= \delta(N_2), \text{ ou} \\ H_1 &= \delta(N_1 - N_2), \text{ ou} \\ H_1 &= \delta(N_1 N_2), \text{ ou} \\ H_1 &= \delta(N_1 - N_2 N_3) \dots \end{aligned}$$

De fato, testamos alguns deles, entretanto, um dos aspectos mais interessantes que pesou na nossa escolha do termo de quebra, foi sua aparente facilidade em ser implementada experimentalmente. O parâmetro δ pode ser tanto um potencial externo como, talvez, uma intervenção na interação entre os bósons do poço 3. Além disso, mostraremos no próximo capítulo que com essa quebra obtemos uma distribuição estatística do tipo Wigner-Dyson, verificando então a não integrabilidade deste novo Hamiltoniano (2.31) através do critério das distribuições dos níveis de energia [36, 37].

Observação: Nós reconhecemos que o novo Hamiltoniano (2.31) é não integrável em relação as quantidades conservadas, pois esse Hamiltoniano tem 3 graus de liberdade e somente duas quantidades conservadas, já que $[H, Q] \neq 0$. Mas, e se existisse alguma outra quantidade conservada Q' , tal que $[H, Q'] = 0$? Isso deixaria o novo Hamiltoniano, H , integrável sob esse ponto de vista! Entretanto, tal operador não pode existir, pois o parâmetro de quebra δ é contínuo, o que inclui o caso onde $\delta = 0$, implicando na seguinte lógica:

Se

$$[H, Q'] = [H_0 + \delta N_3, Q'] = 0 \quad \Rightarrow \quad [H_0, Q'] + [\delta N_3, Q'] = 0,$$

então, em particular, para $\delta = 0$ temos que:

$$[H = H_0, Q'] = 0.$$

Se $[H_0, Q'] = 0$ para $\delta = 0$, logicamente $[H_0, Q'] = 0 \quad \forall \delta$, assim como

$$\delta[N_3, Q'] = 0 \quad \forall \delta.$$

Dessa observação, podemos concluir que Q' também seria uma quantidade conservada de H_0 . Logo, não há como encontrar operadores conservados de H que não sejam também de H_0 . Entretanto, H_0 só tem 3 quantidades conservadas linearmente independentes, pois só tem 3 graus de liberdade. Este argumento mostra, portanto, que o novo Hamiltoniano (2.31) é não integrável.

Capítulo 3

Distribuições de energias

Neste capítulo, primeiramente investigamos a distribuição dos níveis de energia do Hamiltoniano (2.31) com dependência no parâmetro de quebra. Em seguida, exploramos a distribuição dos espaçamentos entre os níveis de energia vizinhos do modelo integrável e na sequência, do modelo não integrável. Discutimos, então, a transição de um modelo para o outro e por fim, apresentamos a metodologia usada para as distribuições dos espaçamentos - os histogramas.

Genericamente, é permitido que sistemas integráveis tenham cruzamentos entre níveis de energia quando um parâmetro do Hamiltoniano é variado (diz-se ter níveis atrativos). Neste caso, quando o sistema tiver mais do que um grau de liberdade, a distribuição típica dos espaçamentos entre níveis de energia vizinhos é exponencial, como se os níveis surgissem de eventos não correlacionados em um processo randômico de Poisson [38, 39, 40, 41, 36]. Por outro lado, sistemas não integráveis tem seus níveis correlacionados, ou seja, seus cruzamentos são altamente improváveis (diz-se ter níveis repulsivos). Basicamente, há três tipos universais de distribuições repulsivas (associados a sistemas caóticos) que são definidas pelo conjunto de matrizes aleatórias de Wigner-Dyson. Nosso modelo não integrável consiste em matrizes $M \times M$ reais e simétricas, com invariância sob reversão temporal [42], então esperamos que o histograma dos espaçamentos entre energias se ajuste a uma distribuição de Wigner-Dyson do tipo GOE: Gaussian Orthogonal Ensemble [37].

3.1 Níveis de energia

Para este estudo, usamos a diagonalização exata do Hamiltoniano (2.31),

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + \mu(N_1 - N_2 + N_3) + t_1(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) + t_3(a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2) + \delta N_3 ,$$

para obtenção das energias do sistema (conforme apêndice A, onde ilustramos dois casos simples). Nos gráficos abaixo, apresentamos quatro exemplos de distribuição dos níveis de energia do Hamiltoniano acima, com dependência no parâmetro de quebra δ . O objetivo é verificar como (e se) os níveis de energia se afastam a medida que incrementamos o parâmetro δ . Fica evidente que em $\delta = 0$ as energias estão mais próximas (*level attraction*), como esperávamos, pois é onde o Hamiltoniano é integrável. Também é visível o afastamento relativo entre os níveis de energia com o aumento do parâmetro δ , tanto para $U > 0$ quanto para $U < 0$. Este resultado está consistente com uma das possíveis definições de integrabilidade listadas no artigo [36]: Um sistema quântico é dito integrável se ele apresentar cruzamentos de níveis, isto é, não apresentar repulsão de níveis. O acúmulo (*cluster*) de níveis para $\delta = 0$ e seu distanciamento para $\delta \neq 0$ também é verificado quando analisamos especificamente os espaçamentos entre as energias, como veremos na próxima seção.

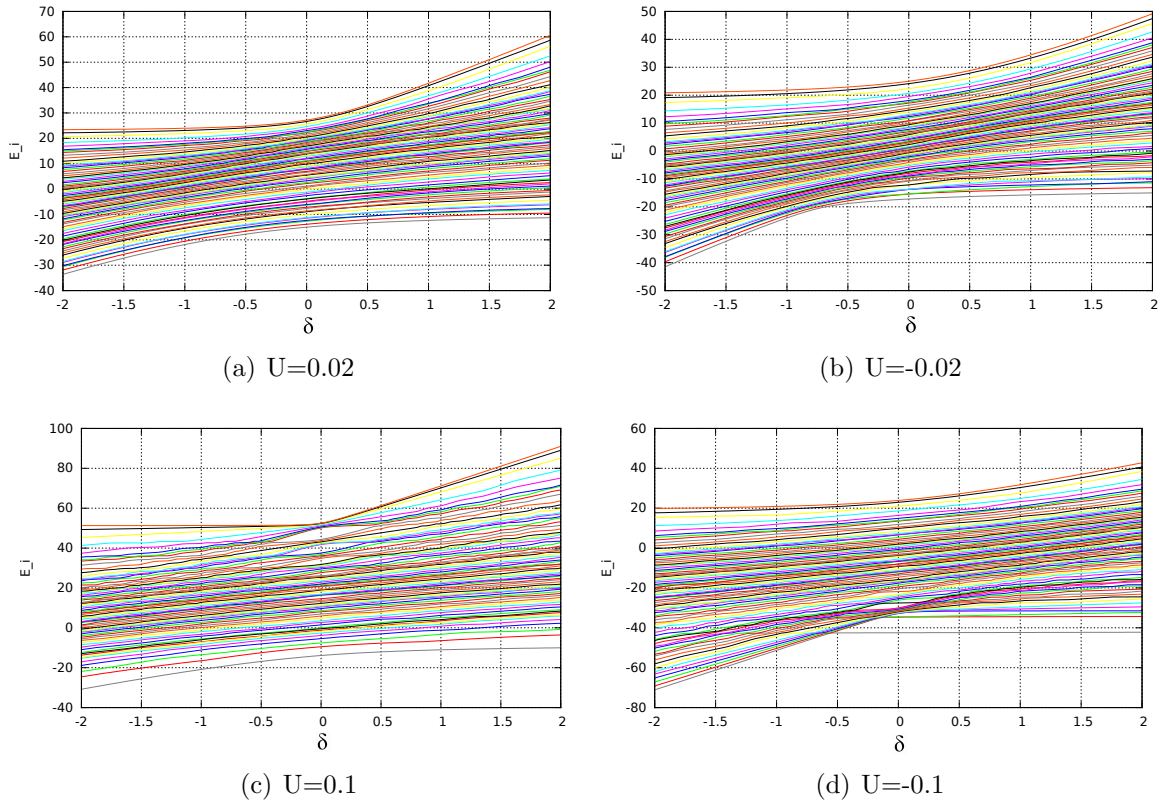


Figura 3.1: Níveis de energia do Hamiltoniano (2.31) em função do parâmetro de quebra δ , para diferentes valores do parâmetro de interação U . Nestes exemplos, é possível ver que próximo ao caso integrável, $\delta = 0$, há um maior acúmulo de níveis de energia e que a partir desse ponto, os níveis tendem a se dispersar, caracterizando modelos não integráveis. Em todos os casos utilizamos $N=20$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$.

3.2 Distribuição dos espaçamentos dos níveis de energia

Vamos verificar agora o que acontece com as distribuições estatísticas dos espaçamentos dos níveis de energia vizinhos do modelo integrável, $\delta = 0$, e do modelo não integrável, $\delta \neq 0$.

3.2.1 Caso integrável

Conforme a seção anterior, sabemos que no modelo integrável ($\delta = 0$), a diferença entre os níveis de energia adjacentes são predominantemente pequenas, o que sugere seu tipo de distribuição. Um exemplo ilustrativo desta distribuição, devidamente normalizada, é apresentada na Figura 3.2:

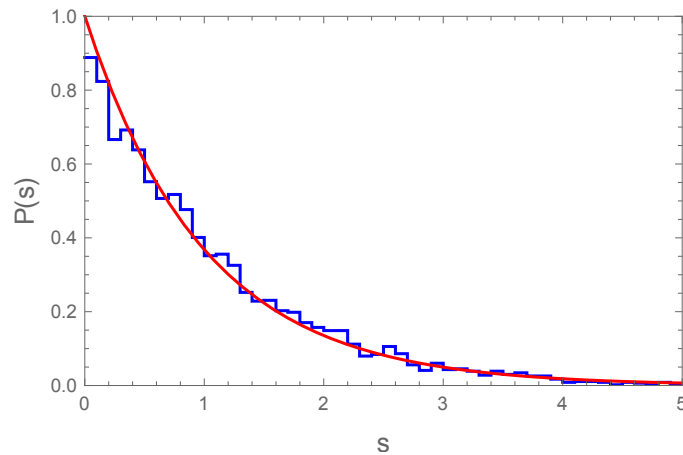


Figura 3.2: Distribuição dos espaçamentos dos níveis adjacentes de energia do Hamiltoniano (2.1) (Hamiltoniano integrável). O histograma (linha azul) gera uma distribuição que se ajusta bem a distribuição estatística de Poisson (linha vermelha). Para gerar a curva, foi utilizado $N = 100$, $U = 0.01$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e $bin = 0.1$.

Podemos verificar que o histograma resultante (linha azul) ajusta-se razoavelmente bem a uma curva de Poisson (linha vermelha), que é definida por:

$$P(s) = \exp(-s) \quad (3.1)$$

onde s é o parâmetro de espaçamento entre níveis adjacentes de energia (bin). Este resultado atende as expectativas, pois modelos integráveis tipicamente apresentam distribuições de Poisson [38, 36]. Observe que, para $s = 0$ temos $P(0) = 1$, ou seja, nesse caso temos predominância de espaçamentos próximos de zero.

3.2.2 Caso não integrável

Apresentamos na Figura 3.3 abaixo, um exemplo ilustrativo de uma distribuição dos espaçamento entre as energias do Hamiltoniano não integrável: Os parâmetros foram

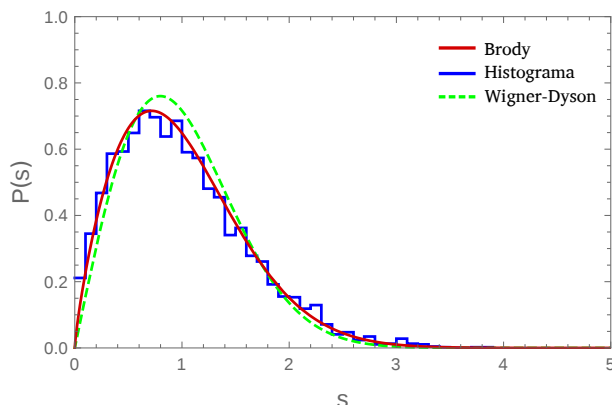


Figura 3.3: Distribuição dos espaçamentos dos níveis adjacentes de energia do Hamiltoniano (2.31) (caso não integrável), com parâmetro de quebra $\delta = -1.318$. O histograma (linha azul) gera uma distribuição do tipo Brody (3.3) (linha vermelha), com $q = 0.81$. Ela se aproxima muito da curva de Wigner-Dyson, onde o parâmetro $q = 1$ (linha tracejada verde). Para gerar este gráfico foi utilizado $N = 100$, $U = \frac{1}{N} = 0.01$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e $bin = 0.1$.

escolhidos de forma a obtermos uma distribuição representativa, dentro dos limites computacionais. Com essa combinação de parâmetros (dentre outras possíveis), obtemos uma distribuição que se aproxima da distribuição de Wigner-Dyson do tipo GOE, definida por [43]:

$$P_{WD}(s) = 2\alpha s \exp(-\alpha s^2), \quad (3.2)$$

onde s é o parâmetro dos espaçamentos dos níveis adjacentes de energia e $\alpha = [\Gamma(\frac{3}{2})]^2$, sendo Γ a função Gamma.

Sabemos que a distribuição de Wigner-Dyson é uma assinatura de modelos não integráveis [37, 36], então o resultado obtido confirma a quebra da integrabilidade do modelo quando temos $\delta \neq 0$. Curvas de Wigner-Dyson também foram verificadas recentemente para vários outros sistemas com quebra de integrabilidade, como por exemplo: sistemas unidimensionais de spins-1/2 interagentes com defeito em determinado sítio [29], da mesma forma, para o modelo de Heisenberg de spin-1/2 com impurezas [28], para um modelo que descreve a interconversão de átomos e moléculas em condensados [31] e para o modelo de Bose-Hubbard 1D para férmions [44]. É interessante acrescentar que este tipo de curva também foi obtido recentemente na análise de dados experimentais obtidos com grafeno [45]. Neste caso, a origem do estado caótico ainda não foi entendido.

3.2.3 Transição de Poisson para Wigner-Dyson

Vimos que para o modelo integrável ($\delta = 0$), as distribuições dos espaçamentos ajustam uma curva de Poisson. Também encontramos uma distribuição próxima a Wigner-Dyson para uma certa configuração do Hamiltoniano não integrável. Entretanto, a obtenção da distribuição de Wigner-Dyson não é imediata. À medida que vamos quebrando a simetria relativo à quantidade conservada Q , enquanto aumentamos o valor de δ , as energias tendem a se afastar entre si e a densidade dos espaçamentos entre elas variam. Próximo ao valor $\delta = 0$, temos uma pequena deformação da distribuição. Variando-o mais, encontramos distribuições do tipo Brody. A distribuição de Brody [42, 46, 47, 48] interpola Wigner-Dyson e Poisson. Ela é definida por [42]:

$$P(s) = \alpha(q + 1) s^q \exp(-\alpha s^{q+1}), \quad (3.3)$$

onde s é parâmetro dos espaçamentos entre níveis adjacentes de energia, $\alpha = [\Gamma(\frac{q+2}{q+1})]^{q+1}$, q fornece uma medida do grau de caoticidade, sendo que Γ é a função Gamma. A distribuição Brody, propriamente dita, aparece no intervalo $0 < q < 1$. Quando $q = 0$, recuperamos a distribuição de Poisson e para $q = 1$ obtemos a distribuição de Wigner-Dyson (3.2).

Um exemplo ilustrativo da variação das curvas de Wigner-Dyson, Brody e Poisson, pode ser visto na Figura 3.4.

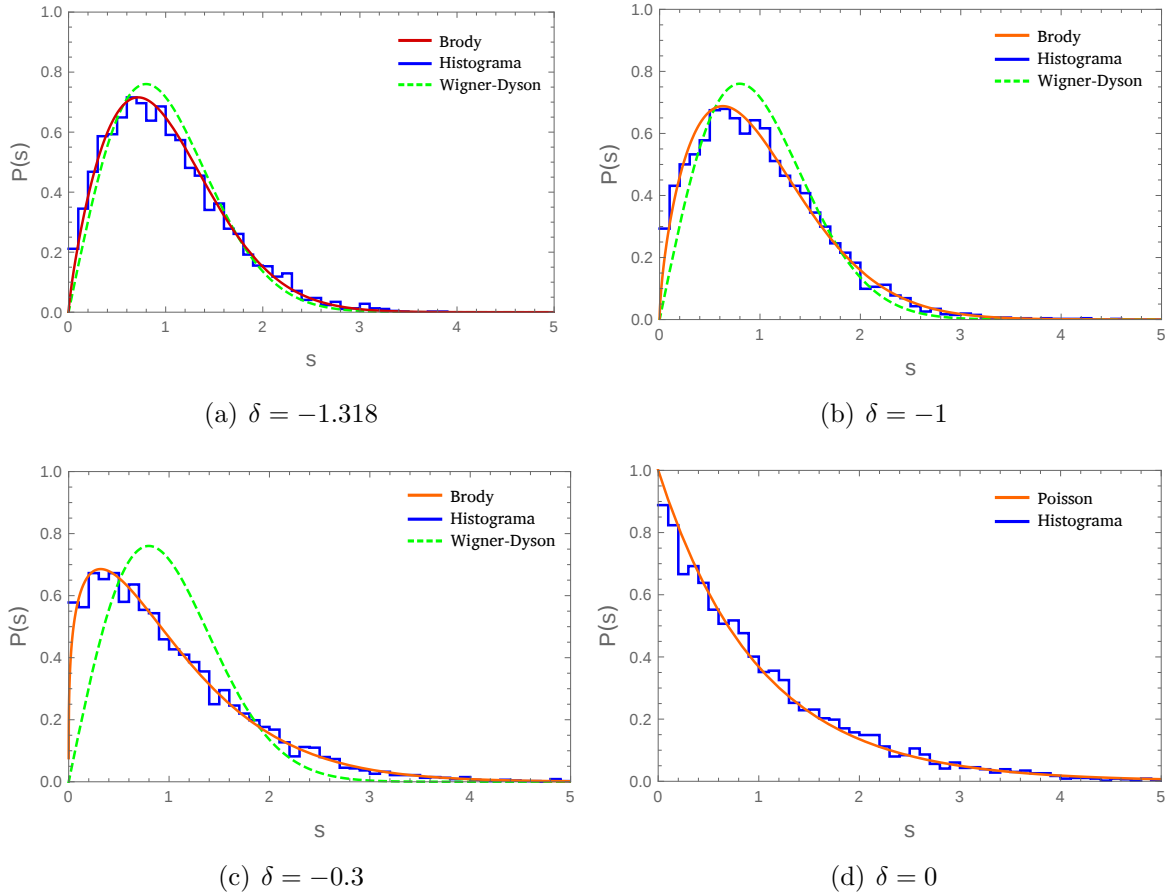


Figura 3.4: O objetivo dessa imagem é mostrar a transição de um estado não integrável (a), cuja densidade de espaçamentos gera uma curva aproximada de Wigner-Dyson (curva tracejada verde), até o estado integrável (d), o qual gera uma distribuição de Poisson (exponencial), intercalado por gráficos com distribuições do tipo Brody (b) e (c), variando somente o parâmetro de quebra δ . Na sequência, $\delta = -1.318$ e $q=0.81$, $\delta = -1$ e $q=0.64$, $\delta = -0.3$ e $q=0.27$, por último, $\delta = 0$ e $q=0$. Em todos casos usamos $N = 100$, $U = 0.01$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e $bin = 0.1$.

3.2.4 Metodologia

Esta seção é dedicada exclusivamente à técnica usada para obtenção das distribuições estatísticas dos espaçamentos entre energias vizinhas, ou seja, os histogramas. O procedimento adotado pelos autores da conjectura Bohigas-Giannoni-Schmit [37], pode ser visto no próprio artigo. A metodologia que adotamos consiste em ordenar os autovalores de energias, E_i , obtidos pela diagonalização exata, por ordem tal que E_0 seja o menor valor de energia e E_{max} o maior valor de energia. As diferenças entre as energias adjacentes, $E_{i+1} - E_i$, gerarão as curvas de densidade. Porém, tem-se alguns cuidados na normalização dos espaçamentos de modo a definir melhor a curva. Há várias maneiras de normalizar as medidas e nós optamos pelo método utilizado por Santos *et al.* [29] que consiste em: 1) Eliminar 5% das energias dos dois extremos (veremos que isso não é regra, mas melhora a curva em alguns casos, cujos extremos são muito discrepantes). 2) Dividir os espaçamentos em grupos de 10 (por exemplo) elementos ordenados. 3) Normalizar os espaçamentos, dividindo cada elemento do grupo pela média aritmética do grupo. 4) Por último e o mais delicado, encontrar um bin¹ adequado para gerar os gráficos de densidade, o histograma². Finalmente, geramos o gráfico do bin pelo número de espaçamentos contidos nele. Para ajustar a curva de densidade aos nossos dados, dividimos as frequências pelo bin e pelo número de elementos. Todos os gráficos deste capítulo (até agora) foram obtidos por este procedimento. Para ilustrar uma etapa intermediária deste método, apresentamos um gráfico abaixo (Figura 3.5), que se assemelha ao histograma apresentado na Figura 3.3, sem eliminação de energias e ainda não ajustado à curva de distribuição.

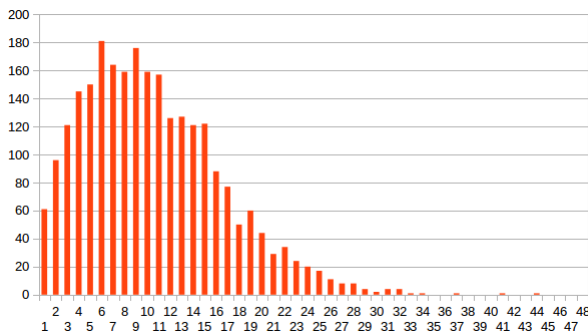


Figura 3.5: Histograma dos espaçamentos entre níveis de energia do Hamiltoniano (2.31). Este histograma teve seus espaçamentos normalizados conforme procedimento descrito acima, entretanto apresenta o número real de elementos por bin e ainda não está ajustado à curva de densidade. Parâmetros: $N=70$, $U = 0.017$, $\delta = -1.32$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e $bin = 0.1$.

¹Intervalo ou banda de contagem do histograma (eixo horizontal).

²Genericamente, histograma é um gráfico que apresenta agrupamentos de um conjunto de dados em células ou bins. A faixa dinâmica (eixo horizontal) dos dados é dividida em um determinado número de intervalos, bins, normalmente de mesmo “comprimento”. A “altura” de cada bin é dada pela contagem do número de dados contidos no intervalo.

Observação:

Além do descrito acima, vimos que outros ajustes parecem possíveis. Então, para podermos comparar as técnicas, apresentamos na Figura 3.6 abaixo, dois outros histogramas: o primeiro é resultado da normalização simples dos espaçamentos, onde dividimos todos os espaçamentos pelo maior deles [31] - parte dos dados deste histogramas pode ser visto na Tabela 3.7. O segundo histograma é resultado da normalização dos espaçamentos pela média aritmética [41]. Assim como no caso anterior, estes histogramas não estão ajustados à curva de distribuição e em nenhum desses casos eliminamos as energias dos extremos. Os três histogramas apresentados (Figuras 3.5 e 3.6) foram gerados a partir do mesmo Hamiltoniano, ou seja, com as mesmas energias. Podemos ver que os histogramas resultantes são parecidos entre si, isto é, os métodos são relativamente equivalentes.

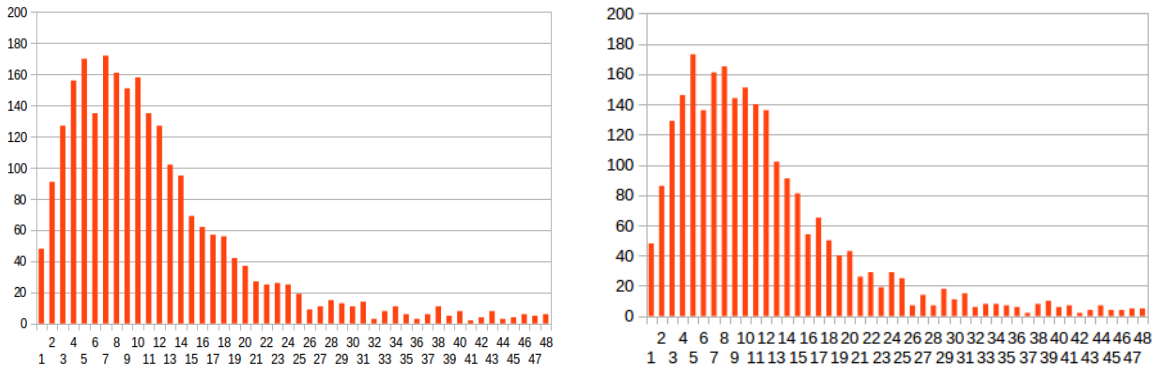


Figura 3.6: Histograma dos espaçamento entre níveis de energia do Hamiltoniano (2.31). Esquerda: Espaçamentos normalizados pelo valor máximo (tabela 3.7) e $bin = 0.0035$. Direita: Espaçamentos normalizados pela média aritmética de todos os espaçamentos, com $bin = 0.075$. Ambos histogramas foram gerados usando todas as energias. Estes histogramas apresentam o número real de espaçamentos por bin, pois ainda não estão ajustados às curvas de densidade. Parâmetros: $N=70$, $U = 0.017$, $\delta = -1.32$, $\mu = 0$ e $t_1 = t_3 = 0.7071$.

Planilha Excel

	ESPAÇAMENTOS	ESPAÇAMENTOS	NORMALIZADO			
ENERGIAS	$\Delta E = E_{(i+1)} - E_i$	ORDENADOS	PELO $\Delta E_{MÁX}$		BIN	FREQUÊNCIA
-107,1737703	1,585048622	0,0002324854	0,000146674	1	0,0035	48
-105,5887217	1,5820916523	0,0008104842	0,0005113308	2	0,007	91
-104,0066301	0,4347186013	0,0009818656	0,0006194546	3	0,0105	127
-103,5719115	1,1442597515	0,0010131885	0,000639216	4	0,014	156
-102,4276517	0,4373496055	0,0010254621	0,0006469594	5	0,0175	170
-101,9903021	1,1383518413	0,001101555	0,000694966	6	0,021	135
-100,8519503	0,4399448129	0,0016643201	0,001050012	7	0,0245	172
-100,4120054	0,4084115776	0,0017162396	0,0010827678	8	0,028	161
-100,0035939	0,7238977326	0,0018653955	0,0011768696	9	0,0315	151
-99,2796961	0,4425379507	0,0019819053	0,0012503751	10	0,035	158
-98,8371582	0,4128167279	0,0021310051	0,0013444415	11	0,0385	135
-98,4243415	0,7132753962	0,0021956954	0,0013852543	12	0,042	127
-97,7110661	0,4451589019	0,0022623975	0,0014273363	13	0,0455	102
-97,2659072	0,4169861808	0,0023274981	0,001468408	14	0,049	95
-96,8489210	0,3799802852	0,0024166859	0,0015246762	15	0,0525	69
-96,4689407	0,3226981668	0,0024329002	0,0015349057	16	0,056	62
-96,1462425	0,4478341046	0,0025664255	0,0016191463	17	0,0595	57
...

Figura 3.7: Parte da Tabela de dados utilizada para gerar o histograma dos espaçamentos dos níveis de energia (*level spacing distribution*) apresentado no primeiro gráfico da Figura 3.6. Neste caso não descartamos as energias dos extremos. Parâmetros: $N=70$, $U = 0.017$, $\delta = -1.32$, $\mu = 0$ e $t_1 = t_3 = 0.7071$.

Capítulo 4

Dinâmica quântica e modelo do tipo transistor

4.1 Metodologia

Nosso objetivo nessa seção é verificar como um estado evolui com o tempo. Para isso, usamos o operador de evolução temporal $U(t)$,

$$U(t) = \sum_{m=0}^W e^{-i\lambda_m t} |\Psi_m\rangle \langle \Psi_m| \quad (4.1)$$

onde W é a dimensão do Hamiltoniano, λ_m são os autovalores e os $|\Psi_m\rangle$ os autovetores do Hamiltoniano (2.31). Dessa forma, a evolução temporal de qualquer estado $|\Psi(t)\rangle$ pode ser calculado por

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^W a_m e^{-i\lambda_m t} |\Psi_m\rangle \quad (4.2)$$

onde $a_m = \langle \Psi_m | \phi \rangle$, sendo que $|\phi\rangle$ representa o estado inicial. A dependência temporal dos valores esperados de um observável A é facilmente obtida usando-se A na representação matricial e as equações (4.1) e (4.2) conforme a equação

$$\langle A \rangle = \langle \Psi(t) | A | \Psi(t) \rangle. \quad (4.3)$$

O observável A é um operador hermitiano¹ (auto-adjunto) que no nosso caso vai se referir ao número esperado de bósons em cada condensado, ou seja, $\langle N_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$

$$\langle N_i \rangle = \langle \Psi(t) | N_i | \Psi(t) \rangle. \quad (4.4)$$

¹No caso de dimensão finita, a matriz que representa um operador hermitiano é igual à sua transposta conjugada.

Observe que, se $|\Psi(t)\rangle$ for um autoestado de energia, então ele não dependerá do tempo. Este estado também é chamado de estado estacionário e seu valor esperado reduz-se a

$$\langle N_i \rangle = \langle \Psi_m | N_i | \Psi_m \rangle.$$

Na próxima seção, apresentamos algumas dinâmicas quânticas interessantes resultantes da equação (4.4). Os autovalores e autovetores usados na construção de $|\Psi_n\rangle$, foram obtidos através da diagonalização exata.

4.2 Transistor

Recentemente, o grupo do pesquisador Dana Anderson [49] mostrou que se poderia configurar átomos ultrafrios em um condensado de Bose-Einstein para agir como elétrons em um transistor, criando o assim chamado “transistor mais frio do mundo”. De acordo com Anderson: “Um transistor de átomos permitiria que o movimento de átomos individuais fosse detectado com precisão.” O dispositivo proposto consiste em aprisionar átomos em um condensado com três poços de energia potencial separados espacialmente. Os poços, ou armadilhas, seriam: a fonte (*source*), a porta (*gate*) e o dreno (*drain*). Dependendo da situação experimental, átomos poderiam tunelar da fonte para o dreno. Isto nos motivou o estudo que segue.

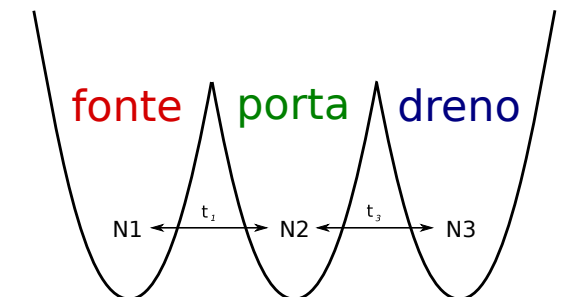


Figura 4.1: Representação esquemática do Hamiltoniano (2.31) como dispositivo para transistor atômico. N_1 , N_2 e N_3 , referem-se aos poços 1, 2 e 3, t_i representam os acoplamentos de tunelamento.

Nesta seção apresentamos uma dinâmica controlável que pode caracterizar um tipo de transistor. Considerando que nosso Hamiltoniano dispõem de três poços de potenciais alinhados, podemos fazer uma analogia física desses condensados com um transistor. Podemos pensar que o primeiro poço aja como fonte, o poço do meio como porta e que o terceiro poço funcione como dreno, conforme esquema acima (Figura 4.1). Dessa maneira, podemos explorar a quebra do Hamiltoniano (2.31) para simular a dinâmica de um transistor.

A ideia básica dessa dinâmica consiste em iniciar o processo com todos os bósons no poço 1 (fonte) e interromper o seu fluxo ao poço 3 (dreno), através do parâmetro de quebra δ . Podemos verificar essa dinâmica nos gráficos da Figura 4.2, abaixo.

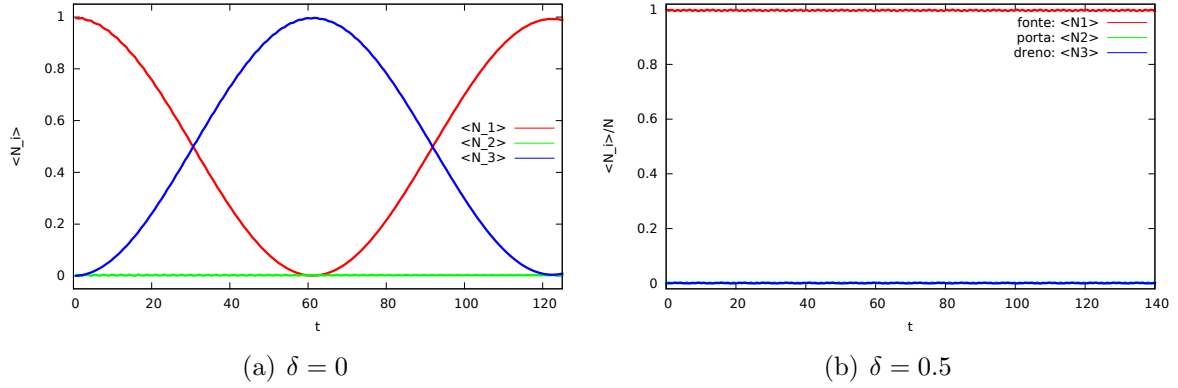


Figura 4.2: Transistor: dinâmicas quânticas do Hamiltoniano (2.31) para os valores esperados do número de bósons por poço. Gráfico (a): modelo integrável, $\delta = 0$, temos a amplitude máxima de tunelamento entre os poços 1 (fonte: linha vermelha) e 3 (dreno: linha azul). Quando adicionamos a quebra, $\delta = 0.5$, gráfico (b), apresentamos um estado estacionário no qual todos os bósons permanecem na fonte. Em ambos casos utilizamos $N=30$, $U=0.2$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e estado inicial $|30, 0, 0\rangle$.

Esquemáticamente, de acordo com a Figura 4.2, temos:

- sistema ligado, quando $\delta = 0$: Os bósons oscilam entre os poços 1 e 3, através do poço 2. Nesse caso, não permanecem bósons no poço 2.
- sistema desligado, quando $\delta \neq 0$: Os bósons ficam aprisionados na fonte, no poço 1.

O Hamiltoniano integrável (2.1) tem dois modos de interação entre poços: um modo referente ao poço 2 e outro modo referente aos poços 1 e 3. A interação entre os poços 1 e 3, cuja dependência aparece na carga conservada Q (2.25), parece assegurar o fluxo “anti-simétrico” entre ambos. Quando adicionamos o termo de quebra δ ao Hamiltoniano integrável (2.1), quebramos essa simetria. A oscilação entre os poços 1 e 3 passa então a ser controlável pelo parâmetro de quebra. Na Figura 4.3, apresentamos dois exemplos que mostram que o parâmetro de quebra δ pode atuar como um sintonizador (*tuner*) de fluxo. A medida que ampliamos seu módulo, diminuimos a amplitude do fluxo de bósons até atingirmos aprisionamento total, como podemos ver na Figura 4.2 (b).

Em resumo, quando temos o sistema integrável e estado inicial com todos os bósons na fonte (poço 1) ($\delta = 0 \rightarrow$ ligado), os bósons tunelam para o poço 3 (dreno) e retornam, com a máxima amplitude, passando pelo poço 2 (*gate*) sem acumular partículas.

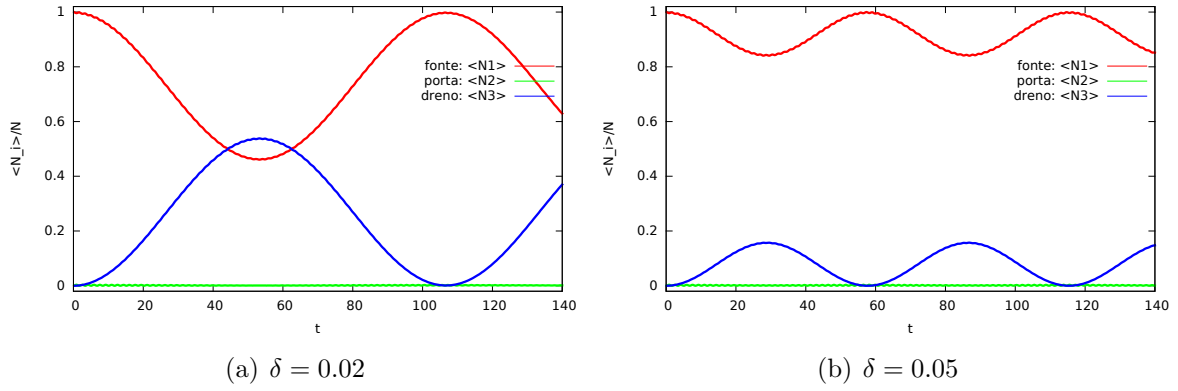


Figura 4.3: Transistor: Exemplos de dinâmicas quânticas do Hamiltoniano (2.31) para os valores esperados do número de bósons por poço, para dois δ 's diferentes. O objetivo é mostrar o controle da corrente de bósons, através do parâmetro δ , tendo como estado inicial todas partículas no poço 1 (fonte: linha vermelha). No primeiro caso, $\delta = 0.02$, a amplitude de tunelamento entre os poços 1 e 3 (dreno: linha azul) é diminuída para aproximadamente $0.5N$, em relação à máxima amplitude que ocorre para $\delta = 0$ (Figura 4.2 a). Em (b), $\delta = 0.05$, a amplitude de tunelamento diminui para aproximadamente $0.2N$. Parâmetros utilizados: $N=30$, $U=0.2$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e estado inicial $|30, 0, 0\rangle$.

A medida que aumentamos o módulo do parâmetro de quebra δ , a amplitude de oscilação diminui gradativamente, até que seja atingido o estado de total aprisionamento ($\delta > U \rightarrow$ desligado). Neste caso, a quebra estaria funcionando como um sintonizador. Entendemos que essa configuração pode caracterizar o comportamento similar ao de um transistor.

Observações:

- a) O parâmetro δ é o parâmetro de quebra do Hamiltoniano (2.31) que pode ser entendido aqui como um potencial externo atuando somente no poço 3. É possível perceber que essa quebra foi pensada em termos de um estado inicial específico, a saber, todas partículas no poço 1.
- b) A amplitude máxima de oscilação depende do parâmetro de interação U . A melhor configuração ocorre para $U \gg t_i$, $i = 1, 3$, como veremos na próxima seção.
- c) Quando todos os bósons estão no poço 3, se a quebra estiver suficientemente ativa, eles não tunelam para o poço 1. O gráfico dessa dinâmica é análogo ao da Figura 4.2 (b).
- d) Parece inequívoco, mas vale observar que o Hamiltoniano do sistema não contempla tunelamento direto entre os poços 1 e 3, até porque os poços estão dispostos em linha. Isso significa que o fluxo de bósons passa necessariamente através do poço 2.

4.3 Outras dinâmicas

Nesta seção apresentamos dinâmicas relativas ao Hamiltoniano (2.31) com o objetivo de investigar quando ocorre tunelamento, auto-aprisionamento e/ou outros efeitos na dinâmica do sistema integrável e do sistema com quebra. Aqui, não temos a intenção de tratar os casos analiticamente, mas apresentar dinâmicas interessantes do modelo proposto. Todas as análises deste capítulo foram efetuadas considerando o parâmetro $U > 0$, $N = 30$ e $\mu = 0$.

4.3.1 Hamiltoniano integrável

O objetivo dessa subseção é analisar a dinâmica do Hamiltoniano integrável (2.1) quando variamos o parâmetro de interação U .

Variando parâmetro U :

Primeiro procuramos entender o que acontece quando o parâmetro U varia, desde um valor pequeno, onde o tunelamento predomina, até um valor em que U passa a ser dominante, considerando o potencial externo $\mu = 0$ e os parâmetros de tunelamento $t_1 = t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ fixos. Este estudo está representado nos gráficos da Figura 4.4, onde podemos identificar a existência de basicamente dois regimes dinâmicos distintos, separados por um valor limiar de transição, como segue:

1. Quando $U \ll 0.01$: Neste caso, o parâmetro U é relativamente pequeno, predominando os parâmetros de tunelamentos t_1 e t_3 . O que acontece é que a frequência do tunelamento aumenta significativamente, provocando um acúmulo de bósons no poço central, o poço de transição, conforme gráfico (a) da Figura 4.4.
2. Quando $U \simeq 0.01$, parece haver um “equilíbrio de forças” entre os termos U e t_i que compõem o Hamiltoniano. A fase transiente é relativamente rápida, seguida de um estado aproximadamente estável prolongado, longe do estado inicial, conforme sugere o gráfico (b) da Figura 4.4.
3. Quando $U \gg 0.01$: Neste caso há predominância do parâmetro U em detrimento aos parâmetros de tunelamentos t_1 e t_3 . Os bósons tendem a permanecer nos poços 1 e 3, pois o tunelamento torna-se relativamente lento, então não causa acúmulo de partículas no poço 2, poço de transição, como podemos ver nos gráficos (c) e (d) da Figura 4.4. Em suma, quanto maior o U , maior a amplitude e menor a frequência de oscilação. Essa propriedade é explorada no modelo para transistor apresentado anteriormente.

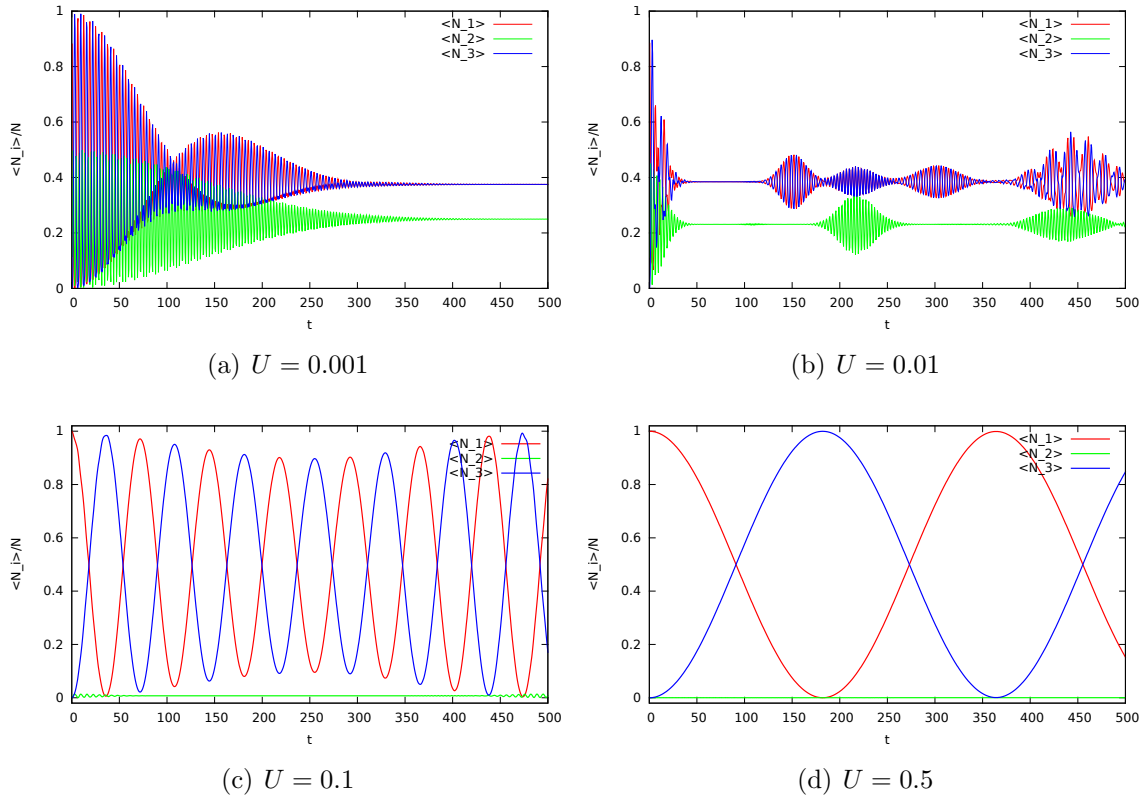


Figura 4.4: Dinâmicas quânticas do valor esperado do número de bósons por poço, para $\delta = 0$, variando U . Quando $U \ll 0.01$, em (a), há predominância dos parâmetros de tunelamento e bósons são retidos no poço 2. Quando $U \gg 0.01$, em (c) e (d), a oscilação de bósons entre os poços 1 e 3 têm sua amplitude máxima inicialmente mais estável e não há retenção de partículas no poço 2. Essas são propriedades do sistema que exploramos no modelo do transistor. Já no caso (b), onde $U \simeq 0.01$, temos uma situação limiar separando regimes dinâmicos distintos. Em todos os casos utilizamos $N=30$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e estado inicial $|30, 0, 0\rangle$.

Agora, seguem estudos para períodos mais longos. Nos gráficos da Figura 4.5, apresentamos dinâmicas onde usamos os mesmos parâmetros dos gráficos da Figura 4.4, porém para tempos prolongados. Podemos ver nos gráficos (a), (c) e (d) da Figura 4.5, que após uma fase transiente, há colapsos e reaparições que tendem a diminuir e se estabilizar, em torno de um valor esperado médio constante. Isso só não acontece para o valor limiar de transição das dinâmicas, gráfico (b) da Figura 4.5, onde o período transiente é relativamente curto, entrando rapidamente em um estado de aparente equilíbrio dinâmico. Análises mais detalhadas serão realizadas no futuro.

Com base nessas Figuras, podemos conjecturar que existe uma mudança no comportamento da dinâmica em torno de $U \simeq \frac{1}{2N}$. Verifica-se que a evolução temporal do valor esperado da população do poço 1 e do poço 3, oscila fora de fase, isto é, a medida que o valor esperado da população do poço 1 diminui, o valor esperado da população do poço 3 aumenta, enquanto o valor esperado da população do poço 2 se mantém constante - cabe salientar que o valor esperado das populações dos poços 1 e 3, bem

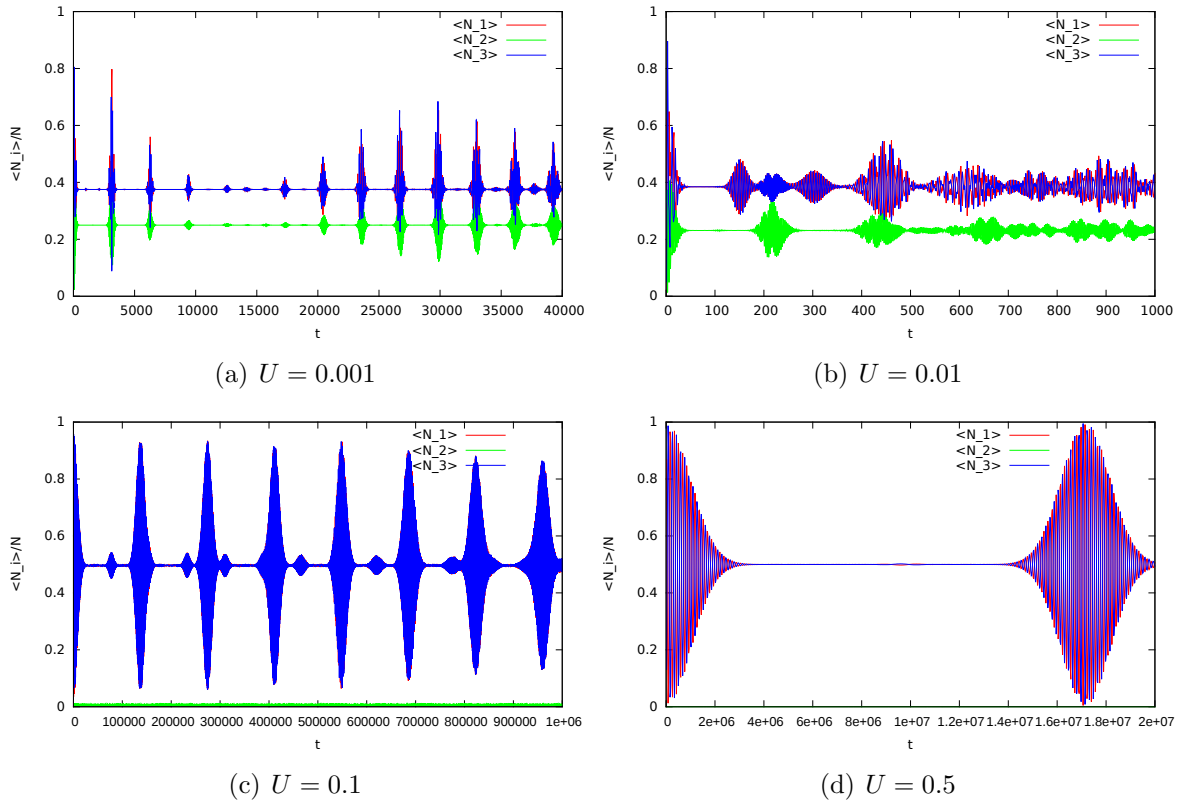


Figura 4.5: Dinâmicas quânticas do valor esperado do número de bósons por poço, para $\delta = 0$, com variação de U para tempos prolongados. Percebe-se colapso e reaparição nos gráficos (a), (c) e (d), que representam os regimes 1) e 3) descritos acima, com ligeiro declínio da amplitude máxima. No gráfico (b), identificamos uma rápida estabilização. Em todos os casos utilizamos $N=30$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e estado inicial $|30, 0, 0\rangle$.

como do poço 2, oscila em torno de uma média, a qual é atingida rapidamente. Além disso, as dinâmicas apresentam colapso e reaparição, exceto no caso do gráfico (b) da Figura 4.5. Os resultados são típicos de modelos integráveis.

4.3.2 Hamiltoniano não integrável

O objetivo desta subseção é analisar qual o efeito do termo de quebra no Hamiltoniano integrável. Apresentamos, no que segue, somente as configurações mais significativas.

Dinâmicas para $U \simeq 0.01$:

Na Figura 4.6, apresentamos estudos da dinâmica para $U \simeq 0.01$ e $t_1 = t_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, com variações do parâmetro δ , onde identificamos os seguintes efeitos:

- a) Quando $\delta \simeq 0.7$: após um transiente relativamente curto e com oscilação irregular dos valores esperados das populações dos poços, o valor esperado médio das populações atinge valores distintos, entretanto ainda existem flutuações em torno destes valores, como podemos ver nos itens (c) e (d) da Figura 4.6.

- b) Quando $\delta \gg 0.7$: como o delta está associado a um potencial externo, a medida que aumentamos este potencial, o tunelamento do poço 2 para o poço 3 torna-se mais difícil. Por outro lado, como $t_i > U$, o tunelamento entre os poços 1 e 2 permanece relevante, então para o estado inicial que estamos usando, esperamos que a população total de bósons tenda a oscilar entre os poços 1 e 2, em torno de um valor esperado médio ($0.5N$), como podemos verificar nos itens (e) e (f) da Figuras 4.6.

Para fins de comparação, apresentamos também na Figura 4.8, nos gráficos (a) e (b), dinâmicas do modelo integrável ($\delta = 0$). Vê-se claramente as diferenças entre as dinâmicas do modelo integrável e do modelo com quebra. Por completeza, mostramos na Figura 4.7 que as distribuições dos espaçamento entre energia das três situações acima (Figura 4.6), estão coerentes com as conjecturas apresentadas no Capítulo anterior, que dizem que modelos integráveis seguem aproximadamente uma distribuição de Poisson enquanto modelos não integráveis seguem uma distribuição de Brody, para $q \neq 0$. Podemos ver que, além da dinâmica visivelmente caótica, o modelo não integrável também apresenta um certo grau de "caoticidade" em suas distribuições de energia.

Dinâmicas para $U > 0.01$:

Na Figura 4.8 mostramos as dinâmicas quânticas do Hamiltoniano com quebra (2.31), para $U = 0.03$, variando δ . Neste caso, identificamos o seguinte efeito da quebra:

- c) Para qualquer $\delta > U$, a quebra predomina e tem a propriedade de auto-aprisionar o valor esperado do número de bósons dos três poços. Ela dissocia as curvas referentes aos poços 1 e 3, gradativamente diminuindo o fluxo de bósons ao poço 3.

Para fins de comparação, apresentamos também na Figura 4.8, gráficos (a) e (b), a dinâmica do modelo integrável ($\delta = 0$). Comparando, é fácil ver que o parâmetro de quebra separa gradativamente as curvas dos poços 1 e 3, que no modelo integrável estão entrelaçadas. Essa dinâmica tem propriedades muito diferentes da dinâmica apresentada na Figura 4.6, para $U < 0.01$. É essa propriedade que utilizamos para a interrupção do fluxo de bósons no modelo do transistor proposto anteriormente. E por completeza, mostramos na Figura 4.9, que as distribuições dos espaçamento entre energias das situações acima (Figura 4.8), estão coerentes com sua dinâmica.

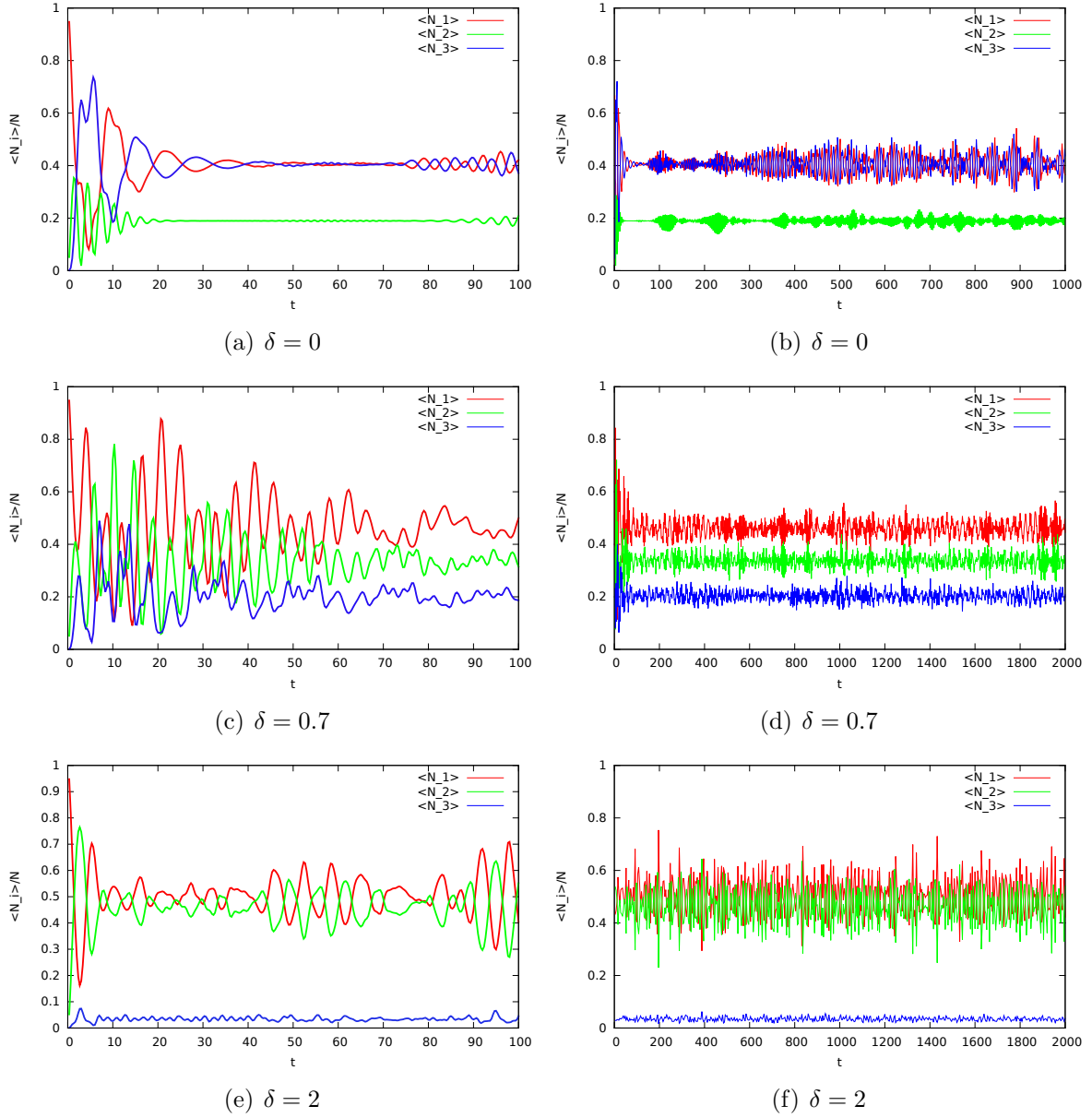


Figura 4.6: Dinâmicas quânticas do Hamiltoniano (2.31), para $U \simeq 0.01$, variando δ . Os gráficos da coluna da direita correspondem aos mesmos gráficos da coluna da esquerda, porém para tempos maiores. Linha de cima: $\delta = 0$. As dinâmicas são consistentes com uma dinâmica integrável, como vimos na seção anterior. Linha do meio: $\delta = 0.7$. Podemos perceber um comportamento caótico. Linha de baixo: $\delta = 2$. O termo de quebra se manifesta soberano, impedindo acesso de bósons ao poço 3, entrelaçando as curvas correspondentes aos poços 1 e 2. As dinâmicas de (c) à (f) são consistentes com modelos com quebra, apresentando diferentes graus de caoticidade. Em todos os casos utilizamos $N=30$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e estado inicial $|30, 0, 0\rangle$.

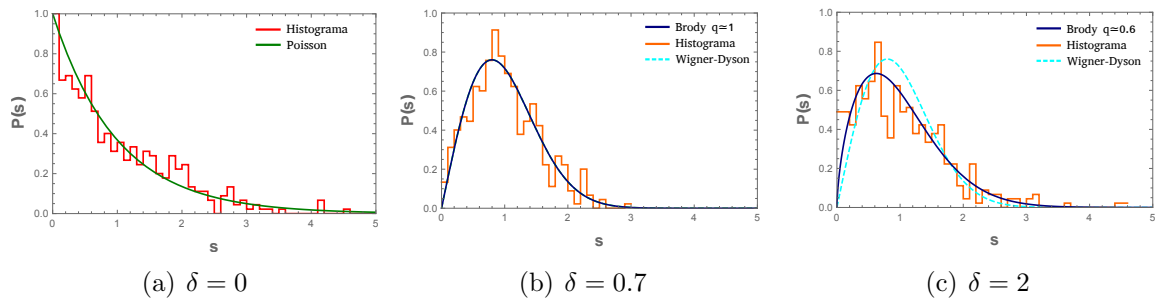


Figura 4.7: Distribuições representativas dos espaçamentos entre energias, relativas as dinâmicas apresentadas na Figura 4.6, com $U \simeq 0.01$ e $N = 30$. Gráfico (a): modelo integrável, ajusta Poisson. Gráfico (b): modelo com parâmetro de quebra $\delta = 0.7$ e $q \simeq 1$, ajusta bem uma curva tipo Wigner-Dyson. Gráfico (c): modelo com parâmetro de quebra $\delta = 2$ e $q = 0.6$, ajusta uma curva tipo Brody.

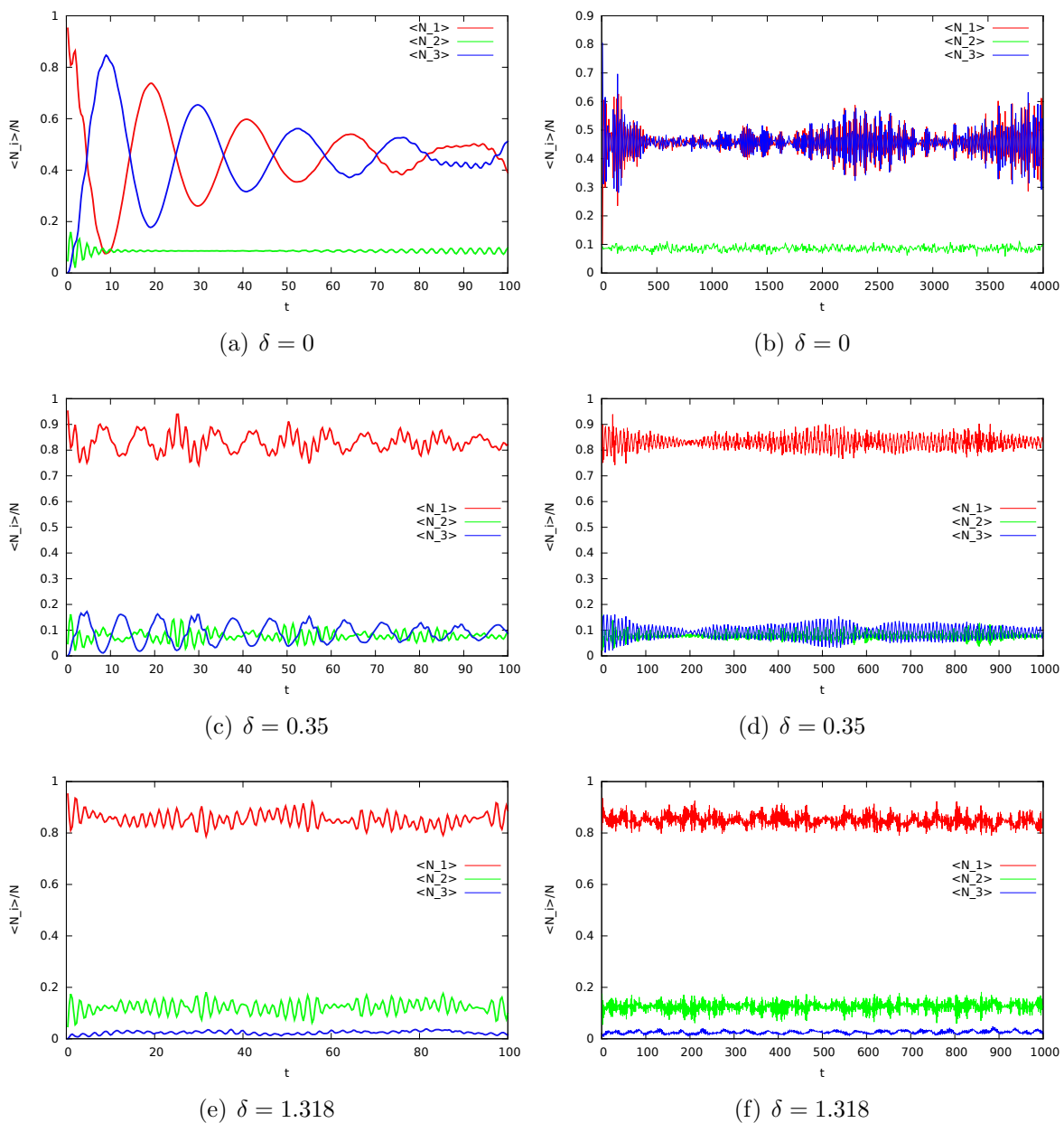


Figura 4.8: Dinâmicas quânticas do valor esperado do número de bósons por poço, do Hamiltoniano com quebra (2.31), para $U = 0.03$, variando δ . Como na Figura 4.6, a coluna da direita apresenta os mesmos gráficos da esquerda, porém para tempos maiores. Linha de cima: $\delta = 0$. As dinâmicas são coerentes com uma dinâmica integrável, como vimos na seção anterior. Linha do meio: $\delta = 0.35$. Podemos perceber que o parâmetro de quebra começa a separar as curvas dos poços 1 e 3, levando o sistema ao auto-aprisionamento. Linha de baixo: $\delta = 1.318$. O termo de quebra se manifesta soberano, diminuindo ainda mais o acesso de bósons ao poço 3. Muito diferente da situação anterior, gráficos (e) e (f) da Figura 4.6, aqui as curvas dos poços 1 e 2 não se entrelaçam. Em todos os casos utilizamos $N=30$, $\mu = 0$, $t_1 = t_3 = 0.7071$ e estado inicial $|30, 0, 0\rangle$.

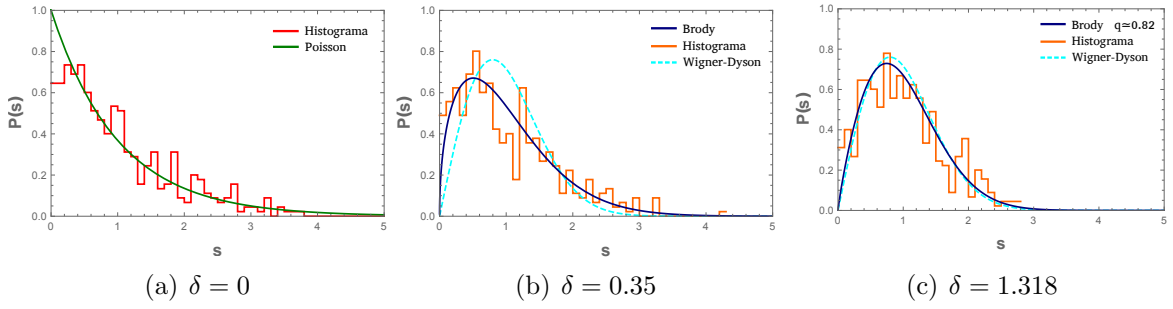


Figura 4.9: Distribuições representativas da estatística dos espaçamentos entre energias, relativas as dinâmicas apresentadas no gráfico 4.8, com $U \simeq 0.03$ e $N = 30$. Figura (a): modelo integrável, ajusta aproximadamente uma Poisson. Figura (b): modelo com parâmetro de quebra $\delta = 0.35$ e $q=0.45$, ajusta uma curva tipo Brody. Figura (c): modelo com parâmetro de quebra $\delta = 1.318$ e $q=0.82$, ajusta uma curva mais próxima a Wigner-Dyson.

Uma análise destes gráficos nos permite conjecturar a existência de uma mudança de cenário na dinâmica quântica do sistema quando $U \simeq \frac{1}{2N}$. Em todos os casos, o parâmetro de quebra quando se sobrepõe aos demais, tem a propriedade de isolar o poço 3. Todas as dinâmicas têm oscilações não bem definidas, tendem rapidamente à um certo equilíbrio dinâmico (não necessariamente termodinâmico) e não apresentam colapso e reparação. Esses resultados são fortes indícios de que nosso modelo com quebra é não integrável.

Capítulo 5

Conclusão

5.1 Considerações finais

O cerne dessa dissertação está em propor um modelo para 3 condensados de Bose-Einstein conectados por tunelamento em linha, que seja integrável e apresente uma quebra de integrabilidade com propriedades físicas relevantes.

No capítulo 2, inicialmente apresentamos um Hamiltoniano que descreve tunelamento entre três poços alinhados, representado pelo Hamiltoniano (2.1) e demonstramos que ele é integrável pelo Método Algébrico do *Ansatz* de Bethe. Posteriormente, sugerimos um termo que, somado ao Hamiltoniano (2.1), quebra sua integrabilidade.

No capítulo 3, verificamos a integrabilidade e a não integrabilidade do Hamiltoniano, através da análise estatística das distribuições dos níveis de energia. A distribuição não dispersiva dos níveis de energia e a distribuição de Poisson obtida dos espaçamentos entre energias vizinhas, verificam a integrabilidade do modelo proposto. A distribuição dispersiva dos níveis de energia e a distribuição de Wigner-Dyson obtida dos espaçamentos entre energias vizinhas do modelo com termo de quebra, são fortes indícios de que o novo Hamiltoniano não é integrável [37, 50].

No capítulo 4, propomos um modelo do tipo transistor com possibilidade de controle da corrente de bósons pelo poço central, através do parâmetro de quebra. Concluimos que, em princípio, quanto maior o parâmetro de interação U , em módulo, mais facilmente podemos manipular o transistor, pois há menor permanência de bósons no poço 2, implicando numa maior amplitude de oscilação entre a fonte e o dreno. Para obtermos a delocalização máxima entre a fonte e o dreno, mostramos que basta uma pequena variação do parâmetro de quebra δ , que pode ser entendido como um potencial externo.

Ainda neste capítulo, estudamos outras dinâmicas e concluimos, basicamente, que no caso integrável as dinâmicas são oscilatórias, sendo que as oscilações entre os poços 1 e 3 são intercaladas (oscilam com diferença de fase π). Também, ocorrem colapsos

e reparações e em tempos longos, a amplitude de oscilação parece diminuir. Além disso, verificamos que a frequência de oscilação entre os poços 1 e 3 diminui a medida que aumentamos o parâmetro de interação U , refletindo no aumento da amplitude da oscilação, pois o lento tunelamento causa menor acúmulo de bósons no poço 2. No caso não integrável, o parâmetro de quebra gera uma dinâmica aparentemente caótica, separando as dinâmicas dos poços 1 e 3 e levando o sistema ao auto-aprisionamento rapidamente. Pode originar também, o entrelaçamento das curvas dinâmicas dos poços 1 e 2.

5.2 Perspectiva para o futuro

O estudo de modelos integráveis em poços múltiplos e o conhecimento de suas quantidades conservadas, abrem a possibilidade de se investigar com maior profundidade a questão dos sistemas quânticos fora do equilíbrio, uma das fronteiras mais ativas da física moderna. De fato, o famoso experimento sobre o “quantum Newton cradle” [27], que mostrou que um gás de bósons unidimensional não termaliza após milhares de colisões, gerou muitas discussões no tema da integrabilidade versus termalização. Desde então, tem havido atividade intensa no estudo da dinâmica quântica de sistemas integráveis, em particular, no comportamento do modelo de Lieb-Liniger após um “quench” [51, 52] e inclusive, um “Ensemble de Gibbs generalizado” (EGG) foi proposto [53]. Nesta abordagem, uma questão fundamental é a identificação do conjunto completo das cargas conservadas, permitindo que se use o EGG para prever o estado estacionário do sistema. Nos casos em que o número de quantidades conservadas é muito grande ou mesmo infinito, a aplicação do EEG torna-se difícil, pois nem sempre se tem certeza se todas as quantidades conservadas foram consideradas; por isso conceitos como “pré-termalização” tem sido bastante debatidos e gerado polêmicas na comunidade científica. Por esse ângulo, estudar termalização em modelos integráveis de poços múltiplos oferece uma grande vantagem, pois neste caso é possível encontrar um conjunto completo das quantidades conservadas, favorecendo, em princípio, a aplicação do método do EEG, sem ambiguidades. Outra possível vantagem dos modelos integráveis de CBE em poços múltiplos, seria investigar a intrigante questão do emaranhamento quântico.

Apêndice A

Representação matricial do Hamiltoniano e diagonalização exata

Uma maneira de encontrarmos os autovetores e autovalores de energia do Hamiltoniano é através da sua diagonalização exata e para isto, precisamos da sua representação matricial. Definido o número de bósons, N , teremos uma base finita (base para construção matricial do Hamiltoniano), no espaço de Fock, de dimensão

$$W(N) = \frac{(2+N)!}{2!N!} \quad (\text{A.1})$$

cujos vetores na notação de Dirac são dados por:

$$|n_1, n_2, n_3\rangle.$$

Sabemos que N é uma quantidade conservada e que para encontrarmos os elementos da matriz hamiltoniana, H_{ij} , devemos aplicar o operador Hamiltoniano sobre um dos vetores de base e projetá-lo sobre outro vetor de base, ou seja, precisamos fazer o produto interno do tipo

$$\langle n'_1, n'_2, n'_3 | H | n_1, n_2, n_3 \rangle \quad (\text{A.2})$$

onde n_i , $i = 1, 2$ e 3 , representam o número de bósons nos poços 1,2 e 3, respectivamente. Como ilustração, apresentamos abaixo a representação matricial para $N = 1$ e $N = 2$ do Hamiltoniano (2.1),

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + \mu(N_1 - N_2 + N_3) + t_1(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + t_3(a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger)$$

Segue que, quando atuamos o operador H sobre os vetores da base,

$$H | n_1, n_2, n_3 \rangle,$$

teremos que levar em consideração as operações [54]:

$$\begin{aligned} N_i |n_i\rangle &= n_i |n_i\rangle, \\ a_i |n_i\rangle &= \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle, \\ a_i |0_i\rangle &= 0, \\ a_i^\dagger |n_i\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1\rangle, \quad i = 1, 2 \text{ e } 3. \end{aligned}$$

Veremos que os parâmetros de interação U e do potencial externo μ são termos da diagonal principal e os parâmetros de tunelamento são termos das diagonais situadas logo abaixo e logo acima da diagonal principal. Todos demais termos são zeros. Essa matriz é dita tridiagonal e, no nosso caso, simétrica. Vejamos os exemplos:

N=1:

Dimensão do Hamiltoniano: $W(N) = \frac{(2+N)!}{(2!N!)} \rightarrow W(1) = 3$.

Vetores da base: $\{ |1, 0, 0\rangle, |0, 1, 0\rangle, |0, 0, 1\rangle \}$

$$[H] = \begin{pmatrix} \langle 1, 0, 0 | H | 1, 0, 0 \rangle & \langle 1, 0, 0 | H | 0, 1, 0 \rangle & \langle 1, 0, 0 | H | 0, 0, 1 \rangle \\ \langle 0, 1, 0 | H | 1, 0, 0 \rangle & \langle 0, 1, 0 | H | 0, 1, 0 \rangle & \langle 0, 1, 0 | H | 0, 0, 1 \rangle \\ \langle 0, 0, 1 | H | 1, 0, 0 \rangle & \langle 0, 0, 1 | H | 0, 1, 0 \rangle & \langle 0, 0, 1 | H | 0, 0, 1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + \mu & t\alpha_3 & 0 \\ t\alpha_3 & U - \mu & t\alpha_1 \\ 0 & t\alpha_1 & U + \mu \end{pmatrix}$$

para $t = 1$ e $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ obtemos:

$$[H] = \begin{pmatrix} U + \mu & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & U - \mu & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & U + \mu \end{pmatrix}$$

se $\mu = 0$, não normalizando, temos

Autovalores de energia	Autovetores
U	$ -1, 0, 1\rangle$
$U - 1$	$ 1, -\sqrt{2}, 1\rangle$
$U + 1$	$ 1, \sqrt{2}, 1\rangle$

onde usamos os autovetores na forma compacta, ou seja, dos coeficientes da base:
 $|-1, 0, 1\rangle = -1|1, 0, 0\rangle + 0|0, 1, 0\rangle + 1|0, 0, 1\rangle$.

Observe que neste caso não há estados degenerados.

N=2:

Dimensão do Hamiltoniano: $W(N) = \frac{(2+N)!}{(2!N!)} \rightarrow W(2) = 6$.

Vetores da base:

$$\{ |2, 0, 0\rangle, |1, 1, 0\rangle, |1, 0, 1\rangle, |0, 2, 0\rangle, |0, 1, 1\rangle, |0, 0, 2\rangle \}$$

$$[H] = \begin{pmatrix} 4U + 2\mu & t\alpha_3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t\alpha_3\sqrt{2} & 0 & t\alpha_3\sqrt{2} & t\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & t\alpha_3\sqrt{2} & 4U - 2\mu & 0 & t\alpha_1\sqrt{2} & 0 \\ 0 & t\alpha_1 & 0 & 4U + 2\mu & t\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & t\alpha_1\sqrt{2} & t\alpha_3 & 0 & t\alpha_1\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t\alpha_1\sqrt{2} & 4U + 2\mu \end{pmatrix}$$

Para $\mu = 0$, $t = 1$ e $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos

Autovalores de energia	Autovetores
$4U$	$ 1, 0, -1, 0, 0, 1\rangle$
$4U$	$ 0, 0, -(1/\sqrt{2}), 1, 0, 0\rangle$
$-2(-U + \sqrt{1 + U^2})$	$ 1, -2(U + \sqrt{1 + U^2}), 2, \sqrt{2}, -2(U + \sqrt{1 + U^2}), 1\rangle$
$2(U + \sqrt{1 + U^2})$	$ 1, 2(-U + \sqrt{1 + U^2}), 2, \sqrt{2}, 2(-U + \sqrt{1 + U^2}), 1\rangle$
$2U - \sqrt{1 + 4U^2}$	$ -1, 2U + \sqrt{1 + 4U^2}, 0, 0, -2U - \sqrt{1 + 4U^2}, 1\rangle$
$2U + \sqrt{1 + 4U^2}$	$ -1, 2U - \sqrt{1 + 4U^2}, 0, 0, -2U + \sqrt{1 + 4U^2}, 1\rangle$

onde usamos os autovetores na forma compacta, ou seja, dos coeficientes da base.

Verificamos que para $\mu = 0$ há dois estados degenerados ($E = 4U$) e mesmo se $U = 0$, ainda haverá dois estados degenerados, a saber, $E = 0$.

Apêndice B

Integrabilidade

B.1 Integrabilidade clássica

Em sua essência, um sistema é dito classicamente integrável se pudermos realizar uma transformação canônica do tipo [55, 56]:

$$H(q, p) \Rightarrow H(\Theta, L),$$

tal que $\Theta = \Theta_1, \dots, \Theta_N$ sejam coordenadas cíclicas ¹ e $L = L_1, \dots, L_N$ constantes de movimento ², considerando que $q = (q_1, \dots, q_N)$ são as coordenadas generalizadas e $p = (p_1, \dots, p_N)$ são os momentos generalizados do Hamiltoniano. Desta forma, podemos obter tantas constantes de movimento independentes quantos forem os graus de liberdade do sistema. Em suma, devemos obter os seguintes parênteses de Poisson:

$$\{L, H\} = 0 \quad \{L, L\} = 0$$

Topologicamente, isso resulta em um toro no espaço de configuração e os Θ 's são as coordenadas desse toro [55].

B.2 Integrabilidade quântica

A Integrabilidade quântica não é bem definida, mas existem alguns critérios de integrabilidade que podem nos orientar quanto à essa análise. Abaixo, citamos cinco desses critérios, os quais utilizamos para inferir tanto integrabilidade quanto não integrabilidade nesta pesquisa.

¹Se a Lagrangiana de um sistema não contém uma dada coordenada q_j (mas pode conter \dot{q}_j) então essa coordenada é dita ser uma coordenada cíclica. [56]

²Teorema de conservação: o momento generalizado conjugado de uma coordenada cíclica é conservado. [56]

Um sistema integrável deve:

- possuir o conjunto completo de comutadores dos operadores quânticos (análogo aos parênteses de Poisson clássico);
- ser exatamente solúvel, ou seja, deve ser possível encontrar todos os seus autovalores;
- gerar uma distribuição de Poisson, dos espaçamento entre níveis adjacentes de energia;
- apresentar cruzamento de níveis de energia ou acúmulo de níveis de energia (*cluster*), quando variado algum parâmetro;
- ser resolvível pelo Método do Ansatz de Bethe.

Parte desta lista, bem como seu complemento, pode ser visto no artigo [36]. Maiores detalhes relacionados à essa lista, podem ser vistos nas referências citadas no corpo da dissertação.

Apêndice C

Álgebra de Yang-Baxter

Em 1967, o Professor Chen Ning Yang apresentou uma solução exata para o problema de muitos corpos em uma dimensão com interação repulsiva. Em 1972, o Professor Baxter encontrou a solução exata para o modelo de 8 vértices. Essas duas soluções geraram uma equação não linear chamada de Equação de Yang-Baxter dada por:

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u-v). \quad (\text{C.1})$$

Desenvolver métodos para resolver a equação de Yang-Baxter e obter novas famílias de modelos integráveis têm sido um grande desafio desde então. Entre os cientistas que mais contribuíram para esse campo podemos citar Faddeev, Friedan, Kohno, Jimbo, Kulish and Sklyanin, entre vários outros [57]. Maiores detalhes históricos sobre esta equação podem ser obtidos em [58] e uma realização experimental desta equação utilizando técnicas de ressonância nuclear magnéticas, pode ser visto em [59].

Hoje, sabemos que para um sistema ser integrável, ele deve satisfazer *a priori*, a equação de Yang-Baxter. Há várias álgebras de Yang-Baxter desenvolvidas. A primeira é devido à própria matriz R , pois podemos identificar $L(u) = R(u)$ tanto na representação $R_{12}L_1L_2 = L_2L_1R_{12}$ quanto em (2.7) - esta é a realização usada no modelo de Heisenberg [60].

Entretanto, para o modelo de dois poços de condensados de Bose-Einstein foi utilizadas a álgebra em termos dos operadores bosônicos canônicos (a, a^\dagger) (devido à Heisenberg) [61, 60], cujas relações de comutação são dados por:

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \quad [a, a^\dagger] = 1$$

sendo $N = a^\dagger a$. Sua estrutura geral consiste em:

$$L_a(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta(N) & a \\ a^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix}$$

Abaixo apresentamos essa realização para o caso de dois poços e também para o caso de três poços de condensados utilizado para o modelo (2.1.2).

1- Par de operadores Lax para 2 poços de condensados [62]:

$$L_1(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta(N_1) & a_1 \\ a_1^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix}, \quad L_2(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta(N_2) & a_2 \\ a_2^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix}$$

2- Par de operadores Lax para 3 poços de condensado de Bose-Einstein:

$$L_{1,3}(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta(N_1 + N_3) & \alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3 \\ \alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3 & \eta^{-1}I \end{pmatrix}, \quad L_2(u) = \begin{pmatrix} uI + \eta N_2 & a_2 \\ a_2^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix}$$

onde I representa o operador identidade e $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1$, por definição. Para obtermos as relações de comutação, devemos realizar a álgebra de Yang-Baxter. Vamos explicitar a equação (2.7) na representação matricial para que o resultado seja mais evidente, como segue:

Seja a matriz de monodromia (2.11)

$$T(u) = L_{1,3}(u + \omega)L_2(u - \omega) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1(u) & T_2^1(u) \\ T_1^2(u) & T_2^2(u) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

então,

$$T(u) \otimes T(\nu) = \begin{pmatrix} T_1^1(u) \begin{pmatrix} T_1^1(\nu) & T_2^1(\nu) \\ T_1^2(\nu) & T_2^2(\nu) \end{pmatrix} & T_2^1(u) \begin{pmatrix} T_1^1(\nu) & T_2^1(\nu) \\ T_1^2(\nu) & T_2^2(\nu) \end{pmatrix} \\ T_1^2(u) \begin{pmatrix} T_1^1(\nu) & T_2^1(\nu) \\ T_1^2(\nu) & T_2^2(\nu) \end{pmatrix} & T_2^2(u) \begin{pmatrix} T_1^1(\nu) & T_2^1(\nu) \\ T_1^2(\nu) & T_2^2(\nu) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

$$T(u) \otimes T(\nu) = \begin{pmatrix} T_1^1(u)T_1^1(\nu) & T_1^1(u)T_2^1(\nu) & T_2^1(u)T_1^1(\nu) & T_2^1(u)T_2^1(\nu) \\ T_1^1(u)T_1^2(\nu) & T_1^1(u)T_2^2(\nu) & T_2^1(u)T_1^2(\nu) & T_2^1(u)T_2^2(\nu) \\ T_1^2(u)T_1^1(\nu) & T_1^2(u)T_2^1(\nu) & T_2^2(u)T_1^1(\nu) & T_2^2(u)T_2^1(\nu) \\ T_1^2(u)T_1^2(\nu) & T_1^2(u)T_2^2(\nu) & T_2^2(u)T_1^2(\nu) & T_2^2(u)T_2^2(\nu) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Atuando (C.4) na equação (2.7),

$$R_{12}(u - v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u - v),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u-\nu) & c(u-\nu) & 0 \\ 0 & c(u-\nu) & b(u-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1^1(u)T_1^1(\nu) & T_1^1(u)T_2^1(\nu) & T_2^1(u)T_1^1(\nu) & T_2^1(u)T_2^1(\nu) \\ T_1^1(u)T_1^2(\nu) & T_1^1(u)T_2^2(\nu) & T_2^1(u)T_1^2(\nu) & T_2^1(u)T_2^2(\nu) \\ T_1^2(u)T_1^1(\nu) & T_1^2(u)T_2^1(\nu) & T_2^2(u)T_1^1(\nu) & T_2^2(u)T_2^1(\nu) \\ T_1^2(u)T_1^2(\nu) & T_1^2(u)T_2^2(\nu) & T_2^2(u)T_1^2(\nu) & T_2^2(u)T_2^2(\nu) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T_1^1(\nu)T_1^1(u) & T_2^1(\nu)T_1^1(u) & T_1^1(\nu)T_2^1(u) & T_2^1(\nu)T_2^1(u) \\ T_1^2(\nu)T_1^1(u) & T_2^2(\nu)T_1^1(u) & T_1^2(\nu)T_2^1(u) & T_2^2(\nu)T_2^1(u) \\ T_1^1(\nu)T_1^2(u) & T_2^1(\nu)T_1^2(u) & T_1^1(\nu)T_2^2(u) & T_2^1(\nu)T_2^2(u) \\ T_1^2(\nu)T_1^2(u) & T_2^2(\nu)T_1^2(u) & T_1^2(\nu)T_2^2(u) & T_2^2(\nu)T_2^2(u) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u-\nu) & c(u-\nu) & 0 \\ 0 & c(u-\nu) & b(u-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

cujos produtos representaremos por

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} & d'_{14} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} & d'_{24} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} & d'_{34} \\ d'_{41} & d'_{42} & d'_{43} & d'_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Dessas igualdades podemos obter, usando as identificações de (C.2), várias relações de comutação. Listamos abaixo algumas dessas equações, de fato as mais relevantes:

$$\begin{aligned}
d_{11} = d'_{11} : & T_1^1(u)T_1^1(\nu) = T_1^1(\nu)T_1^1(u) \\
& \rightarrow A(u)A(\nu) = A(\nu)A(u) \\
d_{14} = d'_{14} : & T_2^1(u)T_2^1(\nu) = T_2^1(\nu)T_2^1(u) \\
& \rightarrow B(u)B(\nu) = B(\nu)B(u) \\
d_{41} = d'_{41} : & T_1^2(u)T_1^2(\nu) = T_1^2(\nu)T_1^2(u) \\
& \rightarrow C(u)C(\nu) = C(\nu)C(u) \\
d_{44} = d'_{44} : & T_2^2(u)T_2^2(\nu) = T_2^2(\nu)T_2^2(u) \\
& \rightarrow D(u)D(\nu) = D(\nu)D(u) \\
d_{21} = d'_{21} : & b(u-\nu)T_1^1(u)T_1^2(\nu) + c(u-\nu)T_1^2(u)T_1^1(\nu) = T_1^2(\nu)T_1^1(u) \\
& \rightarrow b(u-\nu)A(u)C(\nu) + c(u-\nu)C(u)A(\nu) = C(\nu)A(u) \\
d_{42} = d'_{42} : & T_1^2(u)T_2^2(\nu) = b(u-\nu)T_2^2(\nu)T_1^2(u) + c(u-\nu)T_1^2(u)T_2^2(\nu) \\
& \rightarrow C(u)D(\nu) = b(u-\nu)D(\nu)C(u) + c(u-\nu)C(u)D(\nu).
\end{aligned}$$

Substituindo $b(u) = u/(u+\eta)$ e $c(u) = \eta/(u+\eta)$ (2.1.2), nas equações acima, obtemos as seguintes relações de comutação:

$$[A(u), A(v)] = 0$$

$$[B(u), B(v)] = 0$$

$$[C(u), C(v)] = 0$$

$$[D(u), D(v)] = 0$$

$$A(u)C(v) = \frac{u-v+\eta}{u-v}C(v)A(u) - \frac{\eta}{u-v}C(u)A(v) \quad (\text{C.6})$$

$$D(v)C(u) = -\frac{u-v+\eta}{u-v}C(u)D(v) + \frac{\eta}{u-v}C(v)D(u). \quad (\text{C.7})$$

No apêndice C, mostraremos que as relações de comutação obtidas acima são de fundamental importância para aplicarmos o Método Algébrico do *Ansatz* de Bethe.

Apêndice D

Método algébrico de *Ansatz* de Bethe

No apêndice anterior, mostramos como obter as relações de comutação usando a álgebra de Bethe, em termos das entradas da matriz de monodromia, ou seja, em termos de $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$ e $D(u)$. Neste apêndice, mostraremos como o Hamiltoniano integrável é obtido.

Primeiramente, procuramos os termos $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$ e $D(u)$ através da matriz de monodromia:

$$T(u) = L_{1,3}(u + \omega)L_2(u - \omega) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Usando os operadores Lax apresentados anteriormente (2.8), podemos escrever a matriz de monodromia como

$$L_{1,3}(u+\omega)L_2(u-\omega) = \begin{pmatrix} (u + \omega)I + \eta(N_1 + N_3) & \alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3 \\ \alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u - \omega)I + \eta N_2 & a_2 \\ a_2^\dagger & \eta^{-1}I \end{pmatrix},$$

onde identificamos que:

$$\begin{aligned} A(u) &= ((u + \omega)I + \eta(N_1 + N_3))((u - \omega)I + \eta N_2) + (\alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3)a_2^\dagger \\ B(u) &= ((u + \omega)I + \eta(N_1 + N_3))a_2 + \eta^{-1}(\alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3) \\ C(u) &= (\alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger)((u - \omega)I + \eta N_2) + \eta^{-1}a_2^\dagger I \\ D(u) &= (\alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger)a_2 + \eta^{-2}I. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Para aplicarmos o Método Algébrico do *Ansatz* de Bethe, precisamos encontrar um

pseudovácuo, que tenha as propriedades adequadas. As propriedades necessárias são:

$$A(u)|\phi\rangle = a(u)|\phi\rangle \quad (\text{D.3})$$

$$B(u)|\phi\rangle = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$C(u)|\phi\rangle \neq 0 \quad (\text{D.5})$$

$$D(u)|\phi\rangle = d(u)|\phi\rangle \quad (\text{D.6})$$

Um estado de vácuo que garantiria a propriedade (D.4) é o vácuo do espaço de Fock, $|0\rangle = |0, 0, 0\rangle$, pois ele é aniquilado pelos operadores de aniquilação, a_i , $i = 1, 2, 3$, do operador $B(u)$,

$$B(u)|0\rangle = ((u + \omega) + \eta(N_1 + N_3))a_2 + \eta^{-1}(\alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3)|0\rangle = 0 \quad (\text{D.7})$$

porém precisamos também que ele atenda as outras propriedades. Atuando os operadores $A(u)$ e $D(u)$ sobre o pseudovácuo, podemos inferir os autovalores $a(u)$ e $d(u)$, mas é fácil ver que o vácuo do estado de Fock não satisfaz essas condições, pois ele cria partículas no poço 2, no caso do operador A , e nos poços 1 e 3, no caso do operador D , alterando o vetor de estado. Por isso, precisou-se definir outros pseudovácuos.

Na seção 2.1.2, apresentamos o operador Γ e várias relações de comutação associadas a ele. Também definimos os pseudovácuos como:

$$\Gamma = k(\alpha_3 a_1 - \alpha_1 a_3), \quad k = 1$$

$$|\phi_l\rangle = (\Gamma^\dagger)^l |0\rangle, \quad l \leq N, \quad (\text{D.8})$$

onde cada valor de l está associado a um pseudovácuo. Assim, as propriedades (D.3) e (D.4) são satisfeitas e podemos encontrar os autovalores $a(u)$ e $d(u)$ como segue:

- $a(u)$:

$$[A(u), (\Gamma^\dagger)^l] = A(u)(\Gamma^\dagger)^l - (\Gamma^\dagger)^l A(u)$$

segue que

$$A(u)(\Gamma^\dagger)^l |0\rangle = [A(u), (\Gamma^\dagger)^l] |0\rangle + (\Gamma^\dagger)^l A(u) |0\rangle \quad (\text{D.9})$$

e usando os comutadores apresentados em (2.17), obtemos que:

$$[A(u), (\Gamma^\dagger)^l] |0\rangle = \eta(u - \omega) l (\Gamma^\dagger)^l |0\rangle \quad (\text{D.10})$$

$$(\Gamma^\dagger)^l A(u)|0\rangle = (u + \omega)(u - \omega)(\Gamma^\dagger)^l|0\rangle \quad (\text{D.11})$$

então, das equações (D.9), (D.10) e (D.11), temos que

$$\begin{aligned} A(u)(\Gamma^\dagger)^l|0\rangle &= (u - \omega)(u + \omega + \eta l)(\Gamma^\dagger)^l|0\rangle \\ A(u)|\phi_l\rangle &= (u - \omega)(u + \omega + \eta l)|\phi_l\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

- $d(u)$:

$$[D(u), (\Gamma^\dagger)^l] = D(u)(\Gamma^\dagger)^l - (\Gamma^\dagger)^l D(u)$$

segue que

$$D(u)(\Gamma^\dagger)^l|0\rangle = [D(u), (\Gamma^\dagger)^l]|0\rangle + (\Gamma^\dagger)^l D(u)|0\rangle$$

e usando os comutadores apresentados em (2.17), obtemos que:

$$\begin{aligned} [D(u), (\Gamma^\dagger)^l]|0\rangle &= 0|0\rangle \\ (\Gamma^\dagger)^l D(u)|0\rangle &= \eta^{-2}(\Gamma^\dagger)^l|0\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

então,

$$\begin{aligned} D(u)(\Gamma^\dagger)^l|0\rangle &= \eta^{-2}(\Gamma^\dagger)^l|0\rangle \\ D(u)|\phi_l\rangle &= \eta^{-2}|\phi_l\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Resumindo, temos:

$$A(u)|\phi_l\rangle = (u - \omega)(u + \omega + \eta l)|\phi_l\rangle \quad (\text{D.15})$$

$$B(u)|\phi_l\rangle = 0 \quad (\text{D.16})$$

$$C(u)|\phi_l\rangle \neq 0 \quad (\text{D.17})$$

$$D(u)|\phi_l\rangle = \eta^{-2}|\phi_l\rangle, \quad (\text{D.18})$$

válidas para qualquer um dos pseudovácuos.

D.1 *Ansatz* de Bethe:

Como constatamos acima, existe um conjunto de pseudovácuos. Para cada um destes pseudovácuos, podemos definir um estado de Bethe. Os estados de Bethe, que de fato

são os autoestados do Hamiltoniano (2.1), são dados por

$$|\psi_l\rangle = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i)|\phi_l\rangle, & \text{se } l < N, \\ |\phi_N\rangle, & \text{se } l = N. \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

Usando os estados de Bethe, podemos resolver o problema de autovalores da matriz de transferência (2.20), isto é,

$$\begin{aligned} \tau(u)|\psi_l\rangle &= \lambda_l(u)|\psi_l\rangle \\ &= (A(u) + D(u))|\psi_l\rangle \\ &= ((u + \omega + \eta l)(u - \omega) + \eta^{-2})|\psi_l\rangle. \end{aligned}$$

Abaixo especificamos os autovalores para os casos $l = N$ e $l < N$:

- $l = N$:

$$\tau(u)|\psi_N\rangle = \lambda_N(u)|\phi_N\rangle$$

logo,

$$\lambda_N(u) = (u + \omega + \eta N)(u - \omega) + \eta^{-2} \quad (\text{D.20})$$

- $l < N$:

$$\begin{aligned} \tau(u)|\psi_l\rangle &= \lambda_l(u)|\psi_l\rangle \\ &= (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i)|\phi_l\rangle \\ &= A(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i)|\phi_l\rangle + D(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i)|\phi_l\rangle \end{aligned}$$

usando os comutadores (C.6) e (C.7), obtemos

$$\begin{aligned} A(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i)|\phi_l\rangle &= \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i)A(u)|\phi_l\rangle - \sum_{i=1}^{N-l} \frac{\eta}{u - v_i} C(u)A(v_i)|\phi_l\rangle \\ A(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i)|\phi_l\rangle &= (u + \omega + \eta N)(u - \omega) \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} C(v_i)|\phi_l\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

$$-\sum_{i=1}^{N-l} \frac{\eta}{u-v_i} (v_i + \omega + \eta l)(v_i - \omega) \prod_{j \neq i}^{N-l} \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} C(u) |\phi_l\rangle \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} D(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle &= \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} C(v_i) D(u) |\phi_l\rangle + \sum_{i=1}^{N-l} \frac{\eta}{u - v_i} C(u) D(v_i) |\phi_l\rangle. \\ D(u) \prod_{i=1}^{N-l} C(v_i) |\phi_l\rangle &= \eta^{-2} \prod_{i=1}^{N-l} \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} C(v_i) |\phi_l\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-l} \frac{\eta}{u - v_i} \eta^{-2} \prod_{j \neq i}^{N-l} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j} C(u) |\phi_l\rangle \quad (\text{D.24})$$

onde atuamos os operadores A e D em $|\phi_l\rangle$ inserindo seus autovalores. Os autovalores da matriz de transferência para $l < N$ serão dados por ((D.21) e (D.23))

$$\lambda_l(u) = (u + \omega + \eta N)(u - \omega) \prod_{j=1}^{N-l} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-l} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j} \quad (\text{D.25})$$

D.2 Equação de Bethe

Os termos (D.22) e (D.24) devem se cancelar para garantir que $|\psi_l\rangle$ seja um autovetor da matriz de transferência. Essa condição nos fornece mais uma equação (D.26), denominada equação de Bethe (BAE), cujos parâmetros v_j são as soluções:

$$\eta^2 (v_i + \omega + \eta l)(v_i - \omega) = \prod_{j \neq i}^{N-l} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad i = 1, \dots, N-l \quad (\text{D.26})$$

Em posse desses parâmetros v_j , é possível extrair os autovetores e as energias do Hamiltoniano (2.1), como veremos abaixo.

D.3 Energias

Vimos na seção 2.1.2, ressaltando as equações (2.13) e (2.14), como obter o Hamiltoniano (2.1) a partir da matriz de transferência,

$$H = t(\tau(u) + (\omega^2 - u^2 - \eta^{-2})I - u\tau'(0) - \frac{\tau'(0)^2}{4}). \quad (\text{D.27})$$

O espectro de energia é dado por

$$H|\psi_l\rangle = E|\psi_l\rangle,$$

onde

$$E = t(\lambda_l(u) + \omega^2 - u^2 - \eta^{-2} - u\eta l - \frac{\eta^2 N^2}{4}). \quad (\text{D.28})$$

Para cada solução da equação do *Ansatz* de Bethe (D.26) obtemos um conjunto de parâmetros v_i . Substituindo esses parâmetros na equação de autovalores (D.31) e usando as relações $U = -\frac{t}{4}\eta^2$ e $\mu = -t\eta\omega$, podemos obter as energias (D.28) respectivas do sistema, como segue:

- $l = N$:

$$\begin{aligned} \lambda_N(u) &= (u + \omega + \eta N)(u - \omega) + \eta^{-2} \\ &= u^2 - \omega^2 + u\eta N - \omega\eta N + \eta^{-2} \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

então, usando a equação acima em (D.28), obtemos

$$E = -\mu N + UN^2. \quad (\text{D.30})$$

- $l < N$:

$$\lambda_l(u) = (u + \omega + \eta N)(u - \omega) \prod_{j=1}^{N-l} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-l} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j} \quad (\text{D.31})$$

$$\begin{aligned} E &= t((u + \omega + \eta N)(u - \omega) \prod_{j=1}^{N-l} \frac{u - v_j + \eta}{u - v_j} \\ &\quad + \eta^{-2} \prod_{j=1}^{N-l} \frac{u - v_j - \eta}{u - v_j} + \omega^2 - u^2 - \eta^{-2} - u\eta l - \frac{\eta^2 N^2}{4}) \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

onde o parâmetro espectral u poderá ser escolhido [63]. A seguir, apresentamos um exemplo com o intuito de mostrar o funcionamento do método apresentado acima.

Exemplo: $N = 1$

- $N = 1 \rightarrow l=1$: Vimos em (D.30) que para $N = l$ temos

$$E = -\mu N + UN^2 \quad (\text{D.33})$$

logo, para $N = 1$ e $\mu = 0$, temos que

$$E = U. \quad (\text{D.34})$$

Observamos que neste caso, $l = N$, não existe uma Equação de Bethe. Os autovetores são obtidos da equação dos estados de Bethe para $l = N$: (D.19)

$$\begin{aligned} |\psi_l\rangle &= |\phi_N\rangle \\ |\psi_l\rangle &= (\Gamma^\dagger)^N |0\rangle \\ |\psi_1\rangle &= (\alpha_3 a_1^\dagger - \alpha_1 a_3^\dagger) |0, 0, 0\rangle \\ &= \alpha_3 |1, 0, 0\rangle - \alpha_1 |0, 0, 1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0, -1\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

onde usamos que $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- $N = 1 \rightarrow l=0$: Para encontrarmos o parâmetro v_1 , precisamos resolver a equação de Bethe:

$$\eta^2(v_i + \omega + \eta l)(v_i - \omega) = \prod_{j \neq i}^{N-l} \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad i = 1, \dots, N - l \quad (\text{D.36})$$

Considerando os parâmetros:

$$\mu = 0 \rightarrow \omega = 0, \quad u = 0, \quad t = 1, \quad \text{lembrando que } U = -\frac{t}{4}\eta^2 \text{ e } \mu = -t\eta\omega$$

obtemos

$$\eta^2(v_1)^2 = 1, \quad (\text{D.37})$$

cujas soluções são:

$$v_1 = \pm \frac{1}{\eta} \quad (\text{D.38})$$

logo, as energias (D.32) respectivas são:

$$\begin{aligned} E &= \eta^{-2} \left(\frac{-v_1 - \eta}{-v_1} \right) - \eta^{-2} - \frac{\eta^2}{4} \\ E &= \frac{1}{v_1 \eta} - \frac{\eta^2}{4} \\ E &= \pm 1 + U. \end{aligned}$$

Assim como no item anterior, os autovetores são obtidos da equação dos estados

de Bethe (D.19), mas agora para $l < N$:

$$\begin{aligned}
C(v_1)|0\rangle &= (\alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger)((v_1 - \omega) + \eta N_2) + \eta^{-1} a_2^\dagger |0\rangle \\
C(v_1)|0, 0, 0\rangle &= (\alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger)((v_1) + \eta N_2) + \eta^{-1} a_2^\dagger |0, 0, 0\rangle \\
C(v_1)|0, 0, 0\rangle &= v_1(\alpha_1 a_1^\dagger + \alpha_3 a_3^\dagger)|0, 0, 0\rangle + \eta^{-1} a_2^\dagger |0, 0, 0\rangle \\
C(v_1)|0, 0, 0\rangle &= \pm \frac{1}{\eta\sqrt{2}}|1, 0, 0\rangle \pm \frac{1}{\eta\sqrt{2}}|0, 0, 1\rangle + \frac{1}{\eta}|0, 1, 0\rangle \\
C(v_1)|0, 0, 0\rangle &= \frac{1}{\eta\sqrt{2}}|1, \pm\sqrt{2}, 1\rangle
\end{aligned} \tag{D.39}$$

onde usamos que $|\phi_l\rangle = (\Gamma^\dagger)^l|0\rangle$, $l = 0$ e $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Na Tabela D.1, abaixo, apresentamos o resumo dos resultados da álgebra de Bethe e rerepresentamos os resultados obtidos da diagonalização exata (Apêndice A). Conforme o esperado, obtivemos os mesmos valores, caso $\eta = \sqrt{2}$:

Diagonalização exata		Ansatz de Bethe			
Energia	Autovetores normal.	1	pseudovacuo	Energia	Autovetores
U	$\frac{1}{\sqrt{2}} -1, 0, 1\rangle$	1	$\Gamma^\dagger 0\rangle$	U	$\frac{1}{\sqrt{2}} 1, 0, -1\rangle$
$U - 1$	$\frac{1}{2} 1, -\sqrt{2}, 1\rangle$	0	$ 0\rangle$	$U - 1$	$\frac{1}{\eta\sqrt{2}} 1, -\sqrt{2}, 1\rangle$
$U + 1$	$\frac{1}{2} 1, +\sqrt{2}, 1\rangle$	0	$ 0\rangle$	$U + 1$	$\frac{1}{\eta\sqrt{2}} 1, +\sqrt{2}, 1\rangle$

Tabela D.1: Tabela de autovalores e autovetores do Hamiltoniano (2.1) para $N = 1$, $\mu = 0$, $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $t = 1$. A Tabela da esquerda é devido a diagonalização exata e a Tabela da direita é resultado do Método Algébrico de Bethe.

Observe que os parâmetros espectrais v_i são os coeficientes dos autovetores, ou seja, eles formam o vetor na base dos autovetores. Então, no caso de $N = 1$, temos o vetor de estado de Bethe como sendo:

$$|\psi_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0, -1\rangle + \frac{1}{\eta\sqrt{2}}|1, -\sqrt{2}, 1\rangle + \frac{1}{\eta\sqrt{2}}|1, +\sqrt{2}, 1\rangle$$

logo, o vetor $|v_i\rangle$ na base dos autovetores será

$$|v_i\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\eta\sqrt{2}}, \frac{1}{\eta\sqrt{2}} \right\rangle$$

que, quando normalizado, fornece η :

$$\eta = \pm\sqrt{2}. \tag{D.40}$$

Apêndice E

Modelo para 3 poços ligados em anel

Para obtermos um modelo com os três poços ligados em anel, devemos acrescentar a possibilidade de tunelamento entre os poços 1 e 3 ao Hamiltoniano integrável (2.1). Entretanto, para que esse Hamiltoniano continue integrável, precisamos garantir a existência de três quantidades conservadas. Uma opção natural é acrescentarmos o termo Q , uma das quantidades conservadas que contém o termo de tunelamento que precisamos. Isso nos garante que Q ainda será uma quantidade conservada, bem como a energia, E , e o número de bósons, N . Assim, podemos propor o seguinte Hamiltoniano:

$$H_{anel} = H_0 + Q \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} H_{anel} = & U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + \mu(N_1 - N_2 + N_3) \\ & + t_1(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + t_3(a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger) \\ & + \frac{1}{t^2}(\alpha_1^2 N_3 + \alpha_3^2 N_1 - \alpha_1 \alpha_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1)). \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Observando que as quantidades conservadas são mantidas para este modelo, ou seja,

$$[H_{anel}, Q] = 0, \quad [H_{anel}, N] = 0, \quad [Q, N] = 0. \quad (\text{E.3})$$

o que nos permite concluir que o modelo em consideração, é integrável. Uma análise mais detalhada deste modelo será feita no futuro.

Referências Bibliográficas

- [1] Albert Einstein. *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*. Akademie der Wissenschaften, in Kommission bei W. de Gruyter, 1924.
- [2] Satyendra Nath Bose. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. *Z. phys*, 26(3):178, 1924.
- [3] Sílvio R. Dahmen. Bose and Einstein: from the birth of quantum statistics to the condensation without interaction I. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27(2):271–282, 2005.
- [4] Sílvio R. Dahmen. Bose e Einstein: Do nascimento da estatística quântica condensação sem interação II. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27(2):283–298, 2005.
- [5] Mike H. Anderson, Jason R Ensher, Michael R. Matthews, Carl E. Wieman, and Eric A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *science*, 269(5221):198, 1995.
- [6] Eric A. Cornell and Carl E. Wieman. Nobel lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Reviews of Modern Physics*, 74(3):875, 2002.
- [7] Kendall B. Davis, M. O. Mewes, Michael R. Andrews, N.J. Van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and Wolfgang Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical review letters*, 75(22):3969, 1995.
- [8] Wolfgang Ketterle. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Reviews of Modern Physics*, 74(4):1131, 2002.
- [9] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J.J. Tollett, and Randall G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Physical Review Letters*, 75(9):1687, 1995.

- [10] G.J. Milburn, J. Corney, Ewan M. Wright, and D.F. Walls. Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential. *Physical Review A*, 55(6):4318, 1997.
- [11] Augusto Smerzi, Stefano Fantoni, Stefano Giovanazzi, and S.R. Shenoy. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 79(25):4950, 1997.
- [12] Anthony J. Leggett. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Reviews of Modern Physics*, 73(2):307, 2001.
- [13] A.P. Tonel, J. Links, and A. Foerster. Quantum dynamics of a model for two Josephson-coupled Bose-Einstein condensates. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(6):1235, 2005.
- [14] A.P. Tonel, J. Links, and A. Foerster. Behaviour of the energy gap in a model of Josephson coupled Bose-Einstein condensates. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(31):6879, 2005.
- [15] A. Foerster and E. Ragoucy. Exactly solvable models in atomic and molecular physics. *Nuclear Physics B*, 777(3):373–403, 2007.
- [16] Murray T. Batchelor and Angela Foerster. Yang-Baxter integrable models in experiments: from condensed matter to ultracold atoms. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(17):173001, 2016.
- [17] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Fölling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani, and Markus K. Oberthaler. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction. *Physical review letters*, 95(1):010402, 2005.
- [18] J.R. Anglin, P. Drummond, and A. Smerzi. Exact quantum phase model for mesoscopic Josephson junctions. *Physical Review A*, 64(6):063605, 2001.
- [19] L. Sanz, R.M. Angelo, and K. Furuya. Entanglement dynamics in a two-mode nonlinear bosonic hamiltonian. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(37):9737, 2003.
- [20] Hans Bethe. Zur theorie der metalle. *Zeitschrift für Physik*, 71(3-4):205–226, 1931.
- [21] Chen-Ning Yang. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. *Physical Review Letters*, 19(23):1312, 1967.

- [22] Michio Jimbo (Ed.). *Yang-Baxter equation in integrable systems*, volume 10. World Scientific, 1990.
- [23] Rodney J. Baxter. Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 289(1359):315–346, 1978.
- [24] R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical*. London: Academic Press, 1989.
- [25] Elliott H. Lieb and F. Yu Wu. Absence of mott transition in an exact solution of the short-range, one-band model in one dimension. *Physical Review Letters*, 20(25):1445, 1968.
- [26] Jon Links, Huan-Qiang Zhou, Ross H. McKenzie, and Mark D. Gould. Algebraic bethe ansatz method for the exact calculation of energy spectra and form factors: applications to models of Bose–Einstein condensates and metallic nano-grains. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(19):R63, 2003.
- [27] Toshiya Kinoshita, Trevor Wenger, and David S. Weiss. A quantum newton’s cradle. *Nature*, 440(7086):900–903, 2006.
- [28] Lea F. Santos. Transport and control in one-dimensional systems. *Journal of Mathematical Physics*, 50(9):095211, 2009.
- [29] Aviva Gubin and Lea F. Santos. Quantum chaos: An introduction via chains of interacting spins $1/2$. *American Journal of Physics*, 80(3):246–251, 2012.
- [30] Elliott H. Lieb and Werner Liniger. Exact analysis of an interacting Bose gas. I. the general solution and the ground state. *Physical Review*, 130(4):1605, 1963.
- [31] Silvio R. Dahmen, Jon Links, Ross H. McKenzie, and Huan-Qiang Zhou. Energy level statistics for models of coupled single mode Bose-Einstein condensates. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2004(10):P10019, 2004.
- [32] L.A. Takhtadzhan and Lyudvig Dmitrievich Faddeev. The quantum method of the inverse problem and the heisenberg xyz model. *Russian Mathematical Surveys*, 34(5):11–68, 1979.
- [33] L.D. Faddeev. How algebraic bethe ansatz works for integrable model. *arXiv preprint hep-th/9605187*, 1996.
- [34] Evgeny Konstantinovich Sklyanin. Quantum version of the method of inverse scattering problem. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 95:55–128, 1980.

- [35] Peter D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on pure and applied mathematics*, 21(5):467–490, 1968.
- [36] Jean-Sébastien Caux and Jorn Mossel. Remarks on the notion of quantum integrability. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(02):P02023, 2011.
- [37] Oriol Bohigas, Marie-Joya Giannoni, and Charles Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical Review Letters*, 52(1):1, 1984.
- [38] Michael V. Berry and Michael Tabor. Level clustering in the regular spectrum. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 356, pages 375–394. The Royal Society, 1977.
- [39] Fritz Haake. *Quantum Signatures of Chaos*. Springer Series in Synergetics 54. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3 edition, 2010.
- [40] Freeman J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, 1962.
- [41] Freeman J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. ii. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):157–165, 1962.
- [42] P. Deift and D. Gioev. *Random Matrix Theory: Invariant Ensembles and Universality*. Courant Lecture Notes. American Mathematical Soc., 2009.
- [43] T.A. Brody. A statistical measure for the repulsion of energy levels. *Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985)*, 7(12):482–484, 1973.
- [44] Andrey R. Kolovsky and Andreas Buchleitner. Quantum chaos in the Bose-Hubbard model. *EPL (Europhysics Letters)*, 68(5):632, 2004.
- [45] C.R. da Cunha, M Mineharu, Masahiro Matsunaga, N Matsumoto, C Chuang, Yuichi Ochiai, G-H Kim, Kenji Watanabe, Takashi Taniguchi, David K Ferry, et al. Conductance fluctuations in high mobility monolayer graphene: Nonergodicity, lack of determinism and chaotic behavior. *Scientific Reports*, 6, 2016.
- [46] J-Ch Anglès d’Auriac, J.M. Maillard, and C.M. Viallet. Random matrix theory and higher genus integrability: the quantum chiral potts model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(23):4801, 2002.

- [47] M.A. Jafarizadeh, N. Fouladic, H. Sabric, and B Rashidian Malekic. Level spacing of $U(5) \leftrightarrow SO(6)$ transitional region with maximum likelihood estimation method. *arXiv preprint arXiv:1106.2497*, 2011.
- [48] Tobias Graß, Bruno Juliá-Díaz, Marek Kuś, and Maciej Lewenstein. Quantum chaos in su (3) models with trapped ions. *Physical review letters*, 111(9):090404, 2013.
- [49] Ho-Chiao Chuang, Evan A Salim, Vladan Vuletic, Dana Z Anderson, and Victor M Bright. Multi-layer atom chips for atom tunneling experiments near the chip surface. *Sensors and Actuators A: Physical*, 165(1):101–106, 2011.
- [50] Y.Z. You, A.W.. Ludwig, and C. Xu. Sachdev-Ye-Kitaev Model and Thermalization on the Boundary of Many-Body Localized Fermionic Symmetry Protected Topological States. *ArXiv e-prints*, February 2016.
- [51] Vladimir Gritsev, Timofei Rostunov, and Eugene Demler. Exact methods in the analysis of the non-equilibrium dynamics of integrable models: application to the study of correlation functions for non-equilibrium 1d Bose gas. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(05):P05012, 2010.
- [52] Jorn Mossel and Jean-Sébastien Caux. Exact time evolution of space-and time-dependent correlation functions after an interaction quench in the one-dimensional Bose gas. *New Journal of Physics*, 14(7):075006, 2012.
- [53] Marcos Rigol, Vanja Dunjko, Vladimir Yurovsky, and Maxim Olshanii. Relaxation in a completely integrable many-body quantum system: an ab initio study of the dynamics of the highly excited states of 1d lattice hard-core bosons. *Physical review letters*, 98(5):050405, 2007.
- [54] J. J. Sakurai, Jim J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, 2 edition, 2010.
- [55] Bill Sutherland. *Beautiful Models: 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-body Problems*. World Scientific Publishing Company, first edition edition, 2004.
- [56] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, and John L. Safko. *Classical Mechanics: Pearson New International Edition*. Pearson Higher Ed, 2014.
- [57] Zhong-Qi Ma. *Yang-Baxter Equation and Quantum Enveloping Algebras*. Advanced Series on Theoretical Physical Science. World Scientific Pub Co Inc, 1994.

- [58] Jacques H. Perk and Helen Au-Yang. Yang-Baxter equations. *arXiv preprint math-ph/0606053*, 2006.
- [59] F. Anvari Vind, Angela Foerster, Ivan S. Oliveira, Roberto Silva Sarthour, Diogo de Oliveira Soares-Pinto, Alexandre Martins de Souza, and Itzhak Roditi. Experimental realization of the Yang-Baxter equation via nmr interferometry. *Scientific reports*, 6, 2016.
- [60] A. G. Izergin V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov. *Quantum inverse scattering method and correlation functions*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, cup edition, 1997.
- [61] L. H. Ymai, A. P. Tonel, A. Foerster, and J. Links. Quantum integrable multi-well tunneling models. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(26):264001, 2017.
- [62] Jon Links, Angela Foerster, Arlei Prestes Tonel, and Gilberto Santos. The two-site Bose–Hubbard model. In *Annales Henri Poincaré*, volume 7, pages 1591–1600. Springer, 2006.
- [63] G. Santos, A. Foerster, and I. Roditi. A bosonic multi-state two-well model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(26):265206, 2013.