

Sandro Luiz Giongo

**Analiticidade e espalhamento elástico de
hádrons em altas energias**

Porto Alegre

2016

Sandro Luiz Giongo

Analiticidade e espalhamento elástico de hádrons em altas energias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Física.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física

Orientador: Prof. Dr. Emerson Gustavo de Souza Luna

Porto Alegre

2016

Agradecimentos

Agradeço aos meus excelentes amigos pelos anos de convivência, aprendizados e dores compartilhadas; às mais de mil vezes que me perguntaram como estava meu TCC; à toda ajuda que recebi no grupo "Survival Project - Korean Lifestyle"; à Ocupa Exatas, pelo espaço cedido, permitindo madrugadas escrevendo em ótima companhia; à ALVE, pelo apoio, pelas conversas e pelo grupo "TCC da Vergonha"; à Nena, pela amizade e melhores risadas.

Agradeço à melhor família que alguém poderia pedir. Melhor pai, pessoa que sempre busquei imitar e de quem sempre tenho a aprender. Melhor irmão, melhor amigo e pessoa que confio com minha vida. Melhor mãe, mulher mais importante da minha vida, pelo incrível suporte, por ter me feito como sou, por ser meu porto seguro e por ter me dado tanta inspiração e exemplo com sua história de vida e luta pelos seus sonhos.

Agradeço ao professor Emerson pela paciência e enorme ajuda neste trabalho.

Resumo

Neste trabalho descrevemos o espalhamento elástico próton-próton e antipróton-próton na região de altas energias por meio de dois modelos analíticos. Tais modelos, construídos a partir da formulação de parametrizações analíticas para amplitudes de espalhamento frontais e do uso de técnicas de relações de dispersão, são usualmente aplicados ao estudo da seção de choque total, σ_{tot} , e do parâmetro ρ (razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal). Estudamos em especial dois modelos analíticos com comportamentos assintóticos distintos: um modelo com contribuição dominante do Pomeron e outro com contribuição dominante do Odderon. Em nossas análises realizamos ajustes globais aos dados de σ_{tot} e ρ em altas energias, onde investigamos a influência dos novos dados do LHC na determinação dos parâmetros do Pomeron e do Odderon.

Palavras-chaves: amplitude de espalhamento. colisões hadrônicas. analiticidade. relações de dispersão.

Abstract

In this work we describe the proton-proton and antiproton-proton elastic scattering at high energies by means of two analytic models. These models are characterized by analytical parametrizations for the forward amplitudes and the use of dispersion relation techniques to study the total cross section σ_{tot} and the ρ parameter (the ratio between the real and imaginary parts of the forward amplitude). In our analysis we use the single Pomeron and the maximal Odderon parametrizations for the total cross section. We carry out global fits to all high-energy forward data, namely σ_{tot} and ρ , and investigate the effect of the recent LHC data on the Pomeron and Odderon parameters.

Key-words: scattering amplitude. hadronic collisions. analyticity. dispersion relations.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	6
2	ESPALHAMENTO ELÁSTICO	8
2.1	Cinemática do espalhamento	8
2.1.1	Quadrimento e referenciais inerciais	8
2.1.2	Variáveis de Mandelstam	10
2.2	Seção de choque diferencial e total	11
2.3	Função de onda e amplitude de espalhamento	12
2.4	Teorema óptico e o parâmetro ρ	15
3	PRINCÍPIOS E TEOREMAS	17
3.1	A matriz S e princípios gerais	17
3.1.1	Invariância de Lorentz	18
3.1.2	Unitaridade da matriz S	18
3.1.3	Analiticidade	18
3.1.4	Simetria de cruzamento	19
3.2	Teoremas	20
3.2.1	Limite Polinomial	20
3.2.2	Limite de Froissart-Martin	20
3.2.3	Teorema de Pomeranchuk	20
4	RELAÇÕES DE DISPERSÃO	21
4.1	Transformada de Hilbert	21
4.2	Relações de Kramers-Kronig	23
4.3	Relações de dispersão para a amplitude de espalhamento	26
5	MODELOS ANALÍTICOS	31
5.1	Dados experimentais	31
5.2	Metodologia	32
5.2.1	Modelo de Donnachie-Landshoff	34
5.2.2	Modelo de Kang-Niculescu	36
5.3	Resultados	36
	Conclusão	44
	REFERÊNCIAS	45

1 Introdução

O Modelo Padrão pode prever o comportamento da maioria dos fenômenos físicos observados no âmbito da física de partículas. Em suma, este modelo descreve os constituintes da matéria e como eles interagem entre si. As partículas mais elementares conhecidas são os léptons, quarks, suas antipartículas e seus mediadores, responsáveis pelas forças eletromagnética, forte e fraca. Quarks e antiquarks interagem por meio da força forte (mediador glúon) para formar hádrons [1]. A Cromodinâmica Quântica (CQ) concentra seus estudos em interações fortes, existentes devido à carga cor dos interagentes. Uma das formas de se investigar isso é analisando processos de espalhamento.

Um processo de espalhamento ocorre quando um feixe de partículas é incidido sobre um alvo, desviando sua trajetória devido a uma força de repulsão. A figura 1 mostra como ocorre o espalhamento clássico de uma partícula, onde b é chamado de parâmetro de impacto e θ é o ângulo de espalhamento.

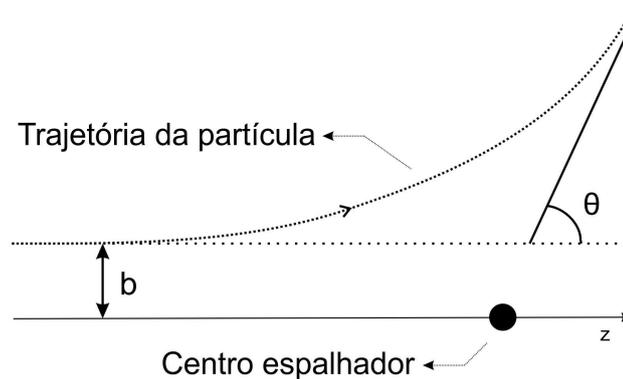


Figura 1 – Espalhamento clássico.

Na física de partículas lidamos com processos de espalhamento complexos, uma vez que temos muitos parâmetros a serem considerados, tais como: número e tipo de partículas envolvidas, suas cargas, interações e momentos. Este trabalho se concentra em interações elásticas hádron-hádron de altas energias, mais especificamente próton-próton (pp) e antipróton-próton ($\bar{p}p$), com energias de centro de momento $\sqrt{s} > 10$ GeV e pequenos valores de momento transferido (processos suaves). Diferente dos espalhamentos com grande momento transferido (processos duros), descritos com sucesso pela CQ perturbativa, os processos suaves ainda não possuem uma descrição teórica satisfatória, de forma que são necessários modelos fenomenológicos, construídos com base nas observações disponíveis e em teoremas e princípios bem estabelecidos.

O objetivo deste trabalho é investigar a teoria atual que descreve os processos suaves de espalhamento em colisões pp e $\bar{p}p$ utilizando novos dados experimentais em

conjunto com os já trabalhados, verificando a consistência dos valores obtidos com os conhecidos na literatura [2, 3].

No capítulo 2 é apresentado uma revisão teórica detalhada sobre processos de espalhamento. Define-se a amplitude de espalhamento $F(s, t)$, a seção de choque σ e o parâmetro ρ , cujas relações

$$\sigma_{tot} = \frac{ImF(s, t = 0)}{s} \quad (1.1)$$

e

$$\rho = \frac{ReF(s, t = 0)}{ImF(s, t = 0)} \quad (1.2)$$

são obtidas por meio da mecânica quântica não relativística e do Teorema Óptico.

No capítulo 3 se introduz os princípios e teoremas utilizados na análise dos processos de espalhamento. Dado que não existe uma teoria na CQ que explique satisfatoriamente os fenômenos de espalhamento com pequeno momento transferido (colisões frontais), estuda-se como estas propriedades auxiliam na análise de tais processos.

Por meio dos teoremas e princípios apresentados, são obtidas, no capítulo 4, as relações de dispersão para a amplitude de espalhamento. Estas relações permitem expressar a parte real desta grandeza em termos da parte imaginária.

No capítulo 5 e conclusão são apresentados os dados trabalhados, assim como a metodologia utilizada e os resultados obtidos. Com o uso de modelos para a seção de choque σ , são obtidas relações para ρ de forma analítica. Os dados apresentados são interpolados para se obter os parâmetros das curvas de ajuste e, desta forma, gerar os gráficos correspondentes. Posteriormente, uma análise dos parâmetros é realizada comparando os valores com um estudo anterior [2].

2 Espalhamento elástico

Este capítulo apresenta a base teórica sobre colisões e as grandezas físicas necessárias para a análise dos fenômenos estudados.

2.1 Cinemática do espalhamento

2.1.1 Quadrimomento e referenciais inerciais

Neste trabalho lidamos com colisões próton-próton e antipróton-próton em que há pouca troca de momento e não ocorra aniquilação ou produção de nenhuma outra partícula. Este processo pode ser esquematizado na forma da figura 2. Utilizando o sistema

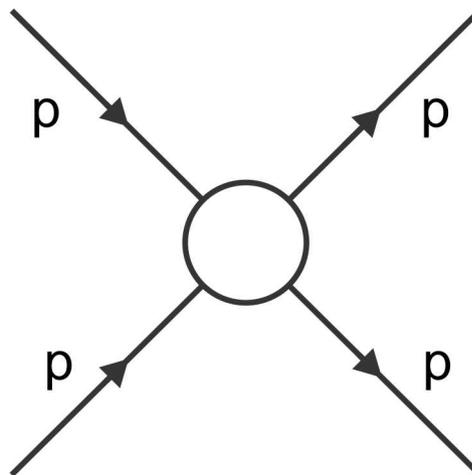


Figura 2 – Duas partículas de entrada interagem entre si. Duas partículas iguais de saída são originadas neste processo.

de unidades naturais ($c = 1$), pode-se definir o vetor quadrimomento de uma partícula de massa m como

$$q = (E, p_x, p_y, p_z), \quad (2.1)$$

onde E representa sua energia e p_i o seu momento linear na direção i . O produto interno

$$q \cdot q = E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 \quad (2.2)$$

é um invariante de Lorentz, uma vez que possui o mesmo valor independente do sistema inercial adotado [1]. No processo descrito pela figura, temos dois quadrimomentos de entrada e dois de saída. Com 4 variáveis cinemáticas para cada quadrimomento, teríamos 16 variáveis no total. Embora elas nos permitam descrever completamente o estado inicial e final do sistema, pode-se demonstrar que apenas duas variáveis são necessárias para

nos fornecer a *amplitude de espalhamento* (F) [4], grandeza que possibilita a descrição do processo de espalhamento, estudada de forma mais detalhada na seção 2.2.

Pode-se avaliar o processo de colisão a partir de dois referenciais inerciais: o laboratório e o centro de momento.

Referencial do laboratório

Considere a situação da figura 3. Antes da colisão, a partícula b se encontra em repouso com quadrimomento $q_b^L = (m_b, 0, 0, 0)$ e a partícula a com $q_a^L = (E_a^L, p_{ax}^L, p_{ay}^L, p_{az}^L)$. Após a colisão temos uma mudança nos quadrimomentos para $q_b^{L'} = (E_b^{L'}, p_{bx}^{L'}, p_{by}^{L'}, p_{bz}^{L'})$ e $q_a^{L'} = (E_a^{L'}, p_{ax}^{L'}, p_{ay}^{L'}, p_{az}^{L'})$. Como estamos lidando com um processo onde não há aniquilação

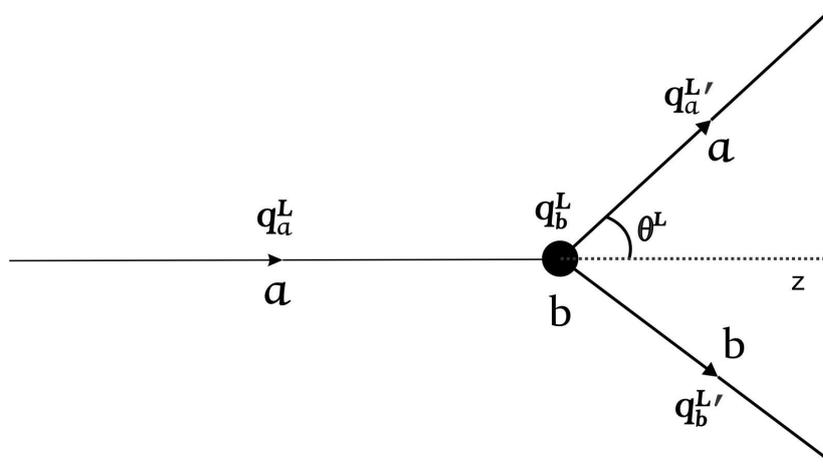


Figura 3 – Espalhamento no referencial do laboratório.

ou produção de partículas, sabemos que $m_a = m'_a$ e $m_b = m'_b$. Podemos ainda escrever o produto interno entre os quadrimomentos da partícula b e o restante, de onde, isolando as energias, obtemos

$$E_a^L = \frac{q_a^L \cdot q_b^L}{m_b}, \quad E_a^{L'} = \frac{q_a^{L'} \cdot q_b^L}{m_b} \quad \text{e} \quad E_b^{L'} = \frac{q_b^{L'} \cdot q_b^L}{m_b}. \quad (2.3)$$

O produto interno entre q_a^L e $q_a^{L'}$ nos retorna o ângulo de espalhamento θ^L :

$$q_a^L \cdot q_a^{L'} = E_a^L E_a^{L'} - |\vec{p}_a^L| |\vec{p}_a^{L'}| \cos \theta^L. \quad (2.4)$$

Referencial do centro de momento

Neste referencial, a soma dos momentos, antes e depois da colisão, é nula. Ou seja, considerando a figura 4, temos

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_a' + \vec{p}_b' = 0. \quad (2.5)$$

Defini-se a *energia no centro de momento*, E_{CM} , como

$$E_{CM}^2 = (q_a + q_b)^2 = (q_a' + q_b')^2. \quad (2.6)$$

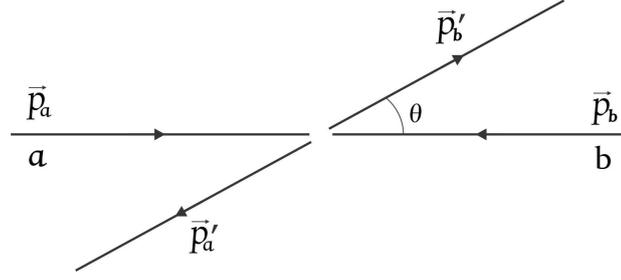


Figura 4 – Espalhamento no referencial do centro de momento.

Usando a definição de quadrimomento juntamente com a equação (2.5), obtemos, no referencial CM,

$$\begin{aligned}
 E_{CM}^2 &= (q_a + q_b)^2 \\
 &= [(E_a + E_b)\mathbf{e}_t + (p_{ax} + p_{bx})\mathbf{e}_x + (p_{ay} + p_{by})\mathbf{e}_y + (p_{az} + p_{bz})\mathbf{e}_z]^2 \\
 &= (E_a + E_b)^2 - (p_{ax} + p_{bx})^2 - (p_{ay} + p_{by})^2 - (p_{az} + p_{bz})^2 \\
 &= (E_a + E_b)^2 - (p_{ax} - p_{ax})^2 - (p_{ay} - p_{ay})^2 - (p_{az} - p_{az})^2 \\
 &= (E_a + E_b)^2.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

De forma análoga, obtemos

$$E_{CM}^2 = (E'_a + E'_b)^2. \tag{2.8}$$

2.1.2 Variáveis de Mandelstam

Chamamos de *variáveis de Mandelstam* as grandezas s , t e u , definidas por

$$s = (q_a + q_b)^2 = (q'_a + q'_b)^2, \tag{2.9a}$$

$$t = (q_a - q'_a)^2 = (q_b - q'_b)^2, \tag{2.9b}$$

$$u = (q_a - q'_b)^2 = (q_b - q'_a)^2. \tag{2.9c}$$

Verifica-se que elas são invariantes de Lorentz e satisfazem a identidade

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_a'^2 + m_b'^2. \tag{2.10}$$

De fato, devido à equação (2.10), somente duas destas variáveis são independentes e as mais utilizadas nos processos de espalhamento são a s e a t . No processo aqui descrito, s é o quadrado da energia de centro de momento, definida na equação (2.6) e t é o quadrado do momento transferido de cada partícula. Neste caso, chamamos o processo de *canal s*. Processos onde a energia no centro de momento é representada pela variável t ou u , são chamados de *canal t* e *canal u*, respectivamente.

Analisando processos elásticos de espalhamento pp e $\bar{p}p$ no centro de momento, onde a massa das partículas é a mesma (m) e o módulo dos momentos se conserva

($|\vec{p}_a| = |\vec{p}'_a| = |\vec{p}_b| = |\vec{p}'_b| = |\vec{p}|$), obtemos das equações (2.9)

$$\begin{aligned}
 s &= E_{CM}^2 = (E_a + E_b)^2 \\
 &= E_a^2 + E_b^2 + 2E_a E_b \\
 &= m^2 + |\vec{p}|^2 + m^2 + |\vec{p}|^2 + 2\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} \\
 &= 4(m^2 + |\vec{p}|^2),
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
 t &= (q_a - q'_a)^2 \\
 &= (E_a - E'_a)^2 - (p_x - p'_x)^2 - (p_y - p'_y)^2 - (p_z - p'_z)^2 \\
 &= m^2 + |\vec{p}|^2 + m^2 + |\vec{p}'|^2 - 2\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}\sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} - |\vec{p} - \vec{p}'|^2 \\
 &= 2m^2 + 2|\vec{p}|^2 - 2(m^2 + |\vec{p}|^2) - |\vec{p} - \vec{p}'|^2 \\
 &= -|\vec{p}|^2 - |\vec{p}'|^2 + 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos\theta \\
 &= -2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta),
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
 u &= (q_a - q'_b)^2 \\
 &= (E - E')^2 - (p_x + p'_x)^2 - (p_y + p'_y)^2 - (p_z + p'_z)^2 \\
 &= -|\vec{p} + \vec{p}'|^2 \\
 &= -|\vec{p}|^2 - |\vec{p}'|^2 - 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos\theta \\
 &= -2|\vec{p}|^2(1 + \cos\theta).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Além disso, da equação (2.10)

$$s + t + u = 4m^2. \tag{2.14}$$

Sabendo que $|\vec{p}| \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, podemos escrever

$$s \geq 4m^2, \quad -4|\vec{p}|^2 \leq t \leq 0, \quad -4|\vec{p}|^2 \leq u \leq 0. \tag{2.15}$$

2.2 Seção de choque diferencial e total

No âmbito experimental da física de partículas, não dispomos de processos simples e controlados para a realização de observações. Para se analisar colisões, devemos saber lidar com experimentos onde um feixe de partículas é direcionado a um alvo de partículas, processo executado por aceleradores de partículas como o Large Hadron Collider (LHC). Outra forma de se estudar isso é pela observação de raios cósmicos. Neste trabalho, são utilizados somente dados de experimentos de aceleradores, onde as energias disponíveis chegam a cerca de $\sqrt{s} = 8$ TeV. Desta forma, é necessário a introdução de conceitos que melhor descrevam os processos considerados.

A *seção de choque diferencial*, denotada por $\sigma(\theta, \phi)$, ou $d\sigma/d\Omega$, é definida como uma constante de proporcionalidade entre o número de partículas espalhadas por unidade

de tempo, dn , e o ângulo sólido $d\Omega$ juntamente com o fluxo de partículas F_i , emitidas em um feixe direcionado ao alvo em questão [5], ou seja,

$$dn = F_i \sigma(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.16)$$

Os ângulos θ e ϕ determinam a direção onde se mede o ângulo sólido $d\Omega$. Efetivamente, $\sigma(\theta, \phi) d\Omega$ tem unidade de área e representa a área efetiva do alvo, perpendicular ao feixe incidente, que faz com que as partículas se espalhem em um ângulo sólido $d\Omega$. A figura 5 apresenta um esquema relacionando tais grandezas.

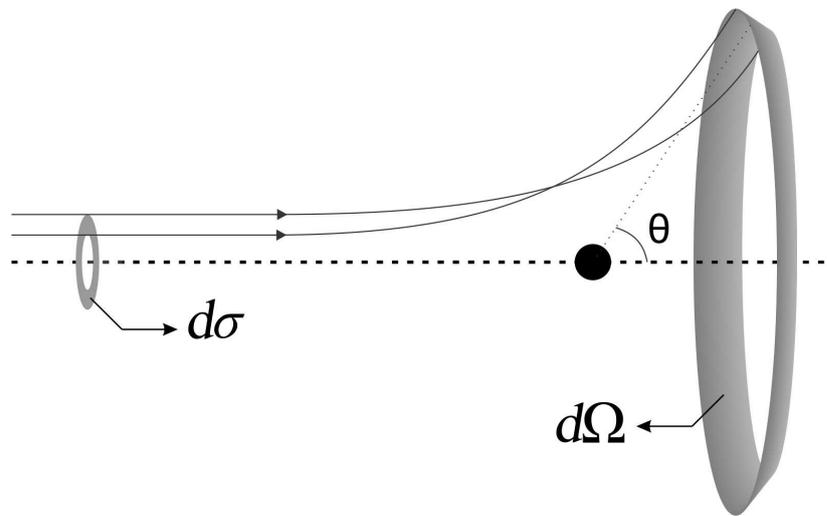


Figura 5 – Relação entre $\sigma(\theta, \phi) d\Omega$ ($d\sigma$) e $d\Omega$.

Integrando sobre todos os ângulos, obtemos a seção de choque total:

$$\sigma = \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.17)$$

Os dados que este trabalho analisa são seções de choque total obtidas para alguns valores de energia (\sqrt{s}) dos prótons incidentes.

2.3 Função de onda e amplitude de espalhamento

Na mecânica quântica, uma partícula livre sendo espalhada é considerada como uma onda plana que interage com um potencial $V(\vec{r})$. Neste caso, tomando a direção de incidência da onda ao longo do eixo z , podemos escrever a função de onda da partícula, antes da interação, como

$$\Psi(z) = e^{ikz}, \quad (2.18)$$

onde k é o número de onda, dado por

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}. \quad (2.19)$$

Sabe-se que a função que descreve o processo de espalhamento é solução da equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \quad (2.20)$$

onde μ é a massa reduzida e \hbar é a constante de Planck dividida por 2π . Definindo $U(\vec{r}) = (2\mu/\hbar^2)V(\vec{r})$, podemos reescrever a equação (2.20) na forma

$$\left[\nabla^2 + k^2 - U(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r}) = 0. \quad (2.21)$$

Para os processos analisados, assumimos que o potencial $V(\vec{r})$ decresce mais rapidamente que $1/r$ conforme r cresce.

Quando a onda plana atinge a região de influência do potencial, sua estrutura se altera de forma complexa. Porém, para valores suficientemente elevados de r , o potencial, que é central, não interfere de maneira significativa na função de onda resultante do espalhamento. Desta forma, podemos escrever a função de onda simplesmente como

$$\Psi(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikz} + F(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.22)$$

Esta solução é uma superposição de uma onda plana transmitida e uma onda esférica espalhada, conforme mostrado na figura 6. Como estamos lidando com espalhamentos elásticos, o valor de k permanece inalterado. É possível demonstrar que há apenas uma solução por valor de k que satisfaça a equação (2.21) com as condições assintóticas da equação (2.22). O último termo possui um fator $1/r$, que é responsável pela conservação da probabilidade, uma vez que a onda esférica deve ter sua função $|\Psi|^2$ decaindo com o quadrado da distância. O termo $F(\theta, \phi)$ é chamado de *amplitude de espalhamento elástica* e é responsável pela amplitude da onda espalhada dada uma direção (θ e ϕ).

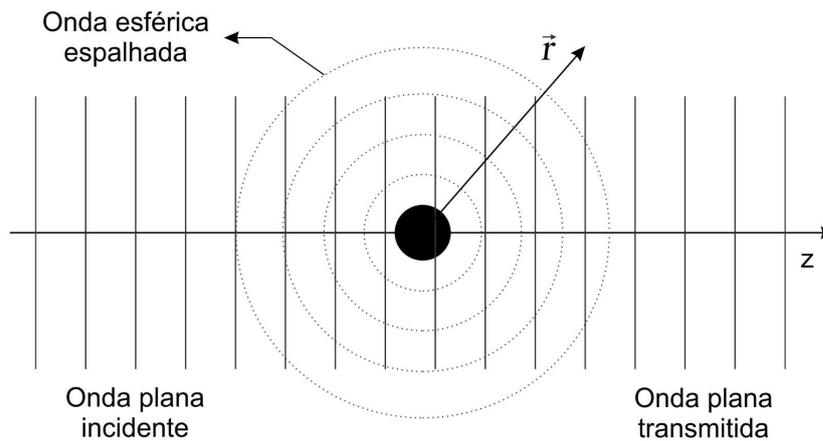


Figura 6 – Representação do espalhamento de uma onda plana por um potencial $V(\vec{r})$.

Podemos escrever o fluxo de partículas espalhadas, F_e , como

$$F_e = \frac{dn}{dA} = \frac{dn}{r^2 d\Omega}. \quad (2.23)$$

Pela equação (2.16), temos que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dn/d\Omega}{F_i}, \quad (2.24)$$

e, portanto,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \frac{F_e}{F_i}. \quad (2.25)$$

Utilizando a definição de corrente de probabilidade,

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{Re} \left[\Psi^*(\vec{r}) \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi(\vec{r}) \right], \quad (2.26)$$

é possível escrever as contribuições das ondas incidente (\vec{J}_i) e espalhada (\vec{J}_e). Desta forma, com $\Psi(\vec{r}) = e^{ikz}$, temos

$$|\vec{J}_i| = \left| \frac{1}{\mu} \text{Re} \left[e^{-ikz} \frac{\hbar}{i} \nabla e^{ikz} \right] \right| = \frac{\hbar k}{\mu} \quad (2.27)$$

e

$$\vec{J}_e = \frac{1}{\mu} \text{Re} \left[F(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\hbar}{i} \nabla \left(F(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right]. \quad (2.28)$$

Escrevendo \vec{J}_e em termos de suas componentes esféricas, temos

$$(\vec{J}_e)_r = \frac{\hbar k}{\mu r^2} |F(\theta, \phi)|^2, \quad (2.29a)$$

$$(\vec{J}_e)_\theta = \frac{\hbar}{\mu r^3} \text{Re} \left[\frac{1}{i} F^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} F(\theta, \phi) \right], \quad (2.29b)$$

$$(\vec{J}_e)_\phi = \frac{\hbar}{\mu r^3 \sin \theta} \text{Re} \left[\frac{1}{i} F^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} F(\theta, \phi) \right]. \quad (2.29c)$$

Uma vez que estamos lidando com regimes assintóticos, onde r é muito grande, as componentes $(\vec{J}_e)_\theta$ e $(\vec{J}_e)_\phi$ podem ser ignoradas, uma vez que a maior contribuição para a corrente de probabilidade será a de $(\vec{J}_e)_r$.

Assume-se que o feixe incidente seja composto por partículas independentes e no mesmo estado quântico. Desta forma, podemos dizer que o fluxo é proporcional à corrente de probabilidade, ou seja,

$$F_i = C |\vec{J}_i| = C \frac{\hbar k}{\mu}, \quad (2.30)$$

$$F_e = C |\vec{J}_e| = C \frac{\hbar k}{\mu r^2} |F(\theta, \phi)|^2. \quad (2.31)$$

Substituindo as equações acima na equação (2.25), obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(\theta, \phi)|^2. \quad (2.32)$$

2.4 Teorema óptico e o parâmetro ρ

A amplitude de espalhamento depende da energia, ou do valor k , associada à onda incidente, e pode ser escrita como uma soma de ondas parciais [4]. Desta forma, considerando simetria azimutal (independência de ϕ), temos

$$F(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta). \quad (2.33)$$

Chamamos f_l de amplitude da onda parcial e $P_l(\cos \theta)$ é o polinômio de Legendre correspondente ao valor de l . No nosso caso,

$$f_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i}, \quad (2.34)$$

onde δ_l representa a mudança de fase da onda devido ao potencial e pode assumir valores complexos. Desta forma, obtemos

$$F(k, \theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - e^{2i\delta_l}) P_l(\cos \theta). \quad (2.35)$$

Para $\theta = 0$ (espalhamento frontal), $P_l(1) = 1$ e

$$ImF(k, 0) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - Re(e^{2i\delta_l})]. \quad (2.36)$$

A partir da amplitude de espalhamento, obtemos as seções de choque elástica e inelástica [5]:

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - e^{2i\delta_l}|^2, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{inel} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |e^{2i\delta_l}|^2). \quad (2.38)$$

Somando estas equações, obtemos a seção de choque total

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - Re(e^{2i\delta_l})]. \quad (2.39)$$

Comparando a equação acima com a equação (2.36), obtemos o chamado *Teorema Óptico*:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} ImF(k, 0). \quad (2.40)$$

Podemos expressar esta equação em termos das variáveis s e t da forma

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} ImF(s, t=0). \quad (2.41)$$

Como estamos trabalhando no regime de altas energias ($\sqrt{s} > 10$ GeV) e com colisões pp e $\bar{p}p$, partículas com massa $m \sim 0.938$ GeV, temos, pela equação (2.11),

$$s = 4(m^2 + |\vec{p}|^2) \sim 4|\vec{p}|^2. \quad (2.42)$$

Usando $\hbar = 1$ ($|\vec{p}| = k$), podemos reescrever a equação para $\sigma_{tot}(s)$ como

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{ImF(s, t = 0)}{s}. \quad (2.43)$$

Sabe-se que a amplitude $F(s, t)$ é uma função que pode assumir valores complexos, mesmo suas variáveis sendo grandezas reais. Desta forma, pode-se escrevê-la em coordenadas polares complexas, $F(s, t) = |F(s, t)|e^{i\phi(s, t)}$. Definimos o *parâmetro* ρ em termos de ϕ :

$$\rho(s) = \frac{1}{\tan \phi(s, t = 0)}, \quad (2.44)$$

ou

$$\rho(s) = \frac{ReF(s, t = 0)}{ImF(s, t = 0)}. \quad (2.45)$$

3 Princípios e teoremas

Os processos estudados neste trabalho, espalhamentos com pouco momento transferido e no regime de altas energias, são tratados utilizando-se de alguns princípios e teoremas que, juntos, nos fornecem uma forma razoável de se descrever tais fenômenos por meio das grandezas σ e ρ , uma vez que a CQ somente não possui um modelo disponível. Desta forma antes da análise dos dados, devemos ter alguns conceitos e suposições definidos.

3.1 A matriz S e princípios gerais

Nossa análise se baseia em um estudo desenvolvido com o objetivo de descrever completamente as interações fortes. Embora mal sucedido, suas estratégias ainda são utilizadas em processos hadrônicos [4]. Dentre elas, utilizamos a formulação da *matriz* S , empregada para descrever a evolução entre dois estados quânticos em um espalhamento, ou seja,

$$S|i\rangle = |f\rangle, \quad (3.1)$$

tal que $|i\rangle$ e $|f\rangle$ representam, nos tempos $-\infty$ e $+\infty$, os estados inicial e final respectivamente. De fato, definimos a matriz S como o operador linear evolução temporal aplicado nestes tempos:

$$S \equiv U(-\infty, +\infty). \quad (3.2)$$

Se tal operador fosse conhecido, seria possível a completa descrição destes processos de espalhamento. Verifica-se, ainda, que os elementos desta matriz representam as amplitudes de espalhamento envolvidas nos processos aqui descritos [4].

É possível demonstrar que a seção de choque total σ_{tot} pode ser escrita em termos das variáveis cinemáticas das partículas e os elementos da matriz S [4]. Isso é feito utilizando-se da matriz T , definida por

$$S = \mathbb{1} + iT, \quad (3.3)$$

de forma que encontramos a equação invariante

$$\sigma_{tot} = \frac{(2\pi)^4}{4 [(P_{i1}P_{i2})^2 - m_{i1}^2 m_{i2}^2]^{1/2}} \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} |T_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \right]. \quad (3.4)$$

Com isso pode-se também demonstrar o Teorema Óptico, dado pela equação (2.41). Não faz parte do escopo deste trabalho tal demonstração ou a prova da equação acima, apesar de ser interessante a apresentação da relação entre a matriz S e as grandezas relevantes nesta análise.

3.1.1 Invariância de Lorentz

Assume-se que a matriz S seja relativisticamente invariante, ou seja, os elementos deste operador são combinações de variáveis cinemáticas invariantes de Lorentz, tais como as de Mandelstam, s , t e u , definidas na seção 2.1.2.

3.1.2 Unitaridade da matriz S

Da equação (3.1), segue que a probabilidade de ocorrência de um estado inicial $|i\rangle$ para um estado final $|f\rangle$ é

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | S | i \rangle|^2 = \langle i | S^\dagger | f \rangle \langle f | S | i \rangle. \quad (3.5)$$

Somando as probabilidades de ocorrência para todos os estados finais possíveis, sabemos que a probabilidade total será 1, portanto,

$$\sum_f P_{i \rightarrow f} = \sum_f \langle i | S^\dagger | f \rangle \langle f | S | i \rangle = 1. \quad (3.6)$$

Considerando o conjunto de estados finais ortogonal, podemos utilizar a relação de completudeza $\sum_f |f\rangle \langle f| = \mathbb{1}$ para escrever

$$\langle i | S^\dagger S | i \rangle = 1. \quad (3.7)$$

Pela arbitrariedade do estado inicial $|i\rangle$, podemos escrever, finalmente,

$$S^\dagger S = 1. \quad (3.8)$$

Ou seja, a unitaridade da matriz S é uma consequência direta da conservação de probabilidade.

3.1.3 Analiticidade

Esta propriedade postula que os elementos da matriz S , que representam as amplitudes de espalhamento e são funções de grandezas físicas (valores reais), possam ser continuados analiticamente para o plano complexo das variáveis cinemáticas.

Para os espalhamentos elásticos pp e $\bar{p}p$ considerados aqui, a analiticidade se aplica à amplitude física de espalhamento $F(s, t = 0)$, de forma que a consideramos o limite de uma função complexa mais geral:

$$F(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(s + i\epsilon, t = 0). \quad (3.9)$$

Temos que $\mathcal{F}(s + i\epsilon, t = 0)$ é analítica para todos os valores de ϵ e s , exceto nos pontos de singularidade e cortes de ramo, dados pela unitaridade [4].

3.1.4 Simetria de cruzamento

Na seção 2.1.2, foram introduzidas as variáveis de Mandelstam e como as consideramos em cada um dos canais s , t e u . Podemos ilustrar o princípio da simetria de cruzamento descrevendo cada um desses canais como diferentes processos de espalhamento, conforme segue:

$$\text{canal } s: \quad a + b \rightarrow c + d, \quad (3.10a)$$

$$\text{canal } t: \quad a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d, \quad (3.10b)$$

$$\text{canal } u: \quad a + \bar{d} \rightarrow \bar{b} + c. \quad (3.10c)$$

Nesta formulação, uma partícula de chegada com momento q pode ser vista como uma antipartícula de saída com momento $-q$, dependendo do canal. A figura 7 mostra um esquema de tais processos. Esta propriedade nos diz que podemos escrever as amplitudes de espalhamento de cada um destes processos utilizando a mesma função, trocando apenas o sinal de algumas variáveis. Considerando $F(s, t)$, $F'(s', t')$ e $F''(s'', t'')$ as amplitudes de espalhamento dos processos nos canais s , t e u , respectivamente, podemos escrever

$$F'(s', t') = F(s = t', t = s'), \quad (3.11)$$

$$F''(s'', t'') = F(s = u'', t = t''). \quad (3.12)$$

Isso significa que podemos considerar a amplitude de espalhamento de um processo $\bar{p}p$ igual a de um processo pp , se trocarmos o sinal do quadrimomento da antipartícula \bar{p} .

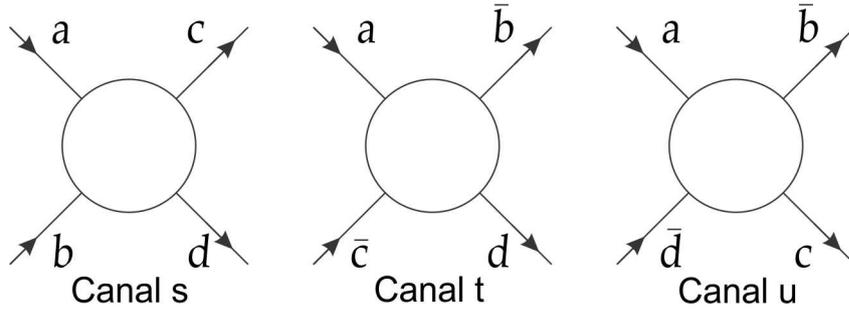


Figura 7 – Processos de espalhamento nos canais s , t e u .

Definindo F_+ e F_- como as amplitudes de espalhamento par e ímpar, respectivamente, este princípio nos permite escrever

$$F_{\pm} = \frac{F_{pp} \pm F_{\bar{p}p}}{2}, \quad (3.13)$$

ou seja, podemos relacionar F_{\pm} com as amplitudes dos espalhamentos de pp e $\bar{p}p$.

3.2 Teoremas

Esta seção apresenta, de forma resumida, três teoremas fundamentais a respeito da seção de choque σ e do parâmetro ρ , derivados a partir da Teoria Quântica de Campos e dos princípios adotados na seção anterior.

3.2.1 Limite Polinomial

Este teorema foi deduzido por Epstein, Glaser e Martin em 1969 e relaciona um limite para a amplitude de espalhamento [6]:

$$|F(s, t)| < |s|^N. \quad (3.14)$$

Considera-se, nesta equação, que as variáveis assumam valores dentro de limites físicos, $s > s_0$ e $t_0 < t \leq 0$, e que N seja um número natural.

3.2.2 Limite de Froissart-Martin

Este teorema estabelece que a seção de choque total não pode crescer mais rapidamente que $\ln^2 s$, portanto, para $s \rightarrow \infty$ [4],

$$\sigma_{tot} \leq C \ln^2 s, \quad (3.15)$$

onde C é uma constante.

3.2.3 Teorema de Pomeranchuk

A versão original deste teorema estabelece que, para energias altas, se as seções de choque total para colisões partícula-partícula e antipartícula-partícula tendem a valores constantes, então ambas tendem ao mesmo valor [7], ou seja,

$$\sigma_{tot}^{pp} \simeq \sigma_{tot}^{\bar{p}p}, \quad s \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Outra relação para os limites assintóticos foi derivada em 1973 por Grumberg e Truong [8]. Esta utiliza certas propriedades como analiticidade e unitaridade e aceita que as seções de choque total cresçam indefinidamente e, além disso,

$$\frac{\sigma_{tot}^{pp}}{\sigma_{tot}^{\bar{p}p}} \rightarrow 1, \quad s \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Pode-se demonstrar, utilizando-se do Limite de Froissart-Martin, que a diferença entre as seções de choque são limitadas [9]:

$$\Delta\sigma = |\sigma_{tot}^{pp} - \sigma_{tot}^{\bar{p}p}| \leq \ln s. \quad (3.18)$$

4 Relações de dispersão

O parâmetro ρ , apresentado na equação (2.45), é dado por

$$\rho(s) = \frac{\operatorname{Re}F(s, t = 0)}{\operatorname{Im}F(s, t = 0)}. \quad (4.1)$$

Tal relação motiva uma análise desta grandeza utilizando relações de dispersão, ou seja, equações que relacionam a parte real com a parte imaginária de funções complexas que representem quantidades físicas [10]. Para isso, é necessário a introdução desta teoria com um certo detalhamento.

4.1 Transformada de Hilbert

Considere a integral

$$\oint_S \frac{f(z)}{z - \alpha} dz, \quad (4.2)$$

onde a função $f(z)$ é analítica na metade superior do plano complexo, $|f(z)| \rightarrow 0$ no limite $|z| \rightarrow \infty$ e S seja o contorno mostrado na figura 8. Considera-se que $f(z)$ e $1/z - \alpha$ sejam

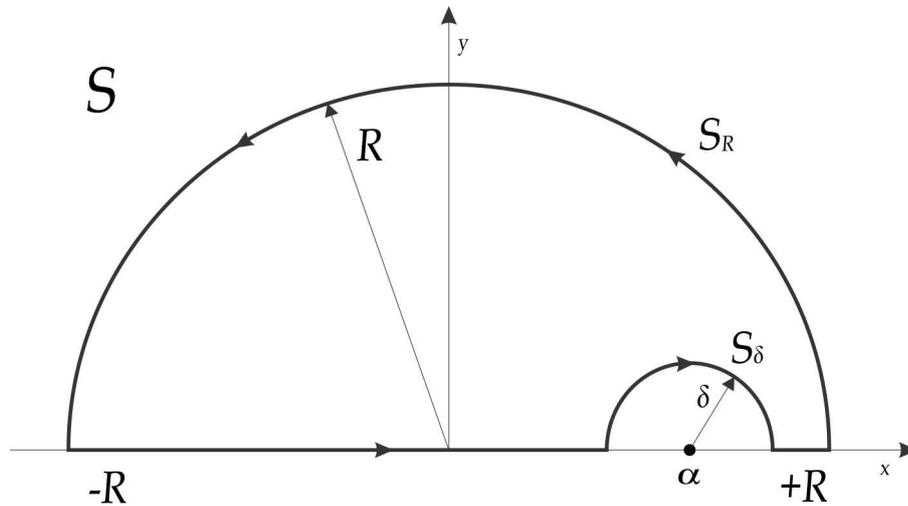


Figura 8 – Contorno efetuado pela integral de caminho fechada a fim de se obter a transformada de Hilbert.

analíticas em e sobre S . Desta forma, pelo teorema de Cauchy-Goursat [10], temos

$$\oint_S \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 0. \quad (4.3)$$

Abrindo-se esta integral em trechos específicos do contorno mostrado na figura, escrevemos

$$\int_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x - \alpha} dx + \int_{S_\delta} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz + \int_{\alpha+\delta}^R \frac{f(x)}{x - \alpha} dx + \int_{S_R} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 0. \quad (4.4)$$

O raio δ pode ser tão pequeno quanto se queira, enquanto que R pode tender ao infinito. Em S_R , podemos escrever $z = Re^{i\theta}$ de forma que temos

$$\int_{S_R} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = i \int_{\pi}^0 \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - \alpha} Re^{i\theta} d\theta. \quad (4.5)$$

Sabendo que

$$|Re^{i\theta} - \alpha| = \sqrt{R^2 + \alpha^2 - 2R\alpha \cos \theta} \geq \sqrt{R^2 + \alpha^2 - 2R\alpha} = |R - \alpha|, \quad (4.6)$$

é fácil obter

$$\left| \int_{S_R} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \right| \leq \frac{R}{|R - \alpha|} \int_0^{\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta. \quad (4.7)$$

Mas, conforme $R \rightarrow \infty$, $R/|R - \alpha| \rightarrow 1$, e, pela nossa consideração inicial, $|f(z)| \rightarrow 0$. Portanto, tomando R tão grande quanto se queira, o termo integrado em S_R pode ser desprezado. Considerando isso, a equação (4.4) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^{\alpha - \delta} \frac{f(x)}{x - \alpha} dx + \int_{\alpha + \delta}^R \frac{f(x)}{x - \alpha} dx \right] &= - \int_{S_{\delta}} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \\ &= -f(\alpha) \int_{S_{\delta}} \frac{dz}{z - \alpha} - \int_{S_{\delta}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde o termo $\int_{S_{\delta}} \frac{f(\alpha)}{z - \alpha}$ foi somado e subtraído. Tomando $z - \alpha = \delta e^{i\theta}$, temos

$$-f(\alpha) \int_{S_{\delta}} \frac{dz}{z - \alpha} = -if(\alpha) \int_{\pi}^0 d\theta = i\pi f(\alpha). \quad (4.9)$$

Agora, uma vez que $f(\alpha)$ é contínua, pode-se considerar que, para qualquer valor de $\epsilon > 0$, existe um valor de β tal que $|f(z) - f(\alpha)| < \epsilon$ e $|z - \alpha| \leq \beta$. Desta forma, tomando $\beta = \delta$, temos

$$\left| \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \right| < \frac{\epsilon}{\delta} \quad (4.10)$$

para todo valor em S_{δ} . Como o comprimento do caminho integrado é $\pi\delta$, podemos escrever

$$\left| \int_{S_{\delta}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \right| < \frac{\epsilon}{\delta} \pi\delta = \pi\epsilon. \quad (4.11)$$

Escolhendo ϵ tão pequeno quanto se queira, podemos afirmar que a integral sobre S_{δ} se anula. Desta forma, nos resta

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^{\alpha - \delta} \frac{f(x)}{x - \alpha} dx + \int_{\alpha + \delta}^R \frac{f(x)}{x - \alpha} dx \right] = i\pi f(\alpha), \quad (4.12)$$

ou, definindo o *valor principal da integral*, reescrevemos esta equação como

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \alpha} dx = i\pi f(\alpha). \quad (4.13)$$

A função $f(x)$ é complexa com uma variável real, de forma que vale a relação com as suas partes real e imaginária ($f_R(x)$ e $f_I(x)$)

$$f(x) = f_R(x) + if_I(x), \quad (4.14)$$

e, portanto,

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_R(x)}{x - \alpha} dx + iP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_I(x)}{x - \alpha} dx = i\pi f_R(\alpha) - \pi f_I(\alpha). \quad (4.15)$$

Igualando as partes reais e imaginárias desta equação, encontramos o par *Transformada de Hilbert*:

$$f_R(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_I(x)}{x - \alpha} dx, \quad (4.16a)$$

$$f_I(\alpha) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_R(x)}{x - \alpha} dx. \quad (4.16b)$$

4.2 Relações de Kramers-Kronig

As relações da transformada de Hilbert, (4.16), podem ser utilizadas com funções que nos retornem valores físicos. Considere um sistema físico onde uma entrada $I(t)$ está relacionada a uma resposta $R(t)$ da seguinte forma:

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') I(t') dt'. \quad (4.17)$$

Por exemplo, $R(t)$ poderia ser a polarização resultante de um campo elétrico $I(t')$. Assume-se, aqui, que G dependa apenas de $t - t'$, uma vez que se espera que o sistema responda a uma entrada em t_0 , $I(t') = I_0 \delta(t' - t_0)$, da mesma forma que a uma entrada em $t_0 + \tau$ num tempo τ mais tarde. Para ambos os casos, teríamos

$$R_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') I_0 \delta(t' - t_0) dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_0 G(t - t_0), \quad (4.18)$$

$$R_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') I_0 \delta(t' - t_0 - \tau) dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_0 G(t - t_0 - \tau). \quad (4.19)$$

Desta forma, obtemos

$$R_2(t + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_0 G(t - t_0) = R_1(t). \quad (4.20)$$

Agora, partindo do fato de que estamos lidando com um sistema físico, pelo princípio da causalidade, uma entrada em t não pode ocasionar uma resposta em um tempo menor que t . Portanto, temos que $G(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, assim

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t G(t - t') I(t') dt'. \quad (4.21)$$

Esta equação nos mostra que a resposta em t é uma superposição de todas as entradas anteriores a este tempo.

Escrevendo as transformadas de Fourier

$$r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{i\omega t} dt, \quad (4.22a)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{i\omega t} dt, \quad (4.22b)$$

$$i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I(t)e^{i\omega t} dt, \quad (4.22c)$$

pelo teorema da convolução, reescrevemos a equação (4.17) como

$$r(\omega) = g(\omega)i(\omega). \quad (4.23)$$

Como $G(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, então

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t)e^{i\omega t} dt. \quad (4.24)$$

Tomando g como uma função complexa e estendendo seu domínio para os números complexos, temos

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t)e^{izt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t)e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt, \quad (4.25)$$

onde $z = \omega + i\omega'$. Agora, considerando apenas o plano complexo superior ($\omega' > 0$), o termo $e^{-\omega' t}$ é uma exponencial decrescente. Além disso, temos

$$|g(z)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M_G \int_0^{\infty} e^{-|z|\sin \theta t} dt, \quad (4.26)$$

tal que $0 < \theta < \pi$ e M_G é uma constante onde $M_G \geq |G(t)|$ para $t > 0$. Portanto

$$|g(z)| = \frac{M_G}{\sqrt{2\pi}|z|\sin \theta} \quad (4.27)$$

com seu valor tendendo a zero quando $z \rightarrow \infty$. Para θ igual a 0 ou π , temos

$$g(\omega, \omega' = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t)e^{i\omega t} dt. \quad (4.28)$$

Agora, se $G(t)$ é quadrado integrável, $g(\omega, \omega' = 0)$ também o é [10]. Assim, em qualquer direção no plano complexo superior ($\omega' > 0$) $|g(z)| \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow \infty$.

É do nosso interesse mostrar que $g(z)$ é uma função analítica em $\omega' > 0$. Nesta condição e usando a equação (4.25), podemos escrever

$$\frac{d^n}{dz^n} g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) \frac{d^n}{dz^n} e^{izt} dt = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^n G(t) e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt, \quad (4.29)$$

uma vez que a integral destas equações são uniformemente convergentes. Assumindo que $G(\tau)$ decresce exponencialmente em $\tau \rightarrow \infty$, podemos afirmar que $g(z)$ é uma função

analítica em $\omega' \geq 0$, uma vez que podemos diferenciá-la infinitamente. Desta forma, a Transformada de Hilbert se aplica a $g(z)$, ou seja,

$$g_R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}, \quad (4.30a)$$

$$g_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_R(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}. \quad (4.30b)$$

Portanto, usando de algumas suposições razoáveis sobre o sistema físico, pode-se utilizar as equações (4.30) para relacionar as partes reais e imaginárias de $g(\omega)$ em função de valores reais. Agora, dado que $G(t)$ é real, temos, de (4.25),

$$g^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{-iz^*t} dt = g(-z^*). \quad (4.31)$$

Usando valores reais ($z = \omega$), temos

$$g_R(\omega) - ig_I(\omega) = g_R(-\omega) + ig_I(-\omega). \quad (4.32)$$

Ou, ainda,

$$g_R(\omega) = g_R(-\omega), \quad (4.33a)$$

$$g_I(\omega) = -g_I(-\omega). \quad (4.33b)$$

Portanto, $g_R(\omega)$ é uma função par em ω , enquanto que $g_I(\omega)$ é uma função ímpar. Reescrevendo a equação (4.30a), temos

$$g_R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}. \quad (4.34)$$

Trocando-se o sinal de $\bar{\omega}$ da primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned} g_R(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{\infty}^0 \frac{g_I(-\bar{\omega})}{-\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} + \omega} d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \\ &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

De maneira similar, encontra-se

$$g_I(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{g_R(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \quad (4.36)$$

As equações acima são chamadas de relações de dispersão de Kramers-Kronig, onde $g(\omega)$ é considerada uma quantidade física, tal como a susceptibilidade magnética.

4.3 Relações de dispersão para a amplitude de espalhamento

Conforme apresentado na seção 3, podemos escrever as amplitudes de espalhamento como funções complexas analíticas. Além disso, trocando-se a variável s , por u , obtemos a mesma grandeza, mas para um processo de colisão $\bar{p}p$. Portanto, temos

$$F_{pp}(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(s + i\epsilon, t = 0), \quad (4.37)$$

$$F_{\bar{p}p}(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(u - i\epsilon, t = 0), \quad (4.38)$$

ou, usando $u = 4m^2 - s - t$,

$$F_{\bar{p}p}(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(-s + 4m^2 - i\epsilon, t = 0). \quad (4.39)$$

Introduzindo-se a variável ω como

$$\omega = s - u = s - (-s + 4m^2) = 2s - 4m^2 \quad (4.40)$$

e usando a relação $s = 2m^2 + 2mE$ [4], onde E é a energia da partícula incidente no referencial do laboratório, temos

$$\omega = 4mE, \quad (4.41)$$

ou

$$E = \frac{\omega}{4m} = \frac{s - u}{4m}. \quad (4.42)$$

Ou seja, trocando-se o sinal de E , podemos escrever a amplitude de espalhamento para ambos os processos pp e $\bar{p}p$:

$$G_{pp}(E, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(E + i\epsilon, t = 0), \quad (4.43)$$

$$G_{\bar{p}p}(E, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(-E - i\epsilon, t = 0), \quad (4.44)$$

onde $\mathcal{G}(E, t = 0) = \mathcal{F}(2mE + 2m^2, t = 0)$.

Por ser um procedimento muito complexo para os objetivos deste trabalho, não será apresentada a determinação das singularidades das amplitudes de espalhamento, apenas a sua estrutura. Para a função $\mathcal{G}(E, t = 0)$ em altas energias, temos um corte de $-\infty$ até $E = -m$ e de $E = m$ até $+\infty$ [8]. Além disso, valem as seguintes propriedades [11]:

$$\mathcal{F}(s^*, t) = \mathcal{F}^*(s, t), \quad (4.45)$$

$$\mathcal{G}(E^*, t = 0) = \mathcal{G}^*(E, t = 0). \quad (4.46)$$

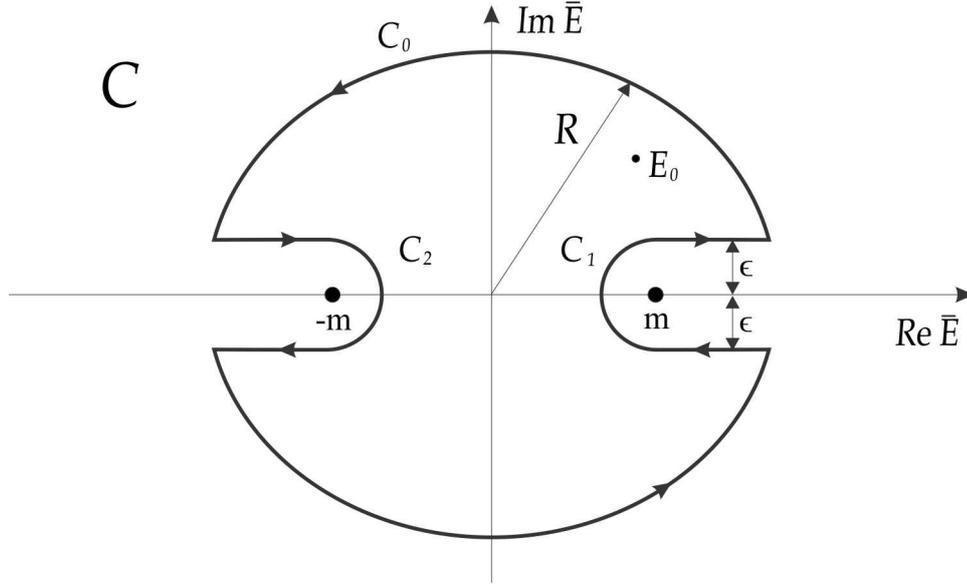


Figura 9 – Contorno realizado pela integral fechada para a obtenção das relações de dispersão.

Pelo teorema de Cauchy-Goursat, temos

$$\mathcal{G}(E_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathcal{G}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} d\bar{E}, \quad (4.47)$$

onde definimos o contorno C conforme a figura 9 e consideramos $\mathcal{G}(E_0) = \mathcal{G}(E_0, t = 0)$. Escrevendo esta integral como uma soma dos caminhos apresentados na figura, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(E_0) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\mathcal{G}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} d\bar{E} + \int_{C_1} \frac{\mathcal{G}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} d\bar{E} + \int_{C_2} \frac{\mathcal{G}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} d\bar{E} + \int_m^R \frac{\mathcal{G}(E' + i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \\ & + \int_R^m \frac{\mathcal{G}(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \int_{-m}^{-R} \frac{\mathcal{G}(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \int_{-R}^{-m} \frac{\mathcal{G}(E' + i\epsilon)}{E' - E_0} dE', \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde consideramos $E' = \text{Re } \bar{E}$ e desprezamos a parte imaginária de \bar{E} em alguns dos denominadores. Agora, as integrais das semiretas podem ser escritas da seguinte forma

$$\int_m^R \frac{\mathcal{G}(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \int_m^R \frac{\mathcal{G}(-E' - i\epsilon) - \mathcal{G}(-E' + i\epsilon)}{E' + E_0} dE'. \quad (4.49)$$

Se \mathcal{G} for par, o denotamos por \mathcal{G}_+ , então $\mathcal{G}_+(E' + i\epsilon) = \mathcal{G}_+(-E' - i\epsilon)$. Assim,

$$\int_m^R \frac{\mathcal{G}_+(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}_+(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \int_m^R \frac{\mathcal{G}_+(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}_+(E' - i\epsilon)}{E' + E_0} dE'. \quad (4.50)$$

Se \mathcal{G} for ímpar, \mathcal{G}_- , então $\mathcal{G}_-(E' + i\epsilon) = -\mathcal{G}_-(-E' - i\epsilon)$ e

$$\int_m^R \frac{\mathcal{G}_-(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}_-(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' - \int_m^R \frac{\mathcal{G}_-(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}_-(E' - i\epsilon)}{E' + E_0} dE'. \quad (4.51)$$

De (4.46), temos que

$$\mathcal{G}(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}(E' - i\epsilon) = \mathcal{G}(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}^*(E' + i\epsilon) = 2i \text{Im } \mathcal{G}(E' + i\epsilon), \quad (4.52)$$

de forma que podemos reescrever as integrais acima como

$$2i \int_m^R \text{Im } \mathcal{G}_+(E' + i\epsilon) \left[\frac{1}{E' - E_0} + \frac{1}{E' + E_0} \right] dE', \quad (4.53)$$

$$2i \int_m^R \text{Im } \mathcal{G}_-(E' + i\epsilon) \left[\frac{1}{E' - E_0} - \frac{1}{E' + E_0} \right] dE'. \quad (4.54)$$

Tomando os limites $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$, as integrais sobre os contornos C_0 , C_1 e C_2 tendem a zero. Portanto, (4.48) pode ser escrita das formas

$$\mathcal{G}_+(E_0) = \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \text{Im } G_+(E') \left[\frac{1}{E' - E_0} + \frac{1}{E' + E_0} \right] dE', \quad (4.55)$$

$$\mathcal{G}_-(E_0) = \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \text{Im } G_-(E') \left[\frac{1}{E' - E_0} - \frac{1}{E' + E_0} \right] dE', \quad (4.56)$$

onde $G_\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}_\pm(E' + i\epsilon)$. Fazendo E_0 tender ao eixo real por valores positivos de sua parte imaginária ($\mathcal{G}_\pm(E_0) \rightarrow G_\pm(E)$), a equação acima se equivale à relação

$$G_\pm(E) = \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \text{Im } G_\pm(E') \left[\frac{1}{E' - E} \pm \frac{1}{E' + E} \right] dE' + i \text{Im } G_\pm(E). \quad (4.57)$$

Igualando suas partes reais e imaginárias chegamos a

$$\text{Re } G_+(E) = \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E' \text{Im } G_+(E')}{E'^2 - E^2} dE', \quad (4.58)$$

$$\text{Re } G_-(E) = \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E' \text{Im } G_-(E')}{E'^2 - E^2} dE', \quad (4.59)$$

que são relações de dispersão da amplitude de espalhamento na forma integral.

Para os casos em que estas integrais não convirjam, devemos fazer algumas alterações. Considere a função ímpar

$$\mathcal{H}_- = \frac{\mathcal{G}_+}{E}. \quad (4.60)$$

Utilizando o mesmo procedimento feito anteriormente nesta função e considerando que agora temos um polo em $E' = 0$, obtemos [10]

$$\frac{\mathcal{G}_+(E_0)}{E_0} = \frac{\text{Re } \mathcal{G}_+(0)}{E_0} + \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \frac{\text{Im } G_+(E')}{E'} \left[\frac{1}{E' - E_0} - \frac{1}{E' + E_0} \right] dE', \quad (4.61)$$

ou

$$\text{Re } G_+(E) = \text{Re } \mathcal{G}_+(0) + \frac{E}{\pi} P \int_m^\infty \frac{\text{Im } G_+(E')}{E'} \left[\frac{1}{E' - E} - \frac{1}{E' + E} \right] dE'. \quad (4.62)$$

Esta equação é chamada de *relação de dispersão com uma subtração* e $\text{Re } \mathcal{G}_+(0)$ é a *constante de subtração*. Embora esta equação tenha um parâmetro a mais a ser determinado, possui melhor convergência. Este procedimento não nos retorna nada novo para

$$\mathcal{H}_+ = \frac{\mathcal{G}_-}{E}, \quad (4.63)$$

uma vez que $Re \mathcal{G}_-(0) = 0$. Neste caso, utilizamos

$$\mathcal{H}_- = \frac{\mathcal{G}_-}{E^2}. \quad (4.64)$$

Aplicando o mesmo procedimento descrito anteriormente, mas com um polo de segunda ordem em $E' = 0$, chegamos a

$$Re G_-(E) = Re \mathcal{G}'_-(0)E + \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E^3 Im G_-(E')}{E'^2(E'^2 - E^2)} dE'. \quad (4.65)$$

Dizemos que esta relação possui duas subtrações. De fato, podemos aplicar quantas subtrações forem necessárias para que se verifique uma convergência nas integrais. Pode-se verificar ainda que, para o caso da amplitude par, a relação com uma subtração é a mesma que a com duas, enquanto que para a amplitude ímpar, a relação sem subtrações é a mesma que a com uma. Dados experimentais das amplitudes de espalhamento dos processos aqui estudados sugerem que apenas uma subtração em ambas as amplitudes é necessária para se obter a convergência.

Para se escrever as relações de dispersão anteriores para a amplitude $F(s, t = 0)$, usamos $s = 2m(E + m)$. Considerando $E \gg m$, temos $E \approx s/2m$. Denotando $s_0 = 2m^2$, reescrevemos as relações sem subtração como

$$Re F_\pm(s) = \frac{1}{\pi} P \int_{s_0}^\infty Im F_\pm(s') \left[\frac{1}{s' - s} \pm \frac{1}{s' + s} \right] ds'. \quad (4.66)$$

As relações par e ímpar com uma subtração tornam-se

$$Re F_+(s) = K + \frac{2s^2}{\pi} P \int_{s_0}^\infty \frac{Im F_+(s')}{s'(s'^2 - s^2)} ds', \quad (4.67)$$

$$Re F_-(s) = \frac{2s}{\pi} P \int_{s_0}^\infty \frac{Im F_-(s')}{s'^2 - s^2} ds', \quad (4.68)$$

com K sendo a única constante de subtração.

As equações com integrais podem ser problemáticas de se lidar na análise dos modelos para a seção de choque. Desta forma, partindo-se de tais relações de dispersão integrais, foram deduzidas as formas derivativas [2], dadas por

$$Re F_+(s) = K + s \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \frac{Im F_+(s)}{s}, \quad (4.69)$$

$$Re F_-(s) = s \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{d}{d \ln s} \right) \right] \frac{Im F_-(s)}{s}. \quad (4.70)$$

Expandindo-se a tangente da equação (4.69) em uma série de potências e utilizando o Teorema Óptico (2.43), obtemos

$$\frac{Re F_+(s)}{s} = \frac{K}{s} + \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)^5 + \dots \right] \sigma_+(s). \quad (4.71)$$

Para a equação (4.70), podemos utilizar a identidade

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot(\theta) \quad (4.72)$$

e a expansão da função $\cot(\theta)$ para obter

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re} F_-(s)}{s} &= -\cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s}\right) \sigma_-(s) \\ &= -\int \left\{ \frac{d}{d \ln s} \left[\cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s}\right) \right] \sigma_-(s) \right\} d \ln s \\ &= -\frac{2}{\pi} \int \left\{ \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s}\right)^2 - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s}\right)^4 - \dots \right] \sigma_-(s) \right\} d \ln s. \end{aligned} \quad (4.73)$$

5 Modelos analíticos

Esta análise busca obter as grandezas σ_{tot} e ρ em função de \sqrt{s} através do ajuste de dados experimentais obtidos em aceleradores. Isto é realizado por meio dos modelos de parametrizações de Donnachie-Landshoff (DL) e Kang-Niculescu (KN), cujas definições e principais diferenças são apresentadas na seção 5.2. Tais modelos nos apresentam diferentes funções para σ_{tot} em termos de s . Utilizando-se destas funções e dos estudos sobre relações de dispersão, podemos encontrar ρ de forma analítica. Desta forma, é possível verificar, por extrapolação, os limites assintóticos correspondentes a cada modelo.

Embora este estudo já tenha sido efetuado antes [2, 3], dispomos, agora, de dados experimentais com energias mais altas (~ 8 TeV), retirados dos novos experimentos do LHC. Desta forma, podemos comparar as funções obtidas neste trabalho e nos anteriores, verificando se há diferenças significativas entre elas.

5.1 Dados experimentais

Os dados utilizados foram reunidos pelo Particle Data Group (PDG) e podem ser verificados nos gráficos das figuras 10 e 11 [12]. Eles nos mostram os valores de σ_{tot} e ρ para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ nas energias entre 10 e 10^4 GeV. Os erros estatístico e sistemático são somados em quadratura. Os dados utilizados são retirados somente de aceleradores, uma vez que os valores obtidos em experiências com raios cósmicos são inferidos e dependem de modelos.

Os resultados obtidos são comparados com o estudo [2], cujos dados utilizados podem ser verificados no gráfico da figura 12. Neste estudo foram efetuados ajustes em dois conjuntos diferentes de dados. Definimos por *conjunto I* os dados obtidos de aceleradores para as partículas pp e $\bar{p}p$ juntamente com os dados dos experimentos Akeno e Fly's Eye. O *conjunto II* é composto pelos dados de aceleradores para as partículas pp e $\bar{p}p$ e pelos dados dos experimentos Nikolaev e GSY. Posteriormente são utilizados para comparação dados mais recentes de experimentos com raios cósmicos, com energias de 57 e 95 TeV [13, 14].

Portanto, este trabalho pode fornecer uma estimativa atualizada para as funções de σ_{tot} e ρ , bem como verificar se os ajustes efetuados anteriormente estão coerentes com os dados novos.

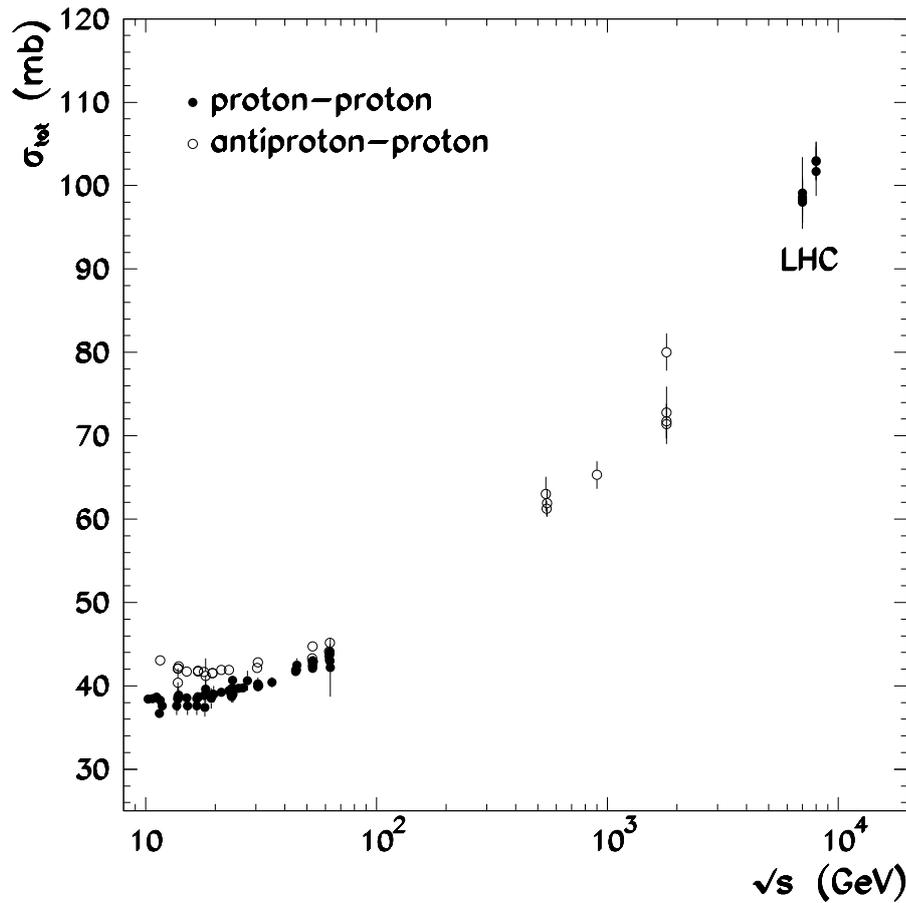


Figura 10 – Dados experimentais da seção de choque total para espalhamentos pp e $\bar{p}p$ [12].

5.2 Metodologia

Este procedimento, empregado também nos estudos anteriores, consiste em se utilizar de modelos para σ_{tot} e, com isso, obter uma expressão analítica para o parâmetro ρ . Desta forma, realiza-se um ajuste dos dados para as duas grandezas utilizando os mesmos parâmetros. Chamamos este método de *ajuste simultâneo de σ_{tot} e ρ* , ou, *ajuste global*. Ele nos permite a utilização de mais dados para os ajustes, ao invés de se fazer ajustes isolados de cada grandeza utilizando modelos individuais. Para isso, lembramos da relação entre as amplitudes apresentada na seção 3.1.4:

$$F_{\pm} = \frac{F_{pp} \pm F_{\bar{p}p}}{2}, \quad (5.1)$$

e, desta forma,

$$F_{pp} = F_{+} + F_{-}, \quad (5.2a)$$

$$F_{\bar{p}p} = F_{+} - F_{-}. \quad (5.2b)$$

Agora, das definições (2.43) e (2.45), temos

$$\rho\sigma_{tot} = \frac{Re F(s, t = 0)}{Im F(s, t = 0)} \frac{Im F(s, t = 0)}{s}, \quad (5.3)$$

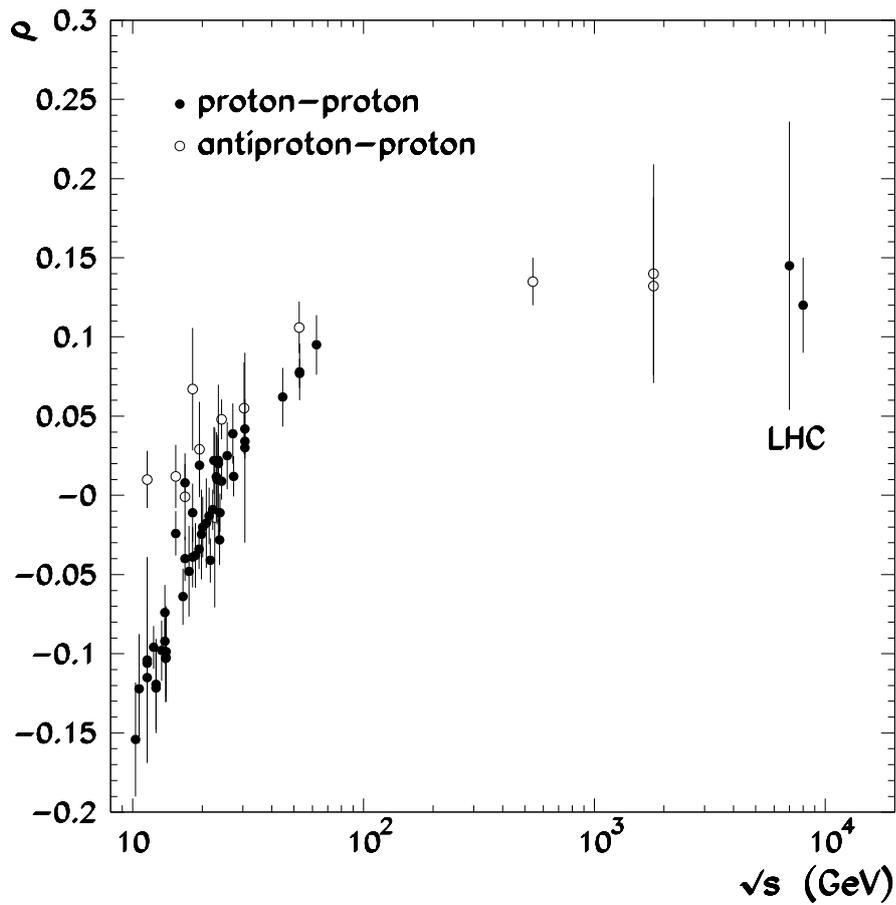


Figura 11 – Dados experimentais do parâmetro ρ para espalhamentos pp e $\bar{p}p$ [12].

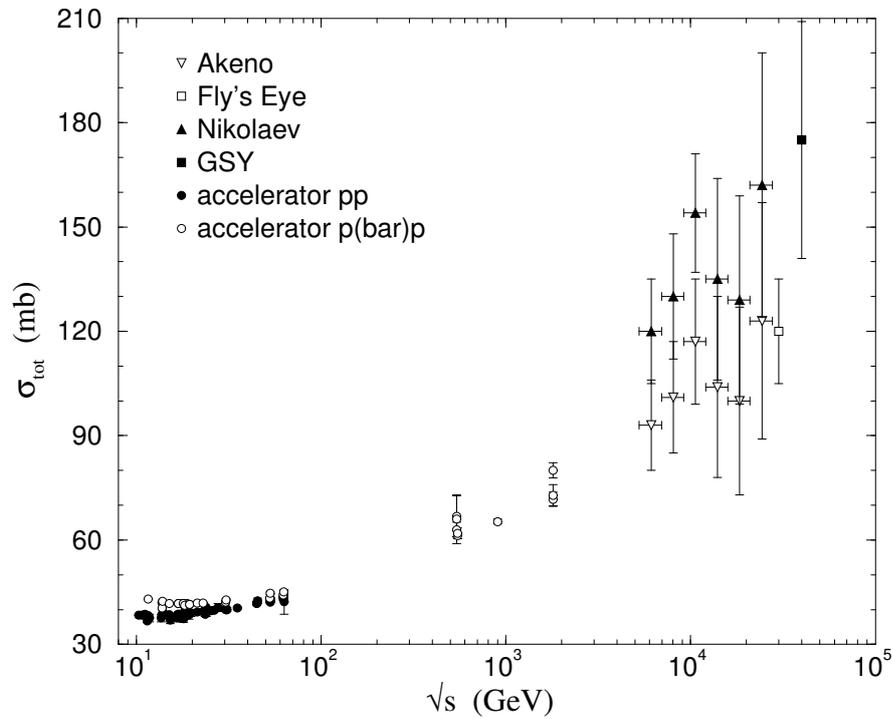


Figura 12 – Dados experimentais, tanto de aceleradores quanto de raios cósmicos, da seção de choque total para espalhamentos pp e $\bar{p}p$ utilizados no estudo [2].

ou, ainda,

$$\rho\sigma_{tot} = \frac{Re F(s, t=0)}{s}, \quad (5.4)$$

sendo esta relação dependente do processo (pp ou $\bar{p}p$). Portanto, utilizando-se de modelos para σ_{tot}^{pp} e $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ e das relações de dispersão, é possível a obtenção de ρ de forma analítica e, posteriormente, sua utilização na obtenção dos parâmetros de ajuste.

Os ajustes dos dados foram efetuados utilizando-se as subrotinas MIGRAD e MINIMIZE da ferramenta MINUIT [15]. Este programa nos retorna os valores dos parâmetros ajustados, os erros e o valor de χ^2 .

5.2.1 Modelo de Donnachie-Landshoff

Este modelo, introduzido por Donnachie-Landshoff, com contribuição dominante do Pomeron, apresenta as seguintes funções de potências em s para as seções de choque [16]:

$$\sigma_{tot}^{pp} = X s^\epsilon + Y s^{-\eta}, \quad (5.5)$$

$$\sigma_{tot}^{\bar{p}p} = X s^\epsilon + Z s^{-\eta}. \quad (5.6)$$

A diferença entre estas funções nos dá

$$\Delta\sigma = \sigma_{tot}^{\bar{p}p} - \sigma_{tot}^{pp} = -2\sigma_- = (Z - Y)s^{-\eta}, \quad (5.7)$$

cujo comportamento assintótico $s \rightarrow \infty$ faz $\Delta\sigma$ tender a zero.

Das relações de dispersão (4.69) e (4.70), do teorema óptico (2.43) e de (5.4), podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho_{pp} &= \frac{1}{\sigma_{tot}^{pp}} \frac{Re F_+ + Re F_-}{s} \\ &= \frac{1}{\sigma_{tot}^{pp}} \left\{ \frac{K}{s} + \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \frac{Im F_+(s)}{s} + \frac{1}{s} \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] Im F_-(s) \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_{tot}^{pp}} \left\{ \frac{K}{s} + \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \sigma_+ + \frac{1}{s} \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] s\sigma_- \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_{tot}^{pp}} \left\{ \frac{K}{s} + \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \frac{\sigma_{tot}^{pp} + \sigma_{tot}^{\bar{p}p}}{2} + \frac{1}{s} \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \frac{s(\sigma_{tot}^{pp} - \sigma_{tot}^{\bar{p}p})}{2} \right\}, \quad (5.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{p}p} &= \frac{1}{\sigma_{tot}^{\bar{p}p}} \frac{Re F_+ - Re F_-}{s} \\ &= \frac{1}{\sigma_{tot}^{\bar{p}p}} \left\{ \frac{K}{s} + \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \frac{\sigma_{tot}^{pp} + \sigma_{tot}^{\bar{p}p}}{2} - \frac{1}{s} \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \frac{s(\sigma_{tot}^{pp} - \sigma_{tot}^{\bar{p}p})}{2} \right\}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Substituindo as equações (5.5) e (5.6) na relação (5.8), obtemos

$$\rho_{pp} = \frac{1}{Xs^\epsilon + Ys^{-\eta}} \left\{ \frac{K}{s} + \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \left(\frac{2Xs^\epsilon + (Y+Z)s^{-\eta}}{2} \right) + \frac{1}{s} \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \left(\frac{Y-Z}{2} s^{-\eta+1} \right) \right\}. \quad (5.10)$$

Observando que $\tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right]$ é linear e opera somente em s , podemos reescrever a equação acima como

$$\rho_{pp} = \frac{1}{Xs^\epsilon + Ys^{-\eta}} \left\{ \frac{K}{s} + X \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] s^\epsilon + \frac{Y+Z}{2} \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] s^{-\eta} + \frac{Y-Z}{2s} \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] s^{-\eta+1} \right\}. \quad (5.11)$$

Temos que $d/d \ln s = s(d/ds)$. Expandindo-se as tangentes e executando as derivadas em s , chegamos a

$$\rho_{pp} = \frac{1}{Xs^\epsilon + Ys^{-\eta}} \left\{ \frac{K}{s} + \frac{\pi}{2} \left[X\epsilon s^\epsilon + \left(-\eta \frac{Y+Z}{2} + (1-\eta) \frac{Y-Z}{2} \right) s^{-\eta} \right] + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \left[X\epsilon^3 s^\epsilon + \left(-\eta^3 \frac{Y+Z}{2} + (1-\eta)^3 \frac{Y-Z}{2} \right) s^{-\eta} \right] + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \left[X\epsilon^5 s^\epsilon + \left(-\eta^5 \frac{Y+Z}{2} + (1-\eta)^5 \frac{Y-Z}{2} \right) s^{-\eta} \right] + \dots \right\}. \quad (5.12)$$

Voltando para a notação em funções tangentes e utilizando a relação (4.72), obtemos

$$\rho_{pp} = \frac{1}{Xs^\epsilon + Ys^{-\eta}} \left\{ \frac{K}{s} + Xs^\epsilon \tan \left(\frac{\pi\epsilon}{2} \right) - \frac{Y+Z}{2} s^{-\eta} \tan \left(\frac{\pi\eta}{2} \right) + \frac{Y-Z}{2} s^{-\eta} \cot \left(\frac{\pi\eta}{2} \right) \right\}. \quad (5.13)$$

De forma análoga, chegamos à seguinte relação para $\rho_{\bar{p}p}$:

$$\rho_{\bar{p}p} = \frac{1}{Xs^\epsilon + Zs^{-\eta}} \left\{ \frac{K}{s} + Xs^\epsilon \tan \left(\frac{\pi\epsilon}{2} \right) - \frac{Y+Z}{2} s^{-\eta} \tan \left(\frac{\pi\eta}{2} \right) - \frac{Y-Z}{2} s^{-\eta} \cot \left(\frac{\pi\eta}{2} \right) \right\}. \quad (5.14)$$

A diferença entre $\rho_{\bar{p}p}$ e ρ_{pp} resulta em

$$\Delta\rho = \rho_{\bar{p}p} - \rho_{pp} = \frac{1}{\sigma_{tot}(s)} (Z - Y) \cot \left(\frac{\pi\eta}{2} \right) s^{-\eta}, \quad (5.15)$$

que tende a zero conforme $s \rightarrow \infty$.

Portanto, a fim de se determinar uma função fenomenológica para as grandezas σ e ρ , escolhemos os parâmetros X , Y , Z , ϵ e η que melhor ajustam tais funções aos dados coletados. Para se utilizar o menor número possível de parâmetros, escolhemos $K = 0$, uma vez que isto ainda permite um bom ajuste dos dados.

5.2.2 Modelo de Kang-Nicolescu

Neste modelo, utiliza-se a hipótese do Odderon em que se predomina a amplitude ímpar [17]. As funções para as seções de choque são:

$$\sigma_{tot}^{pp} = A_1 + B_1 \ln s + k \ln^2 s, \quad (5.16)$$

$$\sigma_{tot}^{\bar{p}p} = A_2 + B_2 \ln s + k \ln^2 s + 2R s^{-1/2}. \quad (5.17)$$

A diferença entre elas nos dá

$$\Delta\sigma = \sigma_{tot}^{\bar{p}p} - \sigma_{tot}^{pp} = (A_2 - A_1) + (B_2 - B_1) \ln s + 2R s^{-1/2}, \quad (5.18)$$

cujos comportamento assintótico $s \rightarrow \infty$ faz $\Delta\sigma$ tender a $(A_2 - A_1) + (B_2 - B_1) \ln s$, o que estaria de acordo com o teorema de Pomeranchuk, introduzido na seção (3.2).

Utilizando este modelo com as relações (5.4), (4.71) e (4.73), obtemos

$$\rho_{pp} = \frac{1}{A_1 + B_1 \ln s + k \ln^2 s} \left\{ \frac{K}{s} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{B_1 + B_2}{2} \right) + \left(k\pi + \frac{A_2 - A_1}{\pi} \right) \ln s + \right. \\ \left. + \left(\frac{B_2 - B_1}{2\pi} \right) \ln^2 s - 2R s^{-1/2} \right\}, \quad (5.19)$$

$$\rho_{\bar{p}p} = \frac{1}{A_2 + B_2 \ln s + k \ln^2 s + 2R s^{-1/2}} \left\{ \frac{K}{s} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{B_1 + B_2}{2} \right) + \left(k\pi - \frac{A_2 - A_1}{\pi} \right) \ln s - \right. \\ \left. - \left(\frac{B_2 - B_1}{2\pi} \right) \ln^2 s \right\}. \quad (5.20)$$

A diferença entre estas funções resulta em

$$\Delta\rho = \rho^{\bar{p}p} - \rho^{pp} \sim \frac{1}{\pi\sigma_{tot}(s)} (\Delta A \ln s + \Delta B \ln^2 s), \quad (5.21)$$

o que pode resultar, dependendo dos ajustes, em mudanças no sinal de $\Delta\rho$ para certos valores da energia.

Para este modelo, temos os parâmetros A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , R , k e K a se determinar. Assim como no modelo DL, ajustamos os dados com $K = 0$ a fim de utilizar o menor número possível de parâmetros.

5.3 Resultados

Foram efetuados quatro ajustes. Um para σ_{tot} e outro para ρ para cada um dos modelos apresentados. Os valores obtidos dos parâmetros podem ser verificados na tabela 1 para o modelo de DL e na tabela 2 para o modelo de KN.

Tabela 1 – Ajustes globais de σ_{tot} e ρ para a parametrização de Donnachie-Landshoff.

X [mb]	20.31 ± 0.71
Y [mb]	52.6 ± 6.1
Z [mb]	82.2 ± 11.5
η	0.407 ± 0.035
ϵ	0.0878 ± 0.0032
χ^2/DOF	1.62

Tabela 2 – Ajustes globais de σ_{tot} e ρ para a parametrização de Kang-Nicolescu.

A_1 [mb]	44.80 ± 1.31
A_2 [mb]	44.85 ± 1.38
B_1 [mb]	-3.01 ± 0.34
B_2 [mb]	-3.00 ± 0.36
k [mb]	0.343 ± 0.022
R [mb]	25.73 ± 2.20
χ^2/DOF	1.11

As figuras 13 e 14 mostram as curvas obtidas pelo modelo de DL juntamente com os dados experimentais. As linhas sólidas são funções dos modelos aqui derivados e utilizam os parâmetros da tabela 1. As outras linhas foram obtidas com os dados de [2], onde as linhas tracejadas foram ajustadas do conjunto I de dados e as linhas pontilhadas foram ajustadas do conjunto II. Percebe-se que para energias acima de 100 GeV as funções de σ_{tot} começam a divergir e somente as linhas sólidas passam pelas barras de erro dos dados do LHC. No gráfico do parâmetro ρ as funções parecem não divergir de forma tão significativa.

As figuras 15 e 16 mostram as curvas obtidas pelo modelo de KN juntamente com os dados experimentais. Da mesma forma que as figuras anteriores, as linhas sólidas são funções dos modelos aqui derivados e utilizam os parâmetros da tabela 2, enquanto que as linhas tracejadas foram ajustadas do conjunto I e as linhas pontilhadas foram ajustadas do conjunto II, ambos retirados de [2]. Neste caso, dispomos de um modelo com um parâmetro de ajuste a mais, o que permite um ajuste mais acurado dos dados. Na figura 15 temos funções que não divergem de forma significativa e se ajustam bem aos dados. Na figura 16 notamos uma divergência maior, principalmente com o ajuste do conjunto I.

Nota-se que o ajuste para a parametrização de DL possui um χ^2 maior (~ 1.62) que para a de KN (~ 1.11). Os ajustes para σ_{tot} possuem comportamentos semelhantes em ambos os modelos, enquanto que os ajustes de ρ possuem uma diferença mais significativa, principalmente na região de altas energias, cujo valor de $\Delta\rho$ é mais elevado para KN. No ajuste de ρ da figura 16, nota-se um cruzamento nas funções para pp e $\bar{p}p$, comportamento

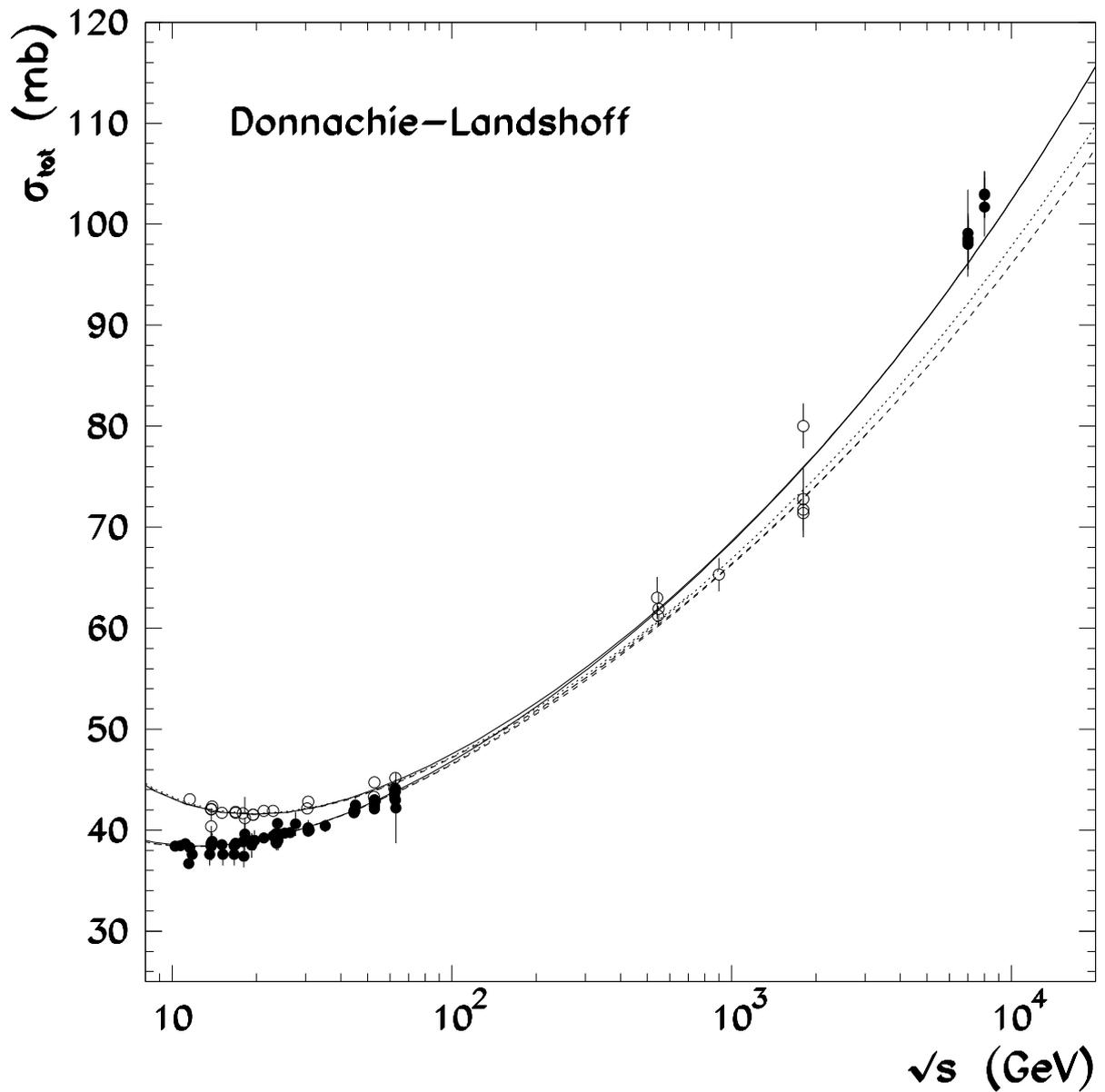


Figura 13 – Ajuste dos dados de σ_{tot} pela parametrização de DL realizado neste trabalho (linhas sólidas) e os ajustes do conjunto I (linhas tracejadas) e do conjunto II (linhas pontilhadas) realizados no estudo [2].

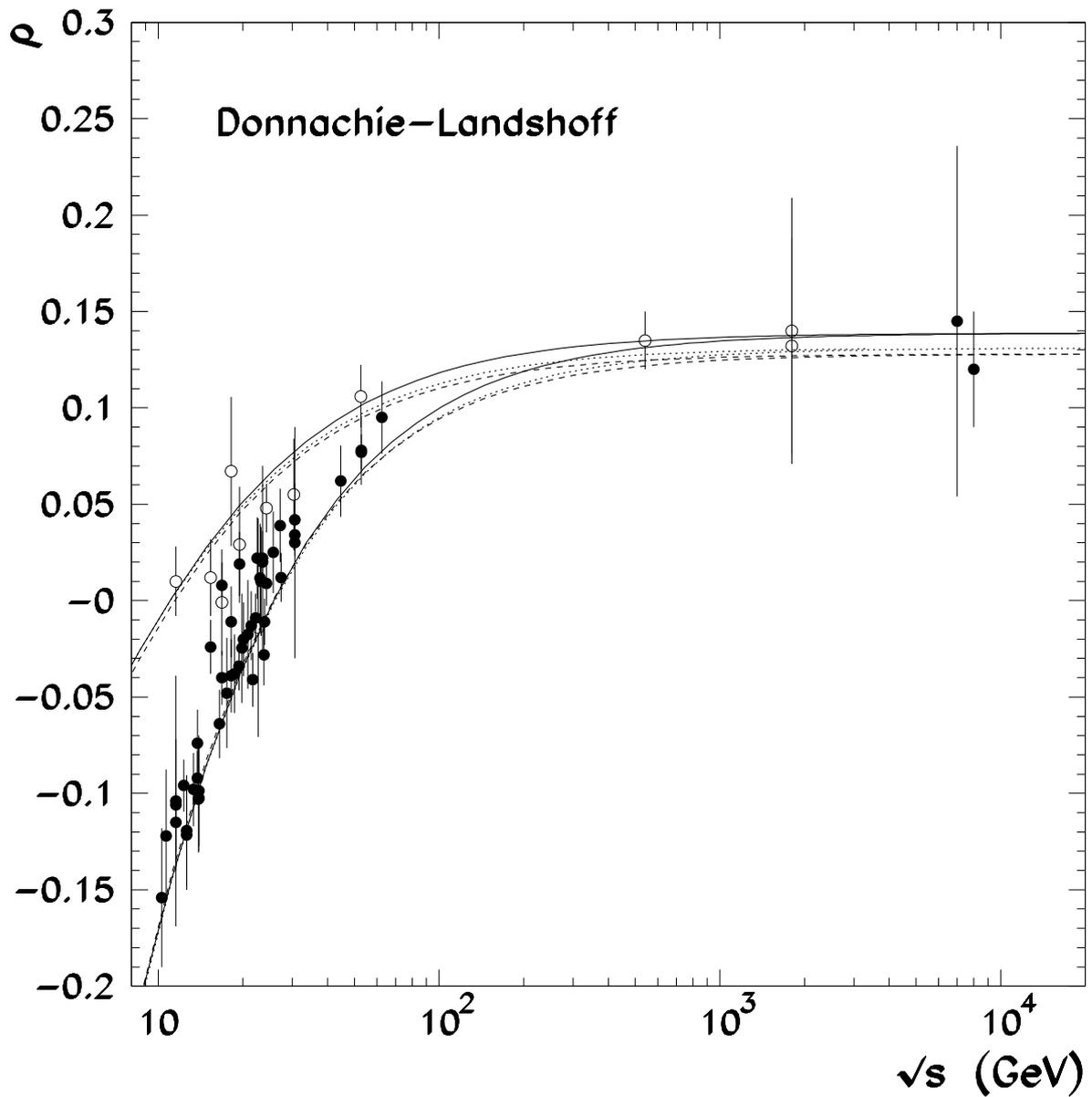


Figura 14 – Ajuste dos dados do parâmetro ρ pela parametrização de DL realizado neste trabalho (linhas sólidas) e os ajustes do conjunto I (linhas tracejadas) e do conjunto II (linhas pontilhadas) realizados no estudo [2].

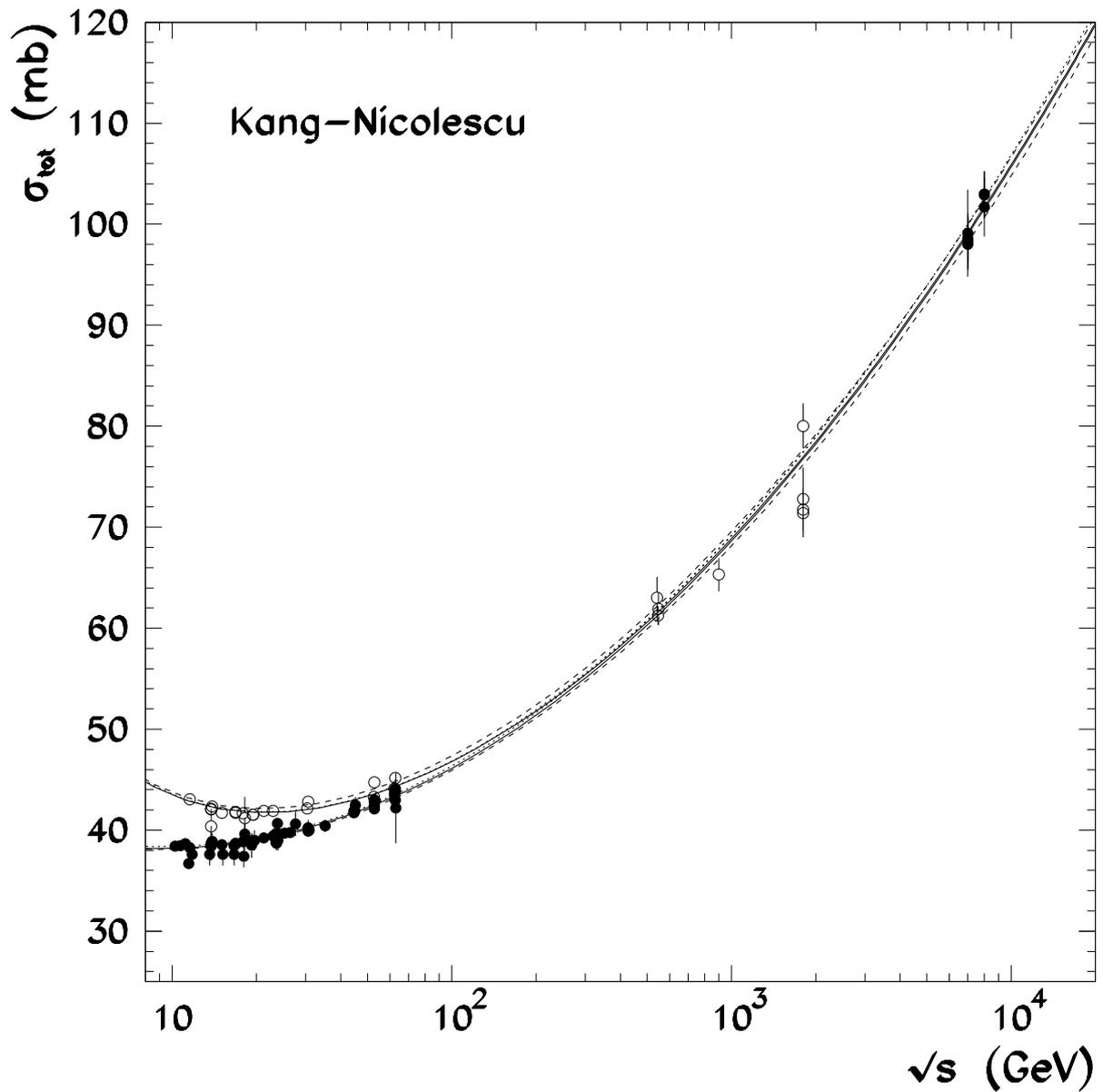


Figura 15 – Ajuste dos dados de σ_{tot} pela parametrização de KN realizado neste trabalho (linhas sólidas) e os ajustes do conjunto I (linhas tracejadas) e do conjunto II (linhas pontilhadas) realizados no estudo [2].

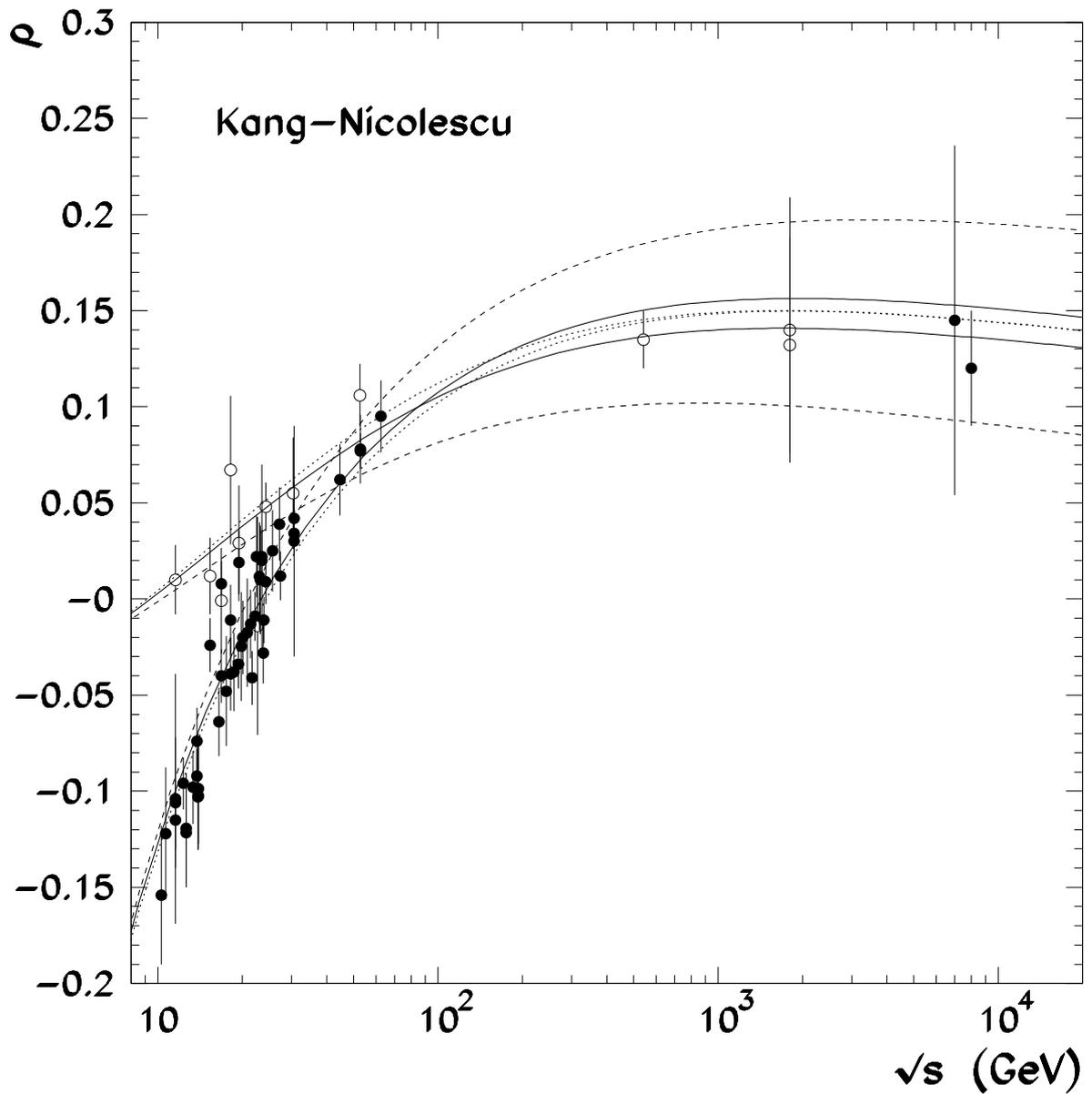


Figura 16 – Ajuste dos dados do parâmetro ρ pela parametrização de KN realizado neste trabalho (linhas sólidas) e os ajustes do conjunto I (linhas tracejadas) e do conjunto II (linhas pontilhadas) realizados no estudo [2].

previsto pelo modelo de KN.

As figuras 17 e 18 apresentam uma comparação das mesmas funções obtidas anteriormente com dados de experimentos com raios cósmicos [13, 14]. A primeira figura apresenta os ajustes para o modelo DL, enquanto que a segunda figura os ajustes para o modelo KN. As energias de tais experimentos chegam a 57 TeV para o AUGER e a 95 TeV para o TA. Temos, em ambos os casos, um ajuste coerente com os dados para as linhas sólidas, cujos parâmetros foram obtidos neste trabalho.

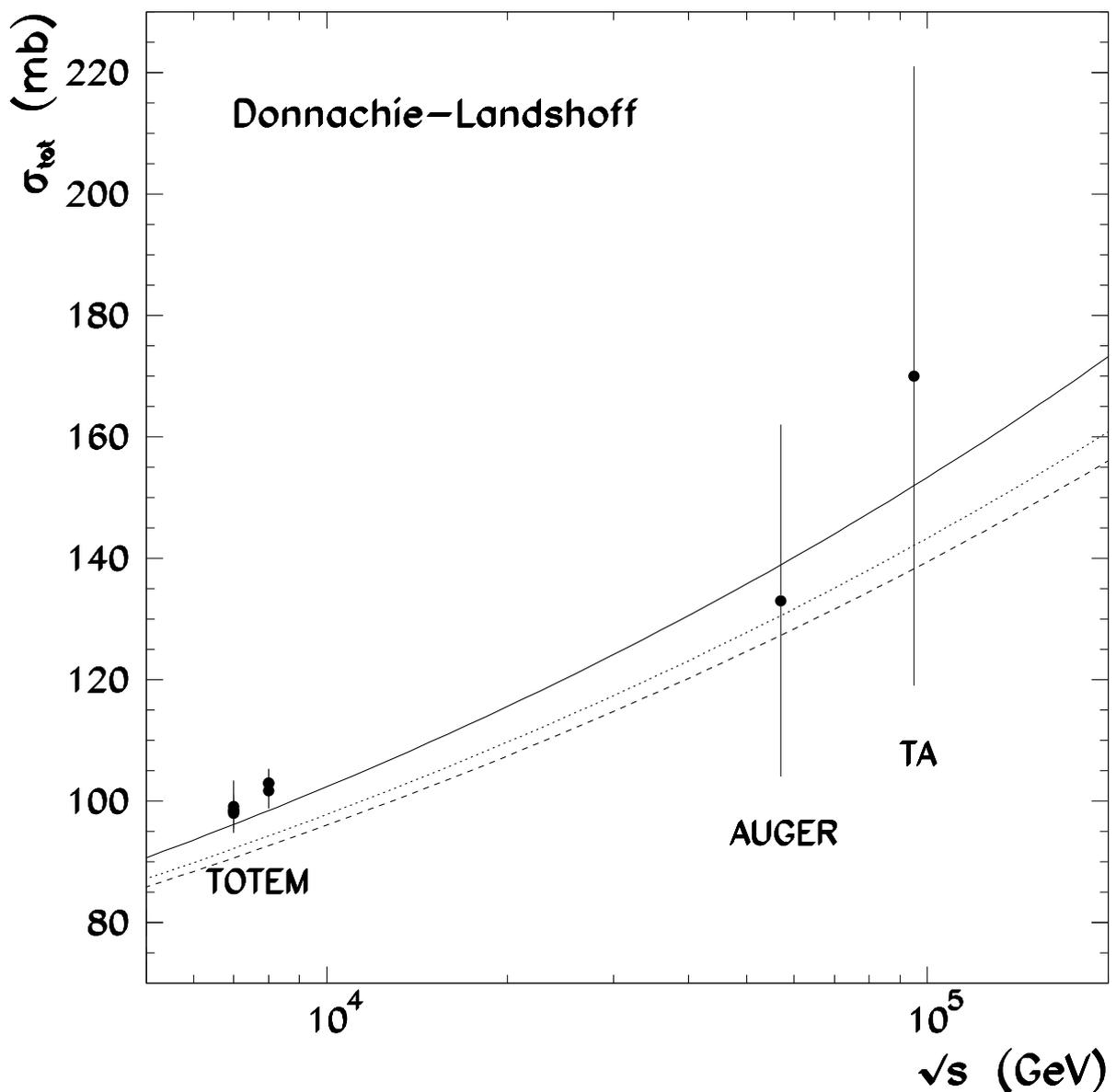


Figura 17 – Comparação das curvas obtidas na figura 13 (modelo de DL) com os dados de experimentos com raios cósmicos [13, 14].

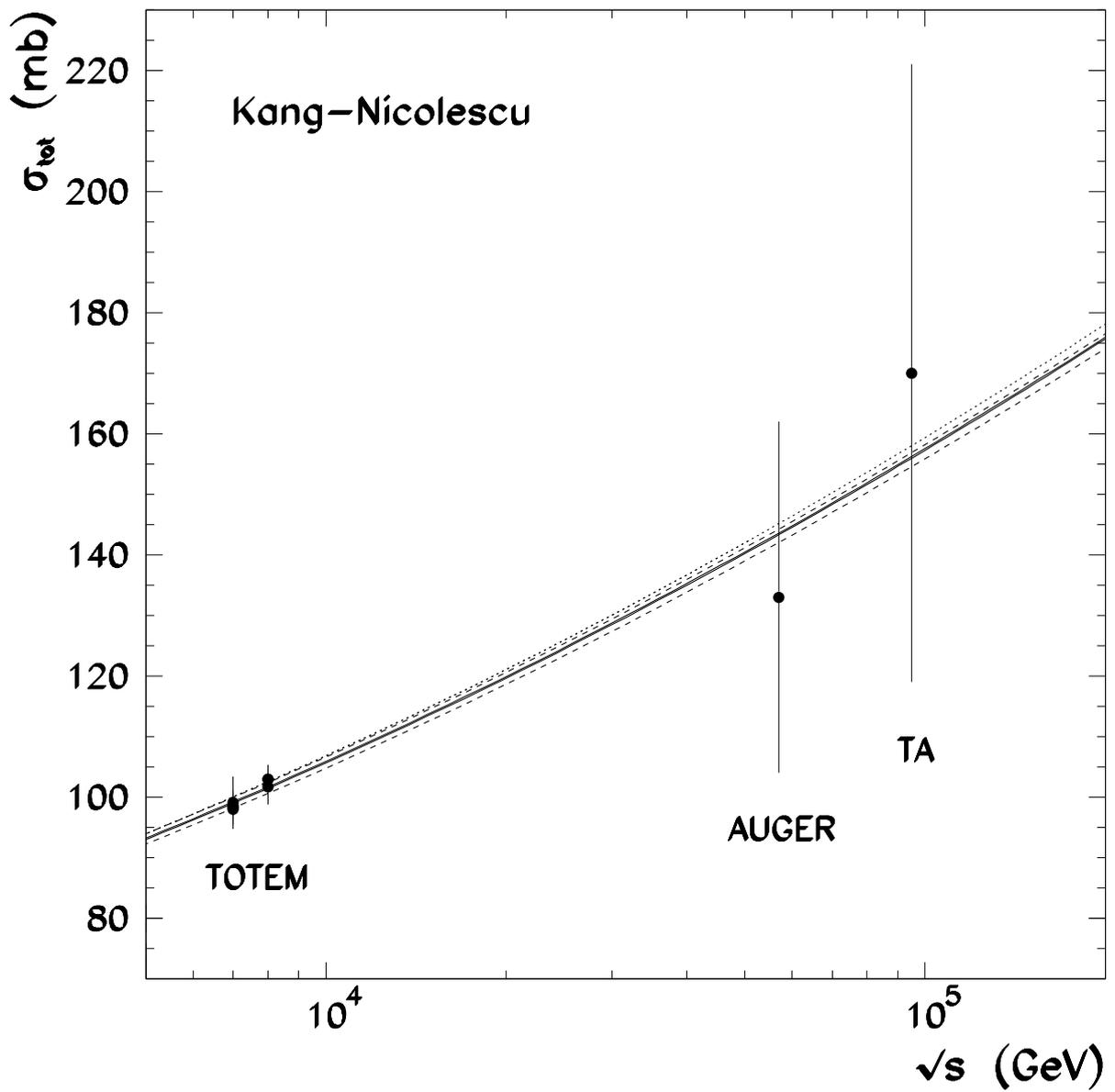


Figura 18 – Comparação das curvas obtidas na figura 14 (modelo de KN) com os dados de experimentos com raios cósmicos [13, 14].

Conclusão

Neste trabalho, analisamos o comportamento de processos de espalhamento próton-próton (pp) e antipróton-próton ($\bar{p}p$) por meio da seção de choque total σ_{tot} e do parâmetro ρ . Utilizando-se de princípios e teoremas, relacionamos, de forma analítica, as grandezas ρ e σ_{tot} por meio das relações de dispersão. Foram aplicadas duas parametrizações diferentes para o ajuste dos dados: Donnachie-Landshoff (DL), cuja maior contribuição assintótica é da amplitude par (Pomeron) e a diferença entre as seções de choque ($\Delta\sigma$) e parâmetros ρ ($\Delta\rho$) vão a zero para $\sqrt{s} \rightarrow \infty$; Kang-Nicolescu (KN), com contribuição assintótica dominante da amplitude ímpar (Odderon) e diferenças crescentes. Tais ajustes foram efetuados em dados experimentais colhidos em aceleradores de partículas, cujas energias variam na faixa de $10 < \sqrt{s} < 10^4$ GeV. Após obtidos os parâmetros, foram gerados os gráficos comparando os dados com as funções parametrizadas. Para ambos os modelos de DL e KN, verifica-se que os ajustes possuem um comportamento semelhante às funções obtidas em [2], porém, com valores mais próximos aos dados experimentais.

Referências

- [1] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (Wiley-VCH, 2008).
- [2] R. F. Ávila, E. G. S. Luna, and M. J. Menon, *Phys. Rev. D* **67** (1985) 563.
- [3] E. G. S. Luna and M. J. Menon, *Phys. Lett. B* **565** (2003) 123.
- [4] V. Barone and E. Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction* (Springer - Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002).
- [5] C. Tanoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics* (Wiley-VCH, 1992).
- [6] B. E. Y. Svensson, *Proceedings of 1967 CERN School of Physics Volume II - High Energy Phenomenology and Regge Poles* (Rättvik, 1967).
- [7] I. Ya. Pomeranchuk, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 25 (1958). [*Sov. Phys. JETP* **7** 499 (1958)].
- [8] G. Grunberg and T. N. Truong, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 63 (1973).
- [9] M. M. Block and R. N. Cahn, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 563.
- [10] R. W. Fuller and F. W. Byron, *Mathematics of Classical and Quantum Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970).
- [11] R. V. Churchill, *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, (McGraw-Hill, São Paulo, 1975).
- [12] K. A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, **38**, 090001, 2014. Disponível em <<http://pdg.lbl.gov/>>. Acesso em 30 out. 2016.
- [13] P. Abreu et al., *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 062002.
- [14] R. U. Abbasi et al., *Phys. Rev. D* **92** (2015) 032007.
- [15] F. James, *MINUIT - Function Minimization and Error Analysis* (CERN, 1994).
- [16] A. Donnachie and P. V. Landshoff, *Z. Phys. C* **2**, 55 (1979); *Phys. Lett. B* **387**, 637 (1996).
- [17] K. Kang and B. Nicolescu, *Phys. Rev. D* **11**, 2461 (1975).