

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**O Método de
Divisão-e-Conquista na
solução de auto-sistemas de
Matrizes Simétricas**

por

Eliamar Ceresoli

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha
Orientador

Profa. Dra. Maria Paula Gonçalves Fachin
Co-orientador

Porto Alegre, julho de 2002

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Ceresoli, Eliamar

O Método de Divisão-e-Conquista na solução de auto-sistemas de Matrizes Simétricas / Eliamar Ceresoli.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2002

68 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002.

Orientador: Cunha, Rudnei Dias da; Co-orientador: Fachin, Maria Paula Gonçalves

Dissertação: Matemática Aplicada
Modelo, Dissertação

O Método de Divisão-e-Conquista na solução de auto-sistemas de Matrizes Simétricas

por

Eliamar Ceresoli

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Algoritmos

Orientador: Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha

Co-orientador: Profa. Dra. Maria Paula Gonçalves Fachin

Banca examinadora:

Prof. Dr. Dalcídio Moraes Cláudio
PUC - RS

Prof. Dr. Leandro Farina
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz
PPGMAp-UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
29 de novembro de 2002

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Coordenador

AGRADECIMENTO

A professora Maria Paula, pela orientação, pelas contribuições neste trabalho, especialmente pela compreensão demonstrada ao longo desta caminhada e ao professor Rudnei pela atenção e disponibilidade em me auxiliar nas necessidades constantes.

Nestes momentos de luta e busca da superação dos nossos limites é que acabamos descobrindo valores que normalmente passam despercebidos no corre-corre do nosso dia-a-dia. Esta minha caminhada me fez perceber como faço parte de uma família maravilhosa. Agradeço com todo fervor e admiração aos meus pais (Hermínio e Gema), aos meus irmãos (Lucimar e Elizandro), aos meus dois príncipezinhos (Maikon e Gabriel) e ao meu cunhado (João Paulo) pelo prazer de fazerem parte de todos os momentos de minha existência e pelo apoio e carinho recebidos. Dedico meu carinho e amor ao meu namorado Claudio, que me apoia e me acompanha nesta jornada.

Agradeço à minha vó Palmira Ceresoli, pelas orações e pela indicação de Santa Rita, a qual pedi e muito fui auxiliada em minha jornada. Agradeço a todas as pessoas que rezaram e torceram por mim.

À colega Maria Madalena pela paciência, companheirismo, e pelas palavras de ânimo e incentivo durante os momentos em que a vontade de desistir da caminhada surgia sem mais nem menos, bem como aos pernoites e carinho dispensados a mim por sua linda família.

Aos colegas do curso pela caminhada, juntos, em especial aos companheiros de longas jornadas de estudo (Sônia, Fontana, Maria Nair e Denise).

Aos diretores da Escola Estadual de Ensino Fundamental Dr. João Carlos Machado, que disponibilizaram-me tempo fazendo o possível para que pudessem ajustar meus horários de acordo, bem como aos colegas professores e aos funci-

onários, em especial àqueles que me dedicaram especial carinho e palavras sinceras de apoio e motivação.

À UPF, em especial aos colegas do ICEG pelo incentivo e ajuda constante sempre que necessário. Aos meus professores desde o primário até aqui, que me auxiliaram e deram muito de si, para que eu pudesse continuar na realização de meu sonho.

Quero dedicar um carinho especial às minhas amigas Cláudia, Analise e Tatiane pelo apoio e carinho, bem como à minha prima Saliana pela ajuda.

Agradeço, a Deus por ter me proporcionado a possibilidade de experienciar tudo que vivi, à Santa Rita por ter intercedido a Deus por mim. Posso afirmar com toda certeza que se preciso fosse viveria tudo novamente tentando acertar sempre mais.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo do método de divisão-e-conquista para solução dos auto-sistemas de matrizes tridiagonais simétricas. Inicialmente, explanamos a parte teórica, e posteriormente, por meio de exemplos numéricos mostramos seu funcionamento.

Para a realização deste estudo, utilizou-se o software Maple como ferramenta auxiliar.

Realizamos comparações e análises dos auto-sistemas encontrados com as rotinas DSTEDC e DSTEQR do LAPACK, que utilizam respectivamente o método de divisão-e-conquista e o método QR e também comparamos estes com os resultados encontrados por nós. Verificamos por meio de testes os tempos, que as rotinas citadas, dispendem na resolução de alguns auto-sistemas.

Os resultados apresentados mostram que o método de Divisão-e-Conquista é competitivo com o método tradicional, QR, para o cálculo de autovalores e autovetores de matrizes tridiagonais simétricas.

ABSTRACT

In this work we present a study of the divide-and-conquer method for the solution of the symmetric tridiagonal eigenproblem. The theoretical background to the method is presented first, followed by numerical examples showing its behaviour. The Maple symbolic mathematics software was used throughout this work as an auxiliary tool.

We compare and present analyses of the solution of some eigenproblems using the LAPACK routines DSTEDC and DSTEQR, which are implementations of the divide-and-conquer and QR methods. The results obtained with these routines were also compared to those obtained by our Maple routines.

The results presented show that the divide-and-conquer method is competitive with the traditional method used, QR, for the solution of symmetric tridiagonal eigenproblems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	NOÇÕES FUNDAMENTAIS	4
3	APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE DIVISÃO-E-CONQUISTA	6
4	DIVIDINDO A MATRIZ ORIGINAL EM QUATRO PARTES	31
5	REALIZANDO A DEFLAÇÃO	44
6	TEORIA X PRÁTICA	56
6.1	$\lambda_i = d_i$	59
6.2	$\lambda_i = d_{i+1}$	61
6.2.1	Como encontrar ν	61
7	COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DIVISÃO-E-CONQUISTA E QR	64
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
	BIBLIOGRAFIA	69

1 INTRODUÇÃO

Problemas aplicados, freqüentemente se reduzem ao estudo dos auto-problemas reais simétricos [12], os quais são úteis em toda matemática pura e aplicada e podem aparecer em diversas situações, fornecendo informações críticas em determinados projetos em áreas como a física, a engenharia e a química. Podemos ver alguns exemplos em [1], [2].

Para o autoproblema tridiagonal simétrico, encontramos diferentes métodos na busca da sua solução, incluindo os métodos QR e QL, o método de Jacobi, as Iterações de Laguerre e o método de divisão-e-conquista, o qual será por nós explicado.

Como o próprio nome indica, o método a ser relatado no presente texto, é embasado no princípio da divisão-e-conquista e nos permite determinar os autovalores e autovetores de matrizes tridiagonais simétricas.

Diversos estudos foram realizados sobre o assunto, e para maiores esclarecimentos citamos, em especial o texto escrito por Fachin [1], o qual foi a fonte básica para o desenvolvimento do nosso trabalho e os textos [2], [5],[4].

Conforme afirma Datta ([2], p. 464) o método foi originalmente sugerido por Cuppen [5]. Deve-se observar, no entanto, que são utilizados resultados apresentados por Bunch, Nielsen e Sorensen [4] para o cálculo dos autovalores de uma matriz do tipo $D + \rho z z^t$ (a qual será posteriormente descrita), que é necessário para o funcionamento do método.

Nosso trabalho descreve a teoria básica do método de *divisão-e-conquista* e mostra por meio de exemplos numéricos o seu funcionamento, desenvolvendo passo-a-passo até encontrarmos o auto-sistema da matriz inicial. Incluímos, também uma descrição do comportamento do método quando a matriz original for particionada

em quatro submatrizes de onde se pode generalizar para particionamentos em maior número de submatrizes.

O método de divisão-e-conquista pode ser utilizado diretamente em matrizes tridiagonais simétricas. No entanto, como podemos transformar uma matriz simétrica em uma matriz tridiagonal simétrica (para maior esclarecimento, ver transformações de Householder em [3] ou [10]) podemos utilizar o método para qualquer matriz simétrica.

No capítulo 2 apresentamos alguns conhecimentos fundamentais e importantes para melhor compreensão dos assuntos que serão dissertados. No capítulo 3 observamos que o método, em geral, consiste primeiramente em uma partição inicial de um problema de autovalores tridiagonal simétrico em dois sub-problemas menores. Estas divisões, no entanto, podem ser realizadas recursivamente, reduzindo assim o problema inicial a problemas de escala menor cuja solução pode ser obtida mais facilmente. Estas soluções parciais são posteriormente reunidas de forma adequada a fim de se "conquistar" a solução do problema original. Neste capítulo demonstramos o funcionamento genérico do método de divisão-e-conquista e exemplificamos numericamente com a utilização de uma matriz de ordem 4 .

No capítulo 4 explanamos e exemplificamos o comportamento do método quando a matriz original é dividida em quatro partes.

No capítulo 5 nos reportamos ao caso da deflação, pois existem situações na resolução dos auto-sistemas, no qual devemos reduzir a ordem do problema que temos para resolver de modo que seja possível encontrar a solução.

No capítulo 6 direcionamos nosso estudo ao fato de que ao trabalhar com precisão aritmética finita nos deparamos com o caso onde o autovalor pode ser igual a uma entrada da matriz D , o que pode tornar o cálculo do autovetor correspondente impossível a menos que se efetue algumas modificações.

No capítulo 7 realizamos uma comparação do auto-sistema de matrizes tridiagonais simétricas encontrado por nós, através do software Maple, com a solução encontrada pelas rotinas do LAPACK, DSTEDC e DSTEQR (ver [6]), as quais respectivamente encontram os resultados pelo método de divisão-e-conquista e pelo método QR(para maiores informações a respeito deste último método ver [10]).

Gostaríamos de salientar também, que este é um método competitivo com o método usual para o cálculo de autovalores/autovetores (o algoritmo QR/QL), sendo mais rápido do que o método QR/QL.

2 NOÇÕES FUNDAMENTAIS

Este capítulo introduz alguns conhecimentos básicos sobre a Teoria das Matrizes necessários à compreensão do estudo do método que vamos dissertar.

Definição 2.1 *Seja T uma matriz $n \times n$. Diz-se que o número real λ é um **autovalor** de T se existe um vetor não-nulo $\mathbf{q} \in R^n$ para o qual*

$$T\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}. \quad (2.1)$$

*Todo vetor \mathbf{q} satisfazendo (2.1) é chamado um **autovetor** de T associado ao **autovalor** λ .*

Definição 2.2 *Seja $T = [t_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. O determinante*

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - T) = \begin{vmatrix} \lambda - t_{11} & -t_{12} & \dots & -t_{1n} \\ -t_{21} & \lambda - t_{22} & \dots & -t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -t_{n1} & -t_{n2} & \dots & \lambda - t_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

*é chamado de **polinômio característico** de T . A equação*

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - T) = 0 \quad (2.3)$$

*é a **equação característica**.*

Teorema 2.3 *Os autovalores λ_i de T são os zeros do **polinômio característico**.*

Definição 2.4 *Uma matriz T $n \times n$ é dita **diagonalizável** se existirem uma matriz invertível Q e uma matriz diagonal D satisfazendo*

$$Q^{-1}TQ = D \quad (2.4)$$

Nesse caso dizemos que Q **diagonaliza** T

Observações:

- Se T é diagonalizável, então os vetores colunas da matriz Q que diagonaliza T são autovetores de T e os elementos diagonais de D são os autovalores associados.
- Se T é diagonalizável, então T pode ser fatorada em um produto QDQ^{-1} .

Teorema 2.5 Uma matriz T $n \times n$ é **diagonalizável** se e somente se T tem n autovetores linearmente independentes.

Definição 2.6 Os vetores q_1, q_2, \dots, q_n em um espaço vetorial são ditos **linearmente dependentes** se existem escalares m_1, m_2, \dots, m_n , nem todos nulos, tais que $m_1q_1 + m_2q_2 + \dots + m_nq_n = 0$

Em caso contrário, isto é, q_1, q_2, \dots, q_n são **linearmente independentes** se, sempre que $m_1q_1 + m_2q_2 + \dots + m_nq_n = 0$, temos $m_1 = m_2 = \dots = m_k = 0$.

Teorema 2.7 Se T é uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}TQ = D$, uma matriz diagonal. Os autovalores de T estão sobre a diagonal principal de D . Neste caso, a diagonalização fica $Q^t T Q$

Teorema 2.8 A matriz Q $n \times n$ é ortogonal se e somente se as colunas de Q formarem um conjunto ortonormal de vetores ou $Q^t = Q^{-1}$.

Definição 2.9 Um conjunto $S = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ é dito **ortogonal** se dois vetores distintos quaisquer em S são ortogonais, isto é, se $q_i \cdot q_j = 0$ para $i \neq j$. Um conjunto **ortonormal** de vetores é um conjunto ortogonal de vetores unitários, isto é, $S = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ é ortonormal se $q_i \cdot q_j = 0$ para $i \neq j$ e $q_i \cdot q_i = 1$ (norma de cada vetor = 1) para $i = 1, 2, \dots, k$.

3 APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE DIVISÃO-E-CONQUISTA

Apresentamos o método de Divisão-e-conquista para o cálculo do auto-sistema de uma matriz tridiagonal ilustrando-o através de exemplos numéricos.

Consideremos uma matriz $n \times n$.

Seja T uma matriz tridiagonal simétrica, com dimensão $n = 4$, onde

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

determinemos os autovalores e autovetores desta matriz, por meio do método de *divisão-e-conquista*.

Com base no que consiste o método, inicialmente, particionamos a matriz em duas partes, escrevendo:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + \alpha b b^t, \quad (3.2)$$

onde

$$\alpha = T_{(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1)} = T_{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2})} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Sendo que para o nosso exemplo temos:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \alpha = T_{(2,3)} = T_{(3,2)} = 2 \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

No entanto, com b assim constituído, ao efetuarmos a operação representada pela expressão (3.2), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

e não (3.1) como gostaríamos. Por este motivo realizamos algumas transformações:

$$T_{1(2,2)} = T_{(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})} - \alpha = T_{(2,2)} - \alpha \quad e \quad T_{2(1,1)} = T_{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+1)} - \alpha = T_{(3,3)} - \alpha$$

Para o nosso caso obtemos

$$T_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 - \alpha \end{bmatrix} \quad e \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix},$$

ou

$$T_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

O que almejamos encontrar é o auto-sistema das matrizes menores T_1 e T_2 e usarmos os mesmos como intermediário para determinar o auto-sistema da matriz inicial T .

Supondo que conhecemos os auto-sistemas de T_1 e T_2 , temos

$$T_1 = Q_1 D_1 Q_1^t \quad e \quad T_2 = Q_2 D_2 Q_2^t, \quad (3.4)$$

sendo D_1 e D_2 matrizes diagonais constituídas pelos autovalores de T_1 e T_2 , respectivamente e Q_1 e Q_2 matrizes ortogonais cujas colunas são os autovetores de T_1 e T_2 .

De posse destas formas, e nos reportando à expressão (3.2) podemos escrever T como:

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} + \rho z z^t \right) \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}^t, \quad (3.5)$$

Chamando

$$D_{12} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad e \quad Q_{12} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

temos

$$T = Q_{12}(D_{12} + \rho z z^t)Q_{12}^t. \quad (3.6)$$

Nesta etapa, para determinar o auto-sistema de T, é suficiente encontrar o auto-sistema da matriz

$$D + \rho z z^t = D_{12} + \rho z z^t. \quad (3.7)$$

onde z é o vetor coluna que satisfaz a igualdade:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\text{última linha de } Q_1)^t \\ (\text{primeira linha de } Q_2)^t \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Este resultado obtém-se observando as expressões (3.4) e (3.5) e realizando o desenvolvimento

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \rho z z^t \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}^t.$$

Comparando com (3.2), obtemos a igualdade:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \rho z z^t \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}^t = \alpha b b^t$$

de onde vemos que

$$\sqrt{\rho} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} z = \sqrt{\alpha} b,$$

satisfaz a igualdade e podemos escrever

$\sqrt{\rho} Q_{12} z = \sqrt{\alpha} b \longrightarrow \sqrt{\rho} (Q_{12})^t Q_{12} z = \sqrt{\alpha} (Q_{12})^t b \longrightarrow \sqrt{\rho} z = \sqrt{\alpha} (Q_{12})^t b$, onde isolando e normalizando z obtemos a igualdade expressa pela equação (3.8), pois Q_{12} é ortogonal.

Assumindo $\alpha > 0$, ρ será um escalar positivo, pois satisfaz a relação $\rho = 2\alpha$, pois $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2} : \rho = 2\alpha$.

Assumindo que $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ são elementos de D_{12} , que $z_j \neq 0$ para todo j e que $\tilde{D} = D + \rho z z^t$, temos que $\det(\tilde{D} - \lambda I) = \det((D - \lambda I)(I + \rho(D - \lambda I)^{-1} z z^t))$. Como os autovalores de \tilde{D} são os zeros deste polinômio, trabalhando com esta expressão temos que os autovalores da matriz (3.7), quando $\rho \neq 0$, são os zeros da função racional (3.9). Para maiores detalhes ver [4], p. 33 ou [1].

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{j=1}^n \frac{z_j^2}{d_j - \lambda}. \quad (3.9)$$

Analisando a função (3.9) observamos que $f'(\lambda) > 0$ sempre, pois $\rho > 0$. Isto significa que f é sempre crescente. Observamos, também que $f(\lambda)$ tem assíntotas quando $\lambda = d_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$ e é contínua no restante. Com isto, podemos dizer que $f(\lambda)$ tem um zero em cada intervalo (d_j, d_{j+1}) .

A expressão para cada autovetor associado em termos de cada autovalor é

$$q = \frac{(D - \lambda I)^{-1} z}{\|(D - \lambda I)^{-1} z\|}. \quad (3.10)$$

Esta expressão para q pode ser obtida, pois supondo (q, λ) um autopar de (3.7), temos $(D + \rho z z^t)q = \lambda q$, e após a reorganização de alguns termos obtemos $(D - \lambda I)q = -\rho z z^t q$. Observando que $z^t q$ é um escalar podemos escrever $(D - \lambda I)q = -\rho(z^t q)z$ e porque cada autovalor de $D + \rho z z^t$ não coincide com d_i , $(D - \lambda I)$ é invertível e podemos escrever $q = -\rho(z^t q)(D - \lambda I)^{-1}z$. Para obter um autovetor normalizado dividimos por sua norma conseguindo assim a expressão (3.10).

Podemos relacionar cada autovalor λ_i ao correspondente elemento de D (ver [1]), através da seguinte equação:

$$\lambda_i = d_i + \rho \mu_i \quad (3.11)$$

Para o momento assumimos que os d'_{is} estão em ordem crescente e que todos os z'_{is} são não nulos.

As matrizes D_1 e D_2 que contêm os autovalores das matrizes T_1 e T_2 respectivamente, bem como os autovetores das matrizes T_1 e T_2 armazenados nas matrizes Q_1 e Q_2 , são encontrados por meio de algum método conhecido (no nosso caso com a utilização dos comandos do software Maple) .

Temos assim, no nosso exemplo

$$D_1 = \begin{bmatrix} -1.472135956 & 0 \\ 0 & 7.472135955 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -6.562305898 & 0 \\ 0 & 13.56230590 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.5257311121 & -0.8506508084 \\ -0.8506508084 & -0.5257311121 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.8506508086 & 0.5257311122 \\ -0.5257311122 & 0.8506508086 \end{bmatrix}$$

A matriz $D = D_{12}$ constituída por D_1 e D_2 é, portanto,

$$D = \begin{bmatrix} -1.472135956 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.472135955 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.562305898 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.56230590 \end{bmatrix}.$$

Os $d'_{i's}$ devem ser colocados em ordem crescente, logo a matriz D_{12} deve ser modificada para

$$D12_{org} = \begin{bmatrix} -6.562305898 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.472135956 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.472135955 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.56230590 \end{bmatrix}$$

Com a utilização da equação (3.8) determinamos o vetor $z = za$ que é o vetor com os z'_i s obtidos a partir de $D_{12} = D$ (matriz dos d_i 's sem a ordenação)

$$za = \begin{bmatrix} -0.6015009549 \\ -0.3717480344 \\ 0.6015009550 \\ 0.3717480344 \end{bmatrix}.$$

Organizando os z'_i s de acordo com a matriz $D12_{org}$, obtemos o vetor z

$$z = \begin{bmatrix} 0.6015009550 \\ -0.6015009549 \\ -0.3717480344 \\ 0.3717480344 \end{bmatrix}.$$

Como afirmamos anteriormente, os autovalores da matriz $D + \rho zz^t$, que agora para nós é $D12_{org} + \rho zz^t$, onde $\rho \neq 0$, são os zeros da função racional (3.9), dita EQUAÇÃO SECULAR.

Para calcularmos os zeros da função modificamos levemente a equação (3.9).

Observamos que sempre que $\lambda = d_i + \rho\mu_i$ é um zero de f , nós temos que μ_i é um zero de

$$f_i(\mu) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{z_j^2}{\delta_j - \mu}, \quad (3.12)$$

onde

$$\delta_j = \frac{d_j - d_i}{\rho}, \quad (3.13)$$

pois $f(\lambda) = f(d_i + \rho\mu_i) = 1 + \rho \sum_{j=1}^n \frac{z_j^2}{d_j - d_i - \rho\mu_i}$ que após algumas simplificações fica: $1 + \sum_{j=1}^n \frac{z_j^2}{\frac{d_j - d_i}{\rho} - \mu_i}$, observando assim a igualdade (3.12). Podemos assim, trabalhar com a função (3.12) e calcular o zero que está no intervalo $(0, \delta_{i+1})$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Para simplificação de notação chamamos a partir de agora $\delta = \delta_{i+1}$.

Particionamos, a seguir, a soma que aparece na função f_i , para $1 \leq i \leq n$, em duas funções:

$$\Psi(t) \equiv \sum_{j=1}^i \frac{z_j^2}{\delta_j - t} \quad (3.14)$$

$$\Phi(t) \equiv \sum_{j=i+1}^n \frac{z_j^2}{\delta_j - t}. \quad (3.15)$$

Assim, ao invés de procurarmos pelos zeros de toda a função, nós tentamos encontrar o ponto de intersecção das funções $-\Psi$ e $1 + \Phi$ para $1 \leq i \leq n$, isto é, resolvemos

$$-\Psi(t) = 1 + \Phi(t). \quad (3.16)$$

A idéia do método é usar curvas mais simples que aproximem as curvas Ψ e Φ . Para isto escolhe-se um ponto inicial t_0 . Estas curvas mais simples, chamadas $\bar{\Psi}$ e $\bar{\Phi}$, devem ser tangenciais a Ψ e Φ na aproximação inicial t_0 para a raiz μ_i de f_i . A próxima iteração, t_1 , é a intersecção das curvas $-\bar{\Psi}$ e $1 + \bar{\Phi}$ (ver equações (3.17) e (3.18), logo abaixo) e o processo é aplicado iterativamente usando t_1 como ponto inicial para o próximo estágio. Pode-se mostrar (ver [1]) que t_1 é maior que t_0 e menor que μ_i , conseguindo iterativamente encontrar o valor de μ_i , através de aproximações cada vez melhores.

Podemos definir estas funções racionais mais simples como:

$$\bar{\Psi}(t) = \frac{p}{q - t} \quad (3.17)$$

$$\bar{\Phi}(t) = r + \frac{s}{\delta - t} \quad (3.18)$$

e com isto, temos que:

$$\bar{\Psi}'(t) = \frac{p}{(q-t)^2} \quad (3.19)$$

$$\bar{\Phi}'(t) = \frac{s}{(\delta-t)^2}. \quad (3.20)$$

Escolhemos $-\bar{\Psi}$ ter a mesma ordenada e derivada que $-\Psi$ em $t = t_0$.

Chamando $\Psi(t_0) = \Psi_0$, $\Psi'(t_0) = \Psi'_0$, $\Phi(t_0) = \Phi_0$, $\Phi'(t_0) = \Phi'_0$ e com a realização de alguns cálculos chegamos às seguintes expressões:

$$p = \frac{\Psi_0^2}{\Psi'_0} \quad (3.21)$$

$$q = t_0 + \frac{\Psi_0}{\Psi'_0} \quad (3.22)$$

$$r = \Phi_0 - (\delta - t_0)\Phi'_0 \quad (3.23)$$

$$s = (\delta - t_0)^2\Phi'_0. \quad (3.24)$$

Sendo a nova aproximação t_1 a intersecção das curvas $-\bar{\Psi}$ e $1 + \bar{\Phi}$, significa que t_1 é a solução de

$$-\frac{p}{q-t} = 1 + r + \frac{s}{\delta-t}. \quad (3.25)$$

Esta equação pode ser transformada na equação quadrática

$$u^2 - au + b = 0, \quad (3.26)$$

sendo $u = t - t_0$, e

$$a = \Delta + \frac{\Psi_0}{\Psi'_0} + \frac{s+p}{1+r} \quad (3.27)$$

$$b = \Delta \frac{\Psi_0}{\Psi'_0} + \frac{s \frac{\Psi_0}{\Psi'_0} + p\Delta}{1+r}, \quad (3.28)$$

onde $\Delta = \delta - t_0$. Usando os valores de p , q , r e s dados anteriormente, devemos ter:

$$a = \frac{1}{c}(\Delta(1 + \Phi_0) + \frac{\Psi_0^2}{\Psi'_0}) + \frac{\Psi_0}{\Psi'_0} \quad (3.29)$$

$$b = \frac{1}{c}(\Delta\omega \frac{\Psi_0}{\Psi'_0}), \quad (3.30)$$

onde $c = 1 + r = 1 + \Phi_0 - \Delta\Phi'_0$ e $\omega = 1 + \Phi_0 + \Psi_0$.

A raiz procurada deve ser positiva e menor que δ , conforme verificamos a seguir.

Observação 3.1 *Sabendo que $f(\lambda)$ tem um zero em cada intervalo (d_j, d_{j+1}) (ver equação (3.9)), $\lambda = d_i + \rho\mu_i$, $\delta_{i+1} = \frac{d_{i+1}-d_i}{\rho} = \delta$, para $j = i$, temos as seguintes desigualdades equivalentes*

$$d_i < \lambda < d_{i+1}$$

$$d_i < d_i + \rho\mu_i < d_{i+1}$$

$$d_i - d_i < d_i - d_i + \rho\mu_i < d_{i+1} - d_i$$

$$0 < \mu_i < \delta_{i+1}$$

$$0 < \mu_i < \delta$$

Devemos resolver a equação quadrática (3.26) com a devida exatidão. Para isto, tentamos evitar cancelamentos efetuando adições e não subtrações na fórmula para calcular as raízes.

Como a é positivo e a raiz desejada é a menor (ver ([1]),p. 75), nós usamos:

$$u = \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 - 4b}} \quad (3.31)$$

ou, como queremos avaliar em $t = t_1$ e $u = t - t_0$ então temos:

$$t_1 = t_0 + \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 - 4b}}. \quad (3.32)$$

Vamos encontrar a aproximação inicial t_0 para que com ela encontremos as próximas iterações até que estas convirjam para o valor de μ_i . Para encontrar a aproximação inicial t_0 , assumida estar situada no intervalo $(0, \mu)$, fazemos as seguintes observações:

Observação 3.2

1. Para a raiz μ : $-\Psi(\mu) = 1 + \Phi(\mu)$.

2. Devemos encontrar t_0 que está à esquerda da raiz procurada (pois pode-se provar que $\{t_k\}$ é crescente). Trabalhando com as funções $\Psi(\mu)$ e $\Phi(\mu)$ e observando seus termos(ver [1]) podemos chegar na desigualdade

$$\frac{z_i^2}{\mu} \leq \frac{z_{i+1}^2}{\delta_{i+1} - \mu} + k, \quad (3.33)$$

onde

$$k = 1 + \sum_{j=1, j \neq i, i+1}^n \frac{z_j^2}{\delta_j - \delta_{i+1}}. \quad (3.34)$$

3. Observando o ponto de intersecção das curvas $\frac{z_i^2}{t}$ e $\frac{z_{i+1}^2}{\delta_{i+1} - t} + k$, verificamos que está situado à esquerda de μ e assim escolhemos t_0 como a solução de

$$\frac{z_i^2}{t_0} = \frac{z_{i+1}^2}{\delta_{i+1} - t_0} + k. \quad (3.35)$$

4. Constatamos assim, a necessidade de se conhecer:

(a) o valor de k para cada $1 \leq i \leq n$,

(b) o valor de t_0 .

5. Sendo que temos

$$a = \delta_{i+1} + \frac{z_i^2 + z_{i+1}^2}{k} \quad (3.36)$$

$$b = \frac{z_i^2 \delta_{i+1}}{k} \quad (3.37)$$

existem duas possibilidades para o k : $k > 0$ ou $k \leq 0$.

Quando

$k > 0$, deve-se escolher a menor raiz. Assim, analisando a equação (3.36) percebemos que $a > 0$ e então e devemos ter

$$t_0 = \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 - 4b}}. \quad (3.38)$$

Para $k < 0$, a raiz escolhida deve ser a maior entre as duas. Neste caso devemos ter

$$\text{para } a \geq 0, \quad t_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (3.39)$$

$$\text{para } a < 0, \quad t_0 = \frac{2b}{a - \sqrt{a^2 - 4b}}. \quad (3.40)$$

Dando continuidade à resolução do nosso exemplo, primeiramente encontramos o valor de k , a , b e posteriormente o valor de t_0 . Em seguida, calculamos as iterações subseqüentes até convergirmos para o valor de μ_i (ver t_0 e μ_i na figura (3.1)) , chegando assim, ao autovalor correspondente, sendo este, dado por

$$\lambda_i = d_i + \rho\mu_i \quad (3.41)$$

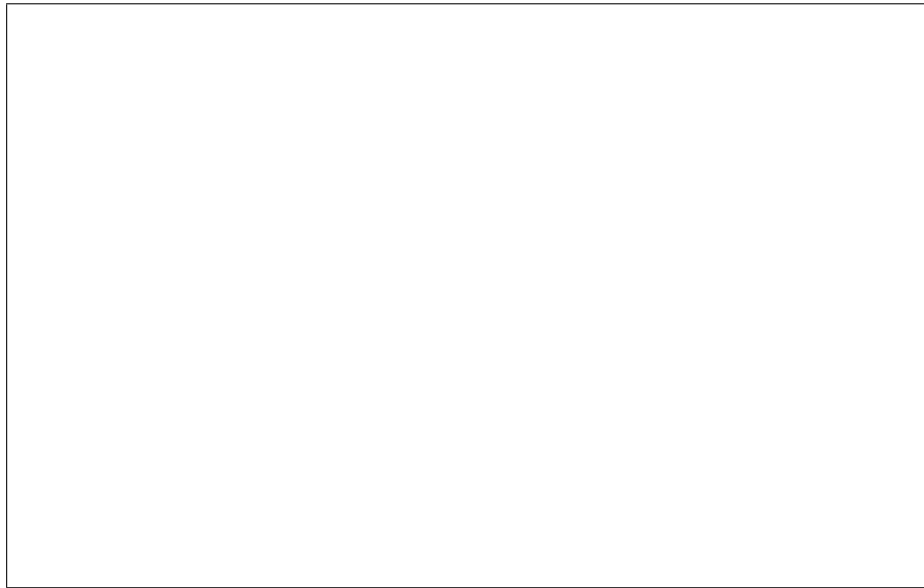


Figura 3.1: Aproximação inicial t_0 e μ_i

Vamos calcular os valores solicitados para cada i , utilizando os dados encontrados inicialmente.

Para $i = 1$, e portando $d_i = d_1$ calculamos os deltas, lembrando que os d_{i_s} são as entradas diagonais da matriz $D12_{org}$.

$$\delta_1 = (d_1 - d_i)/\rho \longrightarrow \delta_1 = 0$$

$$\delta_2 = (d_2 - d_i)/\rho \longrightarrow \delta_2 = 1.272542486$$

$$\delta_3 = (d_3 - d_i)/\rho \longrightarrow \delta_3 = 3.508610463$$

$$\delta_4 = (d_4 - d_i)/\rho \longrightarrow \delta_4 = 5.031152950$$

Calculamos o valor de k , fazendo uso da equação (3.34) e obtemos como resultado $k = 1.098571402$

Tendo encontrado k , vamos encontrar o valor de a e de b utilizando as equações (3.36) e (3.37) e assim conseguimos $a = 1.931222292$ e $b = 0.4190990188$

Nos reportando à expressão quadrática (3.26), substituindo os valores de a e b já calculados temos

$$u^2 - 1.931222292u + 0.4190990188 = 0 \quad (3.42)$$

Resolvendo a equação (3.42), encontramos $u_1 = 1.682064820$ e $u_2 = 0.2491574725$.

Como $k > 0$, utilizamos a menor raiz, portanto, $t_0 = u_2 = 0.2491574725$. Podemos observar na figura 3.2 a posição de t_0 e de μ_1 .



Figura 3.2: Aproximação inicial t_0 e μ_1

Encontrado a aproximação inicial t_0 , necessitamos calcular as iterações subseqüentes. Para achar t_1 utilizam-se os valores de t_0 e os valores de a , b , p , q , r e s conforme as expressões (3.27), (3.28) e (3.21) a (3.24).

Vamos achar a segunda iteraçãõ, a terceira, a quarta e assim sucessivamente até que haja a convergência para um determinado valor, o qual será a aproximação do valor esperado μ_i .

Sendo

$$\Psi(t) = \sum_{j=1}^1 \frac{z_j^2}{\delta_j - t}, \quad (3.43)$$

calculamos $\Psi_0 = -1.452107357$ e $\Psi'(0) = 5.828070669$.

Sendo

$$\Phi(t) = \sum_{j=2}^4 \frac{z_j^2}{\delta_j - t}, \quad (3.44)$$

calculamos $\Phi(0) = 0.4248340235$; encontramos a derivada da função (3.44)

$$\begin{aligned} \Phi'(t) = & 0.3618033987 \frac{1}{(1.272542486 - t)^2} + \\ & 0.1381966011 \frac{1}{(3.508610463 - t)^2} + 0.1381966011 \frac{1}{(5.031152950 - t)^2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

e calculamos $\Phi'(0) = 0.3645087184$.

Considerando $l = 6$ o número de iterações, calculamos os valores de p_l , q_l , r_l e s_l , com as equações (3.21) a (3.24), realizando, assim seis iterações, obtendo os valores:

$$r_1 = \Phi(t_0) - (\delta_{i+1} - t_0)\Phi'(t_0) \longrightarrow r_1 = 0.0518012636$$

$$s_1 = (\delta_{i+1} - t_0)^2 \Phi'(t_0) \longrightarrow s_1 = 0.3817561362$$

$$p_1 = \Psi(t_0)^2 / \Psi'(t_0) \longrightarrow p_1 = 0.3618033987$$

$$q_1 = t_0 + \Psi(t_0) / \Psi'(t_0) \longrightarrow q_2 = 0.1 \times 10^{-9}$$

Consideremos o $a = ai_l$ e o $b = bi_l$ correspondentes às expressões (3.27) e (3.28), obtendo

$$a = (\delta_{i+1} - t_0) + \frac{\Psi(t_0)}{\Psi'(t_0)} + \frac{(s_1 + p_1)}{(1 + r_1)} = 1.481166733$$

$$b = (\delta_{i+1} - t_0) \frac{\Psi(t_0)}{\Psi'(t_0)} + \frac{s_1 \frac{\Psi(t_0)}{\Psi'(t_0)} + p_1 (\delta_{i+1} - t_0)}{(1 + r_1)} = 0.00661176622$$

Com estes valores e a expressão (3.32) calculamos o t_1

$$t_1 = 0.2491574725 + \frac{2(0.00661176622)}{1.481166733 + \sqrt{1.481166733^2 - 4(0.00661176622)}} = 0.2536348981.$$

Calculamos o t_2 , seguindo a mesma técnica e colocando o t_1 no lugar do t_0 .

Para tanto necessitamos calcular novamente os valores de a , b , p , q , r e s com a devida substituição.

$$r_2 = \Phi(t_1) - (\delta_{i+1} - t_1)\Phi'(t_1) \longrightarrow r_2 = 0.0519239353$$

$$s_2 = (\delta_{i+1} - t_1)^2\Phi'(t_1) \longrightarrow s_2 = 0.3816308707$$

$$p_2 = \Psi(t_1)^2/\Psi'(t_1) \longrightarrow p_2 = 0.3618033990$$

$$q_2 = t_1 + \Psi(t_1)/\Psi'(t_1) \longrightarrow q_2 = -0.1 \times 10^{-9}$$

$$a = (\delta_{i+1} - t_1) + \frac{\Psi(t_1)}{\Psi'(t_1)} + \frac{(s_2+p_2)}{(1+r_2)} = 1.472010359$$

$$b = (\delta_{i+1} - t_1)\frac{\Psi(t_1)}{\Psi'(t_1)} + \frac{s_2\frac{\Psi(t_1)}{\Psi'(t_1)} + p_2(\delta_{i+1} - t_1)}{(1+r_2)} = 0.664 \times 10^{-7}$$

Com estes valores encontramos t_2

$$t_2 = t_1 + \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 - 4b}} = 0.2536348979 + \frac{2(0.664 \times 10^{-7})}{1.472010359 + \sqrt{1.472010359^2 - 4(0.664 \times 10^{-7})}} \\ = 0.2536349430$$

Calculamos o t_3 , seguindo da mesma maneira, colocando o t_2 no lugar do t_1 . Necessitamos, portanto, calcular novamente os valores de a , b , p , q , r e s com a devida substituição.

$$r_3 = \Phi(t_2) - ((\delta_{i+1} - t_2)\Phi'(t_2)) = 0.0519239367$$

$$s_3 = (\delta_{i+1} - t_2)^2\Phi'(t_2) = 0.3816308692$$

$$p_3 = \Psi(t_2)^2/\Psi'(t_2) = 0.3618033986$$

$$q_3 = t_2 + \Psi(t_2)/\Psi'(t_2) = 0.1 \times 10^{-9}$$

$$a = (\delta_{i+1} - t_2) + \frac{\Psi(t_2)}{\Psi'(t_2)} + \frac{(s_3+p_3)}{(1+r_3)} = 1.472010266$$

$$b = (\delta_{i+1} - t_2) \frac{\Psi(t_2)}{\Psi'(t_2)} + \frac{s_3 \frac{\Psi(t_2)}{\Psi'(t_2)} + p_3(\delta_{i+1} - t_2)}{(1+r_3)} = -0.2 \times 10^{-9}$$

Encontramos

$$\begin{aligned} t_3 &= t_2 + \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 - 4b}} = 0.2536349430 + \frac{2(-0.2 \times 10^{-9})}{1.472010266 + \sqrt{(1.472010266)^2 - 4(-0.2 \times 10^{-9})}} \\ &= 0.2536349430 \end{aligned}$$

Agora calculamos o t_4 , da mesma forma, com as devidas alterações.

Realizamos este processo até que haja a convergência desejada.

$$r_4 = \Phi(t_3) - (\delta_{i+1} - t_3)\Phi'(t_3) = 0.0519239367$$

$$s_4 = (\delta_{i+1} - t_3)^2 \Phi'(t_3) = 0.3816308692$$

$$p_4 = \Psi(t_3)^2 / (\Psi'(t_3)) = 0.3618033989$$

$$q_4 = t_3 + \Psi(t_3) / \Psi'(t_3) = 0$$

$$a = (\delta_{i+1} - t_3) + \frac{\Psi(t_3)}{\Psi'(t_3)} + \frac{(s_4+p_4)}{(1+r_4)} = 1.472010266$$

$$b = (\delta_{i+1} - t_3) \frac{\Psi(t_3)}{\Psi'(t_3)} + \frac{s_4 \frac{\Psi(t_3)}{\Psi'(t_3)} + p_4(\delta_{i+1} - t_3)}{(1+r_4)} = 0.1 \times 10^{-9}$$

Encontramos

$$\begin{aligned} t_4 &= t_3 + \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 - 4b}} = 0.2536349429 + \frac{2(0.1 \times 10^{-9})}{1.472010266 + \sqrt{1.472010266^2 - 4(0.1 \times 10^{-9})}} \\ &= 0.2536349430 \end{aligned}$$

Calculamos t_5 .

$$r_5 = \Phi(t_4) - ((\delta_{i+1} - t_4)\Phi'(t_4)) = 0.0519239367$$

$$s_5 = (\delta_{i+1} - t_4)^2 \Phi'(t_4) = 0.3816308692$$

$$p_5 = (\Psi(t_4))^2 / (\Psi'(t_4)) = 0.3618033986$$

$$q_5 = t_4 + \Psi(t_4)/\Psi'(t_4) = 0.1 \times 10^{-9}$$

$$a = (\delta_{i+1} - t_4) + \frac{\Psi(t_4)}{\Psi'(t_4)} + \frac{(s_5 + p_5)}{(1+r_5)} = 1.472010266$$

$$b = (\delta_{i+1} - t_4) \frac{\Psi(t_4)}{\Psi'(t_4)} + \frac{(s_5 \frac{\Psi(t_4)}{\Psi'(t_4)} + p_5(\delta_{i+1} - t_4))}{(1+r_5)} = -0.2 \times 10^{-9}$$

Obtemos

$$t_5 = t_4 + \frac{2b}{a + \sqrt{(a)^2 - 4b}} = 0.2536349430 + \frac{2(-0.2 \times 10^{-9})}{1.472010266 + \sqrt{(1.472010266)^2 - 4(-0.2 \times 10^{-9})}} = 0.2536349430$$

Calculamos t_6 , seguindo o mesmo processo, percebendo que o valor de t_5 está igual ao valor de t_4 , até a décima casa decimal.

$$r_6 = \Phi(t_5) - ((\delta_{i+1} - t_5)\Phi'(t_5)) = 0.0519239367$$

$$s_6 = (\delta_{i+1} - t_5)^2 \Phi'(t_5) = 0.3816308692$$

$$p_6 = (\Psi(t_5))^2 / (\Psi'(t_5)) = 0.3618033986$$

$$q_6 = t_5 + \Psi(t_5)/\Psi'(t_5) = 0.1 \times 10^{-9}$$

$$a = (\delta_{i+1} - t_5) + \frac{\Psi(t_5)}{\Psi'(t_5)} + \frac{(s_6 + p_6)}{(1+r_6)} = 1.472010266$$

$$b = (\delta_{i+1} - t_5) \frac{\Psi(t_5)}{\Psi'(t_5)} + \frac{(s_6 \frac{\Psi(t_5)}{\Psi'(t_5)} + p_6(\delta_{i+1} - t_5))}{(1+r_6)} = -0.2 \times 10^{-9}$$

Obtemos

$$t_6 = t_5 + \frac{2b}{a + \sqrt{(a)^2 - 4b}} = 0.2536349430 + \frac{2(-0.2 \times 10^{-9})}{1.472010266 + \sqrt{(1.472010266)^2 - 4(-0.2 \times 10^{-9})}} = 0.2536349430$$

Podemos perceber que nas últimas iterações os valores vêm se repetindo. Temos, então a convergência buscada.

Agora, que os valores de t estão convergindo para um só valor, podemos utilizar a relação (3.41), que calcula o autovalor λ_i a partir de μ_i ou de $\mu_i = t_k$ (no nosso caso $\mu_1 = t_6$).

Para o nosso exemplo, quando $i = 1$ o ponto de intersecção das funções $1 + \Phi(t)$ e $-\Psi(t)$ está representado na figura 3.3



Figura 3.3: Representação do μ_1

Assim,

$$\mu_1 = t_6 = 0.2536349430$$

$$\lambda_1 = d_1 + \rho\mu_1 = -5.547766126$$

Este λ_1 é o autovalor da matriz original, encontrado através da resolução da equação secular.

Com este valor e com a expressão (3.10) encontramos o autovetor correspondente.

Considerando I , a matriz identidade 4×4 e $q_1 = \frac{(D12_{org} - \lambda_1 I)^{-1} z}{\|(D12_{org} - \lambda_1 I)^{-1} z\|}$ obtemos como resultado

$$q_1 = \begin{bmatrix} -0.9688389243 \\ -0.2411714458 \\ -0.04665791175 \\ 0.03178854801 \end{bmatrix},$$

que representa o autovetor da matriz $D + \rho z z^t$, com os elementos de D organizados em ordem crescente, correspondente ao autovalor λ_1 (posteriormente calculamos o autovetor da matriz original).

Devemos realizar o cálculo para $i = 2, 3$ e 4 , encontrando assim, os outros autovalores e os correspondentes autovetores. Não demonstraremos este desenvolvimento, para $i = 2$ e 3 , por acharmos não ser necessário, já que o processo é análogo ao desenvolvido para $i = 1$, mas demonstraremos por meio da figura (3.4) a aproximação inicial t_0 e o valor μ_2 para $i = 2$.

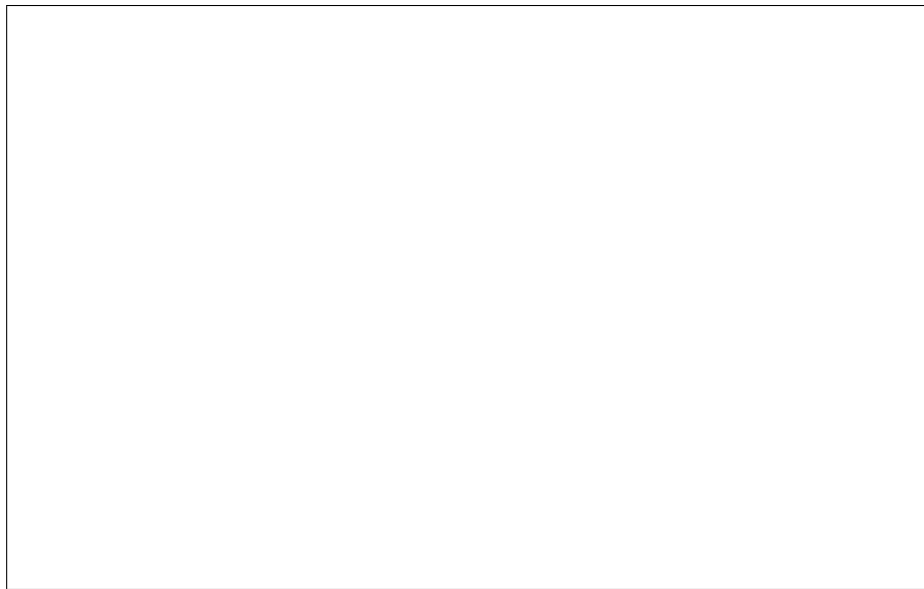


Figura 3.4: Representação do μ_2

Realizamos o desenvolvimento do método para $i = n = 4$, ou seja a última raiz, pois temos algumas considerações a destacar.

O cálculo da última raiz, ou seja λ_n , será efetivado através do mesmo processo usado para as anteriores, porém precisamos observar que λ_n está limitado

à direita por $d_n + \rho$. Tomamos $d_{n+1} = d_n + \rho$ e calculamos o autovalor que está no intervalo (d_n, d_{n+1}) ou computamos δ_{n+1} a partir deste valor para d_{n+1} e calculamos a raiz μ_n que está no intervalo $(\delta_i, \delta_{i+1}) = (0, 1)$.

Devemos perceber que para $i = n$, $f(t) = 1 + \Psi(t)$ e $\Phi(t) = \Phi'(t) \equiv 0$. Isto significa que precisamos considerar somente a aproximação da função Ψ , que está representada por $\frac{p}{q-t}$, e portanto buscamos a solução de $1 + \frac{p}{q-t} = 0$, que é dada por

$$t = p + q = t_0 + \frac{\Psi_0}{\Psi'_0}(1 + \Psi_0) \quad (3.46)$$

Esta solução é dada por Bunch (ver [4]), mas veremos que esta é obtida através da fórmula geral utilizada até aqui.

Lembramos que t_1 é dado pela expressão (3.32) onde a e b são dados por (3.29) e (3.30) respectivamente. Com $\Phi_0 = \Phi'_0 = 0$, os valores de a e b são simplificados para

$$a = \Delta + \frac{\Psi_0}{\Psi'_0}(1 + \Psi_0) \quad (3.47)$$

e

$$b = \Delta \frac{\Psi_0}{\Psi'_0}(1 + \Psi_0). \quad (3.48)$$

Temos $a^2 - 4b = [\Delta - \frac{\Psi_0}{\Psi'_0}(1 + \Psi_0)]^2$ e $a + \sqrt{a^2 - 4b} = 2\Delta$ e assim realizando a operação $t_0 + \frac{2b}{2\Delta} = t_0 + \frac{b}{\Delta}$, nós obtemos o mesmo resultado para t_1 com a versão simplificada proposta por Bunch.

Apresentamos a seguir o cálculo para $i = n = 4$.

Necessitamos calcular os valores dos deltas e o valor de k , sendo $d_i = d_4$.

$$\delta_1 = \frac{(d_1 - d_i)}{\rho} = -5.031152950$$

$$\delta_2 = \frac{(d_2 - d_i)}{\rho} = -3.758610465$$

$$\delta_3 = \frac{(d_3 - d_i)}{\rho} = -1.522542486$$

$$\delta_4 = \frac{(d_4 - d_i)}{\rho} = 0$$

$$\delta_{i+1} = \frac{d_5 - d_4}{\rho} = \frac{d_{4+\rho} - d_4}{\rho} = \delta_5 = 1$$

Como $k = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{(z_j)^2}{(\delta_j - \delta_{i+1})}$ obtemos $k = 0.8091949464$

Tendo encontrado k , calculamos a e b correspondentes.

$$a = \delta_{i+1} + \frac{(z_i)^2}{k_i} = 1.170782828$$

$$b = \frac{(z_i)^2 \delta_{i+1}}{k_i} = 0.1707828277$$

Substituindo os valores de a e b em (3.26), obtemos a equação

$u^2 - 1.170782828u + 0.1707828277 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 1.000000000$ e $r_2 = 0.1707828277$.

Para o nosso caso, como $k > 0$, usamos a menor raiz e assim encontramos a aproximação inicial t_0

$$t_0 = r_2 = 0.1707828277.$$

Encontrada a aproximação inicial t_0 , calculamos a seguir as próximas iterações. Para achar t_1 necessitamos de t_0 e dos valores de a , b , p , q , r e s conforme as expressões (3.27), (3.28) e (3.21) a (3.24), até que haja a convergência para um determinado valor, o qual será a aproximação do valor esperado μ_4 .

Apresentamos a seguir os cálculos necessários para obter as aproximações para μ_4 .

Sendo

$$\Psi(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{z_j^2}{\delta_j - t} \quad (3.49)$$

calculamos $\Psi(t_0) = -1.052435332$; encontramos a derivada de (3.49).

$\Psi'(t) = 0.3618033989 \frac{1}{(-5.031152950-t)^2} + 0.3618033987 \frac{1}{(-3.758610465-t)^2} + 0.1381966011 \frac{1}{(-1.522542486-t)^2} + 0.1381966011 \frac{1}{(t^2)}$ e calculamos $\Psi'(t_0) = 4.823151333$.

Determinamos o valor de

$$b = (\delta_{i+1} - t_0) \frac{\Psi(t_0)}{\Psi'(t_0)} (1 + \Psi(t_0)) = 0.01572452888$$

Com estes valores encontramos

$$t_1 = t_0 + \frac{b}{(\delta_{i+1} - t_0)} = 0.1822244749$$

A seguir calculamos

$$b = (\delta_{i+1} - t_1) \frac{\Psi(t_1)}{\Psi'(t_1)} (1 + \Psi(t_1)) = 0.0002135308671$$

e o valor de t_2 é

$$t_2 = t_1 + \frac{b}{(\delta_{i+1} - t_1)} = 0.1823798465.$$

Em seguida, temos $b = (\delta_{i+1} - t_2) \frac{\Psi(t_2)}{\Psi'(t_2)} (1 + \Psi(t_2)) = 0.3793351868 \times 10^{-7}$.

Portanto, a próxima iteração é

$$t_3 = t_2 + \frac{b}{(\delta_{i+1} - t_2)} = 0.1823798741.$$

Para obter t_4 calculamos

$$b = (\delta_{i+1} - t_3) \frac{\Psi(t_3)}{\Psi'(t_3)} (1 + \Psi(t_3)) = 0.3242181670 \times 10^{-7}.$$

Logo t_4 é dada por

$$t_4 = t_3 + \frac{b}{(\delta_{i+1} - t_3)} = 0.1823798743$$

e podemos observar que as iterações estão convergindo.

A seguir

$$b = (\delta_{i+1} - t_4) \frac{\Psi(t_4)}{\Psi'(t_4)} (1 + \Psi(t_4)) = -0.1296872668 \times 10^{-7}$$

E t_5 é

$$t_5 = t_4 + \frac{b}{(\delta_{i+1} - t_4)} = 0.1823798742$$

Para a próxima iteração,

$$b = (\delta_{i+1} - t_5) \frac{\Psi(t_5)}{\Psi'(t_5)} (1 + \Psi'(t_5)) = 0$$

e encontramos

$$t_6 = t_5 + \frac{b}{(\delta_{i+1} - t_5)} = 0.1823798742.$$

Observamos que nas últimas iterações os valores vêm se repetindo, surgindo assim, a convergência esperada.

Como os valores de t estão convergindo, temos $\mu_i = t_k$, no nosso caso,

$$\mu_4 = t_6 = 0.1823798742$$

e portanto, utilizando a relação (3.41) temos

$$\lambda_4 = d_4 + \rho\mu_4 = 14.29182540.$$

Este valor λ_4 é o último autovalor da matriz original, encontrado através da resolução da equação secular.

Sendo a matriz I (Identidade), já mencionada anteriormente, calculamos $q_4 = \frac{(D12_{org} - \lambda_4 I)^{-1} z}{\|(D12_{org} - \lambda_4 I)^{-1} z\|}$ e obtemos como resultado

$$q_4 = \begin{bmatrix} -0.05603744674 \\ 0.07413189144 \\ 0.1059054243 \\ -0.9900243978 \end{bmatrix}, \text{ que representa o autovetor da matriz } D + \rho z z^t, \text{ com}$$

os elementos de D ordenados, correspondente ao autovalor λ_4 .

Como o que queremos são os autovetores da matriz $D + \rho z z^t$, onde os elementos de D não estão ordenados, precisamos pré-multiplicar a matriz formada pelos autovetores q_1, q_2, q_3 e q_4 a qual chamamos de Q_{geral} , pela transposta da matriz

de permutação que realizou a ordenação dos elementos da matriz $D + \rho z z^t$. Vejamos a observação a seguir:

Observação 3.3 *Sendo P a matriz de Permutação que ordenou os elementos de D , temos*

$$P(D + \rho z z^t)P^t = D12_{org} + \rho z z^t = Q_{geral}\Lambda Q_{geral}^t$$

$$e se $D12_{org} + \rho z z^t = Q_{geral}\Lambda Q_{geral}^t$ então$$

$$D + \rho z z^t = P^t Q_{geral} \Lambda Q_{geral}^t P$$

e assim a decomposição da matriz original T fica

$$T = Q_{12}(D + \rho z z^t)Q_{12}^t$$

$$T = Q_{12}P^t Q(\Lambda)Q^t P Q_{12}^t$$

Para o nosso exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$Q_{geral} = \begin{bmatrix} -0.9688389243 & -0.2307729232 & -0.07039034992 & -0.05603744674 \\ -0.2411714458 & 0.9616302680 & 0.1077405416 & 0.07413189144 \\ -0.04665791175 & -0.1301923371 & 0.9847116512 & 0.1059054243 \\ 0.03178854801 & 0.07114099531 & 0.1173888347 & -0.9900243978 \end{bmatrix},$$

e realizando o produto:

$$P^t \times Q_{geral} = QP = \begin{bmatrix} -0.2411714458 & 0.9616302680 & 0.1077405416 & 0.07413189144 \\ -0.04665791175 & -0.1301923371 & 0.9847116512 & 0.1059054243 \\ -0.9688389243 & -0.2307729232 & -0.07039034992 & -0.05603744674 \\ 0.03178854801 & 0.07114099531 & 0.1173888347 & -0.9900243978 \end{bmatrix}$$

obtemos os autovetores da matriz $D + \rho z z^t$, onde os elementos de D *não* estão ordenados.

Agora, lembrando que

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} 0.5257311121 & -0.8506508084 & 0 & 0 \\ -0.8506508084 & -0.5257311121 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8506508086 & 0.5257311122 \\ 0 & 0 & -0.5257311122 & 0.8506508086 \end{bmatrix},$$

é formada por Q_1 e Q_2 e efetuando o produto:

$$Q_{12} \times QP = \begin{bmatrix} -0.08710174205 & 0.6163071670 & -0.7810032074 & -0.05111509306 \\ 0.2296822011 & -0.7495654027 & -0.6093431303 & -0.1187381299 \\ -0.8074313857 & -0.1589061391 & 0.00183735455 & -0.5681549272 \\ 0.5363897193 & 0.1818406508 & 0.1368633041 & -0.8127044253 \end{bmatrix},$$

conseguimos a matriz com os autovetores da matriz T , correspondentes aos autovalores λ_i . Relembrando a observação (3.3), percebe-se o porquê da realização do referido produto na obtenção dos autovetores de T .

Representamos graficamente os autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ da matriz T , que são as raízes da equação secular $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = 1 + 1.447213596 \frac{1}{-6.562305898 - \lambda} + 1.447213595 \frac{1}{-1.472135956 - \lambda} + .5527864044 \frac{1}{7.472135955 - \lambda} + .5527864044 \frac{1}{13.56230590 - \lambda}$$



Figura 3.5: Autovalores da matriz T (λ_i , onde $1 \leq i \leq n$)

4 DIVIDINDO A MATRIZ ORIGINAL EM QUATRO PARTES

Vimos no capítulo anterior, um exemplo de como funciona o método *divisão-e-conquista* quando a matriz original é particionada em 2 sub-matrizes. Mesmo que particionemos em um número maior de sub-matrizes, o princípio de desenvolvimento do método se mantém.

Vejamos um exemplo para o comportamento do método quando operamos com quatro sub-matrizes e não apenas com duas.

Seja T uma matriz tridiagonal simétrica, com dimensão $n = 8$, onde

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

A seguir explicamos como determinar os autovalores e autovetores desta matriz, por meio do método mencionado.

Particionamos a matriz inicialmente em duas partes, obtendo as matrizes T_1 e T_2 de ordem $\frac{n}{2}$. A seguir, cada uma destas partes é dividida em duas partes, novamente, obtendo-se as matrizes T_{11} , T_{12} , T_{21} e T_{22} todas de ordem $\frac{n}{4}$. Procede-se, assim sucessivamente, quando se fizer necessário. Consideramos no nosso exemplo

que a ordem n , da matriz, é divisível por 4, porém qualquer dimensão pode ser tratada.

Inicialmente temos

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + \alpha b b^t, \quad (4.2)$$

e em seguida

$$T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{12} \end{bmatrix} + \alpha_1 b_1 b_1^t & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} T_{21} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} + \alpha_2 b_2 b_2^t \end{bmatrix} + \alpha b b^t. \quad (4.3)$$

Assim

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{12} \end{bmatrix} + \alpha_1 b_1 b_1^t \quad e \quad T_2 = \begin{bmatrix} T_{21} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} + \alpha_2 b_2 b_2^t.$$

Para o nosso exemplo temos $\alpha_1 = 4$, $\alpha = 1$, $\alpha_2 = 4$, e

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & (5 - \alpha_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad T_{12} = \begin{bmatrix} (9 - \alpha_1) & 3 \\ 3 & (10 - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} (8 - \alpha) & 2 \\ 2 & (9 - \alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad T_{22} = \begin{bmatrix} (7 - \alpha_2) & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sendo que b , b_1 e b_2 surgem por uma explicação análoga àquela dada ao b do exemplo da matriz (3.1).

Encontramos o auto-sistema de cada matriz T_{ij} usando o método QR/QL, obtendo a decomposição ortogonal $T_{ij} = Q_{ij} D_{ij} Q_{ij}^t$. Sendo assim, T é dada por:

$$T = \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} Q_{11}D_{11}Q_{11}^t & 0 \\ 0 & Q_{12}D_{12}Q_{12}^t \end{array} \right] + \alpha_1 b_1 b_1^t & 0 \\ 0 & \left[\begin{array}{cc} Q_{21}D_{21}Q_{21}^t & 0 \\ 0 & Q_{22}D_{22}Q_{22}^t \end{array} \right] + \alpha_2 b_2 b_2^t \end{array} \right] + \alpha b b^t \quad (4.4)$$

e como no exemplo do capítulo 3 transformamos T em:

$$T = \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{12} \end{array} \right] (D\rho z z_1) \left[\begin{array}{cc} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{12} \end{array} \right]^t & 0 \\ 0 & \left[\begin{array}{cc} Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{array} \right] (D\rho z z_2) \left[\begin{array}{cc} Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{array} \right]^t \end{array} \right] + \alpha b b^t, \quad (4.5)$$

onde $D\rho z z_1 = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} + \rho_1 z_1 z_1^t$ e $D\rho z z_2 = \begin{bmatrix} D_{21} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} + \rho_2 z_2 z_2^t$, sendo $\rho_1 = 2\alpha_1$ e $\rho_2 = 2\alpha_2$.

Em termos da decomposição de cada $D\rho z z_i$, nós obtemos:

$$T = \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{12} \end{array} \right] P_1 \Lambda_1 P_1^t \left[\begin{array}{cc} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{12} \end{array} \right]^t & 0 \\ 0 & \left[\begin{array}{cc} Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{array} \right] P_2 \Lambda_2 P_2^t \left[\begin{array}{cc} Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{array} \right]^t \end{array} \right] + \alpha b b^t \quad (4.6)$$

ou

$$T = \left[\begin{array}{cc} Q_1 P_1 & 0 \\ 0 & Q_2 P_2 \end{array} \right] \left(\left[\begin{array}{cc} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{array} \right] + \rho z z^t \right) \left[\begin{array}{cc} Q_1 P_1 & 0 \\ 0 & Q_2 P_2 \end{array} \right]^t, \quad (4.7)$$

onde

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{12} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

Como no exemplo da matriz (3.1), temos $\rho = 2\alpha$ e

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\text{última linha de } Q_1 P_1)^t \\ (\text{primeira linha de } Q_2 P_2)^t \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

Para completar o método, precisamos encontrar o auto-sistema da matriz

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} + \rho z z^t = X \Lambda X^t \quad (4.9)$$

utilizando-o para obter a decomposição

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 P_1 & 0 \\ 0 & Q_2 P_2 \end{bmatrix} X \Lambda X^t \begin{bmatrix} Q_1 P_1 & 0 \\ 0 & Q_2 P_2 \end{bmatrix}^t.$$

A partir desta expressão percebemos que os autovetores de T são as colunas do produto matricial

$$\begin{bmatrix} Q_1 P_1 & 0 \\ 0 & Q_2 P_2 \end{bmatrix} X, \quad (4.10)$$

e os autovalores de T , são as entradas diagonais de Λ .

Exemplificamos o processo para a matriz T escolhida (4.1). Neste caso, temos as submatrizes

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } T_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Encontramos as matrizes D_{11} e D_{12} com os autovalores das matrizes T_{11} e T_{12} respectivamente, bem como, os autovetores das matrizes T_{11} e T_{12} representados pelas matrizes Q_{11} e Q_{12} , por meio de algum método conhecido (no nosso caso com

a utilização dos comandos do software Maple) .

Dáí ,

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5.000000000 \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 3.394448725 & 0 \\ 0 & 10.60555128 \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 0.4472135955 & -0.8944271910 \\ -0.8944271910 & -0.4472135955 \end{bmatrix}$$

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} 0.8816745988 & 0.4718579255 \\ -0.4718579255 & 0.8816745988 \end{bmatrix}$$

Encontramos assim, a matriz $D = D_{12a}$ constituída por D_{11} e D_{12}

$$D_{12a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.394448725 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.60555128 \end{bmatrix}$$

e a matriz formada pelas matrizes Q_{11} e Q_{12} :

$$Q_{12a} = \begin{bmatrix} 0.4472135955 & -0.8944271910 & 0 & 0 \\ -0.8944271910 & -0.4472135955 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8816745988 & 0.4718579255 \\ 0 & 0 & -0.4718579255 & 0.8816745988 \end{bmatrix}$$

Colocando os d' s em ordem crescente, obtemos a matriz:

$$D_{f_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3944448725 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.60555128 \end{bmatrix}$$

Encontramos o vetor $z = z_a$ calculado de acordo com a matriz D_{12a} , a qual contém os d' s sem estarem organizados.

$$z_a = \begin{bmatrix} -0.6324555319 \\ -0.3162277660 \\ 0.6234380874 \\ 0.3336539389 \end{bmatrix}$$

Ordenando os z' s de acordo com os d' s, da matriz D_{f_1} conseguimos o vetor $z = z_{f_1}$

$$z_{f_1} = \begin{bmatrix} -0.6324555319 \\ 0.6234380874 \\ -0.3162277660 \\ 0.3336539389 \end{bmatrix}$$

Com estes dados e por processo análogo ao demonstrado no exemplo da matriz (3.1), ou seja, pela resolução da equação secular, encontramos os autovalores e autovetores de T_{11} e T_{12} , obtendo assim, o auto-sistema da matriz T_i para $1 \leq i \leq \frac{n}{2} = 4$.

Os autovalores da matriz $D_{f_1} + \rho z_{f_1} z_{f_1}^t$, com os elementos em ordem crescente são, respectivamente:

$$\lambda_1 = 1.181272292, \lambda_2 = 4.616866491, \lambda_3 = 8.000000001 \text{ e } \lambda_4 = 13.20186122$$

Vejamos sua representação gráfica



Figura 4.1: Autovalores da matriz T_1 (λ_i , onde $1 \leq i \leq n/2$)

O autovetores correspondentes (calculados pela expressão (3.10)) são:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0.8753383073 \\ -0.1353870932 \\ 0.4605462500 \\ 0.05788207327 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0.1395794357 \\ -0.8409857199 \\ -0.5196518007 \\ 0.05676799558 \end{bmatrix},$$

$$p_3 = \begin{bmatrix} 0.3464101618 \\ 0.4618802156 \\ -0.5931469801 \\ 0.5611090147 \end{bmatrix} \text{ e } p_4 = \begin{bmatrix} 0.3070837496 \\ 0.2471437237 \\ -0.4074749277 \\ -0.8237619400 \end{bmatrix}.$$

Como precisamos dos autovetores da matriz $D_{12a} + \rho z_a z_a^t$ onde os elementos de $D = D_{12a}$ não estão ordenados, realizamos o produto da matriz transposta da matriz de permutação que ordenou os elementos de $D_{f_1} + \rho z_{f_1} z_{f_1}^t$, pela matriz formada pelos autovetores p_1, p_2, p_3 e p_4 , a qual chamamos de Qg_{f_1} . A matriz de permutação à qual nos referimos é:

$$P_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Realizando o produto:

$$P_{f_1} \times Qg_{f_1} = QP_{f_1} = \begin{bmatrix} 0.8753383073 & 0.1395794357 & 0.3464101618 & 0.3070837496 \\ -0.1353870932 & -0.8409857199 & 0.4618802156 & 0.2471437237 \\ 0.4605462500 & -0.5196518007 & -0.5931469801 & -0.4074749277 \\ 0.05788207327 & 0.05676799558 & 0.5611090147 & -0.8237619400 \end{bmatrix}$$

obtemos os autovetores da matriz $D + \rho z z^t$, onde os elementos de D não estão ordenados.

Os autovalores de T_1 são os mesmos λ_i acima descritos e os autovetores de T_i se conquistam realizando o produto da matriz Q_{f_1} pela matriz QP_{f_1} . A matriz com estes autovetores é:

$$\begin{bmatrix} 0.5125570892 & 0.8146223164 & -0.2581988898 & -0.0837200388 \\ -0.7223794347 & 0.2512566050 & -0.5163977799 & -0.3851900889 \\ 0.4333640452 & -0.4313773643 & -0.2581988900 & -0.7479588935 \\ -0.1662792444 & 0.2952527204 & 0.7745966689 & -0.5340197039 \end{bmatrix}$$

Realizando os mesmos passos e obtendo os d 's e os z 's condizentes, calculamos os autovalores e autovetores das matrizes T_{21} e T_{22} , conseguindo assim, o auto-sistema da matriz T_2 .

Os autovalores de T_2 são

$$\lambda_1 = 1.657124078, \lambda_2 = 3.690280508, \lambda_3 = 7.040304500 \text{ e } \lambda_4 = 12.61229091$$

Vejamos a representação gráfica destes autovalores

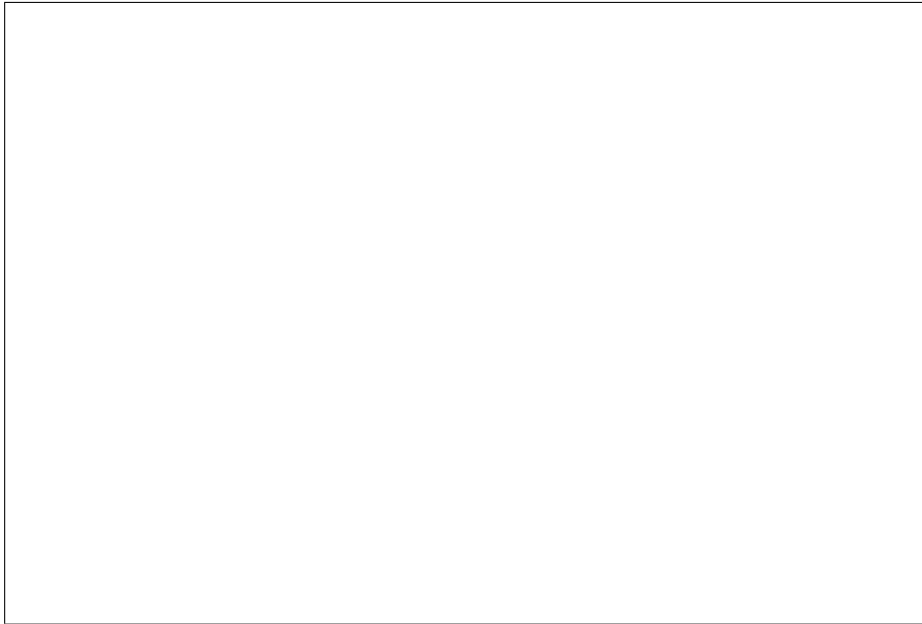


Figura 4.2: Autovalores da matriz T_2 (λ_i , onde $1 \leq i \leq n/2$)

A matriz cujas colunas são os autovetores de T_2 é

$$\begin{bmatrix} -0.07207339964 & -0.3621427728 & 0.8871435370 & -0.2768291554 \\ 0.1925396159 & 0.5992954971 & 0.0178779383 & -0.7768228762 \\ -0.3174119273 & -0.6144513608 & -0.4523305975 & -0.5631129771 \\ 0.9257340814 & -0.3635203493 & -0.0897427125 & -0.0530623390 \end{bmatrix}.$$

Posteriormente, com os autovalores de T_1 e T_2 , para nós representados por Λ_1 e Λ_2 , formamos a matriz diagonal denominada

$$\Lambda_{12} = \begin{bmatrix} 1.181272292 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.616866491 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.000000001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.20186122 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.657124078 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.690280508 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.040304500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.61229091 \end{bmatrix},$$

a qual depois de organizada com os elementos em ordem crescente passa a ser

$$\Lambda_{12org} = \begin{bmatrix} 1.181272292 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.657124078 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.690280508 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.616866491 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.040304500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.000000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.61229091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.20186122 \end{bmatrix},$$

ordenamos os z' s da mesma maneira em um vetor chamado

$$z_{fiorg} = \begin{bmatrix} -0.1175771813 \\ -0.05096358962 \\ -0.2560736103 \\ 0.2087752007 \\ 0.6273052107 \\ 0.5477225572 \\ -0.1957477730 \\ -0.3776089539 \end{bmatrix},$$

calculado pela equação (4.8).

Com estas informações podemos nos munir dos dados necessários para o cálculo dos auto-sistemas da matriz central dada pela expressão (4.9). Com os δ' s

e os $k's$, para cada i no intervalo $1 \leq i \leq n = 8$, encontramos, por processo análogo ao já aplicado, os autovalores da matriz T , denominados por nós λ_i , bem como os autovetores (calculados pelo produto (4.10)) da matriz T .

Os autovalores da matriz T são os autovalores da matriz $\Lambda_{12_{org}} + \rho z z^t$:

$\lambda_1 = 1.201856863$, $\lambda_2 = 1.661091916$, $\lambda_3 = 3.776968307$, $\lambda_4 = 4.678488971$, $\lambda_5 = 7.426357296$, $\lambda_6 = 8.955537892$, $\lambda_7 = 12.67390484$ e $\lambda_8 = 13.62579388$ e estão representados graficamente, na figura(4.3).

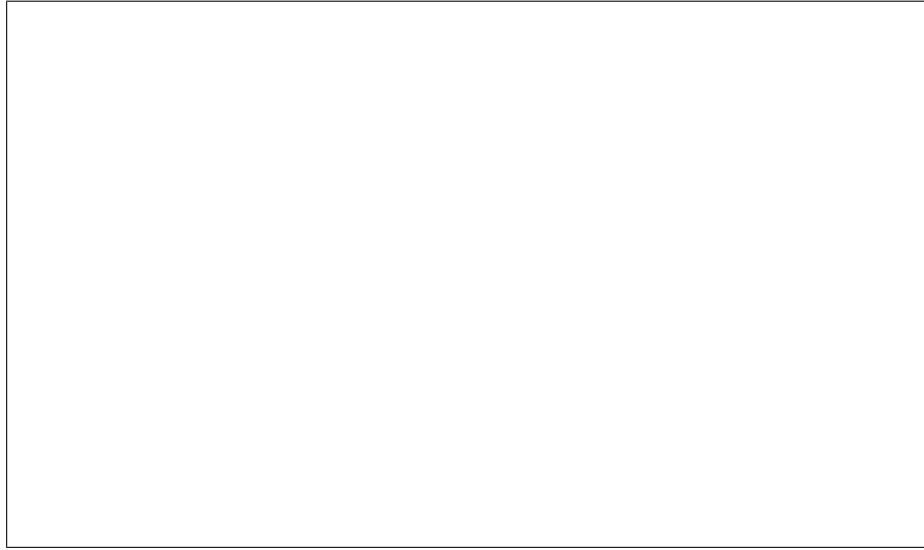


Figura 4.3: Autovalores da matriz T (λ_i , onde $1 \leq i \leq n$)

Os autovetores respectivos são as colunas da matriz

$$Q_{g_{final}} = \begin{bmatrix} 0.999291 & 0.0190826 & 0.0152299 & 0.00985076 & 0.00996660 & 0.0225057 & 0.00313683 & 0.0102437 \\ -0.0195798 & 0.999688 & 0.00808319 & 0.00494227 & 0.00467632 & 0.0103911 & 0.00141837 & 0.00461665 \\ -0.0179993 & -0.00982735 & 0.993179 & 0.0759253 & 0.0362839 & 0.0723731 & 0.00873980 & 0.0279440 \\ 0.0106930 & 0.00550048 & 0.0835759 & -0.992723 & -0.0393384 & -0.0716066 & -0.00794491 & -0.0251257 \\ 0.0187930 & 0.00908147 & 0.0646317 & 0.0778222 & -0.860197 & -0.487403 & -0.0341410 & -0.103277 \\ 0.0140924 & 0.00672885 & 0.0436079 & 0.0483166 & 0.505448 & -0.852992 & -0.0359310 & -0.105557 \\ -0.00300060 & -0.00139197 & -0.00744911 & -0.00722915 & -0.0199817 & -0.0796586 & 0.974324 & 0.209405 \\ -0.00550391 & -0.00254801 & -0.0134708 & -0.0129808 & -0.0346109 & -0.132330 & -0.219278 & 0.965813 \end{bmatrix},$$

Pré multiplicando esta pela transposta da matriz de permutação que ordenou Λ_{12} , chamada por nós de P_{fin} , podemos determinar os autovetores da ma-

triz $\Lambda_{12} + \rho z z^t$.

A matriz P_{fin} é:

$$P_{fin} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e o produto matricial mencionado é

$$(P_{fin})^t \times Q_{g_{final}} = SP = \begin{bmatrix} 0.999291 & 0.0190826 & 0.0152299 & 0.00985076 & 0.00996660 & 0.0225057 & 0.00313683 & 0.0102437 \\ 0.0106930 & 0.00550048 & 0.0835759 & -0.992723 & -0.0393384 & -0.0716066 & -0.00794491 & -0.0251257 \\ 0.0140924 & 0.00672885 & 0.0436079 & 0.0483166 & 0.505448 & -0.852992 & -0.0359310 & -0.105557 \\ -0.00550391 & -0.00254801 & -0.0134708 & -0.0129808 & -0.0346109 & -0.132330 & -0.219278 & 0.965813 \\ -0.0195798 & 0.999688 & 0.00808319 & 0.00494227 & 0.00467632 & 0.0103911 & 0.00141837 & 0.00461665 \\ -0.0179993 & -0.00982735 & 0.993179 & 0.0759253 & 0.0362839 & 0.0723731 & 0.00873980 & 0.0279440 \\ 0.0187930 & 0.00908147 & 0.0646317 & 0.0778222 & -0.860197 & -0.487403 & -0.0341410 & -0.103277 \\ -0.00300060 & -0.00139197 & -0.00744911 & -0.00722915 & -0.0199817 & -0.0796586 & 0.974324 & 0.209405 \end{bmatrix},$$

que é a matriz com os autovetores de $\Lambda_{12} + \rho z z^t$.

Agora, realizando o produto

$$R \times SP = \begin{bmatrix} 0.517727 & 0.0127376 & 0.0657573 & -0.815033 & -0.154546 & 0.184524 & 0.0227711 & -0.0688206 \\ -0.724337 & -0.0148962 & -0.00733298 & -0.276496 & -0.264764 & 0.457206 & 0.0987562 & -0.331225 \\ 0.428922 & 0.00606536 & -0.0306365 & 0.429741 & -0.0833295 & 0.359862 & 0.178075 & -0.679856 \\ -0.149149 & 0.00502383 & 0.0631158 & -0.250384 & 0.396730 & -0.614942 & 0.0863996 & -0.606649 \\ 0.0254323 & -0.0600501 & -0.300856 & 0.0431887 & -0.771064 & -0.437303 & -0.303276 & -0.160043 \\ -0.0118899 & 0.187834 & 0.603705 & 0.0534604 & 0.0227889 & 0.0985404 & -0.751977 & -0.146882 \\ 0.0104636 & -0.314599 & -0.637866 & -0.0793517 & 0.376567 & 0.217556 & -0.539032 & -0.0898392 \\ -0.0131099 & 0.928276 & -0.358962 & -0.0296256 & 0.0693958 & 0.0312781 & -0.0505001 & -0.00772755 \end{bmatrix},$$

(onde R é a matriz dada por $\begin{bmatrix} Q_1 P_1 & 0 \\ 0 & Q_2 P_2 \end{bmatrix}$), obtemos a matriz composta pelos autovetores de T , que era a matriz original do problema.

5 REALIZANDO A DEFLAÇÃO

Existem casos onde devemos reduzir a ordem do problema que temos para resolver. Estes casos incluem situações em que um ou mais dos z_j são zero ou aproximadamente igual a zero e as situações em que os d_j coincidem. Nestes casos realizamos o que chamamos de deflação.

Para o método de divisão-e-conquista a deflação é uma condição preliminar para o seu funcionamento, pois caso tenhamos $d_j = d_{j+1}$, não há um intervalo onde se localize um autovalor. Precisamos realizar os testes para checar se a deflação é necessária e em seguida eliminar os elementos de D para os quais $d_k = d_{k+1}$, ou os elementos de z para os quais $z_k = 0$, tornando possível o cálculo dos autovalores.

$$\text{Tomemos } D + \rho z z^t = \tilde{D}.$$

Vejamos como podemos reduzir o problema dado para problemas menores onde todos os z_j são não-nulos e todos d_j são distintos.

Caso 1. Quando $z_j = 0$, temos $[(D + \rho z z^t) q]_j = d_j q_j$, isto quer dizer que, a j -ésima componente de $\tilde{D}q$ é $d_j q_j$. Isto é, se escolhermos q como sendo e_j , percebemos que e_j é um autovetor, com d_j como seu autovalor associado.

Caso 2. Quando $d_j = d_{j+1}$, aplicando uma rotação de Givens na posição $(j, j + 1)$ para a matriz D , esta matriz não será modificada por ela. Isto acontece pelo fato de estarmos aplicando uma combinação de senos e cossenos para dois elementos que tem o mesmo valor. Temos então

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} (c^2 + s^2)d & -scd + scd \\ -scd + scd & (c^2 + s^2)d \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

Escolhemos uma rotação J tal que a $(j+1)^{\text{a}}$ componente de D será transformada em zero quando aplicamos J . Portanto, c e s são tais que $cz_{j+1} - sz_j = 0$. Desta maneira, reduzimos o problema ao caso 1, ou seja, sempre que temos dois d_j iguais podemos fazer um dos elementos correspondentes de z se transformar em zero sem alterar D . Podemos então, utilizar o $(j+1)^{\text{o}}$ autovetor como sendo e_{j+1} e o autovalor associado como sendo d_{j+1} .

Depois de identificarmos que um ou ambos os casos ocorrem, e realizarmos as rotações necessárias para zerar os elementos de z envolvidos, os elementos nulos de z são transladados para o fim do vetor. Os elementos correspondentes de D são então deslocados, da mesma maneira que os z' s. Continuamos então, a trabalhar com a parte superior de \tilde{D} , no qual todos z'_j s são não-nulos e os d'_j s são todos distintos.

Existe um terceiro caso que pode ocorrer, que é quando $|z_j| = 1$ para algum j . Como nós normalizamos z tal que $\|z\| = 1$, todos os outros z_k são zero e então estamos reduzidos ao caso 1. Aqui o problema pode ser imediatamente resolvido, sendo que os autovalores são os próprios d_k com os autovetores e_k , exceto o j^{o} autovalor λ_j que é igual a $d_j + \rho$, com correspondente autovetor e_j (ver Observação 5.1).

Observação 5.1 $(D + \rho z z^t)e_j = d_j e_j + \rho z z^t e_j = d_j e_j + \rho z z_j = d_j e_j + \rho z_j z = d_j e_j + \rho z = d_j e_j + \rho e_j = (d_j + \rho)e_j$

Lembrando que as operações referidas neste texto são, em ordem, as rotações e as subseqüentes permutações para assegurar que os z_i 's não nulos apareçam no topo do vetor z e os distintos d_i 's no canto superior esquerdo da matriz D , efetivamente calculamos o auto-sistema de

$$\Pi^t J^t (D + \rho z z^t) J \Pi, \quad (5.1)$$

onde J representa o produto das matrizes de rotação e Π representa o produto das permutações.

A autodecomposição de (5.1) é dada por

$$\Pi^t J^t (D + \rho z z^t) J \Pi = \check{X} \Lambda \check{X}^t \quad (5.2)$$

e como o que desejamos é a decomposição para $D + \rho z z^t$, escrevemos:

$$D + \rho z z^t = J \Pi \check{X} \Lambda \check{X}^t \Pi^t J^t. \quad (5.3)$$

Isto significa que depois de calcular os autovetores de (5.1), precisamos pré-multiplicar a matriz de autovetores \check{X} por $J \Pi$ para obter os autovetores de \tilde{D} .

Observamos por meio de um exemplo numérico o desenvolvimento do método para o caso onde deve ocorrer deflação:

Seja T uma matriz tridiagonal simétrica, com dimensão $n = 6$, onde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

realizando os cálculos semelhantes aos do exemplo da matriz (3.1) encontramos a matriz:

$$D12 = \begin{bmatrix} 0.198062267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.554958134 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.246979605 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.198062264 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.554958132 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.246979604 \end{bmatrix}$$

a qual depois de organizada fica

$$D12_{org} = D = \begin{bmatrix} 0.198062267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.198062264 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.554958134 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.554958132 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.246979605 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.246979604 \end{bmatrix}$$

donde percebe-se que $d_1 \approx d_2$; $d_3 \approx d_4$ e $d_5 \approx d_6$, ocorrendo assim, o caso 2.

Obtemos, depois dos cálculos adequados o vetor:

$$z1 = \begin{bmatrix} -0.5211208890 \\ 0.4179065059 \\ 0.2319206139 \\ 0.5211208890 \\ -0.4179065056 \\ 0.2319206139 \end{bmatrix}$$

o qual depois de organizado de acordo com as modificações dos $d's$, para que os elementos da matriz D ficassem em ordem crescente, resulta:

$$z = \begin{bmatrix} 0.5211208890 \\ -0.5211208890 \\ -0.4179065059 \\ 0.4179065056 \\ 0.2319206139 \\ 0.2319206139 \end{bmatrix}$$

Sobre os vetores realizamos as rotações de Givens devidas. Obtemos as matrizes de rotação G_1 , G_2 e G_3 , sucessivamente.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.7071067814 & -0.7071067814 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071067814 & 0.7071067814 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando G_1 pelo vetor z , observamos que zeramos o 2º elemento de z .

$$G_{1z} = \begin{bmatrix} 0.7369762290 \\ 0 \\ -0.4179065059 \\ 0.4179065056 \\ 0.2319206139 \\ 0.2319206139 \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação que zera z_4 é

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071067814 & -0.7071067809 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071067809 & 0.7071067814 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com efeito, multiplicando G_2 por z , observamos que zeramos o 4^o elemento de z .

$$G_{2z} = \begin{bmatrix} 0.7369762290 \\ 0 \\ -0.5910090482 \\ 0 \\ 0.2319206139 \\ 0.2319206139 \end{bmatrix}$$

E a última matriz de rotação

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071067814 & 0.7071067814 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7071067814 & 0.7071067814 \end{bmatrix}$$

Multiplicando G_3 por z , vemos que zeramos o último elemento de z .

$$G_{3z} = \begin{bmatrix} 0.7369762290 \\ 0 \\ -0.5910090482 \\ 0 \\ 0.3279852776 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando o produto das rotações $G_3G_2G_1$, obtemos a matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0.7071067814 & -0.7071067814 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071067814 & 0.7071067814 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071067814 & -0.7071067809 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071067809 & 0.7071067814 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071067814 & 0.7071067814 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7071067814 & 0.7071067814 \end{bmatrix},$$

que multiplicada pelo vetor z nos fornece como resultado o vetor

$$\begin{bmatrix} 0.7369762290 \\ 0 \\ -0.5910090482 \\ 0 \\ 0.3279852776 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

que é, claramente, o mesmo vetor obtido pelas multiplicações sucessivas.

Neste momento do processo, os elementos são deslocados para o final do vetor z , por meio das matrizes de permutação:

$$elem_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad elem_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O produto das matrizes de permutação ($elem_2 \times elem_1$) resulta na matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que ao multiplicar o vetor (5.4) transporta os elementos nulos para o fim do vetor z , denominados por nós neste momento $M1$:

$$z = M1 = \begin{bmatrix} 0.7369762290 \\ -0.5910090482 \\ 0.3279852776 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Colocamos os elementos da matriz D ordenados de acordo com o vetor (5.5) e obtemos a matriz

$$D12_{orgf1} = \begin{bmatrix} 0.198062267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.554958134 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.246979605 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.554958132 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1980622644 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.246979604 \end{bmatrix}.$$

Com isto, sabemos que:

para $z_4 = z_5 = z_6 = 0$, temos os autovalores e autovetores:

$$\lambda_4 = 1.554958132 \text{ e } e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t,$$

$$\lambda_5 = 0.1980622644 \text{ e } e_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t,$$

$$\lambda_6 = 3.246979604 \text{ e } e_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$$

e para os z 's restantes (z_1, z_2 e z_3), utilizamos o processo da solução da EQUAÇÃO SECULAR.

Os d 's e os z 's que correspondem à parte superior esquerda da matriz \tilde{D} , com os quais continuamos nosso trabalho são

$$d1f_1 = 0.198062267, d2f_1 = 1.554958134, d3f_1 = 3.246979605, z1f = 0.7369762290, z2f = -0.5910090482 \text{ e } z3f = 0.3279852776$$

Formamos, assim, a matriz

$$DDf = \begin{bmatrix} 0.198062267 & 0 & 0 \\ 0 & 1.554958134 & 0 \\ 0 & 0 & 3.246979605 \end{bmatrix}$$

e o vetor

$$zzf = \begin{bmatrix} 0.7369762290 \\ -0.5910090482 \\ 0.3279852776 \end{bmatrix},$$

com os quais encontramos os autovalores e autovetores da matriz 5.1, com $1 \leq i \leq 3$.

Os autovalores e autovetores obtidos são:

$$\lambda_1 = 0.7530203988 \text{ e } q_1 = \begin{bmatrix} -0.8711192400 \\ -0.4834347064 \\ 0.08626792453 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2.445041869 \text{ e } q_2 = \begin{bmatrix} -0.3876845339 \\ 0.7848513157 \\ 0.4834347059 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3.801937737 \text{ e } q_3 = \begin{bmatrix} -0.3014166092 \\ 0.3876845336 \\ -0.8711192399 \end{bmatrix}$$

Utilizamos q_1, q_2, q_3, e_4, e_5 e e_6 para formar a matriz

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} -0.8711192400 & -0.3876845338 & -0.3014166092 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4834347064 & 0.7848513150 & 0.3876845336 & 0 & 0 & 0 \\ 0.08626792453 & 0.4834347067 & -0.8711192399 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas colunas são os autovetores da matriz (5.1). Esta matriz de autovetores é então pré-multiplicada por $J\Pi$ para obtermos os autovetores da matriz $D + \rho zz^t$, onde os elementos de D estão ordenados. Esta multiplicação resulta na matriz

$$U = \begin{bmatrix} -0.6159743220 & -0.2741343629 & -0.2131337284 & 0 & 0.7071067814 & 0 \\ 0.6159743220 & 0.2741343629 & 0.2131337284 & 0 & 0.7071067814 & 0 \\ -0.3418399590 & 0.5549736868 & 0.2741343626 & 0.7071067814 & 0 & 0 \\ 0.3418399593 & -0.5549736872 & -0.2741343628 & 0.7071067809 & 0 & 0 \\ 0.06100063445 & 0.3418399595 & -0.6159743219 & 0 & 0 & -0.7071067814 \\ 0.06100063445 & 0.3418399595 & -0.6159743219 & 0 & 0 & 0.7071067814 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz de permutação que ordenou os elementos de D , realizamos o produto:

$$P^t \times U = Av = \begin{bmatrix} 0.6159743220 & 0.2741343630 & 0.2131337284 & 0 & 0.7071067814 & 0 \\ 0.3418399593 & -0.5549736877 & -0.2741343628 & 0.7071067809 & 0 & 0 \\ 0.06100063445 & 0.3418399589 & -0.6159743219 & 0 & 0 & -0.7071067814 \\ -0.6159743220 & -0.2741343630 & -0.2131337284 & 0 & 0.7071067814 & 0 \\ -0.3418399590 & 0.5549736873 & 0.2741343626 & 0.7071067814 & 0 & 0 \\ 0.06100063445 & 0.3418399589 & -0.6159743219 & 0 & 0 & 0.7071067814 \end{bmatrix},$$

sendo esta a matriz com os autovetores da matriz $D + \rho z z^t$ com os elementos de D antes de serem ordenados (estamos revertendo o processo para chegarmos nos autovetores da matriz original).

Finalmente obtemos os autovetores de T que são as colunas da matriz

$$= \begin{matrix} & & Q_{12} \times Av & & & \\ \left[\begin{array}{cccccc} -0.4179065063 & 0.5211208891 & -0.2319206142 & -0.5211208887 & -0.2319206141 & -0.4179065062 \\ 0.5211208891 & 0.2319206136 & -0.4179065059 & 0.2319206138 & 0.4179065058 & -0.5211208890 \\ -0.2319206138 & -0.4179065065 & -0.5211208892 & 0.4179065058 & -0.5211208892 & -0.2319206139 \\ -0.2319206142 & -0.4179065060 & -0.5211208890 & -0.4179065059 & 0.5211208893 & 0.2319206139 \\ 0.5211208891 & 0.2319206138 & -0.4179065060 & -0.2319206141 & -0.4179065058 & 0.5211208893 \\ -0.4179065058 & 0.5211208890 & -0.2319206141 & 0.5211208892 & 0.2319206138 & 0.4179065061 \end{array} \right. & , \end{matrix}$$

onde Q_{12} era a matriz formada pelos autovetores de T_1 e T_2 da partição inicial.

Lembramos que os autovalores de T são os autovalores de $D + \rho z z^t$ dados por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ e λ_6

Mostramos na figura (5.1) as funções $(-\Psi)$ e $(1 + \Phi)$ e as posições de t_0 e μ_i para $i = 2$.

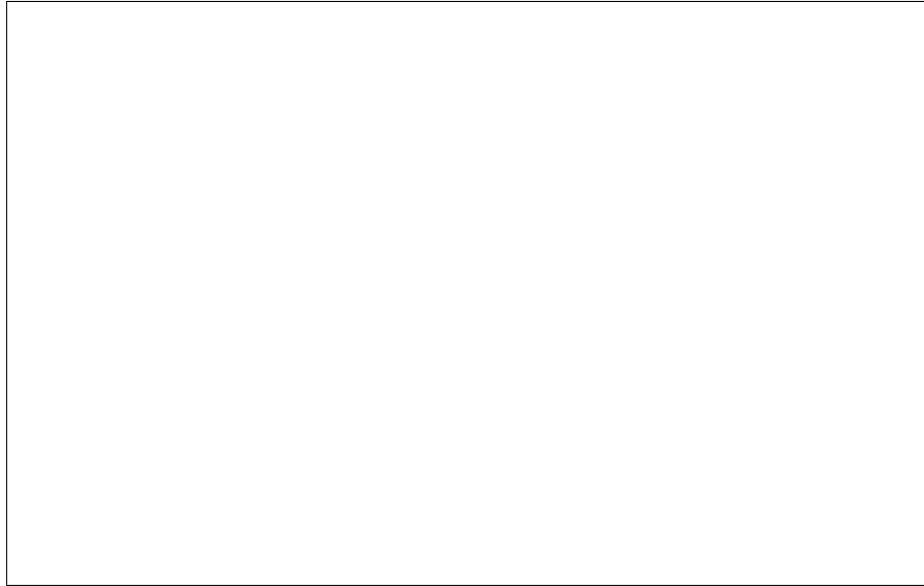


Figura 5.1: Representação do μ_2

6 TEORIA X PRÁTICA

Como estamos trabalhando com precisão aritmética finita, ao realizar o cálculo dos autovalores da matriz (3.7), podemos nos deparar com o fato de um autovalor λ ser igual a uma entrada da matriz D , ou seja, existe a possibilidade de

1. $\lambda_i = d_i$

ou

2. $\lambda_i = d_{i+1}$,

(o que por hipótese não poderia ocorrer).

Nos dois casos teremos divisão por zero no cálculo do autovetor correspondente, nas entradas i e $i + 1$ respectivamente. Vejamos:

Como vimos anteriormente, na solução da equação secular, tal equação é transformada de tal modo que não calculamos λ diretamente, mas calculamos as raízes μ_j através da equação (3.11).

Tomemos como exemplo a matriz tridiagonal T , de dimensão $n = 20$, onde a diagonal principal é o vetor

$$d_p = \begin{bmatrix} 0.6721 & 0.8381 & 0.0196 & 0.6813 & 0.3795 & 0.8318 & 0.5028 & 0.7095 & 0.4289 & 0.3046 \\ 0.1897 & 0.1934 & 0.6822 & 0.3028 & 0.5417 & 0.1509 & 0.6979 & 0.3784 & 0.8600 & 0.8537 \end{bmatrix}^t$$

e as diagonais superior e inferior são formadas pelo vetor

$$d_s = \begin{bmatrix} 0.6946 & 0.6213 & 0.7948 & 0.9568 & 0.5226 & 0.8801 & 0.1730 & 0.9797 & 0.2714 & 0.2523 \\ 0.8757 & 0.7373 & 0.1365 & 0.0118 & 0.8939 & 0.1991 & 0.2987 & 0.6614 & 0.2844 \end{bmatrix}^t$$

$d'_i s$	$\lambda'_i s$
-0.9764215942	-0.974950864
-0.9749507979	-0.8983274882
-0.5898127497	-0.5898125966
-0.5295892310	-0.5118173803
-0.3876998443	-0.3812628767
-0.1754023408	-0.1754023311
-0.03643617114	-0.03180492410
0.1153889381	.1992006977
0.2272731182	0.3099985816
0.3795019248	0.3798645809
0.4262081939	0.5990340257
0.6494546995	0.6494585004
0.8566978702	0.8566980606
1.284694521	1.284696215
1.358569972	1.358858864
1.438704735	1.457002834
1.457003538	1.489435222
1.564460531	1.569909678
1.669386800	1.670833289
1.957267891	1.957287914

Tabela 6.1: $d'_i s$ e $\lambda'_i s$ de $T_{20 \times 20}$

realizamos os cálculos apropriados e encontramos os $d'_i s$ e os $\lambda'_i s$ (ver tabela 6.1) sendo, respectiva e ordenadamente:

Estudos feitos por outros autores comprovaram que o caso 2 acontece para determinadas matrizes de ordem maior do que as apresentadas por nós, neste texto. Por termos optado em trabalhar com o MAPLE, realizado nosso trabalho em um ambiente windows e os cálculos, em sua maioria, terem sido efetuados em um PC K7 com 20 giga de memória no disco rígido, ou em máquinas semelhantes, ficamos um tanto quanto limitados com relação à possibilidade de explorar matrizes de ordem superior. O máximo que conseguimos explorar foi uma matriz de ordem 60 x 60 (Ver 6.1), além disto, não conseguimos aplicar os cálculos.

Para podermos mostrar o funcionamento do método no caso 2, pelas limitações apresentadas por nossa ferramenta de trabalho, faremos uso de um ar-

tífico. Para fins de comparação utilizamos somente as 5 primeiras casas decimais, desprezando as seguintes. Com esta restrição consideramos $\lambda_1 = d_2$, $\lambda_3 = d_3$, $\lambda_6 = d_6$ e $\lambda_{16} = d_{17}$.

Observação 6.1 *Realizamos trabalhos com uma matrix tridiagonal, simétrica T , com dimensão $n=60$, onde a diagonal principal é dada pela seqüência numérica abaixo:*

0.4274196691, 0.3211106933, 0.3436330737, 0.4742561436, 0.5584587190,
 0.7467538305, 0.03206222209, 0.7229741218, 0.6043056139, 0.7455800374, 0.2598119527,
 0.3100754872, 0.7971794905, 0.03916959416, 0.08843057167, 0.9604988341, 0.8129204579,
 0.4537470195, 0.6440313953, 0.9206249473, 0.9510535301, 0.1464863072, 0.1555907635,
 0.4293926737, 0.5254285110, 0.2726006090, 0.2197600994, 0.6759829338, 0.8454735095,
 0.6764707883, 0.2813387792, 0.7924959004, 0.7512095393, 0.6283634430, 0.3137460865,
 0.005862664913, 0.07481365622, 0.6438424438, 0.1319057546, 0.6720753584, 0.1355371088,
 0.9916381555, 0.4526108743, 0.7428672314, 0.5025423084, 0.1990536756, 0.8252407886,
 0.9918985673, 0.1168817937, 0.3408077283, 0.7953943013, 0.6294798705, 0.7364509840,
 0.4015947059, 0.1783149062, 0.9148251370, 0.2813148623, 0.4541007452, 0.7690344101,
 0.08070311130

e as diagonais inferior e superior são dadas pela seqüência:

0.6051271146, 0.5529212099, 0.8915152425, 0.6203248281, 0.9128542275,
 0.5257179814, 0.4474735703, 0.9814915278, 0.4134495688, 0.9929875004, 0.1576275111,
 0.8824993768, 0.3390628902, 0.06591260313, 0.1195215895, 0.5741575138, 0.1506509050,
 0.5534087482, 0.08281598493, 0.3596322699, 0.6815858095, 0.7097397385, 0.2311042480,
 0.6938047101, 0.1883026555, 0.01081886648, 0.05431078818, 0.5421364074, 0.1062056055,
 0.6872239468, 0.02581224202, 0.1210225739, 0.6652889683, 0.09739641495, 0.7804227316,
 0.9877856403, 0.6741982728, 0.1340503658, 0.7548695826, 0.1408108569, 0.3478777048,
 0.4335992295, 0.8987248808, 0.4855318020, 0.2550506145, 0.9529224743, 0.6420653296,
 0.1549126680, 0.8560694385, 0.6814076415, 0.9629177911, 0.8741669464, 0.9059502929,
 0.5495528887, 0.08412584224, 0.06706054127, 0.6217577345, 0.2235759057, 0.2735740995

Notamos que com esta nova formulação, a i^{a} entrada diagonal de $D-\mu I$ é diferente de zero, não havendo assim, problema no cálculo de q_i mesmo que λ_i e d_i tenham valores numéricos idênticos.

Para o nosso exemplo, quando $i = 3$, temos a matriz

$$D = \text{diag}(-0.7661743841, 0.7632580262, 0, 0.1193435771, 0.4005353859, \\ 0.8212643678, 1.096658401, 1.397540504, 1.619268962, 1.920951099, 2.013512077, \\ 2.455925486, 2.866627031, 3.714823623, 3.861236568, 4.020045055, 4.056302021, \\ 4.269263835, 4.477203329, 5.047716788)$$

e $\mu_3 = 0.3004097313e^{-6} \times 10^{-6}$. Assim encontramos $\lambda_3 = d_3 + \rho \times \mu_3 = -0.5898125981$, conseguindo assim o terceiro autovalor da matriz T . Usando a expressão (6.2) calculamos o autovetor correspondente obtendo

$$\begin{bmatrix} 0.00002510486945 & -0.00004560910199 & 0.00007675493977 & -0.00002319864432 & -0.00003293979941 \\ 0.0001035693338 & -0.0001477341728 & 0.0004061528406 & -0.0005125654524 & 0.0004578022711 \\ -0.001071552105 & 0.0008219533442 & 0.0003995585618 & -0.008163152130 & 0.6128807505 \\ -0.7756862755 & 0.1341360601 & -0.06123052658 & 0.02905613542 & -0.005724621937 \end{bmatrix}^t$$

Para $i = 6$ temos a matriz

$$D = \text{diag}(1.587438752, 1.584522394, 0.8212643678, 0.7019207907, -0.4207289820, \\ 0, 0.2753940327, 0.5762761358, 0.7980045941, 1.099686732, 1.192247709, \\ 1.634661118, 2.045362663, 2.893559255, 3.039972200, 3.198780688, 3.235037654, \\ 3.447999467, 3.655938962, 4.226452420)$$

e $\mu_6 = 0.1963728742e^{-7} \times 10^{-7}$. Assim encontramos $\lambda_6 = d_6 + \rho \times \mu_6 = -0.1754023309$, conseguindo assim o sexto autovalor da matriz T . Usando a expressão (6.2) calculamos o autovetor correspondente

$$\begin{bmatrix} 0.00001838537786 & -0.00002243249002 & 0.00001603870109 & 0.00001360060318 & -0.00002550083213 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.000002176338141 & 0.00001265166129 & -0.00006066908559 & 0.00005256439300 & 0.0001019633050 \\ -0.0002505285835 & 0.00007507508855 & 0.0002600028080 & -0.002039062611 & 0.07962661642 \\ -0.06385095634 & -0.2528554461 & 0.7818278387 & -0.5404447437 & 0.1493558822 \end{bmatrix}^t$$

6.2 $\lambda_i = d_{i+1}$

Para o caso 2, ou seja, quando $\lambda_i = d_{i+1}$ ou $\mu_i = \delta_{i+1}$, isto é, quando $\lambda_1 = d_2$ e $\lambda_{16} = d_{17}$, teremos um confronto com uma divisão por zero na $(i+1)^a$ posição do i^o autovetor. A idéia agora, é calcular a raiz começando por d_{i+1} e não em d_i . Neste caso, procuramos uma raiz ν tal que $\lambda_i = d_{i+1} + \rho\nu$, onde consideramos um ν negativo. A notação ν representa as raízes da EQUAÇÃO SECULAR, bem como a notação anterior μ . A mudança na notação foi utilizada a fim de estabelecermos distinção entre elas.

Redefinimos $\delta_j = (d_j - d_{i+1})/\rho$. A $(i+1)^a$ posição do i^o autovetor, que é onde ocorria problema, é agora dada por

$$\frac{z_{i+1}}{\delta_{i+1} - \nu} = \frac{z_{i+1}}{-\nu}, \text{ que representa um cálculo sem dificuldades, pois não há mais divisão por zero.}$$

A i^a entrada também pode ser calculada sem problemas, pois $\delta_i - \nu = (d_i - d_{i+1} - \rho\nu)/\rho = (d_i - (d_{i+1} + \rho\nu))/\rho$ e como na prática, $d_{i+1} + \rho\nu$ é idêntico ao d_{i+1} e $d_i \neq d_{i+1}$ (assegurado pela deflação), não temos uma divisão por zero.

6.2.1 Como encontrar ν

No método para encontrar ν (ver [1]), calculamos um número real negativo ν tal que $\lambda_i = d_{i+1} + \rho\nu$ e chamando, de forma geral,

$$\tilde{\delta}_j = \frac{d_j - d_{i+1}}{\rho}, \quad (6.3)$$

temos $\tilde{\delta}_i < \nu < 0 = \tilde{\delta}_{i+1}$ e $\tilde{\delta}_j - \nu < \tilde{\delta}_j - \tilde{\delta}_i < 0$, para $j < i$.

Para $j > i$, a relação de desigualdade entre $\tilde{\delta}_j - \nu$ e $\tilde{\delta}_j - \tilde{\delta}_i$ continua, mas desta vez ambas quantidades são positivas.

Definimos $\tilde{\Psi}$ e $\tilde{\Phi}$ como:

$$\tilde{\Psi}(t) \equiv \sum_{j=1}^i \frac{z_j^2}{\tilde{\delta}_j - t} \quad (6.4)$$

$$\tilde{\Phi}(t) \equiv \sum_{j=i+1}^n \frac{z_j^2}{\tilde{\delta}_j - t} \quad (6.5)$$

Realizando cálculos apropriados e combinando termos (ver ([1])), conseguimos:

$$\tilde{k} = 1 + \sum_{j=1; j \neq i, i+1}^n \frac{z_j^2}{\tilde{\delta}_j - \tilde{\delta}_i} \quad (6.6)$$

podendo, assim determinar a raiz que devemos escolher.

Para o nosso exemplo, quando $i = 1$, temos a matriz diagonal, formada pelos $\tilde{\delta}_j$ (ver 6.3)

diag(- 0.002916357907, 0, 0.7632580262, 0.8826016033, 1.163793412, 1.584522394, 1.859916427, 2.160798530, 2.382526988, 2.684209126, 2.776770103, 3.219183512, 3.629885057, 4.478081649, 4.624494594, 4.783303082, 4.819560048, 5.032521861, 5.240461356, 5.810974814)

e o $\nu_1 = -0.1132541762e^{-6}$. Assim encontramos $\lambda_1 = d_2 + \rho \times \nu_1 = -0.9749508550$, conseguindo assim o primeiro autovalor da matriz T . Usando a expressão (6.2) calculamos o autovetor correspondente

$$\begin{bmatrix} -0.1026266967 & 0.2433506895 & -0.5954010490 & 0.5548098123 & -0.4658021217 \\ 0.1914735047 & -0.1164830457 & 0.02090802186 & -0.01537916517 \\ 0.004076875893 & -0.004132638104 & 0.004321664301 & -0.001939869172 & 0.0002072616870 \\ -0.000003092419748 & 0.000002510829709 & -0.0000003139320722 \\ 0.00000008455025800 & -0.00000003122853758 & 0.000000004856819453 \end{bmatrix}^t.$$

Para $i = 16$ temos a matriz, com os elementos $\tilde{\delta}_j$, sendo:

diag(- 4.822476405, -4.819560048, -4.056302021, -3.936958444, -3.655766635,
 -3.235037654, -2.959643621, -2.658761518, -2.437033060, -2.135350922,
 -2.042789945, -1.600376536, -1.189674990, -0.3414783987, -0.1950654538,
 -0.03625696591, 0, 0.2129618133, 0.4209013080, 0.9914147662)

e $\nu_{16} = -0.1399516349e^{-5} \times 10^{-5}$. Assim encontramos $\lambda_{16} = d_{17} + \rho \times \nu_{16} = 1.457002832$, conseguindo assim o décimo sexto autovalor da matriz T . Usando a expressão (6.2) calculamos o autovetor correspondente

$$\begin{bmatrix} 0.0001190257559 & 0.0001344993261 & 0.000000911392530 & -0.0001034906846 & -0.00008465930748 \\ 0.00001492449939 & 0.00006087233383 & 0.0002598224624 & 0.0001874922861 & -0.0002276616810 \\ -0.001241483923 & -0.001731037740 & -0.001492145533 & 0.0008805337860 & 0.1033893641 \\ 0.1058532135 & 0.2302131046 & 0.5144963004 & 0.7350657864 & 0.3465137219 \end{bmatrix}^t$$

7 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DIVISÃO-E-CONQUISTA E QR

Para podermos realizar testes numéricos com a utilização de matrizes de ordens bem maiores do que àquelas que solucionamos com o uso do Maple, fizemos uso das rotinas DSTEDC e DSTEQR, do LAPACK, com as quais pudemos encontrar os auto-sistemas procurados. Para a utilização destas rotinas necessitamos da linguagem de programação FORTRAN.

Utilizamos os exemplos desenvolvidos por nós, com a utilização do Maple nos capítulos anteriores, para estabelecermos comparações e verificarmos a resolução de seus auto-sistemas. Verificamos que as soluções encontradas por nós e pelas rotinas do LAPACK, tanto pela rotina que utiliza o método de divisão-e-conquista (DSTEDC), quanto pela rotina que utiliza o método QR(DSTEQR) são iguais.

Como ilustração apresentamos na tabela 7.1 os autovalores e respectivos autovetores da matriz $T_{4 \times 4}$, capítulo 3, encontrados tanto pela rotina do DSTEDC como pela rotina do DSTEQR.

Efetuada a solução do auto-sistema da matriz $T_{6 \times 6}$ do capítulo 5, tanto pela rotina do DSTEDC, como pela rotina do DSTEQR encontramos os autovalores e autovetores que podem ser verificados na tabela 7.2, que são os mesmos valores encontrados por nós.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
-5.547766126920	0.135118053045	8.120822678077	14.291825395798
q_1	q_2	q_3	q_4
-.087101742077	-.616307166952	.781003207277	.051115092830
.229682201169	.749565402570	.609343130230	.118738129416
-.807431385401	.158906138960	-.001837354547	.568154926934
.536389719200	-.181840650665	-.136863304043	.812704425304

Tabela 7.1: Matriz $T_{4 \times 4}$ resolvido pelas rotinas DSTEDC e DSTEQR

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
.19806226	. 75302039	1.55495813	2.44504187	3.246979604	3.801937736
q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
.231920614	-.417906506	-.521120889	.521120889	-.417906506	.231920614
-.417906506	.521120889	.231920614	.231920614	-.521120889	.417906506
.521120889	-.231920614	.417906506	-.417906506	-.231920614	.521120889
-.521120889	-.231920614	-.417906506	-.417906506	.231920614	.521120889
.417906506	.521120889	-.231920614	.231920614	.521120889	.417906506
-.231920614	-.417906506	.521120889	.521120889	.417906506	.231920614

Tabela 7.2: Matriz $T_{6 \times 6}$, resolvido pelas rotinas DSTEDC e DSTEQR

$T_{100 \times 100}$	$T_{200 \times 200}$	$T_{400 \times 400}$
Tempos em segundos		
0, 11	0, 11	0, 28
0, 06	0, 11	0, 22
0, 05	0, 11	0, 22
0, 05	0, 09	0, 22
0, 05	0, 11	0, 22
0, 06	0, 11	0, 22
0, 06	0, 17	0, 22

Tabela 7.3: Tempos obtidos com a rotina DSTEDC

Com a utilização de exemplos de matrizes de ordens maiores, apesar de encontrarmos algumas dificuldades na medida e análise do tempo que as rotinas mencionadas levam para efetivar a solução dos auto-sistemas, conseguimos por meio de alguns testes efetuados, perceber, que o método de divisão-e-conquista é mais rápido que a rotina QR.

Para realizarmos os testes, utilizamos as matrizes $T_{100 \times 100}$, $T_{200 \times 200}$ e $T_{400 \times 400}$, as quais apresentam como entradas da diagonal principal $d_i = 2$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e as entradas das diagonais inferior e superior $e_j = 1$, para $j = 1, 2, \dots, (n - 1)$, obtendo os resultados que podem ser constatados nas tabelas (7.3) e (7.4). Realizamos alguns testes para verificação dos tempos de execução das rotinas DSTEDC e DSTEQR, onde algumas oscilações foram encontradas nos tempos. Estas oscilações podem ser atribuídas à diversos fatores, entre eles, por exemplo o partilhamento de máquina e a utilização do sistema.

Percebemos nos resultados das tabelas (7.3) e (7.4) que realmente, pelo menos para os exemplos testados, a nossa expectativa de que o método de divisão-e-conquista

$T_{100 \times 100}$	$T_{200 \times 200}$	$T_{400 \times 400}$
Tempos em segundos		
0,38	2,15	16,1
0,38	2,19	15,6
0,38	2,09	15,49
0,39	2,14	15,93
0,38	2,08	15,60
0,38	2,09	15,55
0,33	2,14	15,43

Tabela 7.4: Tempos obtidos com a rotina DSTEQR

fosse mais rápido que o QR se concretizou. Necessitamos e pretendemos continuar as análises com respeito a esta situação, pois cremos ser este um diferencial muito importante na defesa da utilização do método por nós estudado.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O nosso trabalho tratou da solução do auto-sistema de matrizes tridiagonais simétricas, que pode ser aplicado, por exemplo, no fornecimento de informações críticas em determinados projetos em áreas como a física e a engenharia (ver [1], [2]).

Começamos estabelecendo uma descrição do funcionamento do método de forma genérica e procuramos demonstrar numericamente seu funcionamento por meio do uso do software MAPLE.

Em nosso entender, didaticamente, o MAPLE é uma ferramenta muito útil e acessível. Serve como auxiliar na realização e na exploração de conteúdos matemáticos, em especial na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

No processo de desenvolvimento de nosso trabalho muitas situações complicadas foram superadas. No início do trabalho leituras fundamentais foram realizadas para embasamento teórico e nessas leituras fomos percebendo a necessidade de analisar mais detalhadamente qual era o procedimento do método citado.

O Maple serviu como um acessório útil e de certa forma eficaz. Dizemos "de certa forma eficaz", pois sentimos dificuldades pela existência de algumas limitações em termos de tempo de processamento, exatidão nos cálculos e representação gráfica. Por isto realizamos a execução numérica com exemplos de matrizes de dimensões "pequenas". Para que pudéssemos encontrar a solução dos auto-sistemas de matrizes de ordens maiores poderíamos ter utilizado programas escritos em determinada linguagem de programação, mas resolvemos nosso problema com a utilização da rotina DSTEDC, do LAPACK, que utiliza o método de divisão-e-conquista na resolução deste problema. Fizemos a comparação com outro método, que por nós foi só utilizado e não estudado, o QR [10].

Apesar destas limitações com o auxílio desta ferramenta conseguimos o que a princípio esperávamos, que era a compreensão do comportamento do divisão-e-conquista na solução dos auto-sistemas de matrizes simétricas.

Estudos a respeito da exatidão nas soluções dos auto-sistemas com a utilização do método, norma dos resíduos e ortogonalidade dos autovetores são pretensões para trabalhos futuros, os quais por exemplo poderiam ter como fonte bibliográfica básica os trabalhos de [7, 8, 9]. Uma análise aprofundada e reflexiva sobre a importância e seriedade da deflação também poderão ser explorados em trabalhos futuros.

Percebemos em nossa reflexão e no estudo feito que a resolução do auto-sistema de matrizes tridiagonais simétricas por meio do método dissertado se torna acessível e de determinada forma mais rápido que outros métodos existentes que resolvem o mesmo problema. Em especial aqui falamos do método QR, considerado um dos mais utilizados na resolução deste problema. Alguns testes, com determinadas matrizes foram realizadas para que tentasse se detectar alguma diferença de agilidade e rapidez no cálculo dos auto-sistemas procurados. Com estes testes, para as matrizes específicas, trabalhadas, conseguimos detectar a maior rapidez de resolução com a rotina que utiliza o método de divisão-e-conquista. Posteriormente gostaríamos de fazer mais testes para comprovar a maior rapidez do divisão-e-conquista em relação ao QR. Estudos sobre implementações já realizadas do método por nós relatado auxiliariam no aprofundamento da sua eficiência; citamos, por exemplo, a implementação de Rutter [11] do Algoritmo de Divisão-e-conquista de Cuppen.

Em anexo ao nosso trabalho apresentamos alguns dos procedimentos realizados para que se pudesse compreender mais claramente o processo na conquista dos auto-sistemas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Fachin, M. P. G., *The Divide-and-Conquer method*, Tese Doutorado, University of Kent at Canterbury, Inglaterra, 1994.
- [2] Datta, B. N., *Numerical Linear Algebra and Applications*, Northern Illinois University, 1994, 464–468.
- [3] Dotto, O. J., *apostila de auxílio às aulas de Métodos Matriciais*, UCS-Universidade de Caxias.
- [4] Bunch, J.R., Nielsen, C.P. and Sorensen, D., *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, **31**, 1978, 31–48.
- [5] Cuppen, J. J. M., *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, **36**, 1981, 177–195.
- [6] Anderson, E. *et. al.*, *LAPACK User' Guide*, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [7] Gu, M. and Eisenstat, S. C., *A stable and efficient algorithm for the rank-on modification of the symmetric tridiagonal eigenproblem*, Research Report YALEU/DCS/RR-916, Dept. of Computer Science, Yale University, September 1992.
- [8] Gu, M. and Eisenstat, S. C., *A divide-and-conquer algorithm for the symmetric tridiagonal eigenproblem*, Research Report YALEU/DCS/RR-932, Dept. of Computer Science, Yale University, November 1992.
- [9] Li, R. C., *Solving secular equations stably and efficiently*, Research Report, Department of Mathematics, University of California at Berkeley, April 1993.
- [10] Golub, G. H. and van Loan, C. F., *Matrix Computations*, 2nd Edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [11] Rutter, J. D., *A Serial Implementation of Cuppen's Divide and Conquer Algorithm for the Symmetric Eigenvalue Problem*, Department of Mathematics, University of California at Berkeley, Berkeley, CA 94720, February 1994.
- [12] Parlett, B., *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980. 94720, February 1994.

8 *Anejos*

Apresentamos a seguir alguns dos procedimentos usados, com a linguagem própria do software Maple, para a solução dos auto-sistemas das matrizes relativas aos capítulos 3, 5 e 6.