

ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS ASSIMÉTRICAS
EM CURVA COM PAREDE FINA E ABERTA
SUBMETIDAS A AÇÃO DE CARGAS MÓVEIS

GILBERTO CARBONARI

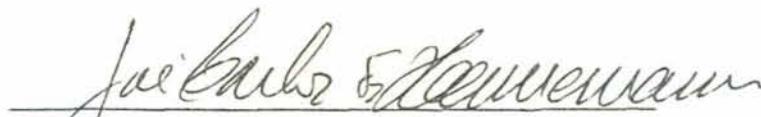
Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre
Dezembro de 1986

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil.



Prof. Jorge Daniel Riera
Orientador



Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

Jorge Daniel Riera
Ph.D. pela Princeton University

Pablo Gaston Bignon
D.Sc. pela COPPE/UFRJ

José Carlos Ferraz Hennemann
Ph.D. pela S.M.U.

Aos meus pais, Alcides e Iris Santana,
pelo incentivo, dedicação e renúncias
que fizeram para que eu pudesse ven-
cer mais uma etapa da minha caminha-
da.

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Jorge Daniel Riera pela orientação, em todos os aspectos, deste trabalho;
- ao professor José Carlos Ferraz Hennemann, coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pelo auxílio e confiança depositados ao longo do curso;
- aos colegas, eng^o Luis Carlos Prola, eng^o Julio Ernesto Pulido Súbia e eng^o Paulo Roberto do Rio de Almeida Braga, pelo incentivo incansado e amizade;
- à Berenice Martins Toralles pelo apoio psicológico e técnico na elaboração e confecção do trabalho;
- aos professores Armando Miguel Awruch e Ademar Gilberto Groehs pela colaboração dispensada;
- à Liliani Gaeveresen Mazzali pela excelente qualidade da datilografia;
- à Juliana Zart Bonilha pela dedicação no auxílio da organização datilográfica;
- à Anete Avancini pelos excelentes desenhos;
- ao CNPq pelo auxílio financeiro;
- à UFRGS e em especial ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil por proporcionar os meus estudos;
- aos colegas da área de estruturas e construção (NORIE), professores e funcionários pela convivência diária de trabalho;
- aos companheiros integrantes da equipe de futebol da Engenharia pelos momentos de lazer e descontração proporcionados, possibilitando uma maior integração com os demais cursos desta Universidade;
- a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o presente trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	viii
LISTA DE FIGURAS.....	ix
LISTA DE TABELAS.....	xvi
RESUMO.....	xvii
ABSTRACT.....	xviii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. VIGAS RETAS SUBMETIDAS A CARGAS EM MOVIMENTO.....	8
2.1. Considerações Preliminares.....	8
2.2. Viga Reta Submetida a Cargas Concentradas em Movimento.....	8
2.3. Viga Birrotulada sob Ação de Cargas de Ampli- tude Constante.....	9
2.4. Viga Birrotulada sob Ação de uma Carga Harmô- nica.....	12
2.5. Soluções Aproximadas para Vigas com Momento de Inércia Variável.....	13
3. VIBRAÇÕES INDUZIDAS EM VEÍCULOS PELA FLEXIBILIDADE DA VIA.....	15
3.1. Conceitos Básicos.....	15
3.2. Sistema de um Grau de Liberdade Vertical que Atravessa uma Viga Birrotulada: Pequenas Os- cilações.....	15
3.3. Sistema de um Grau de Liberdade Vertical que Atravessa uma Série de Vigas Birrotuladas.....	17
3.4. Sistema de um Grau de Liberdade Vertical Deslo- cando-se ao Longo de uma Viga Múltipla Imperfei- ta.....	18

3.5.	Veículo com Dois Graus de Liberdade.....	19
3.6.	Exemplos de Aplicação: Sistemas com Dois Graus de Liberdade.....	22
4.	MÉTODO NUMÉRICO UTILIZADO NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA VIGA.....	25
4.1.	Considerações Fundamentais.....	25
4.2.	Aproximação dos Operadores Diferenciais por Di- ferenças Finitas Centrais.....	26
4.3.	Aplicação do Método de Diferenças Finitas Cen- trais na Solução das Equações Diferenciais da Viga Reta de BERNOULLI, VLASOV e TIMOSHENKO.....	34
4.4.	Estudo da Estabilidade do Método de D.F.C. (Diferenças Finitas Centrais) Aplicado na Equação de BERNOULLI.....	45
5.	VIGAS CURVAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA E PAREDE FINA SUBMETIDAS A CARGAS EM MOVIMENTO.....	54
5.1.	Considerações Fundamentais.....	54
5.2.	Consideração do Amortecimento da Estrutura.....	55
5.3.	Especificação do Carregamento Externo.....	56
5.4.	Equações Diferenciais de Movimento.....	58
5.5.	Solução Numérica das Equações Diferenciais de Movimento pela Aplicação de Diferenças Fini- tas Centrais.....	62
5.6.	Consideração das Condições de Contorno da Viga para o Método de Diferenças Finitas Centrais.....	72
5.7.	Esforços Internos: Normais, Momentos Fletores e Momentos Torçores da Viga Curva.....	78
6.	DETERMINAÇÃO DE AUTOVALORES (FREQUÊNCIAS NATURAIS) E MODOS DE VIBRAÇÃO EM VIGAS CURVAS, SEÇÃO ABERTA E PA- REDE FINA.....	81
6.1.	Considerações Fundamentais.....	81
6.2.	Montagem Global do Sistema para Solução do Problema de Autovalores.....	84

6.3. Método de Solução para o Problema de Autovalores....	89
6.4. Estudos Comparativos.....	92
6.5. Sobre a Frequência Fundamental de Pontes de Concreto de Eixo Reto e Curvo.....	101
7. AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NA ANÁLISE DINÂMICA DA VIGA CURVA.....	104
7.1. Considerações Iniciais.....	104
7.2. Exemplos Comparativos.....	104
7.3. Sobre o Coeficiente de Impacto (C.M.D.) de Pon- tes de Concreto, para Diferentes Normas (Suíça, U.S.A., U.R.S.S., Suécia, R.D.A., França e Bra- sil).....	121
7.4. Considerações Finais.....	123
8. CONCLUSÕES.....	125
APÊNDICE I - ANÁLISE ESTÁTICA DE VIGAS CURVAS COM SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA E PAREDE FINA PARA CON- TORNOS ROTULADOS E ENGASTADOS.....	128
I.1 - Considerações Iniciais.....	128
I.2 - Equações Diferenciais da Viga Estática Curva.....	129
I.3 - Solução Numérica das Equações Diferenciais da Viga Estática.....	129
I.4 - Exemplos Comparativos.....	135
I.5 - Considerações Finais.....	165
BIBLIOGRAFIA.....	166

LISTA DE SÍMBOLOS

- A - área da seção transversal
- a_i - distância entre as cargas
- a_y, a_z - coordenadas do centro de flexão em relação ao centro de gravidade, tomadas ao longo dos eixos principais Y e Z, respectivamente
- BM - bimomento
- C.M.D. - Coeficiente de Majoração Dinâmico
- Ds - intervalo de espaço utilizado no método de Diferenças Finitas Centrais (D.F.C.)
- Dt - intervalo de tempo utilizado no método de D.F.C.
- Dt_{cr} - intervalo de tempo crítico que define o limite de estabilidade do método de D.F.C.
- E - módulo de Young do material (módulo de elasticidade longitudinal)
- f - frequência de vibração (Hz)
- g - aceleração da gravidade
- G - módulo de elasticidade transversal
- I_y, I_z - momentos de inércia com relação aos eixos y e z, respectivamente
- I_ω - constante de empenamento
- K_t - constante de torção de ST. VENANT
- L - comprimento do vão da viga
- m_i - massa correspondente ao eixo i do veículo
- M_t - momento torçor externo por unidade de comprimento
- M_y, M_z - momentos fletores internos com respeito aos eixos y e z, respectivamente

N	- número total de nós discretizados para o método de Diferenças Finitas Centrais
N_x	- esforço normal interno
p_r	- frequência amortecida referente ao modo r
p_x, p_y, p_z	- projeções das cargas externas nas direções x, y, z , respectivamente, por unidade de comprimento
Q_y, Q_z	- cortantes internos com respeito aos eixos y e z , respectivamente
R	- raio de curvatura da viga
s	- variável que define a coordenada espacial
t	- variável que define a coordenada temporal
T	- período de vibração
T	- momento torçor total
T_s	- momento torçor de ST. VENANT
T_θ	- momento de empenamento
$U(t-t_a)$	- função salto unitário
V	- velocidade de passagem das cargas externas
V_{cr}	- velocidade crítica
x, y, z	- coordenadas generalizadas que definem os deslocamentos nas direções axial, vertical e lateral, respectivamente
\dot{x}	- indica derivada parcial temporal da variável x
x'	- indica derivada parcial espacial da variável x
y_o	- deslocamento no centro do vão devido a uma carga concentrada P_o
y_r	- modo natural r de vibração da viga
α	- coeficiente de proporcionalidade ou constante de amortecimento
β	- coeficiente adimensional que define o intervalo de estabilidade do método de D.F.C.

- $\delta(s-Vt)$ - função de DIRAC
- ϕ_i - ângulo de fase das vibrações do eixo i do veículo
- $\lambda_{i,j}$ - autovalores do sistema
- μ - coeficiente de aderência ou atrito de rolamento
- η - coeficiente de forma da seção transversal
- ν - coeficiente de POISSON do material
- ω_r - frequência natural correspondente ao modo r (rad/seg)
- ω_n - frequência natural referente ao modo n de vibração (rad/seg)
- ω_1 - frequência fundamental da viga (rad/seg)
- Ω - frequência de oscilação da carga harmônica externa $p(t)$ (rad/s)
- ρ - massa específica do material
- θ - giro da seção transversal ao redor do centro de flexão
- ζ_r - razão de amortecimento crítico para o modo r
- τ - variável auxiliar de tempo

LISTA DE FIGURAS

1.1.1 - Seção transversal da viga com os três casos típicos de acoplamento nas vibrações.....	2
2.2.1 - Viga reta submetida à ação de cargas em movimento.....	8
3.2.1 - Sistema de 1 grau de liberdade deslocando-se através de uma viga birrotulada.....	16
3.3.1 - Veículo de um grau de liberdade sobre viga múltipla.....	17
3.5.1 - Diagrama de cargas.....	19
3.5.2 - Dimensões do veículo.....	20
3.6.1 - Resposta dinâmica da viga reta submetida à cargas móveis.....	23
4.2.1 - Discretização espacial da viga em Diferenças Finitas Centrais.....	26
4.2.2 - Retícula no plano s-t adotado na solução por meio de Diferenças Finitas Centrais.....	28
4.2.3 - Operadores de primeira ordem em Diferenças Finitas Centrais.....	30
4.2.4 - Operadores de primeira ordem em Diferenças Finitas Centrais.....	31
4.2.5 - Operadores de primeira ordem em Diferenças Finitas Centrais.....	32
4.2.6 - Operadores de primeira ordem em Diferenças Finitas Centrais.....	33

4.3.1 - Desenho esquemático da viga.....	35
4.3.2 - Discretização da viga em Diferenças Finitas Centrais.....	36
4.3.3 - Malha da viga com 3 nós em D.F.C. (N=3).....	37
4.3.4 - Malha da viga com 4 nós em D.F.C. (N=4).....	37
4.3.5 - Malha da viga com 5 nós em D.F.C. (N=5).....	38
4.3.6 - Vibrações livres da viga com 3 nós (N=3) - Dt << Dt _{ct}	40
4.3.7 - Vibrações livres da viga com 4 nós (N=4) - Dt << Dt _{cr}	41
4.3.8 - Vibrações livres da viga com 5 nós (N=5) - Dt << Dt _{cr}	42
4.4.1 - Estabilidade do método de D.F.C. para BERNOULLI.....	51
5.4.1 - Características geométricas e notação da viga curva de seção aberta e parede fina.....	59
5.5.1 - Retícula no plano s-t para solução do sistema em Diferenças Finitas Centrais.....	64
5.5.2 - Carga externa p _i em movimento sobre a viga com velocidade V.....	69
5.5.3 - Cargas externas nodais equivalentes.....	69
5.5.4 - Cargas externas nodais equivalentes por unidade de comprimento.....	70
5.6.1 - Detalhe do apoio da viga elevada pertencente a um sistema de transporte urbano.....	73
5.6.2 - Engastamento parcial da seção transversal da viga reta.....	73
5.6.3 - Condição de contorno rotulado a flexão vertical em Diferenças Finitas Centrais.....	75

5.6.4 - Condição de contorno engastado à flexão vertical em D.F.C.....	75
5.6.5 - Discretização da extremidade esquerda da viga em D.F.C.....	77
5.6.6 - Discretização da extremidade direita da viga em D.F.C.....	78
6.2.1 - Discretização espacial.....	87
6.2.2 - Matriz global de \mathbf{K}	86
6.2.3 - Contorno esquerdo rotulado.....	87
6.2.4 - Contorno esquerdo engastado.....	88
6.4.1 - Convergência na solução da viga curva biengastada.....	96
6.4.2 - Seção transversal da viga curva com um eixo de simetria (unidades: cm).....	97
6.4.3 - Viga curva, seção transversal sem eixo de simetria (unidades: cm).....	98
6.4.4 - Seção transversal do modelo da ponte.....	100
6.5.1 - Frequência fundamental f como função do vão máximo L , para 224 valores medidos; Df = desvio padrão.....	102
6.5.2 - Frequência fundamental de pontes retas e curvas em função do vão máximo L	103
7.2.1 - Viga (ponte) curva horizontal sujeita à carga em movimento com velocidade constante V	105
7.2.2 - Resposta dinâmica da viga curva: deslocamentos verticais devido a carga em movimento.....	107
7.2.3 - Valores do Fator de Impacto (C.M.D.).....	108

7.2.4 - Viga reta elevada pertencente a um sistema de transporte urbano.....	109
7.2.5 - Carregamento externo do veículo em movimento sobre a viga reta.....	110
7.2.6 - Resposta dinâmica da viga reta: deslocamentos verticais e giros.....	111
7.2.7 - Valores do Fator de Impacto (C.M.D.), função da velocidade da passagem do veículo.....	113
7.2.8 - Resposta dinâmica da viga curva: deslocamento vertical e giro no centro do vão.....	115
7.2.9 - Carregamento externo do veículo em movimento sobre a viga curva.....	116
7.2.10 - Resposta dinâmica da viga curva: deslocamentos verticais e giros no centro do vão.....	117
7.2.11 - Trens de carga utilizados como simulação do carregamento externo na viga reta.....	118
7.2.12 - Resposta dinâmica da viga reta: deslocamentos verticais no centro do vão.....	120
7.3.1 - Coeficientes de Majoração Dinâmico dados pelas diferentes normas para pontes rodoviárias: 1, 2 Suíça; 3 U.S.A.; 4 U.R.S.S.; 5 Suécia; 6, 7 R.D.A.; 8 França; 9 Brasil (NB-2).....	121
7.3.2 - Coeficientes de impacto (C.M.D.).....	122
I.3.1 - Retícula para solução do sistema em Diferenças Finitas Centrais.....	130
I.3.2 - Discretização espacial da viga em Diferenças Finitas Centrais.....	132
I.3.3 - Matriz global.....	133

I.4.1 - Viga birrotulada com carregamento estático.....	135
I.4.2 - Viga reta elevada de um sistema de transporte urbano sob carregamento estático.....	139
I.4.3 - Viga reta (A) e curva (B) com carregamento estático.....	143
I.4.4 - Viga (ponte) curva horizontal sob carregamento estático - centro do vão.....	146
I.4.5 - Valores do Fator de Impacto (C.M.D.).....	147
I.4.6 - Convergência do método de D.F.C. em função do número de nós discretizados.....	150
I.4.7 - Viga reta sob carregamento estático.....	163

LISTA DE TABELAS

4.3.1 - Freqüências fundamentais (rad/seg), conforme FIGURAS 4.3.6, 4.3.7 e 4.3.8 - $Dt \ll Dt_{cr}$	44
4.4.1 - Valores de $\beta \times 1000$ para N ímpar.....	52
4.4.2 - Valores de $\beta \times 1000$ para N par.....	52
6.4.1 - Freqüências naturais (rad/seg) da viga birro- tulada, curva, na flexo-torção.....	93
6.4.2 - Freqüências naturais (Hz) da viga reta eleva- da de um sistema de transporte urbano.....	94
6.4.3 - Freqüência natural (rad/seg), viga curva bi- engastada.....	95
6.4.4 - Freqüência natural (rad/seg), viga curva bi- engastada.....	97
6.4.5 - Efeito do centro de corte na resposta dinâmica da viga curva de seção transversal assimétrica.....	99
I.4.1 - Convergência do método de D.F.C.....	164

RESUMO

Fundamentalmente, o presente trabalho faz uma análise elástica linear de pontes ou vigas curvas assimétricas de seção transversal aberta e de parede fina, com propriedades físicas, geométricas e raio de curvatura constantes ao longo do eixo baricêntrico. Para tanto, utilizaram-se as equações diferenciais de VLASOV considerando o acoplamento entre as deformações nas direções vertical, transversal, axial de torção. Na solução do sistema de quatro equações com derivadas parciais foi utilizado um apropriado método numérico de integração (Diferenças Finitas Centrais).

A análise divide-se, basicamente, em dois tipos: análise DINÂMICA e ESTÁTICA. Ambas são utilizadas também na determinação do coeficiente de impacto (C.M.D.). A primeira refere-se tanto na determinação das características dinâmicas básicas (frequências naturais e respectivos modos de vibração), como também na determinação da resposta dinâmica da viga, em tensões e deformações, para cargas móveis arbitrárias.

Vigas com qualquer combinação das condições de contorno, incluindo bordos rotulados e engastados nas três direções de flexão e na torção, são consideradas.

Os resultados da análise teórica, obtidos pela aplicação de programas computacionais implementados em microcomputador (análise estática) e no computador B-6700 (análise dinâmica), são comparados tanto com os da bibliografia técnica como também com resultados experimentais, apresentando boa correlação.

ABSTRACT

This work deals with linear analysis of nonsymmetric curved thin-walled bridges or beams with open cross section, with physical properties, geometry and radius of curvature constant along the centroidal axis. VLASOV differential equations were used, considering the coupling between deformations along the vertical, transversal, axial and torsional directions.

The central finite difference method was used to solve the system of four partial differential equations.

Basically two analyses were performed: DINAMIC and STATIC. Both were also used to obtain the impact coefficient (C.M.D.). The first analysis refers to the determination of the basic dynamic characteristics (natural frequency and vibration modes), and the determination of the dynamic response of the beam, in stresses and deformations, for arbitrary mobile loads. Beams with any combination of the boundary conditions, including pinned or fixed ends on the three directions of torsion and bending were considered.

A comparison between the results of the theoretical analysis, produced by computer programs implemented in a microcomputer (for the static analysis) and computer B-6700 (for the dynamic analysis), and the ones given in the references and also obtained experimentally showed a good correlation.

1. INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas os engenheiros projetistas confrontaram-se com problemas para encontrar os alinhamentos das rodovias e ferrovias para cumprir as necessidades de tráfego. Esses alinhamentos eram curvos e as vezes necessitavam de estruturas em pontes curvas. Uma solução para esse problema, devido as dificuldades de análise, era utilizar pequenos segmentos retos de forma que o conjunto de pequenas cordas forme o elemento curvo desejado. Essa solução, no entanto, não seria a mais econômica e nem a mais adequada para o problema. A outra alternativa é fabricar e executar elementos curvos oferecendo, então, uma estrutura mais atrativa, em todos os aspectos. Utilizando este como elemento estrutural, por consequência, o Engenheiro deve conhecer o comportamento estrutural (estático e dinâmico) do elemento curvo, assim como, a sua interação com o sistema. Isso, entretanto, exige uma investigação de novos conceitos e uma revisão dos conhecimentos já adquiridos.

Além disso, com o crescimento populacional verificado nestes últimos anos, especialmente nos grandes centros (cidades e capitais), as dificuldades associadas com o tráfego de veículos tornaram-se cada vez mais críticas, necessitando de outras soluções, diferentes das de superfície, para suprir a demanda do transporte de pessoas, em geral. Basicamente, existem duas formas para resolver o problema: (a) por vias subterrâneas; (b) por vias elevadas. Essa última se mostra mais viável, principalmente pelo baixo custo de implantação e da facilidade e rapidez na execução. Com base nisso, os sistemas elevados de trânsito rodoviário têm sido propostos como um meio de transporte de massa em áreas urbanas. A simples via elevada é, geralmente, composta por uma série de elementos prefabricados dispostos, cada qual, sobre colunas

ou pilares¹⁵, constituindo um conjunto estrutural esbelto e flexível. Em se tratando de vãos curvos, essa flexibilidade pode se tornar crítica, acentuando ainda mais a necessidade do estudo do comportamento dinâmico da via, quando esta estiver sujeita a cargas móveis.

No estudo das vibrações acopladas⁷ em vigas de parede fina e aberta, os fatores que determinam e influenciam no tipo de acoplamento estão diretamente relacionados com: (a) as características da seção transversal (posição do centro de corte), e (b) do seu eixo baricêntrico (reto ou curvo). Se uma viga de seção transversal assimétrica está induzida a vibrar livremente, a vibração resultante é composta de ambos os efeitos de flexão e de torção. Em vigas de eixo reto esse acoplamento das vibrações de flexão e de torção ocorre sempre que o centro de corte não coincide com o centro de gravidade da seção transversal.

Considerando a situação mais geral da viga de eixo reto, as vibrações de flexão nas duas direções perpendiculares (y e z) são acopladas com as vibrações torcionais. Esse caso é chamado de "triplo acoplamento" e é ilustrado pela seção aberta mostrada na FIGURA 1.1.1(a).

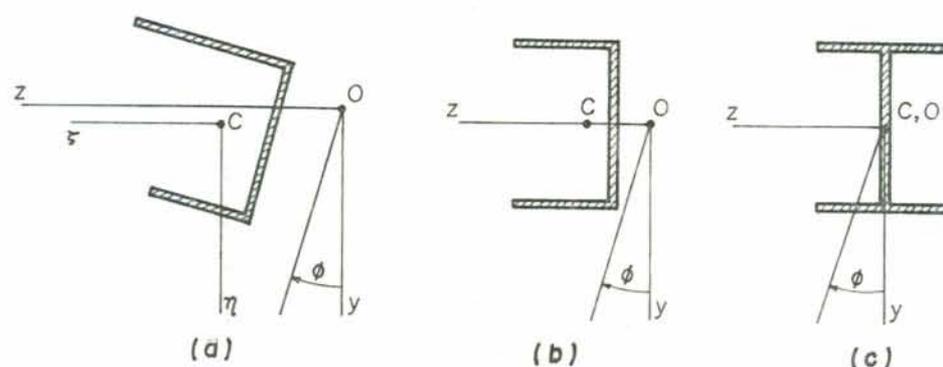


FIGURA 1.1.1 - Seção transversal da viga com os três casos típicos de acoplamento nas vibrações.

O ponto "O" representa o centro de corte e o ponto "C" o centro de gravidade.

Quando a seção transversal da viga tem um eixo de simetria, uma das vibrações de flexão é independente das outras. Esse resultado é o "duplo acoplamento" entre as outras vibrações de flexão e as vibrações torcionais, ilustrada pela seção aberta mostrada na FIGURA 1.1.1(b). As vibrações de flexão na direção "y" são acopladas com as vibrações torcionais, ao passo que na direção "z" acontecem independentemente.

Finalmente, o caso mais simples originado quando o centro de corte e o centro de gravidade são coincidentes, tal como para uma viga I com dois eixos de simetria, FIGURA 1.1.1(c). As duas vibrações de flexão e as vibrações torcionais ocorrem independentes uma das outras.

Por outro lado, considerando a viga de eixo curvo, o acoplamento das vibrações entre a flexão e a torção acontece independentemente da posição do centro de corte, ou seja, qualquer que seja a forma da seção transversal da viga, a curvatura da mesma resulta em vibrações acopladas entre a flexão vertical (direção y), horizontal (direção z), axial ou longitudinal (direção x) e torcional (direção do giro θ). Esse "quádruplo" acoplamento das vibrações em vigas de eixo curvo adicionado aos efeitos dinâmicos a que a via é submetida, devido as cargas móveis, resultam em quatro equações acopladas entre a flexão e a torção, que determinam o movimento total da estrutura. Elas foram inicialmente estudadas e definidas por VLASOV²⁵ e, posteriormente, utilizadas e aplicadas por vários autores da bibliografia técnica. Entretanto, um número reduzido de trabalhos consideraram o caso geral de acoplamento, seja pela desconsideração da assimetria da seção transversal, seja pela desconsideração da curvatura da viga, ou pela falta de recursos matemáticos e ou computacionais para a análise.

YOO e FEHREMBACH²⁶ analisaram o caso mais geral de acoplamento, considerando a viga de eixo curvo e assimétrica. Entretanto, o estudo concentrou-se apenas na determinação das frequências naturais e respectivos modos de vibração, sendo que, o sistema de equações diferenciais foi resolvido utilizando-se do método dos Elementos Finitos.

Já CHRISTIANO e CULVER³ além de estudarem o problema dinâmico de vibrações livres (frequências e modos de vibração) também analisaram a resposta dinâmica da viga devida a ação de cargas externas móveis. Apesar de considerarem a viga com eixo curvo, foi desprezado o efeito das vibrações axiais ou longitudinais. Ambos os casos foram resolvidos pelo método de Separação de Variáveis utilizando para tal uma aproximação com séries de Fourier.

RUTEMBERG¹⁹ concentrou o seu trabalho na obtenção das frequências naturais e modos de vibração, admitindo na análise uma viga assimétrica com eixo curvo, mas, considerando apenas o acoplamento entre a flexão vertical e a torção.

TAN e SHORE^{22,23} obtiveram a resposta dinâmica de pontes curvas sujeitas a ação de cargas móveis com amplitude constante e considerando a seção transversal com dupla simetria. Admitindo apenas o acoplamento entre a flexão vertical e a torção, e utilizando o método de Diferenças Finitas Centrais na integração das equações diferenciais, esses autores também estudaram os efeitos dos seguintes parâmetros: (a) da relação entre a rigidez flexural e a torcional; (b) do raio de curvatura; (c) da velocidade da carga móvel; (d) da relação entre os pesos do veículo e da ponte; (e) da relação entre as frequências de flexão e a de torção.

SHORE e CHAUDHURI²¹ limitaram-se a estudar o caso das vibrações livres acopladas entre flexão vertical e torção, direcionando a análise para os efeitos da deformação por corte e a inércia rotatória flexural nas frequências naturais de vibração da viga curva com dupla simetria da seção transversal.

Por outro lado, HEINS e OLEINIK^{9,10} chegaram na solução estática e dinâmica para uma ponte curva em viga caixão. Para essa análise, foi considerado que a seção possui dois eixos de simetria e que experimenta apenas duas deformações: deslocamento vertical e o giro por torção.

Considerando que há na bibliografia técnica uma diversidade de trabalhos relacionados com a análise estática e

dinâmica de vigas curvas horizontais, e ainda, pela inviabilidade de enumerá-los no presente trabalho, mesmo assim, quando necessário, encontra-se na ref. [13] mais de 200 trabalhos referenciados sobre o assunto.

Um outro problema que recentemente tem recebido especial atenção é a interação dinâmica^{11,12} veículo-via. Nesse caso, é considerado que as amplitudes das cargas atuantes na interface veículo-via são variáveis, resultando em flutuações ocasionadas pelas deformações elásticas da via e do veículo, e também, pelas possíveis imperfeições ou irregularidades da superfície de rolamento. Inicialmente, no presente trabalho é analisado o comportamento dinâmico de uma viga reta de seção transversal com dupla simetria submetida a cargas móveis, e, em seguida, um estudo considerando a influência da flexibilidade da via nas vibrações do veículo. Em ambos os casos é admitido apenas o deslocamento vertical da via, sendo que, o segundo analisa sistemas com até dois graus de liberdade para o veículo (vibração vertical e guinada).

Como o objetivo fundamental do presente trabalho é o de analisar o comportamento de vigas ou pontes curvas assimétricas com seção transversal de parede fina e aberta e curvatura constante, utilizou-se para tal as equações apropriadas de VLASOV²⁵ acopladas entre o deslocamento vertical, horizontal ou radial, axial ou longitudinal e o torcional. Considerando que na bibliografia técnica vários autores utilizaram-se dessas equações para a solução dos mais diferentes casos, exaurindo praticamente o questionamento da contribuição de cada parcela que as compõem, e considerando a complexidade das mesmas, admitiu-se a princípio como válidas, limitando-se apenas em verificar e comparar os resultados como forma de avaliar a eficiência das respectivas equações.

Dada a complexidade das equações diferenciais envolvidas na análise, principalmente pelo acoplamento entre as variáveis mencionadas acima, é praticamente impossível obter uma solução fechada que satisfaça tanto as condições de equilíbrio como também as condições de contorno. Com base nisso,

no presente trabalho é descrito um método numérico de integração, relativamente simples e de boa precisão, que resolve simultaneamente as quatro equações diferenciais parciais, exigindo, para isso, métodos e programas computacionais eficientes que possam ser implementados em computadores velozes, precisos e com relativa capacidade de memória. Com base no que foi dito acima, na integração das equações diferenciais utilizou-se o método de Diferenças Finitas Centrais. Por ser um método condicionalmente estável, é apresentado ao longo do trabalho um estudo do limite crítico de estabilidade (Dt_{cr}), chegando a uma solução direta para o caso da flexão em vigas retas e com dupla simetria da seção transversal.

Admitindo as hipóteses de vigas com curvatura constante, assimétrica, de parede fina e aberta, a mesma solução numérica é utilizada para o desenvolvimento de um método eficiente de determinação dos seguintes casos: (a) da resposta estática, (b) das características dinâmicas básicas (frequências naturais e os respectivos modos de vibração), (c) da resposta dinâmica no caso de cargas móveis arbitrárias. Os casos acima são utilizados tanto na comparação com os resultados teóricos de outros autores como também com os experimentais. Além disso, o primeiro e terceiro casos prestam-se para a obtenção do Coeficiente de Majoração Dinâmico (i.e., a relação entre a resposta dinâmica máxima e a estática máxima).

O sistema de quatro equações diferenciais parciais que definem os deslocamentos nas direções vertical, horizontal, axial e a rotação, é substituído por um sistema equivalente em Diferenças Finitas Centrais em termos da posição no espaço e no tempo.

Desconsiderando as parcelas que contêm derivadas temporais e considerando as cargas externas como estáticas nodais equivalentes, chega-se na solução do problema estático - caso (a):

Por outro lado, admitindo-se amortecimento nulo, a hipótese de vibrações livres (solução homogênea do sistema discretizado) conduz a um sistema linear de autovalores, o qual permite determinar os modos e as frequências naturais para

qualquer combinação de bordos (engastados e ou rotulados).

Finalmente, resolvendo o sistema completo de quatro equações diferenciais parciais, com amortecimento do tipo viscoso ou de NEWTON e as quatro componentes das cargas externas correspondentes a cada eixo do veículo, a solução numérica é obtida mediante um esquema de integração explícito e simultâneo sobre a variável espacial s e o tempo t .

Os programas de computação, referentes aos casos (a), (b) e (c), geram automaticamente as equações em diferenciais finitas devendo o usuário especificar unicamente o número de elementos que serão empregados na discretização, além, é claro, do conhecimento das características físicas e geométricas da viga e do veículo, com o que se consegue uma solução eficiente e de baixo custo computacional. Os resultados obtidos são comparados com dados experimentais e teóricos existentes na bibliografia técnica, verificando-se a influência da curvatura e da rigidez na amplificação dinâmica para cargas em movimento.

Ao longo do trabalho são apresentados gráficos de utilidade para o engenheiro que necessita estimar, como parâmetro inicial de projeto, os seguintes casos: (a) as frequências naturais de vigas retas e curvas, para ângulos de abertura que variam de 0 até 80 graus, como função unicamente do comprimento L do vão; (b) os Coeficientes de Majoração Dinâmico referentes a várias Normas Internacionais, incluindo-se entre elas a Brasileira, neste caso também como função do vão L .

2. VIGAS RETAS SUBMETIDAS A CARGAS EM MOVIMENTO

2.1. Considerações Preliminares

São apresentadas neste capítulo soluções de diversos problemas de vigas retas submetidas a cargas móveis, baseadas em hipóteses de comportamento linear e seção uniforme das vigas. O objetivo principal é a obtenção de expressões fechadas para a resposta, que possam ser empregadas posteriormente em estudos referentes às vibrações de veículos em movimento. No caso mais complexo, de barras com seção variável ou outras condições de sustentação, os resultados apresentados podem ser utilizados como ponto de partida para a obtenção de soluções aproximadas, segundo se sugere na seção 2.5. O conteúdo apresentado neste capítulo foi extraído, fundamentalmente, da ref. [18].

2.2. Viga Retas Submetida a Cargas Concretadas em Movimento

Será inicialmente considerado o problema de uma viga reta plana de comprimento L , submetida à ação de um conjunto de cargas concentradas $P_j(t)$ que se deslocam com velocidade constante ao longo da mesma, conforme FIGURA 2.2.1:

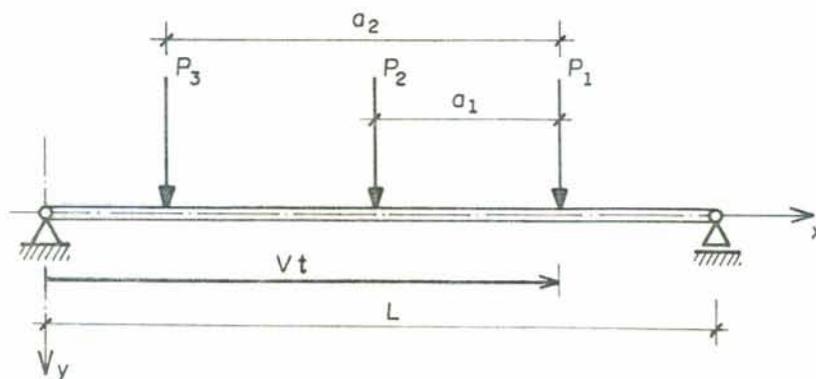


FIGURA 2.2.1 - Viga reta submetida à ação de cargas em movimento.

A solução geral do problema pode ser expressada na forma:

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} y_r(x) \eta_r(t) \quad (2.2.1)$$

na qual $y_r(x)$ denota o modo natural normalizado r de vibração da viga, cuja frequência natural (em radianos/s) designar-se-á ω_r . As funções $\eta_r(t)$ vem dadas pela expressão:

$$\eta_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t N_r(\tau) \operatorname{sen} [\omega_r(t - \tau)] d\tau, \quad (2.2.2)$$

sendo:

$$N_r(t) = \sum_{j=1}^{\infty} y_r(x_j) P_j(t), \quad (2.2.3)$$

onde x_j é o ponto de aplicação da carga $P_j(t)$, neste caso também função do tempo, devendo ser satisfeita a condição:

$$0 \leq x_j \leq L \quad (2.2.4)$$

As equações precedentes são válidas para: a) sistemas com amortecimento nulo e b) viga inicialmente em repouso. Se a razão de amortecimento crítico para o modo r fosse ζ_r , em sistemas amortecidos, a equação (2.2.2) deve ser substituída por:

$$\eta_r = \frac{1}{p_r} \int_0^t N_r(\tau) e^{-\zeta_r \omega_r (t-\tau)} \operatorname{sen} [p_r(t - \tau)] d\tau, \quad (2.2.5)$$

na qual $p_r = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$ representa a frequência amortecida do modo r .

2.3. Viga Birrotulada sob Ação de Cargas de Amplitude Constante

Neste caso os modos e frequências naturais não-amortecidas de barras esbeltas são:

$$y_r(x) = A_r \operatorname{sen} \left(\frac{r \pi x}{L} \right) \quad (2.3.1)$$

onde $A_r = \frac{2}{\rho A L \left[1 - \frac{1}{2\pi r} \operatorname{sen} (2\pi r) \right]}$;

$$e \quad \omega_r = r^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}. \quad (2.3.2)$$

Admitindo que a primeira carga entra na barra no instante $t=0$, ter-se-á:

$$\begin{aligned} x_1 &= Vt, \\ x_2 &= Vt - a_1, \\ x_3 &= Vt - a_2, \\ &\dots \\ x_N &= Vt - a_N. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

A equação (2.2.3) fica:

$$N_r(t) = P_o \left\{ \text{sen} \left(\frac{r \pi Vt}{L} \right) + \text{sen} \left[\frac{r \pi (Vt - a_1)}{L} \right] + \dots \right\}. \quad (2.3.4)$$

Na equação (2.3.4) não devem ser incluídos termos tais que $(Vt - a_j) < 0$.

A solução para uma única carga na viga ($N=1$) resulta:

$$\eta_r(t) = \frac{P_o}{p_r} A_r \int_0^t e^{-\zeta_r \omega_r (t-\tau)} \text{sen} \left(\frac{r \pi V\tau}{L} \right) \text{sen} [p_r (t-\tau)] d\tau. \quad (2.3.5)$$

A avaliação da integral na equação (2.3.5) é uma tarefa que não oferece complicações, mas exige considerável trabalho. A solução, obtida seguindo um caminho diferente, devido a FRÏBA⁶ é:

$$\begin{aligned} y(\bar{x}, t) &= y_o \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[r^2(r^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \zeta_r^2]} \{ r^2(r^2 - \alpha^2) \text{sen} \left(\frac{r \pi Vt}{L} \right) \\ &\quad - \frac{r \alpha [r^2(r^2 - \alpha^2) - 2\zeta_r^2]}{\sqrt{r^4 - \zeta_r^2}} e^{-\zeta_r \omega_r t} \text{sen}(p_r t) - \\ &\quad - 2 r \alpha \zeta_r \left[\cos \left(\frac{r \pi Vt}{L} \right) - e^{-\zeta_r \omega_r t} \cos(p_r t) \right] \} \text{sen} \left(\frac{r \pi x}{L} \right), \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

na qual y_0 denota o deslocamento no centro do vão devido a uma carga concentrada P_0 aplicada nesse ponto:

$$y_0 = \frac{P_0 L^3}{48 EI} \approx \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI} \quad (2.3.7)$$

e

$$\alpha = \frac{VL}{\pi} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (2.3.8)$$

a solução indicada na equação (2.3.6) é válida para $0 \leq t \leq T$, sendo $T = L/V$. Observa-se que o parâmetro α representa a relação entre a velocidade V de deslocamento da força e a velocidade crítica V_{cr} , para a qual a resposta da viga apresenta um valor máximo. Em aplicações a estruturas de pontes, verifica-se usualmente que $\alpha \ll 1$, isto é, a velocidade de movimento da carga é muito inferior à velocidade crítica. Neste caso, verifica-se também que:

$$\frac{r \pi V}{L} \ll p_r. \quad (2.3.9)$$

Uma aproximação satisfatória para o deslocamento da viga resulta da retenção de unicamente o primeiro termo na equação (2.3.6):

$$y(x, t) \approx y_0 \frac{\text{sen}(\pi Vt)}{L} \text{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (2.3.10)$$

O ponto de aplicação da carga ($x=Vt$) experimenta um deslocamento vertical:

$$y(Vt, t) \approx y_0 \text{sen}^2 \left(\frac{\pi Vt}{L} \right) \quad (2.3.11)$$

As soluções aproximadas (2.3.10-11) podem ser generalizadas ao caso de várias cargas, da seguinte maneira:

• deslocamento devido a P_1 :

$$y_1 = y_0 \text{sen} \left(\frac{\pi Vt}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (2.3.12)$$

• deslocamento devido a P_j :

$$y_j = y_0 \operatorname{sen} \left[\frac{\pi(Vt - a_j)}{L} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) U(t - a_j/V), \quad (2.3.13)$$

onde a função salto unitário $U(t - a_j/V)$ foi introduzida para conseguir que $y_j(x, t)$ seja nula para $t < a_j/V$.

Conseqüentemente:

$$y(x, t) = y_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \sum_{j=0}^N \operatorname{sen} \left[\frac{\pi(Vt - a_j)}{L} \right] U(t - a_j/V), \quad (2.3.14)$$

na qual $a_0 = 0$. O ponto de aplicação da primeira carga experimental a deflexão:

$$y(Vt, t) = y_0 \left\{ \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi Vt}{L} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi Vt}{L} \right) \operatorname{sen} \left[\frac{\pi(Vt - a_1)}{L} \right] U(t - a_1/V) + \dots \right\}. \quad (2.3.15)$$

2.4. Viga Birrotulada sob Ação de uma Carga Harmônica

Será agora considerado o caso em que a força $P(t)$ apresenta uma variação da forma:

$$P(t) = P_0 \operatorname{sen}(\Omega t). \quad (2.4.1)$$

Deverá então ser avaliada a integral:

$$\eta_r(t) = \frac{P_0}{p_r} \int_0^t e^{-\zeta_r \omega_r(t-\tau)} \operatorname{sen}(\Omega \tau) \operatorname{sen} \left(\frac{r \pi V \tau}{L} \right) \operatorname{sen} \left[p_r(t-\theta) \right] d\tau, \quad (2.4.2)$$

cuja solução está também dada por FRÝBA⁶. Quando a velocidade V é baixa em relação a velocidade crítica V_{cr} , é admissível a retenção só do primeiro termo da série (2.2.1), obtendo-se:

$$y(x, t) = \frac{y_0 \xi^2}{(1-\zeta^2)^2 + 4\left(\frac{\pi^2 V^2}{L^2 \Omega^2} - \zeta_1^2 \xi^2\right)} \cdot$$

$$\left\{ \left[(1-\xi^2)^2 + 4\zeta_1^2 \xi^2 \right]^{1/2} \text{sen}(\Omega t + \phi) \text{sen}\left(\frac{\pi V t}{L}\right) + \right.$$

$$\left. 2 \frac{\pi V}{L \Omega} \left[\cos(\Omega t) \cos\left(\frac{\pi V t}{L}\right) - e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \cos(p_1 t) \right] \right\} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

(2.4.3)

na qual, admitindo-se pequeno amortecimento,

$$\zeta = \frac{p_1}{\Omega} \approx \frac{\omega_1}{L},$$

(2.4.4)

$$\text{tg } \psi = - \frac{2\zeta_1 (\omega_1 / \Omega)}{p_1^2 / \Omega^2 - 1}$$

(2.4.5)

Será obtida agora uma expressão aproximada para o deslocamento do ponto A de aplicação da carga, na situação $\zeta \gg 1$ e $\zeta \ll 1$, isto é, longe da ressonância e para baixo amortecimento:

$$y(Vt, t) = \frac{y_0 \xi^2}{(1-\xi^2)^2 + \frac{4\pi^2 V^2}{L^2 \Omega^2}} \left\{ (-1+\xi^2) \text{sen}(\Omega t) \text{sen}^2\left(\frac{\pi V t}{L}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi V}{L \Omega} \left[\cos(\Omega t) \text{sen}\left(\frac{\pi V t}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi V t}{L}\right) - \cos(\omega_1 t) \text{sen}\left(\frac{\pi V t}{L}\right) \right] \right\}$$

(2.4.6)

2.5. Soluções Aproximadas para Vigas com Momento de Inércia Variável

As equações (2.3.6) e (2.4.3) expressam os deslocamentos resultantes para uma carga móvel de amplitudes constantes e com variação harmônica, respectivamente. Ambas estão baseadas na hipótese de que os modos de vibração e as frequências naturais da barra estão dados pelas equações (2.3.1-2). Num caso geral, de uma viga birrotulada com momento de inér-

cia variável, pode-se admitir que as equações (2.3.6) e (2.4.3) constituem aproximações satisfatórias das soluções exatas, substituindo nas mesmas $\text{sen}\left(\frac{r \pi Vt}{L}\right)$ por $y_r(Vt)$, $\text{sen}\left(\frac{r \pi x}{L}\right)$ por $y_r(x)$, e levando em conta que ω_r denota a frequência natural associada ao modo r de vibração.

3. VIBRAÇÕES INDUZIDAS EM VEÍCULOS PELA FLEXIBILIDADE DA VIA

3.1. Conceitos Básicos

Os deslocamentos da viga ou elemento de sustentação de um veículo, podem induzir no mesmo vibrações verticais, de rolamento, etc., as quais atingem valores máximos para velocidades designadas, genericamente, como velocidades críticas. São apresentadas, a seguir, soluções aproximadas, válidas para baixas velocidades, isto é, não muito próximas às velocidades críticas. Admite-se também que os deslocamentos nos pontos de sustentação do modelo do veículo são iguais aos deslocamentos da viga de apoio. Essa hipótese é, em geral, satisfeita no caso dos deslocamentos verticais, mas deve ser modificada no caso dos deslocamentos laterais. Com efeito, os últimos estão limitados pelas forças de atrito conduzindo a formulações não lineares e, no caso de veículos ferroviários, estão condicionados ainda pelos fenômenos de interação roda-trilho, os quais não serão considerados neste capítulo. Como no Capítulo 2, esse capítulo também foi extraído da ref. [18]

3.2. Sistema de um Grau de Liberdade Vertical que Atravessa uma Viga Birrotulada: Pequenas Oscilações

Será inicialmente considerado o problema de um sistema dinâmico de massa m e frequência ω_0 com um só grau de liberdade vertical, deslocando-se com velocidade V ao longo de uma barra birrotulada. Sobre a viga atua o peso do sistema mg , mais as flutuações produzidas ao redor do mesmo pelas vibrações induzidas no veículo. Nesta seção serão desprezadas essas últimas, admitindo-se em consequência que o movimento vertical do ponto de aplicação da carga é produzido unicamente pelo peso do veículo. Este deslocamento pode ser calculado, para valores baixos de α , pela equação (2.3.10):

$$y(t) = y_0 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi V t}{L} \right). \quad (3.2.1)$$

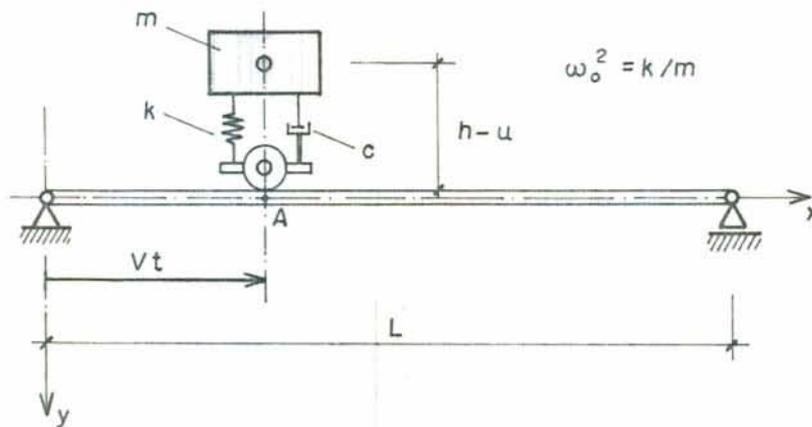


FIGURA 3.2.1 - Sistema de 1 grau de liberdade deslocando-se através de uma viga birrotulada.

A equação de movimento do sistema resulta:

$$m \ddot{u} + \mu \dot{u} + k(u - y) = 0, \quad (3.2.2)$$

ou

$$\ddot{u} + 2 \zeta_0 \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 y. \quad (3.2.3)$$

Se o deslocamento e velocidade iniciais $u(0)$ e $\dot{u}(0)$ são nulos, a solução pode ser obtida pela integral de convolução:

$$u(t) = \frac{1}{p_0} \int_0^t e^{-\zeta_0 \omega_0 (t-\tau)} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi V \tau}{L} \right) \operatorname{sen} \left[p_0 (t-\tau) \right] d\tau, \quad (3.2.4)$$

na qual $p_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta_0^2}$ e ζ_0 denota a razão de amortecimento crítico do veículo.

3.3. Sistema de um Grau de Liberdade Vertical que Atravessa uma Série de Vigas Birrotuladas

Resulta agora de interesse a solução do problema de oscilações verticais de um veículo, idealizado por meio de um sistema de um grau de liberdade vertical, que se move com velocidade V ao longo de uma linha, formada por vigas birrotuladas, de acordo com o esquema da FIGURA 3.3.1.

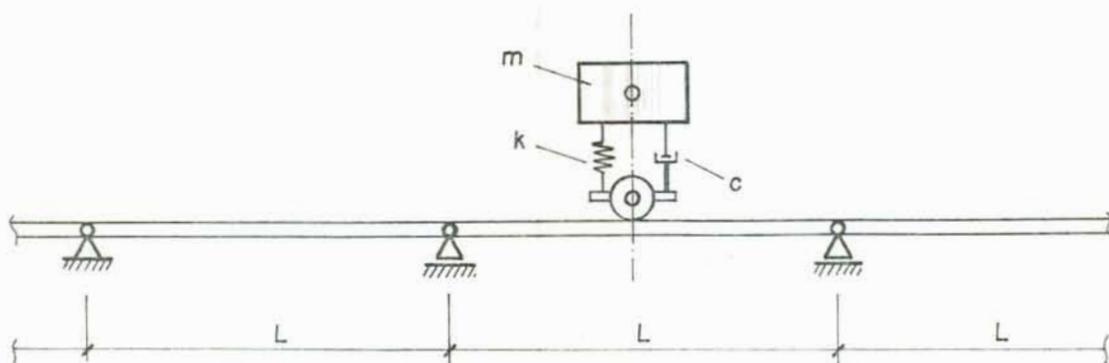


FIGURA 3.3.1 - Veículo de um grau de liberdade sobre viga múltipla.

No caso em consideração, a excitação também pode ser representada pela equação (3.2.1), mas deve ser levada em consideração a periodicidade da mesma. No estado estacionário a equação de movimento será também dada pela equação (3.2.3), porém agora $y(t)$ é uma função com período $T=L/V$.

Expressando a equação (3.2.1) da forma:

$$y(t) = \frac{y_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi Vt}{L} \right) \right]. \quad (3.3.1)$$

Conclui-se que a excitação do veículo é harmônica, com frequência $(2\pi V)/L$ e amplitude $y_0/2$. O deslocamento (amplitude) absoluto do veículo será então:

$$|u| = \frac{y_0}{2} \left[\frac{1 + 4\zeta_0^2 \xi^2}{(1-\xi^2)^2 + 4\zeta_0^2 \xi^2} \right]^{1/2}, \quad (3.3.2)$$

na qual $\xi = \frac{2 \pi V}{L \omega_0}$. A amplitude da carga flutuante, por outro lado, é igual a:

$$|\Delta P| = \frac{y_0 k}{2} \frac{\xi^2}{[(1-\xi^2)^2 + 4\zeta_0^2 \xi^2]^{1/2}} \quad (3.3.3)$$

A qual pode também ser escrita como segue:

$$|\Delta P| = P_0 \frac{2(m/M) (\omega_0/\omega_1)^2 \xi^2}{[(1-\xi^2)^2 + 4\zeta_0^2 \xi^2]^{1/2}} \quad (3.3.4)$$

onde:

$M = \rho AL$ é a massa total da viga.

$\omega_1 =$ frequência fundamental da viga.

3.4. Sistema com um Grau de Liberdade Vertical Deslocando-se ao Longo da Viga Múltipla Imperfeita

Será considerado agora o caso em que o perfil vertical da viga apresenta, com respeito a uma linha reta, uma diferença $z(x)$. A equação de movimento do sistema (3.2.3) toma a forma:

$$\ddot{u} + 2 \zeta_0 \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 (y + z) \quad (3.4.1)$$

Na equação (3.4.1) está implícita a hipótese de que as deflexões da viga produzidas pelas vibrações do veículo são desprezíveis. Considerando-se a linearidade do sistema, pode-se obter a solução da equação:

$$\ddot{u} + 2 \zeta_0 \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 z(ct), \quad (3.4.2)$$

independentemente da solução da equação (3.2.3), para adicionar posteriormente as respostas.

O método da análise dependerá das características e da definição de $z(x)$. Com efeito, as imperfeições podem ser: a) oscilações aleatórias, originadas na construção, b) perturbações regulares, por exemplo, descontinuidades nos tri-

lhos, c) ondulações regulares, com um comprimento de onda definido, produzidos por efeitos térmicos nos trilhos.

3.5. Veículo com Dois Graus de Liberdade

Considere-se agora um veículo com dois eixos, que se desloca com velocidade V sobre uma viga birrotulada, de acordo com o esquema de cargas indicado na FIGURA 3.5.1.

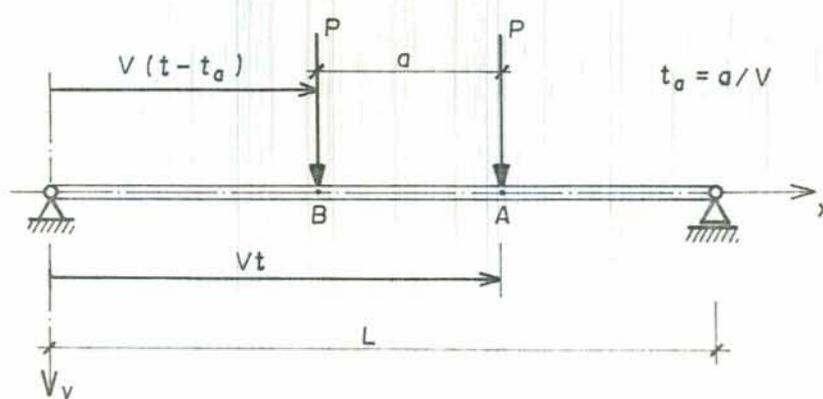


FIGURA 3.5.1 - Diagrama de cargas.

Designando com A e B os pontos de aplicação das cargas correspondentes aos eixos, verifica-se que os correspondentes deslocamentos vem dados por:

$$y_A = y_0 \{ [U(t) - U(t - t_0)] \operatorname{sen}^2(\omega_c t) + [U(t - t_a) - U(t - t_0)] \operatorname{sen}(\omega_c t) \operatorname{sen}[\omega_c(t - t_a)] \} \quad (3.5.1)$$

$$y_B = y_0 \{ [U(t - t_a) - U(t - t_a - t_0)] \operatorname{sen}^2[\omega_c(t - t_a)] + [U(t - t_a) - U(t - t_0)] \operatorname{sen}(\omega_c t) \operatorname{sen}[\omega_c(t - t_a)] \} \quad (3.5.2)$$

nas quais $U(t - t_a)$ denota a função passo unitário, definida como $U(t - t_a) = 0$ se $t < t_a$, $U(t - t_a) = 1$ se $t \geq t_a$, e $\omega_c = \pi V/L$. Por outro lado, $t_a = a/V$ e $t_0 = L/V$, sendo $L > a$.

As características básicas e dimensões do modelo do veículo estão representadas na FIGURA 3.5.2.

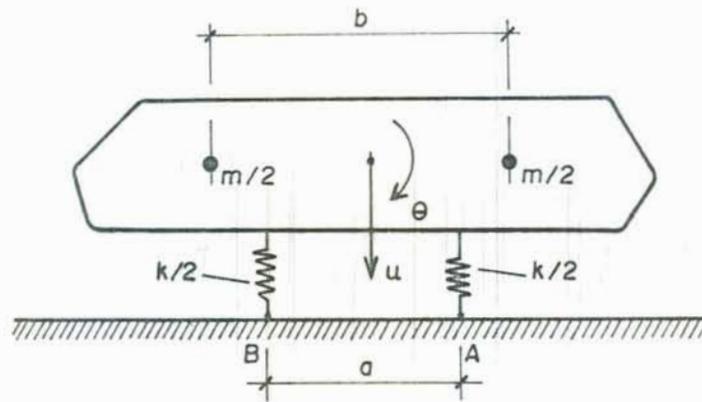


FIGURA 3.5.2 - Dimensões do veículo.

Se for admitido que o deslocamento horizontal das massas está restringido, ter-se-iam dois modos não-acoplados de vibração:

- vibração vertical: frequência: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$
- guinada: frequência: $\omega_1 = \omega_0 \frac{a}{b}$

Sob as hipóteses simplificativas introduzidas, a resposta pode ser determinada independentemente para cada modo. A equação que define as oscilações verticais é idêntica à equação (3.2.3), com y igual à média de y_A e y_B , segundo as equações (3.5.1-2):

$$y = \frac{1}{2} y_0 \{ [U(t) - U(t-t_0)] \text{sen}^2(\omega_c t) + [U(t-t_a) + U(t-t_a-t_0)] \text{sen}^2[\omega_c(t-t_a)] + 2 [U(t-t_a) - U(t-t_0)] \text{sen}(\omega_c t) \text{sen}[\omega_c(t-t_a)] \} \quad (3.5.3)$$

Por outro lado, a equação de movimento do segundo modo é:

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta = 4 \omega_1^2 \frac{y_A - y_B}{a} \quad (3.5.4)$$

sendo no caso em consideração:

$$\frac{y_A - y_B}{a} = \frac{y_0}{a} \{ [U(t) - U(t-t_0)] \operatorname{sen}^2(\omega_c t) - [U(t-t_a) - U(t-t_a-t_0)] \operatorname{sen}^2[\omega_c(t-t_a)] \} \quad (3.5.5)$$

Quando o veículo desloca-se sobre vãos múltiplos, é necessário efetuar a expansão das equações (3.5.3) e (3.5.5) em séries de Fourier. Os detalhes do procedimento subsequente de solução são bem conhecidos, e não serão discutidos aqui. Convém lembrar, porém, que as equações (3.5.3) e (3.5.5) são funções periódicas de t , com período $T = L/V$. Deve-se verificar também que:

$$k(u - y) \ll mg. \quad (3.5.6)$$

Finalmente, as expressões (3.5.3) e (3.5.5) devem ser modificadas, pois o deslocamento vertical do ponto B antes de entrar no vão em consideração não é zero, como indica a equação (3.5.2), já que a roda B está então no vão precedente. Com efeito, as equações (3.5.2), (3.5.3) e (3.5.5) devem ser substituídas por:

$$y_B = y_0 \{ \operatorname{sen}^2[\omega_c(t-t_a)] + U(t-t_a) \operatorname{sen}(\omega_c t) \operatorname{sen}[\omega_c(t-t_a)] \} \quad (3.5.7)$$

$$y = \frac{1}{2} y_0 \{ \operatorname{sen}^2(\omega_c t) + \operatorname{sen}^2[\omega_c(t-t_a)] + 2 U(t-t_a) \operatorname{sen}(\omega_c t) \operatorname{sen}[\omega_c(t-t_a)] \} \quad (3.5.8)$$

$$\frac{y_A - y_B}{a} = \frac{y_0}{a} \{ \operatorname{sen}^2(\omega_c t) - \operatorname{sen}^2[\omega_c(t-t_a)] \} \quad (3.5.9)$$

3.6. Exemplos de Aplicação: Sistema com dois Graus de Liberdade

Será considerada agora a solução numérica do modelo de dois graus de liberdade discutido na seção 3.5. Admite-se que o veículo se desloca com velocidade uniforme ao longo de uma série infinita de vãos múltiplos. Nesse caso os deslocamentos verticais dos pontos A e B são dados pelas equações (3.5.1) e (3.5.7), respectivamente, válidas no intervalo $(0, T)$, com $T=L/V$. O deslocamento relativo \underline{u} e o giro $\underline{\theta}$ do veículo não estão acoplados, definindo nas equações (3.3.8) e (3.3.9) as excitações das respectivas equações diferenciais. Os parâmetros adotados no exemplo são os seguintes:

- Comprimento do vão: $L = 25 \text{ m}$;
- Deslocamento estático devido a P no centro do vão: $y_o = 2 \text{ mm}$;
- Distância entre rodas: $a = 6 \text{ m}$;
- Massa total do veículo: $m = 4500 \text{ kg}$;
- Rigidez das molas: $k = 1,4 \times 10^6 \text{ N/m}$;
- Rigidez torsional: $k_\Omega = 1,26 \times 10^7 \text{ N}$;
- Inércia rotacional: $I_\theta = 54240 \text{ kgm}$;
- Amortecimento (nos dois modos): $\zeta_o = 0,10$.

Observe-se que $\omega_o = \sqrt{k/m} = 17,63 \text{ rad/s}$ e que $\omega_1 = \sqrt{k_\Omega/I_\theta} = 15,24 \text{ rad/s}$. As funções indicadas pelas equações (3.5.8-9) foram expandidas em séries de Fourier, sendo retidos 15 termos nas respectivas expressões.

A FIGURA 3.6.1, por outro lado, representa a variação dos deslocamentos relativos (parte flutuante) máximos em A e B, para velocidades de até 350 km/h. Existe uma região crítica claramente visível, na faixa entre 200 e 280 km/h. Os deslocamentos obtidos na presente solução não são válidas na proximidade dessa faixa, já que o efeito das flutuações de carga do veículo nas deformações da viga não é levado em con-

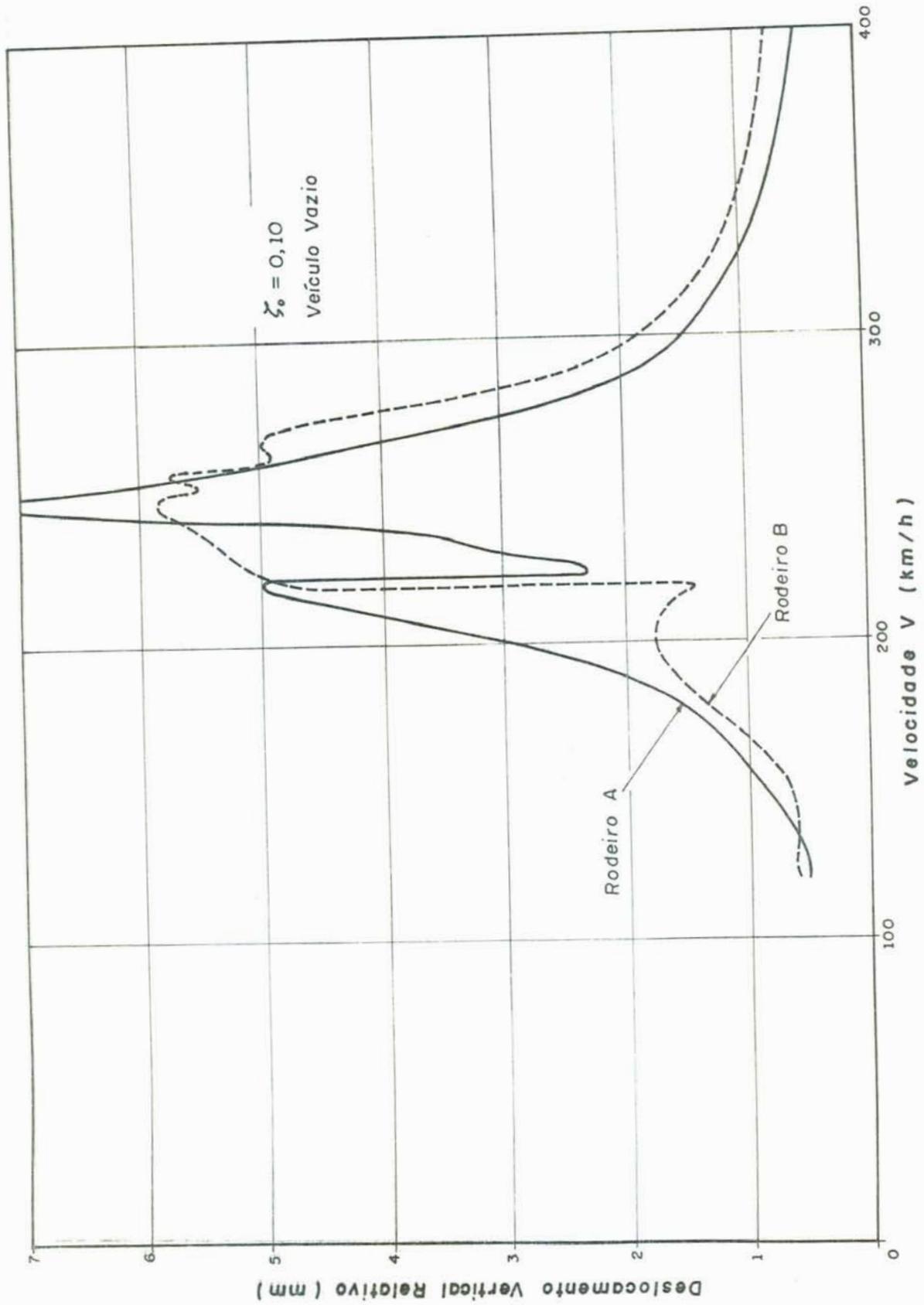


FIGURA 3.6.1 - Resposta dinãmica da viga reta submetida a cargas m̃veis.

ta. Essa simplificação não impede, porém, a identificação da região crítica. Verifica-se, também, que para $V < 100$ km/h, os deslocamentos relativos são inferiores a 0,25.

4. MÉTODO NUMÉRICO UTILIZADO NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA VIGA

4.1. Considerações Fundamentais

Nos casos onde as equações diferenciais não podem ser integradas em forma fechada, o recurso usado para solucioná-las são os métodos numéricos. Este caso acontece, por exemplo, quando um sistema massa-mola é excitado por uma força que não pode ser expressa por funções analíticas simples, ou quando a força é dada gráfica ou numericamente apenas.

A integração numérica é um processo pelo qual a equação diferencial de movimento é resolvida progressivamente em incrementos de tempo, partindo de um tempo inicial no qual são conhecidos a velocidade e o deslocamento. A solução é aproximada, mas, à medida que o intervalo de tempo (Δt) é reduzido, o resultado se aproxima da solução exata.

Na literatura, existem numerosos métodos numéricos possíveis para se resolver as equações diferenciais que governam o movimento da estrutura. Dentre eles pode-se citar: Elementos Finitos²⁶, Diferenças Finitas^{8,9}, Coeficientes Indeterminados^{21,22}, Séries de Fourier²¹ e Separação de Variáveis^{3,5}, entre outros.

Visando a distinguir alguns métodos, toma-se como comparação os de Diferenças Finitas e Coeficientes Indeterminados, sendo estes os mais utilizados pela bibliografia técnica. Para o método de Diferenças Finitas é necessário estabelecer a suposição que as cargas atuam somente em uma rede de pontos, enquanto que, no método dos Coeficientes Indeterminados, deve-se ter algum conhecimento mais avançado do comportamento do sistema de cargas. Nos dois métodos é necessário resolver um sistema de equações algébricas simultâneas.

Os méritos dos vários métodos estão relacionados aos erros e à convergência de cada processo.

Neste trabalho, aplicou-se uma solução numérica das equações diferenciais de movimento por Diferenças Finitas Centrais.

4.2. Aproximação dos Operadores Diferenciais por Diferenças Finitas Centrais

Neste método, as equações diferenciais e suas condições de contorno são substituídas pelas equações de D.F.C. correspondentes. Isso reduz, então, o problema a um grupo de equações algébricas simultâneas, que podem ser resolvidas pelo computador digital a cada intervalo de tempo Dt .

Para a aplicação do método, a viga curva ou reta é discretizada em uma malha com N nós, conforme FIGURA 4.2.1.

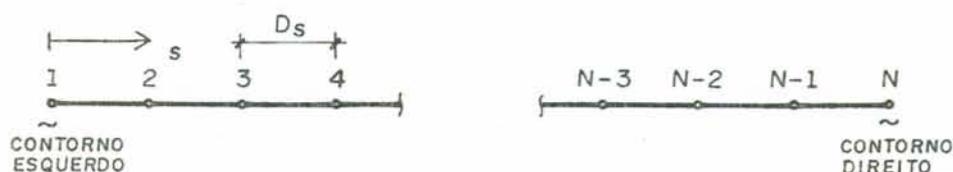


FIGURA 4.2.1 - Discretização espacial da viga em Diferenças Finitas Centrais.

Onde $Ds = \frac{L}{(N-1)}$, sendo L o comprimento da viga curva ou reta.

A base da solução numérica é essencialmente a de se obter os valores numéricos da integral, a ser determinada nos pontos discretizados ao longo da coordenada espacial s e no eixo do tempo, simultaneamente. Nesse sentido, os operadores diferenciais são aproximados de um certo número de termos na expansão de TAYLOR, na qual X_{i+1} e X_{i-1} , em termos dos pontos pivotais, são:

$$\left. \begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + \dot{X}_i Dt + \frac{\ddot{X}_i Dt^2}{2} + \frac{\overset{\dots}{X}_i Dt^3}{6} + \dots \\ X_{i-1} &= X_i - \dot{X}_i Dt + \frac{\ddot{X}_i Dt^2}{2} - \frac{\overset{\dots}{X}_i Dt^3}{6} + \dots \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \text{Para} \\ i \geq 2 \end{array} \quad (4.2.1)$$

Da mesma forma, para a coordenada espacial s fica:

$$\left. \begin{aligned} X_{j+1} &= X_j + X'_j Ds + \frac{X''_j Ds^2}{2} + \frac{X'''_j Ds^3}{6} + \dots \\ X_{j-1} &= X_j - X'_j Ds + \frac{X''_j Ds^2}{2} - \frac{X'''_j Ds^3}{6} + \dots \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \text{Para} \\ j \geq 2. \end{array} \quad (4.2.2)$$

Subtraindo as equações (4.2.1), e desconsiderando os termos de ordem superior, obtêm-se:

$$\dot{X}_i = \frac{1}{2Dt} (X_{i+1} - X_{i-1}), \quad (4.2.3)$$

e somando as equações (4.2.1) membro a membro, chega-se a:

$$\ddot{X}_i = \frac{1}{Dt^2} (X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}). \quad (4.2.4)$$

Da mesma forma, subtraindo e somando as equações (4.2.2), obtêm-se, respectivamente:

$$X'_j = \frac{1}{2Ds} (X_{j+1} - X_{j-1}) \quad (4.2.5)$$

$$X''_j = \frac{1}{Ds^2} (X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1})$$

sabendo-se que \dot{X} corresponde à derivada parcial da variável genérica X em relação ao tempo, e X' a derivada parcial em relação à coordenada espacial s . O índice i define a variação da função no eixo do tempo, e j na coordenada espacial s , conforme FIGURA 4.2.2.

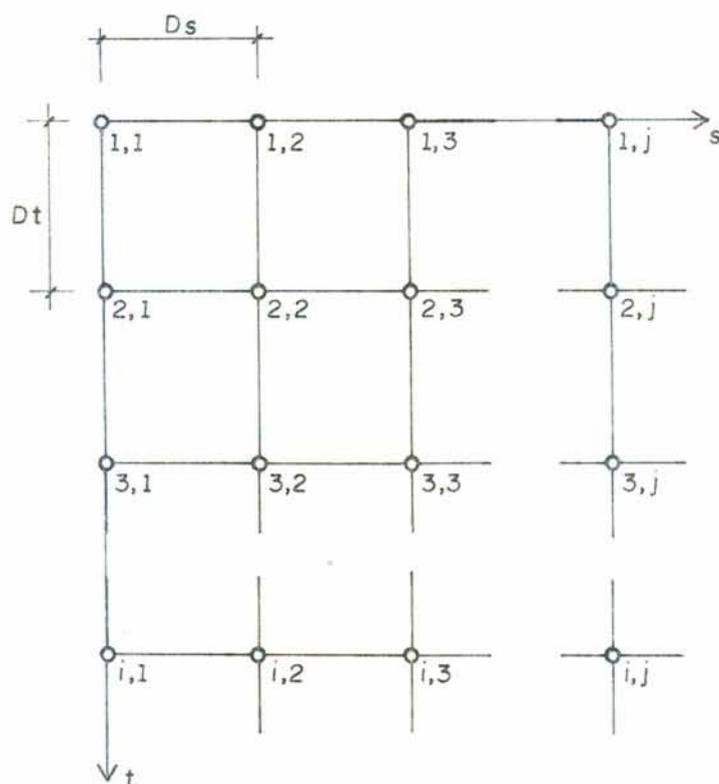


FIGURA 4.2.2 - Retícula no plano s - t adotado na solução por meio de Diferenças Finitas Centrais.

As derivadas de ordem superior são deduzidas em função das derivadas de primeira e segunda ordem, que são as equações (4.2.3), (4.2.4) e (4.2.5); então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 X_j}{\partial s^3} &= \frac{\partial(X_j'')}{\partial s} = \frac{1}{2Ds} (X_{j+1}'' - X_{j-1}'') = \frac{1}{2Ds} \left[\frac{1}{Ds^2} (X_{j+2} - 2X_{j+1} + X_j) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{Ds^2} (X_j - 2X_{j-1} + X_{j-2}) \right] = \frac{1}{2Ds^3} (X_{j+2} - 2X_{j+1} + 2X_{j-1} - X_{j-2}). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Da mesma forma,

$$\frac{\partial^3 X_i}{\partial t^3} = \frac{1}{2Dt^3} (X_{i+2} - 2X_{i+1} + 2X_{i-1} - X_{i-2}). \quad (4.2.7)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 X_j}{\partial s^4} &= \frac{\partial^2(X_j'')}{\partial s^2} = \frac{1}{Ds^2} (X_{j+1}'' - 2X_j'' + X_{j-1}'') \\ &= \frac{1}{Ds^4} (X_{j+2} - 4X_{j+1} + 6X_j - 4X_{j-1} + X_{j-2}). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Similarmente,

$$\frac{\partial^4 X_i}{\partial t^4} = \frac{\partial^2(\ddot{X}_i)}{\partial t^2} = \frac{1}{Dt^4} (X_{i+2} - 4X_{i+1} + 6X_i - 4X_{i-1} + X_{i-2}) \quad (4.2.9)$$

Para derivadas cruzadas, as aproximações em Diferenças Finitas ficam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 X}{\partial s^2 \partial t} &= \frac{\partial(X_j'')}{\partial t} = \frac{1}{2Dt} (X_{i+1,j}'' - X_{i-1,j}'') = \frac{1}{2Dt} ((X_{i+1,j+1} - \\ &- 2X_{i+1,j} + X_{i+1,j-1})/Ds^2 - (X_{i-1,j+1} - 2X_{i-1,j} + X_{i-1,j-1})/ \\ &Ds^2) = \frac{1}{2Dt Ds^2} (X_{i+1,j+1} - X_{i-1,j+1} + 2X_{i-1,j} - 2X_{i+1,j} + \\ &+ X_{i+1,j-1} - X_{i-1,j-1}). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 X}{\partial s \partial t^2} &= \frac{\partial(\ddot{X}_i)}{\partial s} = \frac{1}{2Ds Dt^2} (X_{i-1,j+1} - X_{i-1,j-1} - 2X_{i,j+1} + \\ &+ 2X_{i,j-1} + X_{i+1,j+1} - X_{i+1,j-1}). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 X}{\partial s^2 \partial t^2} &= \frac{\partial^2(X_i'')}{\partial t^2} = \frac{1}{Dt^2} (X_{i-1,j}'' - 2X_{i,j}'' + X_{i+1,j}'') = \\ &= \frac{1}{Ds^2 Dt^2} (X_{i-1,j+1} - 2X_{i,j+1} + X_{i+1,j+1} - 2X_{i-1,j} + 4X_{i,j} - \\ &- 2X_{i+1,j} + X_{i-1,j-1} - 2X_{i,j-1} + X_{i+1,j-1}). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Nas FIGURAS 4.2.3 a 4.2.6, estão indicadas as moléculas correspondentes aos operadores diferenciais das equações (4.2.5) a (4.2.12), em Diferenças Finitas Centrais.

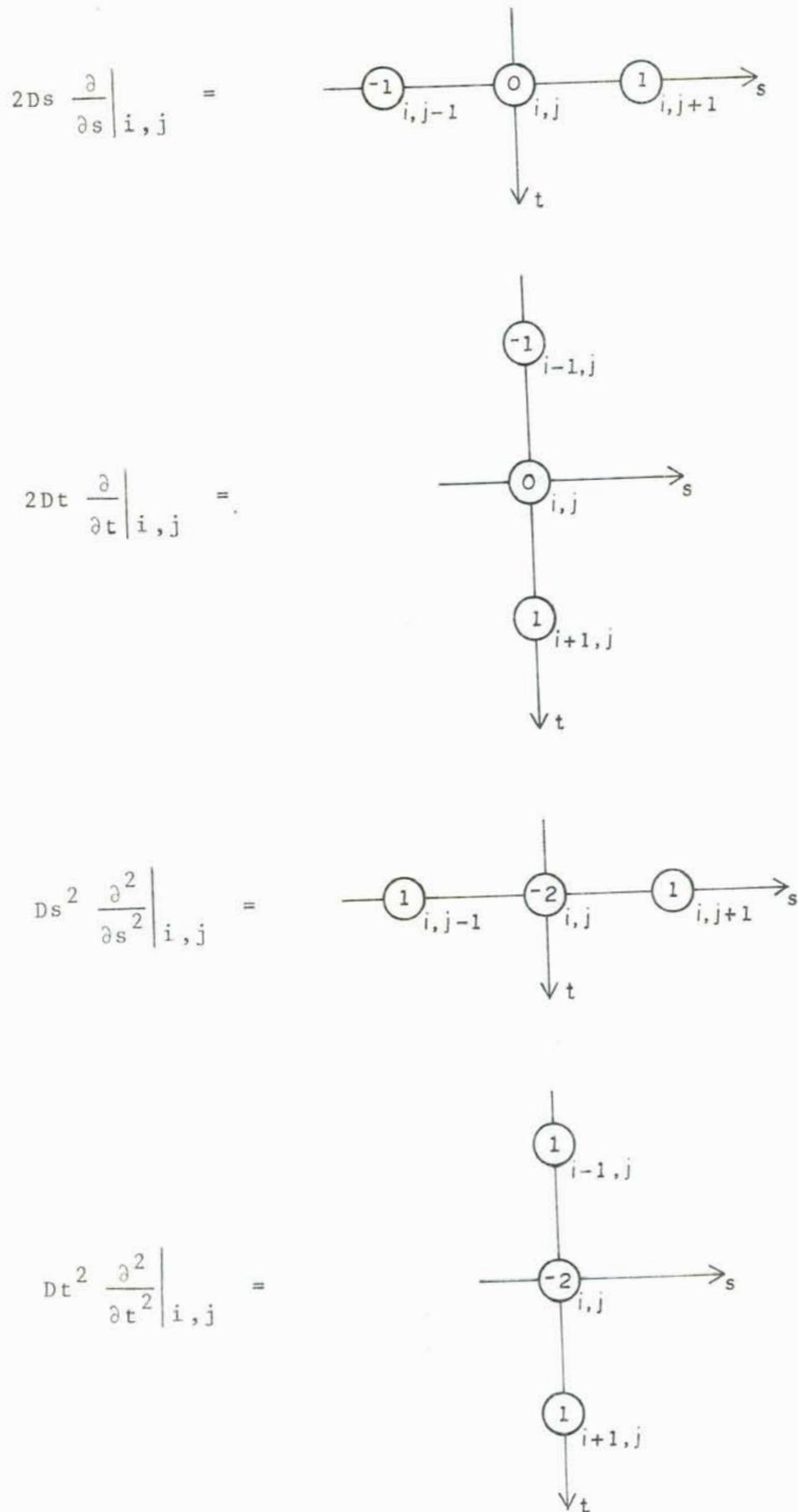


FIGURA 4.2.3 - Operadores de primeira ordem em Diferenças Finitas Centrais.

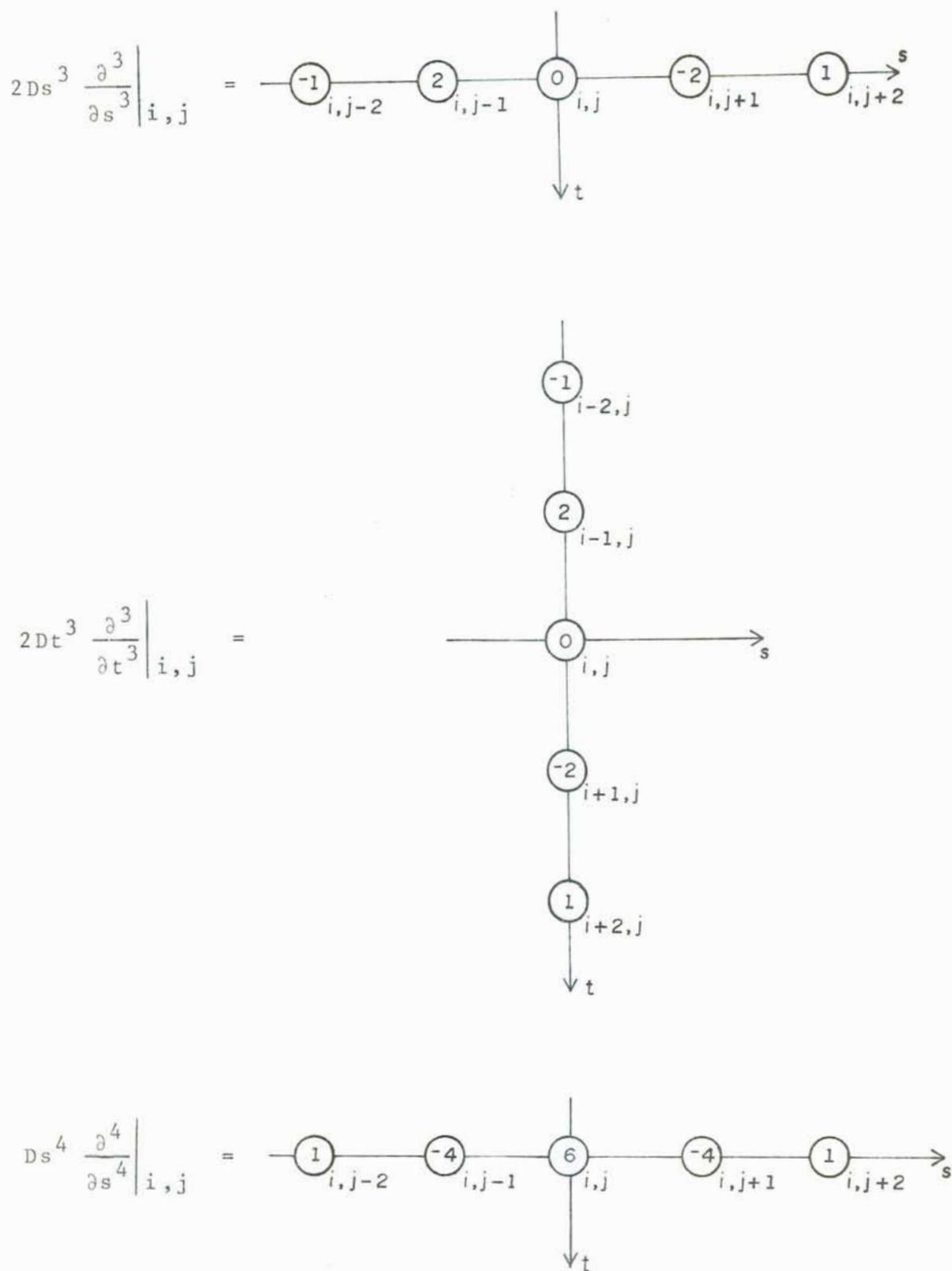
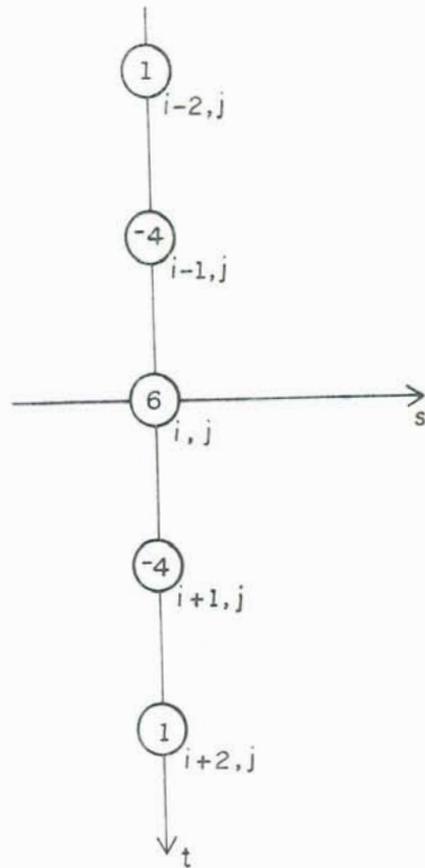


FIGURA 4.2.4 - Operadores de primeira ordem em Diferenças Finitas Centrais.

$$Dt^4 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Big|_{i,j} =$$



$$2DtDs^2 \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial t} \Big|_{i,j} =$$

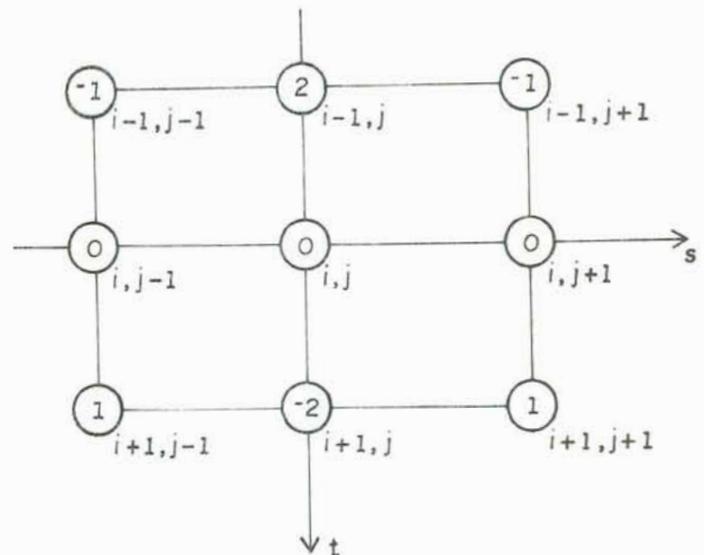


FIGURA 4.2.5 - Operadores de primeira ordem em Diferenças Finitas Centrais.

$$2D_s D_t^2 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial s} \Big|_{i,j} =$$

$$D_s^2 D_t^2 \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} \Big|_{i,j} =$$

FIGURA 4.2.6 - Operadores de primeira ordem em Diferenças Finitas Centrais.

4.3. Aplicação do Método de Diferenças Finitas Centrais na Solução das Equações Diferenciais da Viga Reta de BERNOULLI, VLASOV e TIMOSHENKO

Na bibliografia técnica, são empregadas duas equações diferenciais clássicas para determinar a resposta a flexão de vigas retas: as equações de BERNOULLI e TIMOSHENKO. A equação de TIMOSHENKO é a mais geral, pois leva em consideração a deformação por corte e a inércia rotacional. No presente contexto, interessa comparar previsões das duas primeiras com as equações de VLASOV para vigas de seção aberta, particularizadas para o caso de dupla simetria, nas quais é desprezada a deformação por corte. Por final, a equação diferencial de BERNOULLI é a mais simples, pois além de desprezar a inércia rotacional, também despreza a deformação por corte.

Para uma viga reta, e com dupla simetria da seção transversal, as equações diferenciais de flexão de BERNOULLI, VLASOV e TIMOSHENKO podem ser escritas, respectivamente, da seguinte forma²⁴:

BERNOULLI:

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial s^4} + \frac{\rho A}{EI_z} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = P_y (s, t) \quad (4.3.1)$$

VLASOV:

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial s^4} + \frac{\rho A}{EI_z} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^4 Y}{\partial s^2 \partial t^2} = P_y (s, t) \quad (4.3.2)$$

TIMOSHENKO:

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial s^4} + \frac{\rho A}{EI_z} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\rho}{E} \left(1 + \frac{\eta E}{G}\right) \frac{\partial^4 Y}{\partial s^2 \partial t^2} + \frac{\eta \rho^2}{EG} \frac{\partial^4 Y}{\partial t^4} (s, t) \quad (4.3.3)$$

onde s denota a coordenada espacial; Y , o deslocamento vertical da viga, conforme FIGURA 4.3.1; P_y , o carregamento vertical externo distribuído por unidade de comprimento; ρ , a massa específica do material; A , a área da seção transversal; E ,

o módulo de elasticidade longitudinal (módulo de YOUNG); I_z , o momento de inércia em relação ao eixo transversal z ; η , o coeficiente de forma^h da seção transversal; e G , o módulo de elasticidade transversal ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$).

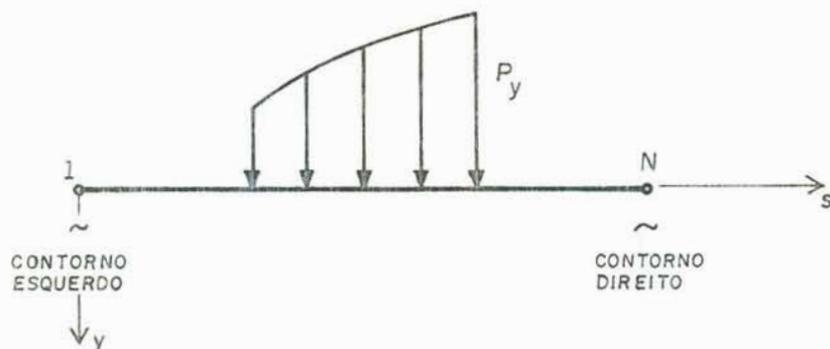


FIGURA 4.3.1 - Desenho esquemático da viga.

Tornando as equações (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3) homogêneas, isto é, fazendo $P_y = 0$, e substituindo os operadores dessas equações diferenciais homogêneas pelas aproximações em Diferenças Finitas Centrais, indicadas nas FIGURAS 4.2.3 a 4.2.6, chega-se nas seguintes equações:

BERNOULLI:

$$Y_{i+1,j} = (2-6C_z) Y_{i,j} - C_z (Y_{i,j-2} - 4Y_{i,j-1} - 4Y_{i,j+1} + Y_{i,j+2}) - Y_{i-1,j} \quad (4.3.4)$$

VLASOV:

$$\begin{aligned} Y_{i+1,j-1} - (2+A_z) Y_{i+1,j} + Y_{i+1,j+1} = & B_z (Y_{i,j-2} - 4Y_{i,j-1} + \\ & + 6Y_{i,j} - 4Y_{i,j+1} + Y_{i,j+2}) + A_z (Y_{i-1,j} - 2Y_{i,j}) - \\ & - (Y_{i-1,j-1} - 2Y_{i-1,j} + Y_{i-1,j+1} - 2Y_{i,j-1} + 4Y_{i,j} - \\ & - 2Y_{i,j+1}) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

TIMOSHENKO:

$$\begin{aligned}
 Y_{i+2,j} = & -C_c(Y_{i,j-2} - 4Y_{i,j-1} + 6Y_{i,j} - 4Y_{i,j+1} + Y_{i,j+2}) - \\
 & - C_a(Y_{i-1,j} - 2Y_{i,j} + Y_{i+1,j}) + C_b(Y_{i-1,j-1} - 2Y_{i-1,j} + \\
 & + Y_{i-1,j+1} - 2Y_{i,j-1} + 4Y_{i,j} - 2Y_{i,j+1} + Y_{i+1,j-1} - 2Y_{i+1,j} + \\
 & + Y_{i+1,j+1}) - (Y_{i-2,j} - 4Y_{i-1,j} + 6Y_{i,j} - 4Y_{i+1,j}) \quad (4.3.6)
 \end{aligned}$$

onde, as seguintes constantes denotam coeficientes adimensionais:

$$\begin{aligned}
 C_z = \frac{EI_z Dt^2}{\rho ADs^4}, \quad A_z = \frac{I_z}{ADs^2}, \quad B_z = \frac{EDt^2}{\rho Ds^2}, \quad C_a = \frac{GDt^2 A}{\rho I_z \eta}, \\
 C_b = (1 + \frac{\eta E}{G}) \frac{GDt^2}{\rho Ds^2 \eta}, \quad C_c = \frac{EGDt^4}{\eta \rho^2 Ds^4} \quad (4.3.7)
 \end{aligned}$$

Ds e Dt são, respectivamente, o intervalo de espaço e o intervalo de tempo, já indicados na retícula da FIGURA 4.2.2.

As equações (4.3.4), (4.3.5) e (4.3.6) só poderão ser aplicadas na solução da viga depois de uma discretização da mesma em N nós equidistantes, conforme FIGURA 4.3.2, onde N deve ser maior ou igual a 3.

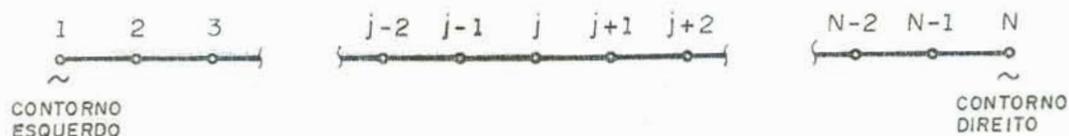


FIGURA 4.3.2 - Discretização da viga em Diferenças Finitas Centrais.

Além disso, também é necessário estabelecer as condições de contorno em ambos extremos. Para fim de comparação da convergência da solução, serão resolvidas as equações (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3), para discretizações da viga em 3, 4 e 5 nós.

Com as condições de contorno birrotuladas, e a discretização da viga com 3 nós, conforme FIGURA 4.3.3,

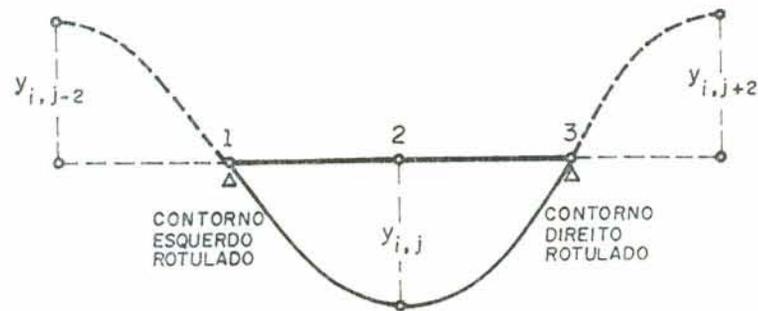


FIGURA 4.3.3 - Malha da viga com 3 nós em D.F.C. (N=3).

as equações (4.3.4), (4.3.5) e (4.3.6), de BERNOULLI, VLASOV e TIMOSHENKO, respectivamente, tomam a seguinte forma:

$$Y_{i+1,2} = 2(1-2C_z) Y_{i,2} - Y_{i-1,2} \quad (4.3.8)$$

$$Y_{i+1,2} = \frac{2}{2+A_z} (A_z - 2B_z + 2) Y_{i,2} - Y_{i-1,2} \quad (4.3.9)$$

$$Y_{i+1,2} = 2(C_a + 2C_b - 2C_c - 3) Y_{i,2} + (4 - C_a - 2C_b)(Y_{i+1,2} + Y_{i-1,2}) - Y_{i-2,2} \quad (4.3.10)$$

Já para 4 nós discretizados (N=4), mostrado na FIGURA 4.3.4, a componente do deslocamento no nó 2 é igual a do nó 3.

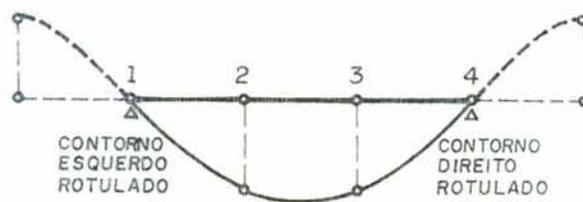


FIGURA 4.3.4 - Malha da viga com 4 nós em D.F.C. (N=4).

Substituindo as condições de contorno, conforme FIGURA 4.3.4, nas equações (4.3.4) a (4.3.6), chega-se nas seguintes equações:

$$Y_{i+1,2} = (2 - C_z) Y_{i,2} - Y_{i-1,2} \quad (4.3.11)$$

$$Y_{i+1,2} = \frac{1}{1+A_z} (2A_z - B_z + 2) Y_{i,2} - Y_{i-1,2} \quad (4.3.12)$$

$$Y_{i+2,2} = (2C_a + 2C_b - C_c - 6) Y_{i,2} + (4 - C_a - C_b)(Y_{i-1,2} + Y_{i+1,2}) - Y_{i-2,2} \quad (4.3.13)$$

E, por fim, serão obtidas as equações referentes a uma discretização da viga em 5 nós, mostrada na FIGURA 4.3.5. As condições de contorno e as condições iniciais estão relacionadas com as vibrações livres do primeiro modo; logo, as correspondentes componentes do deslocamento dos nós 2 e 4 são idênticas ($Y_{i+1,2} = Y_{i+1,4}$).

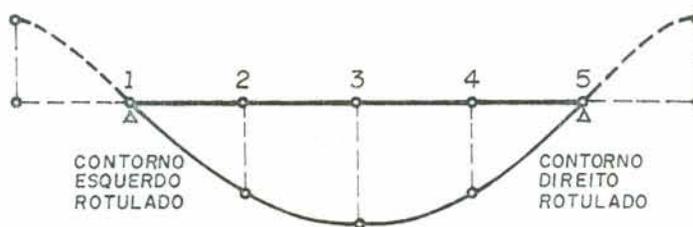


FIGURA 4.3.5 - Malha da viga com 5 nós em D.F.C. (N=5).

Para a discretização indicada na FIGURA 4.3.5, as equações resultantes, devido à substituição das condições de contorno nas equações (4.3.4) a (4.3.6), resultam respectivamente nos seguintes sistemas acoplados:

$$\begin{Bmatrix} Y_{i+1,2} \\ Y_{i+1,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (2-6C_z) & 0 & 4C_z \\ 0 & 8C_z & -1 & (2-6C_z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{i-1,2} \\ Y_{i,2} \\ Y_{i-1,3} \\ Y_{i,3} \end{Bmatrix} \quad (4.3.14)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_{i+1,2} \\ Y_{i+1,3} \end{Bmatrix} = \frac{-2}{(A_z^2 + 4A_z + 2)} \begin{bmatrix} 1 & (A_z/2 + 1) \\ (A_z + 2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & (2-4B_z) \\ (A_z + 2) & (6B_z - 2A_z - 4) \\ (A_z/2 + 1) & (3B_z + A_z - 2) \\ -1 & (2-4B_z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{i-1,2} \\ Y_{i,2} \\ Y_{i-1,3} \\ Y_{i,3} \end{Bmatrix} \quad (4.3.15)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_{i+2,2} \\ Y_{i+2,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (4-2C_b-C_a) & (2C_a-6C_c+4C_b-6) \\ 0 & 2C_b & (8C_c-4C_b) & 2C_b & -1 & (4-2C_b-C_a) \\ & & & (4-2C_b-C_a) & 0 & C_b & (4C_c-2C_b) & C_b \\ & & & & & & (4C_b+2C_a-6C_c-6) & (4-2C_b-C_a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{i-2,2} \\ Y_{i-1,2} \\ Y_{i,2} \\ Y_{i+1,2} \\ Y_{i-2,3} \\ Y_{i-1,3} \\ Y_{i,3} \\ Y_{i+1,3} \end{Bmatrix} \quad (4.3.16)$$

Pode-se observar que as equações (4.3.8), (4.3.9), (4.3.11), (4.3.12), (4.3.14) e (4.3.15), de BERNOULLI e VLASOV, possuem, de modo geral, as mesmas características; isto é, para se obter a componente do deslocamento do nó j no tempo $t+Dt$, deve ser conhecido o deslocamento nos tempos t e $t-Dt$. Já, para se obter o deslocamento no tempo $t+2Dt$ nas equações (4.3.10), (4.3.13) e (4.3.16), de TIMOSHENKO, deve-se conhecer as componentes do deslocamento nos tempos $t-2Dt$, $t-Dt$, t e $t+Dt$. Conseqüentemente, no caso de vigas esbeltas, onde a deformação por corte não tem influência significativa, se compararmos com as outras deformações, a utilização da equação diferencial de TIMOSHENKO apenas aumentaria o número de operações, e, por conseqüência, aumentaria o tempo de processamento. Dessa forma, pode-se admitir que a equação diferencial de VLASOV²⁵, para vigas esbeltas, reúne boas condições para resolver, de forma simples e precisa, o comportamento dinâmico das mesmas.

As curvas mostradas nas FIGURAS 4.3.6 a 4.3.8, que determinam as vibrações livres da viga não amortecida, foram obtidas mediante a utilização de programas em microcomputador. Como condição inicial das equações (4.3.8) a (4.3.16), admitindo vibrações harmônicas, foi utilizada uma função senoidal do tipo $Y = A \sin [(\pi s)/L]$, que estabelece as coordenadas iniciais de cada nó discretizado, para vibrações li-

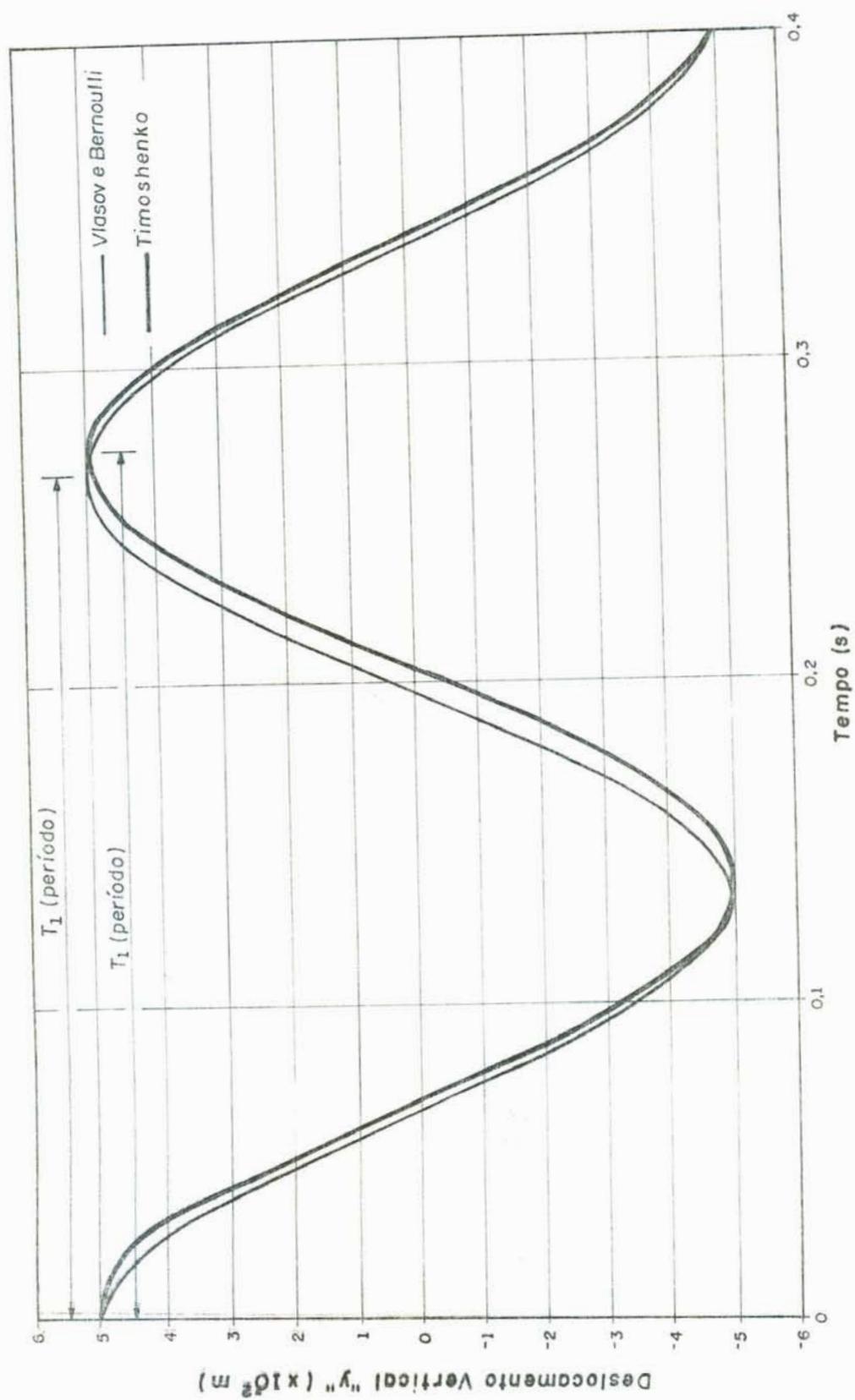


FIGURA 4.3.6 - Vibrações livres da viga com 3 nós
($N = 3$). $Dt \ll Dt_{crit.}$

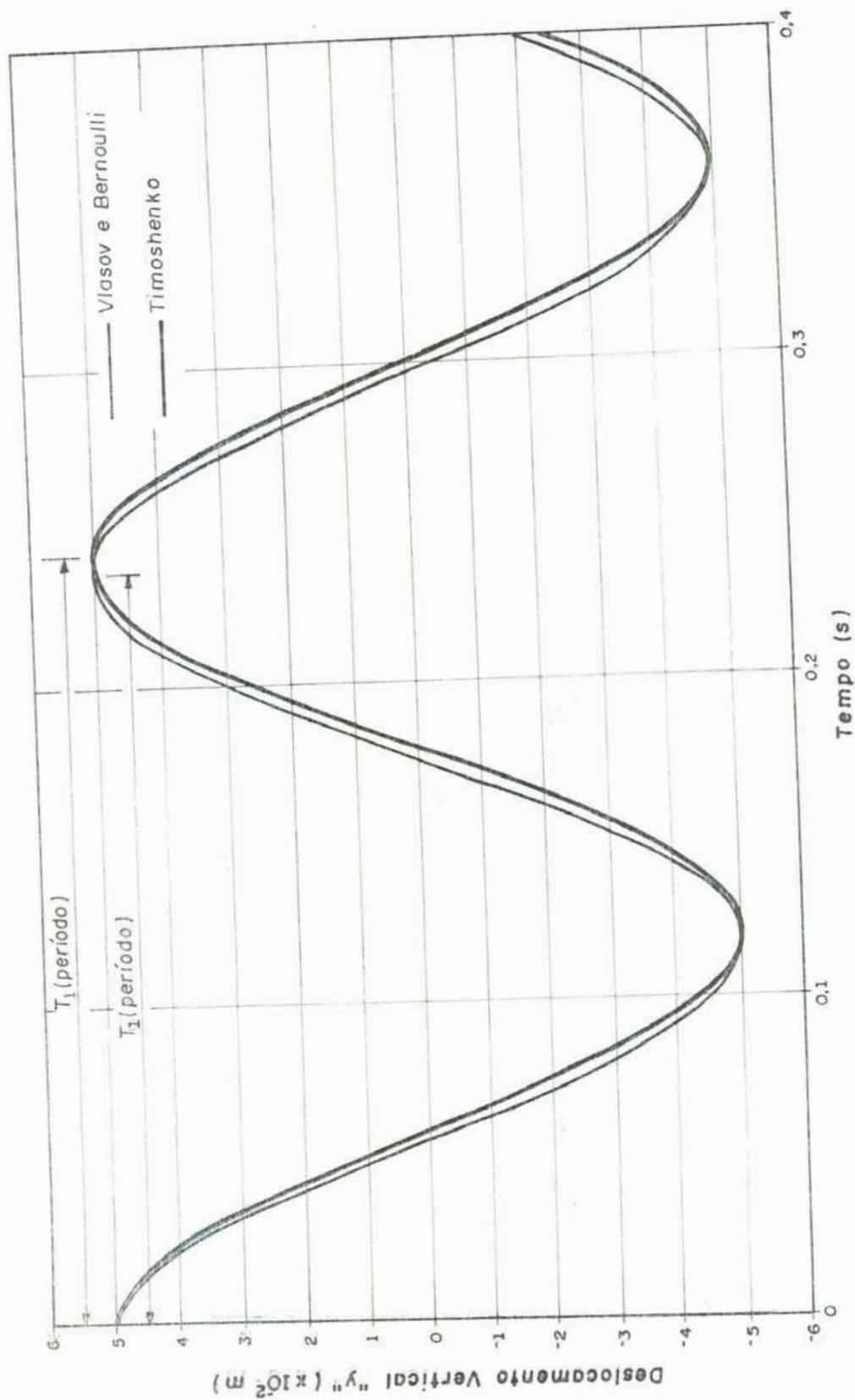


FIGURA 4.3.7 - Vibrações livres da viga com 4 nós ($N = 4$)

$$Dt \ll Dt_{crit.}$$

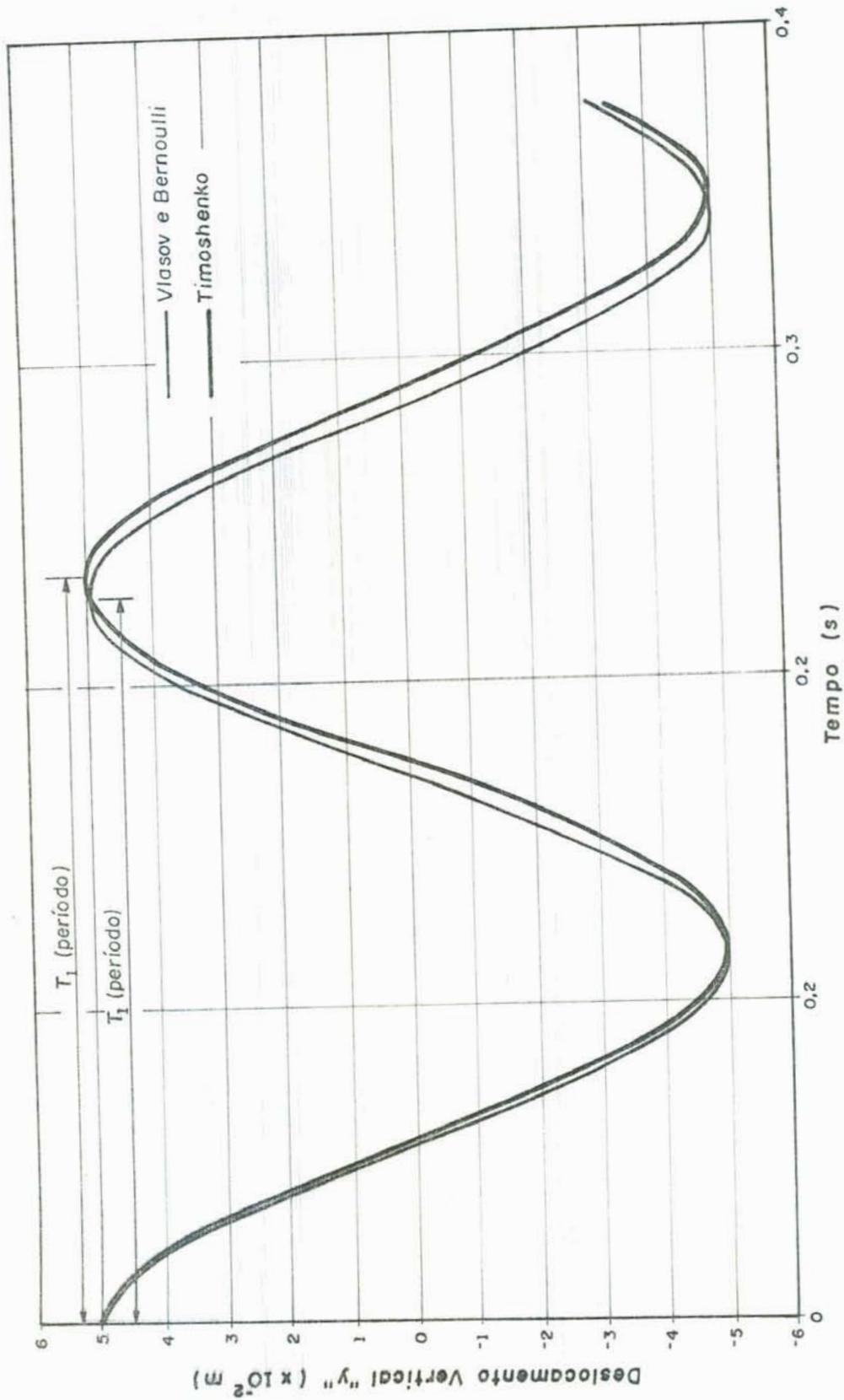


FIGURA 4.3.8 - Vibrações livres da viga com 5 nós ($N = 5$)
 $Dt \ll Dt_{crit.}$

vres no primeiro modo, sendo A a amplitude da onda, ou seja, o deslocamento máximo no meio do vão.

Para o exemplo, foi prescrito um valor para A de 0,05 m. As características da viga, adotadas para o exemplo, são as seguintes: $L=25\text{m}$; $A=1,085\text{ m}^2$; $I_z=0,312\text{ m}^4$; $\rho=2500\text{ kg/m}^3$; $E=2,88 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$; $\nu=0,2$; $\eta=1$; $G=1,2 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$.

Das FIGURAS 4.3.6 a 4.3.8, é possível obter-se graficamente a frequência fundamental de vibração. Para isso, basta extrair dessas curvas o período da onda (T_1), e, posteriormente, calcular a respectiva frequência $\omega=(2\pi)/T_1$ (rad/seg).

Admitindo que as vibrações são harmônicas, pode-se obter a resposta dinâmica da viga com uma solução do tipo:

$$Y(s, t) = K \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi s}{L} \right) \cos (\omega_n t) \quad (4.3.17)$$

Substituindo a equação (4.3.17) nas equações (4.3.1) a (4.3.3), chega-se nas seguintes soluções teóricas para as frequências naturais²⁴ das vigas de BERNOULLI, VLASOV e TIMOSHENKO, respectivamente:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c r \\ \omega_n &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c r \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 r^2}{2L^2} \right) \\ \omega_n &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c r \left[1 - \frac{n^2 \pi^2 r^2}{2L^2} \left(1 + \frac{\eta E}{G} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

onde $c = \sqrt{E/\rho}$ (velocidade de propagação de uma onda compressional do elemento), $r = \sqrt{I_z/A}$ e $n=1,2,3,\dots$ (modos de vibração).

Na TABELA 4.3.1, estão mostradas as frequências fundamentais, oriundas dos períodos de vibração, extraídos das curvas indicadas nas FIGURAS 4.3.6 a 4.3.8, e são comparadas com as frequências fundamentais teóricas, conforme equações (4.3.18).

TABELA 4.3.1 - Freqüências fundamentais (rad/seg), conforme FIGURAS 4.3.6, 4.3.7 e 4.3.8 ($Dt \ll Dt_{crít}$).

Equação diferencial	Número de nós discretizados			Solução teórica eqs. (4.3.18)
	3	4	5	
BERNOULLI	23,4	26,4	27,3	28,74
VLASOV	23,4	26,4	27,3	28,72
TIMOSHENKO	23,3	26,2	27,0	28,56

* Obs.: Dt crítico será definido na seção 4.4.

Observa-se que a diferença entre as freqüências fundamentais, de BERNOULLI, VLASOV e TIMOSHENKO, para um mesmo número de nós discretizados, é pequena. Verifica-se, também, a convergência dessas freqüências, obtidas pela discretização em D.F.C. com 3, 4 e 5 nós, para as freqüências fundamentais teóricas, obtidas das equações (4.3.18).

O método de D.F.C. permite chegar a uma melhor aproximação da solução exata para freqüências naturais usando a fórmula de Extrapolação de RICHARDSON²⁰ que é a seguinte:

$$\omega_{m_1, m_2} = \frac{\omega_{m_2} \frac{m_2}{2} - \omega_{m_1} \frac{m_1}{2}}{m_2 - m_1} \quad (4.3.19)$$

onde ω_{m_1, m_2} é a aproximação da solução exata, e m_i o número de intervalos ($m_i = L/Ds$).

A equação (4.3.19) pode ser aplicada no exemplo da TABELA 4.3.1, para as freqüências fundamentais obtidas de BERNOULLI com 3 e 4 nós ($N=3$ e $N=4$). Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} m_1 &= 4-1 = 3 & e & \omega_{m_1} = 23,4 \\ m_2 &= 3-1 = 2 & e & \omega_{m_2} = 26,4. \end{aligned}$$

Então,

$$\omega_{m_1, m_2} = \frac{26,4.3^2 - 23,4.2^2}{3^2 - 2^2} = 28,8 \text{ rad/seg.} \quad (4.3.20)$$

Para este exemplo, a aproximação da solução exata de (4.3.20) se aproxima muito da solução dada por (4.3.18), onde a frequência é de 28,74 rad/seg.

4.4. Estudo da Estabilidade do Método de D.F.C. (Diferenças Finitas Centrais) aplicado na Equação de BERNOULLI

Um dos inconvenientes do método de D.F.C. é a sua estabilidade condicional. Para que este método de integração seja estável, é necessário que o intervalo de tempo, Dt , seja menor que um valor crítico (Dt_{cr}). Devido a essa condição, o método de D.F.C. é chamado de **CONDICIONALMENTE ESTÁVEL**.

São duas as razões fundamentais que justificam a necessidade de se obter o valor de Dt_{cr} : a primeira, a mais importante, diz respeito à condição básica de estabilidade mencionada acima, pois sem ela os resultados obtidos da solução não terão significado; a segunda, se relaciona com o tempo de processamento gasto para a resolução de um determinado problema; isto é, quanto menor for o intervalo de tempo (Dt) escolhido, maior será o número de operações. Isso acontece porque, no método de D.F.C., o problema é resolvido progressivamente a cada incremento de tempo ($t_{i+1} = t_i + Dt$), até o tempo final (t_f) desejado.

Portanto, o intervalo de tempo a ser adotado para a solução do problema não deve ser tão grande que possa tornar o método instável, nem tão pequeno que torne o método inviável computacionalmente, quanto ao tempo de processamento.

Com base nas observações citadas acima, torna-se necessário o conhecimento do intervalo crítico do método de Diferenças Finitas Centrais. É com este propósito que, neste capítulo, será avaliado o valor do intervalo de tempo crítico (Dt_{cr}), para o caso da equação diferencial de BERNOULLI.

Em geral, existem duas formas para se determinar o limite crítico de estabilidade do método: uma forma por sim-

ples tentativas, isto é, arbitra-se o valor para Dt e observa-se o comportamento numérico da solução para condições iniciais arbitrárias; na segunda, Dt_{cr} é obtido diretamente de uma solução fechada, cujo valor é função das características da viga e do número de nós discretizados.

É justamente com o objetivo de determinar, de forma fechada, o intervalo de tempo na qual o método de integração seja estável, que a seguir analisará a equação diferencial de BERNOULLI (4.3.1).

Serão examinados, agora, os dois casos onde a viga possui, devido à simetria dos nós, apenas um grau de liberdade, correspondente a uma discretização com 3 e 4 nós, indicados nas FIGURAS 4.3.3 e 4.3.4. Nesses casos, a equação resultante, para condições iniciais arbitrárias, toma a seguinte forma:

$$Y_{i+1,j} = C Y_{i,j} - Y_{i-1,j} \quad (4.4.1)$$

onde $C = 2(1-2C_z)$ para 3 nós ($N=3$), conforme equação (4.3.8); e $C = (2-C_z)$ para 4 nós ($N=4$), conforme equação (4.3.11).

A estabilidade da equação (4.4.1) deve obedecer à seguinte condição:

$$0 < C < 2 \quad (4.4.2)$$

Aplicando a condição de estabilidade (4.4.2) nas equações (4.3.8) e (4.3.11) chega-se, finalmente, no seguinte limite para o intervalo de tempo (Dt), que torna estável o método de D.F.C.:

$$\text{Para 3 nós (N=3)} \quad Dt < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho A Ds^4}{E I_z}} \quad (4.4.3)$$

$$\text{Para 4 nós (N=4)} \quad Dt < \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho A Ds^4}{E I_z}} \quad (4.4.4)$$

Observando-se os limites de estabilidade das equações (4.4.3) e (4.4.4), conclui-se que o intervalo de tempo

crítico (Dt_{cr}) é função de uma constante β , premultiplicando uma relação entre os parâmetros que definem as características da viga. Com isso, no caso geral onde a viga é discretizada em uma malha com N nós, pode-se admitir que o limite de estabilidade possa ser expressado da seguinte forma:

$$Dt < \beta \sqrt{\frac{\rho A Ds^4}{E I_z}} \quad (4.4.5)$$

onde β assume um determinado valor para cada tipo de discretização. É com o objetivo de obter os valores de β , em função do número de nós discretizados, que a seguir será investigado um outro critério de estabilidade, diferente de (4.4.2), para sistemas com mais de um grau de liberdade; isto é, para $N > 4$ nós.

Para a malha de N nós em D.F.C., mostrada na FIGURA 4.3.2, a solução da equação (4.3.4), de BERNOULLI, para condições iniciais arbitrárias, é:

$$\vec{Y}_{t+nDt} = \mathbf{A}^n \vec{Y}_t \quad (4.4.6)$$

onde, para $n=1$,

$$\vec{Y}_{t+Dt} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{i+1,2} \\ Y_{i+1,3} \\ \vdots \\ Y_{i+1,N*/2} \\ Y_{i+1,N*/2+1} \\ \dots\dots\dots \\ \bar{Y}_{i,2} \\ \bar{Y}_{i,3} \\ \vdots \\ Y_{i,N*/2} \\ Y_{i,N*/2+1} \end{array} \right\} \quad e \quad \vec{Y}_t = \left\{ \begin{array}{c} Y_{i,2} \\ Y_{i,3} \\ \vdots \\ Y_{i,N*/2} \\ Y_{i,N*/2+1} \\ \dots\dots\dots \\ Y_{i-1,2} \\ Y_{i-1,3} \\ \vdots \\ Y_{i-1,N*/2} \\ Y_{i-1,N*/2+1} \end{array} \right\},$$

Na análise, é usada a seguinte decomposição espectral de A :

$$A^n = V J^n V^{-1} \quad (4.4.7)$$

onde V é a matriz dos autovalores de A , e J é a forma Jordan de A com os autovalores λ_i de A na diagonal. A matriz A tanto pode ser simétrica como assimétrica.

Seja $\rho(A)$ o raio espectral de A definido como

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|; \quad i=1,2 \dots \quad (4.4.8)$$

então J^n é limitado para $n \rightarrow \infty$ se e somente se,

$$\rho(A) < \text{ou} = 1. \quad (4.4.9)$$

Esse é o nosso critério de estabilidade da equação (4.4.6). E mais ainda, $J^n \rightarrow 0$ se $\rho(A) < 1$; e quanto menor for $\rho(A)$, mais rápida será a convergência do método de D.F.C.

Visto que a estabilidade do método de integração depende somente dos autovalores $[\rho(A)]$, torna-se conveniente aplicar um método de solução que obtenha o maior autovalor de A .

No nosso caso, a matriz A , referente à (4.4.6), é assimétrica e pode possuir autovalores complexos do tipo $\lambda_{m,n} = u \pm \omega i$.

Um dos métodos que calcula o maior autovalor de matrizes não simétricas, e que admite autovalores complexos, é o método de Iteração Matricial¹⁴. Para começar a iteração, partiu-se de um vetor inicial $\vec{\phi}_0$ com um elemento unitário e os demais elementos iguais a zero e escrevemos:

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1 &= A \vec{\phi}_0 \\ \vec{\phi}_2 &= A \vec{\phi}_1 = A^2 \vec{\phi}_0 \\ &\vdots \\ \vec{\phi}_s &= A^s \vec{\phi}_0 \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

No procedimento descrito, age-se da seguinte maneira, calculando-se as quantidades:

$$u^2 + \omega^2 = \frac{E_{s+1} E_{s+3} - E_{s+2}^2}{E_s E_{s+2} - E_{s+1}^2} \quad (4.4.11)$$

$$2u = \frac{E_s E_{s+3} - E_{s+1} E_{s+2}}{E_s E_{s+2} - E_{s+1}^2}$$

Quando o inteiro s assume valores expressivos, as quantidades $u^2 + \omega^2$ e $2u$ tendem a valores constantes; desta forma, obtém-se os dois autovalores complexos conjugados,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u + \omega i \\ \lambda_2 &= u - \omega i \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Os elementos $E_s, E_{s+1} \dots$ são os elementos dos vetores $\vec{\phi}_s, \vec{\phi}_{s+1}, \dots$ correspondendo à posição do elemento não nulo do vetor inicial $\vec{\phi}_0$.

As equações (4.4.11) fornecem a magnitude e a parte real dos autovalores complexos conjugados λ_1 e λ_2 , indicados na equação (4.4.12).

São agora, depois de definidos o critério de estabilidade do método de D.F.C. e o método para a obtenção dos autovalores complexos, é que pode-se determinar os valores de β referente à equação (4.4.5).

Foi elaborado um programa em microcomputador, que determina os autovalores de \mathbf{A} , e possibilita a verificação do critério de estabilidade, descrito em (4.4.9), do sistema (4.4.6).

Com isso, foram estabelecidos os valores de β da equação (4.4.5), em função do número N de nós discretizados, conforme malha indicada na FIGURA 4.3.2. Os valores de β , para condições de contorno biengastada e birrotulada, estão indicados nas TABELAS 4.4.1 e 4.4.2, e na FIGURA 4.4.1.

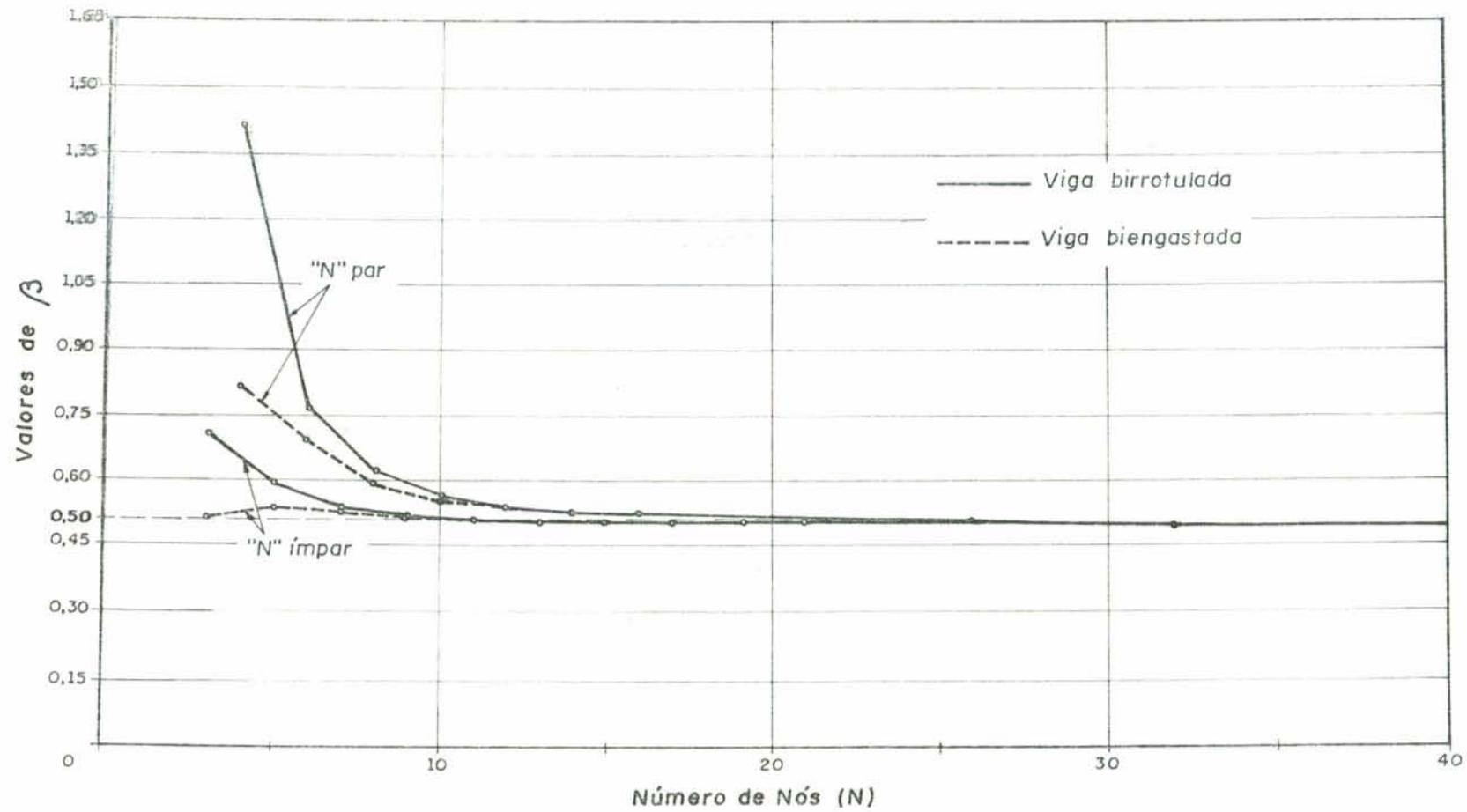


FIGURA 4.4.1 - Estabilidade do método de Diferenças Finitas Centrais para BERNOULLI.

TABELA 4.4.1 - Valores de $\beta \cdot 1000$ para N ímpar.

Número de nós (N)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Birrotulada	707	592	539	522	511	510	508	507	506	504
Biengastada	500	540	531	518	511	510	508	507	506	504

TABELA 4.4.2 - Valores de $\beta \cdot 1000$ para N par.

Número de nós (N)	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
Birrotulada	1414	764	618	565	542	530	524	517	515	512	511	510	509
Biengast.	816	691	594	556	540	530	524	517	515	512	511	510	509

Os valores de β , indicados nas TABELAS 4.4.1 e 4.4.2 e na FIGURA 4.4.1, dependem exclusivamente do número de nós discretizados (N), podendo ser aplicados na obtenção do limite de estabilidade do método de D.F.C., em vigas retas e seção transversal com dupla simetria.

Observa-se das TABELAS 4.4.1 e 4.4.2 e da FIGURA 4.4.1 que, quando o número de nós (N) cresce, o valor de β tende a 0,5.

Pode-se concluir, neste estudo da estabilidade do método de D.F.C., aplicado na equação diferencial de BERNOULLI, que é possível obter-se uma solução fechada para o intervalo crítico de integração. Esse mesmo estudo poderia se estender ainda mais; por exemplo, poderia ser aplicado também nas equações diferenciais de VLASOV e TIMOSHENKO, mas, certamente, as dificuldades associadas às mesmas serão maiores que as dificuldades encontradas no caso da equação diferencial de BERNOULLI.

Cabe ressaltar também que em vigas curvas, e se a seção transversal não possui dupla simetria, ou seja, no caso

onde as equações diferenciais são acopladas entre flexão e torção, o estudo da estabilidade do método de D.F.C. é dificultado ainda mais, podendo ser praticamente inexeqüível.

Deve-se sublinhar, finalmente, que o intervalo crítico para a viga de BERNOULLI, na presente formulação, é maior que no método de DFC quando a viga é previamente discretizada no espaço mediante Elementos Finitos, em cujo caso, se em cada nó existem duas coordenadas (deslocamento normal a linha média e giro), tem-se que:

$$Dt < \frac{1}{6} \sqrt{\frac{\rho A Ds^4}{E I_z}}, \quad (4.4.13)$$

e, se as equações são condensadas estaticamente, ficando só o deslocamento normal como incógnita em cada nó:

$$Dt < \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\rho A Ds^4}{E I_z}}. \quad (4.4.14)$$

5. VIGAS CURVAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA E PAREDE FINA SUBMETIDAS A CARGAS EM MOVIMENTO

5.1. Considerações Fundamentais

Embora a maioria dos estudos anteriores tenham sido concentrados nas interações veículo-vão reto, vãos curvos têm também recebido atenção com análises dinâmicas direcionadas para configurações horizontais, simplesmente apoiadas ou engastadas, sujeitas a cargas de trânsito horizontal e vertical.

Com o uso crescente de vigas curvas em estruturas de pontes rodoviárias e ferroviárias, consideráveis esforços têm sido direcionados para o desenvolvimento de métodos seguros e convenientes para a análise das mesmas.

No entanto, não foram encontrados na bibliografia técnica trabalhos relacionados com a análise dinâmica de vigas curvas de seção transversal aberta e parede fina que considerem acoplamento entre as vibrações forçadas longitudinais, horizontais ou transversais, verticais e torcionais.

As equações diferenciais parciais de segunda e quarta ordem, acopladas em flexão vertical, horizontal e torção, representam um difícil problema de valores de contorno. Essas resultam ainda mais complexas com a adição das equações acopladas de movimento do veículo.

Neste capítulo, também serão analisadas as parcelas das equações diferenciais de movimento, relativas ao amortecimento da estrutura.

Como solução do problema dinâmico, proposto neste capítulo, foi elaborado um programa no computador B-6700, na linguagem ALGOL, chamado de VIGADIN. O programa determina,

no instante de tempo desejado, os deslocamentos axiais, verticais, horizontais e giros, e os respectivos esforços internos: cortantes, momentos fletores, normais, torção de empenamento, torção de St. Venant e bimomento.

5.2. Consideração do Amortecimento da Estrutura

Será admitido que o amortecimento é do tipo Viscoso ou de Newton, quer dizer, proporcional à velocidade e que pode ser introduzido como cargas externas não acopladas nas direções das coordenadas x , y , z e θ . O coeficiente de proporcionalidade será designado por α , multiplicando em todos os casos a massa específica ρ .

No caso da coordenada y , a parcela do amortecimento é:

$$\rho A \alpha \frac{\partial y}{\partial t}; \quad (5.2.1)$$

e para a coordenada z :

$$\rho A \alpha \frac{\partial z}{\partial t}; \quad (5.2.2)$$

quanto ao giro θ , a parcela do amortecimento fica:

$$\rho A r^2 \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad (5.2.3)$$

e, por final, resta a parcela relativa à coordenada x , que é:

$$\rho A \alpha \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (5.2.4)$$

As parcelas do amortecimento, indicadas nas equações (5.2.1) a (5.2.4), serão introduzidas nas equações diferenciais da viga curva analisada na seção 5.4.

5.3. Especificação do Carregamento Externo

A distribuição das cargas aplicadas na viga curva horizontal, para o veículo em movimento com velocidade constante, é determinada pela combinação das forças horizontais, verticais, axiais e momentos torçores.

As forças axiais, ou ditas longitudinais, são aplicadas na viga pelo atrito de rolamento, isto é, pelo efeito da aderência roda-trilho devido à frenagem ou à aceleração do veículo. Cada eixo possui a seguinte componente dessa força:

$$P_{x_i}(s, t) = \delta(s - Vt) m_i g \mu, \quad i=1,2,\dots,NEC \quad (5.3.1)$$

onde $\delta(s-Vt)$ é a função de Dirac; ou seja, quando $s=Vt$, $\int_0^L \delta(s-Vt) ds = 1$, e quando $s \neq Vt$, $\delta(s-Vt) = 0$; g a aceleração da gravidade; μ o coeficiente de aderência ou atrito de rolamento; s a posição do eixo i no instante de tempo t ; V a velocidade do veículo; m_i a massa correspondente ao eixo i ; e NEC o Número de Eixos Carregados do veículo.

Já as forças horizontais radiais $P_{z_i}(s,t)$ são aplicadas na viga pela contribuição de duas parcelas. A primeira corresponde a uma força harmônica ocasionada pelas vibrações radiais do veículo; a segunda é devida à força centrífuga requerida para manter a trajetória curvada do veículo, descrita pelo raio constante R . Neste caso, as componentes das cargas de cada eixo são dadas por

$$P_{z_i}(s, t) = \delta(s - Vt) \left[m_i g C_2 \cos(\omega_z t + \phi_{z_i}) - \frac{m_i V^2}{R} \right] \quad (5.3.2)$$

onde C_2 é a constante que determina a amplitude das flutuações da carga harmônica; ω_z a frequência de oscilação de cada eixo carregado; ϕ_{z_i} o ângulo de fase das vibrações do eixo i ; e R o raio de curvatura horizontal da viga.

As cargas verticais $P_{y_i}(s, t)$ possuem também a contribuição de duas parcelas: a primeira corresponde à car-

ga do eixo i não oscilatória, quer dizer, com amplitude constante ao longo do tempo; a segunda, a uma força harmônica oriunda das oscilações verticais da massa do veículo, relativa ao eixo i . Assim, as cargas tomam a seguinte configuração:

$$P_{y_i}(s, t) = \delta(s - Vt) \left[m_i g + m_i g C_1 \cos(\omega_y t + \phi_{y_i}) \right] \quad (5.3.3)$$

sabendo-se que C_1 é a constante que determina a amplitude das flutuações da carga harmônica; ω_y a frequência de oscilação de cada eixo carregado na direção y ; ϕ_{y_i} o ângulo de fase de vibração do eixo i na direção y .

E, por final, os momentos torçores $M_{t_i}(s, t)$ são determinados pela atuação das cargas verticais e horizontais não centrados com respeito do centro de corte da seção transversal da viga, e também por momentos torçores harmônicos ocasionados pelo movimento rotacional do veículo. A expressão final desses momentos torçores, relativos a cada eixo i do veículo, fica descrita da seguinte forma:

$$M_{t_i}(s, t) = \delta(s - Vt) \left[P_{z_i}(a_y - H_1) + P_{y_i}(H_2 - a_z) + m_i g C_3(a_y - H_1) \cos(\omega_\theta t + \phi_{\theta_i}) \right] \quad (5.3.4)$$

onde a_y e a_z são, respectivamente, as coordenadas do centro de corte em relação aos eixos y e z ; H_1 a distância da aplicação das cargas P_{z_i} ao centro de corte; H_2 a distância da aplicação das cargas P_{y_i} ao centro de flexão; ω_θ a frequência de oscilação angular ou rotacional do veículo; e ϕ_{θ_i} o ângulo de fase dessas oscilações, referentes ao eixo i .

As equações (5.3.1) a (5.3.4), relativas ao carregamento externo, serão consideradas na definição das equações diferenciais da viga, na seção que segue.

5.4. Equações Diferenciais de Movimento

O modelo matemático adotado neste trabalho corresponde a uma viga curva circular de parede fina e aberta com as propriedades constantes ao longo de seu comprimento, possuindo raio de curvatura R constante no plano normal ao eixo vertical y . A espessura das paredes é pequena em relação às outras dimensões da seção transversal; por outro lado, as dimensões da seção transversal são pequenas em relação ao comprimento.

Para o caso de vigas retas, basta considerar o raio de curvatura muito grande, tendendo a infinito.

Essas características geométricas da viga curva de seção aberta e parede fina estão mostradas na FIGURA 5.4.1, onde a coordenada s define o comprimento de arco medido a partir do extremo da viga.

A teoria de viga com seção aberta de VLASOV²⁵ está baseada nas seguintes hipóteses:

- a seção transversal não é deformável, isto é, é rígida no seu plano, mas pode empenar livremente;

- as deformações devido às tensões de cisalhamento no plano médio da viga são desprezíveis (ou seja, o sistema de coordenadas retangulares da superfície média continua retangular mesmo depois da deformação), a partir das quais podem ser obtidas as seguintes equações diferenciais de movimento em vigas de seção uniforme, aberta e eixo curvo:

$$\begin{aligned}
 & E \left(I_z + \frac{I_\omega}{R^2} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \frac{GK_t}{R^2} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{EI_\omega}{R} \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^4} - \frac{(EI_z + GK_t)}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \\
 & + \rho A \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho I_z \left(\frac{\partial^4 y}{\partial s^2 \partial t^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \rho A \alpha \frac{\partial y}{\partial t} = \\
 & = P_{y_i}(s, t)
 \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

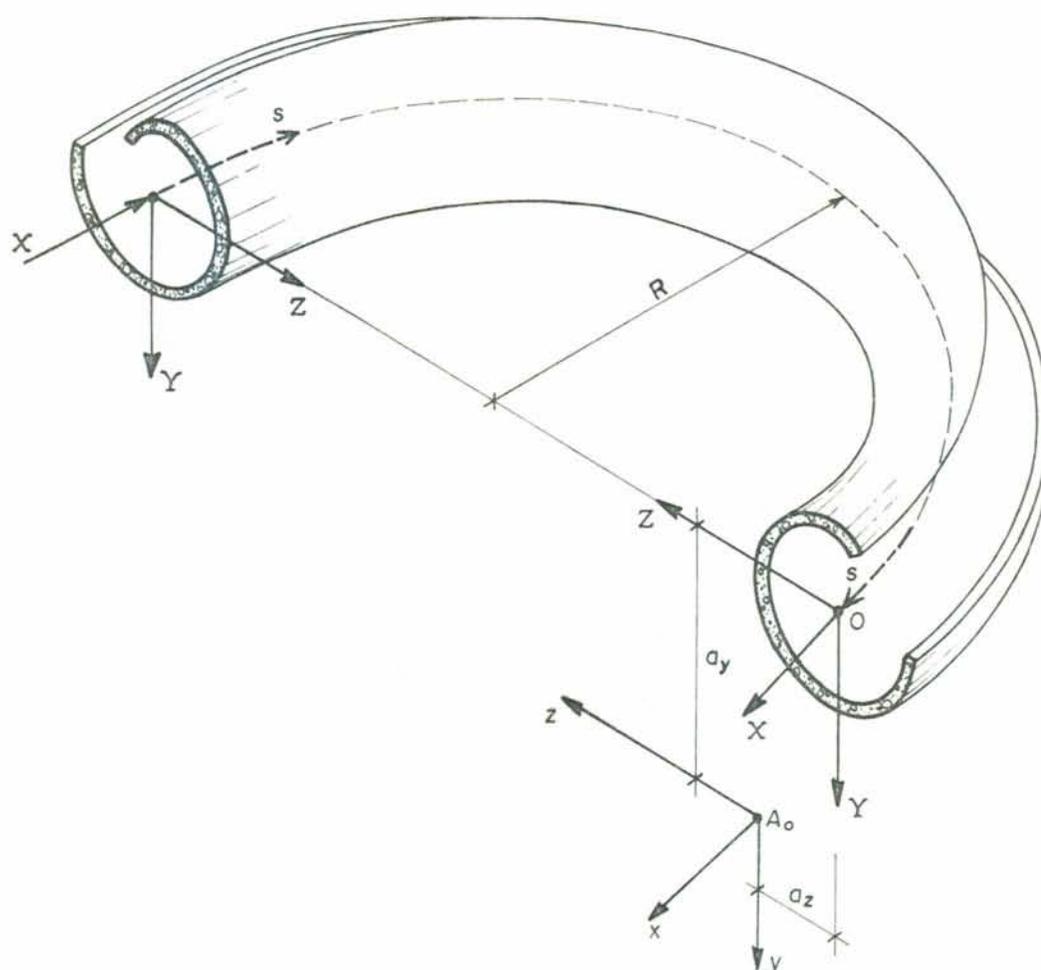


FIGURA 5.4.1 - Características geométricas e notação da viga curva de seção aberta e parede fina.

$$EI_y \left(\frac{\partial^4 z}{\partial s^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) + \frac{EA}{R} \left(\frac{z}{R} + \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \rho A \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) -$$

$$- \rho A r_y^2 \left(\frac{\partial^4 z}{\partial s^2 \partial t^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) + \rho A \alpha \frac{\partial z}{\partial t} = P_{zi}(s, t) \quad (5.4.2)$$

$$EI_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^4} + \frac{EI_\omega}{R} \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \frac{(EI_z + GK_t)}{R} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - GK_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \frac{EI_z}{R^2} \theta +$$

$$+ \rho A \left(r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a_z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \rho I_\omega \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial s^2 \partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 y}{\partial s^2 \partial t^2} \right) +$$

$$+ \rho A r^2 \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} = M_{ti}(s, t) \quad (5.4.3)$$

$$- \frac{EI_y}{R} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial s^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial z}{\partial s} \right) - EA \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \rho A \alpha \frac{\partial x}{\partial t} = P_{xi}(s, t) \quad (5.4.4)$$

onde,

$x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$ - deslocamentos nas direções axial, vertical e lateral, respectivamente;

$\theta(s, t)$ - giro da seção transversal ao redor do centro de corte A_o ;

$P_{xi}(s, t)$, $P_{yi}(s, t)$, $P_{zi}(s, t)$ - projeções das cargas externas nas direções x , y e z , respectivamente, por unidade de comprimento, indicadas na seção 5.3;

$M_{ti}(s, t)$ - momento torçor devido às cargas externas, em torno do centro de corte A_o , por unidade de comprimento, indicado na seção 5.3;

E - módulo de Young do material;

$G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$ = módulo de elasticidade transversal do material;

α - coeficiente de proporcionalidade ou constante de amortecimento;

ν - coeficiente de Poisson do material da viga;

\hat{A} = área da seção transversal;

ρ - massa específica do material da viga;

R - raio de curvatura;

GK_t - rigidez torcional da seção;

K_t - constante de torção de St. Venant;

I_y, I_z - momentos de inércia com relação aos eixos y e z , respectivamente;

$I_\omega = \int_A \phi^2 dA$ - constante de empenamento (momento setorial de inércia);

ϕ - coordenada setorial normalizada;

a_y, a_z - coordenadas do centro de flexão A_0 tomadas ao longo dos eixos principais Y e Z (FIGURA 5.4.1), respectivamente;

$r_y^2 = I_y/A, r_z^2 = I_z/A$ - raio de giração com relação aos eixos principais y e z ;

$r_\omega^4 = I_\omega/A$;

$r^2 = a_y^2 + a_z^2 + r_y^2 + r_z^2$.

As equações (5.4.2) e (5.4.4) são acopladas em termos de x e z , e governam o comportamento da viga na deformação axial e flexão com respeito ao eixo Y , usualmente o eixo secundário. Portanto, o comportamento flexural do eixo secundário é afetado pela extensibilidade do membro. Similarmente, as equações (5.4.1) e (5.4.3) são acopladas em termos de y e θ , e descrevem o problema da flexão com relação ao eixo z e torção. Conseqüentemente, pelo acoplamento das equações (5.4.1) a (5.4.4), a solução das mesmas se dá simultaneamente.

Analisando individualmente os termos que compõem as equações (5.4.1) a (5.4.4), constata-se que elas se mostram inconsistentes, isto é, possuem coeficientes de rigidez e de massa não simétricos. Uma análise mais detalhada deste problema é apresentada na seção 6.2. Entretanto, para que essas equações resultem consistentes, foram consideradas as seguintes alterações:

- na equação (5.4.1),
$$\frac{\rho I_z}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 ;$$

- na equação (5.4.3),
$$\frac{\rho I_\omega}{R} \frac{\partial^4 y}{\partial s^2 \partial t^2} = 0 ; \quad (5.4.5)$$

- na equação (5.4.4),
$$\frac{EI_y}{R} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial s^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial z}{\partial s} \right) = 0 .$$

A solução simultânea das equações (5.4.1) a (5.4.4), considerando as alterações indicadas em (5.4.5), será discutida na próxima seção.

5.5. Solução Numérica das Equações Diferenciais de Movimento pela Aplicação de Diferenças Finitas Centrais

Será empregado, a seguir, um procedimento de solução baseado na integração numérica simultânea na coordenada espacial s e no tempo t . Para esse objetivo, os operadores diferenciais nas equações (5.4.1) a (5.4.4) serão substituídos por aproximações em Diferenças Finitas Centrais, de acordo com o esquema indicado na FIGURA 5.5.1.

Introduzindo os operadores das FIGURAS 4.2.3 a 4.2.6 na equação (5.4.1), no ponto (i,j) da retícula, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{EI_z^*}{Ds^4} (y_{i,j-2} - 4y_{i,j-1} + 6y_{i,j} - 4y_{i,j+1} + y_{i,j+2}) - \frac{GK_t}{R^2 Ds^2} (y_{i,j-1} - \\
 & - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}) + \frac{EI_\omega}{R Ds^4} (\theta_{i,j-2} - 4\theta_{i,j-1} + 6\theta_{i,j} - 4\theta_{i,j+1} + \\
 & + \theta_{i,j+2}) - \frac{EI_z + GK_t}{R Ds^2} (\theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}) + \frac{\rho A}{Dt^2} (y_{i-1,j} - \\
 & - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}) - \frac{\rho A}{Dt^2} a_z (\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}) - \\
 & - \frac{\rho A r_z^2}{Ds^2 Dt^2} (y_{i-1,j-1} - 2y_{i-1,j} + y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j-1} + 4y_{i,j} - \\
 & - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j-1} - 2y_{i+1,j} + y_{i+1,j+1}) + \frac{\rho A \alpha}{2Dt} (y_{i+1,j} - \\
 & - y_{i-1,j}) = P y_{i,j} \tag{5.5.1}
 \end{aligned}$$

$$\text{onde } I_z^* = I_z + I_\omega / R^2.$$

Da mesma forma, a equação (5.4.2) resulta:

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{Ds^4} (z_{i,j-2} - 4z_{i,j-1} + 6z_{i,j} - 4z_{i,j+1} + z_{i,j+2}) + \frac{EI}{R^2 Ds^2} (z_{i,j-1} - \\
& - 2z_{i,j} + z_{i,j+1}) + \frac{EA}{2RDs} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \frac{EA}{R^2} z_{i,j} + \\
& + \frac{\rho A}{Dt^2} (1 - r_y^2/R^2) (z_{i-1,j} - 2z_{i,j} + z_{i+1,j}) - \frac{\rho A a_y}{Dt^2} (\theta_{i-1,j} - \\
& - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}) - \frac{\rho A r_y^2}{Ds^2 Dt^2} (z_{i-1,j-1} - 2z_{i-1,j} + z_{i-1,j+1} - \\
& - 2z_{i,j-1} + 4z_{i,j} - 2z_{i,j+1} + z_{i+1,j-1} - 2z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1}) + \\
& + \frac{\rho A \alpha}{2Dt} (z_{i+1,j} - z_{i-1,j}) = P_{z_{i,j}} \quad (5.5.2)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para a equação (5.4.3) correspondente ao giro θ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{Ds^4} (\theta_{i,j-2} - 4\theta_{i,j-1} + 6\theta_{i,j} - 4\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j+2}) + \frac{EI}{RDs^4} (y_{i,j-2} - \\
& - 4y_{i,j-1} + 6y_{i,j} - 4y_{i,j+1} + y_{i,j+2}) - \frac{EI_z + GK_t}{RDs^2} (y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + \\
& + y_{i,j+1}) - \frac{GK_t}{Ds^2} (\theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}) + \frac{EI_z}{R^2} \theta_{i,j} + \\
& + \frac{\rho A r^2}{Dt^2} (\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}) + \frac{\rho A a_y}{Dt^2} (z_{i-1,j} - 2z_{i,j} + \\
& + z_{i+1,j}) - \frac{\rho A a_z}{Dt^2} (y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}) - \frac{\rho A r^4}{Ds^2 Dt^2} (\theta_{i-1,j-1} - \\
& - 2\theta_{i-1,j} + \theta_{i-1,j+1} - 2\theta_{i,j-1} + 4\theta_{i,j} - 2\theta_{i,j+1} + \theta_{i+1,j-1} - \\
& - 2\theta_{i+1,j} + \theta_{i+1,j+1}) + \frac{r^2 \rho A \alpha}{2Dt} (\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}) = M_{t_{i,j}} \quad (5.5.3)
\end{aligned}$$

Finalmente, para o caso da equação (5.4.4), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& - \frac{EA}{2RDs} (z_{i,j+1} - z_{i,j-1}) - \frac{EA}{Ds^2} (x_{i,j-1} - 2x_{i,j} + x_{i,j+1}) + \\
& + \frac{\rho A}{Dt^2} (x_{i-1,j} - 2x_{i,j} + x_{i+1,j}) + \frac{\rho A \alpha}{2Dt} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) = P_{x_{i,j}}
\end{aligned}
\tag{5.5.4}$$

Observa-se na equação (5.5.4) que a única incógnita no tempo $t+Dt$ é $x_{i+1,j}$, sendo que as demais parcelas correspondem às componentes do deslocamento nos tempos t e $t-Dt$, podendo, dessa forma, ser resolvida independente das demais equações.

Já as equações (5.5.1), (5.5.2) e (5.5.3) possuem acoplamento das incógnitas y , z e θ no tempo $t+Dt$ para os nós $j-1$, j e $j+1$, conforme retícula indicada na FIGURA 5.5.1.

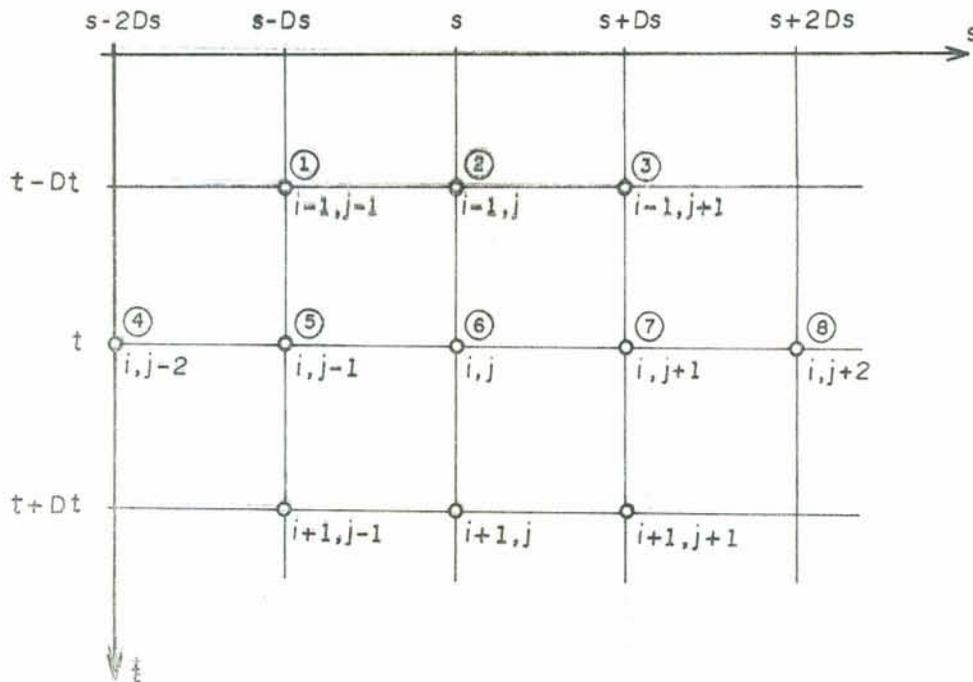


FIGURA 5.5.1 - Retícula no plano $s-t$ para solução do sistema em Diferenças Finitas Centrais.

Além disso, verifica-se nessa figura, que para a obtenção das incógnitas y , z e θ , referentes aos nós $j-1$, j e $j+1$, devem ser conhecidas as incógnitas em outros 8 (oito) pontos da retícula, correspondentes aos tempos t e $t-Dt$.

Com o objetivo de operar com matrizes cujos elementos sejam adimensionais, as equações (5.5.1), (5.5.2) e (5.5.3) são multiplicadas, tanto o primeiro como o segundo membro, por:

$$\frac{Dt^2}{A \rho} ;$$

também, toda a equação (5.5.3) é dividida por Ds e todas as parcelas das equações (5.5.1), (5.5.2) e (5.5.3) que possuem o giro θ , são divididas também por Ds .

Organizando em forma matricial as equações (5.5.1), (5.5.2) e (5.5.3), chega-se no seguinte sistema local para solução dos deslocamentos y , z e giro θ no tempo $t+Dt$:

$$\mathbf{B} \vec{V} = - \mathbf{C} \vec{P} + \vec{Q} \quad (5.5.5)$$

onde,

$$\vec{Q} = \left\{ \begin{array}{l} P_{y_{i,j}}(s, t) \frac{Dt^2}{A \rho} \\ P_{z_{i,j}}(s, t) \frac{Dt^2}{A \rho} + \frac{EDt^2}{2\rho DsR} (x_{i,j-1} - x_{i,j+1}) \\ M_{t_{i,j}}(s, t) \frac{Dt^2}{A \rho Ds} \end{array} \right\} .$$

Já os vetores \vec{P} e \vec{V} são definidos da seguinte forma:

$$\vec{P} = \left\{ \begin{array}{c} y_{i-1,j-1} \\ z_{i-1,j-1} \\ \theta_{i-1,j-1} \\ \dots\dots\dots \\ y_{i-1,j} \\ z_{i-1,j} \\ \theta_{i-1,j} \\ \dots\dots\dots \\ y_{i-1,j+1} \\ z_{i-1,j+1} \\ \theta_{i-1,j+1} \\ \dots\dots\dots \\ y_{i,j-2} \\ z_{i,j-2} \\ \theta_{i,j-2} \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ y_{i,j+2} \\ z_{i,j+2} \\ \theta_{i,j+2} \end{array} \right\} ; e, \quad \vec{V} = \left\{ \begin{array}{c} y_{i+1,j-1} \\ z_{i+1,j-1} \\ Ds\theta_{i+1,j-1} \\ \dots\dots\dots \\ y_{i+1,j} \\ z_{i+1,j} \\ Ds\theta_{i+1,j} \\ \dots\dots\dots \\ y_{i+1,j+1} \\ z_{i+1,j+1} \\ Ds\theta_{i+1,j+1} \end{array} \right\}$$

Para definir as matrizes locais **B** e **C**, correspondentes ao n $^{\circ}$ gen $^{\circ}$ rico j , torna-se necess $^{\circ}$ rio definir algumas rela $^{\circ}$ es entre as constantes da viga, quais sejam:

$$\alpha_z = r_z/Ds; \quad \alpha_y = r_y/Ds; \quad \alpha_r = r/Ds; \quad K = 1/R; \quad \varepsilon = KDs;$$

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{r_z^2 + K^2 I_\omega A}}{Ds}; \quad r_\omega^4 = I_\omega/A; \quad \alpha_\omega = r_\omega/Ds; \quad r_t^2 = K_t/A;$$

$$\gamma = r_t K; \quad \beta^2 = \frac{E}{\rho} \left(\frac{Dt^2}{Ds^2} \right); \quad \alpha_t^2 = (r_t/Ds)^2.$$

A matriz \mathbf{B} possui dimensão de 3×9 , sendo que os seus elementos adimensionais estão assim caracterizados:

$$\begin{aligned} B(1,1) &= -\alpha_z^2; & B(1,4) &= 1 + 2\alpha_z^2 + \frac{1}{2} \alpha D_t; & B(1,6) &= -a_z/D_s; \\ B(1,7) &= B(1,1); & B(2,2) &= -\alpha_y^2; & B(2,5) &= 1 + 2\alpha_y^2 - \alpha_y^2 \epsilon^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha D_t; & B(2,6) &= a_y/D_s; & B(2,8) &= B(2,2); & B(3,3) &= -\alpha_\omega^4; \\ B(3,4) &= -a_z/D_s; & B(3,5) &= a_y/D_s; & B(3,6) &= \alpha_r^2 + 2\alpha_\omega^4 + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha \alpha_r^2 D_t; & B(3,7) &= B(3,1); & B(3,9) &= B(3,3). \end{aligned}$$

Os demais elementos da matriz \mathbf{B} são nulos.

A dimensão da matriz local \mathbf{C} é de 3×24 , e seus elementos adimensionais são os seguintes:

$$\begin{aligned} C(1,1) &= -\alpha_z^2; & C(1,4) &= 1 + 2\alpha_z^2 - \frac{1}{2} \alpha D_t; & C(1,7) &= C(1,1); \\ C(1,10) &= \beta^2 \alpha_k^2; & C(1,13) &= -4\beta \alpha_k^2 + 2\alpha_z^2 - \frac{1}{2(1+\nu)} \beta^2 \gamma^2; \\ C(1,16) &= 6\beta^2 \alpha_k^2 - 2 - 4\alpha_z^2 + \frac{\beta^2 \gamma^2}{1+\nu}; & C(1,19) &= C(1,13); \\ C(1,22) &= \beta^2 \alpha_k^2; & C(1,6) &= -a_z/D_s; & C(1,12) &= \beta^2 \alpha_\omega^4 \epsilon; \\ C(1,15) &= -4\beta^2 \alpha_\omega^4 \epsilon - \beta^2 \alpha_z^2 \epsilon - \frac{\beta^2 \epsilon \alpha_t^2}{2(1+\nu)}; & C(1,18) &= 6\beta^2 \epsilon \alpha_\omega^4 + \\ &+ 2\beta^2 \epsilon \alpha_z^2 + \frac{\beta^2 \epsilon \alpha_t^2}{1+\nu} + (2a_z)/D_s; & C(1,21) &= C(1,15); \\ C(1,24) &= C(1,12); & C(2,2) &= -\alpha_y^2; & C(2,5) &= 1 + \alpha_y^2 (2-\epsilon^2) - \\ &- \frac{1}{2} D_t \alpha; & C(2,8) &= C(2,2); & C(2,11) &= \beta^2 \alpha_y^2; & C(2,14) &= - \\ &= 4\beta^2 \alpha_y^2 + 2\beta^2 \epsilon^2 + \beta^2 \epsilon^2 \alpha_y^2; & C(2,17) &= 6\beta^2 \alpha_y^2 - 2\beta^2 \epsilon^2 \alpha_y^2 + \beta^2 \epsilon^2 - \\ &- 2 + 2\epsilon^2 \alpha_y^2 - 4\alpha_y^2; & C(2,20) &= C(2,14); & C(2,23) &= C(2,11); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(2,6) &= a_y/Ds; & C(2,18) &= -\frac{2a_y}{Ds}; & C(3,4) &= -a_z/Ds; \\
C(3,10) &= \beta^2 \varepsilon \alpha_\omega^4; & C(3,13) &= C(1,15); & C(3,16) &= C(1,18); \\
C(3,19) &= C(3,13); & C(3,22) &= C(3,10); & C(3,5) &= a_y/Ds; \\
C(3,17) &= -2a_y/Ds; & C(3,3) &= -\alpha_\omega^4; & C(3,6) &= \alpha_r^2 + 2\alpha_\omega^4 - \\
& - \frac{1}{2} Dt \alpha_r^2 \alpha; & C(3,9) &= C(3,3); & C(3,12) &= \beta^2 \alpha_\omega^4; & C(3,15) &= \\
& = -4\beta^2 \alpha_\omega^4 + 2\alpha_\omega^4 - \frac{\beta^2 \alpha_t^2}{2(1+\nu)}; & C(3,18) &= 6\beta^2 \alpha_\omega^4 + \frac{\beta^2 \alpha_t^2}{1+\nu} + \\
& + \beta^2 \varepsilon^2 \alpha_z^2 - 2\alpha_r^2 - 4\alpha_\omega^4; & C(3,21) &= C(3,15); \\
C(3,24) &= C(3,12).
\end{aligned}$$

Da mesma forma que a matriz local **B**, os demais elementos da matriz local **C** são também nulos.

Para uma discretização da viga em N nós, conforme FIGURA 4.3.2, o sistema local (5.5.5) assume a seguinte configuração global, quando o nó genérico \underline{j} varia de 2 até $N-1$:

$$\mathbf{B}^* \vec{V}^* = -\vec{W}^* + \vec{Q}^* \quad (5.5.6)$$

onde \vec{V}^* é um vetor que contém as incógnitas (deslocamentos y , z e giro θ) dos $N-2$ nós, no tempo $t+Dt$.

Cada elemento do vetor \vec{W}^* é obtido pelo produto da matriz local **C** e o vetor \vec{P} para cada nó discretizado, função das componentes dos deslocamentos e giros dos $N-2$ nós, nos tempos t e $t+Dt$.

Já o vetor \vec{Q}^* contém as componentes nodais do carregamento externo distribuído por unidade de comprimento, correspondentes às cargas verticais, horizontais e momentos torçores, no instante de tempo t . No caso de eixos carregados em movimento, essas componentes nodais do carregamento externo são obtidos da seguinte forma:

- toma-se como base uma componente genérica P_i , que tanto pode representar uma carga vertical ou horizontal como também um momento torçor, que se move sobre a viga curva com velocidade constante V , conforme FIGURA 5.5.2 abaixo:

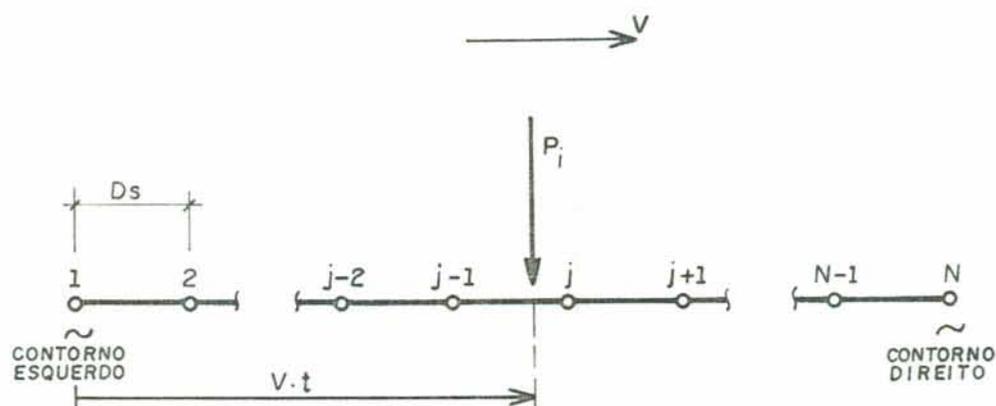


FIGURA 5.5.2 - Carga externa P_i em movimento sobre a viga com velocidade constante V .

sendo que P_i é substituído, no instante de tempo t , por duas componentes equivalentes atuando nos nós $j-1$ e j , conforme FIGURA 5.5.3:

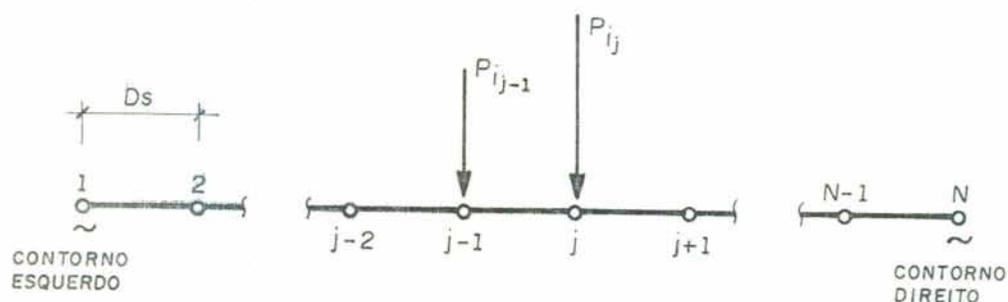


FIGURA 5.5.3 - Cargas externas nodais equivalentes.

onde;

$$P_{i,j-1} = \frac{P_i}{D_s} [(j-1) D_s - Vt]$$

$$P_{i,j} = \frac{P_i}{D_s} [Vt - (j-2) D_s]$$

Finalmente, para que essas componentes nodais equivalentes sejam distribuídas por unidades de comprimento, basta que ambas as cargas sejam divididas pelo intervalo de comprimento D_s (distância entre dois nós discretizados), conforme FIGURA 5.5.4:

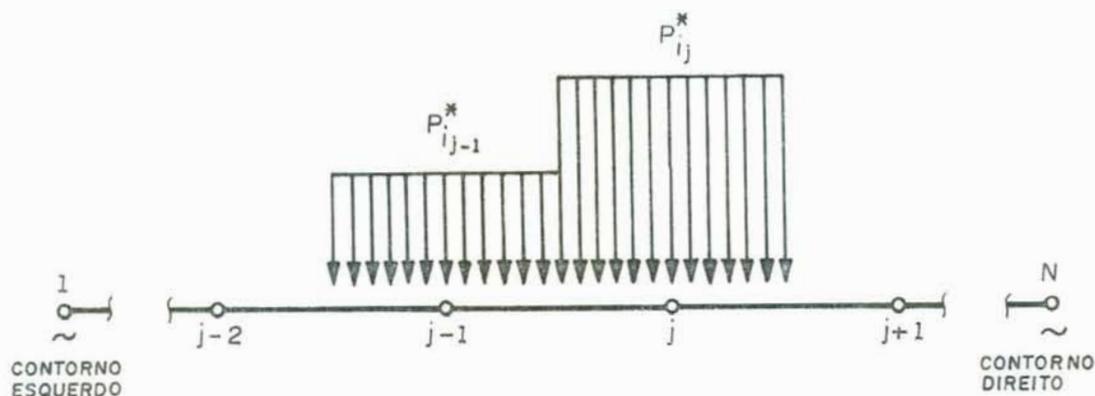


FIGURA 5.5.4 - Cargas externas nodais equivalentes por unidade de comprimento.

onde,

$$P_{i,j-1}^* = \frac{P_i}{D_s^2} [(j-1) D_s - Vt], \quad (5.5.7)$$

e,

$$P_{i,j}^* = \frac{P_i}{D_s^2} [Vt - (j-2) D_s];$$

sendo que as componentes do vetor \vec{Q}^* são provenientes de expressões similares às de (5.5.7), onde o índice i varia de

$$i = 1, 2, 3, \dots, NEC \text{ (número de eixos carregados)}.$$

Fazendo o nó genérico j variar de 2 até $N-1$, para uma discretização em Diferenças Finitas Centrais com N nós, a matriz global B^* possui a seguinte montagem:

cada incremento de tempo Δt na solução de (5.5.9). Um estudo mais detalhado dos tipos de condições de contorno a serem considerados será apresentado na seção que segue, isto é, a seção 5.6.

5.6. Consideração das Condições de Contorno da Viga para o Método de Diferenças Finitas Centrais

A consideração das condições de contorno constituem um problema adicional na solução das equações diferenciais de movimento da viga, principalmente quando esta for curva possuindo seção transversal aberta e parede fina.

A dificuldade fundamental diz respeito à viabilidade das condições indicadas na prática, quando comparadas com as consideradas na análise teórica do modelo. É difícil representar no modelo teórico as condições de bordo da estrutura real. Tenta-se, na medida do possível, uma melhor aproximação das condições de bordo dentro de uma margem de erro admissível.

Considerando o presente trabalho, onde a linha média da viga é discretizada em N nós, em cada nó devem ser especificadas todas as características da seção transversal, inclusive as condições de contorno para os pontos localizados nas extremidades da mesma. Dessa forma, é impossível a consideração de uma condição de contorno apenas parcial da seção transversal. Como exemplo ilustrativo, pode-se citar o caso da viga elevada pertencente a um sistema de transporte urbano, mostrada na FIGURA 5.6.1 na página a seguir, onde a borda pode ser considerada rotulada à flexão vertical e lateral. Já na torção, a borda possui engastamento parcial da seção transversal, conforme FIGURA 5.6.2.

Para resolver este problema da forma mais precisa possível, deve-se abrir mão da hipótese de VLASOV, indicada na seção 5.4. Segundo ela, a seção transversal é indeformável no seu plano, isto é, não há distorção da seção transversal; desta forma, pode-se admitir que o engastamento parcial, mostrado na FIGURA 5.6.2, seja substituído por um engastamento total da seção transversal.

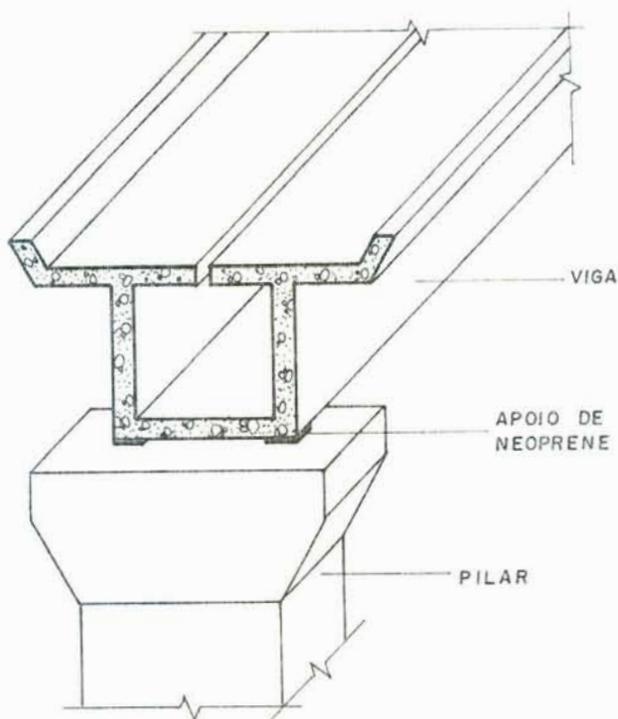


FIGURA 5.6.1 - Detalhe do apoio da viga elevada pertencente a um sistema de transporte urbano.

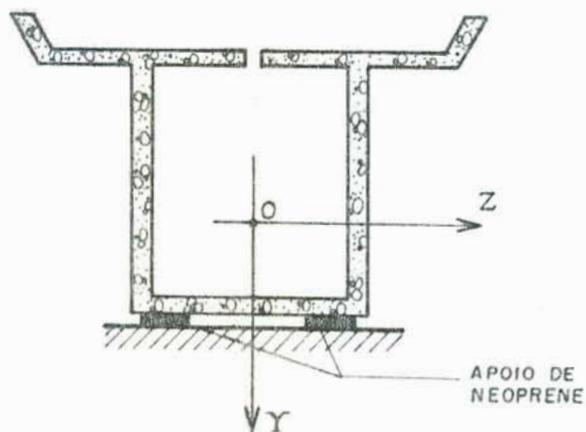


FIGURA 5.6.2 - Engastamento parcial da seção transversal da viga reta.

Apesar das aproximações entre o modelo teórico e o modelo real, verificou-se que a resposta teórica das frequências naturais de vibração da viga, obtidas pela aplicação, do programa DINAUT e indicadas na TABELA 6.4.2, se mostraram próximas às frequências naturais de vibração calculadas pelo método de Elementos Finitos e da frequência medida. A maior diferença está situada no terceiro modo, relativa à flexão-torção lateral, em torno de 20%. Acredita-se que esta diferença significativa possa ser explicada pelas limitações na consideração das condições de contorno acima mencionadas.

Cabe salientar que as condições de contorno são consideradas independentemente para o caso da flexão vertical, horizontal e torção, admitindo, portanto, que elas possam acontecer na forma combinada entre rótula e engaste.

Serão considerados nulos os deslocamentos axiais, verticais e horizontais, como também os giros em ambos extremos, esquerdo e direito, da viga.

Para o caso de contorno rotulado à flexão vertical, isto é, considerando nulo o momento fletor ($M_z = 0$), a expressão final em Diferenças Finitas Centrais fica:

$$M_z = EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{EI_y}{Ds^2} (y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}) = 0.$$

Como o deslocamento horizontal y no extremo j é considerado nulo, a condição de bordo rotulado fica:

$$y_{i,j-1} = -y_{i,j+1}. \quad (5.6.1)$$

A condição (5.6.1) é ilustrada na FIGURA 5.6.3, na página que segue.

Por outro lado, a expressão em D.F.C., para o caso de contorno engastado à flexão vertical, é a seguinte:

$$EI_y \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{EI_y}{2Ds} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) = 0,$$

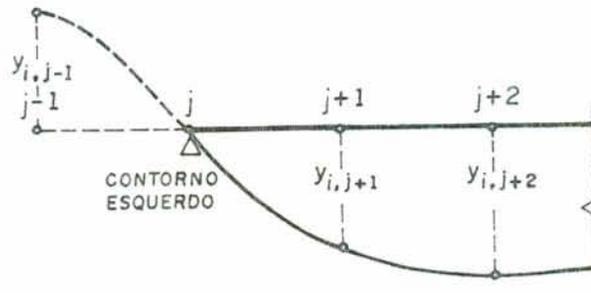


FIGURA 5.6.3 - Condição de contorno rotulada à flexão vertical em Diferenças Finitas Centrais.

resultando na seguinte condição:

$$y_{i,j-1} = y_{i,j+1}, \quad (5.6.2)$$

sendo esta ilustrada abaixo (FIGURA 5.6.4).

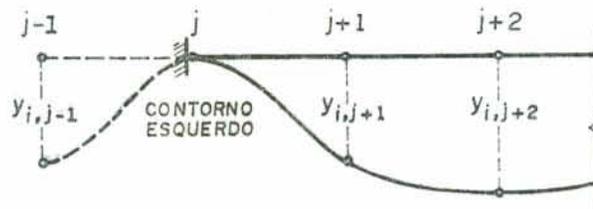


FIGURA 5.6.4 - Condição de contorno engastada à flexão vertical em D.F.C.

Quanto à consideração das condições de bordo à flexão horizontal e torção, se procede identicamente à da flexão vertical, descritas em (5.6.1) e (5.6.2) e nas FIGURAS 5.6.3 e 5.6.4, chegando nas seguintes expressões para a flexão horizontal:

Borda rotulada:
$$z_{i,j-1} = -z_{i,j+1} \quad (5.6.3)$$

Borda engastada:
$$z_{i,j-1} = z_{i,j+1}.$$

E, no caso da torção, chega-se nas seguintes expressões:

$$\text{Borda rotulada:} \quad \theta_{i,j-1} = -\theta_{i,j+1} \quad (5.6.4)$$

$$\text{Borda engastada:} \quad \theta_{i,j-1} = \theta_{i,j+1}$$

Finalmente, o sistema global (5.5.6) pode ser envolvido com a consideração das condições de contorno, indicadas em (5.6.1), (5.6.2), (5.6.3) e (5.6.4), no vetor \vec{P} da equação (5.5.5).

Como os deslocamentos e giros são nulos nos extremos da viga, o sistema global de (5.5.9) é resolvido fazendo o nó genérico j variar de 2 até $N-1$.

Quando j assumir o valor 2 (isto é, o primeiro nó discretizado depois do contorno esquerdo), o vetor \vec{P} recebe a primeira condição de bordo, sendo assim representada:

$$\begin{array}{l}
 y_{i,j-2} = y_{i,0} = \left\{ \begin{array}{l} y_{i,2} \text{ (engaste)} \\ \text{ou} \\ -y_{i,2} \text{ (rótula)} \end{array} \right. \\
 \\
 z_{i,j-2} = z_{i,0} = \left\{ \begin{array}{l} z_{i,2} \text{ (engaste)} \\ \text{ou} \\ -z_{i,2} \text{ (rótula)} \end{array} \right. \\
 \\
 \theta_{i,j-2} = \theta_{i,0} = \left\{ \begin{array}{l} \theta_{i,2} \text{ (engaste)} \\ \text{ou} \\ -\theta_{i,2} \text{ (rótula)} \end{array} \right.
 \end{array} \quad (5.6.5)$$

onde as incógnitas $y_{i,0}$, $z_{i,0}$ e $\theta_{i,0}$ correspondem aos deslocamentos do nó situado na extremidade esquerda e fora da vi-

ga, conforme FIGURA 5.6.5:

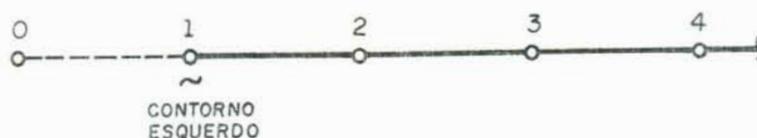


FIGURA 5.6.5 - Discretização da extremidade esquerda da viga em D.F.C.

Quando \underline{j} assume $N-1$ (isto é, o penúltimo nó discretizado da viga), o vetor \vec{P} recebe a segunda condição de bordo, relativa ao contorno direito, com a seguinte representação:

$$\begin{array}{l}
 y_{i,j+2} = y_{i,N+1} = \left\{ \begin{array}{l} y_{i,N-1} \text{ (engaste)} \\ \text{ou} \\ -y_{i,N-1} \text{ (rótula)} \end{array} \right. \\
 \\
 z_{i,j+2} = z_{i,N+1} = \left\{ \begin{array}{l} z_{i,N-1} \text{ (engaste)} \\ \text{ou} \\ -z_{i,N-1} \text{ (rótula)} \end{array} \right. \quad (5.6.6) \\
 \\
 \theta_{i,j+2} = \theta_{i,N+1} = \left\{ \begin{array}{l} \theta_{i,N-1} \text{ (engaste)} \\ \text{ou} \\ -\theta_{i,N-1} \text{ (rótula)} \end{array} \right.
 \end{array}$$

onde as incógnitas $y_{i,N+1}$, $z_{i,N+1}$ e $\theta_{i,N+1}$ correspondem aos deslocamentos fictícios do nó situado na extremidade direita e fora da viga, conforme FIGURA 5.6.6:

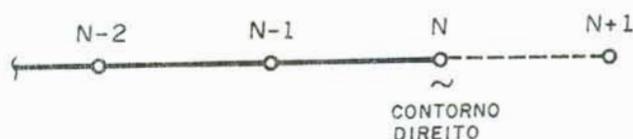


FIGURA 5.6.6 - Discretização da extremidade direita da viga em D.F.C.

5.7. Esforços Internos: Normais, Cortantes, Momentos Fletores e Momentos Torçores da Viga Curva

A partir dos deslocamentos e giros calculados, torna-se possível a obtenção das forças internas atuantes na viga curva horizontal, cujas expressões são assim definidas:

$$\begin{aligned}
 N_x &= EA \left(\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{z}{R} \right), \\
 M_y &= E I_y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{z}{R^2} \right), \\
 M_z &= -E I_z \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\theta}{R} \right), \\
 T_s &= G K_t \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial y}{\partial s} \right), \\
 T_\theta &= -E I_\omega \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial s^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} \right), \\
 T &= T_s + T_\theta, \\
 B_M &= -E I_\omega \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right), \\
 Q_y &= -E I_z \left(\frac{\partial^3 y}{\partial s^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) + \frac{T}{R}, \\
 Q_z &= -E I_y \left(\frac{\partial^3 z}{\partial s^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial z}{\partial s} \right),
 \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

onde N_x denota a força axial; M_y e M_z os momentos fletores internos com respeito aos eixos y e z ; T_s o momento torçor de St. Venant; T_θ o momento de empenamento; T o momento torçor total; B_M o bimomento; Q_y e Q_z os cortantes internos com respeito aos eixos y e z , respectivamente.

Como os deslocamentos e giros são calculados pelo método de Diferenças Finitas Centrais, conseqüentemente os esforços internos também o serão, onde as expressões indicadas acima, para o instante de tempo \underline{i} relativo ao nó genérico \underline{j} , ficam representadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 N_{x_{i,j}} &= EA \left[\frac{1}{2D_s} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) - \frac{1}{R} z_{i,j} \right], \\
 M_{y_{i,j}} &= EI_y \left[\frac{1}{D_s^2} (z_{i,j-1} - 2z_{i,j} + z_{i,j+1}) + \frac{1}{R^2} z_{i,j} \right], \\
 M_{z_{i,j}} &= -EI_z \left[\frac{1}{D_s^2} (y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}) - \frac{1}{R} \theta_{i,j} \right], \\
 T_{s_{i,j}} &= GK_t \left[\frac{1}{2D_s} (\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}) + \frac{1}{2D_s R} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right], \\
 T_{\theta_{i,j}} &= -EI_\omega \left[\frac{1}{2D_s^3} (\theta_{i,j+2} - 2\theta_{i,j+1} + 2\theta_{i,j-1} - \theta_{i,j-2}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2RD_s^3} (y_{i,j+2} - 2y_{i,j+1} + 2y_{i,j-1} - y_{i,j-2}) \right], \\
 T_{i,j} &= T_{s_{i,j}} + T_{\theta_{i,j}} \quad (5.7.2) \\
 B_{M_{i,j}} &= -EI_\omega \left[\frac{1}{D_s^2} (\theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{RD_s^2} (y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}) \right], \\
 Q_{y_{i,j}} &= -EI_z \left[\frac{1}{2D_s^3} (y_{i,j+2} - 2y_{i,j+1} + 2y_{i,j-1} - y_{i,j-2}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2RD_s} (\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}) + \frac{1}{R} T_{i,j} \right], \\
 Q_{z_{i,j}} &= -EI_y \left[\frac{1}{2D_s^3} (z_{i,j+2} - 2z_{i,j+1} + 2z_{i,j-1} - z_{i,j-2}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2D_s R^2} (z_{i,j+1} - z_{i,j-1}) \right].
 \end{aligned}$$

Para a obtenção dos esforços relativos aos nós localizados nas extremidades da viga (nós 1, 2, N-1 e N, mostrados nas FIGURAS 5.6.5 e 5.6.6), devem ser consideradas as condições

de contorno da mesma, cujas opções foram relatadas na seção 5.6.

Como solução do problema dinâmico indicado em (5.5.9), incluindo a consideração das condições de contorno e esforços internos descritos nesta seção e na seção 5.6, foi desenvolvido o programa chamado VIGADIN no computador B6700 na linguagem ALGOL. As aplicações desse programa na análise de exemplos comparativos estão mostradas no Capítulo 7.

6. DETERMINAÇÃO DE AUTOVALORES (FREQUÊNCIAS NATURAIS) E MODOS DE VIBRAÇÃO EM VIGAS CURVAS, SEÇÃO ABERTA E PAREDE FINA

6.1. Considerações Fundamentais

Quando um sistema linear é submetido à ação de uma excitação harmônica, o sistema responde na mesma frequência da excitação. Em sistemas fracamente amortecidos, se a frequência da excitação encontra-se próxima da frequência natural do sistema, apresenta-se o fenômeno de ressonância, daí podendo resultar oscilações de grande amplitude. A ressonância pode ser a causa de colapso de estruturas, sendo de importância o cálculo das frequências naturais no estudo de vibrações.

Em pontes rodoviárias e ferroviárias, a interação dinâmica entre a estrutura e o veículo pode se tornar importante. De fato, como critério de projeto para muitos sistemas, é exigida que a frequência fundamental f da viga seja maior que 3,5 Hz. Dessa forma, para obedecer esse critério, o Engenheiro é obrigado a avaliar as frequências naturais de vibração da viga.

Com a aplicação de computadores e o desenvolvimento de métodos numéricos, as dificuldades associadas com elementos de viga curva tem sido largamente vencidas.

A determinação de frequências de vibração para vigas de seção transversal assimétrica, aberta e parede fina, será discutida neste capítulo. Vigas curvas com várias condições de contorno, incluindo apoio simples (rotulado) e contorno engastados, tanto na flexão vertical e lateral como na flexão torcional, também serão estudados. Resultados obtidos deste trabalho são posteriormente comparados com os de outros autores e também com valores experimentais. Foi desenvolvido um programa no computador B-6700 da UFRGS que possibilita a obtenção das n primeiras frequências naturais e os respectivos

modos de vibração da estrutura.

Devido a seção transversal ser assimétrica, isto é, o centro de corte não coincidir com o baricentro, e ao eixo curvo, resultam vibrações acopladas entre os deslocamentos axial, de flexão vertical, de flexão horizontal e torcional. Esse acoplamento se verifica nos modos de vibrações (autovetores) obtidos na solução do problema de autovalores.

Todos os sistemas estruturais (ou mecânicos) estão sujeitos a um certo grau de amortecimento, em face da dissipação de energia pelo atrito e outras resistências. Se o amortecimento é fraco, a sua influência torna-se pequena e não é geralmente considerada no cálculo das frequências naturais. O amortecimento, entretanto, é de grande importância ao limitar a amplitude das oscilações na ressonância.

Quando o sistema não apresenta amortecimento, então são aplicáveis as equações homogêneas de movimento de VLASOV²⁵ (eqs. 5.4.1-4). Usando-se o método de separação de variáveis, verifica-se que essas equações admitem solução do tipo:

$$\begin{aligned}
 y(s, t) &= y_n(s) \quad \text{sen}(\omega_n t) \\
 z(s, t) &= z_n(s) \quad \text{sen}(\omega_n t) \\
 \theta(s, t) &= \theta_n(s) \quad \text{sen}(\omega_n t) \\
 x(s, t) &= x_n(s) \quad \text{sen}(\omega_n t)
 \end{aligned}
 \tag{6.1.1}$$

Introduzindo as equações (6.1.1) nas equações (5.4.1) a (5.4.4), desprezando o amortecimento e as parcelas relativas às cargas externas, obtém-se um sistema acoplado de equações em y_n , z_n , θ_n , e x_n , contendo o parâmetro desconhecido ω_n .

Representando os operadores diferenciais com respeito à coordenada espacial s pelas correspondentes aproximações em Diferenças Finitas, conforme item 4.2, chega-se ao seguinte sistema de equações homogêneas:

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{Ds^4} \left(I_z + \frac{I\omega}{R^2} \right) (y_{j-2} - 4y_{j-1} + 6y_j - 4y_{j+1} + y_{j+2}) - \frac{GK_t}{R^2 Ds^2} (y_{j-1} - 2y_j + \\
& + y_{j+1}) + \frac{EI\omega}{RDs^4} (\theta_{j-2} - 4\theta_{j-1} + 6\theta_j - 4\theta_{j+1} + \theta_{j+2}) - \frac{EI_z + GK_t}{RDs^2} (\theta_{j-1} - \\
& - 2\theta_j + \theta_{j+1}) - \rho A \omega_n^2 y_j - \rho A \omega_n^2 \left(\frac{r_z^2}{R} - a_z \right) \theta_j + \frac{\rho A r_z^2 \omega_n^2}{Ds^2} (y_{j-1} - \\
& - 2y_j + y_{j+1}) = 0
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{EI_y}{Ds^4} (z_{j-2} - 4z_{j-1} + 6z_j - 4z_{j+1} + z_{j+2}) + \frac{EI_y}{R^2 Ds^2} (z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}) + \\
& \frac{EA}{2RDs} (x_{j+1} - x_{j-1}) + \frac{EA}{R^2} z_j - \rho A \omega_n^2 \left(1 - \frac{r_y^2}{R^2} \right) z_j - \rho A a_y \omega_n^2 \theta_j + \\
& + \frac{\rho A r_y^2 \omega_n^2}{Ds^2} (z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}) = 0
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{EI\omega}{Ds^4} (\theta_{j-2} - 4\theta_{j-1} + 6\theta_j - 4\theta_{j+1} + \theta_{j+2}) + \frac{EI\omega}{RDs^4} (y_{j-2} - 4y_{j-1} + 6y_j - \\
& - 4y_{j+1} + y_{j+2}) - \frac{EI_z + GK_t}{RDs^2} (y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}) - \frac{GK_t}{Ds^2} (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \\
& + \theta_{j+1}) + \frac{EI_z}{R^2} \theta_j - \rho A r^2 \omega_n^2 \theta_j - \rho A a_y \omega_n^2 z_j + \rho A a_z \omega_n^2 y_j + \\
& + \frac{\rho A r^4 \omega_n^2}{Ds^2} (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}) + \frac{\rho A r^4 \omega_n^2}{RDs^2} (y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}) = 0
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{EI_y}{2RDs^3} (z_{j-2} - 2z_{j-1} + 2z_{j+1} - z_{j+2}) - \left(\frac{EI_y}{2DsR^3} - \frac{EA}{2DsR} \right) (z_{j+1} - \\
& - z_{j-1}) = \frac{EA}{Ds^2} (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) - \rho A \omega_n^2 x_j = 0
\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

As equações diferenciais homogêneas (6.1.2) a (6.1.5) mais condições apropriadas de contorno, determinam as frequências e modos naturais de vibração ($y_n(s)$, $z_n(s)$, $\theta_n(s)$ e $x_n(s)$) da viga.

6.2. Montagem Global do Sistema para Solução do Problema de Autovalores

A aplicação das equações (6.1.2) a (6.1.5) num nó genérico da malha adotada na discretização da viga, conforme FIGURA 6.2.1, resultam em quatro equações contendo as variáveis y_j , z_j , θ_j e x_j acopladas com as correspondentes variáveis nos nós $j-2$, $j-1$, $j+1$ e $j+2$. Se a representação discreta da viga contém N nós, resultará, então, num problema linear de autovalores de dimensão $4N$. A tarefa seguinte consiste na montagem das matrizes do sistema global, a partir das equações (6.1.2) a (6.1.5) para um nó genérico j , visando à obtenção das frequências naturais e os respectivos modos de vibração.

Reagrupando as equações (6.1.2) a (6.1.5) em forma matricial, chega-se à seguinte equação:

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \vec{Y} = 0 \quad (6.2.1)$$

onde ω_n denota as frequências naturais do sistema, e

$$\vec{Y} = \left\{ \begin{array}{c} y_{j-2} \\ z_{j-2} \\ \theta_{j-2} \\ x_{j-2} \\ \dots \\ y_{j-1} \\ z_{j-1} \\ \theta_{j-1} \\ x_{j-1} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ y_{j+2} \\ z_{j+2} \\ \theta_{j+2} \\ x_{j+2} \end{array} \right\} \quad (6.2.2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 A_1 & 0 & A_3 & 0 & \vdots & (-4A_1-A_2) & 0 & (-4A_3-A_4) & 0 & \vdots & (6A_1+2A_2) & 0 \\
 0 & B_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & (-4B_1+B_2) & 0 & -B_3 & \vdots & 0 & (6B_1-2B_2+B_4) \\
 C_2 & 0 & C_1 & 0 & \vdots & (-4C_2-C_3) & 0 & (-4C_1-C_4) & 0 & \vdots & (6C_2+2C_3) & 0 \\
 0 & -D_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & (2D_1+D_2) & 0 & -D_3 & \vdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 (6A_3+2A_4) & 0 & \vdots & (-4A_1-A_2) & 0 & (-4A_3-A_4) & 0 & \vdots & A_1 & 0 & A_3 & 0 \\
 0 & 0 & \vdots & 0 & (-4B_1+B_2) & 0 & B_3 & \vdots & 0 & B_1 & 0 & 0 \\
 (6C_1+2C_4+C_5) & 0 & \vdots & (-4C_2-C_3) & 0 & (-4C_1-C_4) & 0 & \vdots & C_2 & 0 & C_1 & 0 \\
 0 & 2D_3 & \vdots & 0 & (-2D_1-D_2) & 0 & -D_3 & \vdots & 0 & D_1 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -A_7 & 0 & 0 & 0 & \vdots & (A_5+2A_7) & 0 & A_6 & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -B_7 & 0 & 0 & \vdots & 0 & (B_5+2B_7) & B_6 & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -C_{10} & 0 & -C_9 & 0 & \vdots & (2C_{10}-C_8) & C_7 & (C_6+2C_9) & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & D_4 & \vdots \\
 \vdots & \vdots \\
 -A_7 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
 0 & -B_7 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
 -C_{10} & 0 & -C_9 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots
 \end{bmatrix} \quad (6.2.4)$$

onde,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{E}{Ds^4} \left(I_z + \frac{I_\omega}{R^2} \right); & A_2 &= \frac{GK_t}{Ds^2 R^2}; & A_3 &= \frac{EI_\omega}{R Ds^4}; \\
 A_4 &= \frac{1}{R Ds^2} (EI_z + GK_t); & A_5 &= \rho A; & A_6 &= \rho A \left(\frac{r_y^2}{R} - a_z \right); \\
 & & & & & & & & & & & & & & & (6.2.5)
 \end{aligned}$$

$$A_7 = \frac{\rho A r_z^2}{Ds^2}; \quad B_1 = \frac{E I_y}{Ds^4}; \quad B_2 = \frac{E I_y}{R^2 Ds^2}$$

$$B_3 = \frac{EA}{2R Ds}; \quad B_4 = \frac{EA}{R^2}; \quad B_5 = \rho A \left(1 - \frac{r_y^2}{R^2} \right); \quad B_6 = \rho A a_y;$$

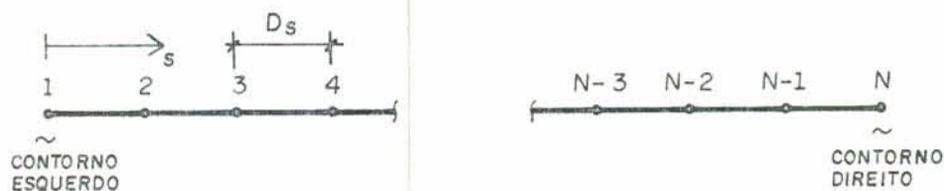


FIGURA 6.2.1 - Discretização espacial.

No caso de deslocamentos nulos nos extremos, a dimensão da matriz \mathbf{K}^* é $4(N-2) \times 4(N-2)$. Quanto à matriz global \mathbf{M}^* , se procede identicamente à matriz \mathbf{K} , e, por consequência, terá mesma dimensão. As matrizes globais de \mathbf{K}^* e \mathbf{M}^* equivalem às matrizes de rigidez e de massa da estrutura. Finalmente, para uma viga discretizada com N nós, conforme FIGURA 6.2.1, o problema parcial (6.2.1) gera o seguinte problema global de autovalores:

$$(\mathbf{K}^* - \omega_n^2 \mathbf{M}^*) \vec{Y} = 0 \quad (6.2.7)$$

Para que o problema de autovalores e autovetores (6.2.7) seja completo, é necessário introduzir as condições de contorno, podendo na presente formulação ser rotulada ou engastada, em ambas extremidades da viga. Essa consideração deverá ser aplicada na matriz global \mathbf{K}^* , nos semiblocos tracejados ($j-1 \rightarrow j+1$) da FIGURA 6.2.2.

As FIGURAS 6.2.3 e 6.2.4 mostram com maior clareza as condições de contorno da viga, podendo ser consideradas tanto no apoio esquerdo como no direito:

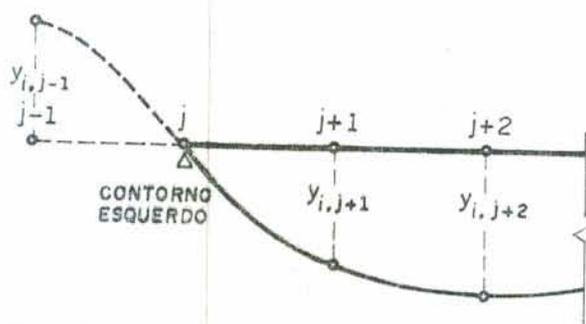


FIGURA 6.2.3 - Contorno esquerdo rotulado.

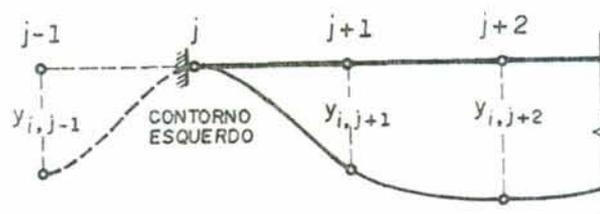


FIGURA 6.2.4 - Contorno esquerdo engastado.

onde Y é a variável genérica, que tanto pode representar deslocamento vertical e horizontal como giro devido à torção.

Depois de montadas globalmente as matrizes K^* e M^* , constatou-se que ambas se mostraram não-simétricas, contrariando o princípio dos trabalhos virtuais (TEOREMA DA RECIPROCIDADE), que garante a simetria das matrizes de rigidez e de massa em problemas estruturais.

O TEOREMA DA RECIPROCIDADE estabelece que, em um sistema LINEAR, a matriz de flexibilidade A deve ser simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$. Para a prova desse teorema, consideramos o trabalho efetuado pelas forças f_i e f_j , no qual a ordem de carga é i seguido por j e depois pelo seu inverso. Sendo o sistema linear, o trabalho efetuado é independente da ordem da carga.

Aplicando f_i , o trabalho efetuado é $0,5 f_i f_i a_{ii}$. Aplicando f_j , o trabalho efetuado por f_j é $0,5 f_j f_j a_{jj}$. Entretanto, i é submetido a outro deslocamento $a_{ij} f_j$ e o trabalho adicional efetuado por f_i torna-se $a_{ij} f_j f_i$. Assim, o trabalho total efetuado é

$$W = 0,5 f_i f_i a_{ii} + 0,5 f_j f_j a_{jj} + a_{ij} f_j f_i.$$

Invertendo agora a ordem de carga, o trabalho total efetuado resulta:

$$W = 0,5 f_j f_j a_{jj} + 0,5 f_i f_i a_{ii} + a_{ji} f_i f_j.$$

Os trabalhos efetuados nos dois casos devem ser iguais, concluindo-se finalmente que,

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Portanto, as equações propostas por VLASOV para a viga curva de seção aberta não são auto-adjuntas, devendo se acrescentar ou se eliminar alguns termos, com o objetivo de manter a consistência da formulação.

Um exame mais profundo das equações de movimento foge dos objetivos do presente trabalho. Dessa forma, optou-se simplesmente pela eliminação das parcelas que as tornam assimétricas. Os termos eliminados das equações (6.1.2) a (6.1.5), a fim de tornar simétricas as matrizes globais de \mathbf{K} e \mathbf{M} , correspondem às seguintes alterações nas equações (6.2.5) e (6.2.6):

$$A_6 = -\rho A a_y; \quad C_{10} = 0; \quad D_1 = 0; \quad D_2 = -\frac{EA}{2RDs} \quad (6.2.8)$$

Foram analisados e comparados diversos exemplos dos mais diferentes casos, conforme item 6.4, com o objetivo de avaliar a influência das alterações propostas na resposta do problema, em termos das frequências naturais. Já que os resultados obtidos foram satisfatórios, admitimos como válidas as modificações propostas em (6.2.8). Mesmo assim, fica da nossa parte uma alerta do problema, já que na bibliografia vários autores utilizaram como base as equações diferenciais isentas das alterações indicadas em (6.2.8).

6.3. Método de Solução para o Problema de Autovalores

Existem na bibliografia técnica numerosos métodos para se obter os autovalores e autovetores da equação (6.2.7). Entre eles podem ser citados os métodos de JACOBI, Iteração por Subespaços, STODOLA, RAYLEIGH RITZ, Iteração Inversa, Iteração Difeta, Técnica Combinada entre Sequência de Sturm e Iteração Inversa, Determinante e Técnica de Iteração Polinomial.

Na escolha do método de solução para um problema específico, deve-se levar em conta que não existe um algoritmo simples que seja sempre, para todos os casos, o mais efetivo.

Um algoritmo que é eficiente na solução de um problema pode ser totalmente inadequado na solução de um outro, e vice-versa. A efetividade do método de solução escolhido depende fundamentalmente de dois fatores: primeiro, a possibilidade de um uso seguro do procedimento e, segundo, o CUSTO da solução.

O método mais apropriado depende das características das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} , principalmente da ordem e largura de banda, do número de autovalores e autovetores requeridos e de suas posições no espectro. Quando são os menores autovalores e correspondentes autovetores são desejados, e as matrizes possuem ordem elevada, uma excelente opção é o método de Iteração por Subspaços.

Como, em nosso sistema, as matrizes podem atingir dimensões consideráveis e sabendo-se que será necessário obter só uma fração dos autovalores e autovetores, optou-se pelo Método de ITERAÇÃO POR SUBSPAÇOS. Se fosse necessário calcular todos os autovalores, o método mais aconselhável, pela sua simplicidade e eficiência, seria o de Jacobi.

Apresenta-se, a seguir uma síntese da solução do problema de autovalores pelo método de Iteração por Subspaços.

Partindo do seguinte problema de autovalores:

$$\mathbf{K} \vec{\phi} = \omega_n^2 \mathbf{M} \vec{\phi} \rightarrow \underline{n} \text{ dimensional}$$

para \underline{p} autovalores desejados de um sistema caracterizado por:

$$\mathbf{K} \vec{x}_{k+1} = \mathbf{M} \vec{x}_k,$$

onde $\vec{x}_k = (\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3 \ \dots \ \vec{x}_q)$ é um subspaço de dimensão \underline{q} que contém os vetores de partida, onde $q = \text{mín}(2p, p+8)$.

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_2 - a \vec{x}_1; \quad \text{onde} \quad a = \vec{x}_1^T \mathbf{M} \vec{x}_1$$

$$\vec{x}_3 = \vec{x}_3 - a \vec{x}_1 - b \vec{x}_2; \quad \text{onde} \quad b = \vec{x}_2^T \mathbf{M} \vec{x}_2$$

Chegando a

$$\bar{X}_{k+1} = (\vec{X}_1 \quad \vec{X}_2 \quad \dots \quad \vec{X}_p)$$

onde $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_p$ tendem a $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_p$ após k iterações.

Calcula-se, a seguir, as projeções das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} sobre o espaço de vetores \bar{X}_{k+1} .

$$\mathbf{K}_{k+1} \begin{matrix} (p \times p) \\ \end{matrix} = \bar{X}_{k+1}^T \begin{matrix} (p \times n) \\ \end{matrix} \mathbf{K} \begin{matrix} (n \times n) \\ \end{matrix} \bar{X}_{k+1} \begin{matrix} (n \times p) \\ \end{matrix}$$

$$\mathbf{M}_{k+1} \begin{matrix} (p \times p) \\ \end{matrix} = \bar{X}_{k+1}^T \begin{matrix} (p \times n) \\ \end{matrix} \mathbf{M} \begin{matrix} (n \times n) \\ \end{matrix} \bar{X}_{k+1} \begin{matrix} (n \times p) \\ \end{matrix}$$

A partir de \mathbf{K}_{k+1} e \mathbf{M}_{k+1} , chega-se a

$$\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \lambda_{k+1} \rightarrow \text{Dimensão } p$$

onde este sistema é, por sua vez, resolvido pelo método de Jacobi.

Calculando uma melhor aproximação dos autovalores

$$X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}$$

e, finalmente,

$$X_{k+1} \rightarrow \Phi$$

$$\lambda_{k+1} \rightarrow \lambda$$

onde Φ é uma matriz que contém os autovetores; e, λ é uma matriz cuja diagonal contém os autovalores.

Levando em conta essas considerações, o método de iteração por subespaços foi implementado no programa DINAUT, no computador B-6700 da UFRGS.

6.4. Estudos Comparativos

Por duas razões fundamentais, faz-se necessário comparar os resultados obtidos neste estudo com outros trabalhos publicados na bibliografia técnica internacional. A primeira refere-se à verificação do método numérico de solução mediante Diferenças Finitas Centrais, aqui empregado, com os demais métodos adotados na bibliografia técnica. Já a segunda razão está relacionada com as alterações das equações diferenciais de VLASOV²⁵ propostas no item 6.2. Só é possível se fazer uma avaliação da validade dessas modificações depois de uma adequada comparação com vários exemplos calculados e medidos.

Apresenta-se, a seguir, uma seqüência de exemplos de vigas retas e curvas, com ou sem simetria da seção transversal e várias condições de contorno.

Observa-se que o número de trabalhos encontrados na bibliografia técnica é muito reduzido, e limita-se a vigas de um só vão.

CULVER⁵ determinou as frequências naturais da viga curva horizontal, para vigas prismáticas e com dupla simetria, considerando apenas vibrações normais ao plano de curvatura.

SHORE e CHAUDHURI²¹ estudaram a vibração livre de vigas curvas horizontais, considerando somente o deslocamento vertical e rotação.

YOO e FEHRENBACH²⁶ incluíram a contribuição do empenamento, efeitos da inércia rotatória com respeito à flexão e à torção, e os efeitos da antissimetria da seção transversal. Esses autores resolveram o problema de autovalores após uma discretização em Elementos Finitos.

O presente trabalho tem como base, essencialmente, as mesmas equações diferenciais acopladas de YOO e FEHRENBACH²⁶ porém, como solução numérica, adotou-se uma discretização por Diferenças Finitas Centrais.

* Exemplo A:

O exemplo a ser considerado agora é uma viga curva de comprimento 512,27 cm. A curvatura da viga varia, assim como o ângulo do vão, de 10 graus até 90 graus. Propriedades da seção transversal são: $E = 200,1 \text{ GN/m}^2$, $G = 77,3 \text{ GN/m}^2$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $A = 92,9 \text{ cm}^2$, $I_z = 11362 \text{ cm}^4$, $I_y = 3871 \text{ cm}^4$, $I_{\omega} = 555878 \text{ cm}^6$, $K_t = 1470,85 \text{ cm}^4$, $r_p = 12,81 \text{ cm}$. A condição de contorno nos dois extremos da viga é birrotulada. Na TABELA 6.4.1, as frequências naturais determinadas mediante o programa DINAUT são comparadas com as calculadas por CULVER⁵, SHORE e CHAUDHURI²¹, YOO e FEHRENBACH²⁶. É observada uma excelente correlação, sendo que as diferenças percentuais médias ficam ao redor de 1%.

EXEMPLO A

TABELA 6.4.1 - FREQUÊNCIAS NATURAIS (rad/seg) da Viga Birrotulada, Curva, na Flexo-Torção.

Raio (m)	Ângulo (graus)	DINAUT (N = 19 nós)	CULVER (2 GDL)	SHORE (2 GDL)	YOO (4 GDL)
29,35	10	202,7	202,5	203,3	204,7
14,68	20	184,4	184,3	186,3	190,2
9,78	30	162,2	162,2	164,7	165,8
7,34	40	140,5	140,0	142,8	141,7
5,87	50	120,9	120,9	122,8	121,3
4,89	60	103,8	103,8	105,2	103,9
4,19	70	88,9	88,9	90,0	89,6
3,67	80	75,9	76,0	76,2	76,8
3,26	90	64,6	64,6	65,2	64,0

* Exemplo B:

O próximo exemplo corresponde a uma viga reta elevada pertencente a um sistema de transporte urbano com 25 metros de comprimento, cujas condições de contorno são: birrotulada na flexão vertical, birrotulada na flexão horizontal e biengastada na torção. As características da seção transversal são as seguintes: $E = 35,5 \text{ GN/m}^2$; $G = 14,792 \text{ GN/m}^2$; $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$; $A = 1,085 \text{ m}^2$; $I_y = 0,4722 \text{ m}^4$; $I_z = 0,312 \text{ m}^4$; $I_\omega = 0,1975 \text{ m}^6$; $K_t = 0,0105 \text{ m}^4$; $a_y = 1,273 \text{ m}$; $a_z = 0$. Além disto, nestes mesmos estudos, foi medida a frequência natural da viga na flexão vertical pura no primeiro modo, e os resultados estão indicados na TABELA 6.4.2.

EXEMPLO B

TABELA 6.4.2 - Frequências naturais (Hz) da viga reta elevada de um sistema de transporte urbano.

Modos	Elementos Finitos (270 nós)	DINAUT (N = 19 nós)	Dif. (%)
1- Flexo-Torção Lateral	4,85	4,84	0,68
2- Flexão Vertical	4,92*	5,05	2,65
3- Flexo-Torção Lateral	11,91	14,77	19,40
4- Flexo-Torção Lateral	14,35	15,22	5,68
5- Flexão Vertical	18,40	19,93	7,68

* Resultado experimental.

Para o primeiro e segundo modos, verificou-se uma ótima correlação com a solução da referência [17], inclusive com a frequência medida. A diferença mais acentuada nos modos superiores é atribuída à inadequada representação das condições de

contorno na torção, visto que, na realidade, os apoios constituem apenas engastamento parcial da seção transversal.

* Exemplo C:

No exemplo que segue, será estudado o caso de uma viga curva horizontal e vão simples de comprimento 40,64 m. As propriedades da seção transversal da viga são: $A = 94,8 \text{ cm}^2$, $I_z = 16440 \text{ cm}^4$, $I_y = 2347,4 \text{ cm}^4$, $I_\omega = 504855,2 \text{ cm}^6$, $K_t = 74,5 \text{ cm}^4$, $a_y = 0$ e $a_z = 0$.

Valores usados para o módulo de elasticidade longitudinal e transversal são: $E = 200,1 \text{ GN/m}^2$ e $77,3 \text{ GN/m}^2$. A viga possui os dois bordos engastados. O raio de curvatura é 38,811 m, e o vão da viga possui um ângulo de 60 graus. Os resultados obtidos da análise foram comparados com YOO²⁶ e são mostrados na TABELA 6.4.3.

EXEMPLO C

TABELA 6.4.3 - Frequência natural (rad/seg), viga curva biengastada.

DINAUT 120 nós	YOO e FEHERENBACH ²⁶ (4 GDL)	Dif. (%)
4,150	4,1879	0,90

A seguir, na FIGURA 6.4.1, está apresentada a convergência do método de D.F.C. para a frequência fundamental da viga, em função do número de nós discretizados.

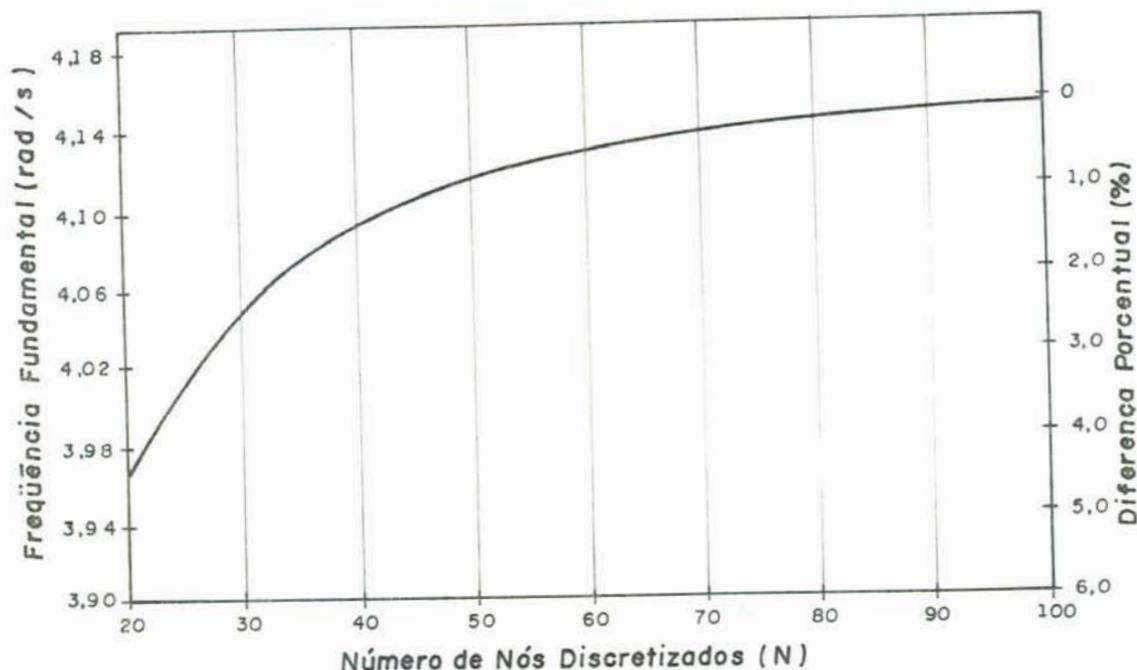


FIGURA 6.4.1 - Convergência na solução da viga curva, biengastada.

Os exemplos que seguem foram analisados com o objetivo de determinar o efeito da localização do centro de corte na frequência natural da viga curva, e também comparar os resultados com estudos de outros autores.

* Exemplo D:

O primeiro exemplo trata-se de uma viga onde a seção transversal possui apenas um eixo de simetria, mostrado na FIGURA 6.4.2. A viga curva possui comprimento de 6,096 m e tem as condições de contorno totalmente engastadas. O raio de curvatura é 6,9855 m e o vão da viga possui um ângulo de 50 graus. As propriedades da seção transversal são: $A = 99,4 \text{ cm}^2$, $I_y = 2637 \text{ cm}^4$, $I_z = 19998 \text{ cm}^4$, $I_\omega = 217517 \text{ cm}^6$, $K_t = 80,3 \text{ cm}^4$. Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são, respectivamente: $E = 200,1 \text{ GN/m}^2$ e $G = 77,3 \text{ GN/m}^2$. Na TABELA 6.4.4 da próxima página, encontra-se a comparação dos resultados e a influência na posição do centro de corte (a_y , a_z), com respeito à frequência natural de vibração da viga curva.

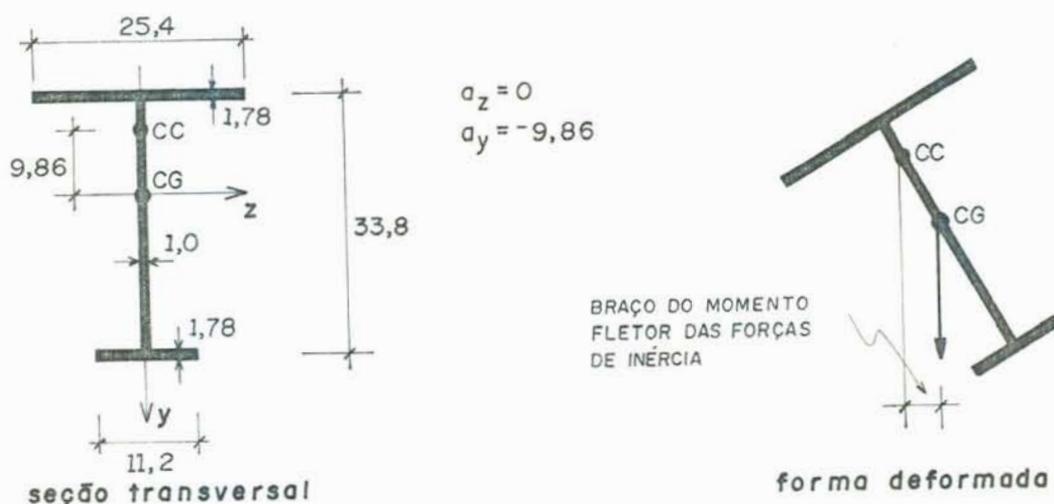


FIGURA 6.4.2 - Seção transversal da viga curva com um eixo de simetria (unidades: cm).

EXEMPLO D

TABELA 6.4.4 - Frequência natural (rad/seg), viga curva biengastada.

Condição	DINAUT (N=19 nós)	YOO e FEHRENBACH ²⁶ (4 GDL)	Dif. (%)
$a_z = a_y = 0$	268,39	262,97	2,01
$a_y = -9,86\text{cm}$ $a_z = 0$	253,98	261,41	2,84

Pode ser visto na forma deformada da viga, mostrada na FIGURA 6.4.2, que a coordenada z do centro de corte contribui mais significativamente para as forças de inércia na vibração da viga. Conforme TABELA 6.4.4, para a seção com simples simetria em relação ao eixo vertical y , o efeito da localização do centro de corte na resposta dinâmica da viga é relativamente pequena. Conseqüentemente, em vigas de seção transversal sem simetria em relação ao eixo vertical, o efeito do centro de corte terá influência significativa.

* Exemplo E:

Agora veremos um exemplo onde será verificada a influência da posição do centro de corte para uma viga com seção transversal sem nenhum eixo de simetria, e, também, a posição da seção transversal com respeito a curvatura da viga. A seção transversal, bem como a sua posição em cada caso, são mostradas na FIGURA 6.4.3.

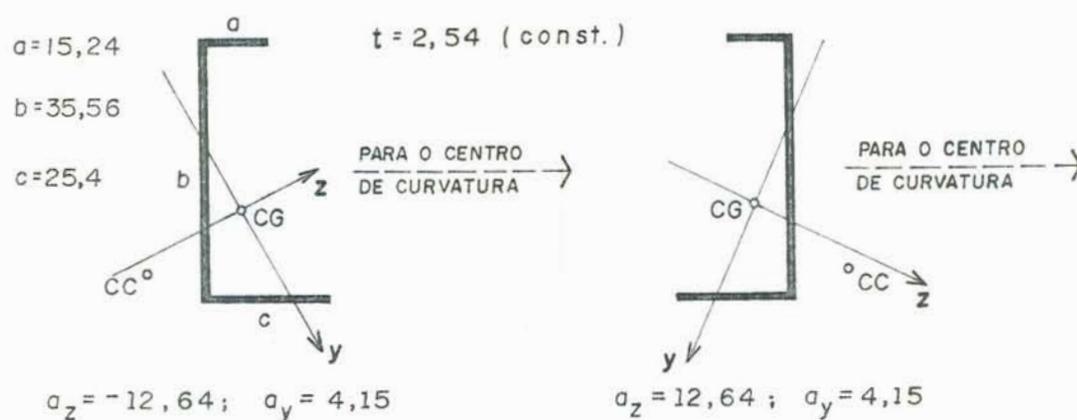


FIGURA 6.4.3 - Viga curva, seção transversal sem eixo de simetria (unidades: cm).

Momentos de inércia e as coordenadas do centro de corte são tomados com respeito aos eixos principais da seção. Com base para comparação, o efeito do centro de corte é eliminado, igualando as coordenadas a_y e a_z a zero. Os resultados da análise computacional estão mostrados na TABELA 6.4.5. As propriedades da seção transversal são: $A = 180,6 \text{ cm}^2$, $I_z = 34305 \text{ cm}^4$, $I_y = 7493,7 \text{ cm}^4$, $I_\omega = 983286 \text{ cm}^6$, $K_t = 388,3 \text{ cm}^4$, $r_p = 13,78 \text{ cm}$, $E = 200,1 \text{ GN/m}^2$ e $G = 77,3 \text{ GN/m}^2$. A viga tem um comprimento de 6,096 m e o ângulo do vão é de 50 graus. As condições de contorno são todas engastadas, nos dois extremos.

EXEMPLO E

TABELA 6.4.5 - Efeito do centro de corte na resposta dinâmica de viga curva de seção transversal assimétrica.

Condição	DINAUT (N = 19 nós)	YOO ²⁶ (4 GDL)	Dif. (%)	Efeito
$a_z = a_y = 0$	308,78	297,0	3,80	-
$a_z = -12,64$ $a_y = 4,150$	385,67	396,5	2,80	33,5% mais rigi.
$a_z = 12,64$ $a_y = 4,15$	232,63	237,3	2,00	20,1% mais flex.

Obs.: As frequências em "rad/seg"; a_z e a_y em "cm".

A única conclusão possível, com base nos resultados da TABELA 6.4.5 e comparados com YOO²⁶ é que os efeitos do centro de corte na resposta dinâmica de vigas curvas são significativos e devem ser levados em consideração.

* Exemplo F:

O exemplo que segue, analisado por CHRISTIANO³ corresponde a um modelo experimental de uma ponte curva com vão simples, cuja seção transversal está indicada na FIGURA 6.4.4, ilustrada na página que segue.

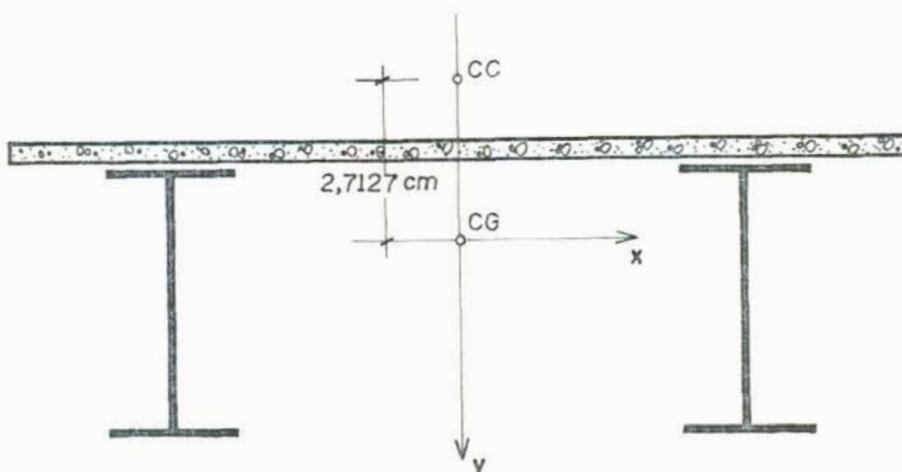


FIGURA 6.4.4 - Seção transversal do modelo da ponte.

O modelo possui comprimento de 2,3876 m e um raio de curvatura com 2,4384 m, onde o vão possui um ângulo de 56 graus. As propriedades da seção transversal são: $A = 19,758 \text{ cm}^2$, $I_z = 77,3358 \text{ cm}^4$, $I_y = 913,628 \text{ cm}^4$, $K_t = 1,9646 \text{ cm}^4$, $I_\omega = 4524,83 \text{ cm}^6$, $E = 277219 \text{ N/cm}^2$, $G = 103026 \text{ N/cm}^2$, $\rho = 0,001218 \text{ kg/cm}^3$, $a_y = -2,7127 \text{ cm}$. Segundo CHRISTIANO, as condições de contorno são todas rotuladas em ambos extremos. A frequência fundamental medida no modelo foi de 4,7 Hz, enquanto a computada por CHRISTIANO foi de 2,95 Hz. Portanto, verificou-se uma diferença significativa entre a frequência fundamental medida e a calculada. Utilizando o programa DINAUT, a frequência fundamental para bordos birrotulados tanto na flexão como na torção foi de 2,928 Hz, com uma diferença de 0,77% em relação à calculada na Ref. [3]. Analisando o modelo, chega-se à conclusão que as condições de contorno na torção poderiam ser biengastadas. Considerando essa condição de contorno, a frequência fundamental calculada pelo programa DINAUT foi de 4,43 Hz, aproximando-se muito da medida no modelo (4,7 Hz). Nesse exemplo, fica clara a importância das condições de contorno teóricas com relação às condições de contorno reais do modelo.

6.5. Sobre a Frequência Fundamental de Pontes de Concreto de Eixo Reto e Curvo

Um trabalho de muita utilidade para o Engenheiro projetista, que necessita estimar de forma rápida o valor da frequência fundamental em pontes de concreto armado, foi realizada por CANTIENE². Nesse trabalho, foram medidas as frequências fundamentais de 224 pontes, sendo que as seguintes limitações foram introduzidas:

- eliminação dos valores de estruturas em balanço;
- limitação do raio de curvatura da ponte: $R \geq 900$ m (aproximadamente reta);
- limitação do ângulo de inclinação: $\gamma \leq 15$ graus;
- limitação da constante de amortecimento K:

$$70 \text{ KN/mm} \leq K \leq 270 \text{ KN/mm},$$

- eliminação dos resultados que não foram obtidos das medições do vão máximo.

O resultado de uma tentativa para estabelecer uma relação $f = g(L)$ entre a frequência fundamental f da ponte e o seu vão máximo L , é apresentado na FIGURA 6.5.1 na página a seguir.

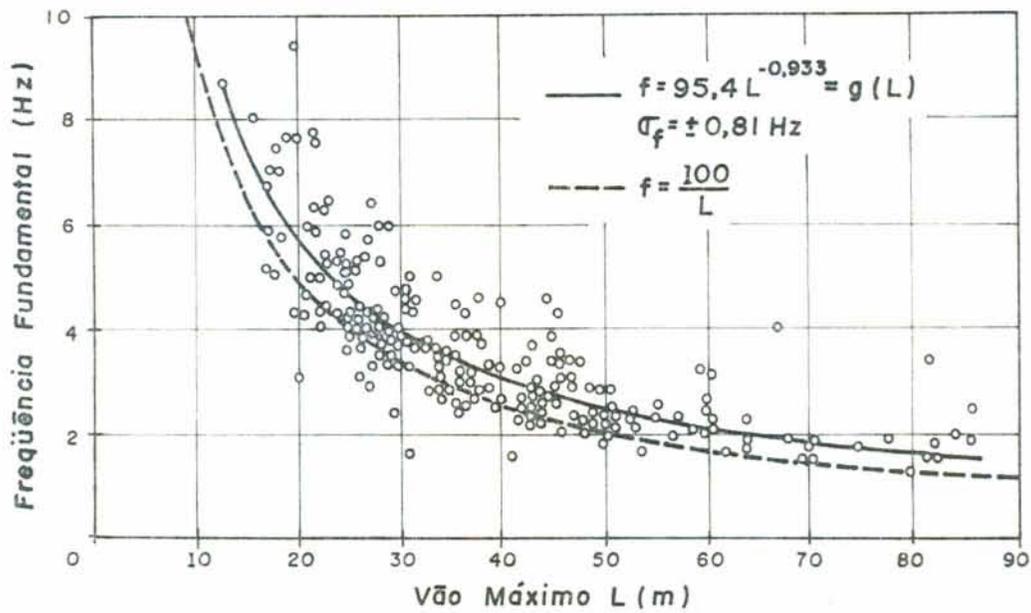


FIGURA 6.5.1 - Frequência fundamental f como função do vão máximo L ; para 224 valores medidos; σ_f = desvio-padrão.

A partir dos resultados obtidos nos exemplos de vigas curvas e retas da seção 6.4, e nos valores medidos em pontes publicadas na bibliografia, são apresentadas as curvas correspondentes da frequência fundamental de pontes retas e curvas em função do seu vão máximo, para ângulos de curvatura que variam de 0 até 80 graus (FIGURA 6.5.2 da próxima página).

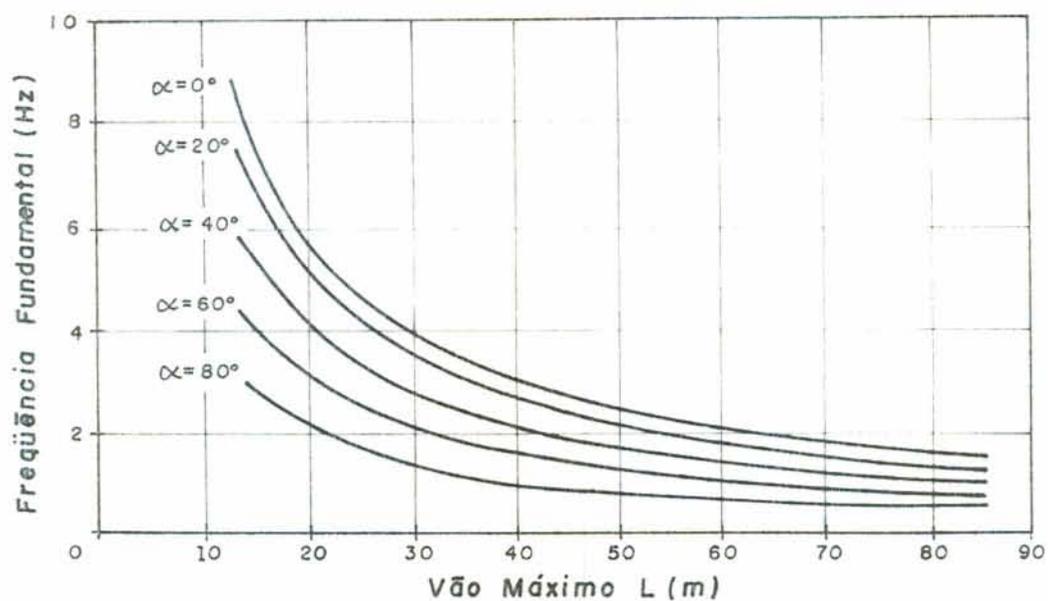


FIGURA 6.5.2 - Frequência fundamental de pontes retas e curvas em função do vão máximo L.

As curvas são aproximadas, mas, considerando que o interesse seja basicamente para uma estimativa inicial de projeto, elas tornam-se de fundamental importância.

7. AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NA ANÁLISE DINÂMICA DA VIGA CURVA

7.1. Considerações Iniciais

Com o duplo objetivo de verificar as equações diferenciais utilizadas na análise dinâmica da viga curva e a precisão do método numérico empregado na solução dessas equações, serão comparados, neste capítulo, exemplos provenientes de trabalhos publicados, assim como de valores obtidos por medições experimentais.

Pelo número inexpressivo de trabalhos publicados, relacionados com a resposta dinâmica de vigas curvas sujeitas a cargas em movimento, e considerando que a maioria dos mesmos não fornecem dados completos dos exemplos analisados, resulta, conseqüentemente, um número reduzido de exemplos passíveis de comparações.

As equações diferenciais empregadas na análise dinâmica da viga curva estão apresentadas no Capítulo 5, e o método numérico utilizado como solução dessas equações é relatado no Capítulo 4. Como fechamento do estudo teórico, foi implementado o programa VIGADIN, já mencionado no Capítulo 5, cujas aplicações na análise dinâmica serão descritas a seguir.

7.2. Exemplos Comparativos

* Exemplo A

O primeiro exemplo a ser analisado é apresentado por CHRISTIANO³. A viga curva, mostrada na FIGURA 7.2.1, possui as seguintes propriedades: $A = 19,758 \text{ cm}^2$; $I_z = 77,3358 \text{ cm}^4$; $I_y = 913,628 \text{ cm}^4$; $K_t = 1,9646 \text{ cm}^4$; $I_\omega = 4524,83 \text{ cm}^6$; $a_z = 0$; $a_y = 2,7127 \text{ cm}$; $\nu = 0,3445$; $\rho = 0,00121798 \text{ kg/cm}^3$;

$E = 277217 \text{ N/cm}^2$. O comprimento da viga é de 238,76 cm, raio de curvatura constante ao longo da mesma, e mede 243,84 cm, correspondendo a um ângulo interno de 56 graus. Ambas as extremidades, direita e esquerda, possuem condições de contorno rotuladas, tanto na flexão horizontal e vertical, como também na torção.

O modelo teórico utilizado por CHRISTIANO³ na análise dinâmica, consiste numa carga vertical de 60 N, que se desloca sobre a viga com velocidade constante de 4 m/s.

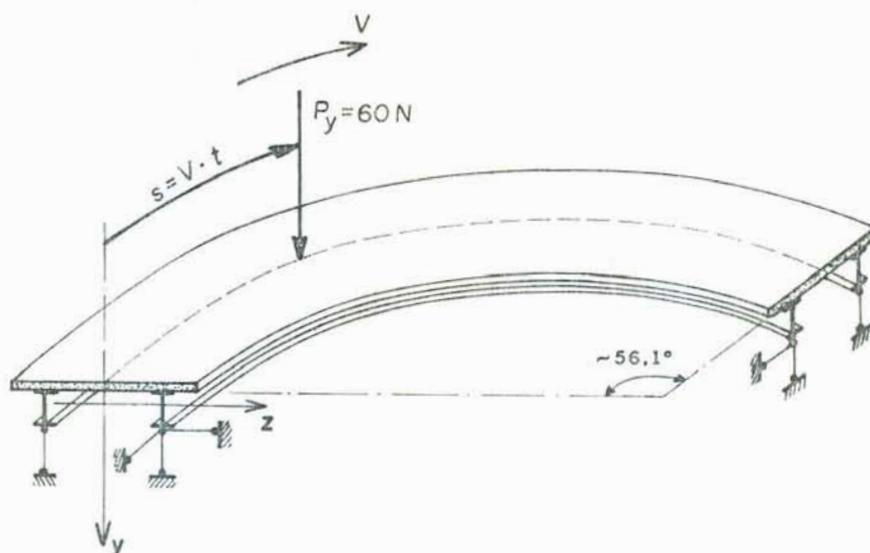


FIGURA 7.2.1 - Viga (Ponte) curva horizontal sujeita à carga em movimento com velocidade constante V .

Usando o programa VIGADIN, obteve-se a resposta dinâmica da estrutura de referência, sendo a variação do deslocamento vertical com o tempo t apresentada na FIGURA 7.2.2.

CHRISTIANO³ expressa a resposta dinâmica do modelo em termos do Coeficiente de Majoração Dinâmica (C.M.D.), definindo como a razão entre a resposta dinâmica e o deslocamento vertical estático no centro do vão.

Portanto, a comparação entre os resultados obtidos por CHRISTIANO³ e os do presente trabalho, só é possível depois de conhecida a resposta estática da viga. Especificamen-

te, no Apêndice I, é apresentada a análise estática de vigas curvas, sendo que, no Exemplo D desse Apêndice, foi obtido o deslocamento estático no centro do vão da viga da FIGURA 7.2.1.

Finalmente, a comparação dos resultados pode ser realizada, cujas curvas respectivas de cada trabalho são mostradas na FIGURA 7.2.3. Entre os dois trabalhos é observada uma excelente correlação.

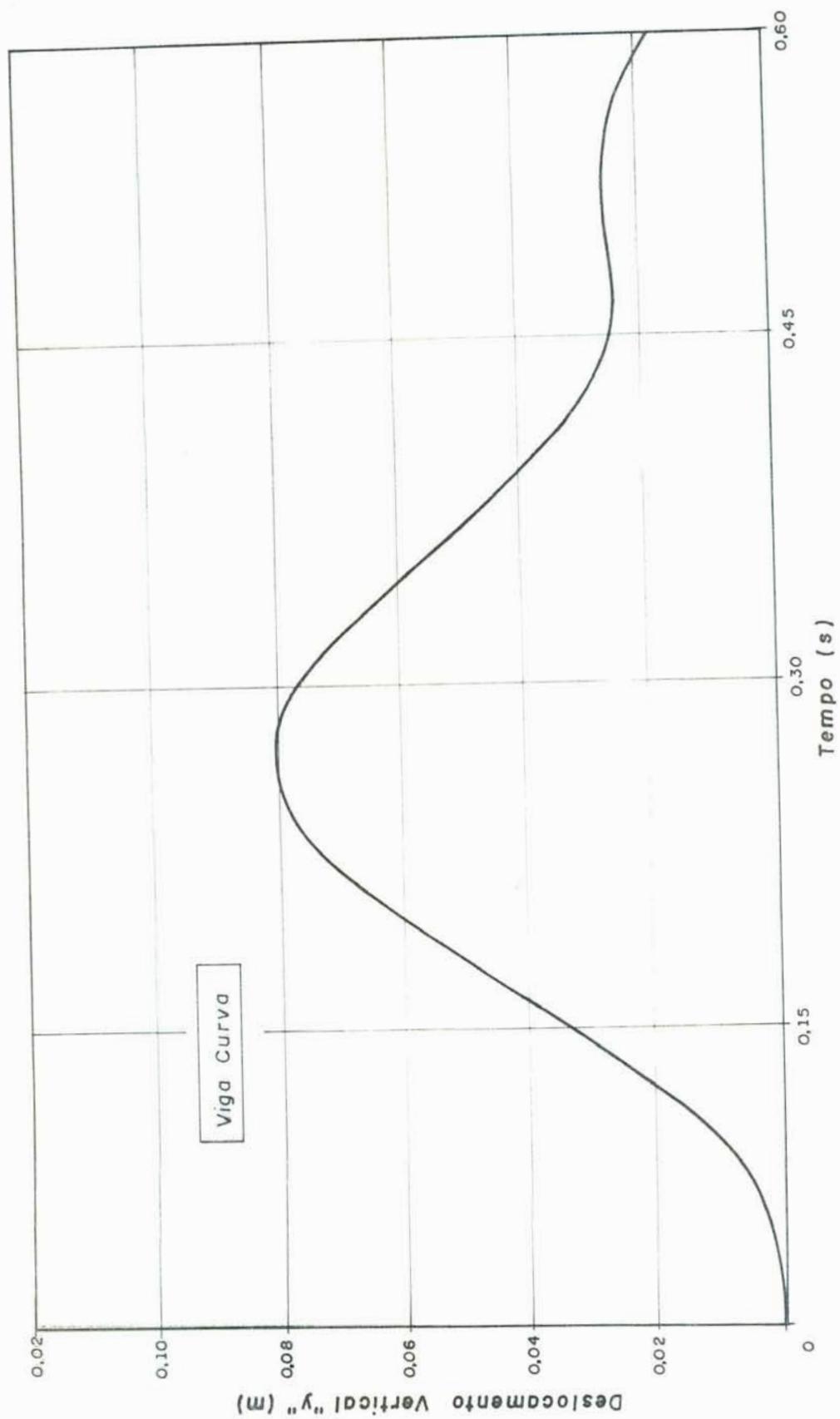


FIGURA 7.2.2 - Resposta dinâmica da viga curva: Deslocamentos verticais devido à carga em movimento.

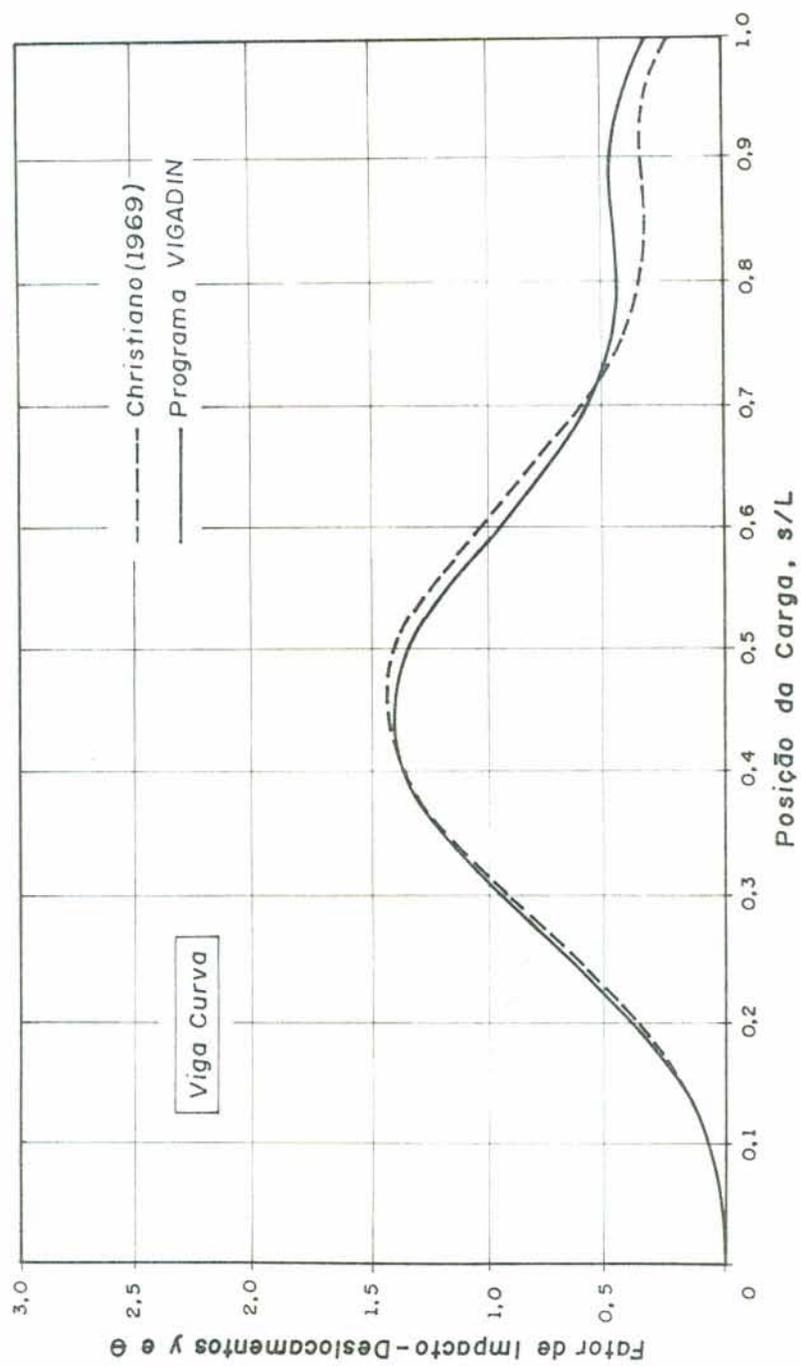


FIGURA 7.2.3 - Valores do fator de impacto (C.M.D.).

* Exemplo B

Será analisado, neste exemplo, o comportamento dinâmico de uma viga reta elevada, utilizada para suportar veículos em movimento, pertencente a um sistema de transporte urbano.

A viga reta com 25 m de comprimento, ilustrada na FIGURA 7.2.4, possui as seguintes propriedades: $A = 1,085 \text{ m}^2$; $I_z = 0,312 \text{ m}^4$; $I_y = 0,4722 \text{ m}^4$; $K_t = 0,0105 \text{ m}^4$; $I_\omega = 0,1976 \text{ m}^6$; $a_z = 0$; $a_y = 1,273 \text{ m}$; $E = 3,55 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,2$; $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$. Os contornos são considerados birrotulados, tanto na flexão vertical como na flexão horizontal, e biengastados na torção.

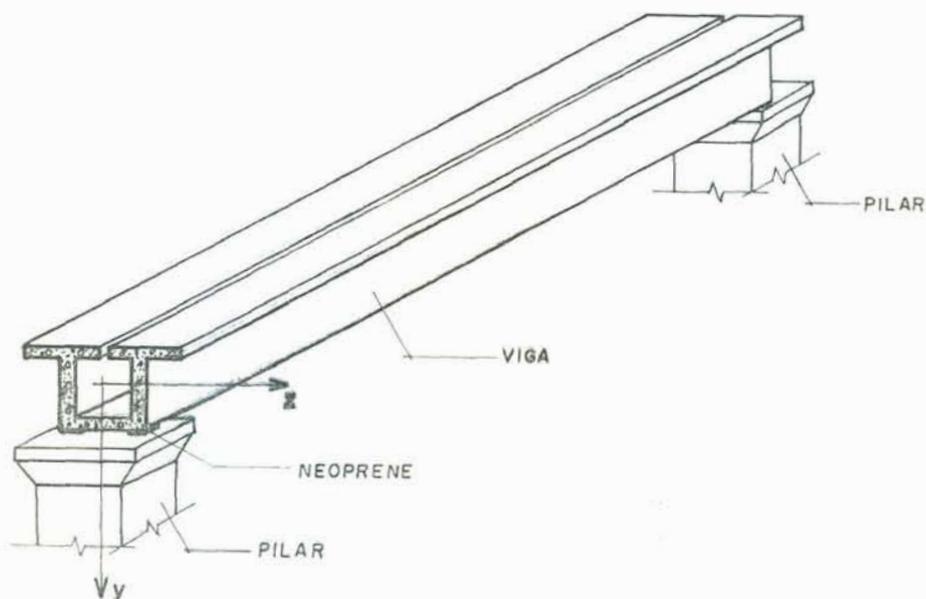


FIGURA 7.2.4 - Viga reta elevada pertencente a um sistema de transporte urbano.

A posição dos passageiros no interior do veículo e o trem de cargas equivalentes são mostrados nas FIGURAS 7.2.5(A) e 7.2.5(B), respectivamente.

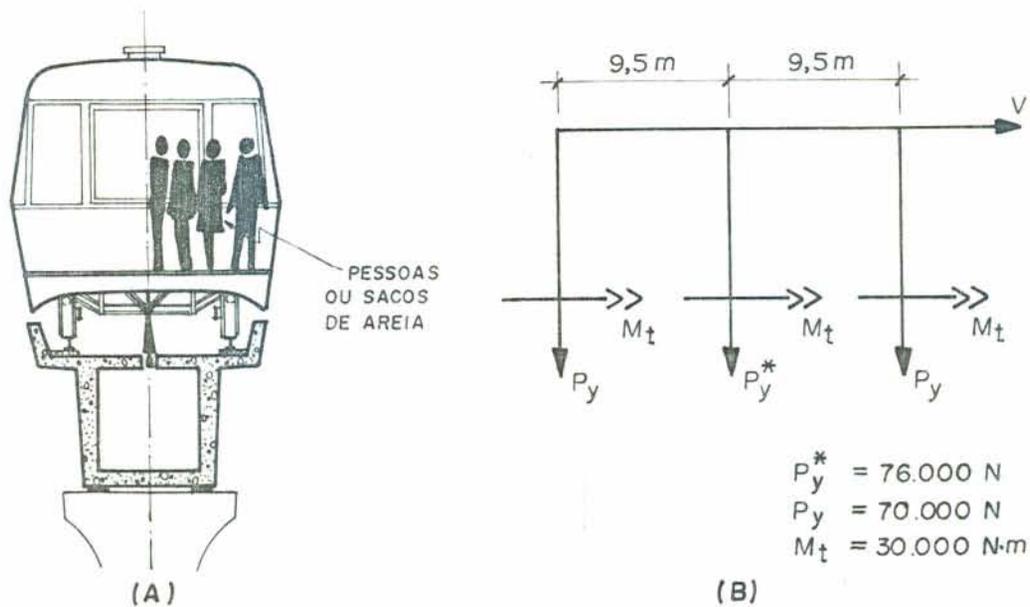


FIGURA 7.2.5 - Carregamento externo do veículo em movimento sobre a viga reta.

O carregamento aplicado na viga pelos eixos do veículo, ilustrado na FIGURA 7.2.5(B), corresponde ao peso próprio do mesmo adicionado do peso dos passageiros, posicionados em uma das extremidades do veículo, conforme FIGURA 7.2.5(A).

Para uma velocidade V do veículo de 20 m/s (72 km/h), os resultados computacionais obtidos pela aplicação do programa VIGADIN estão mostrados na FIGURA 7.2.6 na página a seguir, onde os deslocamentos e giros calculados correspondem ao centro do vão da viga.

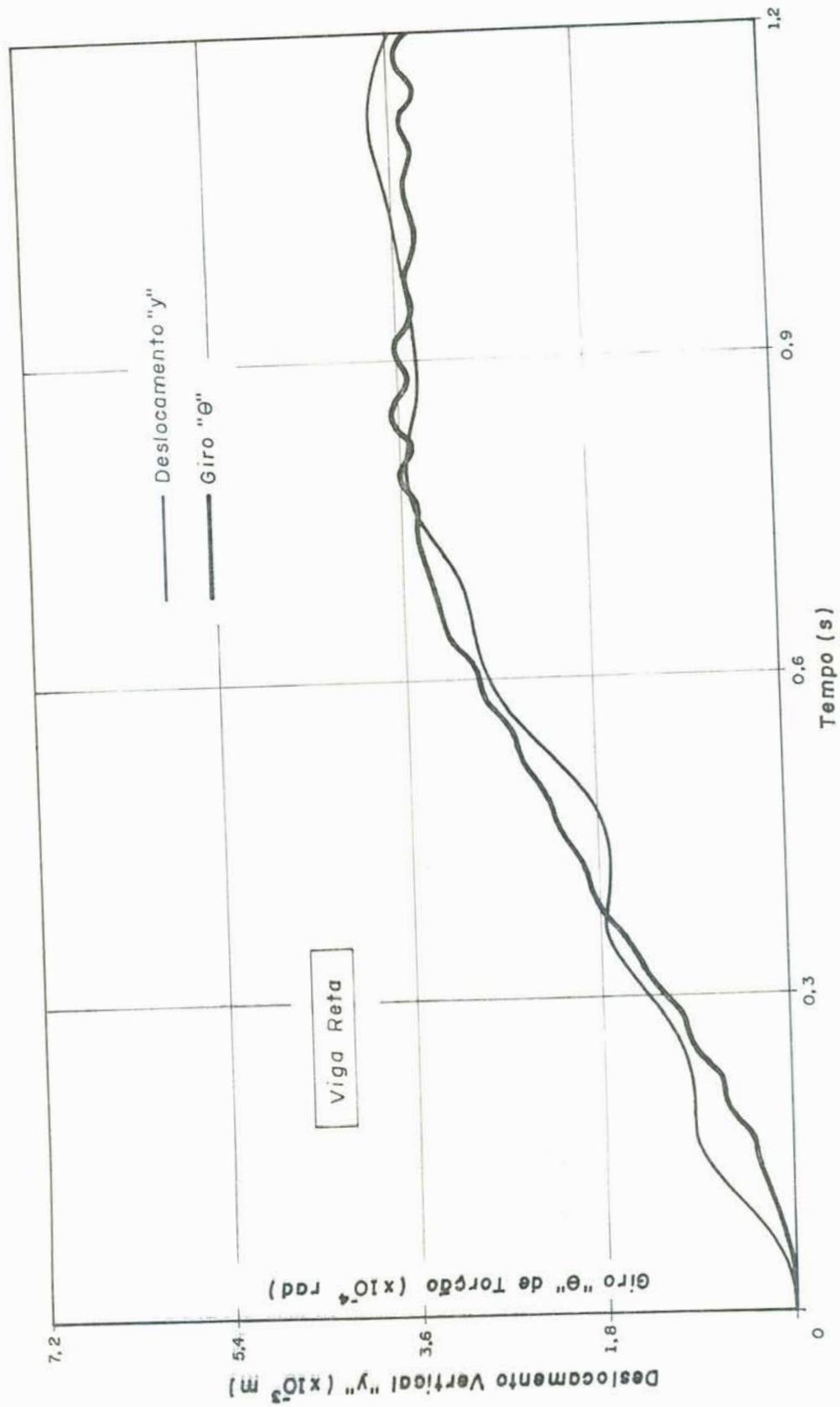


FIGURA 7.2.6 - Resposta dinâmica da viga reta: Deslocamentos verticais e giros.

Os resultados apresentados nessa figura demonstram que a resposta dinâmica máxima da viga é aproximadamente igual à estática, com um Coeficiente de Majoração Dinâmico (C.M.D.) próximo de 1; ou seja, a partir da resposta estática do deslocamento vertical obtido no Exemplo B do Apêndice 1,

$$Y_{\text{máx. est.}} = 0,003703 \text{ m},$$

e com o deslocamento dinâmico vertical máximo extraído da FIGURA 7.2.6,

$$Y_{\text{máx. din.}} = 0,0038045 \text{ m},$$

chegamos no valor do C.M.D. máximo:

$$\text{C.M.D.}_{\text{máx.}} = 1,03.$$

Por outro lado, aumentando a velocidade do veículo V , chega-se a valores do C.M.D. mais elevados, conforme mostra a FIGURA 7.2.7. Verifica-se nessa figura que o C.M.D. aumenta com a velocidade do veículo (até 250 m/s), diminuindo para velocidades superiores. A velocidade, na qual o C.M.D. é máximo, é designada de Velocidade Crítica, sendo que FRÿBRA⁶ a define da seguinte maneira:

$$V_{\text{cr}} = 2 f_1 L \quad (7.2.1)$$

onde f_1 é a frequência (Hz) de vibração vertical referente ao primeiro modo, e L o comprimento da viga. Utilizando a frequência calculada no Exemplo B da seção 6.4, então, para o presente exemplo, a velocidade crítica assume o seguinte valor:

$$V_{\text{cr}} = 2 \times 5,05 \times 25 = 253 \text{ m/s}.$$

Constata-se que a velocidade crítica calculada por (7.2.1) aproxima-se muito da obtida numericamente, ilustrada na FIGURA 7.2.7.

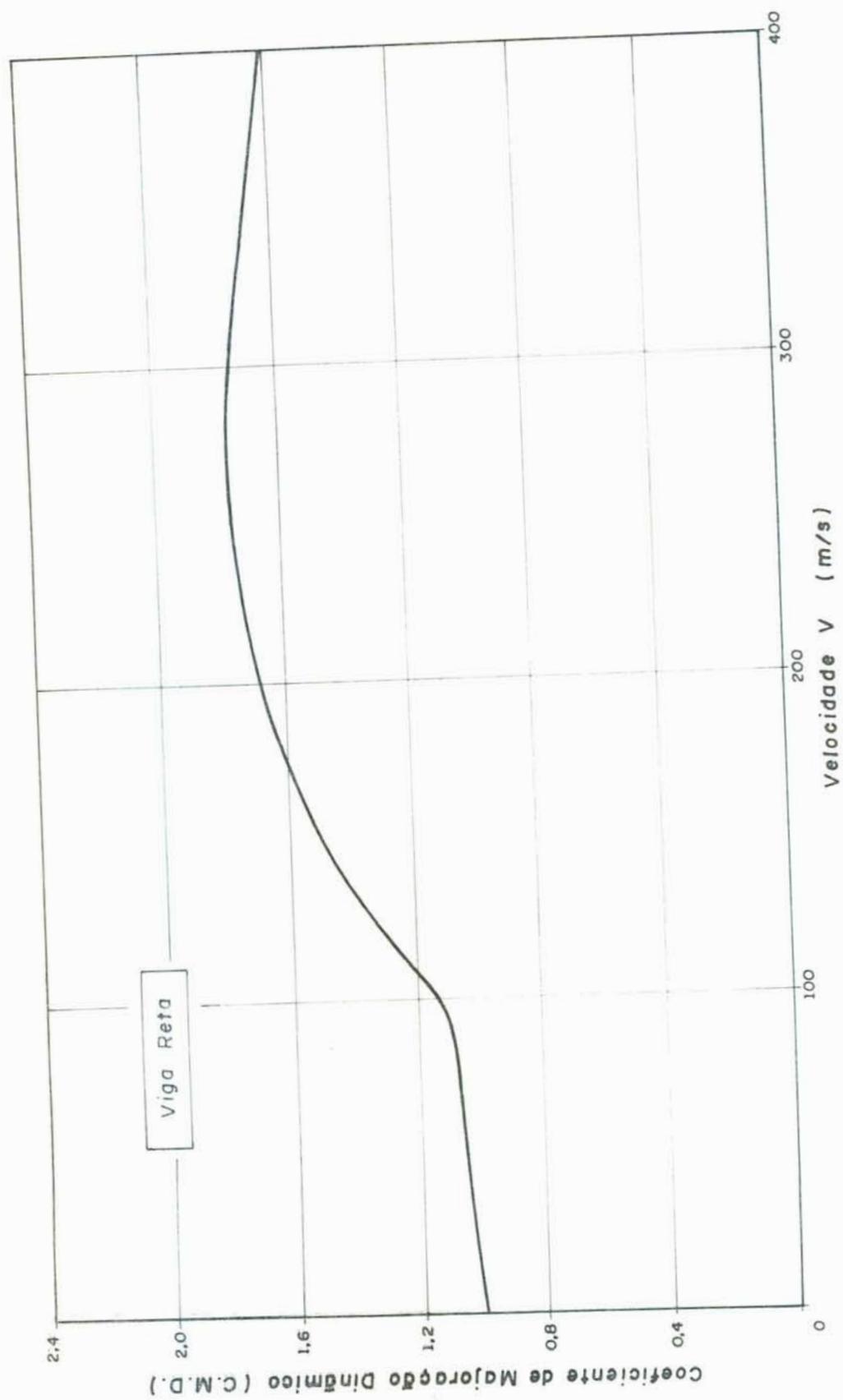


FIGURA 7.2.7 - Valores do fator de impacto (C.M.D.), função da velocidade de passagem do veículo.

* Exemplo C

A viga analisada neste exemplo possui as mesmas características da viga estudada no Exemplo B desta seção, com a diferença de ser curva, com raio de curvatura constante ao longo da mesma igual a 72 m (equivale a um ângulo interno de abertura da viga na ordem de 20 graus).

O veículo se movimenta sobre a viga com velocidade de 20 m/s (72 km/h), possuindo o mesmo trem de cargas do Exemplo B mostrado na FIGURA 7.2.5(B).

A resposta dinâmica da viga curva, em termos do deslocamento vertical e giro, está mostrada na FIGURA 7.2.8. Neste exemplo, fica saliente a influência do raio de curvatura no valor do C.M.D., se compararmos com a resposta da viga reta mostrada na FIGURA 7.2.6. O C.M.D. máximo da viga curva, para o deslocamento vertical, é em torno de 1,14; no caso da torção, o valor do C.M.D. é de 1,34.

* Exemplo D

Já neste exemplo, a viga curva possui a mesma característica da viga curva do Exemplo C, inclusive com o mesmo raio de curvatura.

A velocidade do veículo também é de 20 m/s (72 km/h), com a única alteração na posição dos passageiros, ficando agora dispostos no lado esquerdo, conforme mostra a FIGURA 7.2.9(A) na página seguinte.

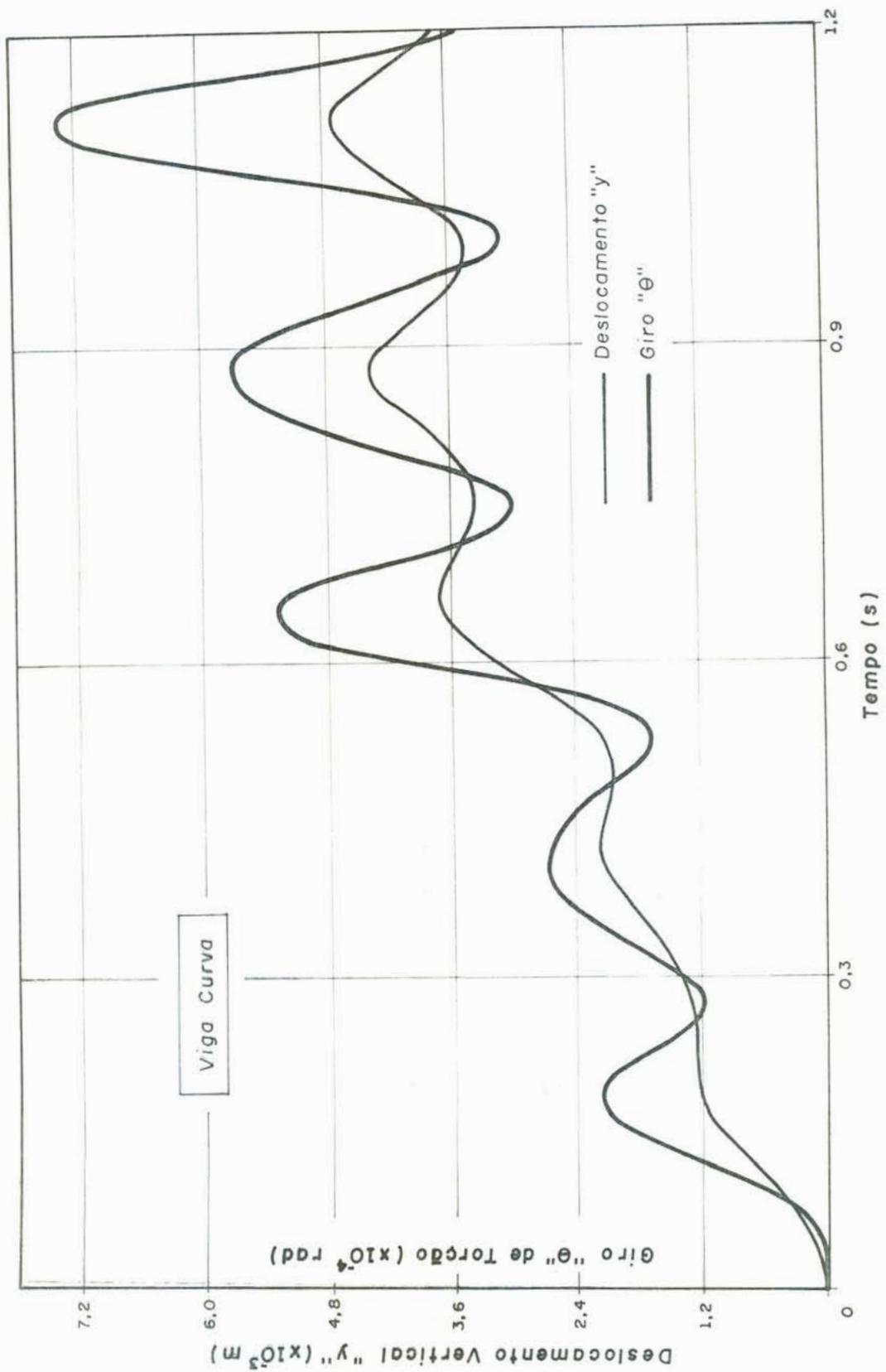


FIGURA 7.2.8 - Resposta dinâmica da viga curva: Deslocamento vertical e giro no centro do vão.

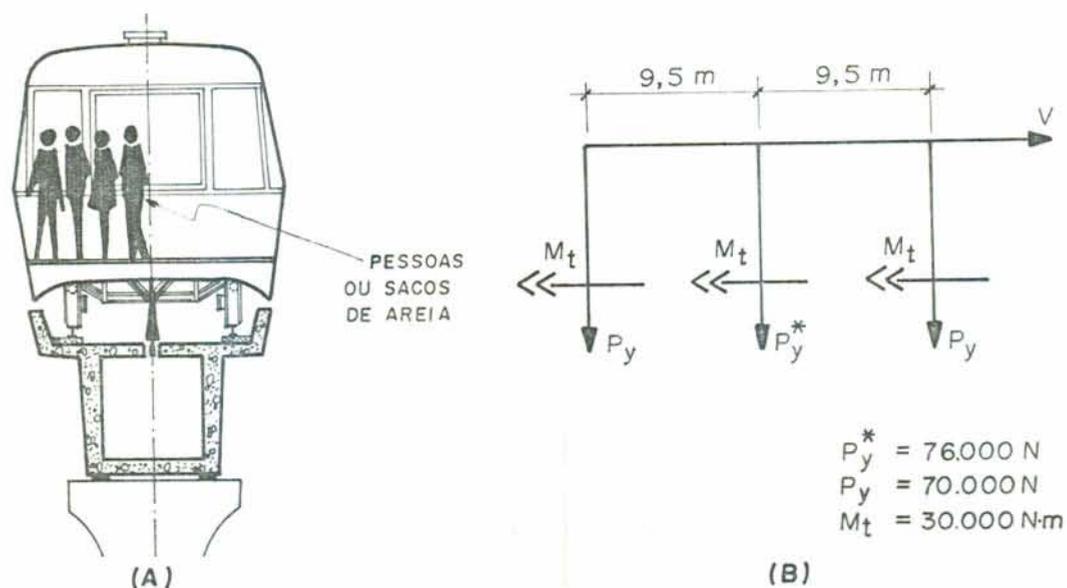


FIGURA 7.2.9 - Carregamento externo do veículo em movimento sobre a viga curva.

Na FIGURA 7.2.9(B), estão representados o carregamento vertical e o momento torçor equivalente por eixo do veículo, onde a distância entre os eixos é de 9,5 m.

As curvas que representam a resposta dinâmica da viga, em termos do deslocamento vertical e giro no centro do vão, para o veículo carregado, conforme FIGURAS 7.2.9(A) e 7.2.9(B), estão mostradas na FIGURA 7.2.10.

Nesse caso, o C.M.D. máximo referente ao deslocamento vertical, é de 1,12; quanto ao giro, é em torno de 1,15.

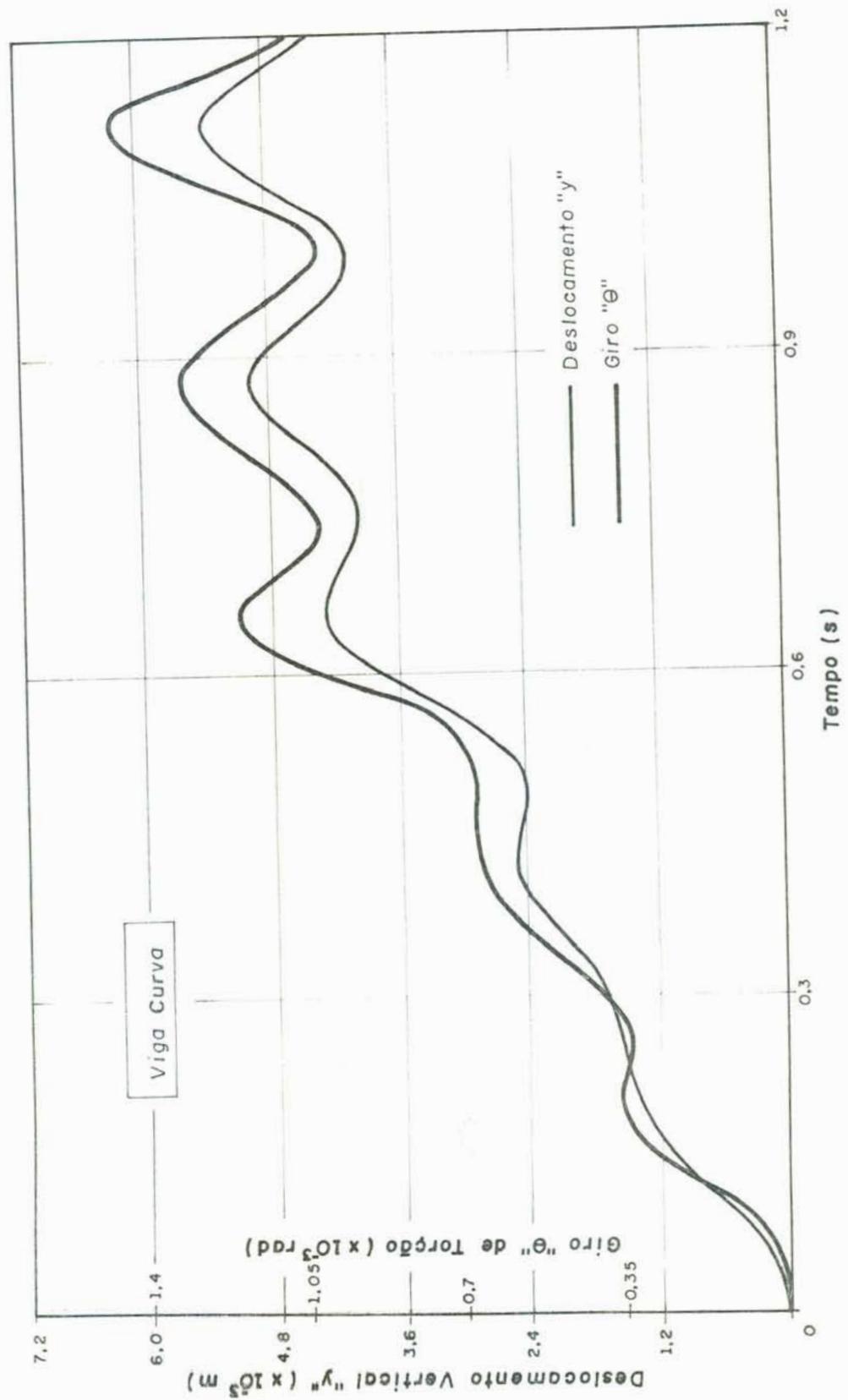


FIGURA 7.2.10 - Resposta dinâmica da viga curva: Deslocamentos verticais e giros no centro do vão.

* Exemplo E

Finalmente, neste exemplo, serão comparadas as respostas dinâmicas dos deslocamentos verticais obtidos no presente trabalho com os resultados obtidos por medições experimentais.

A viga a ser estudada é reta, com as mesmas características e propriedades da viga analisada no Exemplo B desta seção, mostrada na FIGURA 7.2.4.

No que se refere às cargas, o veículo foi carregado internamente no seu lado direito com sacos de areia.

Pela dificuldade de se estimar com precisão o trem de cargas utilizado na análise teórica da viga, associada com a influência da umidade da areia, do peso próprio do veículo, e do peso total das pessoas que circulavam no interior do mesmo, foram simulados dois limites de carregamento: um inferior e um superior. Os limites inferior e superior dos trens de carga estão mostrados nas FIGURAS 7.2.11(A) e 7.2.11(B), respectivamente.

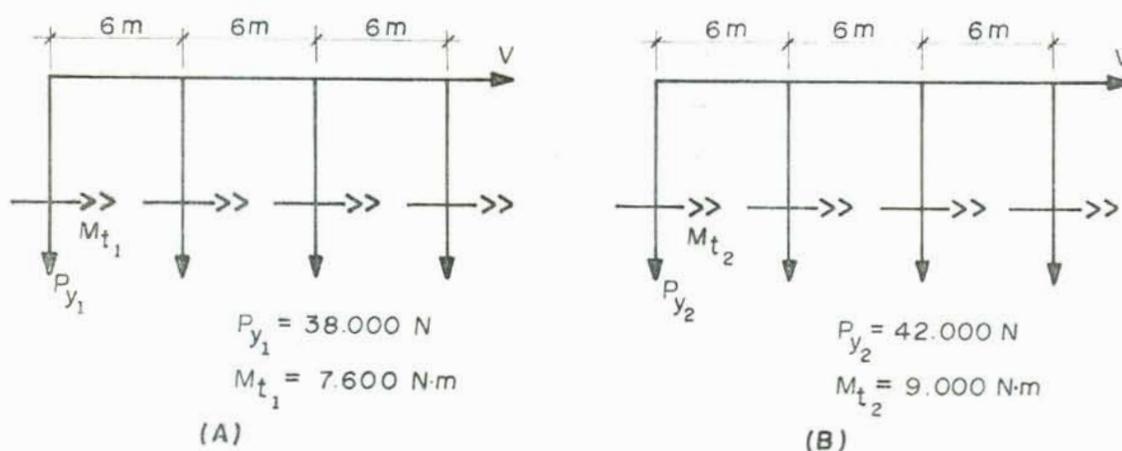


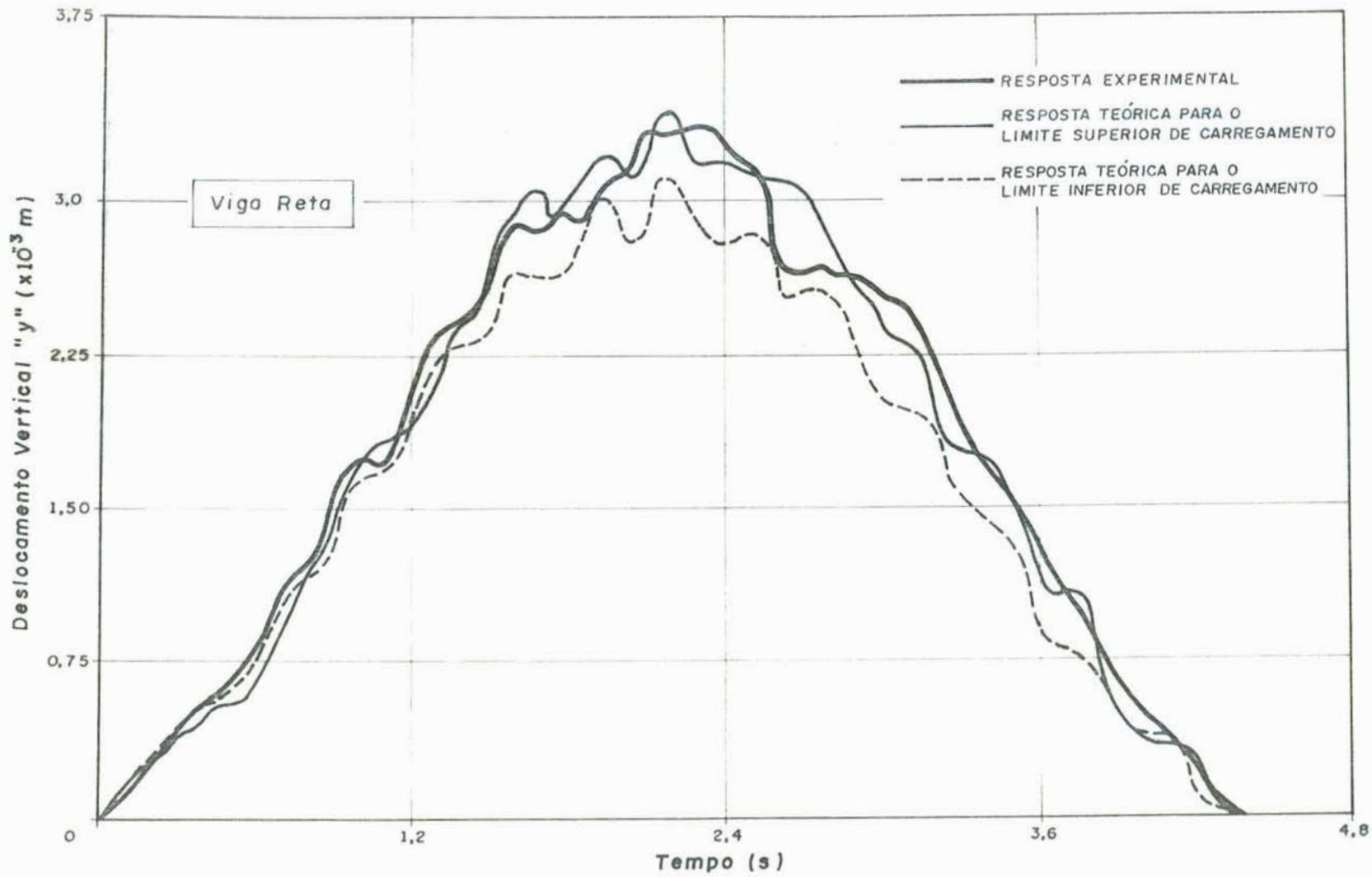
FIGURA 7.2.11 - Trens de carga utilizados como simulação do carregamento externo na viga reta.

O veículo se movimenta sobre a viga com uma velocidade de constante de 10 m/s (36 km/h).

As curvas que representam os deslocamentos verticais teóricos e experimentais, no centro do vão da viga, referentes aos limites de carregamento teórico (FIGURAS 7.2.11(A) e 7.2.11(B)) e o carregamento real, respectivamente, estão mostradas na FIGURA 7.2.12, na página que segue.

É observada uma excelente correlação entre o resultado teórico e o experimental, sendo que a diferença percentual entre a resposta teórica do deslocamento vertical para o limite inferior do carregamento e a resposta experimental do deslocamento vertical é na ordem de 4%; entre a resposta para o limite superior e a experimental, a diferença é na ordem de 2%.

FIGURA 7.2.12 - Resposta dinâmica da viga reta:
Deslocamentos verticais no cen-
tro do vão.



7.3. Sobre o Coeficiente de Impacto (C.M.D.) de Pontes de Concreto, para Diferentes Normas (Suíça, U.S.A., U.R.S.S., Suécia, R.D.A., França e Brasil)

Para levar-se em conta os efeitos dinâmicos, e mais particularmente os efeitos das cargas rolantes, tradicionalmente multiplica-se a resposta estática da estrutura por um coeficiente de majoração. Esse coeficiente é geralmente definido como sendo a relação entre a resposta dinâmica máxima e a resposta estática da seção transversal no meio do vão. Uma vez obtida, ela é aplicada uniformemente sobre todo o comprimento do vão.

Os ábacos dados para diferentes Normas Nacionais nem sempre são fundamentadas em considerações mecânicas precisas ou em ensaios sistemáticos. A dispersão dos valores dos Coeficientes de Majoração Dinâmico dados por esses ábacos estão ilustrados na FIGURA 7.3.1, extraídos da literatura técnica¹⁶.

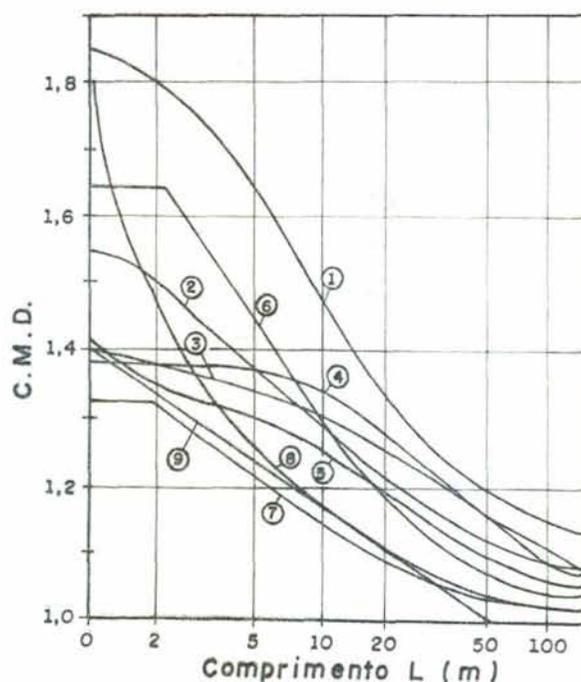


FIGURA 7.3.1 - Coeficientes de Majoração Dinâmico dados pelas diferentes Normas para pontes rodoviárias. 1,2 Suíça; 3 U.S.A.; 4 U.R.S.S.; 5 Suécia; 6,7 R.D.A.; 8 França; 9 Brasil (NB-2).

Estudos teóricos fundamentais foram consagrados, no decorrer dos últimos anos, ao comportamento dinâmico de pontes sob cargas rolantes suspensas. Entretanto, elas apenas definem um coeficiente de majoração uniforme (ou seja, para ser aplicado em todo o vão), sem dar particular atenção a influência que as imperfeições do perfil exercem sobre o sistema veículo-ponte.

Com base nisso, PALAMAS¹⁶ apresenta um estudo mais detalhado sobre a influência dessas imperfeições, alertando para a importância das mesmas nos valores dos Coeficientes de Impacto.

Aproveitando os resultados obtidos nos exemplos da seção 7.2 são apresentados, na FIGURA 7.3.2, alguns pontos relativos ao C.M.D. como função do comprimento do vão de vigas curvas e retas, para o deslocamento vertical e giro na torção.

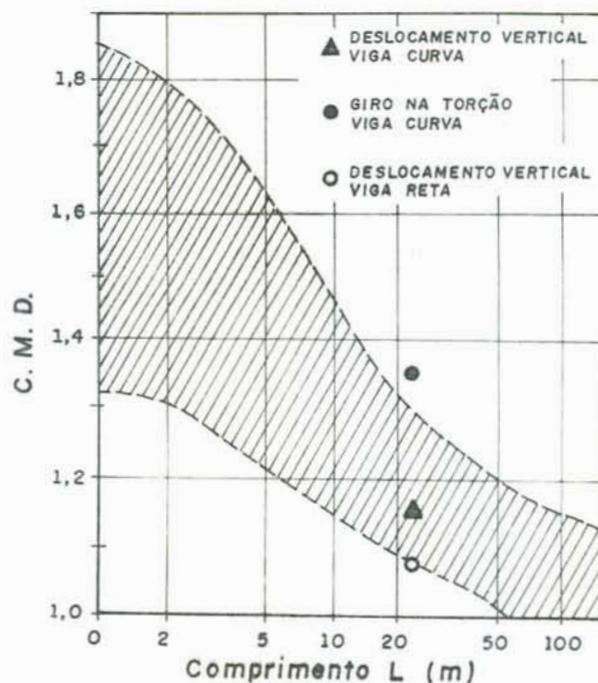


FIGURA 7.3.2 - Coeficientes de Impacto (C.M.D.).

A área achuriada da FIGURA 7.3.2, corresponde a variabilidade dos valores do C.M.D. para as diferentes normas. Nessa figura, deve-se ressaltar a influência da curvatura da viga no valor do C.M.D. para o caso do giro na torção, extra-

polando a zona de abrangência das Normas (indicados na FIGURA 7.3.1).

7.4. Considerações Finais

A partir dos exemplos da seção 7.2, podem ser extraídas conclusões de significativa importância no que se refere à análise dinâmica de vigas curvas e retas, sabendo-se que o presente trabalho utilizou o método de Diferenças Finitas Centrais (D.F.C.) na solução das equações acopladas de movimento da viga.

Especificamente no Exemplo A, também analisada por CHRISTIANO³, é verificada uma excelente correlação dos resultados, apesar do autor, em seu trabalho, ter utilizado como solução das equações diferenciais uma aproximação com séries de Fourier. Os resultados do presente trabalho são mostrados na FIGURA 7.2.2, e a comparação entre os dois trabalhos é apresentada na FIGURA 7.2.3.

Dos exemplos B e C, ressalta-se a significativa diferença entre a resposta da viga curva e a da viga reta. A influência da curvatura é observada claramente nos valores do Coeficiente de Majoração Dinâmico (C.M.D.). Além disso, também no Exemplo B, deve ser observada a influência da velocidade de passagem do veículo sobre a viga nos valores do C.M.D., expressada na FIGURA 7.2.7.

Entre os Exemplos C e D, constata-se que, para uma viga de mesma curvatura, a posição dos passageiros no interior do veículo exerce uma influência significativa nos valores do C.M.D. para o caso do giro na torção.

Finalmente, no Exemplo E, são comparados os resultados teóricos com os valores obtidos por medições experimentais. Positivamente, essa é a forma mais aconselhável para analisar com relativa segurança a viabilidade ou não da solução de um determinado problema teórico.

No nosso caso, é observada uma proximidade aceitável entre os resultados obtidos no presente trabalho e os medidos, apresentados na FIGURA 7.2.12, reforçando ainda mais a confiabilidade das equações diferenciais adotadas e do método numérico utilizado na solução das mesmas.

CONCLUSÕES

Com base nos estudos teóricos e nos exemplos calculados e comparados ao longo deste trabalho, envolvendo a análise estática e dinâmica de vigas curvas, chegou-se a várias conclusões. Dentre elas, destacou-se duas de fundamental importância. A primeira referente a validade das equações diferenciais de VLASOV²⁵ adotadas neste trabalho, e a segunda, relacionada com a eficiência do método numérico empregado na solução das mesmas.

A partir dos resultados obtidos, verificou-se que para as vigas ou pontes em geral, relativamente esbeltas, as hipóteses de VLASOV²⁵ se mostraram plenamente aplicáveis, concluindo-se que, a contribuição da deformação por corte é insignificante e pode realmente ser desprezada na solução desse tipo de problema. Cabe ainda salientar que nos casos onde há a necessidade de se levar em conta a deformação por corte, certamente, se chagaria em equações de maior complexidade, dificultando ainda mais a resolução do sistema.

Por outro lado, o emprego do método de Diferenças Finitas Centrais como solução das equações diferenciais envolvidas, levou a resultados aceitáveis e condizentes com a aproximação numérica considerada, ressaltando-se a dificuldade em estabelecer o limite de estabilidade do método (Dt_{cr}) para os problemas dinâmicos que envolvem equações acopladas entre as deformações.

Na solução numérica das equações diferenciais, a convergência dos resultados é verificada para um número relativamente pequeno de nós discretizados, resultando numa solução computacional rápida, principalmente na obtenção das frequências naturais, modos de vibração e na resposta estática.

No entanto, quando a viga é submetida a cargas móveis, a solução computacional requer um tempo de processamento maior. Isso ocorre basicamente por dois motivos: primeiro por ser um problema incremental e necessitar de um intervalo de tempo de integração pequeno para manter a estabilidade do método numérico; e segundo, quando a velocidade de passagem do veículo for baixa.

Especial atenção foi dada também à determinação do Fator de Impacto (Coeficiente de Majoração Dinâmica). Foram detectados dois fatores, além do comprimento do vão, que influenciavam nos valores desse coeficiente: (1) a curvatura da viga (FIGURA 7.3.2), principalmente no caso da torção, onde o coeficiente extrapola inclusive a faixa de abrangência de várias normas internacionais; (2) a velocidade de passagem do veículo sobre a viga curva (FIGURAS 3.6.1 e 7.2.7).

Quanto a forma da seção transversal, constatou-se que em seções assimétricas, onde o centro de corte não coincide com o centro de gravidade, as vibrações resultantes são acopladas (TABELA 6.4.2), acontecendo o mesmo quando a viga é curva. Dependendo da posição do centro de corte em relação a curvatura da viga, obtém-se uma estrutura mais rígida ou mais flexível (TABELA 6.4.5), além disso, quanto menor o raio de curvatura maior é a deformação e menor a frequência natural de vibração, ou seja, maior é a flexibilidade da via.

Embora as condições de contorno consideradas na análise teórica diferenciassem das condições reais, os resultados obtidos foram satisfatórios e aceitáveis, permanecendo dentro da margem de erro admissível.

A partir dos diferentes estudos abordados no transcórre deste trabalho, sugere-se os seguintes como posteriores trabalhos de pesquisa:

a) Consideração de vigas com as características da seção transversal e curvatura variáveis ao longo do eixo baricêntrico;

- b) verificação do problema da instabilidade da via;
- c) análise da estrutura prevendo a possibilidade de ocorrerem abalos sísmicos;
- d) estudo da influência do amortecimento da estrutura na resposta dinâmica da viga, principalmente quando a mesma experimenta grandes oscilações;
- e) consideração das imperfeições ou irregularidades na superfície de contato entre o veículo e a via;
- f) a influência da curvatura da viga do fator de impacto e nas frequências naturais;
- g) estudo da estabilidade do método de Diferenças Finitas Centrais quando esse for aplicado na solução das equações diferenciais acopladas de VLASOV²⁵;
- h) simular com maior precisão o carregamento transmitido à viga pelo veículo, por exemplo, considerando as oscilações laterais, verticais e torcionais de cada eixo através de valores obtidos experimentalmente;
- i) projeto de alteração da NB-2 no item referente aos valores do fator de impacto de pontes e elevadas em geral, propondo valores diferentes desse coeficiente para diferentes curvaturas da estrutura de referência.

APÊNDICE I - ANÁLISE ESTÁTICA DE VIGAS CURVAS COM SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA E PAREDE FINA PARA CONTORNOS ROTULADOS E ENGASTADOS

I.1. Considerações Iniciais

Verificou-se, na bibliografia técnica, trabalhos relacionados com a análise estática de vigas retas ou curvas, com dupla simetria da seção transversal. No entanto, não foram encontradas soluções diretas para seção transversal arbitrária.

Tanto a curvatura da viga como a posição do centro de corte produzem acoplamento entre os esforços de flexão e torção, sendo então necessária a determinação do centro de corte, resolvendo as forças internas apropriadas de flexão e torção, e, finalmente, determina as tensões resultantes e deformações.

A análise estática também se faz necessária, quando se deseja obter o Coeficiente de Majoração Dinâmica (C.M.D.), igualmente chamado Fator de Impacto, que é a relação entre a resposta dinâmica e a resposta estática relativa ao centro do vão da viga curva.

$$\text{C.M.D.} = \frac{\text{Resposta Dinâmica}}{\text{Resposta Estática}} \quad (\text{I.1.1})$$

Neste trabalho, a resposta dinâmica de vigas curvas é apresentada no Capítulo 5, e os exemplos respectivos estão mostrados no Capítulo 7.

As equações da viga envolvidas neste estudo são as mesmas utilizadas no Capítulo 5, desconsiderando as parcelas que contêm derivadas no tempo. As cargas externas são consideradas estáticas com amplitude constante no tempo.

Como solução dessas equações diferenciais, foi utilizado o método de Diferenças Finitas Centrais, admitindo-se con-

tornos tanto rotulados como engastados na flexão vertical e horizontal e na torção.

Foi implementado um programa em microcomputador na linguagem BASIC, designado de VIGAESt, que faz a análise estática da estrutura e obtém as respostas em tensões e deformações.

1.2. Equações Diferenciais da Viga Estática Curva

Admitindo as mesmas hipóteses de VLASOV²⁵ da seção 5.4, desprezando os termos com derivadas temporais, as equações (5.4.1), (5.4.2), (5.4.3) e (5.4.4) tomam a seguinte formulação:

$$E(I_z + \frac{I_\omega}{R^2}) \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \frac{GK_t}{R^2} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{EI_\omega}{R} \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^4} - \frac{(EI_z + GK_t)}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = P_y(s) \quad (I.2.1)$$

$$EI_y \left(\frac{\partial^4 z}{\partial s^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) + \frac{EA}{R} \left(\frac{z}{R} + \frac{\partial x}{\partial s} \right) = P_z(s) \quad (I.2.2)$$

$$EI_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^4} + \frac{EI_\omega}{R} \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \frac{(EI_z + GK_t)}{R} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - GK_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \frac{EI_z}{R^2} \theta = M_t(s) \quad (I.2.3)$$

$$- EA \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial s} = P_x(s) \quad (I.2.4)$$

As incógnitas e as constantes da viga que compõem as equações (I.2.1), (I.2.2), (I.2.3) e (I.2.4) já foram devidamente definidas na seção 5.4.

1.3. Solução Numérica das Equações Diferenciais da Viga Estática

Pelo acoplamento das Equações Diferenciais (I.2.1) a (I.2.4), a integração das mesmas por métodos analíticos diretos é, em geral, impraticável. Com isso, optou-se novamente pela aplicação do método de Diferenças Finitas Centrais. Nesse caso, a mesma é feita somente na coordenada espacial s , conforme retícula da FIGURA I.3.1.

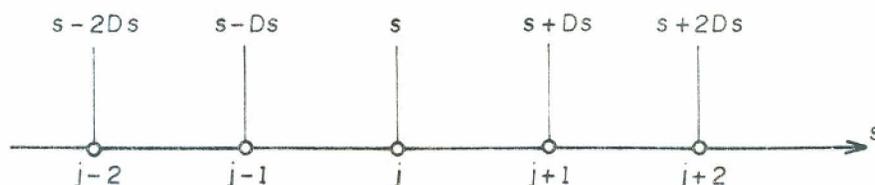


FIGURA I.3.1 - Retícula para solução do sistema em Diferenças Finitas Centrais.

Substituindo os operadores diferenciais das FIGURAS 4.2.3 a 4.2.6 nas equações (I.2.1) a (I.2.4), para o ponto genérico j da retícula, chega-se nas seguintes equações em Diferenças Finitas Centrais, respectivamente:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{Ds^4} \left(I_z + \frac{I_\omega}{R^2} \right) (y_{j-2} - 4y_{j-1} + 6y_j - 4y_{j+1} + y_{j+2}) - \frac{GK_t}{R^2 Ds^2} (y_{j-1} - \\ & - 2y_j + y_{j+1}) + \frac{EI_\omega}{RDs^4} (\theta_{j-2} - 4\theta_{j-1} + 6\theta_j - 4\theta_{j+1} + \theta_{j+2}) - \\ & - \frac{EI_z + GK_t}{RDs^2} (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}) = P_{y_j} \end{aligned} \quad (I.3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI_y}{Ds^4} (z_{j-2} - 4z_{j-1} + 6z_j - 4z_{j+1} + z_{j+2}) + \frac{EI_y}{R^2 Ds^2} (z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}) + \\ & + \frac{EA}{2RDs} (x_{j+1} - x_{j-1}) + \frac{EA}{R^2} z_j = P_{z_j} \end{aligned} \quad (I.3.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI_\omega}{Ds^4} (\theta_{j-2} - 4\theta_{j-1} + 6\theta_j - 4\theta_{j+1} + \theta_{j+2}) + \frac{EI_\omega}{RDs^4} (y_{j-2} - 4y_{j-1} + 6y_j - \\ & - 4y_{j+1} + y_{j+2}) - \frac{EI_z + GK_t}{RDs^2} (y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}) - \frac{GK_t}{Ds^2} (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \\ & + \theta_{j+1}) + \frac{EI_z}{R^2} \theta_j = M_{t_j} \end{aligned} \quad (I.3.3)$$

$$- \frac{EA}{Ds^2} (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) + \frac{EA}{2RDs} (z_{j+1} - z_{j-1}) = P_{x_j} \quad (I.3.4)$$

Reagrupando os termos das equações (I.3.1) a (I.3.4), na forma matricial, para o nó genérico j da retícula, chega-se no seguinte sistema local:

$$\mathbf{K} \vec{U} = \vec{P}, \quad (\text{I.3.5})$$

onde o vetor \vec{U} contém as incógnitas nodais em deslocamentos e giros, cujos elementos possuem a seguinte disposição:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} y_{j-2} \\ z_{j-2} \\ \theta_{j-2} \\ x_{j-2} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ y_{j+2} \\ z_{j+2} \\ \theta_{j+2} \\ x_{j+2} \end{pmatrix} . \quad (\text{I.3.6})$$

A matriz \mathbf{K} corresponde à matriz de rigidez local, cujas componentes estão definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_3 & 0 & \vdots & (-4A_1-A_2) & 0 & (-4A_3-A_4) & 0 & \vdots & (6A_1+2A_2) & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & (-4B_1+B_2) & 0 & -B_3 & \vdots & 0 & (6B_1-2B_2+B_4) \\ C_2 & 0 & C_1 & 0 & \vdots & (-4C_2-C_3) & 0 & (-4C_1-C_4) & 0 & \vdots & (6C_2+2C_3) & 0 \\ 0 & -D_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & (2D_1+D_2) & 0 & -D_3 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ (6A_3+2A_4) & 0 & \vdots & (-4A_1-A_2) & 0 & (-4A_3-A_4) & 0 & \vdots & A_1 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & (-4B_1+B_2) & 0 & B_3 & \vdots & 0 & B_1 & 0 & 0 \\ (6C_1+2C_4+C_5) & 0 & \vdots & (-4C_2-C_3) & 0 & (-4C_1-C_4) & 0 & \vdots & C_2 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 2D_3 & \vdots & 0 & (-2D_1-D_2) & 0 & -D_3 & \vdots & 0 & D_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.7})$$

As constantes $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, D_1, D_2$ e D_3 foram definidas em (6.2.5) e (6.2.6) da seção 6.2.

E, por final, resta o vetor \vec{P} , que contém as componentes nodais das cargas externas e momentos torçores externos distribuídos por unidade de comprimento da viga, relativos ao nó genérico \underline{j} , possuindo a seguinte definição:

$$\vec{P} = \begin{Bmatrix} P_{y_j} \\ P_{z_j} \\ M_{t_j} \\ P_{x_j} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.3.8})$$

Quando a viga é discretizada em Diferenças Finitas Centrais com um total de N nós, isto é, fazendo o nó genérico \underline{j} variar de 1 até N , conforme FIGURA I.3.2,

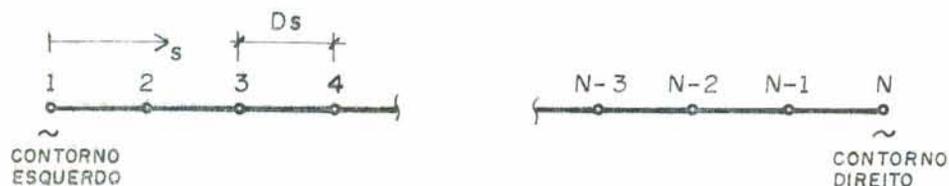


FIGURA I.3.2 - Discretização espacial da viga em Diferenças Finitas Centrais.

então o sistema de solução estático (I.3.5) assume a seguinte configuração global:

$$\mathbb{K}^* \vec{U}^* = \vec{P}^* \quad (\text{I.3.9})$$

onde \mathbb{K}^* equivale à matriz de rigidez global da viga curva, cuja montagem obedece ao seguinte procedimento:

onde os elementos do vetor \vec{U}^* são as componentes nodais dos deslocamentos e giros da viga com N nós discretizados; e os elementos \vec{P}^* são as componentes nodais das cargas e momentos torçores distribuídos por unidade de comprimento da viga. Tanto o vetor \vec{U}^* como o vetor \vec{P}^* possuem dimensão de $4(N-2)$ elementos.

No caso de cargas concentradas aplicadas na viga, para obter as componentes das cargas nodais do vetor \vec{P}^* , se procede identicamente conforme as FIGURAS 5.5.2, 5.5.3 e 5.5.4, considerando nula a velocidade das cargas ($V = 0$).

Finalmente, para que o sistema global (I.3.9) seja resolvido, resta a consideração das condições de contorno. Nesse caso, adota-se as mesmas indicadas nas FIGURAS 5.6.3 e 5.6.4, isto é:

$$\text{Contorno rotulado: } U_j = 0 \quad \text{e} \quad U_{j+1} = -U_{j-1} \quad (\text{I.3.10})$$

$$\text{Contorno engastado: } U_j = 0 \quad \text{e} \quad U_{j+1} = U_{j-1}$$

onde U é um deslocamento genérico que representa as incógnitas y , z e θ .

As condições de contorno indicadas em (I.3.10) são consideradas na matriz de rigidez global da FIGURA I.3.3, nos semiblocos tracejados.

Devido a matriz de rigidez global ser simétrica, o sistema matricial (I.3.9) foi resolvido pelo método de CHOLESKY, fazendo inicialmente a triangularização e, após, a retrosubstituição para diferentes estados de carregamento.

Depois de calculados os deslocamentos e giros, torna-se possível a obtenção dos esforços internos (Normais, Cortantes, Momentos fletores, Momentos torçores e Bimomento), cujas expressões estão definidas em (5.7.1).

Com isso, a solução estática da viga curvada se completa, e a partir dela foi implementado um programa em microcomputador designado de VIGAESt, cujos exemplos resolvidos estão mostrados na seção que segue (I.4).

I.4. Exemplos Comparativos

Nesta seção, além da comparação dos resultados obtidos mediante a aplicação do programa VIGAEST com as soluções teóricas, também será verificada a convergência do método numérico aplicado (D.F.C.), em função do número de nós discretizados.

* Exemplo A

A viga analisada possui as seguintes características: $A = 1 \text{ m}^2$, $I_z = 0,4 \text{ m}^4$; $I_y = 0,3 \text{ m}^4$; $K_t = 0,01 \text{ m}^4$; $I_\omega = 0,19 \text{ m}^6$; $a_y = a_z = 0$; $E = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,2$; $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$. É uma viga reta com 25 m de comprimento, cujas condições de contorno são birrotuladas na flexão vertical e horizontal, e birrotulada na torção. A solução pelo método de D.F.C. utilizou uma discretização com 15 nós. O carregamento externo pelo qual a viga é sujeita, está mostrado na FIGURA I.4.1.

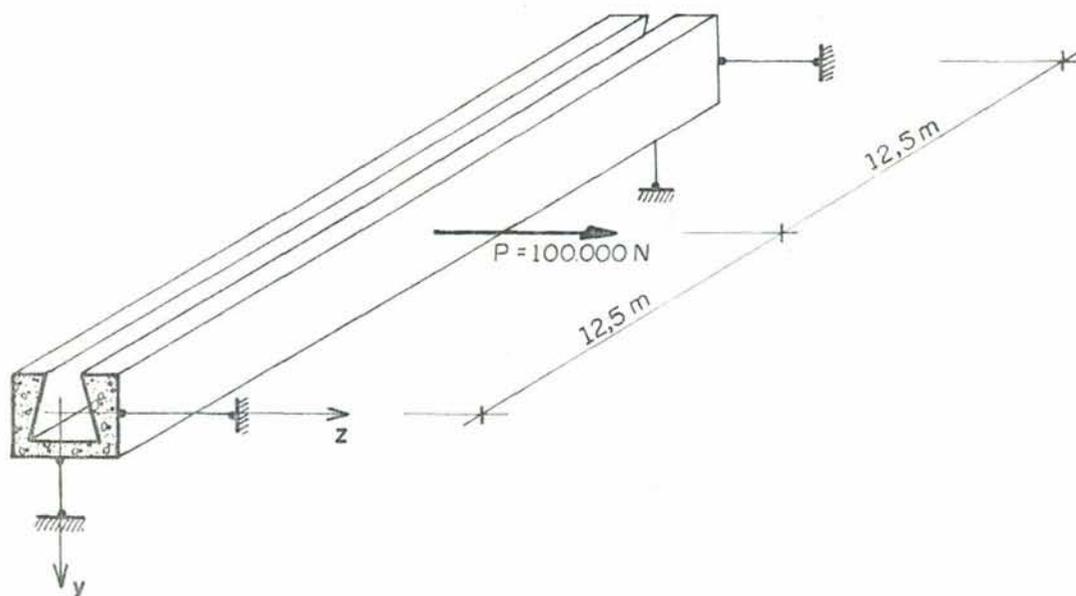


FIGURA I.4.1 - Viga birrotulada com carregamento estático.

Os resultados obtidos em termos de deslocamentos e esforços internos, pela aplicação do programa VIGAESt, estão relatados na Listagem A.

Para a viga da FIGURA I.4.1, a solução teórica do deslocamento lateral, momento fletor no centro vão e cortante máximo, é a seguinte:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P_z L^3}{48 EI_y} = \frac{100000 \times (25)^3}{48 \times 3 \times 10^{10} \times 0,3} = 0,003617 \text{ m,}$$

$$M_{y\text{máx}} = \frac{P_z L}{4} = \frac{100000 \times 25}{4} = 625000 \text{ Nm,}$$

$$Q_{\text{máx}} = \frac{P_z}{2} = \frac{100000}{2} = 50000 \text{ N.}$$

Já a solução aproximada obtida da Listagem A, apresenta os seguintes resultados:

$$f_{\text{aprox}} = 0,003654 \text{ m,}$$

$$M_{y\text{aprox}} = 625000 \text{ Nm,}$$

$$Q_{\text{aprox}} = 50000 \text{ N.}$$

A diferença entre a flecha teórica calculada no centro do vão e a aproximada (D.F.C.) é em torno de 1%. Quanto ao momento fletor máximo e o cortante, a solução teórica é idêntica à solução numérica.

>>>>>>> LISTAGEM A <<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****

=====
 Area da secao transversal: 1
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .4
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .3
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .01
 Constante de empenamento: .19
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 0

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****

=====
 Modulo de elasticidade longitudinal: 30000000000
 Modulo de elasticidade transversal: 12500000000
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****

=====
 Discretizacao espacial: 1.785714268684387
 Numero de trechos: 14
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 3D+30

***** CONDICoes DE CONTORNO *****

=====
 Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	99999.99	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
3	0	0	.000775	0
3	0	0	.001518	0
4	0	0	.002198	0
5	0	0	.002783	0
6	0	0	.003242	0
7	0	0	.003543	0
8	0	0	.003653	0
9	0	0	.003543	0
10	0	0	.003242	0
11	0	0	.002783	0
12	0	0	.002198	0
13	0	0	.001518	0
14	0	0	.000775	0
15	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	0
3	0	-89285.8	0	0
3	0	-178571.5	0	0
4	0	-267857.2	0	0
5	0	-357142.9	0	0
6	0	-446428.6	0	0
7	0	-535714.3	0	0
8	0	-625000	0	0
9	0	-535714.3	0	0
10	0	-446428.6	0	0
11	0	-357142.9	0	0
12	0	-267857.2	0	0
13	0	-178571.5	0	0
14	0	-89285.8	0	0
15	0	0	0	0

No	QZ	TS	TT	BM
1	49999.9	0	0	0
3	49999.9	0	0	0
3	49999.9	0	0	0
4	49999.9	0	0	0
5	49999.9	0	0	0
6	49999.9	0	0	0
7	49999.9	0	0	0
8	0	0	0	0
9	-500000	0	0	0
10	-500000.1	0	0	0
11	-500000.1	0	0	0
12	-500000.1	0	0	0
13	-500000.1	0	0	0
14	-500000.1	0	0	0
15	-500000.1	0	0	0

* Exemplo B

Neste exemplo, as propriedades da seção transversal coincidem com as da viga elevada de um sistema de transporte urbano: $I_z = 0,312 \text{ m}^4$; $I_y = 0,4722 \text{ m}^4$; $K_t = 0,0105 \text{ m}^4$; $I_\omega = 0,1975 \text{ m}^6$; $a_z = 0$; $a_y = 1,273 \text{ m}$; $E = 3,55 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,2$; $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$. Seu comprimento é de 25 m, possuindo contornos birrotulados na flexão vertical e horizontal, e biengastados na torção. As forças externas estão mostradas na FIGURA I.4.2, sendo que a viga foi discretizada com 19 nós (D.F.C.).

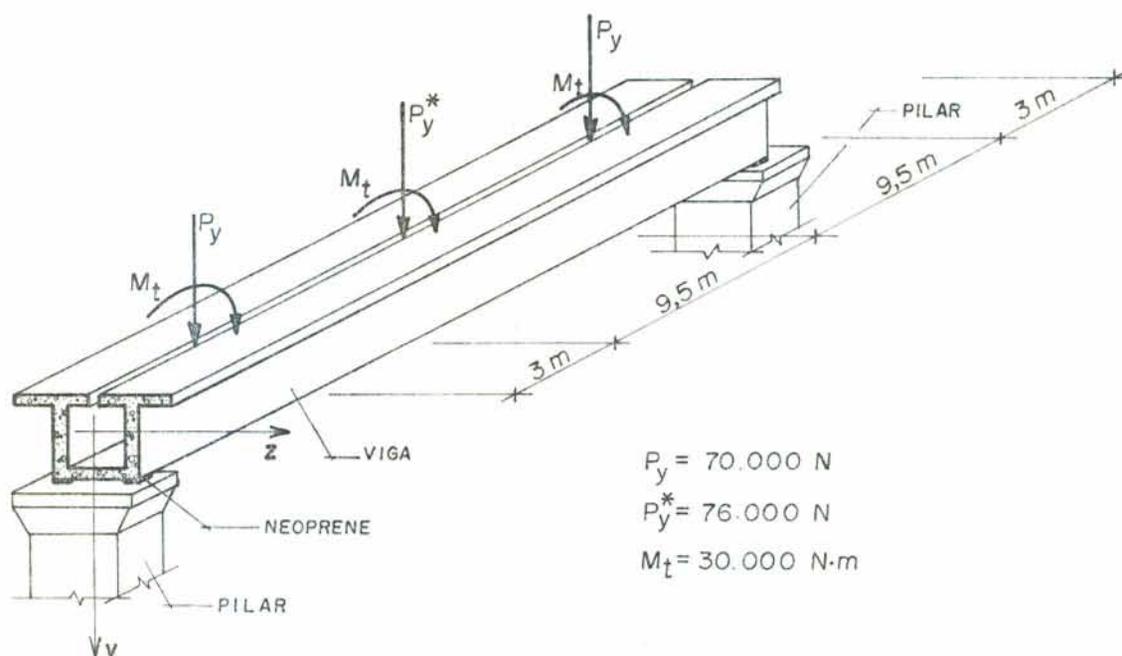


FIGURA I.4.2 - Viga reta elevada de um sistema de transporte urbano sob carregamento estático.

Os dados e os resultados obtidos da viga, mediante o uso do programa VIGAEST, ilustrada na FIGURA I.4.2, estão apresentados na Listagem B, cujo deslocamento vertical, momento fletor e cortante aproximados máximos, estão assim representados:

$$f_{\text{aprox}} = 0,003703 \text{ m},$$

$$M_{z_{\text{aprox}}} = 685000 \text{ Nm} ,$$

$$Q_{\text{aprox}} = 108000 \text{ N} ,$$

e os obtidos por solução teórica, assumem os seguintes valores:

$$f_{\text{máx}} = 0,003686 \text{ m} ,$$

$$M_{z_{\text{máx}}} = 685000 \text{ Nm} ,$$

$$Q_{\text{máx}} = 108000 \text{ Nm} .$$

Verifica-se uma diferença na flecha ao redor de 0,5%; novamente neste exemplo, como no anterior, não há diferença entre os momentos fletores e cortantes obtidos por solução numérica aproximada (D.F.C.) com relação à solução teórica.

>>>>>>> LISTAGEM B <<<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****
 =====

Area da secao transversal: 1.085
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .312
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .4722
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .0105
 Constante de empenamento: .1975
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 1.273

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****
 =====

Modulo de elasticidade longitudinal: 35500000000
 Modulo de elasticidade transversal: 14791666666.66667
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****
 =====

Discretizacao espacial: 1.388888835906982
 Numero de trechos: 18
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 3D+30

***** CONDICoes DE CONTORNO *****
 =====

Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): engastado
 Torcao (apoio direito): engastado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	58799.99	0	25200
4	0	11200	0	4800
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	75999.97	0	29999.99
11	0	.02	0	.01
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0
16	0	11199.95	0	4799.98
17	0	58800.04	0	25200.01
18	0	0	0	0
19	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
2	0	.00066	0	.000019
3	0	.001295	0	.000062
4	0	.001877	0	.000113
5	0	.002396	0	.000167
6	0	.002841	0	.000219
7	0	.003203	0	.000267
8	0	.003474	0	.000307
9	0	.003643	0	.000335
10	0	.003703	0	.000346
11	0	.003643	0	.000335
12	0	.003474	0	.000307
13	0	.003203	0	.000267
14	0	.002841	0	.000219
15	0	.002396	0	.000167
16	0	.001877	0	.000113
17	0	.001295	0	.000062
18	0	.00066	0	.000019
19	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	107999.9
2	0	0	149999.9	107999.9
3	0	0	299999.9	78599.9
4	0	0	368333.3	43599.9
5	0	0	421111.1	37999.9
6	0	0	473888.8	37999.9
7	0	0	526666.6	37999.9
8	0	0	579444.4	37999.9
9	0	0	632222.2	37999.9
10	0	0	684999.9	0
11	0	0	632222.2	-38000
12	0	0	579444.4	-38000.1
13	0	0	526666.6	-38000.1
14	0	0	473888.8	-38000.1
15	0	0	421111.1	-38000.1
16	0	0	368333.2	-43600
17	0	0	300000	-78600
18	0	0	150000	-108000.1
19	0	0	0	-108000.1

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	0	0	-143884.9
2	0	3512.6	41487.3	-84459.1
3	0	5252.5	27147.4	-28642.3
4	0	5832.3	11567.6	-9049.4
5	0	5917.8	9082.1	3490
6	0	5615.3	9384.6	16178.7
7	0	4911.7	10088.2	29558.6
8	0	3777	11222.9	44201.7
9	0	2162.7	12837.2	60733.5
10	0	0	0	79860.6
11	0	-2162.6	-12837.3	60733.5
12	0	-3777.1	-11223	44201.7
13	0	-4911.6	-10088.3	29558.6
14	0	-5615.4	-9384.7	16178.7
15	0	-5917.9	-9082.2	3490
16	0	-5832.4	-11567.7	-9049.5
17	0	-5252.6	-27147.5	-28642.3
18	0	-3512.7	-41487.4	-84459.1
19	0	0	0	-143884.9

* Exemplo C

Serão comparados, neste exemplo, os resultados de duas vigas que possuem as mesmas propriedades da viga do Exemplo A, sendo que a única diferença está no raio de curvatura. Uma é reta (raio infinito), e a outra possui um raio de 40 m, correspondendo a um ângulo interno de 35,81 graus. O comprimento do arco da viga curva horizontal é igual ao da viga reta, de 25 m.

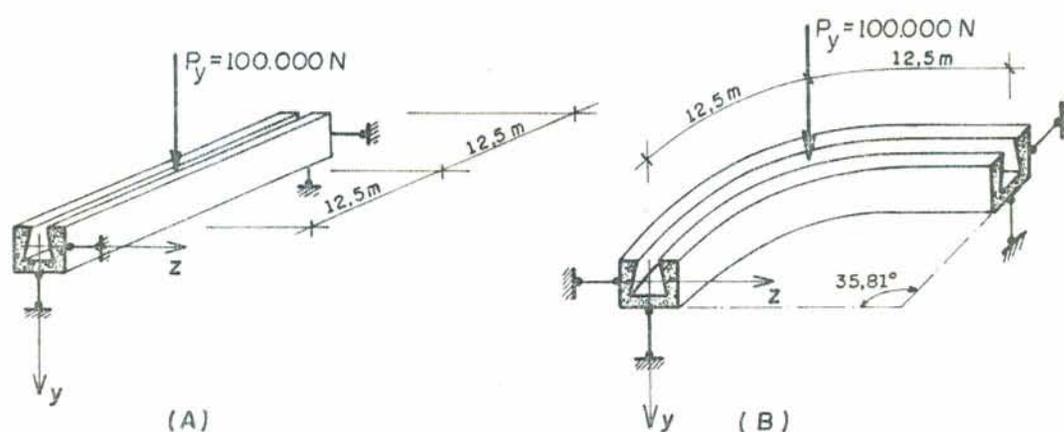


FIGURA I.4.3 - Viga reta (A) e curva (B) com carregamento estático.

Ambas as vigas ilustradas na FIGURA I.4.3 foram discretizadas com 15 nós em D.F.C. Nas Listagens C e E-4 estão indicadas as características das vigas, assim como os resultados obtidos do programa VIGAEST.

Observa-se que o deslocamento vertical no centro do vão da viga curva é 246% maior que o da viga reta; o momento fletor é 3,4% maior; e o cortante máximo é 6% maior. Fica evidente, neste exemplo, que o raio de curvatura contribui de forma significativa na resposta da viga com relação à deformação vertical máxima.

>>>>>>> LISTAGEM C <<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****

=====
 Area da secao transversal: 1
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .4
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .3
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .01
 Constante de empenamento: .19
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 0

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****

=====
 Modulo de elasticidade longitudinal: 30000000000
 Modulo de elasticidade transversal: 12500000000
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****

=====
 Discretizacao espacial: 1.785714268684387
 Numero de trechos: 14
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 40

***** CONDICoes DE CONTORNO *****

=====
 Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	99999.99	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
2	0	.002076	0	-.000919
3	0	.004054	0	-.001794
4	0	.005839	0	-.002582
5	0	.007344	0	-.003246
6	0	.008491	0	-.00375
7	0	.009215	0	-.004066
8	0	.009467	0	-.004174
9	0	.009215	0	-.004066
10	0	.008491	0	-.00375
11	0	.007344	0	-.003246
12	0	.005839	0	-.002582
13	0	.004054	0	-.001794
14	0	.002076	0	-.000919
15	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	49999.9
2	0	0	93830.8	49999.9
3	0	0	187474.7	49999.9
4	0	0	280745	50000
5	0	0	373455.7	50000
6	0	0	465422.1	49999.9
7	0	0	556461	50000
8	0	0	646390.9	0
9	0	0	556461	-50000.1
10	0	0	465422.2	-50000
11	0	0	373455.7	-50000.1
12	0	0	280745	-50000.1
13	0	0	187474.7	-50000
14	0	0	93830.8	-50000.1
15	0	0	0	-50000.1

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	-60647.1	-41164.9	0
2	0	-59207.8	-40509.7	-73508.6
3	0	-54935.6	-38502.8	-144677.5
4	0	-47971	-35015.9	-211018.1
5	0	-38557.8	-29826.4	-269734.3
6	0	-27058.8	-22600.6	-317541.2
7	0	-13979.4	-12869.9	-350450.3
8	0	-.1	-.1	-363505.4
9	0	13979.3	12869.8	-350450.3
10	0	27058.7	22600.5	-317541.2
11	0	38557.7	29826.3	-269734.3
12	0	47970.9	35015.8	-211018.1
13	0	54935.5	38502.7	-144677.5
14	0	59207.7	40509.6	-73508.6
15	0	60647	41164.8	0

* Exemplo D

Este exemplo corresponde a uma ponte curva, analisada por CHRISTIANO³ e utilizada como modelo experimental para testes estáticos e dinâmicos. A ponte curva está ilustrada na FIGURA I.4.4, e suas propriedades são as seguintes:
 $A = 19,758 \text{ cm}^2$; $I_z = 77,3358 \text{ cm}^4$; $I_y = 913,628 \text{ cm}^4$;

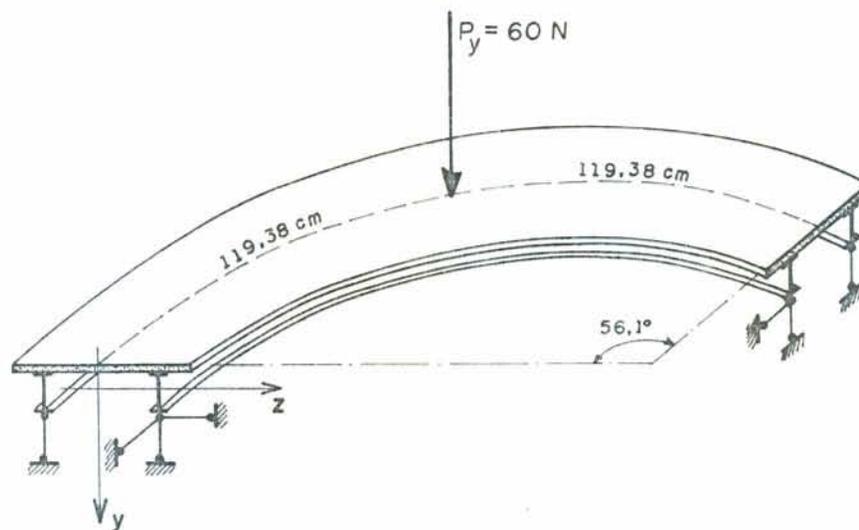


FIGURA I.4.4 - Viga (ponte) curva horizontal sob carregamento estático-centro do vão.

$K_t = 1,9646 \text{ cm}^4$; $I_\omega = 4524,83 \text{ cm}^6$; $L = 238,76 \text{ cm}$;
 $R = 243,84 \text{ cm}$; $a_z = 0$; $a_y = -2,7127 \text{ cm}$; $E = 277219 \text{ N/cm}^2$;
 $G = 103026 \text{ N/cm}^2$; $\rho = 0,00121798 \text{ kg/cm}^3$. As condições de contorno, consideradas na análise, foram rotuladas na flexão vertical, horizontal e na torção, em ambas as extremidades da viga.

A análise estática da viga da FIGURA I.4.4 se fez necessária, neste caso, para se obter o valor do Coeficiente de Majoração Dinâmica (C.M.D.), também chamado Coeficiente de Impacto. Com a resposta dinâmica do deslocamento vertical máximo, obtido no exemplo do Capítulo 7, e com a resposta estática do deslocamento vertical máximo, obtido da Listagem D, então o coeficiente de Impacto é assim determinado:

a partir de: $y_{\text{estático máx}} = 0,057944 \text{ m}$

e $y_{\text{dinâmico máx}} = 0,081230 \text{ m}$,

chega-se ao

$$\text{C.M.D. máx} = \frac{y_{\text{est. máx.}}}{y_{\text{din. máx}}} = \frac{0,081230}{0,057944} = 1,402 .$$

Segundo CHRISTIANO³ o valor do C.M.D. máximo calculado foi em torno de 1,42, conforme FIGURA I.4.5. Observa-se também, nesta figura, uma excelente correlação entre os valores do C.M.D. ao longo da viga, para os valores obtidos por CHRISTIANO, e os do presente trabalho.

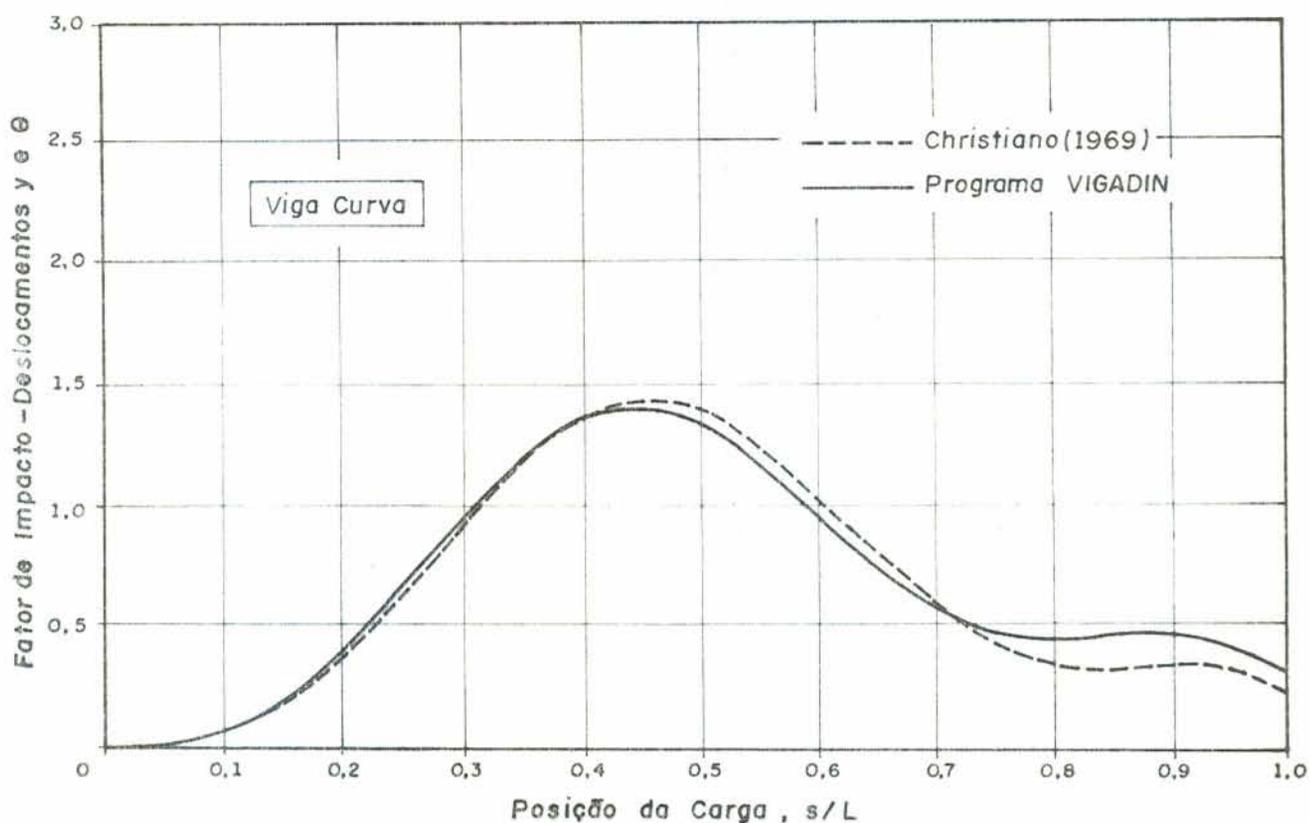


FIGURA I.4.5 - Valores do Fator de Impacto (C.M.D.).

>>>>>>> LISTAGEM D <<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****

=====
 Area da secao transversal: .0019758
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: 7.73358E-07
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: 9.13628E-06
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .000000019646
 Constante de empenamento: .00000000452483
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: -2.7127

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****

=====
 Modulo de elasticidade longitudinal: 2772190000
 Modulo de elasticidade transversal: 1030247510.034191
 Coeficiente de Poisson: .3454
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****

=====
 Discretizacao espacial: .1705428510904312
 Numero de trechos: 14
 Comprimento da viga curva/reta: 2.3876
 Raio de curvatura: 2.4384

***** CONDICoes DE CONTORNO *****

=====
 Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	59.99	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
2	0	.012856	0	-.045857
3	0	.025087	0	-.089509
4	0	.036093	0	-.128833
5	0	.045329	0	-.161867
6	0	.052322	0	-.186895
7	0	.056701	0	-.202545
8	0	.058206	0	-.207886
9	0	.056701	0	-.202545
10	0	.052322	0	-.186895
11	0	.045329	0	-.161867
12	0	.036093	0	-.128833
13	0	.025087	0	-.089509
14	0	.012856	0	-.045857
15	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	29.9
2	0	0	5.7	30
3	0	0	11.5	30
4	0	0	17.2	29.9
5	0	0	22.9	29.9
6	0	0	28.4	29.9
7	0	0	33.0	29.9
8	0	0	39	0
9	0	0	33.0	-30
10	0	0	28.4	-30.1
11	0	0	22.9	-30
12	0	0	17.2	-30.1
13	0	0	11.5	-30.1
14	0	0	5.7	-30.1
15	0	0	0	-30.1

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	-4.9	-5	0
2	0	-4.8	-4.9	-1.9
3	0	-4.4	-4.6	-1.7
4	0	-3.9	-4.3	-2.4
5	0	-3.1	-3.5	-3.1
6	0	-2.2	-2.6	-3.6
7	0	-1.2	-1.5	-4
8	0	-1.1	-1.1	-4.1
9	0	1.1	1.4	-4
10	0	2.1	2.5	-3.6
11	0	3.1	3.4	-3.1
12	0	3.8	4.1	-2.4
13	0	4.3	4.5	-1.7
14	0	4.7	4.8	-1.9
15	0	4.8	4.9	0

* Exemplo E

Neste exemplo, será verificada a convergência do método de D.F.C., em função do número de nós discretizados (N), efetuando a integração numérica somente na coordenada espacial s , utilizando para este objetivo o programa VIGAEEST. A viga a ser estudada é a mesma do Exemplo C, FIGURA I.4.3 (A), sendo que os resultados desta análise são apresentados nas Listagens E-1, E-2, E-3, E-4, E-5 e E-6, para discretizações em 9, 11, 13, 15, 17 e 19 nós, respectivamente.

No gráfico da FIGURA I.4.6, é apresentada a convergência do deslocamento vertical no centro do vão, das várias discretizações, para a solução teórica obtida por:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P_y L^3}{48 EI_z} = \frac{100000 \times (25)^3}{48 \times 3 \times 10^{10} \times 0,4} = 0,00271267 \text{ m.}$$

A convergência é dada em função da diferença percentual em relação à solução de $f_{\text{máx}}$.

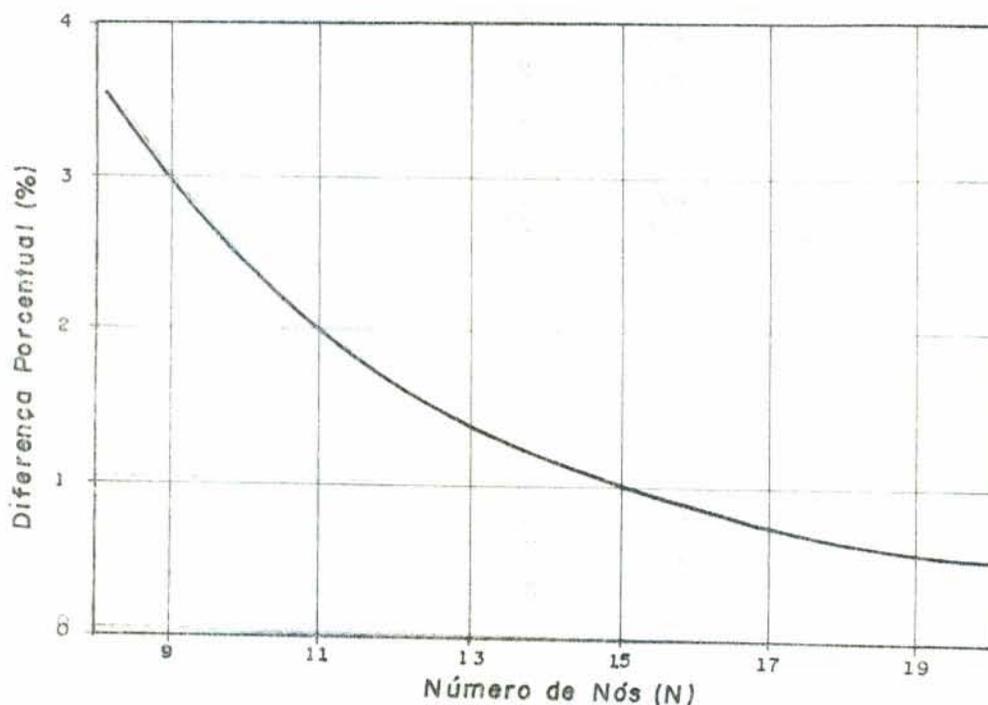


FIGURA I.4.6 - Convergência do método de D.F.C. em função do número de nós discretizados.

>>>>>>> LISTAGEM E-1 <<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****
 =====

Area da secao transversal: 1
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .4
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .3
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .01
 Constante de empenamento: .19
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 0

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****
 =====

Modulo de elasticidade longitudinal: 30000000000
 Modulo de elasticidade transversal: 12500000000
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****
 =====

Discretizacao espacial: 3.125
 Numero de trechos: 8
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 30+30

***** CONDICoes DE CONTORNO *****
 =====

Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	1000000	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
2	0	.001017	0	0
3	0	.001907	0	0
4	0	.002543	0	0
5	0	.002797	0	0
6	0	.002543	0	0
7	0	.001907	0	0
8	0	.001017	0	0
9	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	50000
2	0	0	156250	50000
3	0	0	312500	50000
4	0	0	468750	49999.9
5	0	0	625000	-.1
6	0	0	468750	-50000.1
7	0	0	312500	-50000.1
8	0	0	156250	-50000.1
9	0	0	0	-50000.1

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0

>>>>>>> LISTAGEM E-2 <<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****

=====
 Area da secao transversal: 1
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .4
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .3
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .01
 Constante de empenamento: .19
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 0

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****

=====
 Modulo de elasticidade longitudinal: 30000000000
 Modulo de elasticidade transversal: 12500000000
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****

=====
 Discretizacao espacial: 2.5
 Numero de trechos: 10
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 3D+30

***** CONDICoes DE CONTORNO *****

=====
 Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	100000	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
2	0	.000813	0	0
3	0	.001562	0	0
4	0	.00218	0	0
5	0	.002604	0	0
6	0	.002766	0	0
7	0	.002604	0	0
8	0	.00218	0	0
9	0	.001562	0	0
10	0	.000813	0	0
11	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	50000
2	0	0	125000	50000
3	0	0	250000	50000
4	0	0	375000	50000
5	0	0	500000	50000
6	0	0	625000	0
7	0	0	500000	-50000.1
8	0	0	375000	-50000.1
9	0	0	250000	-50000.1
10	0	0	125000	-50000.1
11	0	0	0	-50000.1

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0

>>>>>>> LISTAGEM E-3 <<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****

=====
 Area da secao transversal: 1
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .4
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .3
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .01
 Constante de empenamento: .19
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 0

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****

=====
 Modulo de elasticidade longitudinal: 30000000000
 Modulo de elasticidade transversal: 12500000000
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****

=====
 Discretizacao espacial: 2.083333253860474
 Numero de trechos: 12
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 30+30

***** CONDICAOES DE CONTORNO *****

=====
 Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** CARRÉGAMENTO EXTERNO *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0

99999.97
 .02

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
2	0	.000678	0	0
3	0	.001318	0	0
4	0	.001883	0	0
5	0	.002335	0	0
6	0	.002637	0	0
7	0	.00275	0	0
8	0	.002637	0	0
9	0	.002335	0	0
10	0	.001883	0	0
11	0	.001318	0	0
12	0	.000678	0	0
13	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	49999.9
2	0	0	104166.6	49999.9
3	0	0	208333.3	49999.9
4	0	0	312499.9	49999.9
5	0	0	416666.6	49999.9
6	0	0	520833.3	49999.9
7	0	0	624999.9	0
8	0	0	520833.3	-50000
9	0	0	416666.6	-50000.1
10	0	0	312500	-50000.1
11	0	0	208333.3	-50000.1
12	0	0	104166.6	-50000.1
13	0	0	0	-50000.1

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0

>>>>>>> LISTAGEM E-4 <<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****
 =====

Area da secao transversal: 1
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .4
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .3
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .01
 Constante de empenamento: .19
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 0

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****
 =====

Modulo de elasticidade longitudinal: 300000000000
 Modulo de elasticidade transversal: 125000000000
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****
 =====

Discretizacao espacial: 1.785714268684387
 Numero de trechos: 14
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 3D+30

***** CONDICoes DE CONTORNO *****
 =====

Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	99999.99	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
3	0	.000581	0	0
4	0	.001138	0	0
5	0	.001648	0	0
6	0	.002087	0	0
7	0	.002431	0	0
8	0	.002657	0	0
9	0	.00274	0	0
10	0	.002657	0	0
11	0	.002431	0	0
12	0	.002087	0	0
13	0	.001648	0	0
14	0	.001138	0	0
15	0	.000581	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	49999.9
3	0	0	89285.7	49999.9
4	0	0	178571.4	49999.9
5	0	0	267857.1	49999.9
6	0	0	357142.8	49999.9
7	0	0	446428.5	49999.9
8	0	0	535714.2	49999.9
9	0	0	625000	0
10	0	0	535714.3	-50000
11	0	0	446428.5	-50000.1
12	0	0	357142.8	-50000.1
13	0	0	267857.1	-50000.1
14	0	0	178571.4	-50000.1
15	0	0	89285.7	-50000.1

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

>>>>>>> LISTAGEM E-5 <<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****

=====
 Área da secao transversal: 1
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .4
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .3
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .01
 Constante de empenamento: .19
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 0

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****

=====
 Modulo de elasticidade longitudinal: 30000000000
 Modulo de elasticidade transversal: 12500000000
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****

=====
 Discretizacao espacial: 1.5625
 Numero de trechos: 16
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 3D+30

***** CONDICÕES DE CONTORNO *****

=====
 Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	1000000	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0
16	0	0	0	0
17	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
2	0	.000508	0	0
3	0	.001001	0	0
4	0	.001462	0	0
5	0	.001875	0	0
6	0	.002225	0	0
7	0	.002495	0	0
8	0	.00267	0	0
9	0	.002733	0	0
10	0	.00267	0	0
11	0	.002495	0	0
12	0	.002225	0	0
13	0	.001875	0	0
14	0	.001462	0	0
15	0	.001001	0	0
16	0	.000508	0	0
17	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	50000
2	0	0	78125	50000
3	0	0	156250	50000
4	0	0	234375	49999.9
5	0	0	312500	49999.9
6	0	0	390625	49999.9
7	0	0	468750	49999.9
8	0	0	546875	49999.9
9	0	0	625000	.1
10	0	0	546875	-50000.1
11	0	0	468750	-50000
12	0	0	390625	-50000
13	0	0	312500	-50000
14	0	0	234375	-50000
15	0	0	156250	-50000
16	0	0	78125	-50000
17	0	0	0	-50000

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0
16	0	0	0	0
17	0	0	0	0

>>>>>>> LISTAGEM E-6 <<<<<<<<<

 ***** UNIDADES: Newtons, Kg, Metros e Segundos *****

***** PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL *****
 =====

Area da secao transversal: 1
 Momento de inercia em relacao ao eixo Z: .4
 Momento de inercia em relacao ao eixo Y: .3
 Momento de inercia polar em torno do eixo X: .01
 Constante de empenamento: .19
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Z: 0
 Coordenada do centro de corte em relacao ao eixo Y: 0

***** PROPRIEDADES DO MATERIAL *****
 =====

Modulo de elasticidade longitudinal: 30000000000
 Modulo de elasticidade transversal: 12500000000
 Coeficiente de Poisson: .2
 Massa especifica: 2500

***** ALGUNS DADOS ADICIONAIS *****
 =====

Discretizacao espacial: 1.388888835906982
 Numero de trechos: 18
 Comprimento da viga curva/reta: 25
 Raio de curvatura: 3D+30

***** CONDICoes DE CONTORNO *****
 =====

Flexao vertical (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao vertical (apoio direito): rotulado
 Flexao lateral (apoio esquerdo): rotulado
 Flexao lateral (apoio direito): rotulado
 Deslocam. axial (apoio esquerdo): restringido
 Deslocam. axial (apoio direito): restringido
 Torcao (apoio esquerdo): rotulado
 Torcao (apoio direito): rotulado

***** Carregamento externo *****

No	Px	Py	Pz	Mt
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0
16	0	0	0	0
17	0	0	0	0
18	0	0	0	0
19	0	0	0	0

***** Deslocamentos nodais *****

No	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0
2	0	.000452	0	0
3	0	.000893	0	0
4	0	.001311	0	0
5	0	.001696	0	0
6	0	.002037	0	0
7	0	.002321	0	0
8	0	.002539	0	0
9	0	.002679	0	0
10	0	.002729	0	0
11	0	.002679	0	0
12	0	.002539	0	0
13	0	.002321	0	0
14	0	.002037	0	0
15	0	.001696	0	0
16	0	.001311	0	0
17	0	.000893	0	0
18	0	.000452	0	0
19	0	0	0	0

***** Esforços nodais internos *****

No	NX	MY	MZ	QY
1	0	0	0	49999.9
2	0	0	69444.4	49999.9
3	0	0	138888.8	49999.9
4	0	0	208333.3	49999.9
5	0	0	277777.7	49999.9
6	0	0	347222.2	49999.9
7	0	0	416666.6	49999.9
8	0	0	486111.1	49999.9
9	0	0	555555.5	49999.9
10	0	0	624999.9	0
11	0	0	555555.5	-50000.1
12	0	0	486111.1	-50000.1
13	0	0	416666.6	-50000.1
14	0	0	347222.2	-50000.1
15	0	0	277777.7	-50000.1
16	0	0	208333.3	-50000.1
17	0	0	138888.8	-50000.1
18	0	0	69444.4	-50000.1
19	0	0	0	-50000.1

No	QZ	TS	TT	BM
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0
16	0	0	0	0
17	0	0	0	0
18	0	0	0	0
19	0	0	0	0

* Exemplo F

E, para finalizar, será analisada a convergência da solução numérica (D.F.C.) em uma viga reta com menores dimensões em relação à viga do Exemplo E. A viga mostrada na FIGURA I.4.7, possui as seguintes características e propriedades: $A = 0,24 \text{ m}^2$ ($0,3 \times 0,8 \text{ m}^2$); $I_z = 0,0128 \text{ m}^4$; $I_y = 0,0018 \text{ m}^4$; $I_\omega = 0$; $K_t = 0,0072 \text{ m}^4$; $L = 10 \text{ m}$; $E = 2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,2$; $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$. Os contornos são ambos rotulados na flexão vertical e horizontal.

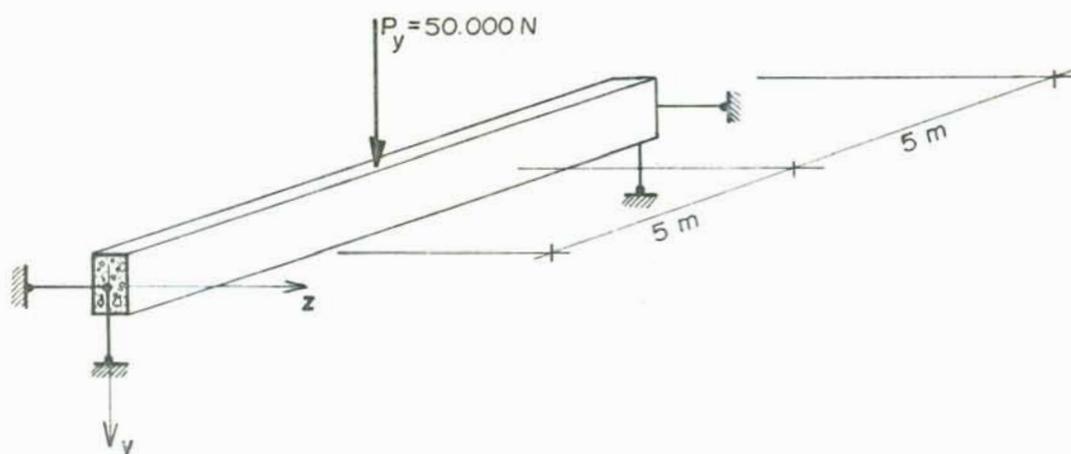


FIGURA I.4.7 - Viga reta sob carregamento estático.

A solução teórica do deslocamento vertical no centro do vão da viga (FIGURA I.4.7) é a seguinte:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P_y L^3}{48 EI_z} = \frac{50000 \times (10)^3}{48 \times 2 \times 10^{10} \times 0,0128} = 0,004069 \text{ m.}$$

E os valores obtidos dos deslocamentos, utilizando o programa VIGAEST, para discretizações em 9, 11, 13, 15, 17 e 19, são apresentados na TABELA I.4.1:

TABELA I.4.1 - Convergência do método de D.F.C.

Número de nós (N)	Deslocamento y aproximado (m)	Diferença em relação a $f_{\text{máx}}$ (%)
9	0,004196	3,0
11	0,004150	2,0
13	0,004125	1,4
15	0,004110	1,0
17	0,004100	0,8
19	0,004094	0,6
00	0,004069	0,0

Comparando os resultados desta tabela com os resultados do exemplo (FIGURA I.4.6), verifica-se que a convergência apresenta as mesmas características isto é, a diferença percentual em relação à solução teórica, para um mesmo número de nós discretizados, é praticamente a mesma nos dois casos.

I.5. Considerações Finais

Importantes conclusões podem ser extraídas dos exemplos calculados e comparados nesta seção, pelo uso do método de Diferenças Finitas Centrais (D.F.C.), na análise estática de vigas curvas horizontais.

A primeira diz respeito aos Exemplos A e B da seção I.4. Em ambos, correspondentes respectivamente às Listagens A e B, verificou-se que, independente do número de nós em que a viga é discretizada, não há diferença entre os momentos e cortantes calculados pelo programa VIGAEST e os teóricos. A diferença é verificada somente nos deslocamentos.

No Exemplo C, constatou-se uma significativa influência do raio de curvatura na resposta da viga em termos de deslocamentos verticais.

Aproveitando a resposta dinâmica da viga do Exemplo A do Capítulo 4, e a resposta estática do Exemplo D da seção I.4, foi possível comparar, através da FIGURA I.4.5, a excelente correlação entre os fatores de impacto (C.M.D.) calculados por este trabalho e os calculados por CHRISTIANO³.

Já nos Exemplos E e F, foi analisada a convergência do método de D.F.C. para diferentes discretizações da viga. Observando as diferenças percentuais entre os deslocamentos calculados pelo programa VIGAEST e os teóricos, nos Exemplos A (15 nós → 1%), B (19 nós → 0,5%), E e F, pode-se concluir que a convergência do deslocamento aproximado para o teórico, mostrada na FIGURA I.4.6, se dá somente em função do número de nós discretizados (N), independente das características físicas e geométricas da viga a ser analisada.

BIBLIOGRAFIA

1. BATHE, K.-J. & WILSON, E.L. Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1976.
2. CANTIENE, R. Dynamic load testing of highway bridges. IABSE Proceedings, Zürich, (75):57-72, Aug. 1984.
3. CHRISTIANO, P.P. & CULVER, C.G. Horizontally curved bridges subject to moving load. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 95(8):1615-43, Aug. 1969.
4. COWPER, G.R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 92(3):335-40, June 1966.
5. CULVER, C.G. Natural frequencies of horizontally curved beams. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 93(2):189-203, Apr. 1967.
6. FRÛBRA, L. Vibration of solids and structures under moving loads. Groningen, Noordhoff International, 1972.
7. GERE, J.M. & LIN, Y.K. Coupled vibrations of thin-walled beams of open cross section. Journal of Applied Mechanics, New York, 25(3):373-8, Sept. 1958.
8. HEINS, C.P. Bending and torsional design in structural members. Lexington, Mass., Lexington Books, 1975.
9. HEINS, C.P. & OLEINIK, J.C. Curved box beam bridge analysis. Computers and Structures, Oxford, 6(2):65-72, Apr. 1976.
10. HEINS, C.P. & SAHIN, M.A. Natural frequency of curved box girder bridges. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 105(12):2591-600, Dec. 1979.

11. HUTCHINSON, G. & AL-HUSSAINI, A. Interaction of load speed and mass on the dynamic response of damped beams. IABSE Proceedings, Zurich, (97):45-56, May 1986.
12. JOSEPH, T.P. & WILSON, J.F. Vibrations of curved spans for mass transit. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 106(2):255-72, Apr. 1980.
13. McManus, P.F.; NASIR, G.A.; CULVER, C.G. Horizontally curved girders - state of the art. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 95(5):853-70, May 1969.
14. MEIROVITCH, L. Analytical methods in vibrations. London, Macmillan, 1971.
15. MINNETYAN, L.; NELSON, R.B.; MINGORI, D.L. Dynamics and optimal design of AGT system. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 106(4):897-914, Apr. 1980.
16. PALAMAS, J. Comportement dynamique des ponts sous l'effet de charges roulantes. Construction Métallique, Puteaux, 21(3):35-43, Sept. 1984.
17. PROJETO Aeromóvel: análise da via. Porto Alegre, Escola de Engenharia da UFRGS, 1984.
18. PROJETO Aeromóvel: análise simulada da via - estrutura e fundações. Porto Alegre, Escola de Engenharia da UFRGS, 1985.
19. RUTENBERG, A. Vibration properties of curved thin-walled beams. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 105(7):1445-55, July 1979.
20. SALVADORI, M.G. & BARON, M.L. Numerical methods in engineering. 2.ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1961.

21. SHORE, S. & CHAUDHURI, S. Free vibration of horizontally curved beams. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 98(3):793-6, Mar. 1972.
22. TAN, C.P. & SHORE, S. Dynamic response of a horizontally curved bridge. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 94(3):761-81, Mar. 1968.
23. _____. Response of horizontally curved bridge to moving load. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 94(9):2135-51, Sept. 1968.
24. TIMOSHENKO, S. & YOUNG, D.H. Vibration problems in engineering. 3.ed. Princeton, N.J., Van Nostrand, 1968.
25. VLASOV, V.Z. Thin-walled elastic beams. 2.ed. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1961.
26. YOO, C.H. e FEHRENBACH, J.P. Natural frequencies of curved girders. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 107(2):339-54, Apr. 1981.