UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Curso de Licenciatura em Matemática

BRUNA LAUTERT

ENSINO DE FUNÇÕES DE 1º E DE 2º GRAU:

MANIPULAÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

PORTO ALEGRE

2017

BRUNA LAUTERT

ENSINO DE FUNÇÕES DE 1º E DE 2º GRAU:
MANIPULAÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Débora da Silva Soares.

PORTO ALEGRE
2017

BRUNA LAUTERT

ENSINO DE FUNÇÕES DE 1º E DE 2º GRAU:

MANIPULAÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática

PORTO ALEGRE, JULHO DE 2017.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr.ª Débora da Silva Soares
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – UFRGS

Prof. Dr. Alvino Sant'Ana
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – UFRGS

AGRADECIMENTOS

A Deus, por permitir a realização dessa pesquisa.

Aos meus pais, por sempre apoiarem minhas decisões, acreditarem em meus objetivos, me amparar e amar incondicionalmente. E, especificamente, ao meu pai, Rogério, pelas inúmeras caronas até o Campus do Vale, e à minha mãe, Rejane, pela incansável assistência todos os dias.

Ao meu melhor amigo e namorado, Gabriel, por me incentivar e transformar minha vida fazendo com que tudo valha mais a pena.

À minha companheirinha canina, Laika, pelo carinho e por divertir e alegrar qualquer momento.

À professora Dr.ª Débora Soares por cumprir seu papel de orientadora sempre com muito carinho, dedicação e dicas maravilhosas.

Aos professores e funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS que contribuíram com minha formação acadêmica e crescimento tanto pessoal quanto profissional.

Ao Colégio João Paulo I – Unidade Higienópolis pela incrível oportunidade de lecionar Matemática e poder desenvolver minha pesquisa de conclusão de curso.

À turma 9AH/2016 do JPIH, tanto aos alunos que autorizaram quanto aos que não autorizaram a análise de suas produções escolares, aos quais me dediquei com carinho, que aprendi muito com e que nunca esquecerei.

RESUMO

Tecnologias sempre influíram no desenvolvimento do pensamento matemático; hoje, as tecnologias digitais tendem a proporcionar ambientes de novas oportunidades tanto à resolução quanto à criação de problemas. Essa monografia objetiva entender possibilidades com o software GeoGebra para trabalhar o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau de modo a torná-lo um recurso para pensar-com no processo de produção de conhecimento. Inclusive explorar saberes diferentes daqueles possibilitados de serem construídos em aulas tradicionais. Para isso, foi realizada uma pesquisa qualitativa por meio de estudo de caso com uma turma de nono ano do Ensino Fundamental de uma escola privada de Porto Alegre. Foram aplicados dois trabalhos avaliativos no Laboratório de Informática que envolviam conhecimentos geométricos planos, um complementar ao estudo de funções de 1º grau e outro introdutório ao estudo de funções de 2º grau, assim como um questionário escrito, cujos dados coletados colaboraram para que fosse confirmada a efetividade dos estudos realizados. Conclui-se, então, que é produtivo considerar maneiras de se estudar funções com o GeoGebra que promovam ações experimentais-com-tecnologia, reflexões subjetivas e espaços de criação discente. Para isso, figuras geométricas manipuláveis, o controle deslizante, pontos com coordenadas variáveis e com rastro habilitado são recursos efetivos. Por fim, foram reescritos os trabalhos avaliativos aplicados com o intuito de adaptá-los propriamente à todas as reflexões e análises defendidas.

Palavras-chave: dinamismo de funções, pensar-com, tecnologias digitais, experimentais.

ABSTRAC

Technologies have always influenced the development of mathematical thinking; nowadays, digital technologies tend to provide new opportunities for both problem-solving and problem-proposing. This monograph aims to understand possibilities with software GeoGebra to work with the dynamism of 1st and 2nd grade functions in order to turn it a resource to think-with in the process of knowledge production. Including exploring different ways of learning from those made possible in traditional classes. For this, a qualitative research was carried out by means of a case study with a ninth-grade class from the Elementary School of a private school in Porto Alegre. Two evaluative works involving flat geometric knowledge in the Computer Lab were applied, one to complement the study of 1st grade functions and another one to introduce the study of 2nd grade functions, as well as a written questionnaire, whose collected data collaborated to confirm the effectiveness of the performed studies. It is concluded, then, that it is productive to consider ways to study functions with GeoGebra that promote experimental-with-technologies actions, subjective reflections and student creation spaces. For this, manipulable geometric pictures, slider control, point with variable coordinates and with habilitated trail are effectives resources. Finally, the evaluative works applied were rewritten with the intention of adapting them properly to all the reflections and analyzes defended.

Keywords: dynamism of functions, think-with, digital technologies, experimental.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Ao final de 2017 completará cinco anos que sou licencianda no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS. Mas há quase seis anos iniciei minha jornada no ensino de Matemática. Estudei durante todo meu Ensino Médio, e trabalhei como monitora de Matemática, no Colégio João Paulo I em sequência. Fui convidada, enfim, a tornar-me regente da componente curricular de Matemática da primeira turma de 9º ano da Unidade Higienópolis do Colégio em 2016. A fim de crescer pessoal e profissionalmente, para prosseguir interpretando esse novo importante papel educacional, tornou-me essencial pensar e refletir a respeito do desenvolvimento das atividades que projetei durante 2016, assim como discutir a educação matemática pela abordagem construtivista que defendo.

Para tanto, propus atividades que compunham o “Trabalho Avaliativo (parte 1)” e o “Trabalho Avaliativo (parte 2)” – que apelidarei de TA1 e TA2, respectivamente –, as quais interagissem com o software GeoGebra[1]. Formulei tais atividades considerando argumentos como o de Heugl (2004) – o uso da tecnologia, em consonância à Matemática, tende a alterar a ênfase desta do operar para o modelar e o interpretar; assim como suportar tanto o abstrato quanto o concreto e também criar novos elementos de linguagem. Ou seja, a tecnologia tende a tornar-se parte do processo de construção de conhecimentos matemáticos de maneira que o auxilia e o reorganiza, possibilitando, assim, aulas que estimulam o desenvolvimento de novas perspectivas.

Minha prioridade com essa pesquisa é responder a seguinte questão: Quais são possibilidades ao se utilizar o software GeoGebra para trabalhar o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau de modo a torná-lo um recurso para “pensar-com” no processo de produção de conhecimento? Sendo que o ramifiquei em questões secundárias: Como posso associar o trabalho de funções de 1º e de 2º grau com a Geometria Dinâmica? Como o trabalho associativo entre Geometria e Funções colabora para a compreensão de ambos os conteúdos? Como criar uma atividade escolar que aborde o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau enfatizando o pensar-com o recurso GeoGebra? Essas questões secundárias, por sua vez, beiradejo; e, por

[1] Disponível para download gratuito em <https://www.geogebra.org/>. Acesso em 03/11/2016.

vezes, permeio com algumas discussões, incitações e possíveis respostas obtidas durante a análise do levantamento de dados que realizo.

Funções que envolvem duas variáveis, uma independente e a outra dependente desta, tratam de relações dinâmicas que podem ser estabelecidas entre elas. Graficamente, podem ser representadas no Plano Cartesiano e, ainda, operadas de diversas maneiras. Comparados a ambientes digitais, os ambientes de estudo de funções mediados apenas a recursos que proporcionam visualizações e manipulações "estáticas", como o sistema quadro-giz ou o caderno-lápis, não são capazes de mobilizar engajamento tão ativo tanto na troca quanto na produção de conhecimentos matemáticos (BASSO; NOTARE, 2015). Ou seja, o caráter do controle e da ação do aluno tende a ser mais laborioso e restrito, uma vez que esses ambientes não são tão flexíveis à exploração de mudanças minuciosas ou representações acuradas do que se é problematizado.

> As novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física. Podem experimentar com gráficos de funções quadráticas do tipo $y = ax^2 + bx + c$, por exemplo, antes de conhecerem uma sistematização de função quadrática (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 37).

Nesse âmbito, a Geometria Dinâmica, caso particular de Matemática Dinâmica intrínseca ao GeoGebra, pode tornar-se útil para promover um espaço em que os alunos são aptos a inter-relacionar o estudo de Funções e de Geometria, a partir da variação de elementos geométricos na tela do computador. Dessa maneira, citando uma de minhas alunas (Fig. 59), com a utilização do GeoGebra, “perguntas em relação à geometria e ‘objetificação do mundo’ seriam mais facilmente e exatamente respondidas”.

Além do debate acerca do uso do GeoGebra, por motivos experienciais e fundamentados em pesquisas bibliográficas, também discorro em meu referencial teórico e em meus resultados analíticos sobre outros aspectos importantes, os quais não fizeram parte de minhas justificativas para iniciar essa pesquisa e apenas se tornaram a mim mais claros posteriormente ao desenvolvimento das atividades acerca de funções mencionadas. Eles compõem meu estojo de autocríticas, das quais me aproprio e me servirei epistemologicamente ao exercer o papel de professora de Matemática daqui para frente.

Entre eles, destaco a possibilidade emergente dos alunos pensarem Matemática não apenas por meio da elaboração de respostas a perguntas dadas, mas também por meio de transformações e criação de perguntas, e ainda de perguntas que apenas podem ser respondidas em simbiose a mídias digitais, contudo, não por elas. Não me refiro, por conseguinte, a perguntas que possam ser respondidas a partir de pesquisas na internet, mas cujas respostas induzam raciocínios dependentes de subsídios digitais (BORBA, 2009).

A estrutura do meu trabalho é composta, primeiramente pelo capítulo Metodologia, o qual subdivido em quatro subcapítulos. No primeiro, classifico a metodologia que estabeleci para realizar a pesquisa científica a qual me propus. No segundo, discorro sobre os tipos de dados que coleto a respeito da prática que realizei – a qual descrevo no quarto subcapítulo – com a unidade-caso que escolhi – e que, por sua vez, contextualizo e descrevo no terceiro utilizando-me já das questões 1 a 5 do Questionário aplicado com meus alunos.

A seguir, exponho o capítulo Fundamentação Teórica, o qual também subdivido em quatro outros subcapítulos. No primeiro trago cinco trabalhos de alunos do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS com temas de pesquisa que se assemelham ao meu, correlacionando-os e explicando o motivo de eu ter escolhido algumas abordagens divergentes às apresentadas por esses autores. A partir do segundo, discorro propriamente sobre as teorias que suportam minha pesquisa. Primeiramente, contextualizo historicamente a relação entre a Matemática e as Tecnologias. Depois, no terceiro subcapítulo, trago argumentações que associam a educação matemática moderna e os softwares, especificamente os de Geometria Dinâmica. E no quarto, propriamente, a aprendizagem dinâmica e o software GeoGebra, com o qual propus interações nas práticas realizadas.

Então, há o capítulo Resultados, em que exponho todos os dados que considero relevantes, que consegui coletar durante as atividades práticas, já atrelados às minhas análises, as quais confrontam as fundamentações teóricas já abordadas. Para isso, o divido em três subcapítulos, o primeiro referente ao TA1, o segundo ao TA2 e o terceiro às questões 6 a 9 do questionário supracitado, as quais abordam a percepção dos alunos acerca dos TAs.

Em continuação, trago o capítulo Considerações Finais, com o qual realizo uma análise abrangente sobre todos os dados apresentados e todas as reflexões realizadas até o momento adicionadas às novas percepções que consigo construir a partir destes. O que implica também uma apresentação, explicação e correlação entre os novos TA1 e TA2 que reescrevo e os já apresentados desde o capítulo Metodologias e utilizados nas atividades práticas, assim como de novos arquivos digitais criados no GeoGebra.

Por fim, os Apêndices, em que insiro, na íntegra, o TA1, o TA2, o Questionário, o TA1 Reescrito e o TA2 Reescrito; e o Anexo em que coloco o modelo do Termo de Consentimento entregue aos alunos participantes de minha pesquisa.

2. METODOLOGIA

Nesse capítulo discorrerei sobre o fato de minha pesquisa ser científica qualitativa, quais são e como foram coletados os dados dos quais me servi para desenvolvê-la, o contexto e o perfil da unidade-caso de pesquisa, e a estrutura dos trabalhos avaliativos e do questionário propostos.

2.1. PESQUISA QUALITATIVA POR MEIO DE UM ESTUDO DE CASO

Toda pesquisa científica implica um processo de aproximações incessantes da realidade, as quais objetivam um entendimento que possibilite uma intervenção significativa (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). Elas podem ser classificadas, quanto a sua abordagem, como quantitativas – diretas, numéricas, exatas – ou qualitativas – indiretas, intuitivas, subjetivas.

A pesquisa científica que desenvolvi nesse trabalho, por sua vez, pertence à categoria qualitativa, pois nele analiso, de forma intuitiva, aspectos experimentais e subjetivos de um grupo específico de alunos, o qual me influenciou e me tornou tanto sujeito quanto objeto da pesquisa. A convivência e o estudo coletivo também me possibilitaram, previamente à elaboração de experimentações e hipóteses de pesquisa, contornar um perfil do grupo em questão e estabelecê-lo em um contexto. Aspectos que se tornaram intrínsecos a esse planejamento posterior.

Quais são possibilidades ao se utilizar o software GeoGebra para trabalhar o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau de modo a torná-lo um recurso para “pensar-com” no processo de produção de conhecimento? - é minha pergunta norteadora de pesquisa. A partir dela, podemos, mais uma vez, notar esse caráter qualitativo ao qual intentei me direcionar. Um dos indícios dele está na expressão inicial “quais são”, pois, para escrevê-la, tive o cuidado de suprimir qualquer artigo que indicasse que estaria querendo descobrir todas as possibilidades existentes do software ou, mesmo, enumerá-las. Ou seja, ao suprimi-lo, consegui guiar um caminho de compreensões que envolvesse apenas alguns dos possíveis cenários de estudo. E então, assim estabelecido um foco de pesquisa, tornei-me capaz de descrevê-lo e investiga-lo de maneira minuciosa.

Outro indício desse caráter é a referência à teoria do pensar-com (BORBA, 2009)[2] presente na pergunta, cuja ideia sustenta-se em experimentações e percepções subjetivas que implicam, portanto, uma pesquisa qualitativa. Isto é, se um estudo relacionado a alternativas de construções lógicas fosse abordado apenas de maneira numérica - capaz de estabelecer graus de eficiência a algumas delas, por exemplo - poderia ser inconclusivo, uma vez que amostras de alunos inseridos em diferentes contextos tendem a apresentar desenvolvimentos cognitivos completamente diferentes; o que faz com que informações circunstanciais sejam essenciais para teses coerentes.

Durante a coleta de dados, entretanto, estruturei um questionário a ser respondido pelos alunos, o qual interpretei estatisticamente por meio de cálculos percentuais e gráficos ilustrativos respectivos; dados numéricos caracterizadores básicos de uma pesquisa quantitativa. Por outro lado, cada um dos dados numéricos trouxe consigo interpretações explicativas baseadas em justificativas discentes e compreensões intuitivas consequentes da minha parte. O que implica que tais números sejam, na verdade, subsídios para mais dados qualitativos a serem explorados.

Portanto, todas as análises que estabeleci dependem de resultados que são únicos e que, apesar de não se relacionarem a uma amostra grande da realidade, produzem novas informações que me permitem compreendê-la e descrevê-la de maneira específica. Porque, afinal, um pesquisador qualitativo está mais interessado em um processo de descobertas, reflexões e construções de significados em um intervalo necessário de tempo do que em resultados (positivos ou negativos) e produtos que sua pesquisa possa gerar exteriormente a curto prazo (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Ainda, à medida que vou recolhendo e agrupando dados, torna-se possível acompanhar, pela sequência da estruturalização do corpo de meu trabalho, o caráter construtivista de abstrações (BOGDAN; BIKLEN, 1994) que vou realizando, reportando e interpolando-as às minhas concepções iniciais de educação, as quais eram parciais e mais limitadas do que as atuais. Processo qualitativo que toma forma no momento que entendo a necessidade de e decido reformular minhas próprias

[2] Teoria que discuto no capítulo Fundamentação Teórica.

produções - especificamente, os trabalhos escolares, abordadas a seguir e chamados de TA1 e TA2, que subsidiam toda minha pesquisa.

Tudo isso posto, de acordo com os procedimentos que me foram interessantes utilizar para formular esse trabalho, posso dizer que o método qualitativo ao qual me adapto é classificado como um Estudo de Caso. A partir dele, abordo a aprendizagem de funções polinomiais de 1º e de 2º grau por meio de situações geométricas dinâmicas permitidas pela interação com recursos digitais, as quais foram propostas a alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental. Um Estudo de Caso pode ser definido como um método exploratório e preservativo do caráter unitário da unidade-caso pesquisada, com ênfase nos elementos que mais interessem o pesquisador e contribuam à investigação. Ele é considerado o delineamento mais propício para a investigação de um fenômeno contemporâneo (GIL, 2002 apud YIN, 2001).

Por conseguinte, também posso, segundo Yin (2001) e Stake (2000), consoante Gil (2009), definir alguns passos a serem seguidos para um Estudo de Caso ser efetivamente aplicado. A seguir, apresento os passos sugeridos por esses autores, assim como sua relação com o desenvolvimento desta pesquisa.

O primeiro passo é a formulação do problema de pesquisa. O problema de pesquisa desse trabalho pode ser entendido como a questão primária de meu projeto de pesquisa, enunciada anteriormente[3], seguida das secundárias: Como posso associar o trabalho de funções de 1º e de 2º grau com a Geometria Dinâmica? Como o trabalho associativo entre Geometria e Funções colabora para a compreensão de ambos os conteúdos? Como criar uma atividade escolar que aborde o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau e que pense-com o recurso GeoGebra? Ressalvo que essa última pergunta apenas me surgiu enquanto finalizava a presente pesquisa, logo, não constitui, propriamente, meu primeiro passo.

O segundo, é a definição da unidade-caso, que pode ser um indivíduo, um determinado grupo de pessoas, uma organização, um conjunto de relações, um papel social, um processo social, uma comunidade, uma nação ou mesmo toda uma cultura (GIL, 2009). A unidade-caso que defini para o desenvolvimento de minha pesquisa foi

[3] Quais são possibilidades ao se utilizar o software GeoGebra para trabalhar o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau de modo a torná-lo um recurso para “pensar-com” no processo de produção de conhecimento?

a Turma 9AH de 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio João Paulo I, Unidade Higienópolis, em Porto Alegre, RS - colégio particular de classe média a alta, localizado em um bairro nobre da capital - no ano de 2016.

O terceiro, consiste na elaboração de um protocolo de trabalho, o qual descrevo no subcapítulo Proposta de Trabalho.

O quarto, é a coleta de dados obtidos durante o trabalho proposto com a unidade-caso. Os dados que coletei durante as atividades práticas com a unidade-caso escolhida ambientaram-se, majoritariamente, na Sala de Informática do Colégio; e foram realizadas por meio de dois trabalhos avaliativos – ao longo do primeiro semestre de 2016 – e de um questionário individual escrito – ao longo do segundo semestre de 2016.

O quinto e último passo traduz-se na avaliação e na análise dos dados coletados. Passo que desenvolvo qualitativamente nos capítulos Resultados e Considerações Finais.

Então de acordo com o quarto passo, descrevo e contextualizo minha coleta de dados a seguir.

2.2. TIPOS DE DADOS

Os trabalhos avaliativos citados se intitulam “Trabalho Avaliativo (parte 1)” – ou TA1 –, que trata de funções de 1º grau; e “Trabalho Avaliativo (parte 2)” – ou TA2 –, que trata, por sua vez, de funções de 2º grau. Assim, a partir da realização deles, coletei vários dados: TA1 e TA2 de dezenove alunos, que foram digitalizados e, dos quais, recortados alguns trechos; fotos da Turma tiradas durante o desenvolvimento das atividades no Laboratório de Informática do Colégio; anotações sobre o desenvolver das atividades feitas por mim assim que cada aula se encerrava em uma caderneta de campo; e áudios de diálogos entre mim e os alunos durante o decorrer do TA1. O corpo integral de ambos os trabalhos coloquei nos Apêndices A e B.

Três meses após a realização dos trabalhos avaliativos com a turma 9AH, confeccionei um questionário escrito, que contava com cinco questões objetivas e quatro dissertativas. Meu intuito com ele foi o levantamento de dados que pudessem me servir de fundamentação complementar a três objetivos principais relacionados a esse grupo de alunos: contribuir para que eu descreva seu perfil; aperfeiçoar minha análise acerca de quais experiências com o software tenham sido, provavelmente, vividas por eles durante as atividades na Informática; e me possibilitar a relação entre a teoria dos seres-humanos-com-mídia (BORBA; VILLAREAL, 2005, p.23), que descrevo no subcapítulo A educação Matemática e o Uso de Softwares do Fundamentação Teórica, com o sentido que ele tenha dado a essas experiências.

Meu primeiro objetivo, entre esses três citados, foi alcançado por meio da criação das questões de número 1 a 5 (Apêndice A), com as quais questiono a relação do aluno com a disciplina escolar de Matemática e com o software GeoGebra. O segundo, pela de número 6 (Apêndice A), que descreve conhecimentos matemáticos sobre funções que planejei ensinar por meio do TA1 e do TA2 intrínsecos ao trabalho com o software, inquirindo quais deles ainda eram recordados pelos alunos. E, o terceiro, pelas questões de número 7 a 9 (Apêndice A), que investiga criatividade e opinião particular relacionadas a aulas de Matemática com tecnologias digitais.

Então, desse questionário, recortei trechos de respostas às questões dissertativas de alguns alunos que o preencheram[4], e construí gráficos de frequência relativa percentual para expor suas respostas às questões objetivas. Tais elementos apresento nos subcapítulos Contexto e Perfil da Turma e Questionário dos capítulos Metodologia e Resultados, respectivamente.

A coleta de áudios foi possível apenas nas aulas em que desenvolvi o TA1, mas não o TA2, por motivos técnicos relacionados ao aparelho de celular que vinha utilizando para gravá-los. Em compensação, alguns trechos de diálogos com os alunos anotei em seguida ao término das respectivas aulas.

Apesar da turma 9AH ser formada por vinte e nove alunos e todos participarem das atividades propostas, todos os dados específicos das atividades práticas que exponho nesse trabalho – recortes, fotos e áudios - relacionam-se a apenas dezenove deles. O motivo é o fato de que apenas esses dezenove me entregaram o Termo de Consentimento de participação da Pesquisa (Anexo) assinado por um responsável – assinado também pela Coordenadora Pedagógica do Colégio, pela professora orientadora Débora e por mim.

[4] Dados coletados de questionários de quinze alunos que o preencheram e me entregaram o Termo de Consentimento assinado por um responsável.

E é importante ainda salientar que as fotos com que ilustro os capítulos foram capturadas todas durante a realização do TA1 e do TA2 por alguns alunos que se disponibilizaram voluntariamente a essa tarefa momentaneamente, sendo que em todas elas preservo, por meio de recursos de edição de imagem, as identidades de todos.

Logo, contextualizo essa turma de alunos e trago algumas características relevantes de seu perfil à minha pesquisa no próximo subcapítulo.

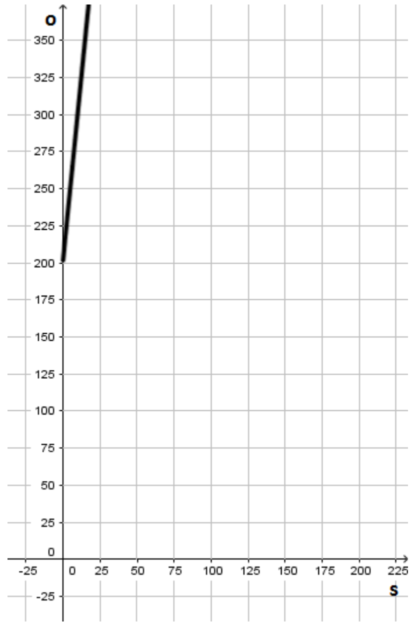
2.3. CONTEXTO E PERFIL DA TURMA

Os conteúdos programáticos que trabalhei, em Matemática, com a 9AH no 1º trimestre de 2006 foram: Conjuntos, Relações Binárias e Funções. Em Funções, trabalhamos conceito; representação de diagramas e de problemas por meio de leis de formação; definição e análise gráfica de variável dependente, variável independente, constante, domínio, imagem, contradomínio, crescimento, decrescimento, constância; cálculos de domínio de funções reais de variáveis reais, e cálculos teste com elementos do domínio para determinar se uma função monótona é crescente, decrescente ou constante.

A turma mostrou-se participativa e inquieta durante as exposições, discussões e atividades desenvolvidas nos primeiros três meses letivos. Essas aulas aconteceram exclusivamente em sala de aula, porém todas de maneira expositiva-participativa e, algumas, com a utilização do projetor no quadro para que trabalhássemos representações gráficas de funções com o auxílio do software GeoGebra. Nestas, tivemos a oportunidade de discutir como algumas situações reais poderiam ser interpretadas como funções que envolvessem a dependência entre duas variáveis e, então, como também poderiam ser representadas tanto por uma lei de formação quanto por um gráfico no Plano Cartesiano.

Com intuito ilustrativo desses últimos eventos, considero um dos exercícios que escrevi para uma tarefa de sala de aula: “Laika é uma cadela que roe muitos ossos. A sua média é de 10 ossos por semana. Sabemos que ela já roeu 202 ossos durante toda a sua vida”. Posso, por conseguinte, interpretar a quantidade média total de ossos que roerá como uma variável dependente o; a quantidade de semanas que passarão enquanto roe como uma variável independente s, e os 202 ossos já roídos como uma constante. Logo, representar essa relação entre ossos e semanas pela lei de formação $o: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $o(s) = 202 + 10s$, e também pelo gráfico (Fig. 1) abaixo.

Figura 1 - Função o(s)=202+10s.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Posteriormente, também conseguimos, mesmo que apenas durante dois períodos de aula, discutir possíveis translações da representação gráfica de uma função qualquer: deslocamentos, reflexões em torno dos eixos, compressões e alongamentos verticais ou horizontais. Este debate influenciou-me a confeccionar um trabalho avaliativo de proposição e resolução de problemas, em duplas, a ser feito em casa, o qual considero que tenha sido exitoso em fazer com que cumpríssemos satisfatoriamente meu objetivo didático de trabalhar com uma introdução a translações gráficas.

Para confeccioná-lo, cada aluno deveria, primeiramente, como fiz no exemplo anterior, criar uma pequena história que envolvesse a dependência entre duas variáveis, e que pudesse ser interpretada como função. Então, teriam que escrever e desenhar, em papel quadriculado, sua lei de formação e sua representação gráfica no Plano Cartesiano. Por fim, a partir dessa lei, calcular e esboçar no Plano algumas translações específicas solicitadas por mim.

Para desenvolvê-lo, indiquei que baixassem ou utilizassem a versão online gratuita do software GeoGebra em seus computadores. Dessa maneira, poderiam recorrer ao auxílio visual das representações gráficas que poderiam ser geradas na Janela de Visualização do programa se digitassem a respectiva lei de formação no campo de “Entrada”. E, portanto, transcrever, manualmente, essas traduções para o papel quadriculado.

Logo, ao partirmos para o estudo de funções polinomiais de 1º e de 2º grau no segundo trimestre letivo, todos os alunos já possuíam certo hábito com o software GeoGebra, mesmo que ainda de maneira superficial – eles já tinham aprendido a traçar gráficos a partir de uma lei de formação e a criar pontos.

Iniciamos a discussão das polinomiais de 1º grau em uma aula expositiva com o recurso quadro-giz retomando alguns problemas com que já tínhamos trabalhado no trimestre anterior, porém que ainda não sabiam que poderiam ser analisados especificamente dessa maneira. Ao nos dirigirmos para o Laboratório de Informática para que desenvolvêssemos o TA1, então, já tínhamos realizado reflexões que poderiam contribuir para o estudo de funções de 1º grau a respeito de: análise de domínio e imagem de funções quaisquer; definição de função afim e linear; escrita da lei de formação de uma função de 1º grau como $f(x) = ax + b$, com a e b constantes reais; identificação dos coeficientes angular e linear de uma função de 1º grau; realização de cálculos teste para descobrir se uma função monótona é constante, crescente ou decrescente

Posteriormente a termos concluído minha proposta de trabalho[5] envolvendo o TA1, prosseguimos para o TA2, que trata de funções polinomiais de 2º grau. A grande diferença entre a abordagem dos trabalhos foi que, ao contrário do primeiro, iniciamos o segundo sem ainda termos iniciado qualquer discussão do que seria uma função polinomial de 2º grau ainda.

Por fim, após já finalizado o estudo de funções proposto para o ano letivo de 2016 com a 9AH, no terceiro trimestre, durante uma aula de exercícios em sala de aula, entreguei-lhes o questionário, retratado no subcapítulo anterior, e expliquei-lhes os motivos[6] pelos quais o criei. Deixei que decidissem o melhor momento para responde-lo: a maioria o respondeu em sala de aula e me entregou no mesmo dia, outros preferiram respondê-lo em casa e me entregar na semana seguinte. Os dados coletados nas questões 1 a 5 estão logo abaixo, pois colaboram com a descrição do perfil da turma; já os coletados nas questões 6 a 9 serão apresentados no capítulo Resultados.

---

[5] Descrita no subcapítulo Proposta de Trabalho a seguir.

[6] Motivos que já descrevi no subcapítulo Tipos de Dados: contribuir para descrever o perfil da Turma; aperfeiçoar análise acerca de quais experiências foram vividas; relacionar a teoria dos seres-humanos-com-mídia com o sentido que ele tenha dado a essas experiências.

A primeira e a segunda (Fig. 2) questões, que se completam, possuíam o objetivo de fazer-me entender o quanto os alunos da Turma apreciam ou não a Matemática; não necessariamente a disciplina, mas o campo de estudo. Entendendo isso, me torno apta a construir uma opinião mais abrangente a respeito do desenvolvimento das atividades práticas realizadas.

Figura 2 - Questionário, questões 1 e 2.

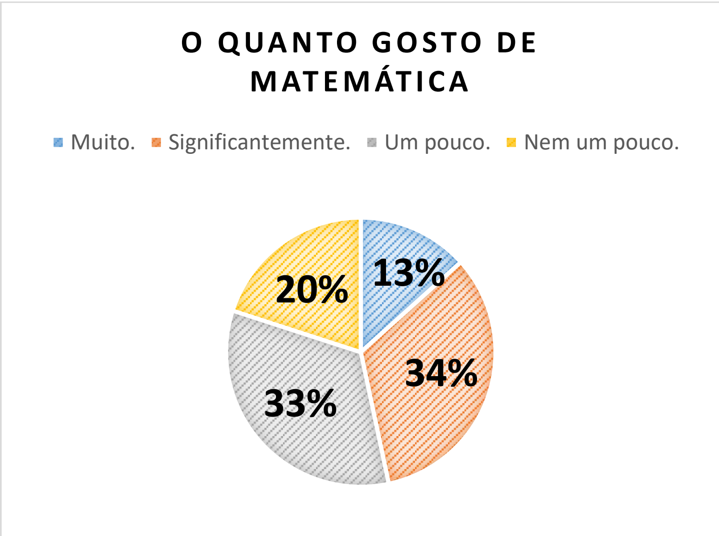
1. Você gosta de Matemática?
( ) Muito. ( ) Significativamente.
( ) Um pouco. ( ) Nem um pouco.

2. Por quê?

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Dos 15 alunos que responderam a essas questões, 3 não gostam nem um pouco, 5 gostam um pouco, 5 gostam significantemente e 2 gostam muito de Matemática. Respostas que geraram as frequências relativas proporcionais descritas no gráfico de setores[7] (Fig. 3) abaixo.

Figura 3 - Questionário, questão 1: gráfico de setores.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Aqueles alunos que alegaram gostar “nem um pouco” de Matemática, justificaram-se (Fig. 4) pelos motivos de precisarem pensar e realizar muitos cálculos ou de serem traumatizados com a Disciplina e preferirem a área de conhecimento de humanas à de exatas.

[7] Apesar dos setores “Significantemente” e “Um pouco” representarem a mesma quantidade absoluta, mostram quantidades percentuais diferentes a fim de defini-las em números inteiros arredondados.

Figura 4 - Questionário, questão 2: respostas alunos 17 e 11, respectivamente.

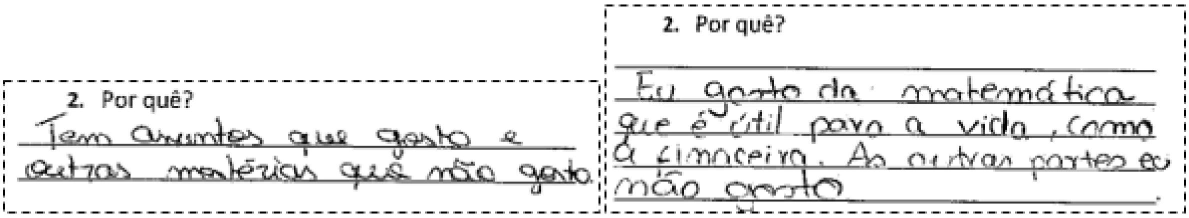
2. Por quê?
Por ter que fazer muitos
cálculos e pensar muito.

2. Por quê?
Porque sou de humanas
e sou traumatizada com
matemática.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Já alguns alunos que afirmaram ter certo apreço, mas não gostarem tanto de Matemática, justificaram-se relatando que não se agradam com todas as suas áreas ou não consideram todas elas importantes para seu futuro (Fig. 5); outros, pois consideram o seu entendimento difícil e complicado (Fig. 6).

Figura 5 - Questionário, questão 2: respostas alunas 2 e 13, respectivamente.

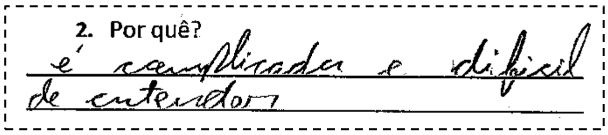


2. Por quê?
Tem assuntos que gosto e
outras matérias que não gosto.

2. Por quê?
Eu gosto da matemática
que é útil para a vida, como
a financeira. As outras partes eu
não gosto.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 6 - Questionário, questão 2: resposta aluno 5.

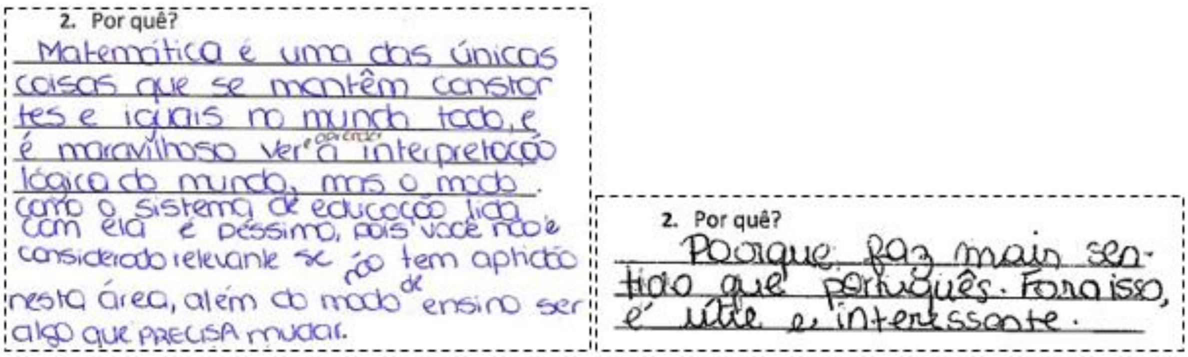


2. Por quê?
é complicada e difícil
de entender

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Agora, a maioria dos alunos que argumentou gostar significantemente de Matemática, o fez por ela ser útil, interessante, generalizadora, lógica (Fig. 7) e pela realização de cálculos ser prazerosa (Fig. 8). Alguns desses alunos ainda justificaram o porquê de não gostarem mais ainda do que já gostam dessa área de conhecimento: porque a sua aprendizagem é obrigatória e seu modo de ensino precisa de mudanças (Fig. 7), ou porque não amam realizar cálculos (Fig. 8).

Figura 7 - Questionário, questão 2: respostas alunas 10 e 8.

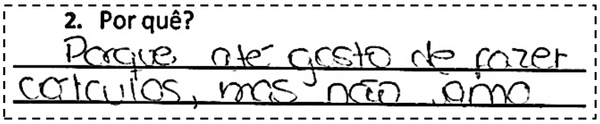


2. Por quê?
Matemática é uma das únicas
coisas que se mantêm constan-
tes e iguais no mundo todo, e
é maravilhoso ver a interpretação
lógica do mundo, mas o modo
como o sistema de educação lida
com ela é péssimo, pois você não é
considerado relevante se já tem aptidão
nesta área, além do modo de ensino ser
algo que precisa mudar.

2. Por quê?
Porque faz mais sen-
tido que português. Fora isso,
é útil e interessante.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 8 - Questionário, questão 2: resposta aluna 1.



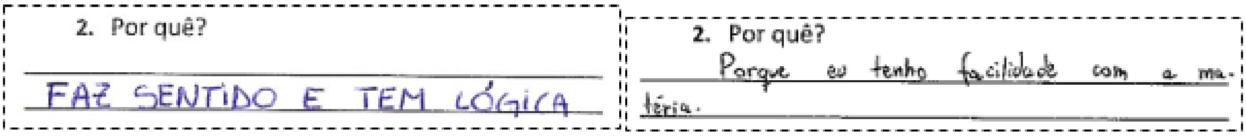
2. Por quê?

Porque até gosto de fazer cálculos, mas não amo

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

E, dos dois alunos restantes que afirmaram gostar muito de Matemática (Fig. 9), um afirmou que é pelo motivo de ela possuir sentido e lógica, assim como muitos dos alunos que responderam "significantemente". O outro, porque possui facilidade com a Disciplina em sala de aula.

Figura 9 - Questionário, questão 2: respostas alunos 3 e 16, respectivamente.



2. Por quê?

FAZ SENTIDO E TEM LÓGICA

2. Por quê?

Porque eu tenho facilidade com a ma-téria.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

A partir desses dados, portanto, concluo que 80% dos alunos que responderam ao questionário gostam, pelo menos um pouco, de Matemática. Assim como que os principais motivos pelo apreço são relacionados à sua utilidade e lógica, e já os pelo desapreço, são relacionados ao trabalho árduo de pensar e entender suas conjecturas ou de não conseguirem abstrair significados que lhes serão úteis no futuro.

Com a terceira questão do questionário (Fig. 10), procuro descobrir a opinião deles sobre quais organizações de aula seriam mais ou menos influentes em uma aprendizagem matemática pessoal efetiva. Pois, saber o que pensam a respeito e fazer um paralelo com as fundamentações teóricas que trarei contribuirá com meu entendimento a respeito dos resultados obtidos com essa pesquisa. "Um dos grandes desafios para os educadores matemáticos é encontrar os caminhos que levem seus alunos a apropriarem-se deste conhecimento. E para isso, questões de abordagem cognitiva merecem uma análise". (GRAVINA & SANTAROSA, 1998).

Figura 10 - Questionário, questão 3.

3. Em qual das organizações de aula de matemática abaixo você considera que <u>a sua aprendizagem</u> é mais efetiva? Numere as alternativas de 1 a 6, sendo 1 a menos efetiva e 6 a mais efetiva.

( ) Aula expositiva no quadro.

( ) Aula de exercícios com material escrito.

( ) Aula de estudos dirigidos com material escrito.

( ) Aula expositiva com recursos digitais.

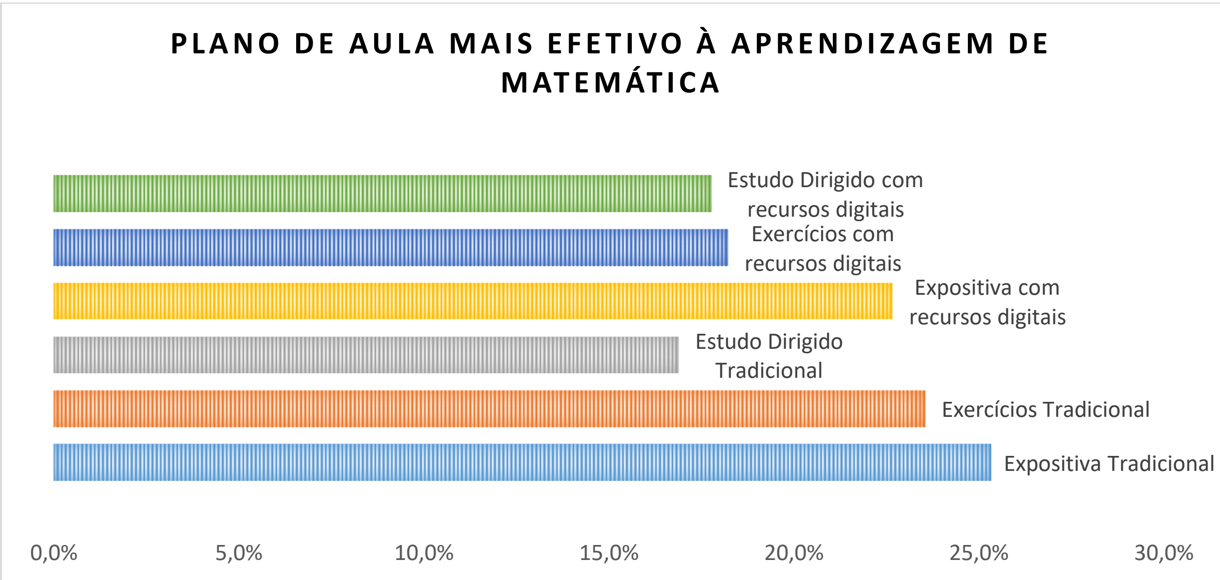
( ) Aula de exercícios com recursos digitais.

( ) Aula de estudos dirigidos com recursos digitais.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Para estabelecer dados estatísticos, calculei a soma dos números de 1 a 6 que apareceram em cada alternativa de resposta e, então, descobri a relação percentual entre cada uma dessas somas e a soma de todos os números[8], obtendo resultados descritos no gráfico de barras na Figura 11 a seguir.

Figura 11 - Questionário, questão 3: gráfico de barras.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Posso perceber, a partir desses dados, que a maior parte dos alunos da 9AH prefere aulas tradicionais a aulas com recursos digitais de forma geral, assim como, especificamente, naquelas cujo o objetivo seja a exposição de um conteúdo ou a resolução de exercícios tradicionais. Porém, nas cujo o objetivo seja desenvolver um

[8] Cálculo de Média Aritmética Ponderada considerando os números de 1 a 6 como níveis crescentes de importância relativa. Para mais informações, acesse Só Matemática, Média Aritmética disponível em <http://www.somatematica.com.br/fundam/medias.php>. Acesso em 27/07/2017.

estudo dirigido, já preferem a utilização de recursos digitais. Conclusão última que me entusiasmo com, pois, principalmente, o TA2 foi organizado e aplicado[9] de maneira a ser um estudo dirigido com recursos digitais. Ou seja, talvez os alunos realmente tenham conseguido construir significados a partir das experiências vivenciadas com o software em nossas aulas.

Todavia, apesar dessas preferências descritas, a turma mostrou-se bem dividida em suas respostas, pois a intensidade somada (a partir dos valores de 1 a 6 dados) percentual de cada preferência varia em intervalo de 16,9% a 25,3%, ou seja, de amplitude menor que 10%, que podemos considerar pequena, principalmente porque apenas 15 alunos responderam ao questionário.

Por fim, quando utilizamos o GeoGebra pela primeira vez em 2016 em uma aula expositiva com projetor no quadro, procurei saber da relação deles com o software. Alguns me disseram que já tinham trabalhado com ele no 7º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com Sistemas Lineares, outros que não o conheciam, pois estudavam em outro Colégio nessa época. Agora, refinando essas respostas, por meio das questões 4 (Fig. 12) e 5 (Fig. 14; Fig. 15) do questionário descubro que, dos 15 alunos que responderam à pergunta, 7 já conheciam e 8 não conheciam ainda o software. Respostas que deram origem ao gráfico de setores abaixo (Fig. 13), que expõe as frequências relativas percentuais de cada resposta; e às explicações de como e quando, que podem ser resumidas pelos recortes a seguir.

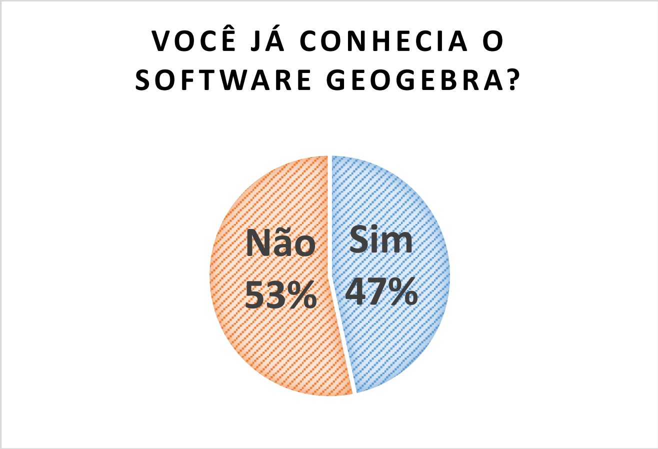
Figura 12 - Questionário, questão 4.

4. Você já conhecia o software GeoGebra antes das aulas em que foram trabalhadas funções neste ano?( ) Sim. ( ) Não.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

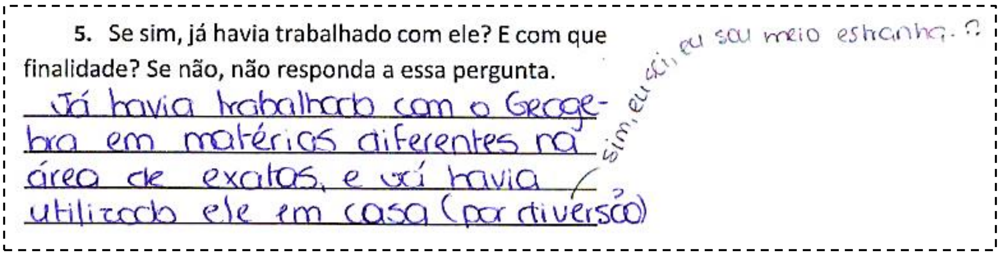
[9] Assim como exponho no subcapítulo Proposta de Trabalho a seguir.

Figura 13 - Questionário, questão 4, gráfico de setores.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

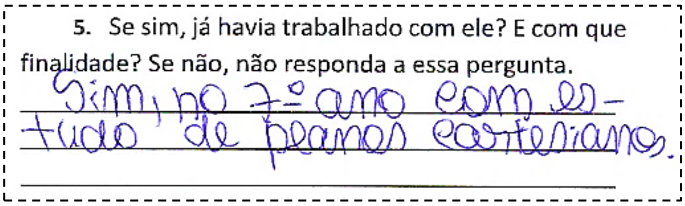
Figura 14 - Questionário, questão 5: resposta aluna 10.



5. Se sim, já havia trabalhado com ele? E com que finalidade? Se não, não responda a essa pergunta.
Já havia trabalhado com o Geoge-bra em matérias diferentes na área de exatas, e já havia utilizado ele em casa (por diversão)
sim, eu sei, eu sou meio estranha. ?

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 15 - Questionário, questão 5: resposta aluna 11.



5. Se sim, já havia trabalhado com ele? E com que finalidade? Se não, não responda a essa pergunta.
Sim, no 7º ano com es-tudo de planos cartesianos.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Logo, dos 7 que já tinham trabalhado com o software, 6 trabalharam no 7º ano, como já tinham me contado, e um deles em outras disciplinas da área das exatas e em casa, por diversão.

Assim, por fim, trato do trabalho dos alunos com o GeoGebra que foi foco dessa pesquisa a seguir.

2.4. PROPOSTA DE TRABALHO: Trabalhos Avaliativos

Inspirada na página virtual Mídias Digitais I[10] e nas práticas desenvolvidas nas turmas que frequentei como graduanda em Licenciatura em Matemática na UFRGS nas disciplinas de Geometria I, Educação Matemática e Tecnologia, Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II, elaborei o “Trabalho Avaliativo (parte 1)” e “Trabalho Avaliativo (parte 2)”, envolvendo problematizações e atividades relacionados ao estudo de funções do 1º e do 2º grau, seu dinamismo e possíveis análises associadas à Geometria Dinâmica. Para isso, utilizei o software GeoGebra, sendo que também o tornei requisito para as atividades propostas pelos TAs. Modelos pensados para aplicação com turma 9AH, unidade-caso dessa pesquisa, e planejadas para se desenvolverem em duplas no Laboratório de Informática do Colégio João Paulo I nas aulas de matemática curriculares durante uma carga horária de oito períodos (quatro para cada TA) de cinquenta minutos.

Isso posto, noto a necessidade de descrever, brevemente[11] neste capítulo, esse software com que pensamos matemática durante a elaboração dos trabalhos que cito acima. Então, de acordo com as palavras de Guimarães (2012):

> O GeoGebra é um software de Geometria Dinâmica, termo cunhado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen. Além de ser livre e gratuito, esse software permite que o usuário possa fazer movimentos na construção realizada mantendo as relações existentes entre os elementos dessa. [...] O software reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. Possui duas janelas, uma gráfica e outra algébrica, sendo sua interface bem intuitiva. Borba e Penteado (2002) ressaltam que estes softwares possibilitam as construções de figuras geométricas, [...] de gráficos de funções, possibilitando a movimentação na tela do computador sem perder os vínculos estabelecidos na construção inicial (GUIMARÃES et. al, 2012, p. 280 – 293).

Com o TA1, portanto, problematizo perímetros de um quadrado e de um triângulo equilátero dados em função do tamanho de seus lados. Os contextualizo como moldes feitos pelo professor Neville da Escola de Magia e Bruxaria de

---

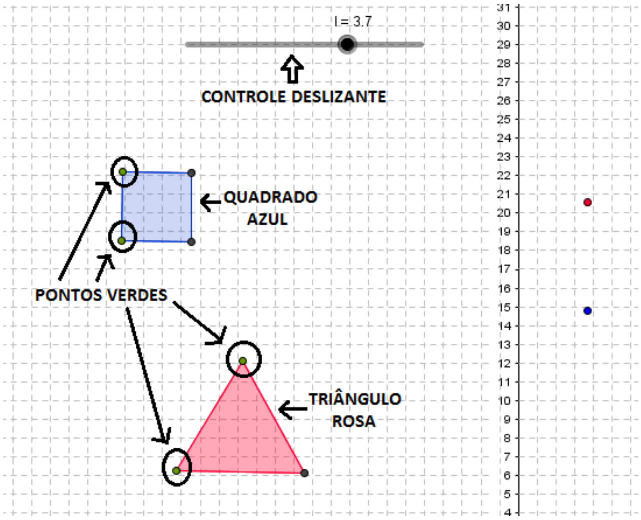
[10] GRAVINA, Maria Alice. STORMOWSKI, Vandogir. **Mídias Digitais I.** Universidade do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática e Estatística. Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/>. Acesso em 24/05/2016.

[11] No subcapítulo A Aprendizagem Dinâmica e o GeoGebra da Fundamentação Teórica, exploro mais as potencialidades do software e motivos pelos quais o escolhi utilizar com meus alunos. Assim como no subcapítulo A Educação Matemática e o Uso de Softwares da Fundamentação Teórica, defino a expressão Geometria Dinâmica que será citada por Guimarães a seguir

Hogwarts[12] para uma nova planta mágica, que apenas desenvolvia-se bem em hortas que tivessem exatamente esses formatos.

No arquivo “triângulo_quadrado(1).ggb” do GeoGebra, respectivo ao TA1, o quadrado azul e o triângulo rosa deveriam ser manipulados a partir do controle deslizante $l;\ l = [-10,10]$, comando que altera o tamanho de seus lados; e por meio de arrastes das figuras e dos pontos verdes (vértices), para mudar, se necessário, sua posição na tela (Fig. 16). E, para que pudéssemos ter uma noção mais ampla das alterações de medidas, deixei a malha quadriculada (com quadradinhos de uma por uma unidade de medida) presente na tela dos arquivos.

Figura 16 - TA1, objetos manipuláveis.



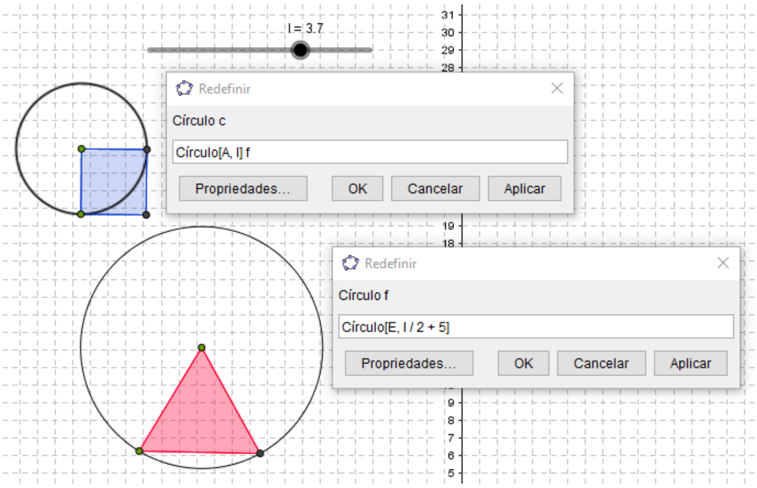
Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Construí o quadrado azul e o triângulo rosa a partir dos recursos Círculo dados Centro e Raio (Fig. 17) e Polígono Regular, sendo que o primeiro para definir o tamanho dos lados de cada um, e o segundo para gerá-los de modo a serem regulares. Para tanto, escolhi coordenadas aleatórias para o centro de cada um dos dois círculos e defini o raio do em que inscreveria o quadrado como l, e o raio do em que inscreveria o triângulo como $\left(\frac{l}{2} + 5\right)$. Não defini o lado de ambos os polígonos pela mesma variável l com os intuitos de: trabalhar com uma função que fosse linear e outra que fosse afim; inserir uma fração à uma das leis de formação, para que precisassem lidar também com operações nos racionais no decorrer do TA1, já que vinha percebendo, durante nossas aulas anteriores, que muitos ainda apresentavam

[12] Escola britânica fictícia em que é ambienta a saga Harry Potter, escrita por J. K. Rowling. Para mais informações, pode-se acessar a seguinte página: WIKIPEDIA, Escola de Magia e Bruxaria de Hogwarts. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Escola_de_Magia_e_Bruxaria_de_Hogwarts>. Acesso em 30/11/2016.

certa dificuldade em realizá-las. A variável l, por sua vez, associei ao controle deslizante, que criei inicialmente, e a defini no intervalo $[-10{,}10]$; – a partir de -10 para que o Domínio da função perímetro do triângulo se iniciasse em zero, pois não existe perímetro negativo; e até 10, por questões estéticas, já que, na verdade, poderia ir até $+\infty$ e ainda fazer sentido geométrico. Informações que também disponibilizei aos alunos nas instruções escritas do TA1.

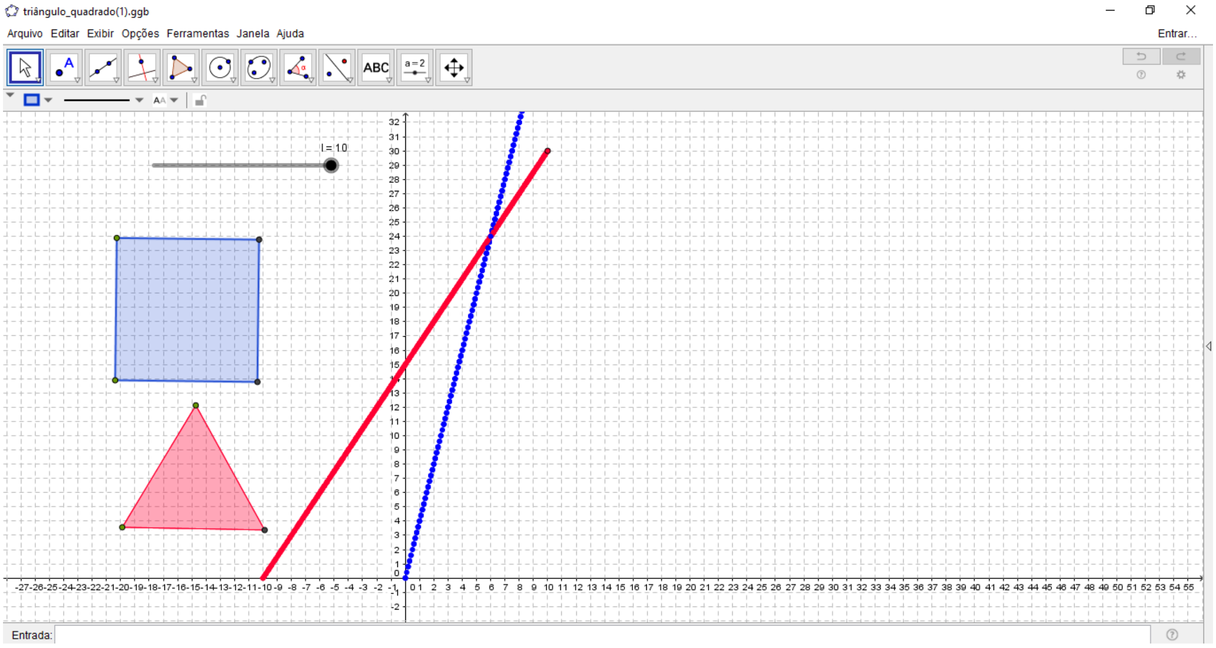
Figura 17 - TA1, recurso Círculo dados Centro e Raio.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Por fim, construí dois pontos: um azul associado ao quadrado, e um rosa associado ao triângulo. As coordenadas do azul associei ao comando recursivo condicional "Se $[0 \leq l, (l, 4l)]$" – sempre que o tamanho de l for maior ou igual a zero (pois não existe perímetro negativo), o ponto azul assumirá as coordenadas $(l, 4l)$, cujas abscissa refere-se diretamente ao valor selecionado pelo controle deslizante, e ordenada, à medida consequente do perímetro do quadrado. Já as coordenadas do ponto rosa estabeleci como $(l, \frac{3l}{2} + 15)$; sem necessidade de condicionamento, pois os valores de l já o havia restringido no intervalo em qual o criei. Em seguida, habilitei seus rastros, para que, sempre que o tamanho de l fosse alterado, os dois pontos traçassem a representação gráfica das funções perímetro do quadrado e do triângulo à medida que assumissem diferentes coordenadas (Fig. 18).

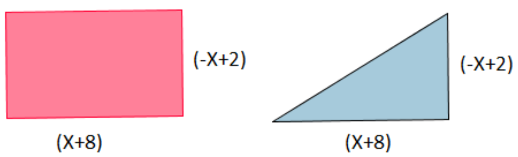
Figura 18 - TA1, traço das funções perímetros.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Com o TA2, problematizo medidas de área de pedaços achatados em forma de retângulos e triângulos retângulos de Bob Esponja Calça Quadrada[13], que se regeneram quando se fixam a uma rocha. Estabeleço a área dessas figuras em função do tamanho de X, variável real que influencia o tamanho da base, dada por $(X + 8)$, e da altura, dada por $(-X + 2)$, de cada pedaço retangular ou triangular (Fig. 19). Porém, não deixei tais figuras prontas para manipulação no arquivo "triângulo_quadrado(2).ggb" do GeoGebra, respectivo ao TA2, assim como acontecera no do TA1. Pressupondo uma familiaridade maior com o software após a realização do primeiro Trabalho, propus, dessa maneira, um engajamento maior dos alunos com a mídia: descrevi um passo a passo de dezessete itens – questão 2, itens I a XVII do TA2 (Apêndice B) – para a construção de um controle deslizante relacionado à variável X, dos polígonos retangular e triangular e de pontos que traçassem os gráficos das funções com que trabalharíamos dessa vez.

Figura 19 - TA2, pedaços retangular e triangular de Bob Esponja.

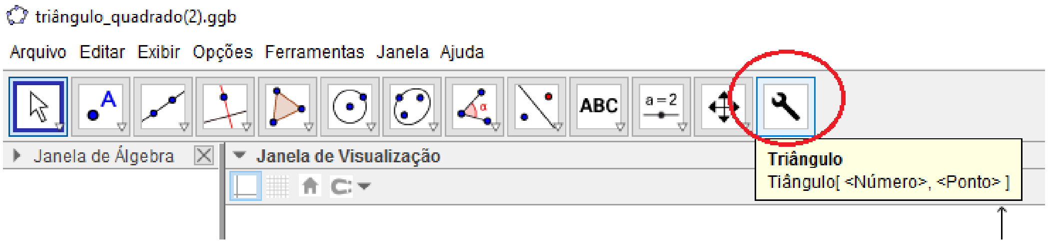


[13] Esponja marinha e personagem de uma série de animação americana. Para mais informações pode-se acessar a página: WIKIPEDIA, SpongeBob SquarePants. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/SpongeBob_SquarePants>. Acesso em 30/11/2016.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Com os primeiros dezesseis passos, dito todas as ações específicas necessárias para a construção do controle, do retângulo e do ponto que faz o intermédio entre as interpretações geométricas e gráficas da variação de sua área. Entretanto, não as dito para a construção do triângulo e do ponto correspondente a suas interpretações de área. Com essa omissão de instruções, planejo permitir que os alunos experimentassem autonomamente, de modo que tentassem entender melhor a lógica geométrica e os recursos necessários para sua construção, já que os passos que ainda precisariam realizar seriam análogos a alguns dos que já havia indicado. Contudo, uma vez que precisávamos desses objetos digitais para prosseguir com o TA2, e que a quantidade de tempo destinada à sua conclusão era delimitada pela programação curricular anual do Colégio, criei uma estratégia reserva no décimo sétimo passo: a "Ferramenta Triângulo" (Fig. 20) no arquivo do GeoGebra, recurso capaz de gerar esses objetos restantes de maneira quase automática. Para utilizarem-na, após a criação de um Ponto F, bastaria que clicassem nela (representada pelo desenho de uma chave de rosca, como na imagem abaixo), no controle deslizante X (entrada <Número>) e em F (entrada <Ponto>) – habilitando, por último, seu rastro. Portanto, apenas indicaria a possibilidade do uso da Ferramenta se perceber que não possuímos tempo suficiente para investir em meu primeiro plano de construção.

Figura 20 - TA2, Ferramenta Triângulo.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Trago, tanto com o TA1 quanto com o TA2, questões matemáticas relacionadas à Geometria, à Álgebra e a Funções, pois, mesmo que meu foco de pesquisa se direcione apenas à abordagem de funções traduzidas a partir de manipulações geométricas, todas essas áreas matemáticas, quando inter-relacionadas ou não, são essenciais ao estudo integral que planejo para meus alunos.

As primeiras são geométricas - TA1: questões 1) a, b e c (Apêndice A); TA2: questões 2) a e b (Apêndice B) – a respeito das definições e de algumas propriedades dos polígonos que introduzo. Para descrevê-las, indiquei, nas instruções dos trabalhos avaliativos, que analisassem as construções geométricas e suas possíveis manipulações para que, assim, as deduzissem[14]. E, para aqueles alunos que já as soubessem desde estudos passados, planejei-me frisar, durante as respectivas aulas, o objetivo principal dessas questões: a partir de manipulações dos polígonos, visualizar as transformações consequentes, notar aspectos invariantes, e então, descrevê-los.

Já as questões algébricas – TA1: questões 1) d) I a IV (Apêndice A); TA2: questões 2) c) I a III (Apêndice B) – relaciono, em ambos os TAs, à escrita da possível lei de formação de cada uma das funções a serem analisadas – tendo respondido às questões geométricas, estariam a par das fórmulas que calculam o perímetro e a área de cada figura geométrica abordada, então bastaria que as utilizassem inserindo as variáveis correspondentes aos lados, que foram dadas na problematização – e, também, à classificação dos parâmetros de cada uma. Especificamente no TA1 ainda há três outras questões algébricas que tratam dos assuntos: no último subitem da 1) d) V[15], cálculos teste que confirmam se as funções, além de serem monótonas, seriam crescentes, decrescentes ou constantes; na 1) d) VII[16], relação entre perímetro e área; na 1) d) VIII[17], valores de otimização.

E, aquelas cujo foco que estabeleci era no conteúdo de funções – TA1: questões 1) d) V, VI, IX, X, XI e XII (Apêndice A); TA2: questões 2) c) IV a IX (Apêndice B) – poderiam ser respondidas após a percepção dinâmica da formação gráfica de cada função em coordenação com as manipulações geométricas possibilitadas pelo trabalho com o software. São questões em que, a partir dos recursos “controle deslizante” e “habilitar rastro” para pontos, discorro sobre: relação entre Domínio numérico de uma função e sua interpretação geométrica, a qual implica restrições a ele; interpretação de constância, crescimento ou decrescimento de funções; relação entre igualdade algébrica entre leis de formação e respectivas possíveis

[14] TA1, “1) [...] A partir da interpretação da problematização e das possíveis manipulações geométricas do arquivo em questão no GeoGebra, responda [...]”.
TA2, “2) A partir da interpretação da problematização, dos passos de construção geométrica e das possíveis manipulações dos objetos gerados em *triângulo_quadrado(2)* no GeoGebra, responda [...]”.
[15] TA1, “1) [...] d) V. as funções q e t são crescentes, [...] enfatize-a (essa afirmação) por meio de alguns cálculos teste de coordenadas”.
[16] TA1, “1) [...] d) VII. se professor Neville estipulasse que a área da horta deveria ter $36m^2$, quantos metros de cerca seriam necessários para se cercar uma horta dessa nova planta mágica com formato quadrado? E para uma com formato triangular?”.
[17] TA1, “1) [...] d) VIII. para economizar na construção da horta, os alunos de Herbologia querem que a cerca de uma horta tenha a menor extensão possível. Portanto, para que tamanhos de área de uma horta quadrada dessa nova planta mágica torna mais econômica sua utilização à de uma triangular?”.

interpretações geométricas; coordenadas de pontos de máximo ou de mínimo em parábolas ; coordenadas de pontos cujas abscissas são raízes de uma das funções de 2º grau.

Mesmo não o tendo apresentado em forma de questão específica, outro objetivo principal geral de aprendizagem que procurei atingir com o TA1 e com o TA2 era o de proporcionar outra maneira e outro ambiente – além daqueles que interagem apenas com os recursos quadro-giz e papel-caneta em sala de aula – para que os alunos da 9AH pudessem compreender o que são funções, como elas podem se relacionar a outros conteúdos matemáticos e como podemos formar seus gráficos dinamicamente; ou seja, lhes introduzir uma maneira de pensar-com mídias digitais[18] em um ambiente informatizado de experimentação.

E um último aspecto que considero importante ainda comentar é a minha escolha, para contextualizar as questões do trabalho, por problematizações que envolvessem personagens “do momento”: conhecidos e apreciados pelos alunos específicos e por mim. Acreditei que, introduzindo-as, pudesse originar estímulo à realização das atividades, uma vez que poderiam se engajar com elas também de uma maneira não-matemática, logo que os fizesse associá-las a outros momentos de lazer não necessariamente do ambiente escolar. Isto é, que também fossem prazerosas a criação e a correção desses trabalhos a mim, professora, pelos mesmos motivos. No TA1, a escolha foi o universo de Harry Potter (Fig. 21); no TA2, Wolverine (Fig. 22), Bob Esponja (Fig. 23) e universo de Harry Potter (Fig. 24).

Figura 21 - TA2, aula de Herbologia.

Fonte: Neville x Hannah – DeviantArt[19].

[18] Teoria que abordo no capítulo Fundamentação Teórica.
[19] Disponível em < http://neville-x-hannah.deviantart.com/>. Acesso em 31/5/2016.

Figura 22 - TA2, Wolverine.

Fonte: Wolverine, Wallpapers – Alpha Coders[20].

Figura 23 - TA2, Phoenix.

Fonte: Jerome-K-Moore - DeviantArt[21].

Figura 24 - TA2, Bob Esponja e amigos.

Fonte: "You're trapped in a blender with no equipment... how do you get out?", 28 Of The Weirdest Job Interview Questions You Don't Want To Be Asked - BuzzFeed.[22]

Enquanto planejava o TA2, inclusive, perguntei à aluna 11 se “Vocês gostam/ gostavam de Bob Esponja? Eu assisto ainda. Eu amo desenhos”. “Sim eu olhava muito. [...] acho bem legal essa coisa de envolver personagens e tal fica mais interessante”, ela me respondeu, confirmando minha opinião.

Após ter criado, então, tais propostas de trabalho, prossegui com estudos teóricos relacionados à exploração, na Escola, do dinamismo de funções de 1º e de 2º grau em ambientes digitais, os quais pudessem suportar ou complementar minhas ideias a respeito. Abordo-os em seguida.

---

[20] Disponível em <https://wall.alphacoders.com/by_sub_category.php?id=163840&lang=Portuguese#>. Acesso em 31/5/2016.

[21] Disponível em <http://jerome-k-moore.deviantart.com/art/FAWKES-THE-PHOENIX-41841097>. Acesso em 31/5/2016.

[22] Disponível em < https://www.buzzfeed.com/spenceralthouse/the-weirdest-job-interview-questions-you-dont-want-to?utm_term=.oeQNbWOBn#.bkKd7z8PY>. Acesso em 31/4/2016.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo, então, com a ideia de buscar aperfeiçoamentos teóricos, de entender diferentes perspectivas relacionadas e de estabelecer aprimoramentos contínuos ao estudo de funções de 1º e de 2º grau pensando com mídias por meio de práticas experimentais com tecnologia digital na Escola, escrevo 4 subcapítulos. No primeiro, cito e correlaciono alguns outros trabalhos acadêmicos do Instituto de Matemática e Estatística[23] da UFRGS com o meu. Trago-os antes de apresentar os próximos subcapítulos, em que apresento propriamente as escolhas teóricas que realizo para embasar minha pesquisa, de modo a subsidiá-los.

Encontrei tais trabalhos a partir de buscas no Repositório Digital da Universidade LUME[24], entrando em Teses e Dissertações e buscando por “GeoGebra funções” no campo “Pesquisa Geral”. Selecionei, de todos os resultados obtidos com a busca, cinco deles. Entre estes: duas dissertações de mestrado; um trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática; um trabalho de conclusão do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didáticas; e um trabalho para a conclusão da disciplina de Pesquisa em Educação Matemática. Todos tratam do estudo de funções com mídias digitais e, a maioria, do software GeoGebra nesse processo.

3.1. TRABALHOS CORRELATOS

Os apresentarei de maneira que as perspectivas abordadas se afunilem, de certa maneira, à minha; das menos para as mais próximas. Primeiramente trago a dissertação de mestrado de Dos Santos (2010), cujos objetivos eram “[...] promover um ensino-aprendizagem lúdico e dinâmico, a fim de estimular a memória gráfica e a inteligência visual” (DOS SANTOS, 2010, p.07), por meio da metodologia da Engenharia Didática de Artigue (1996)[25]. A prática foi realizada com alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Educação Básica Professor Gentil Viegas Cardoso. Desenvolveu seu trabalho em dois momentos principais. No

[23] Nos anos de 2008 a 2014, em que os trabalhos que cito foram publicados, o nome do Instituto de Matemática e Estatística era apenas “Instituto de Matemática”, portanto é desta maneira que é mencionado nas respectivas referências.

[24] LUME, Repositório Digital UFRGS. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/1>. Acesso em 18/06/2017.

[25] Metodologia qualitativa de pesquisa baseada na realização, observação e análise de sequências de ensino. Para mais informações, leia ARTIGUE, Michele. **Engenharia Didáctica**. In BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Horizontes Pedagógicos, Instituto Piaget. Lisboa, 1996, p.193-217.

primeiro, aplicou uma pesquisa com professores de Matemática da Rede Estadual de Alvorada, com o intuito de coletar dados quantitativos a respeito da utilização de tecnologias digitais nas práticas docentes de suas escolas. No segundo, uma sequência de aulas em que utilizou diversos recursos, tais como slides no PowerPoint, animações em Flash 8, Winplot e folhas de problemas matemáticos a serem resolvidos.

Com a pesquisa, constatou que os professores, de maneira geral, não utilizavam tais recursos em sala de aula por motivos de falta de conhecimento, estrutura física da escola ou incentivo.

Na sala de vídeo da Escola, introduziu, por meio de slides do PowerPoint, diversos conteúdos de Funções: desde a introdução até noções de limites. Em alguns slides, acrescentou animações em Flash 8 para ilustrar o traço de gráficos de funções contextualizadas. Com o Winplot, no Laboratório de Informática, sugeriu atividades em que dava pontos que formavam figuras e, então, pedia que os alunos alterassem suas coordenadas a fim de estudarem transformações geométricas no Plano, por exemplo. Com as folhas impressas de atividades tradicionais de funções matemáticas, propôs problemas em que deveriam ser identificadas variáveis e funções.

Ou seja, a sequência didática que planejou envolvia a utilização de tecnologia digital assim como o estudo de Funções, porém de maneira que a tecnologia era tratada apenas como um recurso prático, visual e atrativo; mas não essencial ao ensino que se propôs ou para pensar-com[26]. Fato que evidencia ao concluir que essa estrutura "[...] contribuiu para uma maior atenção e reflexo do aluno e, consequentemente, para uma melhor aprendizagem" (DOS SANTOS, 2010, p.89). Já em relação à exploração do conteúdo escolhido para trabalharem a fez sem um estudo profuso de algum tópico específico.

Dessa maneira, apesar de lidar com a informática e com o ensino-aprendizagem de funções, Dos Santos (2010), em Gráficos e Animações, apresentou o planejamento e a concepção de utilização de mídias digitais que menos se aproxima, em relação aos outros autores considerados, daqueles que me proponho. Isso porque realizei um estudo em que priorizo a análise mais extensa de um estudo que contempla menos conteúdos de funções e concluo atividades intrínsecas à interação com o computador.

[26] Teoria de Borba (2009) que abordo no subcapítulo A Educação Matemática e o Uso de Softwares.

Em segundo lugar, incluo o trabalho de conclusão da disciplina de Pesquisa em Educação Matemática de Cunha e Moraes (2008), que escolheram o estudo de funções e sua relação com as transformações geométricas euclidianas no plano, tais como simetria, homotetia, translação e reflexão. Objetivam, com ele, ampliar o significado dado a funções no Ensino Médio, que geralmente não é relacionado a transformações geométricas ou a funções que não podem ser representadas na forma analítica $y = f(x)$, com x real. Para isso, por meio da Engenharia Didática, aventaram uma proposta que envolvesse os alunos do 5º semestre de Licenciatura em Matemática da UFRGS na disciplina de Laboratório de Ensino-Aprendizagem de Matemática III de 2008. Tal proposta envolveu o uso do software GeoGebra, para, segundo os autores, promover tanto aulas interativas quanto docentes orientadores de discentes que interagem com o software e que, consequentemente, se tornam agentes do próprio conhecimento em um período de tempo subjetivo.

Nas atividades matemáticas criadas, as quais deveriam ser desenvolvidas com o auxílio do GeoGebra, forneciam a definição de cada transformação seguida de descrições de algumas figuras geométricas específicas posicionadas no Plano Cartesiano. Isso posto, pediam que identificassem, em uma tabela impressa, os vértices de cada polígono antes e depois da transformação recém enunciada – fornecendo, dessa maneira, os dados do Domínio e da Imagem de cada função interpretada –, assim como desenhassem suas representações no software. Ainda propuseram atividades complementares análogas, as quais envolviam funções que não eram transformações geométricas, e com que intentavam a conclusão de que, apesar de toda transformação geométrica ser uma função, nem toda função é uma transformação geométrica.

Conforme posto por Cunha e Moraes (2008), os alunos, após a realização dessas atividades, entenderam que as transformações geométricas são funções, mas nem todos que nem toda função é uma transformação geométrica. E,

> Com o software conseguimos fazer as relações necessárias para responder a pergunta inicial: conseguimos expressar o conceito de funções e de transformações geométricas, simultaneamente, vinculando a álgebra e a geometria (CUNHA; MORAES, 2008, p.60).

Isto é, planejaram um estudo conciso sobre uma categoria de funções que interage com recursos digitais de maneira a possibilitar sua aprendizagem. Porém, novamente, o desenvolvimento das atividades propostas com o software é prático, mas não dependente dele - divergindo ao que preconizo -, uma vez que todas as ações tecnológicas relacionadas são estáticas e, portanto, poderiam ser realizadas em um Plano Cartesiano desenhando em uma folha de papel.

Em terceiro lugar, coloco o trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática de Moraes (2013), que propôs uma sequência didática para o ensino de funções de 1º e de 2º grau subsidiada pela Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval[27], a qual recomenda ser aplicada com alunos do 1º ano do Ensino Médio com o auxílio de tecnologias da informação, como o GeoGebra. Em sua fundamentação teórica, baseia-se em Notare (2009) , que afirma que

> [...] apesar da importância das múltiplas representações no processo de aprendizagem da matemática, a sua existência não é suficiente para garantir o êxito na resolução de um problema. Para tal, é preciso que o sujeito seja capaz de conectar as diferentes representações e conseguir manipular a informação de maneira eficaz na solução do problema. (NOTARE, 2009, p. 23 apud MORAES, 2013, p.23).

Dessa maneira, apresentou um trabalho que abordava funções afim e quadrática, noções de Domínio, Imagem e transformações gráficas. Segundo o autor,

> Para facilitar a construção, a manipulação e a visualização dos gráficos, empregamos o software GeoGebra, pois ele proporciona um trabalho dinâmico, que possibilita a exploração de diferentes valores para os parâmetros da representação algébrica, facilitando a integração das representações gráfica e algébrica (MORAES, 2013, p.58).

Por conseguinte, criou problemas em que pede que deveriam ser traçados gráficos no software, e ser desenhado o passo a passo de translações gráficas a partir da inserção na "Entrada" de diversas leis que apresentassem uma modificação em seus parâmetros de cada vez e em sequência – dessa maneira, obteria o traçado de vários gráficos em um mesmo Plano, os quais representam cada estágio da translação de uma lei inicial. Sendo que sempre procurou apresentar métodos de solução alternativos para uma mesma questão: algébrico com papel e caneta, e analítico com o software, por exemplo.

Assim, criou uma sequência possível de ser realizada, que priorizava alguns conteúdos específicos de funções - para que, segundo o autor, "enfatize a qualidade no processo de ensino/aprendizagem em detrimento da quantidade de conteúdos trabalhados" (MORAES, 2013, p.38) - e que completava seu objetivo de correlacionar diferentes representações de uma função. Porém que não foi comprovada, já que não a aplicou com alguma amostra estudantil.

---

[27] A Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval afirma que, havendo uma pluralidade de representações de um mesmo objeto matemático, a articulação entre eles é condição para seu entendimento. Para mais informações, leia DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fuonctionnement cognitif de la pensée.** Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg: IREM – ULP. 1993, p. 37-65.

Portanto, mais uma vez, percebo a priorização das vantagens visuais e práticas do software, uma vez que todos os procedimentos planejados no computador envolviam a inserção de gráficos, ação que também poderia ser realizada com uma calculadora gráfica. E, mesmo havendo a possibilidade de representações bem estruturadas e precisas de vários gráficos em um mesmo Plano, os quais representem vários estágios da translação de uma função, não existe movimento contínuo na animação. Dessa forma, o autor traz a noção de dinamismo, mas não a explora de maneira plena em sua proposta.

Entretanto, concordo que o GeoGebra foi um recurso necessário ao considerar que Moraes (2013) planejava aplicar essa proposta com uma turma que ainda não houvesse começado a estudar como seria o traçado das representações gráficas de funções de 1º e de 2º grau. Logo, colaboraria com o "fazer matemática" desses alunos, uma vez que tornaria o software um recurso que subsidiaria a fase da conjectura de um novo conhecimento (GRAVINA; SANTAROSA, 1998)[28].

Na posição quatro, trago o trabalho de conclusão do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didáticas de Da Silva (2011), que preconizou

> [...] iniciar um estudo que contribua para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência entre duas variáveis de uma função afim e reconhecer que seu gráfico é uma reta, relacionando os coeficientes da equação da reta com o gráfico (DA SILVA, 2011, p.06).

Assim, desenvolveu, a partir da Engenharia Didática, uma prática com alunos de uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental do EJA de uma escola da rede estadual de Jaguarão, RS. É importante salientar que a autora informou que esses alunos já tinham estudado funções lineares antes da aplicação dessa sequência didática.

Em suas aulas, primeiramente, utilizou um vídeo com uma situação cotidiana para introduzir função afim. Em seguida, entregou questões relacionadas em forma de fichas para formalizarem as abstrações.

Em um segundo momento, trabalhou com o GeoGebra com o intuito de "visualizar a aplicabilidade das operações matemáticas na função, como, por exemplo, o perímetro de uma figura geométrica em relação à medida do lado" (DA SILVA, 2011, p.20). Para isso, em um momento inicial, apresentou um passo a passo– em que

[28] Fundamentação Teórica que exploro no próximo subcapítulo.

explica parcialmente o motivo de cada passo[29] - para a construção de gráficos de funções afim pelos alunos.

Realizadas as construções, introduziu questões que dependiam da análise de experimentações dinâmicas com tais objetos: ao se movimentar um ponto C pertencente ao gráfico da função construída, eram alterados o comprimento de dois segmentos, sendo que um media a distância da origem até o ponto C, e outro, a distância do ponto C até o eixo das abscissas. Comprovando, assim, a partir de um recurso criado que calculava a razão entre os dois segmentos, que a relação entre as variáveis independente e dependente da função permaneciam sempre diretamente proporcionais.

Por fim, introduziu atividades com papel e caneta por meio do trabalho com tabelas, leis de formação e gráficos estáticos para resolver questões tradicionais de funções (algumas envolviam geometria no retângulo ou no triângulo).

Refletiu, após essas práticas, que "novas tecnologias, em especial o GeoGebra, permitiram despertar nos alunos a curiosidade e o interesse para aprender Matemática" (DA SILVA, 2011, p.54). Sendo que se referia ao software como "ferramenta" em diversas ocasiões.

Logo, do trabalho de Da Silva (2011), o aspecto que mais converge à minha proposta foi seu objetivo em promover o estudo de funções de 1º grau que envolvesse o saber das experiências em um ambiente de Geometria Dinâmica, especificamente o GeoGebra.

Contudo, divergem três fatos. O primeiro é o fato do dinamismo – movimentando o ponto C e outros objetos relacionados – refletir uma ação que poderia ser desenvolvida sem o computador, já que haveria como proceder de maneira análoga ao software utilizando réguas sólidas. Conquanto, há o benefício do GeoGebra ser capaz de realizar medições exatas mais agilmente do que conseguiríamos apenas com as réguas. O segundo, o fato de ter concluído que as tecnologias digitais despertaram a curiosidade e a atenção dos alunos, mas não que elas são capazes também de alterar a maneira com que pensam matemática; teoria que defendo e que considero como um dos maiores objetivos a serem atingidos quando um professor se propõe a trabalhar com informática, pois, se ela se tornasse

[29] Assim como fiz no TA2. Porém, reformulo esses passos com a criação do novo TA2 que discuto no capítulo Considerações Finais. O intuito dessas modificações é explicar o motivo contextualizado da necessidade de cada passo de construção, objetivando um ensino estimulador em vez de um mecânico receptivo.

um recurso usual nas aulas, não saberia dizer até que ponto ela despertaria a curiosidade dos alunos nesse âmbito. E o terceiro fato é o da autora tratar do GeoGebra como ferramenta[30]– algo que usamos. Apesar de vários autores se referirem a ele dessa maneira, prefiro guiar-me pelos preceitos que o classificam como recurso – um meio –, e a Informática ainda como uma nova era na história dos meios de comunicação.

Em quinto lugar, portanto com as ideias que mais corroboram as minhas, cito a dissertação de Mestrado de Salin (2014), que objetivou investigar o papel dos Registros de Representação Semiótica na construção do conhecimento de funções afim e quadrática, assim como descobrir de que maneira o GeoGebra poderia ajudar no processo de aprendizagem de tais conteúdos matemáticos. Portanto, planejou, por meio da Engenharia Didática, aulas para alunos de uma turma de 1º ano do E.M. da Escola Estadual de Educação Básica Apeles Porto Alegre, em POA, RS, no ano de 2013.

Iniciou sua prática revisando propriedades de polígonos a partir de arquivos prontos do GeoGebra que os alunos deveriam manipular e perceber propriedades invariantes e medidas. Em seguida, a pesquisadora manipulou figuras geométricas não tão usuais relacionando algumas de suas variações com possíveis interpretações em formato de função, expondo tais procedimentos à Turma.

Focou, então, o estudo em resoluções de problemas que envolvessem Funções e Geometria com o auxílio do software. Este, por sua vez, possibilitava a visualização das manipulações - exigidas nas questões - das figuras iniciais descritas. Assim, delimitou diferentes momentos de resolução para cada um desses problemas: a introdução da resolução no papel; a manipulação de um arquivo respectivo ao problema pronto no GeoGebra; a análise desse arquivo juntamente com os dados destacados no papel; a definição das leis de formação das funções encontradas novamente no papel; e, então, a solução do problema a partir dela.

Também elaborou outra atividade em que os alunos deveriam pensar sobre o esboço de gráficos de funções e relatar tais pensamentos por escrito no papel; traçando-as, por fim, no software, para confirmar essas teorias redigidas. Este momento é o que a autora propõe as análises que mais diferem das objetivadas por mim, pois, ao contrário dela, não intento estudar transições entre representações de funções por meio da teoria de Múltiplas Representações de Duval. Apesar de algumas

[30] Argumento sobre essa interpretação no subcapítulo Contextualização Histórica a seguir.

das atividades do TA1 e do TA2 que planejei não necessitarem do software, apenas as coloco com o intuito de complementar o estudo de funções, e não de comparar formas de interpretação da mesma maneira que o autor. Além disso, para suportar esse aspecto, tento reformulá-las ou extingui-las durante a reescrita dos TAs, a qual abordo em minhas considerações finais.

Não obstante, a sequência didática proposta pela autora estimulou conjecturas geométricas por meio de manipulações dinâmicas que apenas são possíveis em ambientes de GD[31] como o GeoGebra, preconizando, dessa maneira, um pensamento com o software diferente dos possíveis sem ele, o qual enfatizo necessário em minha pesquisa. Entretanto, algumas dessas manipulações foram feitas pela professora Salin (2011), o que impediu que os alunos construíssem autonomamente conhecimentos subjetivos a partir dessas experimentações.

Quanto o requisitar auxílio do software para resolver problemas geométricos que poderiam ser interpretados como funções considero interessante. A partir desses problemas, ela conseguiu criar perguntas que remetiam experimentações com ele. Entretanto, esses problemas escolhidos não exigiam, necessariamente, um pensamento com o software, uma vez que eles poderiam ser resolvidos, mesmo que com a exigência de maior esforço mental, com recursos papel e caneta, pois haveria como tentar apenas imaginar, ou até esboçar, os possíveis movimentos das figuras dadas nos enunciados.

E todos os problemas requereram que “Com o auxílio das ferramentas ‘rastro’ e ‘Lugar Geométrico’ se obtivesse o gráfico que representa a função”. Esse gráfico, então, era traçado à medida que um ponto deixava seu rastro ao alterar seus valores de abscissa e ordenada em coordenação com a manipulação das figuras geométricas. Sendo esse o aspecto, entre todos os descritos nesse subcapítulo, que mais se assemelha aos quais proponho com o TA1 e com o TA2, visto que coordena o estudo de funções de 1º e de 2º grau com manipulações geométricas no GeoGebra – impossível de ser feito sem o computador.

Feitas todas essas argumentações sobre tais trabalhos correlatos à minha pesquisa, inicio a discorrer propriamente sobre minha fundamentação teórica escolhida.

[31] Ambientes de Geometria Dinâmica: os defino propriamente no subcapítulo A Educação Matemática e o Uso de Softwares.

3.2. CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA: a Matemática e a Tecnologia.

A utilização de diferentes instrumentos de trabalho altera a organização funcional, ou as características do sistema, das relações humanas com o trabalho, seja ele braçal ou intelectual. As ações necessárias para se cumprir uma determinada tarefa têm mudado. Ferramentas simbólicas, assim como a linguagem escrita, são instrumentos que redefinem a cultura e a natureza humana (PEA, 1987).

Historicamente, o desenvolvimento da Matemática sempre se associou, quase que de maneira mutualística, com o desenvolvimento de ferramentas ou recursos em geral. À vista disso, em 1996, Borba e Confrey criaram o termo "moldagem recíproca", a fim de caracterizar essa relação entre o saber e o uso de tecnologias, em particular as digitais. Relação em que o saber é construído por estudantes alicerçados em experiências que são viabilizadas, alteradas ou restritas pelo uso de tecnologias; e em que estas, por sua vez, enquanto utilizadas de maneira peculiar, adaptam e reformulam-se de acordo com as necessidades estudantis (BORBA, 2009).

Saber que, já segundo a perspectiva de Larrosa (2002, p.27), é propriamente definido como "saber da experiência", ou seja, como "[...] o que se adquire no modo como alguém vai respondendo ao que lhe vai acontecendo ao longo da vida e no modo como vamos dando sentido ao acontecer do que nos acontece". Nessa concepção, ele ainda define experiência pela expressão "isso que me passa", a qual sustenta-se em inúmeros princípios que enuncia; como o da Exterioridade, o da Subjetividade e o da Paixão[32] (LARROSA, 2011).

Tratando-se especificamente do saber matemático, podemos nos sustentar em Heugl (2004) e dizer que a tecnologia tem a capacidade de alterar a ênfase educacional do operar ao modelar e interpretar, suportando tanto o abstrato quanto o concreto e criando novos elementos de linguagem. Enquanto um dos três papéis principais da Matemática é subsidiar o pensamento tecnológico – os outros dois

---

[32] Não discutirei plenamente a concepção de experiência de Larrosa nesse trabalho. Ela será abordada apenas de maneira complementar à análise de alguns dados obtidos. Então, para ampliar os estudos a respeito dos Princípios enunciados pelo autor, você pode ler suas obras "Notas sobre a experiência e o saber de experiência" (2002), e "Experiência e alteridade em educação" (2011).

seriam: processar modelos abstratos, a fim de obter-se resultados concretos; e ser uma linguagem.

Para exemplificar essa correlação matemática/recursos, me abasteço de alguns fatos históricos. Tais como que os primeiros algoritmos matemáticos foram criados a partir da utilização de tábuas de cálculos por volta de 400 A.C., na Grécia. Também que o primeiro documento escrito sobre essas invenções trata do uso de um ábaco, tendo sido escrito pelo Papa Silvester II em 999. Assim como que a primeira "máquina" de cálculos foi construída por Wilhelm Schickhardts em 1623, cujo esboço foi encontrado em uma carta endereçada a J. Kepler (Heugl, 2004). E, ainda, que o primeiro computador, ou ENIAC (*Electronic Numerical Integrator And Computer*), criado no final da década de 1940 por pesquisadores norte-americanos a pedido do exército do País (MORENO, 2010), começou a tornar-se significante a nível do desenvolvimento matemático escolar e universitário no final na década de 1960 (BORBA, 1993).

Assim, o aparecimento da informática e sua propagação com os computadores e softwares pessoais a partir da década de 1980 e, fortemente, durante a década de 1990, catalisou discussões voltadas à concepção de múltiplas representações na educação matemática. Kieran e Yerushalmy (2004, apud BORBA, 2009) estudaram, por exemplo, como softwares podem alterar, de diferentes maneiras, o currículo de Matemática. Moreno, Hegedus e Kaput (2008) complementaram essa visão afirmando que

> A natureza dos símbolos matemáticos está evoluindo nos últimos anos de estáticas, inertes inscrições a objetos dinâmicos e a diagramas que são construtíveis, manipuláveis e interativos. Os aprendizes estão agora em uma posição de transformar sinais e símbolos matemáticos em objetos personalizadamente identificáveis (MORENO; HEGEDUS; KAPUT, 2008, p.103).

Todavia, a informática não deve ser vista apenas como uma ferramenta tecnológica relacionada ao saber, mas como uma nova era na história dos meios de comunicação. Lévy (1993) identifica três eras principais: oralidade, escrita e informática. Três diferentes maneiras de estender a memória, as quais modelam a sociedade e, portanto, seu conhecimento (BORBA, 2009). Ou seja, a chegada do computador ajudou a deixar claro o quanto o conhecimento produzido anteriormente à sua chegada era produto também das mídias disponíveis em um dado momento histórico (BORBA, 2002). Assim,

> Ela (a informática) é uma nova extensão da memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade e, imagens e comunicação instantânea (BORBA; PENTEADO, 2001, p.48).

3.3. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E OS SOFTWARES

Abordada a ideia da influência de recursos no desenvolvimento da Matemática historicamente, trago e correlaciono, então, a expressão “seres-humanos-com-mídias” (BORBA; VILLAREAL, 2005). Particularmente, considero que ela garante grande suporte aos meus principais objetivos com este Trabalho, pois sintetiza o fato do conhecimento ser produzido e alterado a partir de uma interminável relação entre humanos e tecnologias, ambos inseridos em um meio de comunicação e de cultura (BORBA, 1993). Mais especificamente, a interação entre recursos tecnológicos e o ser humano, os quais se moldam reciprocamente, possibilitando um "pensar-com" intrínseco ao processo de produção de conhecimento (BASSO; NOTARE, 2015).

O estudo de funções, por exemplo, que se dava quase que exclusivamente via Álgebra até a década de 1990, segundo Borba e Penteado (2001), começou a ser questionado por pesquisadores tais como Borba e Confrey (1996), Borba (1995), Kaput (1987), Eisenberg e Dreyfus (1991), Goldenberg e Kliman (1990), que defendiam o estudo relacional entre diferentes representações para uma função: expressão algébrica, gráfico e tabela. Esses questionamentos foram impulsionados pela propagação das mídias computacionais que suportavam e traduziam uma representação em outra.

Um exemplo que enfatiza a relação sistemática da representação gráfica com a algébrica pode ser encontrado em Borba e Penteado (2001), que apresenta atividades desenvolvidas em 1998 com alunos da disciplina de Matemática Aplicada do primeiro ano de um curso de graduação em Biologia, em que são estudados conteúdos matemáticos relativos a funções e uma introdução a conceitos de derivada e integral. Esses alunos investigaram como os coeficientes numéricos a, b e c de funções quadráticas do tipo $y = ax^2 + bx + c$, influenciavam sua representação gráfica. Para isso, eles experimentaram com a calculadora gráfica, escreveram e debateram conjecturas. Uma das alunas, então, propôs que

> “quando ‘b’ é maior que zero, a parábola vai cortar o eixo y com sua parte crescente, quando ‘b’ for maior que zero. Quando ‘b’ for menor que zero, ela vai cortar o ‘y’ com sua parte decrescente (a aluna faz gestos tentando desenhar com a mão no ar o que disse” (BORBA; PENTEADO 2001, p.38).

A afirmação é verdadeira e trata de a posição do vértice da parábola relacionar-se com a noção de derivada. Além de exata, ela pode ser entendida como produto de uma abordagem experimental-com-tecnologias, que exemplifica o termo seres-humanos-com-mídias, pois, uma vez que o pensamento associou-se à oralidade, à escrita e ao objeto digital, o tipo de Matemática que pôde ser abordada em sala de aula transformou-se. Impulsionando, assim, a formulação de conjecturas e de diferentes interpretações e representações de conceitos por parte dos alunos que, durante tanto tempo, eram abordados, quase que exclusivamente, de maneira algébrica e não ativa (BORBA; PENTEADO, p.38).

Estudos “experimentais-com-tecnologias” são vistos em Borba e Penteado (2001) como aqueles que se baseiam em atividades cuja ênfase seja a experimentação. Nessa perspectiva, as mídias digitais configuram um meio que permite a exploração de problemas matemáticos abertos com uso da informática, ou seja, experiências científicas discentes. Meio que poderia ser analisado como um laboratório escolar de Matemática semelhante a um laboratório escolar de química ou de biologia, em que também se constrói conhecimento a partir de experiências.

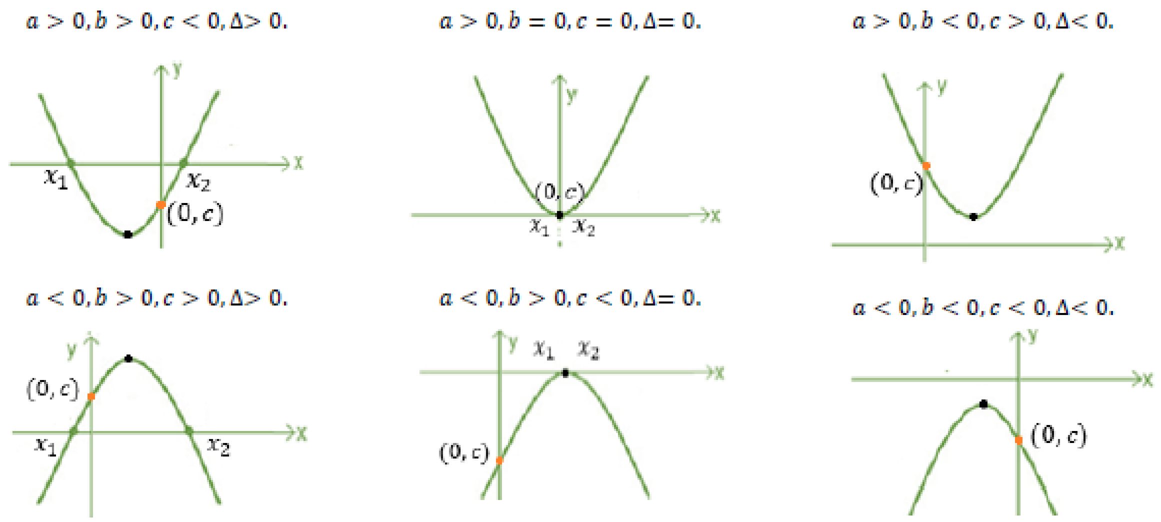
O trecho explicativo retratado na Figura 25, compõe o material disponibilizado em um polígrafo de Matemática que confeccionei no início do ano de 2016 para meus alunos de 9º ano, os mesmos que constituem minha unidade-caso nessa pesquisa. Ele expõe a conclusão da aluna de Biologia do exemplo anterior a respeito da variação de b implicar em alterações gráficas específicas. Comparando aulas, uma com a utilização da calculadora gráfica citada, outra sem e apenas expositiva, com base nesse material de apoio, tornam-se notáveis diferenças relacionadas tanto à abordagem quanto ao estímulo dado ao estudo de um mesmo conteúdo matemático.

Figura 25 - Polígrafo de Matemática – parâmetros das funções de 2º grau.

de Funções de 2° Grau: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo x_1, x_2 suas raízes.

sinal	a	b	c (termo independente)	Δ
>0	- função convexa; - concavidade voltada para cima; - possui ponto de mínimo.	ao passar pelo ponto $P(0, c)$, a função é crescente.	ponto P de intersecção com o eixo y a cima do eixo x; $P = (0, c)$.	- $x_1 \neq x_2$ - $\{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}$. - dois pontos de intersecção com o eixo x: $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$
<0	- função côncava; - concavidade voltada para baixo; - possui ponto de máximo.	ao passar pelo ponto $P(0, c)$, a função é decrescente.	ponto P de intersecção com o eixo y abaixo do eixo x. $P = (0, c)$.	- $x_1 \neq x_2$ - $\{x_1, x_2\} \notin \mathbb{R}$ - nenhum ponto de intersecção com o eixo x: $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.
=0	não é uma função de 2º Grau.	ao passar pelo ponto $P(0, c)$, a função é constante.	ponto P de intersecção com o eixo y na origem. $P = (0, c) = (0,0)$.	- $x_1 = x_2$ - $\{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}$ - um ponto de tangência com o eixo x: $(x_1, 0) = (x_2, 0)$; - $(x_1, 0) = (x_2, 0) = vértice$.

Exemplos:



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

O material impresso é um esquema acompanhado de exemplos abstratos de gráficos que ditam comportamentos atrelados a variações numéricas dos coeficientes reais $a, b,$ e c de uma função quadrática qualquer que pode ser representada algebricamente pela lei de formação $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. O estudo amparado nele é uma maneira plausível de apropriar-se de conhecimentos matemáticos a respeito de funções, inclusive é equivalente à maneira que, há muito tempo, os estudos vêm sendo desenvolvidos na Escola. Essa tecnologia, entretanto, não foi projetada com o intuito de estimular a produção autônoma de conhecimento por parte dos alunos, mas com o de organizar e apresentar informações, assim como o de se estabelecer como um recurso de extensão da memória. É quimérica, entretanto, a tentativa de se esquematizar a coordenação entre todas as possíveis alterações algébricas e gráficas que se pode realizar com a disponibilidade de um recurso computacional se optar por interagir apenas com o recurso papel-tinta para isso; nesta interação, a vicissitude de experimentações é substituída por apropriações teóricas. Isto é, uma tecnologia não desqualifica a outra, porém a primeira tende a priorizar a experiência como fundamento à construção de conhecimento, a segunda, o estudo passivo de experiências já realizadas, retratadas e explicadas. Assim, esse foco na experimentação com a calculadora exemplifica a reorganização do processo de produção de conhecimento matemático tradicional.

Borba e Penteado (2001) evidenciam, por conseguinte, a importância da conquista de espaço do aluno como cientista de seu próprio conhecimento:

> [...] a escola, sobretudo a sala de aula, não é fonte exclusiva de informações para os alunos. Atualmente as informações podem ser obtidas nos mais variados lugares. Porém sabemos que a informação não é tudo, é preciso um espaço no qual elas sejam organizadas e discutidas. A escola pode ser esse tal espaço. Um espaço pensado como se fosse uma "mesa" onde alunos e professores se sentam para compartilhar as diferentes informações e experiências vividas, gerar e disseminar novos conhecimentos. O professor pode vir a perceber que cabe a ele compartilhar com seus alunos a responsabilidade pela organização dessa mesa de modo a constituí-la num ambiente de aprendizagem e geração de novos conhecimentos (BORBA; PENTEADO, 2001, p.65).

À vista do que foi dito, tecnologias cognitivas, como posso chamar o pensar-com papel-tinta (ou papel-caneta, ou papel-lápis) e o pensar-com computador, têm a capacidade de auxiliar a transcendência das limitações da mente ao pensar, aprender e resolver problemas (PEA, 1987) e, segundo Borba (2002), também de modificar de maneira qualitativa o agente do conhecimento.

Dessa maneira, em associação aos recursos digitais, os alunos podem realizar investigações que, associadas à intervenção do professor, tendem a favorecer a abstração conceitual de conteúdos matemáticos. Assim como o uso de novas tecnologias associadas às antigas, que não são menos importantes, permite o desenvolvimento de conhecimentos substancialmente diferentes daqueles recentemente possíveis em sala de aula (BORBA, 2001).

Atrelado a esse âmbito investigador do pensar, há a Geometria Dinâmica, a qual não é um ramo da Geometria, mas sim um termo que, inicialmente, foi utilizado por Nick Jackiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc*. com o objetivo de definir um tipo de software geométrico e distingui-lo dos demais (ALVES; SOARES, 2003). Assim, quando me refiro à Geometria Dinâmica, considero qualquer ambiente digital interativo que permita a construção ou manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades.

Um ambiente de Geometria Dinâmica, portanto, fornece o poder de manipular diretamente uma construção geométrica por meio de seus componentes – lados, vértices, faces, área, volume etc. –, permitindo a visualização de conceitos geométricos a partir das propriedades invariantes dessas construções. Ou seja, “A afirmação de uma propriedade geométrica torna-se, neste novo campo de experimentação, a descrição de um fenômeno geométrico acessível à observação” (BASSO; NOTARE, 2015). E assim,

> O ambiente de GD constitui-se como um espaço em que os alunos podem tornar possíveis suas ideias informais, para dar início a um processo de coordenação com ideias mais formalizadas sobre um determinado assunto (BASSO; NOTARE, 2015, p.05).

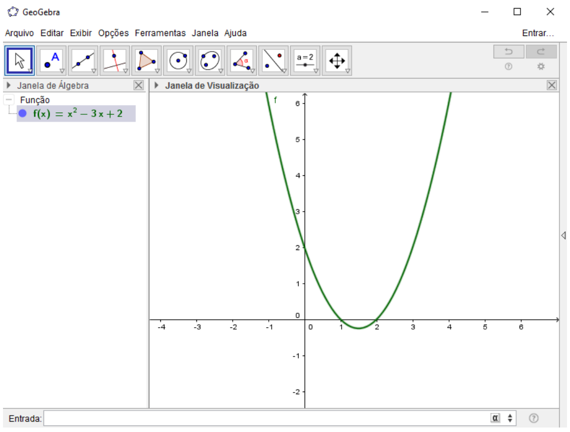
Decido, portanto, por interagir diretamente com a Geometria Dinâmica, pois suas potencialidades favorecem a constituição do trabalho ao qual me refiro no título desse TCC: o estudo de funções polinomiais de 1º e de 2º grau em coordenação com manipulações geométricas dinâmicas. Com o qual defendo a prática, em sala de aula, das teorias que discuto nesse capítulo.

Isto posto, defendo que o estudo com um software gráfico de Geometria Dinâmica para se trabalhar funções em aulas de Matemática é moderno – “A tecnologia não existe sem os homens, e a noção de homem comumente sustentada, pelo menos na história moderna, tampouco existe sem a tecnologia” (BORBA, 2009, p.457) –; humanamente importante – as interações possibilitadas pelo uso de “computadores pessoais e interfaces assim como os teclados, o mouse, as telas, [...] e aquelas possibilitadas pela Internet mudaram a natureza da comunicação e a própria noção do que significa ser humano” (BORBA, 2009, p.457) –; e atual – acompanha as transformações no processo de aprendizagem em uma era informatizada.

Por outro lado, é importante observar que algumas experimentações matemáticas que podem ser realizadas em alguns softwares de GD ainda se assemelham muito com aquelas possíveis com uma calculadora gráfica, assim como as planejadas por Moraes (2013), em seu TCC, para serem feitas com o computador em comparação às executadas pelos alunos de Biologia (BORBA, 2001) realizadas em calculadoras. Ou seja, apesar desses programas implicarem uma pluralidade de experimentações e conjecturas praticáveis, ainda não exemplificam propriamente uma situação geométrica dinâmica de aprendizado.

Ilustrando essa observação, posso citar exercícios matemáticos tais como “trace o gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$” (BORBA, 2009). Para solucioná-lo, digamos com o software GeoGebra, apenas preciso escrever a respectiva lei de formação no campo “Entrada” e esperar que o software o trace, assim como na Figura 26.

Figura 26 - GeoGebra, gráfico da função f(x)=x^2-5x+6.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Por outro lado, esse tipo de exercício também exemplifica outro aspecto interessante relacionado aos ambientes digitais: seu enunciado deixa de ser um problema, pois não preciso raciocinar logicamente para solucionar o que se pede: traçar o respectivo gráfico. Logo, posso afirmar que a própria noção de problema depende da mídia disponível (BORBA, 2009, p.458).

Entretanto, apesar de alguns problemas matemáticos renunciarem seu título de problema literal quando inseridos em um meio tecnológico digital, novos problemas são passíveis a serem formulados e solucionados. E esse fato, o de criar novos problemas, em minha opinião, é o que me encaminha a discutir uma das ideias que considero mais urgentes da educação matemática atual: o criar deve roubar a cena do solucionar. Assim como Borba (2002) coloca ao afirmar que

> Hoje é bem mais importante saber gerar um problema, delimitá-lo para que possa ser resolvido, do que saber uma técnica que resolva todos os problemas de uma dada classe de problemas matemáticos, por exemplo. Há inúmeras páginas na Internet e livros com soluções prontas para questões já identificadas. A parte importante é que esses sistemas seres humanos-mídias sejam capazes de identificar soluções para problemas triviais (já armazenadas em bancos de dados) e principalmente identificar problemas, e, por meio de reflexões e simulação, buscar alternativas para eles (BORBA, 2002, p. 152).

No exemplo inicial deste subcapítulo, relacionado ao estudo dos coeficientes de uma função de 2º grau, a aluna citada realizou uma conjectura matemática verdadeira. E, para a formulação de qualquer conjectura, precisamos, primeiramente, ter formulado uma pergunta – “Quando alteramos o valor numérico do coeficiente b, o que acontece com a representação gráfica da função?”. Consigo, então, enquadrá-la nessa perspectiva de um ensino que estimula a criação de perguntas matemáticas que apenas podem ser solucionadas *a priori* – antes de conhecer suas propriedades, definições, teoremas etc. (sem qualquer fundamentação teórica) – por meio de mídias digitais, com as quais experimento.

Também é possível relacionar essa abordagem criativa da educação matemática às demandas do mercado de trabalho brasileiro. Desde o início do século XXI, empresários brasileiros consideram essencial a modernização tecnológica da Escola para a formação dos futuros trabalhadores (BORBA, 2002). Esse interesse, contudo, não se refere apenas à capacitação técnica relacionada à informática, mas à possível capacitação intelectual plurificada. Ambição relativa à contratação de indivíduos cujos pensamentos associam-se harmonicamente com a Informática, a qual reorganiza estes, mas não os substitui ou assume papel mais importante. Ou seja, no cenário em que o computador subsidia o processamento de informações sendo capaz de armazenar, organizar, dividir, relacionar e manipular pensamentos por meio de inúmeros recursos e softwares (BORBA, 2009). Conforme Gravina e Santarosa (1998, p.01), “No contexto da Matemática, a aprendizagem nessa perspectiva depende de ações que caracterizam o ‘fazer matemática’: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar”.

É importante lembrar ainda que a ideia de seres-humanos-com-mídias pode ser entendida como uma concepção de ação-reação. Logo, tendo em vista que já apresentei, expliquei e exemplifiquei a ação do recurso digital sobre o pensar Matemática na Escola, ainda me cabe comentar sobre a reação deste naquela; ou seja, a respeito da ação do pensar Matemática (na Escola) sobre o recurso digital. Isso posto, é adequado que caracterize essa reação como as transformações ou os aprimoramentos da tecnologia quando ela é posta em interação com a educação matemática. Pois, nesse processo, ela é qualificada e, então, adequada a específicas necessidades educacionais (BORBA, 2009). Um bom exemplo resultante desse processo é a constante atualização de softwares matemáticos em novas versões. O que completa, então, o ciclo citado, o qual favorece tanto o desenvolvimento tecnológico quanto a educação matemática.

3.4. A APRENDIZAGEM DINÂMICA E O GEOGEBRA

Concordo com a afirmação de Gravina e Santarosa (1998), de que “Em ambientes com recursos estáticos, o significante matemático geralmente traduz-se em um conjunto de símbolos e palavras ou desenhos a ser memorizado”. E com Pea (1987, p.89), que cita Schoenfeld (1985, p.02): “Você entende como pensar matematicamente quando possui recursos, flexibilidade e eficiência em sua habilidade de lidar com novos problemas matemáticos”. Assim, uma maneira eficaz de potencializar e despertar modos criativos e eficazes de resolver problemas em e com Matemática, seria a utilização de softwares dinâmicos (BASSO; NOTARE, 2015).

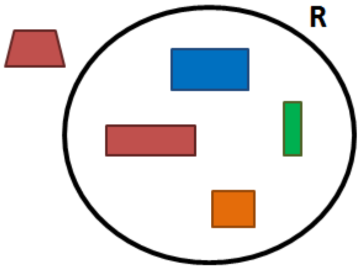
Dessa maneira, entendo que seja importante discutir brevemente a relação entre a construção de modelos e o pensar matemático antes de relacioná-los com a aprendizagem dinâmica. Segundo Ogborn (1997),

> Quando se constroem modelos começa-se a pensar matematicamente. A análise de um modelo matemático pode levar à compreensão de conceitos profundos, como, por exemplo, a noção fundamental de taxa de variação [...]. A criação de modelos é o início do pensamento puramente teórico sobre o funcionamento das coisas (OGBORN, 1997 apud GRAVINA; SANTAROSA, 1998).

A criação de um modelo, todavia, depende de perspectivas genéricas que moldam e representam concepções integrais e mutáveis. Ou seja, depende da abstração do que é intrínseco e singular, o que diferencia um conceito de todos os outros; e ainda do que é moldável e adaptável, o que possibilita diferentes casos particulares estarem contidos em um mesmo conjunto de elementos definidos.

Por exemplo, seja R o conjunto de todos os retângulos. Para um polígono pertencer a R, portanto, precisaria ter quatro lados e quatro ângulos retos. Logo, polígonos rosa, azuis, verdes e laranja de quatro lados e quatro ângulos retos pertencem a R. Assim como polígonos com diferentes medidas para seus dois pares de lados congruentes desde que com quatro ângulos retos também pertencem a R. Nesse caso particular, a definição de retângulo é intrínseca; e o que é moldável e adaptável são as cores e o tamanho dos pares de lados congruentes. Dessa maneira, apesar de um dos polígonos possuir a mesma quantidade de lados e a mesma cor que um dos outros que pertencem ao conjunto R, ele não possui todas as propriedades necessárias para ser um modelo de retângulo (não possui 4 ângulos retos) (Fig. 27).

Figura 27 - Conjunto R.

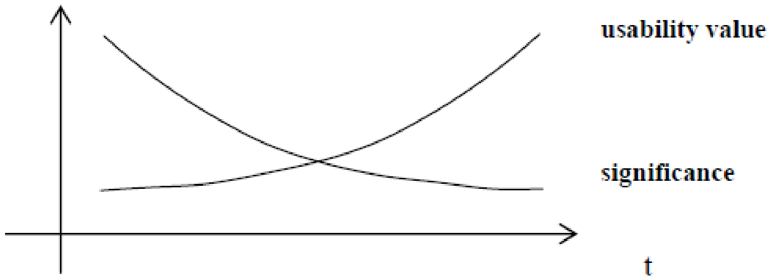


Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Por conseguinte, para podermos afirmar, com fundamentação matemática, apenas analisando a figura, que todos os retângulos do conjunto R são modelos de retângulos, ou mais especificamente, que o retângulo verde imutável é um modelo de retângulo, precisamos partir de sua definição formal (que define R). E mais, para apresentarmos domínio no entendimento do que estamos afirmando, precisamos ainda saber reconhecer quando outro polígono qualquer é ou não um retângulo. Logo, apesar de o poder da Matemática ser o poder da concretização (HEUGL 2004), não é um processo simples aquele em que se é dada uma definição e então se é pedido que se entenda e se generalize um modelo por meio de exemplos estáticos, como os da Figura 27.

Assim, de acordo com Heugl (2004), com a utilização de softwares dinâmicos podemos iniciar a construção de um conhecimento acerca de modelos representando, primeiramente, sua forma final. Nesse processo, que o autor chama de trivialização da abstração de um conhecimento, o grau de consciência (significância) do valor do conhecimento diminui, contudo, o grau de usabilidade tende a aumentar. E, apesar de que, assim como no começo de um processo científico, em particular matemático, o valor do conhecimento seja muito importante, ele geralmente não possui valor utilitário. O processo de trivialização da ciência implica, então, em um decrescimento da importância do primeiro e em um consequente aumento da importância do segundo (HEUGL, 2004), como ilustra a Figura 28.

Figura 28 - Graus de usabilidade e de significância.



Fonte: Heugl, 2004, p.05.

Portanto, novamente no caso do exemplo dos polígonos, utilizando um software de Geometria Dinâmica, a trivialização da abstração do conhecimento sobre retângulos ocorreria ao se iniciar o processo trabalhando com a manipulação de um modelo do polígono (seja o verde) do qual já fui informada de que representa um retângulo, mas não por quê (o conjunto R não seria definido, apenas exposto). Dessa maneira, o decréscimo no valor da consciência do significado estaria relacionado à possibilidade de manipular e utilizar esse retângulo verde antes mesmo de ter consciência da definição formal de tal objeto. Portanto, o aumento no valor utilitário poderia se relacionar à possibilidade de me tornar apta a alterá-lo ou utilizá-lo na criação de outros objetos antes de conjecturar todas suas propriedades.

Em consequência, a partir dessas manipulações, tenderia à construção pessoal de um entendimento do que o define como retângulo e o que não o define como tal, percebendo suas constâncias e inconstâncias. Tornando-me capaz de formalizar a definição de retângulo e, por conseguinte, de construir outros modelos.

Fundamentada por todos esses levantamentos de dados teóricos, portanto, interesso-me pela utilização do software de Geometria Dinâmica GeoGebra[33] para continuar desenvolvendo minha pesquisa e pensar-com ele nas atividades práticas que descreverei e analisarei nos próximos capítulos. Com o GeoGebra, pude gerar representações animadas de modelos, que se transmutam à medida que as manipulo e analiso respectivas relações existentes entre variáveis definidas. Nele, também me tornei hábil a construir, com rapidez e rigor de detalhes, gráficos passíveis a deformações e comparações; assim como a explorar valores antes de ou até sem calculá-los algebricamente. Ao utilizá-lo, portanto, viabilizei uma maneira de abstrair um conteúdo matemático intrinsecamente dinâmico.

[33] Descrito no capítulo Metodologia, subcapítulo Proposta de Trabalho.

Posta minha escolha, trato do estudo de funções associado a transformações geométricas no GeoGebra, especificamente. Estudo matemático cuja associação à mídia digital estende-se ainda à possibilidade de ações sobre objetos físicos transpostos ao ambiente digital. Vantajosa em relação à manipulação concreta, por ser mais rápida em realizar um grande número de experimentos, (GRAVINA; SANTAROSA, 1998) e eficaz em não alterar o objeto modelo.

Assim,

> As ações, reflexões e abstrações dos alunos em ambientes informatizados contribuem para a superação de obstáculos presentes na construção de conhecimento matemático e para o aceleramento do processo de apropriação de conhecimento (GRAVINA; SANTAROSA, 1998).

Ou seja, opto por um meio interativo de aprendizagem que geralmente não frustra o aluno na jornada do entender. Opção que influiu resultados que abordo a seguir.

4. RESULTADOS

No presente capítulo, com o respaldo da fundamentação teórica abordada, apresentarei e analisarei os resultados obtidos a partir do desenvolvimento, com a turma 9AH, do Trabalho Avaliativo (parte 1) (Fig. 29), do Trabalho Avaliativo (parte 2) e do questionário escrito, que é formado por nove questões, e cujas respostas para as de número 1 a 5 já foram apresentadas no capítulo Metodologia para complementar a descrição do perfil da unidade-caso. Explorações que propiciarão ênfase aos dados que se relacionam diretamente com foco principal de minha pesquisa: “Quais são possibilidades ao se utilizar o software GeoGebra para trabalhar o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau de modo a torná-lo um recurso para "pensar-com" no processo de produção de conhecimento?”.

Portanto, algumas questões de interpretação estritamente algébrica ou geométrica, tanto do TA1 quanto do TA2, que foram solucionadas pelos alunos sem interação com o recurso digital disponibilizado, ou seja, por meio de pensamentos que interagiram apenas com o recurso papel-caneta, não serão destacadas. Apesar de muitas destas propiciarem outras interessantes abordagens discutíveis teoricamente no âmbito da educação matemática, fogem àquelas pelas quais estou interessada nessa pesquisa.

Figura 29 - TA1, professora-pesquisadora e 9AH no Lab. de Informática.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Em concordância ao planejamento, ambas as atividades avaliativas se ambientaram na Sala de Informática do Colégio. Na primeira aula, combinei com os alunos, e continuei lembrando-lhes nas aulas seguintes, que estava vetado o acesso a qualquer rede social ou site não relacionado ao objeto de estudo matemático que seria proposto. Caso desrespeitassem esse acordo, seriam retirados do Laboratório e seriam impedidos de continuar a realização do trabalho, que correspondia, em sua totalidade, a cinco por cento da nota final do segundo trimestre na disciplina de Matemática. Apenas uma dupla de alunos tentou burlar o estabelecido, porém, após conversar com ambos uma vez, não tentaram se desviar do Trabalho novamente, logo não precisei excluir alguém de sua realização.

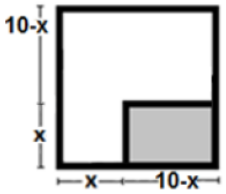
Ainda assim, duas alunas, durante o decorrer do TA2, perderam toda a construção realizada por elas no GeoGebra, pois a fiação de um dos cabos de força conectados ao computador estava com mal contato, o que fez este desligar antes que conseguissem salvar seu documento. Como haviam demorado quase dois períodos apenas para finalizar essa etapa inicial do Trabalho, a qual é essencial para que pudessem solucionar as questões que vinham em sequência; somado ao fato de que cada uma de nossas idas à Informática poderiam ser de, no máximo, dois períodos por dia, por motivos de organização de grade horária escolar, instruí-las que criassem um novo arquivo do GeoGebra em casa, o que fizeram no prazo combinado.

Saliento, então, que esses períodos de aula, na Sala de Informática, não foram subsequentes, pois, ao finalizamos o TA1, revisamos o conteúdo de funções de 1º grau em aulas expositivas e de exercícios em sala de aula, corrigi os TA1 entregues, e discutimos essa correção.

Então, depois de todo esse processo, prosseguimos com o TA2. Após sua conclusão, realizamos uma análise formal dos conceitos concernentes a funções de 2º grau, os quais foram abordados em aula, pela primeira vez, a partir de suas questões. Essa análise propiciada por uma aula expositiva-participativa com o auxílio do projetor para realizar referências ao TA2. Procedemos, então, de maneira análoga à complementação do estudo de funções de 1º grau citada. Por fim realizamos uma Prova Parcial escrita a respeito de funções de 1º e de 2º grau, assim como uma Trimestral com esse conteúdo e mais o de Inequações. Corrigimos ambas, posteriormente, com o recurso quadro-giz em sala de aula. Todas essas atividades foram dotadas de conexões; planejei tanto a Prova Parcial quanto a Trimestral (Fig. 30), por exemplo, trazendo alguns problemas relacionados à coordenação entre Funções e Geometria, os quais poderiam ser solucionados com embasamento nos raciocínios desenvolvidos por meio das manipulações digitais durante o TA1 e o TA2.

Figura 30 - Prova Trimestral, questões 19 e 20.

Instrução 3: As questões **19** e **20** são referentes à seguinte problematização.
Os lados e, consequentemente, a área do retângulo cinza inscrito no quadrado branco abaixo estão em função do tamanho de x.



19) A lei de formação que representa a área do retângulo CINZA r em função de x é
(A) $r(x) = 10 - x$.
(B) $r(x) = x^2$.
(C) $r(x) = (10 - x)x$.
(D) $r(x) = 10x$.
(E) $r(x) = (10 - x)^2$.

20) O maior valor possível para a área do retângulo CINZA será
(A) 0. (C) 10. (E) 100.
(B) 5. (D) 25.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Em similitude a esse progresso associado ao estudo de funções de 2º grau, minhas compreensões teóricas formais a respeito da prática docente que realizei se estabeleceram posteriormente à aquisição dos resultados obtidos por meio delas, isto é, primeiro criei e experienciei com a 9AH os trabalhos avaliativos, para então aprofundar-me mais nas teorias que são explanadas no capítulo Fundamentação Teórica. Portanto, a ideia de mudança de foco da educação matemática do solucionar para o criar (BORBA, 2002) e expressões tais como “seres-humanos-com-mídias”, (BORBA; VILLAREAL, 2005) e estudo “experimental-com-tecnologias” (BORBA; PENTEADO, 2001), assim como suas definições, tornaram minhas percepções sobre o que propus, ou o que mais poderia ter proposto, mais claras e críticas. Dessa forma, farei a apresentação dos dados nesse capítulo de maneira a ilustrar e evidenciar tais perspectivas.

À vista disso, afirmo com antecedência, que podemos classificar como investigativa a abordagem de estudo desenvolvido durante o progresso do TA1 e do TA2, para poder, corroborada por Borba (2001), evidenciar que a associação da intervenção do professor a esse tipo de estudo é essencial para que ocorra abstração de conceitos matemáticos corretos a partir da confirmação de soluções e conjecturas passíveis de serem formuladas pelos alunos. Aspecto do qual não tinha conhecimento formal, mas que já ponderava, baseada em outras experiências escolares, na época que planejei os trabalhos. Contudo, essas intervenções foram requisitadas pelos alunos com maior frequência do que imaginara, o que implicou que ficassem, muitas vezes, me esperando ajudá-los para, então, prosseguir com as questões. Ou seja, houve a necessidade de desprendermos de nossas aulas cinco períodos – de $50min$ cada – para a realização da primeira parte, e seis para a realização da segunda, sendo que, inicialmente, havia planejado uma duração de quatro períodos para o desenvolvimento de cada um deles. Excedência de prazo que se tornou necessária para que todos os alunos conseguissem finalizar em aula ambos os trabalhos.

Já o questionário, que sempre esteve inserido no projeto de pesquisa, foi respondido pelos alunos na sala de aula da turma – com a exceção de alguns, que o preferiram responder em casa – três meses após a conclusão dos trabalhos. Ele serviu de complementação às minhas análises e descrição da 9AH. E o tempo de intervalo entre essas atividades (TAs e questionário) tornou-se benéfico no âmbito de me possibilitar pesquisar o quanto os alunos ainda se lembravam do que tinham feito em associação ao software um trimestre no passado. Ou seja, os dados coletados por meio dele tornaram passível meu entendimento de quais raciocínios discentes, desenvolvidos a partir da interação com a mídia digital, foram internalizadas não apenas temporariamente, isto é, quais deles realmente se tornaram saberes de experiências (LARROSA, 2002) e que, consequentemente, poderão servir-lhes como método ou fundamentação para a solução de outros problemas relacionados a funções no futuro.

4.1. TRABALHO AVALIATIVO (PARTE 1)[34]

Os alunos, inicialmente, demonstraram acentuada dependência e insegurança com a tentativa que propus de compartilhar a responsabilidade de organização e de construção de conhecimentos matemáticos por meio de um estudo que interagisse com recursos digitais. Logo no início do TA1, por exemplo, a aluna 1[35], que estava fazendo seu Trabalho sozinha, referindo-se à questão 1) a[36], me chamou para requisitar “Me dá a resposta, na moral, sora. A gente não estudou isso. Como é que a gente vai saber, sora?”. Nesse momento, ela estava com a tela análoga à apresentada na Figura 31 em seu computador.

[34] Apelidado de TA1.
[35] Para não citar o nome específico dos alunos donos das citações que serão utilizadas, atribuí uma numeração pessoal para cada um deles.
[36] TA1, “1) [...] a) o que é um quadrado? Por que o quadrado do arquivo, mesmo depois de ser manipulado, continua sendo um quadrado?”

Figura 31 - TA1, simulação da tela aluna 1.

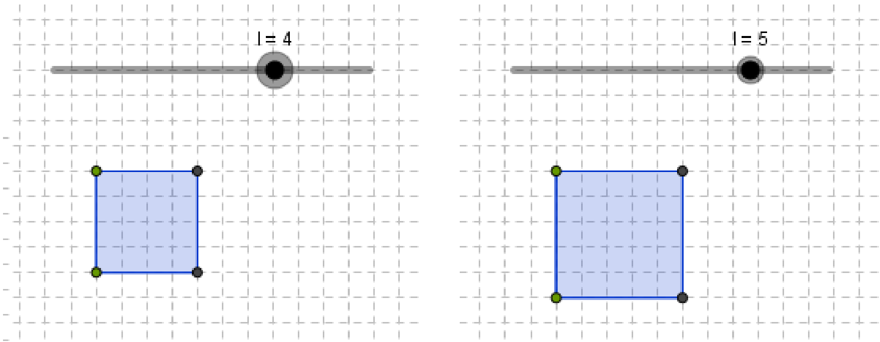
Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

O fato de ela dizer-me que não haviam estudado o conteúdo abordado na questão deve-se ao fato de Geometria Plana não ser um dos conteúdos programáticos do 9º ano e também ao de nunca antes ter se deparado com uma pergunta como esta. Inclusive, em seu questionário, respondeu, na questão 4, que ainda não havia trabalhado com o GeoGebra antes desta aula, logo, dificilmente haveria como já ter pensado que uma maneira de entender as propriedades e a definição de quadrados seria manipulando um modelo de quadrado e percebendo quais dos seus aspectos sempre permaneciam imutáveis. Forma de estudo baseada no experimentar ao manipular tecnologicamente, de diversas maneiras, o polígono, que exemplifica o que Borba e Penteado (2001) definem por estudo experimental-com-tecnologias. Logo, a reinvindicação da aluna ainda é subsidiada pelo fato de que adentrar em uma proposta experimentativa de construção de conhecimentos matemáticos significa adentrar em processo árduo, uma vez que se habituaram, na Escola, a uma metodologia mais passiva e tradicional de exposição de conteúdo.

Posso também já notar, consequentemente, o esbarramento com a elaboração de um tipo novo de problema, um problema que não poderia ser solucionado autonomamente por um aluno que apenas pensa-com recursos papel-caneta, pois eles não viabilizam manipulações em polígonos que conservem suas propriedades. Posto que, mesmo que faça vários desenhos, com uma caneta em um papel, ilustrativos à animação que é possibilitada no GeoGebra, seria meu braço que faria com que as características que classificam um polígono específico, por exemplo um quadrado, permanecessem ou não como propriedades constantes. Isso significa que apenas haveria como eu desenhar vários quadrados a fim de notar o que permanece e o que não permanece imutável se já tivesse noções anteriores a respeito desses aspectos. Ou seja, teria que já conhecer essas propriedades para então percebê-las pela primeira vez com desenhos no papel, o que é uma contradição que prova ser impossível tal prática sem a mídia digital.

Orientei a aluna 1, então, que continuasse manipulando a figura do quadrado por meio dos pontos verdes (vértices) e do controle deslizante. Então perguntei-lhe “[...] por que que[37] ele continua sendo um quadrado quando eu altero o tamanho do lado dele?”. “Porque todos os lados vão continuar iguais também. Tipo, se tu alterar o lado pra... ele tá quatro e tu alterar pra cinco, todos eles vão ter cinco e tu vai fechar o quadrado também” – respondeu-me, ajustando paralelamente os lados do quadrado com as linhas da malha quadriculada para que conseguisse medir cada um de seus lados, e manipulando o controle deslizante do número 4 para o 5 como na Figura 32.

Figura 32 - TA1, controle deslizante e lados do quadrado.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

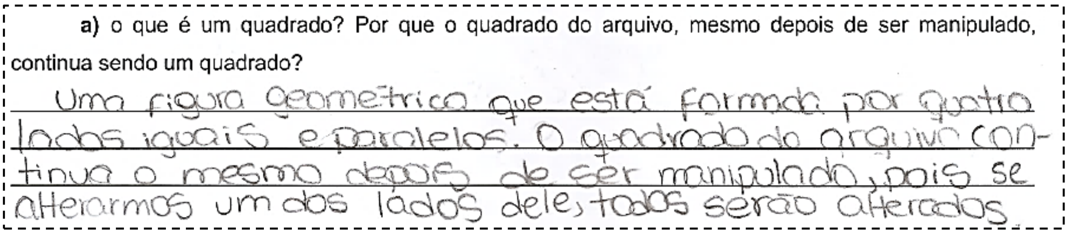
Concordei com o exemplo que me citou e mostrou, e, então, a instiguei a continuar pensado que outros aspectos, além de sempre permanecer com todos os lados de mesma medida entre si, permaneciam inalterados ao manipularmos a figura com o software. Lembrou-se, imediatamente, de que um quadrado também sempre possui 4 ângulos retos; manipulou o polígono para verificar se o arquivo também os mantinha constantes. Percebeu que sim e confirmou essa conjectura comigo. Dessa forma, a primeira tentativa de argumentação matemática da aluna nessa aula aconteceu por meio de exemplos relacionados à experimentação que evidenciava uma peculiaridade do ser quadrado. Entretanto, a complementação desta, ao abordar a análise dos ângulos, ancorou-se em um conhecimento já construído e que apenas

[37] Em várias falas transcritas minhas, cometo o vício de linguagem de pronunciar duas vezes seguidas a palavra “que”.

foi confirmado. Logo, considero importante evidenciar que o sucesso em relação às experimentações terem provocado a formulação de conjecturas corretas, nesse exemplo, foi também influenciado por um pré-conhecimento que a aluna já havia sobre Geometria Plana.

A última dificuldade relatada por ela foi que “[...] não tem como eu explicar isso em palavras, sora!”. “Mas tu acabou de falar!”, disse a ela. “Ok, sora. Obrigada, sora”. Ao corrigir seu trabalho, entretanto, pude perceber que se esqueceu de evidenciar a discussão sobre os ângulos retos (Fig. 33).

Figura 33 - TA1, questão 1) a: resposta aluna 1.

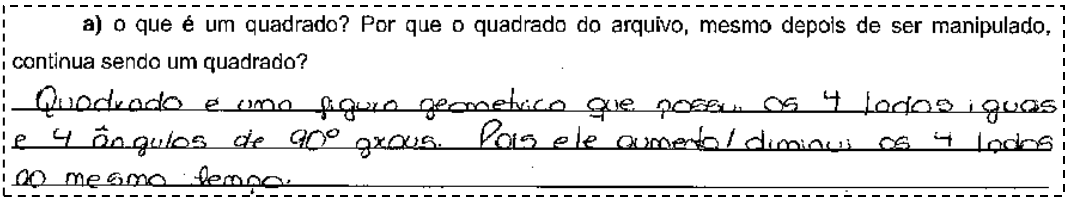

a) o que é um quadrado? Por que o quadrado do arquivo, mesmo depois de ser manipulado, continua sendo um quadrado?

Uma figura geometrica que está formada por quatro lados iguais e paralelos. O quadrado do arquivo con-tinua o mesmo depois de ser manipulado, pois se alterarmos um dos lados dele, todos serão alterados

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Uma das respostas mais interessantes (Fig. 34) que encontrei durante a correção dessa questão foi a das alunas 2 e 3.

Figura 34 - TA1, questão 1) a: resposta alunas 2 e 3.


a) o que é um quadrado? Por que o quadrado do arquivo, mesmo depois de ser manipulado, continua sendo um quadrado?

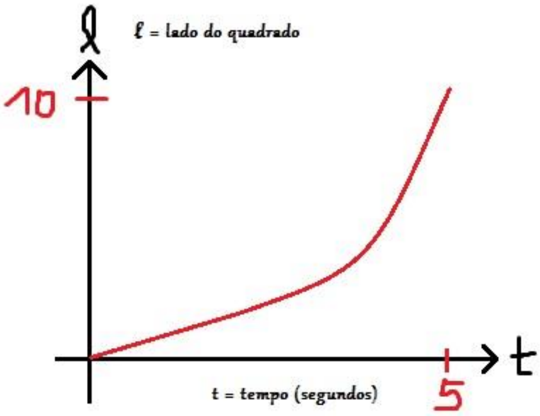
Quadrado é uma figura geometrica que possui os 4 lados iguais e 4 ângulos de 90° graus. Pois ele aumenta/diminui os 4 lados ao mesmo tempo.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Elas, por sua vez, realizaram uma explicação que fez referência ao dinamismo vinculado diretamente às experiências que tiveram com o software, pois nela, mencionaram que os lados se alteram “ao mesmo tempo” ao intentarem inferir que os lados se alteram proporcionalmente enquanto manuseamos o controle deslizante.

Argumentação posta, aproveitei, na aula de correção do TA1, para expandir nossas discussões a associando ao processo de entendimento do significado de uma função matemática: se o tempo fosse interpretado como uma variável independente, o tamanho do lado do quadrado poderia ser interpretado como uma variável dependente a ele, que aumenta ou diminui seu valor numérico conforme o primeiro passa. Concomitantemente, alterei o tamanho do lado do quadrado de zero a 10 com o controle deslizante no respectivo arquivo do GeoGebra, que estava conectado ao projetor. Primeiramente, de maneira constante e, em seguida, de maneira acelerada; totalizando cerca de cinco segundos de movimento. Por fim, com a ajuda de alguns alunos, desenhamos um esboço do gráfico dessa abstração de função no quadro, o qual ficou muito semelhante à Figura 35.

Figura 35 - Quadro, esboço do gráfico da função tamanho do lado do quadrado em relação ao tempo de deslize do controle.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Aliás, ao alterarem o tamanho dos lados do quadrado, ainda na Informática, por meio do controle deslizante, conseguiram também abstrair que aquele quadrado não possuía um lado de tamanho definido, mas de variação restrita a um intervalo numérico. Isto é, percebi que, para esse objetivo, a tecnologia do software, por viabilizar a visualização dessas variações dinâmicas, tende a ser interpretada também como uma facilitadora da compreensão do conceito de variável, o qual é essencial para a compressão do conteúdo de funções. Ilustro essa possibilidade com alguns casos e recortes a seguir.

Para que respondessem corretamente às questões 1) d) I e II[38], os alunos precisavam atentar para as instruções do TA1 que definiam a variável l[39] como pertencente ao intervalo $[-10; 10]$, representativa do lado do quadrado e, quando dividida por 2 e somada com 5 – expressão algébrica $\left(\frac{l}{2}+5\right)$ –, representativa do lado do triângulo equilátero. O primeiro empecilho para que as solucionassem foi a não leitura completa desses dados antes de iniciarem sua resolução. O segundo, se

---

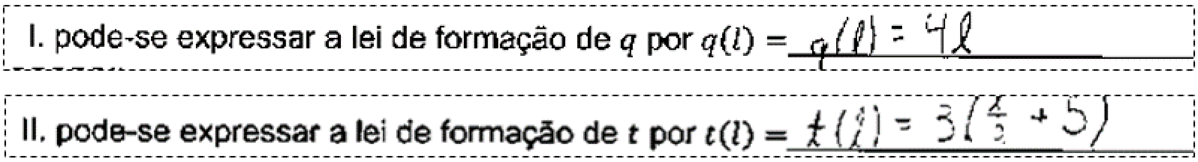
[38] TA1, "1) [...] d) Conforme altera-se o tamanho de l com o controle deslizante, geram-se coordenadas que são traduzidas por pontos azuis e rosa que deixam seu rastro no Plano Cartesiano. Dessa forma,
- todos os pontos azuis formam o gráfico do perímetro do quadrado azul em função do tamanho de l (chamaremos de função q);
- todos os pontos rosa formam o gráfico do perímetro do triângulo rosa em função do tamanho de l (chamaremos de função t).
Logo,
I. pode-se expressar a lei de formação de q por $q(l) =$______________________________________.
II. pode-se expressar a lei de formação de t por $t(l) =$______________________________________."

[39] Letra ele (L) minúscula que foi escrita utilizando-se o recurso *Equação* do software Word. Como não assumiu uma formatação de fácil leitura, acarretou confusão dos alunos entre ela e o número 1. Não obstante, notei esse fato logo no começo do desenvolvimento do TA1 e os alertei sobre.

relacionou com a incompreensão do que significava o lado do quadrado ter uma medida variável l, e não uma definida quantitativamente.

Por conseguinte, vários questionaram-me se o tamanho do lado do quadrado valia 3, por exemplo. Acredito que aqueles que palpitaram esse valor específico o fizeram pois o controle deslizante indica o valor 3 assim que o arquivo no GeoGebra é aberto. “É... três [o lado do quadrado]?”, o aluno 4 me perguntou. “O l agora é três, mas se tu mudar ali não vai ser outro número?”, perguntei-lhe me referindo a mexer no controle deslizante. Então, após deslizá-lo, tentou corrigir-se afirmando que o lado do quadrado, na verdade, “É três vírgula sete $(3{,}7)$”. “É três vírgula sete? Mexe no controle”, disse ao continuar incentivando-o. “Hummm!” exclamou, como se agora começasse a entender a resposta que procurava. “Então não é três vírgula sete. Qual é o lado? Ele varia, não varia?”, indaguei ao aluno. “Sim, ele é uma variável”, confirmou. “Então ele é uma variável. Qual variável?”, perguntei quase que entregando a resposta que buscava desde o início. “É éle (l)”, finalmente concluiu (Fig. 36).

Figura 36 - TA1, questões 1) d) I e II: resposta aluno 4.


I. pode-se expressar a lei de formação de q por $q(l) =$ $q(l) = 4l$

II. pode-se expressar a lei de formação de t por $t(l) =$ $t(l) = 3(\frac{l}{3} + 5)$

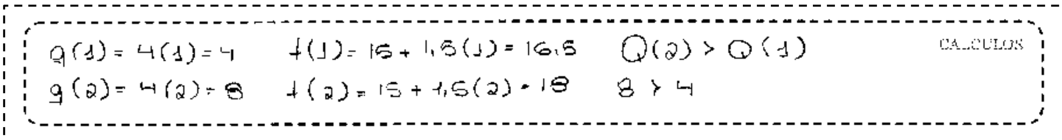
Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Noto também, a partir desse diálogo, que, além do aluno ter trabalhado com o significado de variável matemática, ele, com certo esforço, precisou realizar uma desconstrução da sua concepção pessoal, provavelmente adquirida em seus anos escolares iniciais, de que uma figura geométrica precisar ter lados de tamanhos fixos. Por ser um processo de caráter subjetivo, portanto, apenas se torna possível se o aluno assumir esse papel ativo e questionador que tanto objetivei induzir ao planejar as atividades do TA1 e do TA2.

Associadas ao estudo de funções por meio de experimentações com o controle deslizante, que abordei até aqui, posso também destacar possibilidades relacionadas a translações de representações gráficas de funções por meio da variação de seus parâmetros. Pela eficiência e exatidão oferecidas pelo GeoGebra, gráficos tornam-se mais simples de serem construídos com ele. No caso do TA1, enfatizo o auxílio disponibilizado à análise e à compreensão da relação entre o coeficiente angular de funções de 1º grau e o fato delas serem crescentes ou decrescentes. Tarefa que pode ser exemplificada pela discussão a seguir com o aluno 5, acarretada pela tentativa de solução da questão 1) d) V[40].

Apesar de já termos iniciado o trabalhado em sala de aula a respeito da definição de coeficiente angular, o aluno 5 e sua dupla de trabalho apenas se lembravam da possibilidade de provar o crescimento de uma função de 1º grau supondo que é monótona e, então, desenvolvendo cálculos teste (Fig. 37). Ou seja, tomando a lei de formação, substituindo sua variável independente por dois valores escolhidos diferentes do domínio e, então, analisando se os respectivos valores encontrados para as variáveis dependentes apresentavam a mesma ordem de grandeza desses dois valores ou não. Se sim, definiriam a função crescente; se não, decrescente.

Figura 37 - TA1, questão 1) d) V: cálculos teste alunas 2 e 3

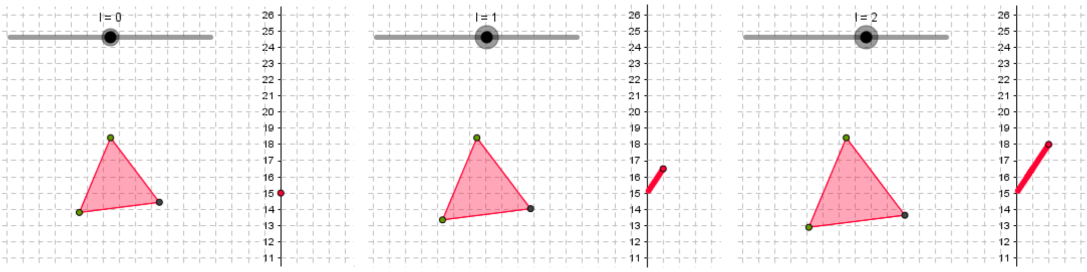


Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

“A primeira coisa é vocês olharem pros gráficos e dizerem por que é que vocês estão vendo duas funções crescentes”, tentei esclarecer ao aluno 5 quando me chamou para perguntar como deveriam ser realizadas as outras explicações solicitadas. Movendo o controle deslizante e observando a função perímetro relativa ao triângulo, em seguida, me disse “A gente põe um, ela aumenta um vírgula cinco (1,5); dois, aumenta um vírgula cinco de novo [inicialmente o controle mostrava o valor zero]”. Por meio do manuseio do controle deslizante, por conseguinte, otimizaram sua análise acerca da dependência ser intrínseca à função e, mais especificamente, começaram a abstrair significado à percepção de crescimento de uma função de 1º grau, uma vez que, com ele, tornaram-se aptos a variar o valor da variável dependente em coordenação com o valor da coordenada da independente (Fig. 38). Também conseguiram perceber que o aumento citado acontecia de maneira proporcional. Assim, na questão 1) d) V, conseguiram completar o motivo das funções serem crescentes também por meio da análise gráfica.

[40] TA1, “1) [...] d) [...] V. as funções q e t são crescentes. Explique essa afirmação essa afirmação pela análise gráfica, pela análise das constantes das leis de formação, e, então, enfatize-a por meio de alguns cálculos teste de coordenadas”.

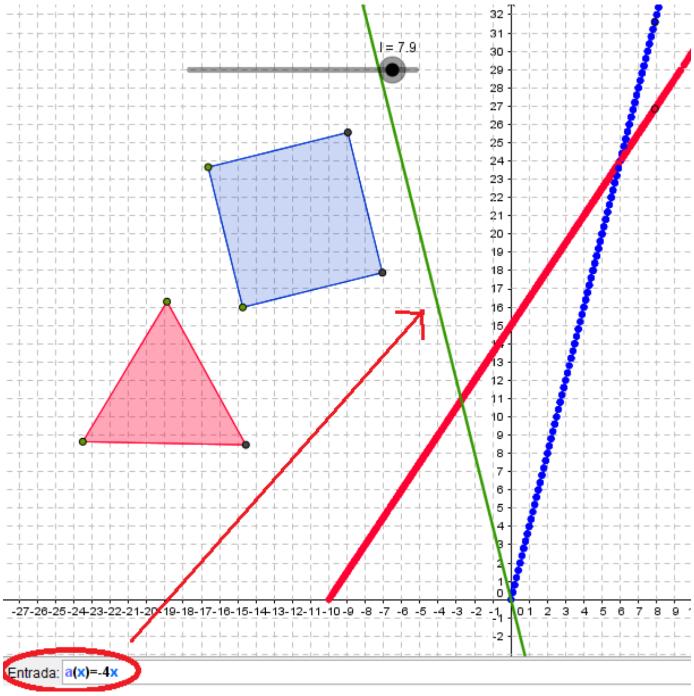
Figura 38 - TA1, deslize do controle direita-esquerda, lados do triângulo e função perímetro crescente.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Por fim, para prosseguirmos com a análise relacionada ao valor do coeficiente angular, orientei-lhes: “Voltem lá na lei de formação que vocês escreveram [já haviam respondido corretamente às questões 1) d) I e II, sobre as quais discorremos no exemplo anterior]. Quem é o coeficiente angular da primeira? [a primeira função era representada pela lei de formação $q(l) = 4l$]”. “Quatro”, o aluno 5 me respondeu. “E se o quatro fosse negativo, o quê que ia acontecer?”. Apenas se entreolharam. “Escrevam ali. Coloquem em Entrada. Só não coloquem efe (f), porque já tem uma função efe. Escreve a, entre parênteses, xis, igual a menos quatro xis [pedi que digitassem a lei de formação de uma nova função $a(x) = -4x$ no campo adequado no software para que fosse gerado sua representação gráfica]. Agora olhem a função (Fig. 39). Então, o quê que determina se uma função é crescente ou decrescente?”, perguntei. “ O coeficiente angular”, concluiu. Deixando que ele completasse minhas afirmações, então, conseguimos conjecturar: **“**Então, se ele é positivo, vai ser...?” “Crescente”, “e, se for negativo, vai ser...?” “Decrescente”. Por fim, tentaram formalizar no papel o que haviam entendido a partir desses raciocínios moldados.

Figura 39 - TA1, função $a(x) = -4x$, lei (assinalada) e gráfico verde (apontado) respectivos.

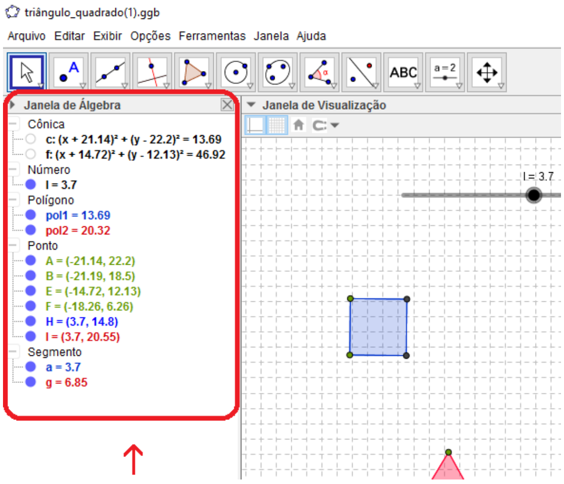


Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Essas reflexões representam ainda outro exemplo de reorganização do pensamento enquanto experimentavam com a tecnologia digital, pois, conforme eles manipulavam o controle, o gráfico ia sendo construído simultaneamente. Algo diferente do que poderia ser feito apenas com lápis e papel.

Já durante o segundo período de realização do TA1, dei-me conta de que os arquivos, no computador de todos os alunos, não estavam exibindo a Janela de Álgebra. “Pessoal, olha só: se vocês quiserem... Talvez ajude vocês. Cliquem em Exibir, Janela de Álgebra, que vai aparecer alguma coisa a mais aí (Fig. 40)”, resolvi, portanto, avisá-los, para que pudessem ter uma perspectiva mais abrangente das variações gráficas que lhe eram possíveis. No momento que o fizeram, escutei exclamações pela sala: “Woooow, que louco!”, “Uuuuuhhh!!”. Essas exclamações sugerem interesse na descoberta que haviam feito enquanto experimentavam, pilar essencial para a construção do saber das experiências, segundo Larrosa (2002).

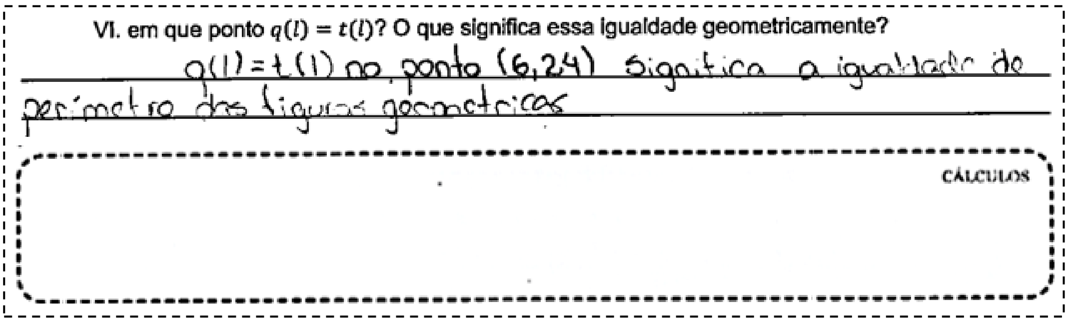
Figura 40 - TA1, Janela de Álgebra.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Em sequência, outro tópico que considero interessante de ser abordado nesse capítulo é o da análise comparativa entre algumas soluções de diferentes alunos para a mesma questão, mas que foram desenvolvidas a partir de pensamentos que interagiram com recursos diferentes. Como, por exemplo, para as questões 1) d) VI[41] e XI[42]. O primeiro recorte abaixo corresponde à resposta escrita pela dupla formada pelos alunos 6 e 7 (Fig. 41), e o segundo, pelas alunas 2 e 3 (Fig. 42) à questão 1) d) VI.

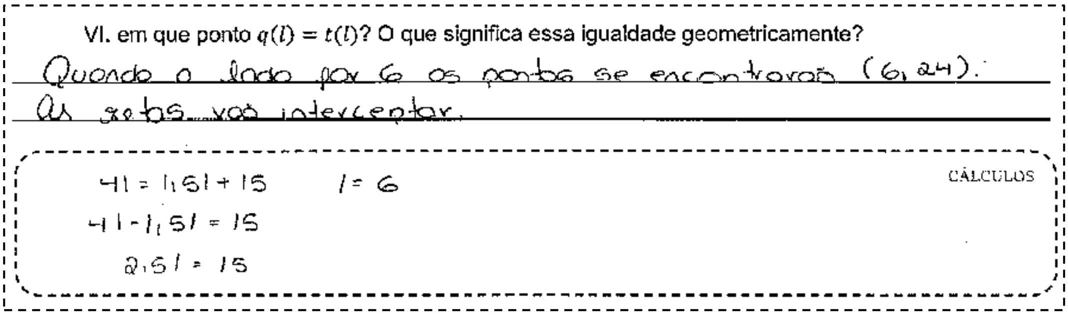
Figura 41 - TA1, questão 1) d) VI: resposta alunos 6 e 7.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

[41] TA1, “1) [...] d) [...] VI em que ponto $q(l) = t(l)$? O que significa essa igualdade geometricamente?”.
[42] TA1, “1) [...] d) [...] XI considerando a função rosa, diga as coordenadas dos pontos $A(2, y_A)$, $B(0, y_B)$, $C(x_C, 0)$”.

Figura 42 - TA1, questão 1) d) VI: resposta alunas 2 e 3.



VI. em que ponto $q(l) = t(l)$? O que significa essa igualdade geometricamente?

Quando o lado for 6 os pontos se encontrarão (6,24).
As retas vão interceptar.

CÁLCULOS

$4l = 1{,}5l + 15$ $\quad l = 6$

$4l - 1{,}5l = 15$

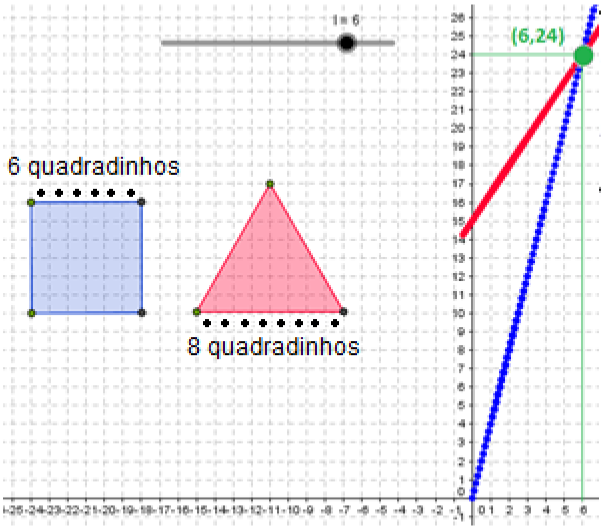
$2{,}5l = 15$

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Considerando o primeiro, noto que os alunos 6 e 7 argumentaram sem a necessidade de pensar por meio de algum cálculo. E presenciei eles apenas analisarem graficamente o ponto em que ambas as retas se interceptavam. O que estava correto, pois ambos os gráficos possuem o ponto $(6{,}24)$ em comum e, retomando as instruções que problematizavam cada uma das funções como função perímetro do quadrado e função perímetro do triângulo, podia-se concluir que, dado um ponto específico em ambos os gráficos, ele representaria, em sua coordenada y, tanto o perímetro do quadrado quanto o do triângulo.

Ainda tive o prazer de assistir a outros alunos que, após encontrarem o ponto de intersecção, averiguaram a correspondência geométrica respectiva gerada no software por essas coordenadas manipulando os dois polígonos de modo a deixarem suas bases paralelas ao eixo das abscissas. Dessa maneira, conseguiam medir, por meio da malha quadriculada, o tamanho de um de seus lados, como na Figura 43 – já sabiam, respondidas as questões 1) a e b, que todos os lados são congruentes à base em ambas as figuras, por elas serem um quadrado e um triângulo equilátero. Assim como, respondida a questão 1) c, calcular a medida de cada perímetro. Obtiveram, desse modo, 6 e 8 unidades de medida para o tamanho do lado do quadrado e do lado do triângulo, respectivamente. Logo, 24 unidades de medida aos consequentes tamanhos dos dois perímetros calculados.

Figura 43 - TA1, medição dos lados via malha quadriculada.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

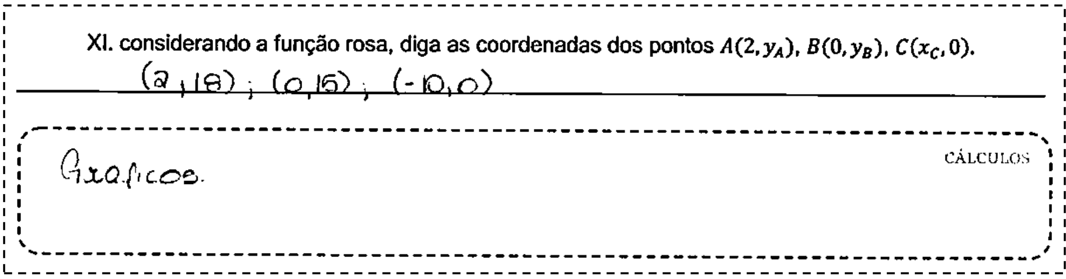
Considerando o segundo (Fig. 42), reparo que as alunas 2 e 3 optaram por uma solução, tal-qualmente verdadeira, porém algébrica, igualando as leis de formação e obtendo $l = 6$ e, então, o consequente ponto $(6{,}24)$. Entretanto, uma vez que afirmam que a análise geométrica à essa solução se refere à intercepção das retas de cada gráfico, tornam sua resposta inadequada à questão, pois, na verdade, essa afirmação corresponde a uma análise gráfica; deveriam ter se referido ao fato das figuras apresentarem mesmo perímetro, assim como feito pela dupla anterior.

Outrossim, os alunos 6 e 7, que pensaram com a análise gráfica e geométrica utilizando o software para desenvolver uma solução, desenvolveram uma conjectura mais completa e adequada do que as alunas 2 e 3, que apenas pensaram com a algébrica. Fato alusivo à teoria de que a utilização de tecnologias digitais pode agilizar o processo analítico, pois, ao pensar sem os recursos oferecidos pelo software, a solução estritamente gráfica dependeria do processo de, primeiramente, desenhar minuciosamente cada gráfico à mão em um mesmo sistema de eixos cartesianos, para então perceber as coordenadas exatas do ponto em que se interseccionam. Além disso, seria impossível com desenhos manuais a coordenação entre a análise geométrica e a formação dos gráficos viabilizada pelo GeoGebra, ou seja, esse caso também representa outro exemplo relacionado à teoria de reorganização do pensamento.

Mais uma vantagem dessa escolha pela solução no ambiente de GD é a não frustração (HEUGL, 2004) do aluno durante o processo de solução. Por exemplo, se o aluno pensar unicamente de maneira algébrica, ele pode apresentar dificuldades, digamos, em operar algebricamente com frações; implicando, portanto, em não conseguir encontrar o ponto correto requerido - assim como aconteceu a alguns alunos da 9AH[43]. Logo, com o software, sua bagagem de conhecimentos matemáticos não precisa ser tão grande quanto sem ele para que prossiga aprendendo funções.

Tomando, agora, a questão 1) d) XI e os recortes respectivos abaixo, temos que o primeiro corresponde à resposta escrita pelas alunas 2 e 3 (Fig. 44), já o segundo, pelas alunas 8 e 9 (Fig. 45).

Figura 44 - TA1, questão 1) d) XI: alunas 2 e 3.



XI. considerando a função rosa, diga as coordenadas dos pontos $A(2, y_A)$, $B(0, y_B)$, $C(x_C, 0)$.

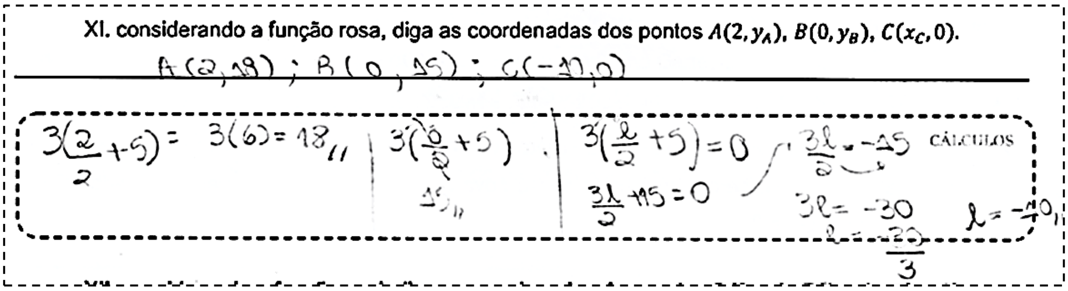
(2,18) ; (0,15) ; (-10,0)

CÁLCULOS

Graficos.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 45 - TA1, questão 1) d) XI: alunas 8 e 9.



XI. considerando a função rosa, diga as coordenadas dos pontos $A(2, y_A)$, $B(0, y_B)$, $C(x_C, 0)$.

A(2,18) ; B(0,15) ; C(-10,0)

CÁLCULOS

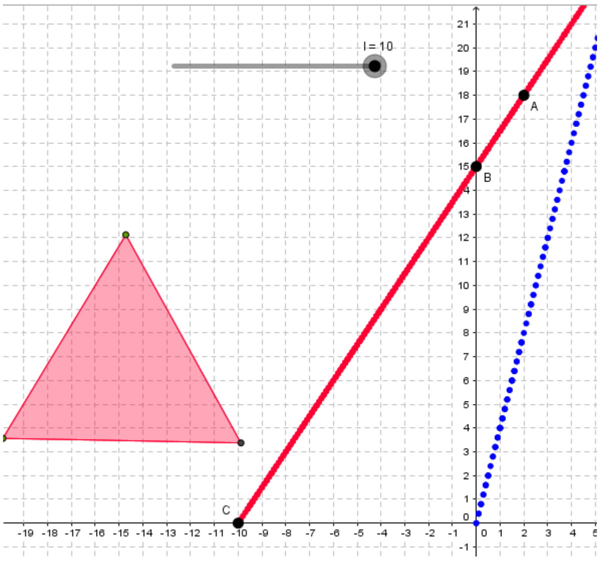
$3(\frac{2}{2}+5) = 3(6) = 18$ | $3(\frac{0}{2}+5)$ = 15 | $3(\frac{l}{2}+5) = 0$; $\frac{3l}{2}+15=0$; $\frac{3l}{2} = -15$; $3l = -30$; $l = \frac{-30}{3}$; $l = -10$

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Noto novamente, a partir desse exemplo, que as estratégias de resolução utilizadas pelas duplas foram distintas. Enquanto as alunas 8 e 9 optaram por uma solução algébrica utilizando a lei de formação de cada função, as alunas 2 e 3, que antes tinham optado por pensamento puramente algébrico, agora optaram por um exclusivamente analítico (Fig. 46) para encontrar as coordenadas dos pontos dados. Portanto, ancorada nessas respostas, enfatizo a importância do software como recurso para pensar-com (BORBA, 2009), todavia não excludente a outros.

[43] Exemplos não ilustrados, pois os alunos a que me refiro não entregaram o Termo de Consentimento de participação com a pesquisa assinado por um responsável.

Figura 46 - TA1, pontos A e B.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

4.2. TRABALHO AVALIATIVO (PARTE 2)[44]

Como expliquei no capítulo Metodologia, subcapítulo Proposta de Trabalho, meu planejamento apresenta algumas distinções de proposta para as duas atividades avaliativas da 9AH. A que considero de maior destaque foi aplicar o TA1 de maneira complementar aos estudos de funções de 1º grau, os quais já tínhamos iniciado o estudo em sala de aula, porém aplicar o TA2 de modo introdutório ao estudo de funções de 2º grau. Fato que ressalto mais uma vez, pois o entendimento das perspectivas analíticas que explanarei a seguir depende da lembrança dele, assim como dependi para realizar a correção dos TAs finais entregues a mim pela Turma.

Consequente a essa abordagem introdutória do TA2, posso citar a desenvoltura obtida pelos alunos em função da insegurança advinda de seus esforços promovidos para que conseguissem construir um novo conhecimento de maneira ativa e quase autônoma – por meio de um estudo dirigido –, que caracteriza uma forma de aprendizagem não muito explorada ainda em sua vida escolar.

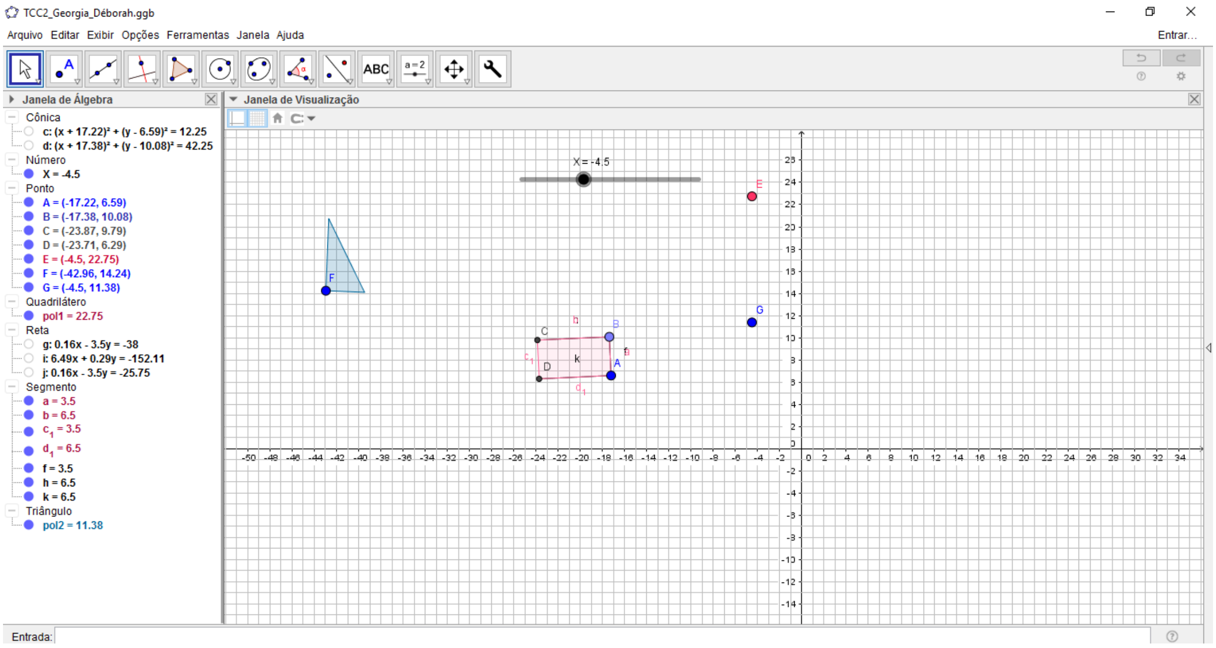
Outra distinção em relação ao TA1 foi requisitar um envolvimento maior da Turma com o GeoGebra a partir da instrução de um passo a passo que redigi no TA2 para a construção plena do arquivo com que trabalhariam no software. Nesse arquivo, que intitulei “quadrado_triângulo(2).ggb”, o único objeto digital que já havia deixado construído era a “Ferramenta Triângulo”[45], com a qual poderiam obter, de maneira

[44] Apelidado de TA2.
[45] Detalho sobre a Ferramenta Triângulo no capítulo Metodologia, subcapítulo Proposta de Trabalho.

quase automática, apenas uma parte das construções necessárias para desenvolver o TA2. Novidade que influenciou insegurança mais acentuada do que a apresentada com inicialização da resolução do TA1, sobre a que já comentei. Os alunos me chamavam intermitentemente, exasperados em querer saber se cada passo que efetuavam durante a construção estava correto. Muitos deles realmente estavam incorretos, o que acabava implicando em eles precisarem reiniciar o procedimento de todos ou quase todos os passos para que pudessem corrigir esse erro. Como nosso tempo no Laboratório de Informática era limitado, e muitos alunos não estavam progredindo consistentemente, combinei com o grande grupo, então, que recomeçaria, junto àqueles que precisassem, todas as construções de acordo com as instruções escritas.

Liguei o projetor de imagem a um dos computadores para que pudessem acompanhar o que explicava. Procedi, portanto, do seguinte modo: lia um passo, esperava por um breve momento que tentassem realizá-lo sozinhos, o realizava no software, disponibilizava outro breve tempo para que os alunos procedessem de maneira análoga, e repetia esse processo com o passo seguinte. Então, notando maior segurança dos alunos em suas ações no software, ao finalizarmos o passo V, sugeri que continuassem a realizar os próximos sozinhos, com o que concordaram. Assim, alguns ainda me chamaram para confirmar certos procedimentos que efetuavam, porém todos conseguiram finalizar a construção (Fig. 47) com menos preocupação em tentar e experimentar do que antes.

Figura 47 - TA2, questão 2: construções alunos 6 e 7.

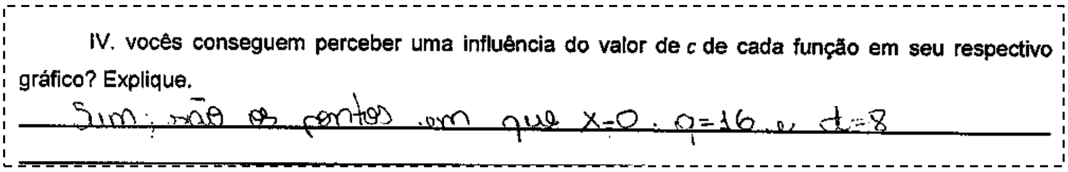


Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Outra observação que ainda preciso realizar, antes de prosseguir com o relato analítico do andamento do TA2, é a respeito de eu ter percebido, ao iniciarmos o desenvolvimento desse trabalho avaliativo em aula, que, se inseríssemos uma malha quadriculada com quadrados de lados de uma unidade de medida no fundo da Janela de Visualização, e se exibíssemos a Janela de Álgebra no arquivo digital, estaríamos aptos a uma visualização mais ampla dos comandos necessários para a construção dos objetos digitais que queríamos. Logo, orientei aos alunos que, assim que abrissem quadrado_triângulo(2).ggb, realizassem esses ajustes, os quais a maioria deles já sabia efetuar sozinha.

No segundo momento da realização do TA2, então, precisavam resolver as questões escritas. A primeira cuja discussão consigo enquadrar a minha pesquisa é a 2) c) IV[46]. Ela incentiva a análise da relação entre o parâmetro c e a representação gráfica de uma função de 2º grau cuja lei pode ser dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c constantes reais. O que pode ser feito a partir de arrastes do ponto relacionado a cada gráfico. Abaixo, as respostas dadas pelas alunas 12 e 13 (Fig. 48) e pelos alunos 6 e 7 (fig. 49), respectivamente.

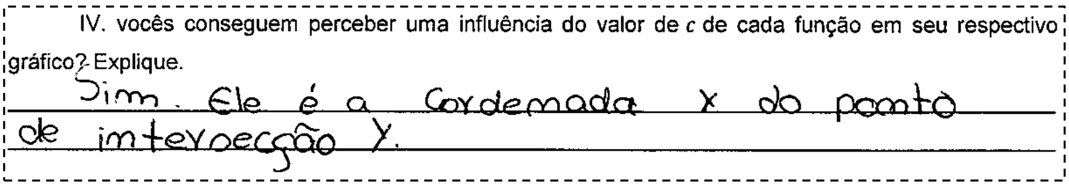
Figura 48 - TA2, questão 2) c) IV: resposta alunas 12 e 13.


IV. vocês conseguem perceber uma influência do valor de *c* de cada função em seu respectivo gráfico? Explique.

Sim; não os pontos em que x=0. q=16 e t=8

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 49 - TA2, questão 2) c) IV: resposta alunos 6 e 7.


IV. vocês conseguem perceber uma influência do valor de *c* de cada função em seu respectivo gráfico? Explique.

Sim. Ele é a Cordenada x do ponto de interoecção Y.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Legenda: salientar que há dois y escritos (um deles parece um x)

Observo que a primeira dupla procurou realizar uma explicação relacionada aos casos específicos das funções q e t, enquanto a segunda procurou conjecturar a relação do c com a representação gráfica de uma função qualquer. Conquanto, apesar de ambas as respostas não poderem ser definidas como acuradamente corretas,

[46] “Vocês conseguem perceber uma influência do valor de c de cada função em seu respectivo gráfico? Explique.”

retratam uma conclusão plausível e aproximada da verdade, que reflete uma exploração do software não ancorada em um estudo escolar formal anterior.

Ou seja, na primeira resposta, “são os pontos”, implica o entendimento do leitor de que c é o ponto $(0{,}16)$ na função área do retângulo, assim como $(0{,}8)$ na função área do triângulo; enquanto o correto seria dizer que c é a ordenada do ponto em que $\mathrm{x} = 0$, pois c não é um ponto. E, na conjectura formulada no segundo recorte, a expressão “intersecção y" utilizada poderia ser melhor definida e reescrita como “intersecção com o eixo y", ou ainda, “intersecção com o eixo das ordenadas”, por exemplo.

Questão que se assemelha a um exemplo do capítulo Fundamentação Teórica relacionado a alunos da graduação em Biologia que estudavam a influência dos parâmetros reais a, b e c na lei de formação $y = ax^2 + bx + c$ de uma função quadrática, porém com uma calculadora gráfica. Em ambos os casos está presente a ideia seres-humanos-com-mídias de Borba e Vilarreal (2005), porém, com o GeoGebra os alunos investigaram de maneira mais analítica verificando apenas dois casos de funções de 2º grau, enquanto, com a calculadora, de maneira mais experimental com quantos casos quisessem.

Já a questão 2) c) VIII (Fig. 50), se assemelha à 1) d) VI [47] do TA1, pois também trabalha com uma igualdade algébrica entre duas funções e a respectiva interpretação geométrica. Outrossim, enquanto o primeiro recorte abaixo apresenta a solução analítica que utiliza os recursos digitais elaborada pelos alunos 6 e 7 (Fig. 50), o segundo, a solução algébrica com o recurso papel-caneta calculada pelas alunas 8 e 9 (fig. 51).

Figura 50 - TA2, questão 2) c) VIII: resposta alunos 6 e 7.

VIII. há algum ponto em que $q(X) = t(X)$? Por quê? O que significa essa igualdade geometricamente?

(-8,0) (2,0). É os pontos onde as parábolas interceptão no eixo X. É quando tem os mesmos valores para as áreas

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

[47] TA1, “1 [...] d) [...] VI. em que ponto $q(l) = t(l)$? O que significa essa igualdade geometricamente?

Figura 51 - TA2, questão 2) c) VIII: resposta alunas 8 e 9.

VIII. há algum ponto em que $q(X) = t(X)$? Por quê? O que significa essa igualdade geometricamente?

Sim $g(x)=t(x)$ nos pontos $\{(-8,0),(2,0)\}$. Porque a área do retângulo e do triângulo são iguais

4) $(-x+3)(x+3)=(-x+3)(x+3)$

5) $\frac{-6 \pm 10}{2}$ 2) $-x^2-6x$ 3) $x^2+6x-16=0$ $0=-x^2-6x+16$

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Novamente, há heterogeneidade qualitativa em relação à escolha dos recursos a serem associados ao pensamento de resolução pelas diferentes duplas de alunos. Análise comparativa que faz luz à teoria, discorrida por Borba e Penteado (2001), de desafiar a linearidade de raciocínio introduzindo diferentes modos de pensar à nossas reflexões.

Por fim, enfatizando que os alunos já conheciam a definição de raiz, pois foi trabalhada ao estudarmos funções de 1º grau em sala de aula anteriormente, destaco, o recorte da resposta escrita pelas alunas 8 e 9 para questão 2) c) IX (Fig. 52).

Figura 52 - TA2, questão 2) c) IX: alunas 8 e 9.

IX. quanto maior for a área de cada pedaço quadrangular e triangular de Bob Espoja, mais fácil ele conseguirá fixar-se a uma rocha para voltar a crescer. Analisando o gráfico, qual o maior valor de área possível a um pedaço quadrangular dele? e a um pedaço triangular? Quais são as abscissas desses valores? Vocês percebem como o o valor dessas abscissas relacionam-se com as raízes de cada função e com o fato dos gráficos serem parábolas? Explique.

O maior valor de área possível a um pedaço quadrangular dele é 25, de um pedaço triangular é 12,5. As abscissas destes valores -3, sendo que -3 é a media entre as coordenadas x das raízes.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Nesse caso, as alunas pensaram matematicamente sem realizar cálculos algébricos, conseguindo desenvolver uma resposta absolutamente verdadeira. Isto é, conseguiram, de modo exclusivamente experimental-com-tecnologias, testando no software para encontrar valores de máximo e de mínimo, entender noções acerca de coordenadas do vértice e da relação entre a respectiva abscissa e as raízes de uma função quadrática. A vantagem da utilização dessa tecnologia em relação aos recursos estáticos é, novamente, a coordenação de dinamismos viabilizada; nesse caso entre a alteração do valor da variável independente e da resultante alteração no tamanho dos lados e da área das figuras geométricas associadas. Assim, o ponto de máximo de cada gráfico se associava ao fato da figura atingir, instantaneamente, sua maior área possível. Logo, promovendo possibilidades de aprendizagem refletiva de ações, e não apenas de teorias.

4.3. QUESTIONÁRIO

Abordarei, nesse subcapítulo, os dados obtidos com as questões 6 a 9 do questionário realizado com a 9AH, os quais relacionam-se com o desenvolvimento dos Trabalhos Avaliativos.

A questão 6 (Fig. 53) apresenta alguns objetivos de aprendizagem relacionados ao TA1 e ao TA2 pertinentes ao meu foco de pesquisa – o estudo de funções polinomiais do 1º e do 2º grau a partir de manipulações dinâmicas no GeoGebra – e questiona quais desses aspectos ainda são lembrados pelos alunos. O intuito, portanto, de ter criado essa questão é de adquirir evidências de que as atividades propostas foram significantes ou não a nível de que Matemática e métodos de pensar acabaram sendo mais retidos e internalizados nas redes de memória dos alunos.

Figura 53 - Questionário, questão 6.

6. Trabalhamos no GeoGebra funções de 1º e de 2º grau. Do que você recorda do que foi trabalhado?

(seja sincero)

( ) O perímetro de um quadrado ou de um triângulo equilátero em função do tamanho de um de seus lados são exemplos de funções de 1º grau.

( ) A área de um retângulo ou de um triângulo retângulo em função do tamanho de seus lados são exemplos de funções de 2º grau.

( ) A razão do Domínio da "função perímetro do quadrado" (citada acima) ser um intervalo de menor elemento igual a zero pode ser explicada a partir da visualização da manipulação do tamanho do lado do quadrado por meio do *controle deslizante*.

( ) O ponto pertencente a cada gráfico e guiado pelo *controle deslizante,* quando manipulado, favorecia a interpretação da constância, do crescimento e do decrescimento de funções de 1º ou de 2º grau.

( ) Ao alterarmos o valor da variável independente com o *controle deslizante*, deslocávamos o ponto criado sob cada gráfico de função, uma vez que suas coordenadas eram (x, y):

- x variável independente pertencente ao Domínio da função;

- y variável dependente ao valor selecionado para x e, em cada posição assumida pelo ponto, determinada pela lei de formação da função.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

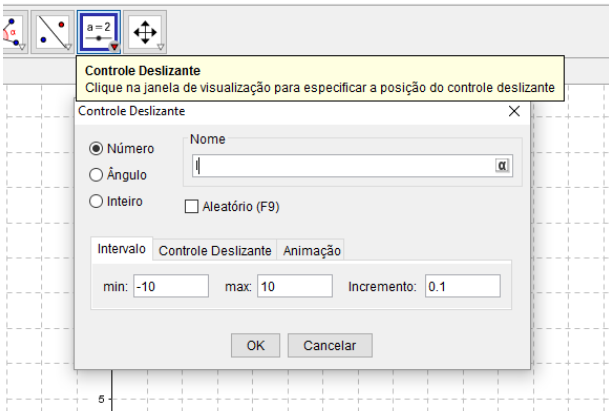
Tomando, por conseguinte, as alternativas assinaladas pelos 15 alunos que participaram do questionário, noto que, a partir da análise do respectivo gráfico de barras (Fig. 54) gerado abaixo (letras a, b, c, d, e respectivas às opções objetivas na ordem em que aparecem no questionário), quase todos eles recordavam-se da interpretação da constância, do crescimento e do decrescimento de funções tanto de 1º quanto de 2º grau relacionada ao arraste do ponto associado a cada gráfico. Ainda, mais da metade deles lembrava-se a respeito da coordenação entre os valores dados à variável independente X, com o controle deslizante, e o deslocamento do ponto criado sobre o gráfico de cada função; assim como da exemplificação de uma função de 1º grau por uma função perímetro (no TA1). Contudo, menos da metade deles recordava-se de que uma função do 2º grau poderia ser exemplificada por uma função área (no TA2), e de que, a partir de manipulações com o quadrado do TA1, poderíamos entender o motivo pelo qual o menor elemento do Domínio da função que relacionava o perímetro com o tamanho de seu lado era zero.

Figura 54 - Questionário, questão 6: gráfico de barras.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

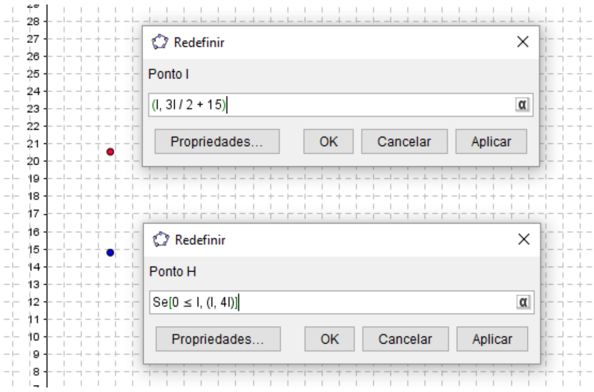
Assim, se me basear apenas nesses dados quantitativos, posso afirmar que os recursos mais promissores do software para se trabalhar o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau são: definição de um controle deslizante (Fig. 55) – determinou uma variável l em um intervalo numérico, e tornou possível escolher valores nesse intervalo para ela -, criação de pontos de coordenadas variáveis (Fig. 56) e com rastro (Fig. 57) - com coordenadas estipuladas em função do valor escolhido pelo controle deslizante para l, os pontos desenharam gráficos de funções perímetro na Janela de Visualização por meio de seu rastro –, e construção de quadrados e triângulos equiláteros com tamanho de lado variável (Fig. 58) – possibilitou manipulações dimensionais em associação ao valor de l e ao consequente deslocamento dos pontos que determinavam o valor do perímetro de cada gráfico ao serem projetados no eixo das ordenadas do Plano Cartesiano.

Figura 55 - GeoGebra, definição do controle deslizante l.



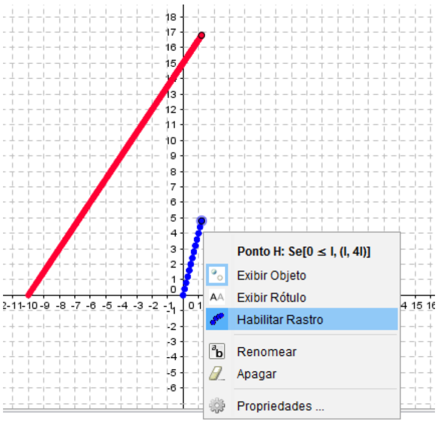
Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 56 - GeoGebra, criação de pontos de coordenadas variáveis.



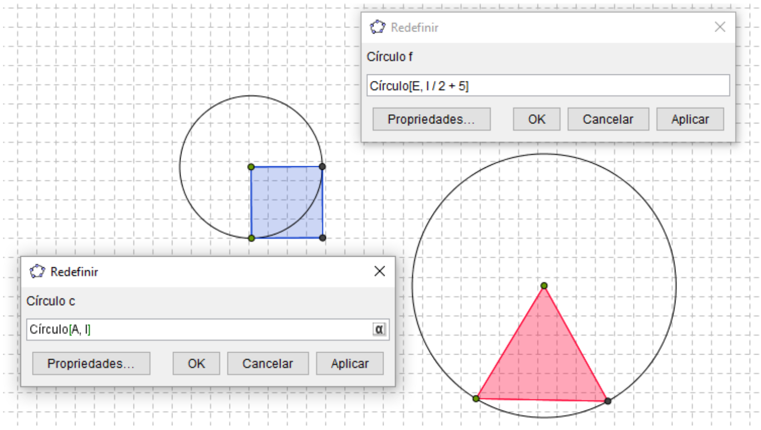
Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 57 - GeoGebra, pontos com rastro habilitado.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

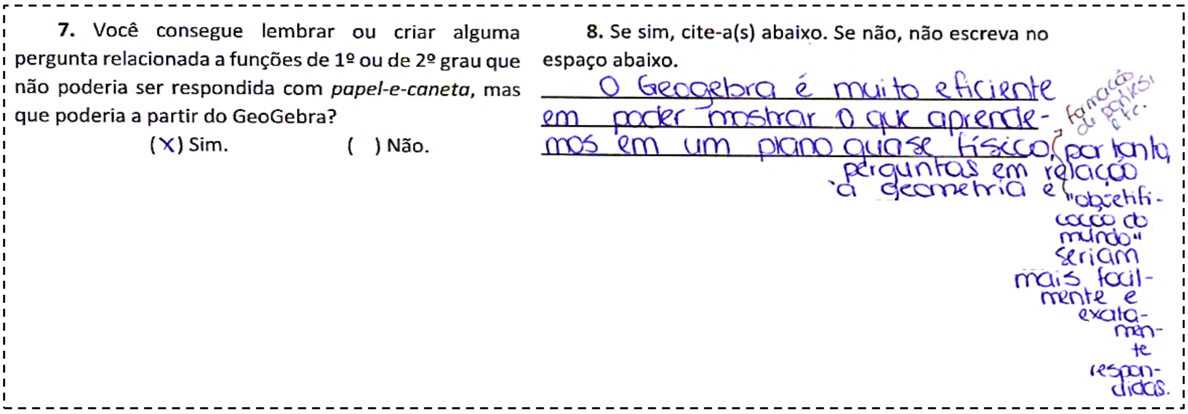
Figura 58 - GeoGebra, polígonos com tamanho de lado variável.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

As questões 7 e 8 (Fig. 59) relacionam-se com a ideia, que defendo no capitulo Fundamentação Teórica, relacionada à reorganização da educação matemática do enfoque de solucionar para o de criar. Logo, almejei perguntar aos alunos, a partir dela, se conseguiam lembrar-se de ou se conseguiam criar uma pergunta relacionada ao estudo de funções de 1º ou de 2º grau que não poderia ser solucionada apenas pensando-com o recurso papel-caneta, mas sim com o recurso digital GeoGebra; e, se sim, que a evidenciasse.

Figura 59 - Questionário, questões 7 e 8: resposta aluna 10.



7. Você consegue lembrar ou criar alguma pergunta relacionada a funções de 1º ou de 2º grau que não poderia ser respondida com *papel-e-caneta*, mas que poderia a partir do GeoGebra?

(X) Sim. ( ) Não.

8. Se sim, cite-a(s) abaixo. Se não, não escreva no espaço abaixo.

O Geogebra é muito eficiente em poder mostrar o que aprendemos em um plano quase físico, portanto perguntas em relação à geometria e "objetificação do mundo" (formação de pontes, etc.) seriam mais facilmente e exatamente respondidas.

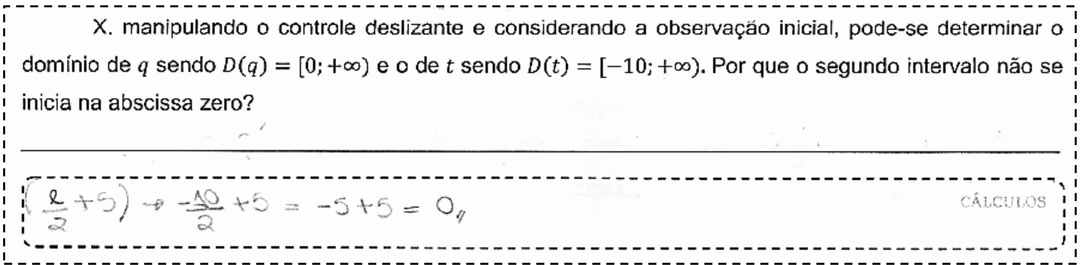
Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Apenas uma aluna (aluna 10) respondeu que sim a essa pergunta, explicando que, como podemos observar na Figura 59, com o GeoGebra, estaríamos aptos a responder com exatidão perguntas que envolvessem Geometria e o que ela chamou de "objetificação do mundo", exemplificando com a formação de pontes. Apesar de não ter criado, propriamente, uma pergunta, como a questão solicitava, apontou uma das principais peculiaridades permitidas pelo trabalho com o software para solucionar o TA1 e o TA2: trabalhar-se com Geometria. Porém, refinando esse apontamento, incluiria, juntamente à Geometria citada, seu importante caráter dinâmico.

E, apesar dos alunos não se lembrarem de perguntas específicas contidas no TA1 ou no TA2 que pudessem ser respondidas apenas a partir do pensamento com o GeoGebra, como apontei no questionário, elas existiam; as cito a seguir. No próximo capítulo, entretanto, discuto a possibilidade de reprojetá-las a fim de aumentar a necessidade de interação com o recurso digital no estudo.

Das que concernem ao TA1, levando em consideração o fato dos alunos já terem sido introduzidos ao conteúdo de funções de 1º grau antes da aplicação desse trabalho, a única relacionada a esse tipo de função, e que realmente dependeria da experimentação no software para ser respondida por eles, seria a 1) d) X (Fig. 60). Ela solicita aos alunos a manipulação do controle deslizante em consonância com a interpretação das alterações geométricas geradas. O objetivo era determinar o motivo do intervalo do domínio da função (perímetro) do triângulo equilátero não se iniciar em zero. Sem o software, contudo, poderiam respondê-la de maneira algébrica – como na Figura 60 - considerando que o lado do triângulo valia $\left(\frac{l}{2}+5\right)$ e que tal expressão não poderia se tornar negativa por motivos de lógica geométrica. Da maneira que é enunciada, contudo, incentiva outro tipo de raciocínio (de monopólio interativo com o software): o de observar que o triângulo aparece na tela apenas quando l, evidenciado pelo controle deslizante, torna-se maior que -10; e, já o quadrado, apenas quando l torna-se maior que zero. Ou seja, notando, precipitadamente a qualquer cálculo, para que valor de abscissa cada gráfico e, consequentemente, perímetro começam realmente a existir.

Figura 60 - TA1, questão 1) d) X: cálculos alunas 8 e 9.



X. manipulando o controle deslizante e considerando a observação inicial, pode-se determinar o domínio de q sendo $D(q) = [0; +\infty)$ e o de t sendo $D(t) = [-10; +\infty)$. Por que o segundo intervalo não se inicia na abscissa zero?

$\left(\frac{l}{2}+5\right) \rightarrow \frac{-10}{2}+5 = -5+5 = 0$

CÁLCULOS

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

No TA2, há o subitem VI da questão 2) c)[48] que trabalha com o mesmo raciocínio de entender o motivo da definição do domínio de cada função. E ainda, considerando, dessa vez, que os alunos ainda não tinham sido introduzidos ao

[48] TA2, “2) [...] c) [...] VI. os possíveis valores que X pode assumir para que, de fato, existam pedacinhos retangulares e triangulares de Bob Esponja são - ou seja o Domínio de cada uma das duas funções é”.

conteúdo de funções de 2º grau e, portanto, provavelmente ainda não haviam pensado em como seria o traçado do gráfico de uma função desse tipo, o próprio enunciado inicial da questão 2) c)[49] também poderia entrar para a categoria de dependência do pensar-com o software. Isso se deve ao fato de ele explicar brevemente o que as manipulações disponíveis no software poderiam gerar, o que se torna essencial à compreensão inicial, tendo em vista a consideração acima. Já os outros subitens pertencentes a essa questão, entendo que poderiam ser solucionados, similarmente, a partir de um estudo tanto a partir de gráficos dinâmicos quanto de estáticos - em um software ou em uma folha de papel, em uma página web, respectivamente, por exemplo - das funções de 2º grau abordadas; logo, não se subordinam estritamente às manipulações digitais oferecidas.

À vista dessas reflexões, posso correlacionar o fato de eu, assim como vários outros docentes matemáticos do País, não estar acostumada a pensar-com tecnologias digitais na Escola. Vivemos, enquanto alunos da educação básica a alunos da educação superior, predominantemente, imersos em uma realidade que prioriza aulas tradicionais. Cenário propício à dificuldade em criar perguntas bordadas às circunstâncias das possibilidades dinâmicas e digitais, a qual vivenciei ao elaborar o TA1 e o TA2, e, novamente, ao reestudá-los.

Por fim, entendo que a questão 9 do questionário (Fig. 61) tornou-se consequente e inevitável: com ela, procurei entender se os alunos concordam, e por quê, com uma mudança no currículo escolar da disciplina de Matemática a fim de que o uso de tecnologias digitais torne-se mais presentes nessas aulas.

Figura 61 - Questionário, questão 9.

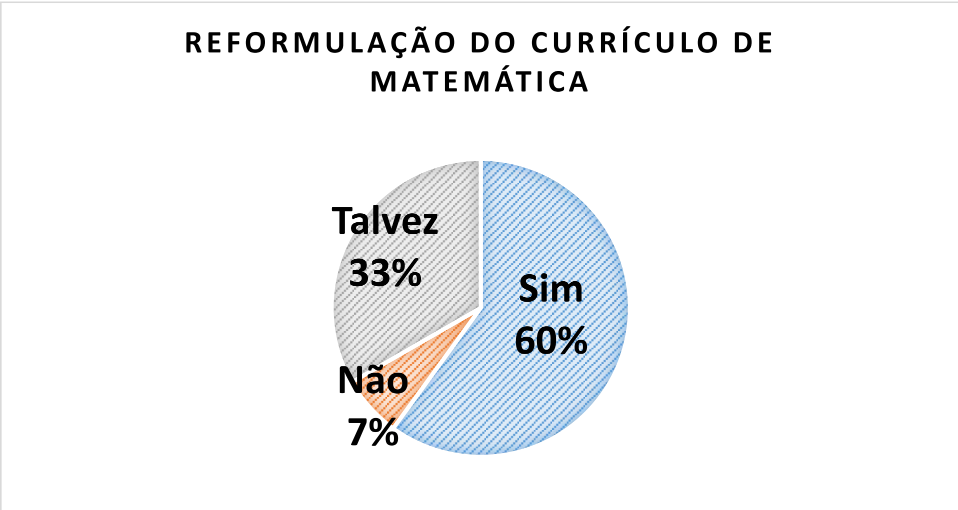
9. Você acredita que seria importante reformular o currículo escolar de modo que o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática seja mais presente? Justifique.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

[49] TA2, “2) [...] c) Conforme altera-se o valor de X com o controle deslizante, geram-se coordenadas que são traduzidas por pontos azuis e rosa que deixam seu rastro no Plano Cartesiano. Dessa forma,
- todos os pontos rosa formam o gráfico da área do retângulo rosa em função do tamanho de X (chamaremos de função q);
- todos os pontos azuis formam o gráfico da área do triângulo azul em função do valor de X. (chamaremos de função t).”

Então, a partir das respostas obtidas a ela, formulei o gráfico de setores da Figura 62.

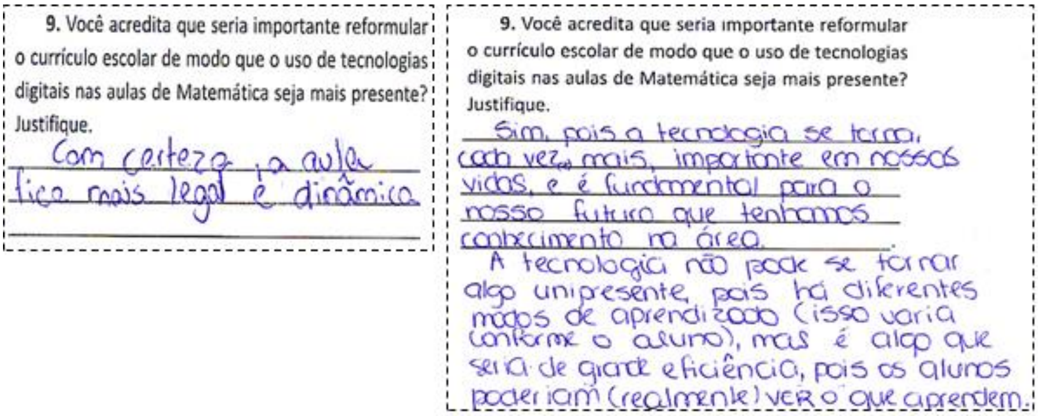
Figura 62 - Questionário, questão 9: gráfico de setores.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

O gráfico mostra que concordam plenamente com a mudança no currículo 9 dos 15 alunos que responderam ao questionário. Os motivos pelos quais concordam evidencio com os recortes das respostas do aluno 7 e da aluna 10 (Fig. 63), que resumem todas as outras justificativas dadas à escolha dessa alternativa.

Figura 63 - Questionário, questão 9: respostas alunos 7 e 10, respectivamente.



9. Você acredita que seria importante reformular o currículo escolar de modo que o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática seja mais presente? Justifique.

Com certeza, a aula fica mais legal e dinâmica.

9. Você acredita que seria importante reformular o currículo escolar de modo que o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática seja mais presente? Justifique.

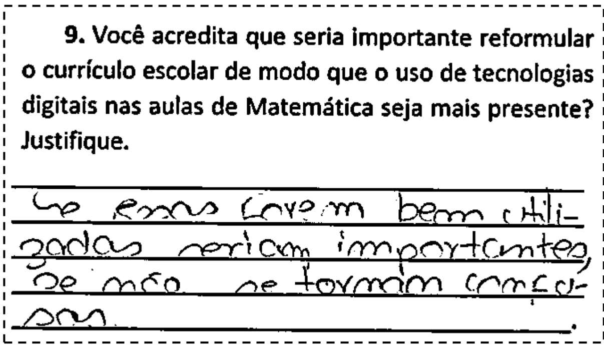
Sim, pois a tecnologia se torna, cada vez mais, importante em nossas vidas, e é fundamental para o nosso futuro que tenhamos conhecimento na área.
A tecnologia não pode se tornar algo unipresente, pois há diferentes modos de aprendizado (isso varia conforme o aluno), mas é algo que seria de grande eficiência, pois os alunos poderiam (realmente) ver o que aprendem.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Ou seja, as argumentações que justificam o posicionamento pró-mudanças relacionam-se aos fatos de aulas com mídias digitais serem mais legais e dinâmicas, de a tecnologia estar cada vez mais presente em nossas vidas, e de ser uma maneira de aprendizado eficiente em que os alunos conseguem realmente “ver” o que aprendem em Matemática. Me entusiasmei, inclusive, com a perspectiva de diferentes modos de aprendizados subjetivos indicados pela aluna 10, sobre a qual concordo e discorro com certa frequência nesse trabalho de pesquisa. Essa mesma aluna, ao final do TA2, inclusive também havia comentado que “Fica lindo aprender assim (com manipulações no GeoGebra)! Muito melhor do que uma aula expositiva. Adorei”.

Já 5 dos 15 alunos acreditam na importância de uma reforma, mas com uma ressalva: afirmam a necessidade, enquanto as tecnologias digitais são introduzidas em sala de aula, de uma utilização adequada de tais mídias à aprendizagem matemática. Como destaco Figura 64.

Figura 64 - Questionário, questão 9: resposta aluna 13.

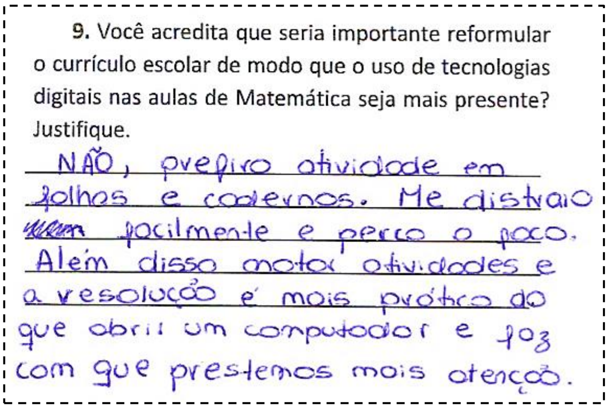

9. Você acredita que seria importante reformular o currículo escolar de modo que o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática seja mais presente? Justifique.

Se essas forem bem utili-zadas seriam importantes, se não se tornam confu-sas.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

E apenas uma aluna (3) não concorda com a utilização de recursos digitais em aulas de Matemática, pois defende que aulas tradicionais com recursos papel-caneta são mais práticos e proporcionam menos distrações à aprendizagem do que os primeiros (Fig. 65).

Figura 65 - Questionário, questão 9: aluna 3.


9. Você acredita que seria importante reformular o currículo escolar de modo que o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática seja mais presente? Justifique.

NÃO, prefiro atividade em folhas e cadernos. Me distraio ~~[illegible]~~ facilmente e perco o foco. Além disso anotar atividades e a resolução é mais prático do que abrir um computador e faz com que prestemos mais atenção.

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Por outro lado, a aluna 3 optou por pensar-com os recursos do GeoGebra em vez do recurso papel-caneta em várias resoluções durante o TA1 e o TA2, obtendo ótimos resultados, sendo alguns notáveis em recortes que apresentei até agora. Fato que me fez lembrar de uma perspectiva pessoal passada, que talvez possa ir ao encontro do motivo desse sentimento revelado pela aluna. Há alguns anos, enquanto ainda frequentava a Escola, e mesmo quando recém ingressa na Faculdade, considerava que as tecnologias digitais apenas complicavam o estudo das disciplinas obrigatórias, uma vez que ficava ansiosa em experimentar novas maneiras de construir conhecimento, consequentemente fugindo de minha zona de conforto.

Entretanto, logo que conheci e estudei sobre inúmeras possibilidades que o pensar-com o computador na matemática me abasteciam tanto quando aluna quando como professora, esse meu ponto de vista deu lugar ao entusiasmo de aprender experimentando. Conquanto, a convergência da minha experiência com a opinião atual da aluna é apenas uma especulação da minha parte.

Compreensões que também desconstruíram outro de meus preconceitos passados sobre essas tecnologias: de que elas eram desnecessárias, implicando compreender ideias análogas às possíveis em aulas tradicionais, porém em um período maior de tempo. Porém, esse segundo motivo, não posso associar à posição da aluna, pois ele advém do fato dos recursos que lembro terem sido sugeridos pelos meus professores na escola não serem semelhantes ao GeoGebra, mas mais como os descritos por Gravina e Santarosa (1998) a seguir:

> Nos dias de hoje ainda é grande a oferta de programas [...] que mesmo tendo interface com interessantes recursos de hipermídia (som, imagem, animação, texto não linear), nada mais oferecem aos alunos do que ler definições e propriedades e aplicá-las em exercícios práticos (tipo tutorial) ou testar e fixar ‘conhecimentos’ por meio da realização de exercícios protótipos e repetitivos, que no máximo avançam em grau de dificuldade” (GRAVINA & SANTAROSA, 1998).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A dependência e a insegurança iniciais de meus alunos ao migrarem do conforto de aulas majoritariamente passivas intermediadas por recursos estáticos de aprendizagem para um ambiente ativo de Geometria Dinâmica que propus, notei que, aos poucos, começaram a dar lugar ao entusiasmo da descoberta e à construção de aprendizagens de caráter não tradicional. Esse processo foi permeado por barreiras, as quais deviam ser desconstruídas, moldadas a definições geométricas imaginadas apenas por meio de recursos estáticos e pela constituição do sinônimo “calcular” ao “fazer Matemática: “Nunca vi ter que escrever mais do que calcular em um trabalho de Matemática!”, exclamou um deles durante o desenvolvimento do primeiro trabalho avaliativo.

Visto que o controle deslizante contribuía com o entendimento acerca de variáveis, o estudo funções com o GeoGebra começou a se tornar natural. Com ele, os alunos inclusive foram capazes de pensar de mais de uma maneira diferente àquelas possíveis sem ele; uns optaram por argumentar a partir de ações com as figuras geométricas, outros, com o traçar do gráfico enquanto deslizavam o controle.

Formulei, entretanto, algumas questões cujas soluções não restringiam a necessidade de um pensamento dependente às interações com o software. Logo, para respondê-las, diferentes alunos optaram ora por pensar-com as tecnologias digitais, ora de forma puramente algébrica.

E, respondendo às últimas questões do questionário, a maioria dos alunos evidenciou dois aspectos que concordam com minhas análises teóricas. O primeiro é que alguns recursos disponíveis no GeoGebra - controle deslizante, pontos com rastro e polígonos manipuláveis - fizeram parte de um processo efetivo na construção de conhecimentos matemáticos discentes. O segundo, que a reformulação do currículo de Matemática a fim de que recursos digitais estejam mais presentes em aulas da Disciplina é necessária.

Segundo Goldenberg (2000),

> Uma das maiores forças de crescimento e de evolução contemporâneos da Matemática e do ensino matemático é o poder de novas tecnologias. Na Matemática, os computadores ganharam campos inteiramente novos. Na educação, eles elevaram a importância de certas ideias, criaram alguns problemas e tópicos mais acessíveis, e provocaram novas maneiras de representar e lidar com informações matemáticas, suportando escolhas de conteúdo e pedagogia que nós nunca realizamos antes (GOLDENBERG, 2000, p.01).

Então, em consonância a esse ângulo de novas escolhas e possibilidades, além de promover investigações a partir dos resultados obtidos até aqui, este capítulo será tanto um espaço para críticas em relação às atividades que propus quanto para reflexões sobre como torná-las mais interessantes no âmbito da aprendizagem matemática escolar.

Em minha opinião, quem tem prazer em fazer Matemática o tem, porque a consegue entender, porque se sente desafiado e porque tem ânsia por descobertas. Concernente a essas premissas, o ensino de funções suportado por recursos digitais tem a capacidade de proporcionar aulas passíveis tanto a múltiplas interpretações, as quais impulsionam maior probabilidade de construção subjetiva de relações que propiciem a constituição de conhecimentos matemáticos, quanto a de descobertas decorrentes de manipulações peculiares.

> Conhecimento explícito matemático é mais do que enunciar uma dada proposição ou procedimento, envolve sabermos as razões e as relações, sermos capaz de explicar a outros por que é assim, bem como relacionar ideias particulares ou processos (VELOSO et al, 2005, p.11).

E, para aqueles que ainda não adquiriram certa afinidade com a Disciplina, o trabalho com o computador ainda atua abordando outra tentativa de conquista a partir de sua capacidade em possibilitar uma abordagem dinâmica para o estudo de Matemática, logo mais realística do que a estática tradicional. Ou seja, assim como constatam Gravina e Santarosa (1998), “Dos limites do real passa-se ao possível”. Ideias reiteradas ainda por Goldenberg (2000):

> O espaço da tela sozinho já torna possível um alcance mais amplo de ideias matemáticas, com mais maneiras de representar e manipulá-las. Essa versatilidade também acomoda uma grande variedade de estilos de aprendizagem e de ensino, oferecendo tanto configurações educacionais como enigmas, micromundos (ambientes projetados especificamente para educação, mas semelhantes a uma ferramenta em sua estrutura), sistemas tutoriais, ambientes de programação matemática, visualizações dos domínios matemáticos da estatística ao cálculo, ferramentas de construção geométrica, e mais (GOLDENBERG, 2000, p. 2).

O que também é enfatizado por Borba e por Penteado (2001, p.46) ao alegarem que “a sinergia (cooperação mútua) é imensa entre uma proposta que enfatiza a pesquisa por parte dos alunos e uma mídia que facilita tal empreitada”.

Perspectivas educacionais que, associadas ao que exponho em meu trabalho nos capítulos anteriores, me fazem rumar a argumentar sobre minhas primeiras duas perguntas norteadoras secundárias, que havia estabelecido já em meu projeto de pesquisa: “Como posso associar o trabalho de funções de 1º e de 2º grau com a

Geometria Dinâmica?” e “Como o trabalho associativo entre Geometria e Funções colabora para a compreensão de ambos os conteúdos?” Posso dizer que a primeira já respondi e exemplifiquei quando relato o planejamento e a execução dos Trabalhos Avaliativos que proponho à minha unidade-caso, pois eles constituem uma possibilidade de associação entre o trabalho de funções e um ambiente digital interativo. Já quanto à segunda, ainda posso explorar novas argumentações a respeito, o que faço a partir do parágrafo a seguir.

De acordo com as argumentações teóricas que trouxe e das confirmações práticas apresentadas, confirmo que um estudo de funções subsidiado por manipulações geométricas em um software digital pode ser moderno, humano, dinâmico e experimental-com-tecnologia (BORBA; PENTEADO, 2001). Ou seja, tem a capacidade de promover construção de saberes da experiência (LARROSA, 2002) e possibilidades tanto de criação de problemas intrínsecos à mídia disponível (BORBA, 2009) quanto de entender modelos pensando sobre o funcionamento das coisas – logo, de pensar matematicamente (OGBORN, 1997).

E, apesar do foco de estudo que propus ter sido funções de 1º e de 2º grau, as explorações geométricas realizadas no processo contribuíram para o aprimoramento do estudo de Geometria que vinha sendo realizado com a 9AH desde anos anteriores. Inclusive, se não houvesse planejado tal estudo de funções em coordenação com manipulações geométricas, provavelmente não discutiria assuntos relacionados à Geometria com a Turma, pois eles não constavam em nosso conteúdo escolar programático. Isso posto, impulsiono-me a me posicionar sobre tal assunto: considero que seja importante abordar Geometria em todos os anos escolares, associando-a de todas as maneiras criativas possíveis a outros conteúdos matemáticos. O que Lorenzato (1995) sustenta ao afirmar que o aluno que não aprende geometria não se torna apto a interpretar o mundo ou a comunicar suas ideias de maneira plena, formulando uma visão distorcida dos limites da Matemática. E, consequentemente,

> Os estudos de Geometria da 5ª à 8ª série[50] devem favorecer as oportunidades para os alunos realizarem suas primeiras explorações de modo sistemático. É nessa fase que as primeiras deduções lógicas são construídas [...] (LORENZATO, 1995, p.08).

Logo, para isso, coloca que é muito importante o uso de recursos com que os alunos possam interagir e abstrair significados – assim como planejei o Geogebra o TA1 e no TA2. “O apoio do material didático, visual ou manipulável, ainda é

[50] Ou seja, de 6ª a 9º ano.

fundamental. Aliás, o material didático sempre será necessário porque ele simplesmente provoca a imaginação em qualquer idade" (LORENZATO, 1995, p.08).

Dessa maneira, me impulsiono a responder minha pergunta norteadora primária de pesquisa, de maneira que complemento as argumentações relacionadas às secundárias, pois ela implica uma resposta fundamentada em uma análise de como é possível o estudo que aqui defendo: Quais são possibilidades ao se utilizar o software GeoGebra para trabalhar o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau de modo a torná-lo um recurso para "pensar-com" no processo de produção de conhecimento? De partida, constato que as possibilidades ao se utilizar o GeoGebra para trabalhar o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau são inúmeras, entretanto apenas um subconjunto dessas pode ser definido como possibilidades para se "pensar-com". A partir de minha pesquisa, então, abstraio algumas conclusões específicas a respeito desse subconjunto.

Entre elas, a de que tanto o professor quanto os alunos poderem assumir o papel de construtor do arquivo do GeoGebra a ser manipulado. Quando for o professor que o construir, é interessante que os problemas associados promovam exploração, por parte dos alunos, dos objetos digitais nele presentes; de modo que a responsabilidade de manipular e explicar abstrações não seja apenas do professor, pois o pensar-com envolve a estruturação de um conhecimento por meio de uma experiência que só é possível se vivida pelo sujeito aprendiz. Agora, quando é o aluno o responsável pela construção, ou o fará de maneira autônoma explorativa com um objetivo final instruído pelo professor inicialmente, ou seguindo um passo a passo dado. Se seguir uma sequência de passos, aconselho que o professor esteja atento a formulá-la de maneira autoexplicativa; ou seja, de modo que o aluno consiga compreender por que cada procedimento que deve realizar realmente é necessário para a construção objetivada. De maneira contrária, a interação inicial com o software será, na verdade, um trabalho mecânico. Uma outra sugestão ainda seria solicitar uma construção de um segundo objeto digital, diferente do primeiro, cujo passo a passo seja parecido ao já realizado. Consequentemente, o aluno precisaria repensar suas ações passadas com o software de modo a compreendê-las e conseguir adaptá-las a fim de obter o novo produto requerido – assim como intentei instruir no final do passo a passo que escrevi para a construção do arquivo digital respectivo ao TA2.

Construído o arquivo a ser manipulado, então, é relevante que os problemas respectivos criados realmente sejam problemas a serem solucionados. Isto é, não é muito proveitoso para promover a aprendizagem formular perguntas cujas respostas não necessitem de reflexões para serem respondidas; por exemplo, dado um gráfico no arquivo, pedir para que o aluno determine a abscissa de um ponto quando dada a ordenada ou vice-versa; questão[51] que acabei criando para o TA1. O que me remete ao último aspecto que concluo para a resposta de minha pergunta primária: os problemas criados, preferencialmente, podem propor um trabalho com o software diferente daquele possibilitado sem ele.

Não digo, porém, que o motivo de criar perguntas intrínsecas ao pensar-com o software é apenas o fato delas serem diferentes, logo, possivelmente atraentes para aqueles acostumados com aulas tradicionais com recursos não-digitais. O motivo é, principalmente, que o fato de serem diferentes implica reorganizar as conexões nas redes de ideias que podemos estabelecer a respeito de um determinado assunto matemático (GARCIA, 2009). Além disso, essa criação de problemas pode ser feita também pelos alunos, por exemplo quando percebem alguma possível propriedade ao manipular o software e a decidem tentar provar elencando “perguntas-teses”.

Outra sugestão é a contextualização desses problemas apresentando a existência exterior à Matemática Pura de uma aplicação do conteúdo que está sendo estudado. A atração sempre tende a ser maior quando interesses pessoais são atingidos, se tornando interessante o professor utilizar contextos que se aproximem do universo dos alunos. Mas além da provocação atrativa, conforme um de meus alunos uma vez me explicou, há alunos, assim como ele, que apenas conseguem compreender um processo matemático quando a Matemática “conversava com eles”, ou seja, quando apresentava uma problematização dotada de sentido subjetivo a todos aqueles números e letras dados, assim inferindo motivação pessoal para efetuar as operações requisitadas.

No decorrer desse tipo de aula, organizada a fim de desenvolver estudos dirigidos experimentais com o computador, ressalto também que deve caber ao professor ser o mediador entre o processo informal e o formal de aprendizagem. Confesso, contudo, que notei, a partir da análise dos áudios[52] gravados durante a realização do TA1, que quase entreguei algumas respostas aos alunos, extrapolando o papel que deveria assumir. Episódios que me servirão de contraexemplo em minhas intervenções doravante.

[51] TA1, “1) [...] d) [...] XII. considerando a função azul, diga as coordenadas dos pontos $D(8, y_d), E(0, y_e), F(x_f, 0)$”.

[52] Apenas coletei áudios durante o TA1, o que explico no capítulo Metodologia.

Em sequência, em mesma linha analítica de dados que apresentei ao longo desse trabalho, sigo a me posicionar sobre aqueles coletados por meio das primeiras três questões do questionário que apliquei com a 9AH após a realização dos TAs, as quais complementaram a descrição do contexto e do perfil da Turma. Primeiramente, a partir da questão 3[53], noto que a maioria dos alunos informou que, em aulas especificamente compostas por estudos dirigidos, prefere interagir com recursos digitais a com recursos tradicionais. O que contribui a fomentar minha tese positiva de que os TAs, formulados de modo a serem estudos dirigidos (principalmente o TA2, pois os alunos não possuíam conhecimento escolar prévio sobre funções de 2º grau), devem ter propiciado um ambiente favorável a construção de significados, a ponto da Turma eleger os recursos digitais os mais propícios a sua aprendizagem.

Então, tomando os dados restantes que obtive com a questão 3, a respeito de aulas de exposição de conteúdo ou de resolução de exercícios, consigo relacioná-los com as justificativas ao desapreço pela Matemática (evidenciado na questão 1[54]) de alguns alunos, relatadas na questão 2[55]. Primeiro percebo que vários alunos justificaram, na questão 2, não gostar de Matemática pelo fato do processo de construção de conhecimentos matemáticos ser laborioso; e, em sequência na questão 3, que esses mesmos responderam que preferem tanto em aulas expositivas quanto em de exercícios matemáticos pensar-com recursos que sejam não-digitais. Consequentemente, elenco duas teses para esses pares de respostas: ou tais alunos consideram o pensar-com recurso digital mais ativo, logo indo ao encontro do que relataram desgostar na Matemática; ou não tiveram experiências significadas com esses tipos de organização de aula com mídias digitais.

Dessa maneira, cresço como professora quando percebo que próprios planejamentos de aulas anteriores poderiam ser reformulados a fim de que incentivem mais o pensamento matemático de meus alunos. Nesse contexto, resgato que introduzi Funções à 9AH manipulando e expondo construções no GeoGebra com o projetor, assim como solicitei um trabalho avaliativo em que apenas precisariam

---

[53] Questionário, “3. Em qual das organizações de aula de matemática abaixo você considera que a sua aprendizagem é mais efetiva? Numere as alternativas de 1 a 6, sendo 1 a menos efetiva e 6 a mais efetiva. ( ) Aula expositiva no quadro. ( ) Aula de exercícios com material escrito. ( ) Aula de estudos dirigidos com material escrito. ( ) Aula expositiva com recursos digitais. ( ) Aula de exercícios com recursos digitais. ( ) Aula de estudos dirigidos com recursos digitais”.

[54] Questionário, “1. Você gosta de Matemática? ( ) Muito. ( ) Significativamente. ( ) Um pouco. ( ) Nem um pouco.

[55] Questionário, “2. Por quê?”.

utilizar o GeoGebra para gerarem gráficos referentes a leis de funções criadas[56]. Possibilidades de aprendizagem não descartáveis, mas que hoje percebo terem propósitos distantes aos dos TAs, pois, com elas, incentivo uma aprendizagem passiva e provavelmente desinteressante a ponto de poderem ter influenciado as últimas respostas da questão 3 do questionário que abordei no parágrafo anterior.

Por fim, considero que minha melhor resposta à minha terceira e última pergunta secundária de pesquisa consigo esquematizar no subcapítulo a seguir: Como criar uma atividade escolar que aborde o dinamismo de funções de 1º e de 2º grau enfatizando o pensar-com o recurso GeoGebra? Nele, finalizo a apresentação de minhas percepções a respeito de todo o estudo abordado nesse trabalho, assim como a reescrita que proponho para o TA1 e para o TA2.

Por conseguinte, futuramente pretendo encontrar uma oportunidade para aplicar tais trabalhos reescritos com outra unidade-caso – talvez os adaptando um pouco mais ao seu contexto. De modo que possa aprimorar cada vez mais minhas perspectivas a respeito do ensino de funções em ambientes dinâmicos digitais, e me motivar a continuar as pesquisas e análises teóricas, assim como a criar novas possíveis atividades.

5.1. ALTERAÇÕES NAS ATIVIDADES PRÁTICAS

Apenas após inúmeras reflexões propiciadas pelo estudo realizado para redigir o presente trabalho, fui capaz de entender o real significado de criar um projeto cujos objetivos fossem: impulsionar os alunos a um pensar diferente àquele enraizado pelos recursos estáticos de aulas tradicionais; propiciar um ambiente dinâmico e passível à construção de saberes de experiências a respeito de funções de 1º e de 2º grau (e, secundariamente, a respeito da possibilidade de associação desse conteúdo com a Geometria); arquitetar um espaço para que a cena do solucionar pudesse, em algum instante, ser roubada pela do criar discente. Tais compreensões, portanto, influenciaram-me à criação de novas versões reescritas do TA1 e do TA2, assim como de seus respectivos arquivos digitais no GeoGebra, de maneira a torná-los mais suscetíveis a atingir tais objetivos, e corroborar as principais ideias educacionais que disserto – relacionando-os, diretamente, com a teoria do “pensar-com” o software.

[56] No subcapítulo Contexto e Perfil da Turma do capítulo Metodologia.

Apresentarei e explicarei essas modificações realizadas a seguir. As novas versões encontram-se, integralmente, nos Apêndices D e E.

A fim de contribuir com a minha tentativa de reorganização integral do estudo proposto imersa na concepção experimental-com-tecnologias digitais, primeiramente, reesquematizei a estrutura do TA1 para que, assim como o TA2 já fazia, apresentar a definição e trabalhar com funções de 1º grau pela primeira vez em sala de aula. Definições geométricas também tornei, agora em ambos os TAs, aspectos a serem concluídos apenas após argumentos que fossem subsidiados a partir de manipulações digitais – no TA1 original, já eram dadas inicialmente, para que, então, se trabalhasse com elas. Ainda inseri espaços para esboços - exemplificados pela questão 2) X) a do TA2 Reescrito (Fig. 66) - respectivos às ações realizadas na Janela de Visualização do GeoGebra, com o intuito de melhor mapear os pensamentos realizados durante o processo.

Figura 66 - TA2 Reescrito, questão 2) X) a.

X) Quanto maior a área de cada um de seus pedaços, maior aderência a uma rocha Bob Esponja adquirirá, implicando sua regeneração. Analisando os gráficos “área desses pedaços” obtidos,

(a) manipule o controle deslizante a fim de que os pontos E e G evidenciem o local do gráfico ao qual pertencem que indica a área dos maiores pedaços retangular e triangular possíveis, respectivamente, de Bob. Faça, então, um esboço do que obteve na Janela de Visualização no espaço a seguir.

ESBOÇO

CÁLCULOS

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

A seguir, reanalisei e reescrevi as questões de maneira que sugerissem e impulsionassem o estudo completo baseado nas experimentações com o software, como exemplifico com as Figuras 67 e 68.

Figura 67 - Parte da questão 1) d) V (TA1) reescrita como questão 7) a (TA1 Reescrito).

V. as funções q e t são crescentes.

Explique essa afirmação pela análise gráfica

(TA1)

7) As funções z e r são crescentes.

(a) Como você poderia tentar explicar essa afirmação considerando a posição dos pontos azuis e rosa gerados a partir da manipulação do controle deslizante?

(TA1 Reescrito)

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 68 - Questão 2) c) VII (TA2) reescrita como questão 2) VIII (TA1 Reescrito).

VII. podemos questionar: em que intervalos numéricos dos respectivos Domínios, cada função é (a) crescente, (b) constante, (c) decrescente?

(TA2)

VIII) Em que intervalos numéricos dos respectivos Domínios, conforme aumentamos o valor de X,

(a) a área do pedaço retangular aumenta (a função r é crescente)? ______________________________.

(b) a área do pedaço retangular permanece constante (a função r é constante)? __________________.

(c) a área do pedaço retangular aumenta (a função r é crescente)? ______________________________.

(d) a área do pedaço triangular aumenta (a função t é crescente)? ______________________________.

(e) a área do pedaço triangular permanece constante (a função t é constante)? __________________.

(f) a área do pedaço triangular aumenta (a função t é crescente)? ______________________________.

(TA2 Reescrito)

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Mesmo assim, as questões 3 e 5 do TA1 (Apêndice A) e 2) II, e IV do TA2 (Apêndice B) não pude alterar de modo a estabelecer esse objetivo, pois são exclusivamente teórico dissertativas. Especificamente, elas estruturalizam o raciocínio do novo conhecimento que se pretende construir por meio de indagações sobre definições de perímetro e área – já estudados anteriormente pelos alunos - e de apresentações do formato da expressão geral de funções de 1º e de 2º grau quaisquer, para que, então, sejam identificados pelos alunos os coeficientes reais das que estão sendo trabalhadas.

Alguns cálculos algébricos, entretanto, mantive, mas como subitens de propósito comprovativo a conclusões já obtidas por meio da interação no GeoGebra – como na questão 9) b do TA1 Reescrito (Fig. 69). O fiz, pois a interpretação com o software, apesar de ser o foco de pesquisa, é apenas uma forma de se pensar o conteúdo, assim como já debati na fundamentação teórica; então considerei importante que houvesse algumas questões que intermediassem essas outras maneiras a fim de possibilitar um aprendizado plurificado e associativo – a partir da comparação entre interpretações puramente algébricas e interpretações geométricas dinâmicas, aproximando-me do que é feito na dissertação de Salin (2014) que trata da Teoria de Múltiplas Representações de Duval, a qual abordei no subcapítulo Trabalhos Correlatos.

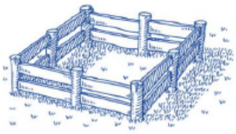
Figura 69 - TA1 Reescrito, Questão 9.

9) Para economizar na construção da horta, alguns alunos de Herbologia, que preferem trabalhar com moldes de formato tal como o rosa, querem descobrir para que tamanhos de L a utilização dele se torna mais econômica, em relação a gasto com cercamento, do que a do molde de formato tal como o azul.

(a) Descubra e escreva aqui essa informação após manipular e observar o comportamento de ambos os gráficos.

____.

(b) Prove algebricamente sua resposta.



CÁLCULOS

Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Algumas das minhas estratégias para incrementar a organização dos trabalhos foram: dividir algumas questões muito longas e que realizavam mais de uma indagação em questões com subitens, o que influenciou na renumeração da maioria delas; adicionar cores – as mesmas dos gráficos respectivos gerados no GeoGebra - a algumas palavras, para destacar quando me referia a cada uma das funções; trocar a formatação da letra “ele” de l por L, de modo a torná-la mais evidente, pois alguns alunos confundiram-na com a letra “i”, ocasionando problemas de comunicação, como já descrito no capítulo Resultados.

As problematizações envolvendo personagens (universo Harry Potter, Wolverine e Bob Esponja) foram mantidas. Entretanto fui mais cautelosa em relacioná-los de maneira mais constante aos enunciados das questões, utilizando variações da expressão “molde da planta” no TA1 e “pedaços de Bob” do TA2 para me referir aos objetos geométricos trabalhados. Acredito, ainda, que haveria como adaptar facilmente ambos os TAs de maneira a trocar os personagens principais abordados por outros que sejam da preferência dos alunos com que serão desenvolvidos.

Acrescentei, em ambos os trabalhos, uma questão final que sugere a criação, por parte dos alunos, de uma nova pergunta que envolvesse o objeto de estudo do trabalho, mas que apenas poderia ser respondida pensando com o GeoGebra. E posso dizer que de grande importância foi a inclusão dessas questões para meu sucesso em tentar interseccionar fielmente a teoria defendida nesse trabalho e o estudo de caso que o completa. Não havia criado anteriormente questão alguma que abordasse esse tema tão importante: a emergência de uma educação que ceda espaço para a criatividade; que não fique presa na cópia de resultados já prontos e que podem ser alcançados facilmente desde que a cultura da Internet conquistou seu espaço em nossa sociedade. Como já evidenciei, essa é uma percepção educacional defendida também por Borba (2002).

Sobre elementos específicos para atingir os objetivos alicerçados no TA1: eliminei as questões 1) d) XI[57] e XII[58], pois não eram problemas; e a questão 1) d) VII[59], pois envolvia apenas algebrismo e não era necessária na formação do conhecimento alvo. Apesar de acrescentar um item de construção geométrica no GeoGebra ao TA1 ser uma possibilidade para expandir o cenário de ações experimentais dele, assim como o primeiro do TA2, escolhi não acrescentá-lo por dois motivos: permitir que os alunos adquiram experiência com o software antes de solicitar a realização de construções, para que essas sejam mais acessíveis assim que propostas; e não alongar o período necessário para a realização do projeto constituído pelo TA1 e pelo TA2, pois um dos grandes problemas com o qual um professor sempre precisa lidar é o tempo.

Sobre elementos específicos para atingir os mesmos objetivos com o TA2: reelaborei a questão 1 (Apêndice B), que apenas indicava um passo a passo técnico para a construção do retângulo e do triângulo associados às funções área. Com as modificações, ela passa a fazer referência aos elementos específicos que deverão ser criados a cada passo e a organizar sequências de passos de modo a cada uma completar um objetivo evidenciado (Apêndice E).

Quanto aos arquivos respectivos ao TA1 e ao TA2 no GeoGebra, os renomeei de "triângulo_quadrado(1).ggb" para "moldes(1).ggb", e de "triângulo_quadrado(2).ggb" para "pedaços(2).ggb", a fim de terminar com a ênfase geométrica que apresentavam e de distingui-los mais facilmente. A única modificação que fiz na estrutura do "moldes(1).ggb", foi alterar o nome da variável "l" enunciada pelo controle deslizante, por "L", assim como feita nas questões. Na estrutura do "pedaços.ggb", contudo, não necessitei realizar ajustes para adequá-lo ao novo TA2.

Ainda, uma outra possibilidade de mudança nos arquivos do GeoGebra que me surgiu seria a criação de controles deslizantes adicionais que se associassem a cada uma das constantes das quatro leis de formação com que trabalhamos no TA1 e no

[57] TA1, "1) [...] d) [...] XI. considerando a função rosa, diga as coordenadas dos pontos $A(2, y_A)$, $B(0, y_B)$, $C(x_C, 0)$.
[58] TA1, "1) [...] d) [...] XII. considerando a função azul, diga as coordenadas dos pontos $D(8, y_D)$, $E(0, y_E)$, $F(x_F, 0)$.
[59] TA1, "1) [...] d) [...] VII. se professor Neville estipulasse que a área da horta deveria ter $36m^2$, quantos metros de cerca seriam necessários para se cercar uma horta dessa nova planta mágica com formato quadrado? E para uma com formato triangular?

TA2. Todavia, não os inseri em moldes(1).ggb ou em pedaços(2).ggb, mas imaginei outra alternativa para um trabalho com eles, como explico a seguir.

Os coeficientes da lei de formação de cada função eram constantes. Ou seja, as funções enunciadas no TA1 e no TA2, que podiam ser escritas, respectivamente, da forma $f(x) = ax + b$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$, não eram dinâmicas no sentido de podermos investigar as possíveis transformações gráficas que poderiam ocorrer se alterássemos o valor de suas constantes a, b e c (assim como com a calculadora gráfica no exemplo dos alunos de Biologia). Ainda assim, inseri no novo TA1 a questão 6 (Apêndice D), que aborda o coeficiente b e sua relação ao fato de uma função de 1º grau ser ou não Linear; e, no TA2 original, a questão a 2) c) IV[60], que trata da relação de uma função de 2º grau com seu coeficiente c, se tornou a “2) V”[61] no TA2 Reescrito.

Durante as aulas em que elas foram abordadas, consequentemente, senti a necessidade de podermos manipular também o valor dessas constantes para que, por meio de várias alterações, conseguissem conjecturar soluções baseadas em experimentações mais abrangentes. Por exemplo, quando incentivei o aluno 5 a gerar o gráfico da função $a(x) = -4x$ e compará-lo com o da $q(l) = 4l$, para que pensasse a respeito da relação entre o sinal do coeficiente angular e o fato da função ser crescente ou decrescente (capítulo Resultados). Apesar desse processo ter auxiliado em sua compreensão, se eu não estivesse mediando esse pensamento experimental, ele poderia não ter tanta certeza em sua argumentação. Isso posto, considero essa consequente incerteza totalmente racional, uma vez que ela foi fundamentada em apenas um caso; e uma propriedade matemática não pode ser demonstrada baseada em apenas um exemplo, como fizemos.

Durante o replanejamento descrito dos arquivos que constituem o TA1 e o TA2, entretanto, averiguei que, para inserir esses novos recursos relacionados ao dinamismo de coeficientes, seria necessário, ainda, criar um terceiro e um quarto arquivo do GeoGebra. O motivo deve-se ao fato das funções trabalhadas estarem inseridas em um contexto criado pelas problematizações e pelas figuras geométricas dinâmicas associadas. Logo, a possibilidade de alteração dos coeficientes das funções, nesse caso, não seria sucedida por uma interpretação verossímil. Tomando, por exemplo, a função azul: ela representa o perímetro de um quadrado de lado $L, L \in$

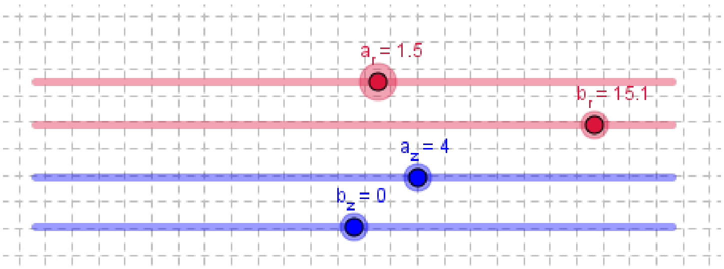
[60] TA2, “2) [...] c) [...] IV. vocês conseguem perceber uma influência do valor de c de cada função em seu respectivo gráfico? Explique”.

[61] TA2 Reescrito, “2 [...] V) Podemos chamar a constante c de termo independente, pois não aparece como coeficiente de alguma variável não trivial. Você consegue perceber a influência do valor de c de cada função em seu respectivo gráfico? Explique”.

$[0;10]$, podendo ser escrita pela lei $f(x) = 4L$; ou seja, com coeficientes $a = 4$ e $b = 0$. Obtendo a habilidade de alterar o coeficiente a de 4 para qualquer outro número n, ainda que fosse inteiro e positivo, a nova lei de formação poderia passar a representar a dependência entre o perímetro de um polígono regular de n lados e o tamanho de seu lado; porém poderia não representar mais o quadrado de nossa problematização.

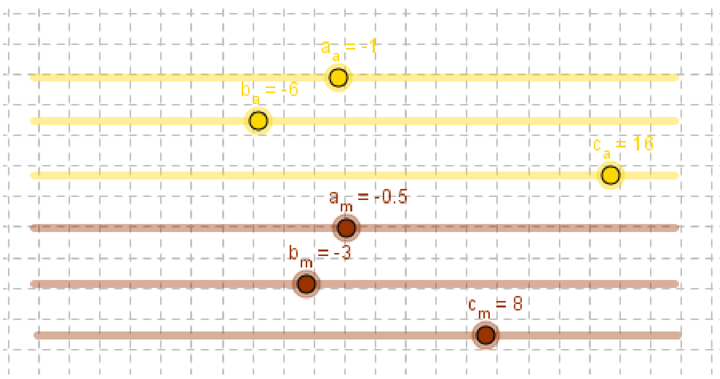
Por conseguinte, criei o arquivo “coeficientes_dinâmicos(1).ggb”, que relaciona-se às funções de 1º grau do TA1 a partir dos controles deslizantes (Fig. 70) denominados a_r, b_r, a_z, b_z, que correspondem aos coeficientes angulares e lineares da função rosa e da função azul, respectivamente. Então, criei o arquivo “coeficientes_dinâmicos(2).ggb”, que, por sua vez, relaciona-se às funções de 2º grau do TA2 a partir de outros seis controles deslizantes (Fig. 71) intitulados a_a, b_a, c_a, a_m, b_m, c_m, que corresponde aos coeficientes a, b e c da função amarela e da função marrom, respectivamente.

Figura 70 - coeficientes_dinâmicos(1), controles deslizantes.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Figura 71 - coeficientes_dinâmicos(2), controles deslizantes.



Fonte: acervo da pesquisadora (2016).

Assim, cada par ou trio de controles da mesma cor gera um gráfico de função. E, cada arquivo, ao ser aberto, encontra-se com os controles posicionados no valor correspondente aos coeficientes fixos das funções trabalhadas nos TAs, formando, portanto, os mesmos gráficos que são traçados durante o desenvolvimento deles. Ao movimentarmos qualquer controle por meio de arrastes para a direita ou para a esquerda, alteramos seu valor com um incremento de $0,1$ unidades positivas ou negativas, respectivamente, no intervalo $[-20; 20]$. Inclusive os coeficientes a, que apesar de precisarem, por definição de função de 1º ou de 2º grau, variar em um intervalo $[-20; 0) \cup (0; 20]$, ao permitir que atinjam o valor nulo, ganhamos a oportunidade de discutir o porquê de não representarem mais tais tipos de funções. Movimentos que acarretam transformações significativas nos gráficos de cada função associada. Sendo que tais valores foram estabelecidos de maneira a proporcionar uma visualização das possíveis modificações gráficas de maneira satisfatória a níveis estéticos, porém o incremento poderia ser tão pequeno quanto quiséssemos e o intervalo numérico tão grande quanto quiséssemos.

Constato, porém, ainda outras duas intempéries para o acréscimo desses dois novos arquivos do GeoGebra ao projeto dos TAs: excesso de informação introdutória e tempo. Ou seja, como os novos TA1 e TA2 foram reprojetados a fim de introduzirem, pela primeira vez em sala de aula, os conteúdos de funções de 1º e de 2º grau, talvez, trabalhar com transformações gráficas a partir de seus coeficientes em consonância com todas as outras experiências iniciais torne o estudo sobrecarregado, logo confuso para os alunos. Ainda, se ainda assim acrescentássemos questões aos trabalhos avaliativos escritos que fizessem referências a essas transformações, necessitaríamos de mais tempo para solucioná-los, o que pode inviabilizar sua aplicação devido ao cronograma curricular escolar.

Portanto, uma solução sensata seria utilizá-los como complementação às discussões acarretadas durante a correção de ambos os trabalhos após a entrega deles. Eu os manipularia; comprovaria, a partir deles, as respostas dadas às questões evidenciadas anteriormente que envolvem o estudo dos coeficientes; e, por fim, para complementar as reflexões, poderia tentar introduzir algumas outras noções de transformações gráficas por meio da alteração dos coeficientes das leis de formação de uma função qualquer.

REFERÊNCIAS

ALVES, George S.; SOARES, Adriana B. **Geometria Dinâmica**: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: Anais do Workshop de Informática na Escola. 2003. p. 175-186.

BASSO, Marcus; NOTARE, Márcia Rodrigues. **Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica**. RENOTE, v. 13, n. 2, 2015.

BOGDAN, Robert C; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. 1994.

BORBA, Marcelo C. **Students' understanding of transformations of functions using multirepresentational software**. Doctoral Dissertation, Cornell University, USA. Published in 1994-Lisbon, Portugal: Associação de Professores de Matemática.1993.

______. **O computador é a solução: mas qual é o problema.** Formação Docente: Rupturas e Possibilidades, Campinas, SP: Papirus, p. 151-162, 2002.

______. **Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom**. ZDM, v. 41, n. 4, p. 453-465, 2009.

BORBA, Marcelo C; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, p.29-67, 2001.

BORBA, Marcelo C.; VILLARREAL, Mónica E. **Visualization, mathematics education and computer environments.** Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation, p. 79-99, 2005.

CUNHA, Igor G; MORAES, Priscila. **O Ensino de Funções e de Transformações Geométricas com o Auxílio do Software GeoGebra.** 66 f. Monografia - Pesquisa em Educação Matemática. Licenciatura em Matemática. Instituto de Matemática, UFRGS. 2008.

DA SILVA, Marisa Ferraz. **A Função Afim e Suas Aplicações**. 59 f. Monografia - Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didáticas. Instituto de Matemática, UFRGS, 2011.

DOS SANTOS, Dircélia. **Gráficos e Animações:** uma estratégia lúdica para o ensino-aprendizagem de funções. 187 f. Dissertação - Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática, UFRGS. 2010.

GARCIA, Vera Clotilde. **Função**: o professor conhece este conceito? VIDYA, v.29, n.2, p.43-52, jul/dez, 2009.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **A Pesquisa Científica**. Métodos de pesquisa. Plageder, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009. 175 p.

GUIMARÃES, Simone Uchôas et al. **As potencialidades do GeoGebra para a construção de material didático para o ensino de funções**. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657, v. 1, n. 1, p. CCLXXX-CCXCIII, 2012.

GOLDENBERG, E. Paul. **Thinking (and talking) about technology in math classrooms**. Issues in Mathematics Education, p. 1-8, 2000.

GRAVINA, Maria Alice; DE OLIVEIRA CONTIERO, Lucas. **Modelagem com o GeoGebra**: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? RENOTE, v. 9, n. 1, 2011.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila. **A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. Informática na Educação: teoria & prática, v. 1, n. 2, 1998.

HEUGL, H. The influence of technology in several roles of mathematics. In: Proceedings of the Conference Technology and its Integration in Mathematics Education (B. Kutzler ed.). Montreal, Canada. 2004. p. 1-35.

LARROSA, Jorge. **Notas sobre a experiência e o saber de experiência**. Espanha: Universidade de Barcelona, 2002.

______. **Experiência e alteridade em educação**. Revista reflexão e ação, Santa Cruz do Sul, v. 19, n. 2, p. 04-27, 2011.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar geometria?** A educação Matemática em Revista. Blumenau – SBEM, ano III, n. 4, 1 sem., 1995.

MORAES, Samir Aozani. **Ensino de Funções Polinomiais de 1º e 2º Graus**. 64 f. Monografia - Licenciatura em Matemática. Instituto de Matemática, UFRGS. 2013.

MORENO, Luis; HEGEDUS, Stephen J.; KAPUT, James J. **From static to dynamic mathematics**: Historical and representational perspectives. Educational Studies in Mathematics, v. 68, n. 2, p. 99-111, 2008.

MORENO, João B. **ENIAC**, primeiro computador do mundo, completa 65 anos. Tecnoblog. 2010. Disponível em https://tecnoblog.net/56910/eniac-primeiro-computador-do-mundo-completa-65-anos/. Acesso em 19/10/2016.

OGBORN, J. Modeling Clay for Thinking and Learning, pre-print. 1997.

PEA, Roy D. Cognitive technologies for mathematics education. **Cognitive science and mathematics education**, p. 89-122, 1987.

SALIN, Eliana Bevilacqua. **Matemática Dinâmica**: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas. 206 f.Tese – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática, UFRGS. 2014.

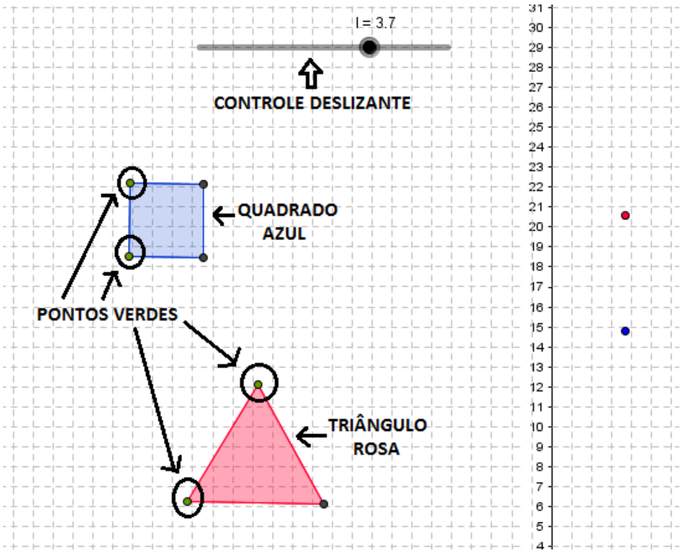
STAKE, Robert E. Case studies. In: DENZIN, N.; LINCOLN, Y. (Ed.). **Hand book of qualitative research.** 2. ed. Thousand Oaks: Sage, 2000.

VELOSO, E.; SERRAZINA, L.; SANTOS, L.; ROCHA; ALBUQUERQUE, C.; NÁPOLES, S. **A Matemática e a formação inicial de professores**. Texto para discussão, 2005. Disponível em <http://www.eduardoveloso.com/pdfs/matproof.pdf>. Acesso em 15/12/2016.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICE A – TRABALHO AVALIATIVO (PARTE 1)

Instrução 1: Todas as perguntas deverão ser respondidas nesta folha. Os cálculos necessários para responder a algumas questões devem ser anotados nos espaços de contorno pontilhado disponibilizados.



0) Abra o arquivo **triângulo_quadrado(1).ggb** no software GeoGebra. Manipule o quadrado azul e o triângulo rosa a partir dos pontos verdes (vértices) e do controle deslizante l; $l = [-10{,}10]$ e arrastando-os.

<u>Observação inicial:</u> Apesar do controle deslizante l ter sido definido com valor máximo igual a 10, ele poderia estender-se até o infinito positivo.Tal máximo foi estipulado por questões estéticas.

1) Leia a respectiva problematização a seguir:

Herbologia é a matéria de Hogwarts que estuda as propriedades e características das plantas mágicas e fungos em geral, incluindo os cuidados necessários e os principais usos de cada um deles. Algumas das plantas mágicas são ingredientes básicos para poções, outras podem fazer efeito por conta própria[62]. Além disso, é a matéria preferida de Neville Longbottom, ex-estudante da Grifinória que se tornou professor da Disciplina.

Na semana passada, professor Neville encontrou uma nova planta mágica, a qual percebeu que apenas desenvolve-se bem em hortas de formato perfeito de um quadrado ou de um triângulo equilátero. Constrói, por conseguinte, dois moldes de horta para serem utilizados por seus alunos: um em formato de quadrado com lado l e cor azul e outro em formato de triângulo equilátero com lado $\left(\frac{l}{2}+5\right)$ e cor rosa.

A partir da interpretação da problematização e das possíveis manipulações geométricas do arquivo em questão no GeoGebra, responda:

a) o que é um quadrado? Por que o quadrado do arquivo, mesmo depois de ser manipulado, continua sendo um quadrado?

---

[62]POTTERISH, Equipe. **Dicionário Madame Pince**: Herbologia. Disponível em: <http://wiki.potterish.com/index.php?title=Herbologia&oldid=13140>. Acesso em 31/5/2016.

____

b) o que é um triângulo equilátero? Por que o triângulo do arquivo, mesmo depois de ser manipulado, pode ser classificado como equilátero? E como ele classifica-se quanto aos seus ângulos internos? Explique.

____
____
____
____
____
____

c) o que é perímetro? Que fórmula pode ser escrita para se calcular o perímetro de um quadrado qualquer? E para o perímetro de um triângulo equilátero qualquer?

____
____
____

d) Conforme altera-se o tamanho de l com o controle deslizante, geram-se coordenadas que são traduzidas por pontos azuis e rosa que deixam seu rastro no Plano Cartesiano. Dessa forma,

- todos os pontos azuis formam o gráfico do perímetro do quadrado azul em função do tamanho de l (chamaremos de função q);

- todos os pontos rosa formam o gráfico do perímetro do triângulo rosa em função do tamanho de l (chamaremos de função t).

Logo,

I. pode-se expressar a lei de formação de q por $q(l) =$ ________________________________.

CÁLCULOS

II. pode-se expressar a lei de formação de t por $t(l) =$ ________________________________.

CÁLCULOS

III. ambas as funções q e t classificam-se como Funções Polinomiais ______________________.

IV. quais são os coeficientes angulares e lineares de q e de t?

____

V. as funções q e t são crescentes.

Explique essa afirmação pela análise gráfica,

pela análise das constantes das leis de formação,

e, então, enfatize-a por meio de alguns cálculos teste de coordenadas.

CÁLCULOS

VI. em que ponto $q(l) = t(l)$? O que significa essa igualdade geometricamente?

CÁLCULOS

VII. se professor Neville estipulasse que a área da horta deveria ter $36m^2$, quantos metros de cerca seriam necessários para se cercar uma horta dessa nova planta mágica com formato quadrado? E para uma com formato triangular?

CÁLCULOS

VIII. para economizar na construção da horta, os alunos de Herbologia querem que a cerca de uma horta tenha a menor extensão possível. Portanto, para que tamanhos de área de uma horta quadrada dessa nova planta mágica tornar mais econômica sua utilização à de uma triangular?

CÁLCULOS

IX. observando os gráficos formados de q e de t, nota-se que um dos dois apresenta um crescimento mais acentuado. Qual? Por quê?

CÁLCULOS

X. manipulando o controle deslizante e considerando a observação inicial, pode-se determinar o domínio de q sendo $D(q) = [0; +\infty)$ e o de t sendo $D(t) = [-10; +\infty)$. Por que o segundo intervalo não se inicia na abscissa zero?

CÁLCULOS

XI. considerando a função rosa, diga as coordenadas dos pontos $A(2, y_A)$, $B(0, y_B)$, $C(x_C, 0)$.

CÁLCULOS

XII. considerando a função azul, diga as coordenadas dos pontos $D(8, y_D)$, $E(0, y_E)$, $F(x_F, 0)$.

CÁLCULOS

APÊNDICE B – TRABALHO AVALIATIVO (PARTE 2)

Instrução 1: Todas as perguntas deverão ser respondidas nesta folha. Os cálculos necessários para responder a algumas questões devem ser anotados nos espaços de contorno pontilhado disponibilizados.

0) Abra o arquivo **triângulo_quadrado(2).ggb** no software GeoGebra.

1) Leia a respectiva problematização a seguir:

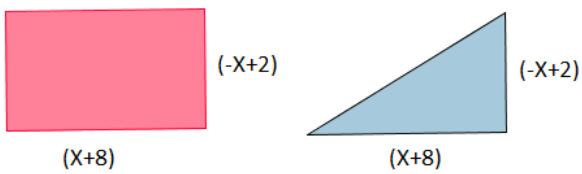
Esponja: a "fênix marinha" ou o "AquaWolverine"

O animal com maior capacidade de regeneração é a esponja do mar, ser colorido e de formas exóticas que vive no fundo dos oceanos. Sua capacidade de regeneração tão impressionante que, mesmo se for triturada num liquidificador, ela consegue renascer. "Em condições ideais, um indivíduo completo pode se reconstituir a partir de conjuntos celulares mínimos", afirma o biólogo marinho Márcio Reis Custódio, do Departamento de Biociências da Universidade de São Paulo (USP). Os ancestrais desses animais - que fazem parte do filo dos poríferos e podem ter até 2 metros de altura - surgiram há 1 bilhão de anos, período próximo ao do aparecimento das primeiras formas de vida no planeta[63].

Bob Esponja, personagem fictício de uma série de animação americana, que é uma esponja marinha, acaba, um dia, por acidente, dentro de um liquidificador com seus amigos. Para regenerarem-se, os consequentes "pedaços" de Bob, então, fixaram-se em uma rocha, aderindo a ela, para crescerem novamente. Durante a adesão, eles achataram-se para aumentar a superfície de contato com a rocha, melhorando sua fixação. Assim, alguns dos pedaços do Bob Esponja, ao se planificarem, assumiram o formato de retângulos e de triângulos retângulos com medidas de lado variados.

Modelaremos, portanto, esse pedaços como retângulos rosa de comprimento $(X + 8)$ e altura $(-X + 2)$, e triângulos retângulos azuis de base $(X + 8)$ e altura $(-X + 2)$, sendo X uma variável real. Observe:

[63] VASCONCELOS, Yuri. **Qual é o animal com maior capacidade de regeneração?** Mundo Estranho, Revista Superinteressante, Editora Abril. Disponível em http://mundoestranho.abril.com.br/materia/qual-e-o-animal-com-maior-capacidade-de-regeneracao. Acesso em 15/6/16.



2) Construa, no GeoGebra, esses dois polígonos seguindo os passos:

I. Selecione *Controle Deslizante* e, em seguida, clique em qualquer lugar da Janela de Visualização. Nomei-o de X e escolha seu intervalo como $[-8; 2]$.

II. Selecione *Ponto* e crie o ponto A.

III. Selecione a opção *Círculo dados Centro e Raio,* clique no ponto A e escreva o valor $(X + 8)$ para o Raio. A circunferência gerada será chamada de c.

IV. Crie um ponto B em cima dessa circunferência.

V. Selecione *Segmento* e clique nos pontos A e B para delimitá-lo (segmento f). Estaremos, assim, criando, com recurso de compasso, um lado variável e relacionado aos valores atribuídos no controle deslizante para nosso futuro Retângulo.

VI. Selecione a opção *Círculo dados Centro e Raio,* clique no ponto B e escreva o valor $(-X + 2)$ para o Raio. A circunferência gerada será chamada de d.

VII. Selecione *Reta Perpendicular* e clique no segmento f e no ponto B, criando, portanto uma reta g perpendicular a esse segmento que passa pelo ponto B.

VIII. Selecione *Ponto* e clique em uma intersecção da reta g com a circunferência d (ponto C).

IX. Selecione *Segmento* e clique nos pontos B e C para delimitá-lo (segmento h). Estaremos, assim, criando, com recurso de compasso, o outro lado variável e relacionado aos valores atribuídos no controle deslizante para nosso futuro Retângulo.

X. Selecione *Reta Perpendicular* e clique no segmento h e no ponto C, criando, portanto, uma reta i perpendicular a esse segmento que passa pelo ponto C.

XI. Selecione *Reta Perpendicular* e clique no segmento f e no ponto A, criando, portanto uma reta j perpendicular a esse segmento que passa pelo ponto A

XII. Selecione *Ponto* e crie um ponto D na intersecção das retas i e j.

XIII. Selecione *Segmento* e clique nos pontos A e D para delimitá-lo (segmento k).

XIV. Selecione *Polígono* e o forme selecionando os pontos A, B, C, D, A.

XV. Manipule o controle deslizante e perceba que conseguimos o retângulo esperado! Apenas precisamos deixá-lo rosa e esconder as construções auxiliares de sua volta, por motivos estéticos.

XVI. Crie um *Ponto* E. Clique duas vezes nele e defina-o como (X, (X+8)(-X+2)). Pinte-o de rosa e habilite seu rastro.

XVII. Tente gerar o triângulo analogamente, ou crie um *Ponto* F, selecione a *Ferramenta Triângulo*, clique em qualquer lugar vazio da Janela de Visualização, escolha o número X e clique em F. Habilite o rastro do ponto G gerado.

A partir da interpretação da problematização, dos passos de construção geométrica e das possíveis manipulações dos objetos gerados em *triângulo_quadrado(2)* no GeoGebra, responda:

a) o que é um retângulo? E um triângulo retângulo? Cite alguns passos de construção que foram essenciais para garantir que o primeiro polígono gerado fosse, de fato, um retângulo (apenas os números romanos).

____

____

____

b) o que é área? Que fórmula pode ser escrita para se calcular a área de um retângulo qualquer? E para a área de um triângulo qualquer?

____

____

____

____

____

____

c) Conforme altera-se o valor de X com o controle deslizante, geram-se coordenadas que são traduzidas por pontos azuis e rosa que deixam seu rastro no Plano Cartesiano. Dessa forma,

- todos os pontos rosa formam o gráfico da área do retângulo rosa em função do tamanho de X (chamaremos de função q);

- todos os pontos azuis formam o gráfico da área do triângulo azul em função do valor de X. (chamaremos de função t).

Logo,

I. pode-se expressar a lei de formação de q por $q(X) =$_______________________________________.

CÁLCULOS

II. pode-se expressar a lei de formação de t por $t(X) =$_______________________________________.

CÁLCULOS

III. ambas as funções q e t classificam-se como Funções Polinomiais do 2º Grau (ou Quadráticas) e o seu gráfico é representado por uma PARÁBOLA. Toda Função Polinomial do 2º grau pode ser expressa pela lei de formação:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = ax^2 + bx + c$$

em que $f(x)$ e x são variáveis e a, b, c são constantes reais (sendo $a \neq 0$). Podemos chamar c de *termo independente*, pois não aparece como coeficiente de alguma variável não trivial.

Identifique, por conseguinte, em q e em t, quais são as respectivas constantes a, b e c.

IV. vocês conseguem perceber uma influência do valor de c de cada função em seu respectivo gráfico? Explique.

V. as raízes e os consequentes pontos de intersecção de cada função com o eixo X são

CÁLCULOS

VI. os possíveis valores que X pode assumir para que, de fato, existam pedacinhos retangulares e triangulares de Bob Esponja são - ou seja o Domínio de cada uma das duas funções é

VII. podemos questionar: em que intervalos numéricos dos respectivos Domínios, cada função é (a) crescente, (b) constante, (c) decrescente?

VIII. há algum ponto em que $q(X) = t(X)$? Por quê? O que significa essa igualdade geometricamente?

CÁLCULOS

IX. quanto maior for a área de cada pedaço retangular e triangular de Bob Espoja, mais fácil ele conseguirá fixar-se a uma rocha para voltar a crescer. Analisando o gráfico, qual o maior valor de área possível a um pedaço retangular dele? e a um pedaço triangular? Quais são as abscissas desses valores? Vocês percebem como o o valor dessas abscissas relacionam-se com as raízes de cada função e com o fato dos gráficos serem parábolas? Explique.

CÁLCULOS

CÁLCULOS EXTRAS

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO[64]

UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – LICENC. EM MATEMÁTICA - BRUNA LAUTERT

ESTUDO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E DE 2º GRAU: Manipulações Geométricas com o GeoGebra

Questionário a respeito da prática realizada

1. Você gosta de Matemática?

( ) Muito. ( ) Significativamente.

( ) Um pouco. ( ) Nem um pouco.

2. Por quê?

____
____
____
____
____.

3. Em qual das organizações de aula de matemática abaixo você considera que <u>a sua aprendizagem</u> é mais efetiva? Numere as alternativas de 1 a 6, sendo 1 a menos efetiva e 6 a mais efetiva.

( ) Aula expositiva no quadro.

( ) Aula de exercícios com material escrito.

( ) Aula de estudos dirigidos com material escrito.

( ) Aula expositiva com recursos digitais.

( ) Aula de exercícios com recursos digitais.

( ) Aula de estudos dirigidos com recursos digitais.

4. Você já conhecia o software GeoGebra antes das aulas em que foram trabalhadas funções neste ano?( ) Sim. ( ) Não.

5. Se sim, já havia trabalhado com ele? E com que finalidade? Se não, não responda a essa pergunta.

____
____
____
____.

6. Trabalhamos no GeoGebra funções de 1º e de 2º grau. Do que você recorda do que foi trabalhado? (seja sincero)

elemento igual a zero pode ser explicada a partir da visualização da manipulação do tamanho do lado do quadrado por meio do *controle deslizante*.

( ) O ponto pertencente a cada gráfico e guiado pelo *controle deslizante,* quando manipulado, favorecia a interpretação da constância, do crescimento e do decrescimento de funções de 1º ou de 2º grau.

( ) Ao alterarmos o valor da variável independente com o *controle deslizante*, deslocávamos o ponto criado sob cada gráfico de função, uma vez que suas coordenadas eram (x, y):

- x variável independente pertencente ao Domínio da função;

- y variável dependente ao valor selecionado para x e, em cada posição assumida pelo ponto, determinada pela lei de formação da função.

7. Você consegue lembrar ou criar alguma pergunta relacionada a funções de 1º ou de 2º grau que não poderia ser respondida com *papel-e-caneta*, mas que poderia a partir do GeoGebra?

( ) Sim. ( ) Não.

8. Se sim, cite-a(s) abaixo. Se não, não escreva no espaço abaixo.

____
____
____.

9. Você acredita que seria importante reformular o currículo escolar de modo que o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática seja mais presente? Justifique.

____
____
____
____
____.

[64] Questionário adicionado como imagem recortada – 1ª parte nesta página, 2ª parte na página 116.

( ) O perímetro de um quadrado ou de um triângulo equilátero em função do tamanho de um de seus lados são exemplos de funções de 1º grau.

( ) A área de um retângulo ou de um triângulo retângulo em função do tamanho de seus lados são exemplos de funções de 2º grau.

( ) A razão do Domínio da "função perímetro do quadrado" (citada acima) ser um intervalo de menor

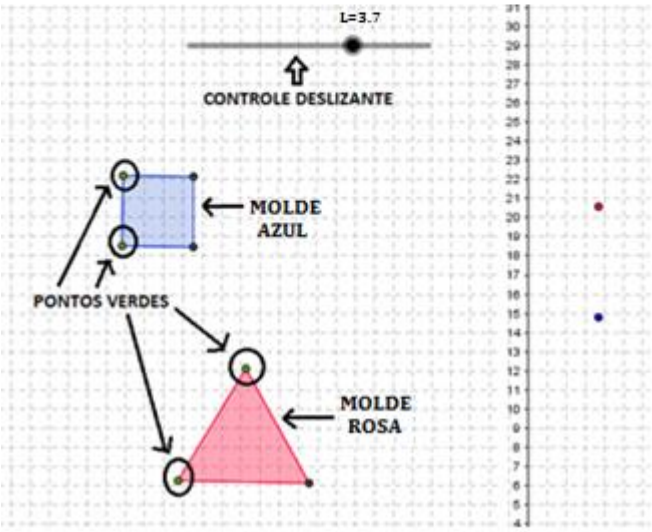
Aluno:___________________________. **Turma**: 9º AH.

Colégio: João Paulo I Unidade Higienópolis.

Porto Alegre, Outubro de 2016.

APÊNDICE D – TA1 REESCRITO

Instrução 1: Todas as perguntas deverão ser respondidas nesta folha. Os cálculos necessários para responder a algumas questões devem ser anotados nos espaços de contorno pontilhado disponibilizados.



Informações técnicas: Abra o arquivo **moldes(1).ggb** no software GeoGebra. Em seguida, manipule os moldes azul e rosa por meio de

- arrastes dos pontos verdes (vértices não fixos das figuras geométricas);
- arrastes das figuras pelo Plano Cartesiano;
- deslizamentos do ponto preto do controle deslizante L ($L = [-10{,}10]$).

Observação inicial: Apesar do controle deslizante L ter sido definido com valor máximo igual a 10, ele poderia estender-se até o infinito positivo. Tal máximo foi estipulado por questões estéticas.

Problematização: Herbologia é a matéria de Hogwarts que estuda as propriedades e características das plantas mágicas e fungos em geral, incluindo os cuidados necessários e os principais usos de cada um deles. Algumas das plantas mágicas são ingredientes básicos para poções, outras podem fazer efeito por conta própria[65]. Além disso, é a matéria preferida de Neville Longbottom, ex-estudante da Grifinória que se tornou professor da Disciplina.

Na semana passada, professor Neville encontrou uma nova planta mágica, a qual percebeu que apenas desenvolvia-se bem em hortas de dois formatos perfeitos específicos e com certa proporção de tamanho entre si. Constrói, com sua varinha, por conseguinte, inúmeros moldes de horta com esses dois formatos a fim de serem utilizados por seus alunos. E, para que elas possam ser plantadas em lugares diversos, confecciona moldes de tamanhos de lado variados. Assim, para cada molde azul de quatro lados de tamanho L cada; deve criar um molde rosa de três lados de tamanho $\left(\frac{L}{2}+5\right)$ cada.

Atividade: A partir da interpretação da problematização e das possíveis manipulações geométricas do arquivo em questão no GeoGebra, responda às questões a seguir.

1) (a) Qual forma geométrica é sempre representada pelo molde azul? ________________________.

[65]POTTERISH, Equipe. **Dicionário Madame Pince**: Herbologia. Disponível em: <http://wiki.potterish.com/index.php?title=Herbologia&oldid=13140>. Acesso em 31/5/2016.

(b) Como podemos classificá-la quanto aos seus lados? ________________________________.

(c) Tente provar o que respondeu em (a) e (b) com argumentos que se sustentem em possíveis experimentações com o software.

____

____

____

____.

2) **(a)** Qual forma geométrica é sempre representada pelo molde rosa? ____________________.

(b) Como podemos classificá-la quanto aos seus lados? ________________________________.

(c) Tente provar o que respondeu em (a) e (b) com argumentos que se sustentem em possíveis experimentações com o software.

____

____

____

____.

3) **(a)** o que é perímetro? ____.

(b) Como podemos generalizar, por meio de uma fórmula, o cálculo do perímetro de uma forma geométrica tal qual a representada pelo molde azul com tamanho de lado qualquer?

____.

(c) E para o de uma tal qual a representada pelo molde rosa com tamanho de lado qualquer?

____.

4) Altere o tamanho de L com o controle deslizante.

Perceba, então, que são geradas coordenadas do Plano Cartesiano - traduzidas por pontos azuis e rosa que deixam seu rastro pela tela.

Ao mesmo tempo, o tamanho de cada molde da planta mágica é alterado.

Assim, a relação entre

$$\begin{cases} \text{o deslize do controle;} \\ \text{os pontos } \begin{pmatrix} \text{azuis} \\ \text{rosa} \end{pmatrix} \text{ gerados;} \\ \text{e os tamanhos atingidos pelo molde } \begin{pmatrix} \text{azul} \\ \text{rosa} \end{pmatrix} \end{cases}$$

é delineada pelo gráfico $\begin{pmatrix} \text{azul} \\ \text{rosa} \end{pmatrix}$, que representa o perímetro do molde em função de L, o que chamaremos de $\begin{pmatrix} função\ z \\ função\ r \end{pmatrix}$.

Logo, pode-se expressar a lei de formação de

(a) z por $z(L)$ =____.

(b) r por $r(L)$ =____.

CÁLCULOS

5) Ambas as funções z e r classificam-se como Funções Polinomiais do 1º Grau (ou Afins) e o seu gráfico é representado por uma RETA. Toda Função Polinomial do 1º grau pode ser expressa pela lei de formação:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

em que $f(x)$ e x são variáveis e $a, b,$ são constantes reais (sendo $a \neq 0$). Identifique, por conseguinte, quais são as respectivas constantes a e b

(a) em $z(L)$: $a =$_____; $b =$ _____.

(b) em $r(L)$: $a =$_____; $b =$ _____.

CÁLCULOS

6) O valor de b na lei de formação de uma função de 1º grau influi em classificá-la, ou não, como Função Linear. Por esse motivo, denominamos b "coeficiente linear". Toda Função Linear também apresenta uma especificidade em seu gráfico. Portanto, dado que

a função azul é uma Função Linear;

a função rosa **não** é uma Função Linear;

experimentando no arquivo, você consegue explicar, quando uma função de 1º grau é Linear e qual é a consequência gráfica de ser?

____

____.

7) As funções z e r são crescentes.

(a) Como você poderia tentar explicar essa afirmação considerando a posição dos pontos azuis e rosa gerados a partir da manipulação do controle deslizante?

____

____.

(b) Enfatize a mesma afirmação por meio de alguns cálculos teste de coordenadas.

CÁLCULOS

8) Sobre a possibilidade da igualdade $z(L) = r(L)$, responda

(a) O que significa, geometricamente?

____

____.

(b) Manipule os moldes das plantas a fim de que essa igualdade seja visualizada e, então, faça um esboço do que obteve na Janela de Visualização no espaço abaixo.

ESBOÇO

CÁLCULOS

(c) Por fim, enuncie os procedimentos que foram necessários para que você realizasse as atividades dessa questão.

____

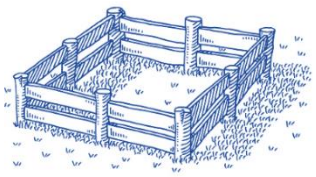
____.

9) Para economizar na construção da horta, alguns alunos de Herbologia, que preferem trabalhar com moldes de formato tal como o rosa, querem descobrir para que tamanhos de L a utilização dele se torna mais econômica, em relação a gasto com cercamento, do que a do molde de formato tal como o azul.

(a) Descubra e escreva aqui essa informação após manipular e observar o comportamento de ambos os gráficos.

____.

(b) Prove algebricamente sua resposta.



CÁLCULOS

10) Manipulando o controle deslizante e considerando a observação inicial, pode-se determinar o domínio de z sendo $D(z) = [0; +\infty)$ e o de r sendo $D(r) = [-10; +\infty)$. Qual é a relação entre a necessidade do segundo intervalo não iniciar em zero, como o primeiro, com a problematização dos moldes das plantas?

____

____.

CÁLCULOS

11) Considerando a função rosa,

(a) determine, manipulando o GeoGebra, as coordenadas dos pontos $A(2, y_A)$, $B(0, y_B)$, $C(x_C, 0)$.

____.

(b) Prove então, por meio de cálculos algébricos, sua resposta anterior.

CÁLCULOS

(c) Como tornam-se úteis os valores encontrados para y_A, y_B e x_C na perspectiva prática dos alunos de Herbologia?

____

____

____.

12) A partir da história da nova planta mágica descoberta e dos moldes de horta de professor Neville, crie um novo problema que envolva geometria ou funções de 1º grau e que apenas possa ser solucionado pensando com o GeoGebra. (Dica: você pode imaginar que algum aluno também possa ter feito alguma descoberta na aula de Herbologia, ou que as plantas acabaram se desenvolvendo melhor em outros formatos de horta, ou qualquer outra ideia criativa)

Pergunta: ____

____?

Resposta: ____

____

____.

Esboço de passos efetuados com o GeoGebra para solucionar a sua pergunta:

ESBOÇO

CÁLCULOS

CÁLCULOS EXTRAS

APÊNDICE E – TA2 REESCRITO

Instrução 1: Todas as perguntas deverão ser respondidas nesta folha. Os cálculos necessários para responder a algumas questões devem ser anotados nos espaços de contorno pontilhado disponibilizados.

Informação Técnica: Abra o arquivo **pedaços(2).ggb** no software GeoGebra.

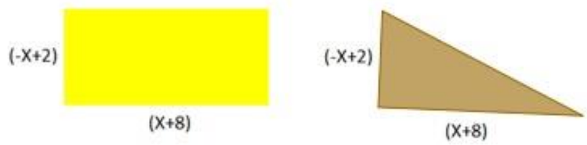
Problematização:

Esponja: a "fênix marinha" ou o "AquaWolverine"

O animal com maior capacidade de regeneração é a esponja do mar, ser colorido e de formas exóticas que vive no fundo dos oceanos. Sua capacidade de regeneração tão impressionante que, mesmo se for triturada num liquidificador, ela consegue renascer. "Em condições ideais, um indivíduo completo pode se reconstituir a partir de conjuntos celulares mínimos", afirma o biólogo marinho Márcio Reis Custódio, do Departamento de Biociências da Universidade de São Paulo (USP). Os ancestrais desses animais - que fazem parte do filo dos poríferos e podem ter até 2 metros de altura - surgiram há 1 bilhão de anos, período próximo ao do aparecimento das primeiras formas de vida no planeta[66].

Bob Esponja, personagem fictício de uma série de animação americana, que é uma esponja marinha, acaba, um dia, por acidente, dentro de um liquidificador com seus amigos. Para regenerarem-se, os consequentes "pedaços" de Bob, então, fixaram-se em uma rocha, aderindo a ela, para crescerem novamente. Durante a adesão, eles achataram-se para aumentar a superfície de contato com a rocha, melhorando sua fixação. Assim, alguns dos pedaços do Bob Esponja, ao se planificarem, assumiram o formato de retângulos amarelos e de triângulos retângulos marrons com medidas de lado variadas, mas proporcionais. Definindo X uma variável real tal que $X \in [-8; 2]$, podemos generalizar que os retângulos possuíam comprimento $(X+8)$ e altura $(-X+2)$, já os triângulos, base $(X+8)$ e altura $(-X+2)$. Observe:

[66] VASCONCELOS, Yuri. **Qual é o animal com maior capacidade de regeneração?** Mundo Estranho, Revista Superinteressante, Editora Abril. Disponível em http://mundoestranho.abril.com.br/materia/qual-e-o-animal-com-maior-capacidade-de-regeneracao. Acesso em 15/6/16.



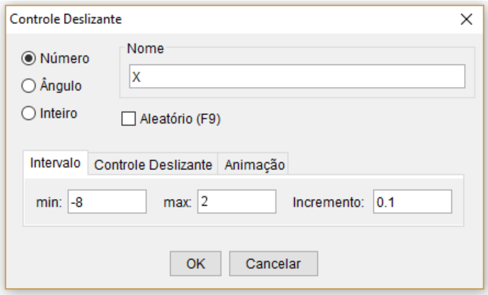
Atividade 1: Construa, no GeoGebra, esses dois polígonos e respectivos gráficos da função área seguindo os passos abaixo.

I. Criação da variável $\boldsymbol{X} \in [-\mathbf{8};\mathbf{2}]$:

(a) selecione *Controle Deslizante*;

(b) clique em qualquer lugar da Janela de Visualização;

(c) nomeie o controle deslizante de X e escolha seu intervalo como $[-8;2]$.



II. Criação do retângulo amarelo com vértices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ e lados $(-\boldsymbol{x}+\mathbf{2})$ e $(\boldsymbol{x}+\mathbf{8})$:

(a) vértice A: selecione *Ponto* e crie o ponto A em qualquer lugar da tela;

(b) circunferência c cujo raio será a medida de $\overline{AB}$: selecione *Círculo dados Centro e Raio*, clique no ponto A e escreva o valor $(X+8)$ para o Raio;[67]

(c) vértice B: selecione *Ponto* e crie o ponto B em cima da circunferência c;

(d) lado $f = \overline{AB}$: selecione *Segmento* e clique nos pontos A e B para delimitá-lo;

(e) circunferência d cujo raio será a medida de $\overline{BC}$: selecione *Círculo dados Centro e Raio*, clique no ponto B e escreva o valor $(-X+2)$ para o Raio;

(f) reta g suporte para $\overline{BC}$: selecione *Reta Perpendicular*, clique no segmento f e no ponto B;

(g) vértice C: selecione *Ponto* e crie o ponto C em uma intersecção da reta g com a circunferência d;

(h) lado $h = \overline{BC}$: selecione *Segmento* e clique nos pontos B e C para delimitá-lo;

(i) reta i suporte para $\overline{CD}$: selecione *Reta Perpendicular*, clique no segmento h e no ponto C;

(j) reta j suporte para $\overline{DA}$: selecione *Reta Perpendicular*, clique no segmento f e no ponto A;

(k) vértice D: selecione *Ponto* e crie o ponto D na intersecção das retas i e j;

(l) lado $k = \overline{AD}$: selecione *Segmento* e clique nos pontos A e D para delimitá-lo;

(m) retângulo $ABCD$: selecione *Polígono* e o forme selecionando os pontos A, B, C, D, A nessa sequência.

III. Teste da construção:

(a) manipule o controle deslizante e note se conseguiu o retângulo de lados variáveis esperado.

IV. Estética do retângulo:

(a) coloração amarela: clique com o botão direito do mouse na parte interna do retângulo $ABCD$, selecione *Propriedades, Cor* e selecione um tom de amarelo disponível;

[67] Note que não há o recurso “régua” no GeoGebra. Por esse motivo, criamos medidas de compasso a partir da construção de círculos de raio variável em relação à variável X, à qual conseguimos atribuir valores.

(b) desativação de acessórios de construção: clique com o botão direito do mouse em cima das retas e circunferências que auxiliaram a construção do retângulo final, mas que não constituem o retângulo, e selecione *exibir objeto.*

V. Criação da Função Área do Retângulo:

(a) selecione *Ponto* e crie o ponto E;

(b) clique duas vezes com o botão esquerdo do mouse nele e defina-o como $(X,(X+8)(-X+2))$;

(c) clique com o botão direito do mouse no ponto E, selecione *Habilitar Rastro;*

(d) clique com o botão direito do mouse no ponto E, selecione *Propriedades, Cor,* e o mesmo tom de amarelo escolhido para o retângulo.

VI. Criação do Triângulo Retângulo Marrom de catetos $(-X+2)$ e $(X+8)$ e da Função Área do Triângulo:

(a) tente construir um triângulo retângulo marrom de catetos $(-X+2)$ e $(X+8)$, assim como sua função área com base no passo a passo descrito para as construções anteriores;

(b) ou gere um triângulo retângulo marrom de catetos $(-X+2)$ e $(X+8)$ por meio de uma ferramenta de auxílio:

- vértice F: selecione *Ponto* e crie o ponto F;
- triângulo e ponto G: selecione *Ferramenta Triângulo*, clique em qualquer lugar vazio da Janela de Visualização, escolha o número X e clique em F;

função área do triângulo: clique com o botão direito do mouse no ponto G, selecione *Habilitar Rastro.*

Atividade 2: A partir da interpretação da problematização, dos passos de construção e das possíveis manipulações dos objetos gerados em **pedaços(2).ggb** no GeoGebra, responda às questões abaixo.

I) A respeito do retângulo e do triângulo retângulo construídos,

(a) explique o que é um triângulo retângulo.

____

____

____.

(b) cite as letras correspondentes a alguns passos da construção do retângulo que considere essenciais para garantir que o primeiro polígono gerado fosse, de fato, um retângulo: __________________.

II) A respeito das funções Área citada, preencha coerentemente as lacunas abaixo.

(a) Área é ____

____.

(b) A fórmula __________________________ serve para se calcular a área de um retângulo qualquer.

(c) A fórmula __________________________ serve para se calcular a área de um triângulo qualquer.

III) Altere o tamanho de X com o controle deslizante.

Perceba, então, que são geradas coordenadas do Plano Cartesiano - traduzidas por pontos amarelos e marrons que deixam seu rastro pela tela.

Ao mesmo tempo, o tamanho de cada molde da planta mágica é alterado.

Assim, a relação entre

$$\begin{cases} \text{o deslize do controle;} \\ \text{os pontos } \binom{\text{amarelos}}{\text{marrons}} \text{ gerados;} \\ \text{e os tamanhos atingidos pelo molde do } \binom{\text{retângulo}}{\text{triângulo}} \end{cases}$$

é delineada pelo gráfico $\binom{\text{amarelo}}{\text{marrom}}$, que representa a área do pedaço poligonal em função de X, o que chamaremos de $\binom{função\ r}{função\ t}$.

Logo, pode-se expressar a lei de formação de

(a) r por $r(X) =$____.

(b) t por $t(X) =$____.

CÁLCULOS

IV) Ambas as funções r e t classificam-se como Funções Polinomiais do 2º Grau (ou Quadráticas) e o seu gráfico é representado por uma PARÁBOLA. Toda Função Polinomial do 2º grau pode ser expressa pela lei de formação

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

em que $f(x)$ e x são variáveis e a, b, c são constantes reais (sendo $a \neq 0$). Identifique, por conseguinte, quais são as respectivas constantes a, b e c.

(c) em $r(X)$: $a =$_____; $b =$ ____; $c =$ ____.

(d) em $t(X)$: $a =$_____; $b =$ ____; $c =$ ____.

CÁLCULOS

V) Podemos chamar a constante c de *termo independente*, pois não aparece como coeficiente de alguma variável não trivial. Você consegue perceber a influência do valor de c de cada função em seu respectivo gráfico? Explique.

____

____

____

____.

VI) Manipulando o *controle deslizante*, note quais são os possíveis valores que X pode assumir para que, de fato, existam pedacinhos retangulares e triangulares de Bob Esponja (Domínio de cada uma das duas funções). Esses valores são para

(a) o retângulo: ____________________. **(b)** o triângulo: ______________________.

VII) Em que intervalos numéricos dos respectivos Domínios, conforme aumentamos o valor de X,

(a) a área do pedaço retangular aumenta (a função r é crescente)? ________________________.

(b) a área do pedaço retangular permanece constante (a função r é constante)? ______________.

(c) a área do pedaço retangular aumenta (a função r é crescente)? ________________________.

(d) a área do pedaço triangular aumenta (a função t é crescente)? ________________________.

(e) a área do pedaço triangular permanece constante (a função t é constante)? ______________.

(f) a área do pedaço triangular aumenta (a função t é crescente)? _________________________.

VIII) Sobre a possibilidade da igualdade $r(X) = t(X)$,

(a) o que ela significa, geometricamente?

____

____.

(b) manipule os pedaços de Bob a fim de que essa igualdade seja visualizada e, então, faça um esboço do que obteve na Janela de Visualização no espaço abaixo.

ESBOÇO	CÁLCULOS

(c) por fim, enuncie os procedimentos que foram necessários para que você solucionasse as atividades dessa questão.

____

____.

IX) Quanto maior a área de cada um de seus pedaços, maior aderência a uma rocha Bob Esponja adquirirá, implicando sua regeneração. Analisando os gráficos “área desses pedaços” obtidos,

(a) manipule o controle deslizante a fim de que os pontos E e G evidenciem o local do gráfico ao qual pertencem que indica a área dos maiores pedaços retangular e triangular possíveis, respectivamente, de Bob. Faça, então, um esboço do que obteve na Janela de Visualização no espaço a seguir.

ESBOÇO

CÁLCULOS

(b) Quanto medirá a área do maior pedaço possível de Bob? Ele será triangular ou retangular?

____

____.

(c) Qual é a abscissa correspondente a essa medida? O que significa esse valor de abscissa para Bob?

____

____.

(d) Você percebe como o valor da abscissa correspondente ao valor de maior área de cada figura relaciona-se com as raízes da função em que se associam e com o fato das representações gráficas obtidas serem parábolas? Explique. (Dica: manipule o controle deslizante de modo que os pontos E e G se desloquem à direita e, depois, à esquerda do valor de maior área de cada função. Perceba a variação dos valores das abscissas em ambos os casos.)

____

____

____

____

____.

XI) A partir do fato científico da regeneração de esponjas, crie um novo problema que envolva geometria ou funções de 2º grau e que apenas possa ser solucionado pensando com o GeoGebra. (Dica: você pode imaginar que uma esponja foi recortada em outros formatos geométricos ou que um pedaço retangular se conectou a um triangular, ou outra ideia criativa)

Problema: ____

____

____

____

____

____

Resposta: ____

____

Esboço de passos efetuados com o GeoGebra para solucionar a sua pergunta:

ESBOÇO

CÁLCULOS

CÁLCULOS EXTRAS

ANEXO – TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "Tecnologias Digitais no Ensino da Matemática", desenvolvida pela pesquisadora e professora Bruna Lautert. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela professora da UFRGS Débora Soares, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do e-mail debora.soares@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

Observar e analisar o uso da informática como instrumento de potencial no desenvolvimento cognitivo, criativo e escolar no âmbito da disciplina de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito extra às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável no telefone (51) 9242.2240 /e-mail bru.slautert@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de 2016.

Assinatura do Responsável: ______________________________________

Assinatura da Coordenadora Pedagógica
do Colégio João Paulo I – Higienópolis: ______________________________________

Assinatura do(a) pesquisador(a): ______________________________________

Assinatura da Orientadora da pesquisa: ______________________________________