

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Condições de Contorno Absorventes para a Equação da Onda

por

Kleiton André Schneider

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof^a. Dr^a. Manuela Longoni de Castro
Orientadora

Porto Alegre, março de 2009.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Schneider, Kleiton André

Condições de Contorno Absorventes para a Equação da Onda / Kleiton André Schneider.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2009.

131 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2009.

Orientadora: de Castro, Manuela Longoni

Dissertação: Matemática Aplicada
Condições de Contorno Absorventes, Equação da Onda

Condições de Contorno Absorventes para a Equação da Onda

por

Kleiton André Schneider

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada e Numérica

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Manuela Longoni de Castro

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fermín Sinfórano Viloche Bazán
Depto. de Mat./UFSC-SC

Prof. Dr. Eduardo Henrique Brietzke
PPGMat/UFRGS-RS

Prof. Dr. Leandro Farina
PPGMAp/UFRGS-RS

Dissertação apresentada e aprovada em
março de 2009.

Prof. Dr. Waldir Leite Roque
Coordenador

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

À minha orientadora, Prof^a Dr^a Manuela Longoni de Castro, pelos ensinamentos, orientação e amizade.

À minha família; minha mãe, Gerta, meus irmãos, Sérgio e Alex, minha cunhada, Isabela, meu avô, Abílio, pelo amor e dedicação constantes, por todo o incentivo nos momentos mais difíceis.

À todos os professores, que direta ou indiretamente, influenciaram no meu conhecimento.

À todos os amigos da Pós-Graduação, pela amizade e pelo companheirismo. Em especial, à Paulo Lino e Jesus Ávila (o Antonio), que me ajudaram muito nos momentos mais difíceis.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, pela oportunidade.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO DA ONDA	7
2.1 Relação de Dispersão e Velocidade de Fase	7
2.2 Velocidade de Grupo	11
3 FORMULAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO ABSORVENTES 14	
3.1 Condições de Contorno Exatas	14
3.2 Condições de Contorno de Engquist e Majda	16
3.2.1 Formulação geral	17
3.2.2 Estabilidade e convergência	34
3.3 Condições de contorno de Higdon	52
3.3.1 Formulação geral	52
3.3.2 Condições de contorno discretas	58
3.3.2.1 Método das médias	58
3.3.2.2 Método da extrapolação espacial-temporal	70
3.3.3 Generalização para ângulos arbitrários de incidência	75
3.3.4 Teorema da fatorização	82
3.4 Forma geral de representação	84
3.5 Aproximações racionais	89

4	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE DIAZ E JOLY	95
4.1	Solução Fundamental	95
4.2	Estimativas do erro	107
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	116
	APÊNDICE A	118
A.1	Notações e Resultados Úteis	118
	APÊNDICE B	123
B.1	Transformada de Fourier-Laplace da solução fundamental da equação da onda 2D	123

Lista de Figuras

Figura 1.1	Uma <i>waveguide</i> semi-infinita, com uma fronteira artificial $B = \Gamma_E$ sobre a qual uma condição de contorno absorvente pode ser aplicada	1
Figura 2.1	Gráfico da relação de dispersão	9
Figura 2.2	Velocidade de grupo: A linha contínua representa a linha imaginária que envolve os pacotes de onda, enquanto as curvas pontilhadas representam as ondas separadamente	11
Figura 2.3	Gráfico da relação de dispersão para a aproximação em diferenças finitas. (Seção transversal para ω fixo.)	12
Figura 3.1	Cálculo computacional de $u_{0,m}^{n+1}$ com p pontos.	56
Figura 3.2	Vetor $1 + z^{-1}$	60
Figura 3.3	Posicionamento típico de z , κ_1 e κ_2	62
Figura 3.4	<i>Stencil</i> para o caso $p = 2$	70
Figura 3.5	Frequências altas quando $ z = \kappa_2 = 1$	74
Figura 4.1	Os contornos Γ e D	101
Figura 4.2	O contorno fechado $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$	102
Figura 4.3	Os conjuntos $\Omega_1(t)$, para $\frac{h}{c} \leq t \leq \frac{h}{c} + T$, e $\Omega_1(t)$ e $\Omega_2(t)$, para $t \geq \frac{h}{c} + T$	111

RESUMO

Uma prática comum para resolver numericamente problemas de propagação de ondas num domínio ilimitado é baseada no truncamento do domínio infinito via uma fronteira artificial, definindo assim um domínio computacional finito, usando condições de contorno especiais na fronteira, ditas *absorventes*, com a finalidade de minimizar as reflexões causadas pela imposição da fronteira artificial.

Neste trabalho, faremos uma revisão bibliográfica acerca do desenvolvimento dessas condições de contorno absorventes para o problema de propagação de ondas, com o intuito de elucidar a derivação de novas condições de contorno absorventes. A maior parte do trabalho está baseado nas condições de contorno de Engquist e Majda [12], e de Higdon [32]. O modelo considerado aqui é a equação da onda linear clássica.

Além de apresentarmos os procedimentos para a formulação destas condições, abordaremos a fórmula de Diaz e Joly [9], que, graças ao método de Cagniard-De Hoop, conseguiram uma expressão explícita para a solução fundamental do problema associado à equação da onda bidimensional no meio-plano $y \geq 0$, com as condições de contorno de Higdon.

ABSTRACT

A common method for numerically solving wave propagation problems in unbounded domains is based on truncating the infinite domain via an artificial boundary, defining a finite computational domain, using a special boundary conditions in the boundary, named *absorbing*, with the purpose to minimize the reflections caused by imposing the artificial boundary.

In this work, we will review the development these absorbing boundary conditions for wave propagation, with the intention of elucidating the derivation of new absorbing boundary conditions. Most of the work is based on the Engquist and Majda [12] and Higdon [32] boundary conditions. The model considered here is the classical linear wave equation.

Besides presenting the procedures for the formularization of these conditions, we study the work of Diaz and Joly [9], which uses the Cagniard-De Hoop method, to obtain an explicit expression for the fundamental solution of the problem associated with the 2D wave equation in the half-space $y \geq 0$, with Higdon boundary conditions.

1 INTRODUÇÃO

Um problema recorrente em computação científica é o cálculo de soluções numéricas em problemas envolvendo propagação de ondas, baseados no truncamento de domínios espaciais ilimitados via uma fronteira artificial B , dividindo o domínio original em um domínio computacional finito Ω , e um domínio complementar infinito D . Nessa fronteira artificial são impostas condições de contorno especiais com a missão de atenuar ou eliminar as reflexões indesejadas causadas pela imposição de tais. Por exemplo, se a solução é gerada inteiramente dentro de Ω , as ondas que incidem sobre B deveriam ser absorvidas, de modo que as ondas refletidas não voltem para o interior de Ω . Essas condições de contorno são chamadas *condições de contorno absorventes*. O objetivo então é resolver o problema numericamente em Ω , por meio de métodos numéricos, como elementos finitos ou diferenças finitas. A fim de que o procedimento tenha sucesso, as condições impostas em B , devem ser compatíveis, pelo menos no sentido aproximado, com a solução física que estamos procurando. É importante observar que essas fronteiras artificiais são somente uma necessidade computacional e não tem significado físico.

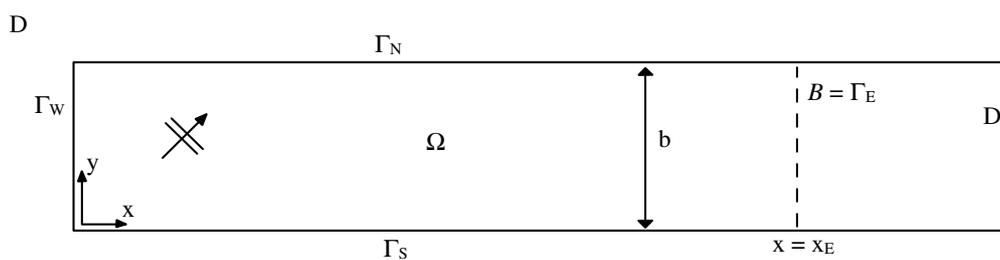


Figura 1.1: Uma *waveguide* semi-infinita, com uma fronteira artificial $B = \Gamma_E$ sobre a qual uma condição de contorno absorvente pode ser aplicada

Essas condições de contorno artificiais têm aplicações em importantes áreas, como em meteorologia, oceanografia, sismologia, em cálculos geofísicos envolvendo ondas acústicas e elásticas, e numa variedade de outros problemas em dinâmica dos

fluidos [3, 13, 15]. Um exemplo clássico é um problema envolvendo uma *waveguide* bidimensional semi-infinita [21, 28, 19], ilustrada na Figura 1.1. Podemos ver que $B = \Gamma_E$, a fronteira artificial, é uma seção transversal da *waveguide* que corresponde ao lado leste de Ω .

Considere, como exemplo, o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.1)$$

onde o suporte de u_0 e v_0 está contido em $(\delta, \infty) \times \mathbb{R}$, para algum $\delta > 0$. Como o domínio espacial é ilimitado, é preciso truncá-lo para calcular soluções numericamente. Tal truncamento torna necessária uma condição de contorno artificial. Como motivação, considere o problema de valor inicial e de contorno (PVIC)

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{B}\varphi = 0, & \text{sobre } \Gamma, \\ \varphi(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y), & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.2)$$

onde \mathcal{B} é a *condição de contorno artificial exata*, isto é, de perfeita absorção, sobre $\Gamma = \{(x, y) / x = 0\}$, ou seja, $\varphi(x, y, t) = u(x, y, t)$ para $x > 0$. Aqui, $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) / x \geq 0\}$. Considerando que a solução de (1.1) é dada apenas por ondas que se movem para a esquerda, \mathcal{B} deve aniquilar as ondas que se movem para a direita, ou seja, absorver as ondas incidentes.

Dentre os métodos desenvolvidos para tratar condições de contorno artificiais, existem dois que se destacam. O primeiro é o *perfectly matched layer* (PML), ou “camada esponja”, desenvolvido por Bérenger [2] em 1994, e desde então tem sido melhorado e usado por muitos autores [10, 8, 5, 51, 1]. O segundo, é o método das *condições de contorno absorventes*. Desde 1970, pesquisadores têm desenvolvido e analisado condições de contorno absorventes, e métodos numéricos para tais, para problemas em que o domínio espacial infinito é truncado via uma fronteira artificial. As *condições de contorno exatas não-locais*, isto é, onde a dependência dos dados

iniciais é não-local, não são de fácil implementação, visto que a condição de contorno não é o símbolo de uma equação diferencial (A.4), mas de um operador pseudo-diferencial (A.5), dado por

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - i\omega\sqrt{1-z^2}\hat{u} = 0.$$

No final da década de 1970, Engquist e Majda [11, 12], observando que $\sqrt{1-z^2}$ é a solução de $f(z) = 1 - \frac{z^2}{1+f(z)}$ e usando aproximantes de Padé, $f_n(z)$, definidos por $f_{n+1}(z) = 1 - \frac{z^2}{1+f_n(z)}$ e $f_0(z) = 1$, desenvolveram uma seqüência de condições de contorno locais de alta absorção para a equação da onda, dadas por

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)^N u = 0,$$

as quais são uma aproximação de condições de contorno exatas não-locais. Usando o critério de Kreiss [38], discutido no capítulo 3, Engquist e Majda mostraram que as condições de contorno geradas são bem-postas para a equação da onda, e, além disso, mostraram que o erro, isto é, a diferença da solução do PVIC aproximado e do PVI, decai com a ordem N da condição de contorno.

Na década de 1980, Trefethen e Halpern [50, 30] generalizaram a idéia de Engquist e Majda, propondo uma aproximação racional para a raiz quadrada do operador pseudo-diferencial, da forma

$$\sqrt{1-z^2} \approx \frac{p(z)}{q(z)},$$

onde p e q são polinômios com nenhum zero em comum. Na mesma década, Higdon [32] desenvolveu condições de contorno discretas, e, a partir delas, encontrou condições de contorno analíticas de alta absorção consistentes com as discretas,

$$\prod_{j=1}^N \left(\cos \alpha_j \frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0,$$

as quais são uma generalização das condições de Engquist e Majda. No entanto, a formulação de Higdon envolve derivadas de ordem N no espaço e no tempo, e

assim, essas condições tornam-se inconvenientes para a implementação quando N é grande. Além disso, elas não têm um tratamento eficaz para os *modos evanescentes*, que correspondem às ondas com decaimento exponencial na coordenada x .

Já em 2003, Givoli e Neta [21] proporam uma reformulação das condições de Higdon, usando variáveis auxiliares especiais ϕ_j , definidas recursivamente por

$$b_j \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + c \frac{\partial \phi_j}{\partial x} = \phi_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1$$

com $\phi_0 = u$ e a condição de truncamento $\phi_{N+1} = 0$ na fronteira $x = 0$, que permitiram eliminar as derivadas de alta ordem na implementação [20]. No entanto, elas não fazem um bom tratamento das *condições de compatibilidades nos corners*. Essas condições são essenciais quando o domínio é poligonal. Considere, por exemplo, um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, no qual podemos supor que o suporte dos dados iniciais está contido em algum $\Sigma \subset \Omega$. Supomos que Σ está limitado por uma fronteira artificial retangular Γ . Assim, as condições de contorno artificiais aplicadas nos pontos de *corner* entre as faces de Γ , isto é, onde elas interseccionam-se, devem ser compatíveis uma com a outra. Mais recentemente, Hågstrom e Warburton [29] proporam uma modificação da formulação de Givoli e Neta, fazendo uso de funções auxiliares definidas recursivamente por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 \\ \left(a_j \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_j &= \left(a_j \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{j+1} \end{aligned}$$

com $\phi_0 = u$ e a condição de truncamento $\phi_{N+1} = 0$ na fronteira $x = 0$, fornecendo uma derivação para as condições de contorno nos *corners*, e que podem ser estendidas para sistemas de primeira ordem. Uma comparação entre as condições de Givoli e Neta e as condições de Hågstrom e Warburton pode ser vista em [20]. Nem as condições de Givoli e Neta, nem as condições de Hågstrom e Warburton trazem qualquer tratamento para os modos evanescentes. Apenas, recentemente, em [28] surgiu uma nova classe de condições de contorno capazes de controlar os modos

evanescentes de maneira mais efetiva, sem ignorar a necessidade de controle sobre os *modos propagativos*, onde as ondas são senóides e/ou cossenóides, e os *modos tangenciais*, onde a incidência sobre a fronteira é tangencial.

Neste trabalho, faremos uma revisão bibliográfica acerca do desenvolvimento de condições de contorno absorventes para o problema de propagação da ondas, com o intuito de elucidar a derivação de novas condições de contorno absorventes. A maior parte do trabalho está baseada nos resultados de Engquist e Majda [11, 12], Higdon [32, 36] e Diaz e Joly [9]. O modelo considerado será a equação da onda clássica; entretanto, poderíamos considerar condições de contorno absorventes, por exemplo, para a equação da onda dispersiva [36, 21, 53], equação de Helmholtz [18, 22, 31], equações de Maxwell [23, 26], equação de Schrödinger [16, 43, 44], entre outras.

No capítulo 2, abordaremos algumas propriedades básicas da equação da onda linear, como relação de dispersão e as equações da velocidade de propagação das ondas, importantes no estudo de condições de contorno absorventes [46, 47, 33].

No capítulo 3, abordaremos, primeiramente, a construção de condições de contorno exatas não-locais para a equação da onda bidimensional. Logo após, abordaremos o trabalho de Engquist e Majda [11, 12], que desenvolveram uma seqüência de condições de contorno locais de alta absorção para a equação da onda, as quais são uma aproximação de condições de contorno exatas não-locais. Em seguida, destacamos as condições de contorno de Higdon [32], que apresenta algumas condições de contorno discretas e mostra que elas são consistentes com algumas condições de contorno analíticas de alta absorção. As condições de contorno de Engquist e Majda são um caso particular das condições de contorno de Higdon. Imediatamente após, identificaremos uma forma geral de representação, dada por Higdon [36], e abordaremos o método das aproximações racionais [50].

No capítulo 4, é abordado o trabalho de Diaz e Joly [9]. Graças ao método de Cagniard-De Hoop [4, 37], Diaz e Joly chegaram a uma expressão explícita da solução fundamental para o problema associado à equação da onda bidimensional no semi-plano $y \geq 0$, com as condições de contorno de Engquist e Majda, bem como as de Higdon. Isso permitiu novos resultados de convergência quando a ordem da condição de contorno tende a $+\infty$, bem como estimativas de erros.

No capítulo 5, são apresentadas as conclusões sobre o trabalho e as perspectivas para os trabalhos futuros.

2 PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO DA ONDA

Neste capítulo, abordaremos alguns aspectos relacionados à equação da onda linear clássica, como relação de dispersão e velocidades de propagação da onda, que são importantes no estudo de condições de contorno absorventes [46, 47, 33].

2.1 Relação de Dispersão e Velocidade de Fase

Quando resolvemos analiticamente uma equação diferencial parcial hiperbólica utilizando séries ou transformadas de Fourier, expressamos a solução como uma combinação de termos da forma

$$u(\mathbf{x}, t) = \hat{u}_0(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\psi t)}, \quad (2.1)$$

com $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$. Qualquer equação diferencial linear hiperbólica com coeficientes constantes, definida sobre um domínio espacial ilimitado, admite soluções por ondas planas da forma (2.1), onde \mathbf{k} é o número de onda, ψ é a frequência, e $\hat{\cdot}$ denota a transformada de Fourier [55]. Para satisfazer as equações diferenciais, \mathbf{k} e ψ devem estar relacionados por uma equação do tipo

$$\psi = \psi(\mathbf{k}) \quad (2.2)$$

a qual é conhecida como *relação de dispersão*. Em geral, cada número de onda \mathbf{k} corresponde a m frequências ψ , onde m é a ordem da equação diferencial com respeito a t , e é por isso que (2.2) é chamada de relação ao invés de função [49]. Consideremos aqui que os valores de \mathbf{k} são reais, e ψ pode ser real ou complexo, dependendo da EDP.

A *velocidade de fase*, isto é, a velocidade de propagação de uma onda, é definida por [55]

$$\mathbf{v}_f = \frac{\psi}{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}_u$$

onde \mathbf{k}_u é o vetor unitário na direção \mathbf{k} , e $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2}$.

Considere a equação da onda bidimensional

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0 \quad (2.3)$$

onde $u = u(x, y, t)$. A equação (2.3) admite soluções por ondas planas da forma

$$u(x, y, t) = e^{i(\omega t + \xi x + \eta y)}, \quad \xi, \eta, \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

onde ω , ξ e η são as variáveis duais de t , x e y , respectivamente. Inseridas em (2.3), resultam na relação de dispersão

$$\omega^2 = c^2(\xi^2 + \eta^2), \quad (2.5)$$

ilustrada na Figura 2.1. Observe que, para soluções da forma (2.4), temos que a velocidade de fase da onda é dada por

$$\mathbf{v}_f = \frac{-\omega}{\xi^2 + \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{-\omega}{\omega^2/c^2}(\xi, \eta) = c \left(-\frac{c\xi}{\omega}, -\frac{c\eta}{\omega} \right). \quad (2.6)$$

Uma solução mais geral da EDP (2.3) pode ser obtida por superposição de ondas planas da forma (2.4) [11, 49],

$$u(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi x + \eta y + \omega(\xi, \eta)t)} \hat{u}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.7)$$

onde $\hat{u}_0(\xi, \eta)$ é a transformada de Fourier de $u(x, y)$, de modo que cada componente satisfaça a relação de dispersão.

Aproximações discretas para equações diferenciais também admitem soluções por ondas planas, pelo menos se a malha for uniforme, e elas também têm relações de dispersão. Considere a equação da onda bidimensional (2.3). Para a aproximação

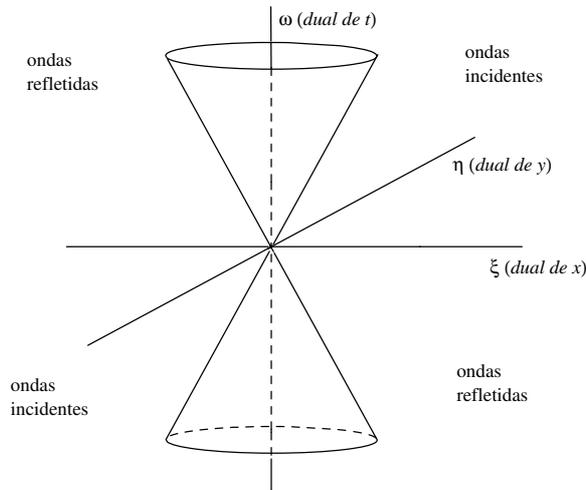


Figura 2.1: Gráfico da relação de dispersão

em diferenças finitas, considere uma malha retangular, com espaçamentos Δx , Δy , Δt , nas direções x , y e t , respectivamente, e denotemos $u_{j,m}^n$ a aproximação para $u(j\Delta x, m\Delta y, n\Delta t)$, com $-\infty < j, m < \infty$ e $n \geq 0$. A solução (2.4) pode ser escrita como

$$(e^{i\omega\Delta t})^n (e^{i\xi\Delta x})^j (e^{i\eta\Delta y})^m \quad (2.8)$$

para os pontos $(j\Delta x, m\Delta y, n\Delta t)$ sobre a malha. Discretizando (2.3) em diferenças finitas centrais [42] temos

$$\frac{u_{j,m}^{n+1} - 2u_{j,m}^n + u_{j,m}^{n-1}}{c^2(\Delta t)^2} = \frac{u_{j+1,m}^n - 2u_{j,m}^n + u_{j-1,m}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j,m+1}^n - 2u_{j,m}^n + u_{j,m-1}^n}{(\Delta y)^2}. \quad (2.9)$$

Ao inserirmos a solução (2.8) em (2.9), temos

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^n e^{i\omega\Delta t} - 2u_{j,m}^n + u_{j,m}^n e^{-i\omega\Delta t}}{c^2(\Delta t)^2} &= \frac{u_{j,m}^n e^{i\xi\Delta x} - 2u_{j,m}^n + u_{j,m}^n e^{-i\xi\Delta x}}{(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{u_{j,m}^n e^{i\eta\Delta y} - 2u_{j,m}^n + u_{j,m}^n e^{-i\eta\Delta y}}{(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

e reorganizando os termos temos

$$\frac{e^{i\omega\Delta t} + e^{-i\omega\Delta t}}{2} - 1 = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{e^{i\xi\Delta x} + e^{-i\xi\Delta x}}{2} - 1\right) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta y}\right)^2 \left(\frac{e^{i\eta\Delta y} + e^{-i\eta\Delta y}}{2} - 1\right)$$

Lembrando que $(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2 = \cos \alpha$ e que $(1 - \cos \alpha)/2 = \text{sen}^2(\alpha/2)$, a relação de dispersão para a equação discretizada (2.9) é dada por

$$\left(\text{sen} \frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\text{sen} \frac{\xi \Delta x}{2}\right)^2 + \left(\frac{c \Delta t}{\Delta y}\right)^2 \left(\text{sen} \frac{\eta \Delta y}{2}\right)^2 \quad (2.10)$$

Podemos ver que, através de manipulações algébricas, a relação de dispersão (2.10) é $2\pi/\Delta x$ -periódica em ξ , $2\pi/\Delta y$ -periódica em η e $2\pi/\Delta t$ -periódica em ω , e é natural então tomar $\xi \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]$, $\eta \in [-\pi/\Delta y, \pi/\Delta y]$ e $\omega \in [-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$. Isso significa que as quantidades $\xi \Delta x$, $\eta \Delta y$ e $\omega \Delta t$ podem ser confinadas ao intervalo $[-\pi, \pi]$. Usando funções trigonométricas inversas é possível resolver a equação para ω , assim definindo a dependência funcional explicitamente, mas as fórmulas resultantes são menos interessantes e mais pesadas para trabalhar.

Dizemos que a onda (2.8) é *bem resolvida pela malha* quando, além de satisfazer (2.9), a relação (2.10) aproxima (2.5) quando as quantidades $\xi \Delta x$, $\eta \Delta y$ e $\omega \Delta t$ são suficientemente pequenas. Dizemos também que a onda (2.8) é satisfeita para a *equação interior* quando essa onda satisfaz (2.9) para os pontos interiores da malha computacional, visto que não teríamos informação suficiente para calcularmos o valor da solução na fronteira, mas não necessariamente seja bem resolvida pela malha.

Observe que, expandindo (2.10) em séries de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) &= \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{\omega^4 \Delta t^4}{3!} + \dots \\ \text{sen}^2 \left(\frac{\xi \Delta x}{2} \right) &= \frac{\xi^2 \Delta x^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{\xi^4 \Delta x^4}{3!} + \dots \\ \text{sen}^2 \left(\frac{\eta \Delta y}{2} \right) &= \frac{\eta^2 \Delta y^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{\eta^4 \Delta y^4}{3!} + \dots \end{aligned}$$

o que implica que, para $\omega \ll 1$, $\xi \ll 1$ e $\eta \ll 1$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) &\approx \frac{\omega^2}{4} \\ \left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\xi \Delta x}{2} \right) &\approx \frac{\xi^2}{4} \\ \left(\frac{1}{\Delta y} \right)^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\eta \Delta y}{2} \right) &\approx \frac{\eta^2}{4} \end{aligned}$$

e assim

$$\omega^2 \approx c^2(\xi^2 + \eta^2).$$

2.2 Velocidade de Grupo

Considere um grupo de ondas de faixa estreita, com frequência central e número de ondas, propagando-se em algum meio, e uma envoltória delimitando o grupo. A variação periódica no espaço da envoltória forma muitos pacotes de ondas. A velocidade desses pacotes de onda, ou seja, da envoltória, chama-se *velocidade de grupo* [52] (veja a Figura 2.2).

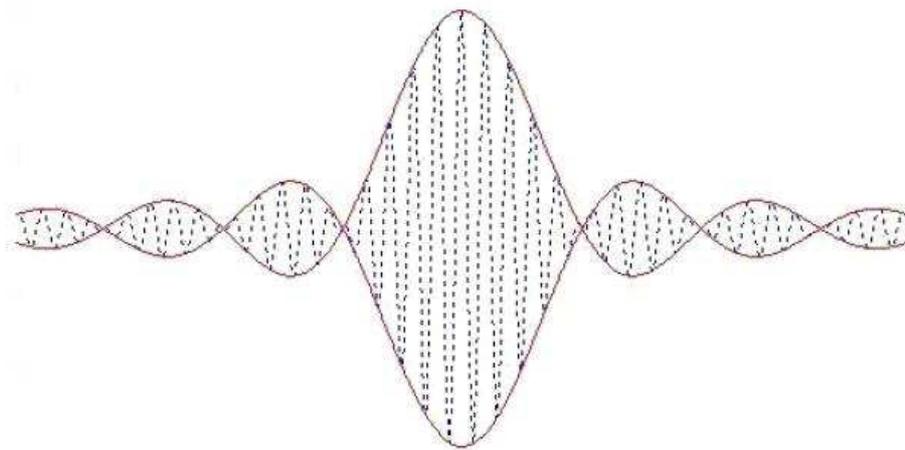


Figura 2.2: Velocidade de grupo: A linha contínua representa a linha imaginária que envolve os pacotes de onda, enquanto as curvas pontilhadas representam as ondas separadamente

O conceito de velocidade de grupo é associado com a propagação de energia sobre equações dispersivas. Observa-se que, mesmo se uma equação é não-dispersiva, qualquer modelo discreto da mesma será dispersivo [49]. Por essa razão a velocidade de grupo é essencial para o entendimento do comportamento de modelos numéricos de EDP's. Discussões gerais sobre velocidade de grupo podem ser vistas em [46] e [47].

Para todas as ondas em geral, a velocidade de propagação de um pacote de ondas é dada pelo gradiente [55]

$$\mathbf{v}_g = \nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial k_n} \right).$$

Assim, a velocidade de grupo para ondas da forma (2.4) é dada por

$$\nabla(-\omega) = \left(-\frac{\partial\omega}{\partial\xi}, -\frac{\partial\omega}{\partial\eta} \right). \quad (2.11)$$

Velocidade de grupo e velocidade de fase diferem, por exemplo, em grupos de ondas que propagam-se em uma dimensão e são dispersivos, isto é, a velocidade de fase varia com frequência e número da onda [39]. Para soluções de (2.3) da forma (2.4), a velocidade de grupo coincide com a velocidade de fase. De fato, derivando (2.5) em relação a ξ , temos $2\omega \frac{\partial\omega}{\partial\xi} = 2\xi c^2$, ou seja, $\partial\omega/\partial\xi = c^2\xi/\omega$. Similarmente, derivando (2.5) em relação a η , temos $2\omega \frac{\partial\omega}{\partial\eta} = 2\eta c^2$, ou seja, $\partial\omega/\partial\eta = c^2\eta/\omega$. Logo $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_g$ para soluções da forma (2.4).

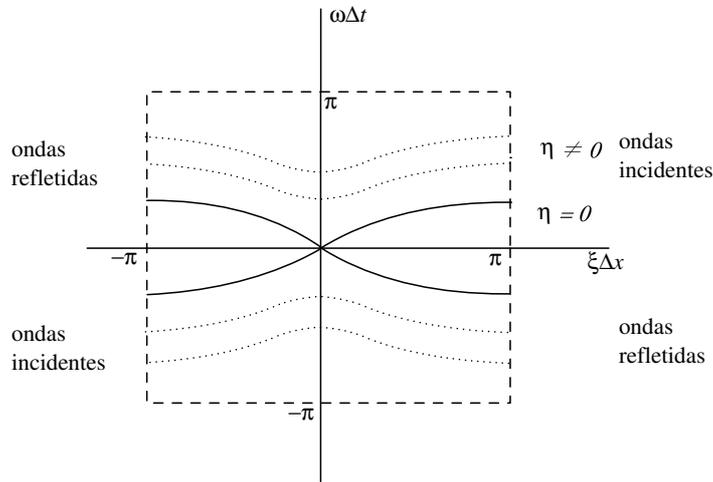


Figura 2.3: Gráfico da relação de dispersão para a aproximação em diferenças finitas. (Seção transversal para ω fixo.)

Considerando o problema discreto (2.9), diferenciando (2.10) temos que a energia associada com os números de onda ξ e η propaga-se numa velocidade de grupo

dada por

$$\nabla(-\omega) = \left(-\lambda \frac{\text{sen}(\xi\Delta x)}{\text{sen}(\omega\Delta t)}, -\beta \frac{\text{sen}(\eta\Delta y)}{\text{sen}(\omega\Delta t)} \right)$$

onde $\lambda = c^2\Delta t/\Delta x$ e $\beta = c^2\Delta t/\Delta y$.

Desde que ω não é uma função linear de (ξ, η) , o esquema de diferenças (2.9) é dito dispersivo [55]. Em geral, a relação de dispersão para uma equação diferencial parcial é uma relação polinomial entre (ξ, η) e ω , enquanto o modelo discreto equivale a uma aproximação trigonométrica. Observe na Figura 2.3 que, para $\xi\Delta x = \pm\pi$ e $\eta = 0$, a velocidade de grupo é zero. Além disso, para $\xi\Delta x = 0$ e $\omega\Delta t \neq 0$, a componente x da velocidade de grupo é zero. Para o caso $\omega\Delta t = 0$ e $\xi\Delta x = 0$, temos o caso dos autovalores generalizados, que discutiremos nas seções seguintes.

3 FORMULAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO ABSORVENTES

Neste capítulo, abordaremos a forma na qual foram construídas condições de contorno absorventes para a equação da onda. Na construção de condições de contorno absorventes, a meta é encontrar uma condição que é satisfeita para as ondas incidentes (pelo menos no sentido aproximado), mas não é satisfeita para as ondas refletidas.

3.1 Condições de Contorno Exatas

Aqui, focalizamos a maneira na qual são construídas as condições de contorno absorventes exatas, isto é, de perfeita absorção. Considere a equação da onda em (2.3), no meio-plano \mathbb{R}_+^2 , assumindo que os dados iniciais do problema têm suporte em \mathbb{R}_+^2 . Queremos impôr adequadas condições de contorno na fronteira artificial $\Gamma = \partial\mathbb{R}_+^2$.

Como vimos, (2.3) admite soluções por ondas planas da forma (2.4), que satisfazem a relação de dispersão (2.5). Vimos também que a velocidade de fase e a velocidade de grupo são idênticas e iguais a (2.6). Resolvendo para ξ em (2.5), obtemos

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2}. \quad (3.1)$$

Assumindo que $(\omega/c)^2 - \eta^2 > 0$, $\omega > 0$, e usando (3.1), podemos chegar à relação de dispersão unidirecional

$$\xi = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \iff -\frac{c^2\xi}{\omega} \leq 0 \quad (3.2)$$

para as ondas viajando para a direita e à relação de dispersão unidirecional

$$\xi = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \iff -\frac{c^2\xi}{\omega} \geq 0 \quad (3.3)$$

para as ondas viajando para a esquerda, onde $-c^2\xi/\omega$ é a componente x da velocidade de propagação da onda, conforme (2.6). Assim, existem famílias especiais de soluções da equação da onda, representando ondas viajando para a esquerda, as quais são dadas por

$$u(x, y, t) = e^{i(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2}x + \omega t + \eta y)} \quad (3.4)$$

com $(\omega/c)^2 - \eta^2 > 0$, $\omega > 0$.

Tomando a transformada de Fourier na equação (2.3), com respeito à coordenada espacial y e ao tempo t , usando (2.5), temos que

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \xi^2\right)\hat{u} = 0, \quad (3.5)$$

onde $\hat{u} \equiv \hat{u}(x, \eta, \omega)$ é a transformada de Fourier de $u(x, y, t)$. O operador em (3.5) pode ser fatorado na forma

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \xi^2\right)\hat{u} = \left(\frac{d}{dx} - i|\xi|\right)\left(\frac{d}{dx} + i|\xi|\right)\hat{u},$$

e, usando (2.5) novamente, com (η, ω) mantido fixo, a condição de contorno a qual aniquila as ondas planas como em (3.4) tem a forma

$$\left(\frac{d}{dx} - i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2}\right)\hat{u}|_{x=0} = 0. \quad (3.6)$$

Assim, para todas as ondas como em (3.4) com (η, ω) mantido fixo, a condição de contorno em (3.6) não produz reflexões. Uma outra maneira de chegar nessa condição de contorno é simplesmente derivar (3.4) com relação a variável x , e aplicar o resultado em $x = 0$, donde temos $\frac{du}{dx}|_{x=0} - i\sqrt{\omega^2/c^2 - \eta^2}u|_{x=0} = 0$.

De um modo mais geral, por superposição de soluções da forma (3.4), conforme observado em (2.7), pacotes de ondas viajando para a esquerda podem ser representados por [11]

$$u(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2}x + \omega t + \eta y)} \hat{u}(0, \omega, \eta) d\omega d\eta, \quad (3.7)$$

onde $\hat{u}(0, \omega, \eta)$ denota a transformada de Fourier de $u(0, y, t)$. Por superposição da condição de contorno em (3.6), a condição de contorno a qual aniquila exatamente pacotes de onda viajando para a esquerda da forma (3.7) é dada por

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t + i\eta y} i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \hat{u}(0, \omega, \eta) d\omega d\eta = 0, \quad (3.8)$$

ou, de outra maneira,

$$\frac{du}{dx} - i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \mathcal{F}u = 0, \quad \text{sobre } x = 0,$$

$$\text{onde } \mathcal{F}v(x, \eta, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\eta y + \omega t)} v(x, y, t) dy dt.$$

A não-localidade da condição de contorno acima fica explícita através das transformadas integrais.

Desde que a raiz quadrada, tanto em (3.6) como em (3.8), é uma função irracional de ω e η , (3.6) e (3.8) não representam o símbolo de uma equação diferencial parcial, mas uma equação contendo um operador pseudo-diferencial [45]. Esse operador é não-local no espaço e no tempo, e torna-se caro implementá-lo numericamente. No entanto, é possível aproximar a raiz quadrada para produzir uma família de EDP's que podem ser implementadas numericamente. Essas condições não serão exatas e haverá uma pequena quantidade de energia da onda que será refletida em direção ao interior do domínio. Contudo, é possível construir condições de contorno aproximadas de modo que minimizem as reflexões.

Necessariamente, essas condições de contorno devem ser:

- (i) locais,
 - (ii) bem-postas para $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$.
- (3.9)

3.2 Condições de Contorno de Engquist e Majda

Começaremos aqui a mostrar a maneira na qual foram ideadas as condições de contorno absorventes aproximadas de Engquist e Majda para o cálculo numérico de

ondas não-dispersivas, e o teorema central sobre a estabilidade dessas condições de contorno, bem como um resultado de convergência [11, 12].

3.2.1 Formulação geral

Tomemos o símbolo da condição de contorno dada em (3.6). Considere a aproximação em séries de Taylor

$$\sqrt{1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}\right).$$

Da transformada de Fourier, e sua inversa, vem a correspondência $i\omega \longleftrightarrow \partial/\partial t$, de acordo com o teorema (A.2), de onde, por (3.6), obtemos a primeira aproximação

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)u|_{x=0} = 0. \quad (3.10)$$

Usando estimativas de energia é possível mostrar que a primeira aproximação, conjuntamente com a equação da onda, nos leva a um PVIC bem-posto [25].

Usando a próxima aproximação em séries de Taylor (ou o aproximante de Padé (1, 0))

$$\sqrt{1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{c^4 \eta^4}{\omega^4}\right)$$

em (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dx} - i\frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}\right)\right)u|_{x=0} \\ &= \left(\frac{d}{dx} - i\frac{\omega}{c} - \frac{c}{2} \frac{\eta^2}{i\omega}\right)u|_{x=0} \end{aligned}$$

e multiplicando tudo por $i\omega$ temos que

$$\left(i\omega \frac{d}{dx} - \frac{1}{c}(i\omega)^2 + \frac{c}{2}(i\eta)^2\right)u|_{x=0} = 0.$$

Novamente pela proposição (A.2), temos as correspondências $i\omega \longleftrightarrow \partial/\partial t$ e $i\eta \longleftrightarrow \partial/\partial y$. Assim, chegamos à segunda aproximação

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u|_{x=0} = 0. \quad (3.11)$$

Para checar que a aproximação (3.11) nos leva a um PVIC bem-posto, utilizaremos o *critério de Kreiss* [38] para a equação da onda. Originalmente, o critério de Kreiss é aplicado para sistemas de equações lineares de primeira ordem. Em [36], Higdon o expôs da seguinte forma: Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = Au_x + \sum_{j=1}^m B_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + Cu + F \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \\ Eu(0, y, t) = g(y, t) \end{cases} \quad (3.12)$$

para $t > 0$, $x > 0$, e $y \in \mathbb{R}^m$, onde $m \geq 1$. Aqui, $u(x, y, t)$ e $F(x, y, t)$ são vetores com n componentes, e A , B_j , e C são matrizes $n \times n$ as quais assumimos serem funções suaves de x , y e t . As funções f e g são dadas, e E é uma matriz $l \times n$, onde l é o número de autovalores negativos de A .

O termo *bem-posto* significa que, para funções arbitrárias F , f e g , nos espaços funcionais adequados, o problema (3.12) admite uma única solução, e, além disso, é possível estimar a solução em termos de F , f e g . Uma estimativa de energia padrão tem a forma

$$\|u\|_{\Omega \times [0,t]} + \|u\|_{\partial\Omega \times [0,t]} + \|u(t)\|_{\Omega} \leq K(\|f\|_{\Omega} + \|g\|_{\partial\Omega \times [0,t]} + \|F\|_{\Omega \times [0,t]}), \quad (3.13)$$

onde K é independente de u , f , F e g ; Ω denota o domínio espacial $x > 0$, e as normas são normas L^2 ou normas de Sobolev nas regiões indicadas nos subíndices.

A condição é baseada em certas famílias de soluções exponenciais da equação diferencial que não podem satisfazer a estimativa de energia (3.13), ou alguma estimativa similar. Se essas soluções também satisfazem a condição de contorno, então elas são soluções do PVIC, e o problema será mal-posto. É, portanto, necessário garantir que a condição de contorno exclua essas soluções da EDP. A fim de obter soluções especiais, assumimos que $C = 0$, A , B_j e E são constantes, e $F = g = 0$.

Assim temos o PVIC

$$\begin{aligned}
(a) \quad & u_t = Au_x + \sum B_j \frac{\partial u}{\partial y_j}, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}^m, t > 0, \\
(b) \quad & u(x, y, 0) = f(x, y), \\
(c) \quad & Eu(0, y, t) = 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Proposição 3.1. *Supomos que para algum s com $\mathcal{R}e(s) > 0$ e para algum $\eta \in \mathbb{R}^m$, existe uma função u da forma*

$$u = \phi(x)e^{i\eta \cdot y + st}$$

tal que

- (a) u satisfaz a equação diferencial (3.14a) e a condição de contorno (3.14c),
- (b) $\phi \neq 0$, e ϕ decai exponencialmente quando $x \rightarrow \infty$.

Então, o PVIC (3.12) será mal-posto.

A demonstração da proposição (3.1) e as observações acima estão em [36]. A estabilidade no sentido de Hadamard, em que o PVIC é bem-posto se, para todo $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, existe solução única, e podemos estimar alguma norma da solução pela mesma norma dos dados, é dita *estabilidade fraca*. A estabilidade de acordo com o critério de Kreiss, na qual podemos prescrever as normas para as quais queremos obter alguma estimativa, é dita *estabilidade forte* [25].

Dessa forma, levando para o nosso caso em particular, podemos interpretar o critério da seguinte forma [11]:

Definição 3.1. *Uma condição de contorno \mathcal{B} , sobre a fronteira $x = 0$, juntamente com a equação da onda, agindo sobre funções definidas em $x \geq 0$, $t \geq 0$, é dita fortemente bem-posta desde que não existam soluções da forma*

$$\varphi(s, \eta) = e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}x + st + i\eta y} \tag{3.15}$$

onde $s = \rho + i\omega$, com $\mathcal{R}e(s) \geq 0$, satisfazendo

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) \varphi(s, \eta) = 0 \quad \text{em } x > 0, \\
& \mathcal{B}\varphi(s, \eta)|_{x=0} = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Além disso, para $|\frac{s}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ e $\Re e(s) \geq 0$, deve existir $c_0 > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}(\varphi(s, \eta))| \geq c_0. \quad (3.17)$$

Aplicando o critério para a segunda aproximação, temos que (3.11) nos leva à um problema bem-posto, a menos que

$$-s\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} = \frac{1}{c}s^2 + \frac{c}{2}\eta^2. \quad (3.18)$$

Aplicando o quadrado em ambos os lados, obtemos que

$$s^2\left(\frac{s^2}{c^2} + \eta^2\right) = \frac{1}{c^2}s^4 + s^2\eta^2 + \frac{c^2}{4}\eta^4$$

e assim, obrigatoriamente, temos $\eta = 0$. Mas quando $\eta = 0$ em (3.18), obtemos $\frac{2}{c}s^2 = 0$, e assim, teremos somente a solução trivial. Logo, (3.11) é bem-posta.

A terceira aproximação é derivada do aproximante de Padé (1, 1), o qual é uma aproximação racional da forma

$$\sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} = \frac{1 - \frac{3}{4}\frac{c^2\eta^2}{\omega^2}}{1 - \frac{1}{4}\frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} + \mathcal{O}\left(\left|\frac{c^3\eta^3}{\omega^3}\right|\right).$$

Substituindo em (3.6) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dx} - i\frac{\omega}{c}\left(\frac{1 + \frac{3}{4}\frac{c^2\eta^2}{(i\omega)^2}}{1 + \frac{1}{4}\frac{c^2\eta^2}{(i\omega)^2}}\right)\right)u|_{x=0} \\ &= \left(\frac{d}{dx} + \frac{c^2}{4}\frac{d}{dx}\frac{\eta^2}{(i\omega)^2} - i\frac{\omega}{c} - \frac{3c}{4}\frac{\eta^2}{(i\omega)}\right)u|_{x=0}, \end{aligned}$$

e multiplicando tudo por $(i\omega)^2$, temos que

$$\left((i\omega)^2\frac{d}{dx} - \frac{c^2}{4}\frac{d}{dx}(i\eta)^2 - \frac{1}{c}(i\omega)^3 + \frac{3c}{4}i\omega(i\eta)^2\right)u|_{x=0} = 0.$$

Usando novamente as correspondências $i\omega \leftrightarrow \partial/\partial t$, $i\eta \leftrightarrow \partial/\partial y$, temos a terceira aproximação dada por

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial x} - \frac{c^2}{4}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{3c}{4}\frac{\partial^3}{\partial t\partial y^2}\right)u|_{x=0} = 0. \quad (3.19)$$

Para checar que a condição de contorno (3.19) nos leva a um problema bem-posto, precisamos somente mostrar que não existem raízes com $\mathcal{R}e(s) \geq 0$ para

$$\left(s^2 + \frac{c^2}{4}\eta^2\right)\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{1}{c}s^3 + \frac{3c}{4}s\eta^2 = 0. \quad (3.20)$$

Se definirmos $z = s/|\eta|$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|\eta|^2} \left(s^2 + \frac{c^2}{4}\eta^2\right) \frac{1}{|\eta|} \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{1}{c} \frac{s^3}{|\eta|^3} + \frac{3c}{4} \frac{s\eta^2}{|\eta|^3} \\ &= \left(\frac{s^2}{|\eta|^2} + \frac{c^2}{4} \frac{\eta^2}{|\eta|^2}\right) \sqrt{\frac{s^2}{c^2\eta^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2}} + \frac{1}{c} \frac{s^3}{|\eta|^3} + \frac{3c}{4} \frac{s}{|\eta|} \\ &= \left(z^2 + \frac{c^2}{4}\right) \sqrt{\frac{z^2}{c^2} + 1} + \frac{1}{c}z^3 + \frac{3c}{4}z \end{aligned}$$

ou seja, $\left(z^2 + \frac{c^2}{4}\right)\sqrt{\frac{z^2}{c^2} + 1} = -\left(\frac{1}{c}z^3 + \frac{3c}{4}z\right)$. Elevando ao quadrado em ambos os lados chegamos que $c^4/16 = 0$, absurdo, pois sempre temos $c \neq 0$, ou seja, não existem soluções em (3.20) e a terceira aproximação é bem-posta.

Em contraste com a situação acima, vamos mostrar que a condição de contorno derivada da expansão em séries de Taylor

$$\sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c^2\eta^2}{\omega^2} - \frac{1}{8} \frac{c^4\eta^4}{\omega^4} + \mathcal{O}\left(\frac{c^6\eta^6}{\omega^6}\right)$$

é fortemente mal-posta. Aplicando a aproximação em (3.6) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dx} - i\frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{c^2\eta^2}{(i\omega)^2} + \frac{1}{8} \frac{c^4\eta^4}{(i\omega)^4}\right)\right) u|_{x=0} \\ &= \left(\frac{d}{dx} - i\frac{\omega}{c} - \frac{c^2}{2} \frac{\eta^2}{i\omega} - \frac{c^4}{8} \frac{\eta^4}{(i\omega)^3}\right) u|_{x=0} \\ &= \left((i\omega)^3 \frac{d}{dx} - \frac{1}{c}(i\omega)^4 + \frac{c^2}{2}(i\eta)^2(i\omega)^2 + \frac{c^4}{8}(i\eta)^4\right) u|_{x=0}, \end{aligned}$$

e usando as correspondências $i\omega \leftrightarrow \partial/\partial t$, $i\eta \leftrightarrow \partial/\partial y$, temos a aproximação dada por

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x \partial t^3} - \frac{1}{c} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial t^2} + \frac{c^4}{8} \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u|_{x=0} = 0. \quad (3.21)$$

Para verificar que a condição (3.21) é bem-posta, não devem existir raízes com $\mathcal{R}e(s) \geq 0$ para

$$-s^3 \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} - \frac{1}{c}s^4 - \frac{c^2}{2}\eta^2 s^2 + \frac{c^4}{8}\eta^4 = 0.$$

Dividindo por $|\eta|^4$ e fazendo $z = s/|\eta|$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{s^3}{|\eta|^3} \frac{1}{|\eta|} \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} - \frac{1}{c} \frac{s^4}{|\eta|^4} - \frac{c^2 \eta^2 s^2}{2 |\eta|^4} + \frac{c^4 \eta^4}{8 |\eta|^4} \\ &= -z^3 \sqrt{\frac{z^2}{c^2} + 1} - \frac{1}{c} z^4 - \frac{c^2}{2} z^2 + \frac{c^4}{8}. \end{aligned}$$

Considere z , com $z \in \mathbb{R}$ e $z \geq 0$. Para $z = 0$, a expressão acima tem valor $c^4/8$. Quando $z \rightarrow \infty$, a expressão acima tende para $-\infty$. Assim, existe uma raiz real positiva e essa condição é fortemente mal-posta.

Assim, podemos observar que uma aproximação polinomial em séries de Taylor para a raiz em (3.6) nem sempre levará a uma condição de contorno local bem-posta. Portanto, é necessário um cuidado na escolha de aproximações locais apropriadas para a condição de contorno não-local a fim de garantir estabilidade.

Em [12], Engquist e Majda propuseram a seguinte seqüência de condições de contorno locais aproximadas

$$\mathcal{B}^N u = 0 \tag{3.22}$$

sobre a fronteira $x = a$, onde os operadores

$$\mathcal{B}^N = \mathcal{B}^N \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad N \geq 0,$$

são uma família de operadores diferenciais homogêneos definidos recursivamente por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^0 &= 2I \\ \mathcal{B}^1 &= \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \\ &\vdots \\ \mathcal{B}^{N+1} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}^N - \frac{c^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{B}^{N-1} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Observação 3.1. *No que segue, escolhemos o ramo da raiz quadrada bem definido para $-\pi < \arg z < \pi$, com o entendimento implícito que $\sqrt{x} = \pm i \sqrt{|x|}$, quando $x < 0$, é o limite da forma $x = \lim_{y \rightarrow 0} (x + iy)$, com $y > 0$ ou $y < 0$, respectivamente.*

Considere $u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, y, t) = g(y, t), & \text{em } x = 0 \\ u(x, y, t) = 0, & \text{para } t \leq 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

onde $g(y, t) \in L^2 \cap L^1$ é uma função arbitrária tal que $g(y, t) = 0$ para $t \leq 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que g é suficientemente suave. Aplicando transformada de Laplace em t e transformada de Fourier em y , chegamos à EDO

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} = \left(\frac{s^2}{c^2} + \eta^2 \right) \hat{u}, & \text{em } \mathbb{R} \\ \hat{u}(0, \eta, s) = \hat{G}(\eta, s), & \text{em } x = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

onde $s = \rho + i\omega$, com $\mathcal{R}e(s) > 0$. Aqui, $\hat{G}(\eta, s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-st - i\eta y} g(y, t) dy dt$. Resolvendo a EDO, encontramos

$$\hat{u}(x, \eta, s) = c_1 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x} + c_2 e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x}.$$

Aplicando a condição de contorno em $x = 0$, temos que

$$c_1 + c_2 = \hat{G}(\eta, s).$$

Observe que, se $u \in L^1$, a transformada de Fourier-Laplace em $u(x, y, t)$ está bem definida. Mas isso não implica necessariamente que tenhamos $\hat{u} \in L^1$. No entanto, como estamos aplicando a transformada apenas nas variáveis y e t , temos implicitamente que $\hat{u}(x, \eta, s) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, pela interpretação física da solução. Isso implica que $c_2 = 0$. Logo, $\hat{G}(\eta, s) = c_1$, e assim

$$\hat{u}(x, \eta, s) = \hat{G}(\eta, s) e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x}. \quad (3.26)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace e de Fourier, obtemos

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y} \left(\frac{1}{i} \int_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} e^{st} \hat{G}(\eta, s) e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x} ds \right) d\eta. \quad (3.27)$$

Observe que

$$\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} = \frac{\sqrt{s^2}}{c} \sqrt{1 + \frac{c^2 \eta^2}{s^2}}.$$

Assim, pela observação (3.1), ao fazermos o limite quando $\rho \rightarrow 0$, temos que considerar dois casos: quando $\omega < 0$, temos que $\arg s \approx -\pi/2$, o que implica que $\arg s^2 = 2 \arg s \approx -\pi$. Logo $\sqrt{s^2} \rightarrow -i|\omega| = i\omega$; quando $\omega > 0$, temos que $\arg s \approx \pi/2$, o que implica que $\arg s^2 = 2 \arg s \approx \pi$. Logo $\sqrt{s^2} \rightarrow i|\omega| = i\omega$. Deste modo, quando $\rho \rightarrow 0$, temos que

$$\sqrt{\frac{(i\omega)^2}{c^2} + \eta^2} = \frac{i\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}}.$$

Agora, observe que, quando $\rho \rightarrow 0$, o integrando em (3.27) tende a

$$e^{-\sqrt{\frac{(i\omega)^2}{c^2} + \eta^2} x + i\omega t + i\eta y} \hat{G}(i\omega, \eta),$$

e esta função é dominada por $\hat{G}(i\omega, \eta) \in L^2 \cap L^1$. Assim, considerando a observação (3.1), pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega/c)x \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} + i\omega t + i\eta y} \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta, \quad (3.28)$$

onde $\hat{g}(\omega, \eta) = \hat{G}(i\omega, \eta)$.

Se introduzirmos o operador, o qual é não-local no espaço e no tempo, definido por

$$\mathcal{R}u \Big|_{x=a} = \int \int e^{i\omega t + i\eta y} i(\omega/c) \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} \hat{u}(a, \omega, \eta) d\omega d\eta$$

a solução u satisfaz a condição de contorno de absorção não-local em $x = a$ dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{R} \right) u \Big|_{x=a} = 0. \quad (3.29)$$

De fato,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int \int \left(-i(\omega/c) \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} \right) e^{-i(\omega/c)x \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} + i\omega t + i\eta y} \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta,$$

logo

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} + \mathcal{R}u \Big|_{x=a} = \int \int \left[i(\omega/c) \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} e^{i\omega t + i\eta y} \right] \left(-e^{-i(\omega/c)a \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)}} \hat{g}(\omega, \eta) + \hat{u}(a, \omega, \eta) \right) d\omega d\eta,$$

e por (3.26) temos (3.29).

Para desenvolver as condições de contorno \mathcal{B}^N , para serem usadas como as condições de contorno absorventes locais bem-postas em $x = a$, usamos a expansão em frações contínuas finitas [6] para $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Note que $\sqrt{1 - x^2} \approx 1$ quando $x \rightarrow 0$. Então escrevemos

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 + (\sqrt{1 - x^2} - 1) = 1 + \frac{(\sqrt{1 - x^2} - 1)(\sqrt{1 - x^2} + 1)}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Logo,

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}. \quad (3.30)$$

Aplicando (3.30) em si mesma, repetidas vezes, obtemos a expansão em frações contínuas

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = 1 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}}} = \dots$$

Temos então a seqüência

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad f_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{2}}, \quad f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{2}}}, \dots$$

Genericamente,

$$f_{N+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + f_N(x)}.$$

Vemos que existem polinômios $T_N(x)$ e $S_N(x)$ tais que

$$f_N(x) = 1 + \frac{T_N(x)}{S_N(x)}. \quad (3.31)$$

Da equação (3.31) segue que

$$\frac{T_{N+1}(x) + S_{N+1}(x)}{S_{N+1}(x)} = f_{N+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + f_N(x)} = \frac{(2 - x^2)S_N(x) + T_N(x)}{2S_N(x) + T_N(x)}.$$

Então, podemos considerar que os polinômios em (3.31) satisfazem as recorrências

$$\begin{cases} T_{N+1}(x) = -x^2 S_N(x) \\ S_{N+1}(x) = 2S_N(x) + T_N(x) \end{cases} \quad (3.32)$$

Note que (3.32), mais os valores iniciais $T_1(x) = 0$, $S_1(x) = 1$, $T_2(x) = -x^2$, $S_2(x) = 2$, permitem calcular as seqüências.

Proposição 3.2. *As seqüências de polinômios acima satisfazem a recorrência*

$$\begin{cases} T_{N+1}(x) = 2T_N(x) - x^2 T_{N-1}(x) \\ S_{N+1}(x) = 2S_N(x) - x^2 S_{N-1}(x) \end{cases} \quad (3.33)$$

Prova. Utilizando (3.32), escrevemos

$$\begin{aligned} T_{N+1}(x) &= -x^2 S_N(x) \\ 2T_N(x) &= -2x^2 S_{N-1}(x) \end{aligned}$$

Subtraindo as duas igualdades acima, obtemos

$$T_{N+1}(x) - 2T_N(x) = -x^2 \left(S_N(x) - 2S_{N-1}(x) \right) = -x^2 T_{N-1}(x).$$

Para a última igualdade da linha acima, usamos a segunda igualdade de (3.32). Da igualdade dos dois extremos da linha acima, segue a primeira igualdade de (3.33).

Utilizando novamente (3.32), escrevemos

$$S_{N+1}(x) - 2S_N(x) = T_N(x) = -x^2 S_{N-1}(x),$$

donde segue a segunda igualdade de (3.33). □

Lema 3.1. *Dado $\epsilon_0 > 0$, existe um $a(\epsilon_0) > 0$ tal que:*

- (i) para $x^2 \leq 1 - \epsilon_0$, $0 < a(\epsilon_0) < f_N(x) \leq 1$, $f_N(1) > 0$
- (ii) para $x^2 \leq 1 - \epsilon_0$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1 - x^2} - f_N(x)| = 0$
- (iii) $\sqrt{1 - x^2} - f_N(x) = \mathcal{O}(x^{2N})$

Prova. Mostraremos os três itens fazendo indução em N .

(i) Para $N = 1$, temos que $f_1(x) = 1$, para todo $x \in [-1, 1]$. Logo, dado $\epsilon_0 > 0$, para $|x| = \sqrt{1 - \epsilon_0}$, necessariamente existe um $a(\epsilon_0) > 0$ tal que $0 < a(\epsilon_0) < f_1(x) = 1$.

Observe que, para $N = 2$, onde $f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, o máximo ocorre em $x = 0$, onde a função é igual a 1, logo $f_2(x) \leq 1$. Observe que o domínio de $\sqrt{1 - x^2}$ é o intervalo $[-1, 1]$, logo $f_2(1) > 0$.

Nossa hipótese de indução então é que, para $N \leq k$, temos $0 < a(\epsilon_0) < f_k(x) \leq 1$, com $f_k(1) > 0$. Obviamente

$$f_{k+1}(1) = 1 - \frac{1}{1 + f_k(1)} > 0.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} a(\epsilon_0) &< f_k(x) \leq 1 \\ \Leftrightarrow a(\epsilon_0) + 1 &< 1 + f_k(x) \leq 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{1 + f_k(x)} < \frac{1}{a(\epsilon_0) + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} &\leq \frac{x^2}{1 + f_k(x)} < \frac{x^2}{a(\epsilon_0) + 1} \\ \Leftrightarrow -\frac{x^2}{a(\epsilon_0) + 1} &< -\frac{x^2}{1 + f_k(x)} \leq -\frac{x^2}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{a(\epsilon_0) + 1} &< 1 - \frac{x^2}{1 + f_k(x)} \leq 1 - \frac{x^2}{2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{a(\epsilon_0) + 1} &< f_{k+1}(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a(\epsilon_0) \leq \epsilon_0 < 1$. Assim, temos que

$$1 - \frac{x^2}{a(\epsilon_0) + 1} \geq 1 - \frac{1 - \epsilon_0}{a(\epsilon_0) + 1} = \frac{a(\epsilon_0) + \epsilon_0}{a(\epsilon_0) + 1} \geq \frac{2a(\epsilon_0)}{a(\epsilon_0) + 1} > a(\epsilon_0) > 0,$$

o que completa nossa indução.

(ii) Considere a seqüência

$$M_N = \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1 - x^2} - f_N(x)|.$$

Queremos mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_N = 0.$$

Para $N = 1$, temos que

$$M_1 = \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |1 - \sqrt{1 - x^2}| = \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} (1 - \sqrt{1 - x^2}).$$

Agora, observe que $\frac{d}{dx}(1 - \sqrt{1 - x^2}) = 0$ se e somente se $x = 0$, o qual é um ponto de mínimo. Logo, o máximo ocorre nos extremos de $\{x \in [-1, 1] / x^2 \leq 1 - \epsilon_0\}$, ou seja, $M_1 = 1 - \sqrt{1 - (1 - \epsilon_0)} = 1 - \sqrt{\epsilon_0}$.

Suponhamos que o ítem (ii) seja válido para $N \leq k$, ou seja, nossa conjectura é de que

$$M_k = \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |f_k(x) - \sqrt{1 - x^2}| = |f_k(x) - \sqrt{1 - x^2}| \Big|_{x^2 = 1 - \epsilon_0}$$

Vamos mostrar que vale para $N = k + 1$. Observe que

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |f_{k+1}(x) - \sqrt{1 - x^2}| \\ &= \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} \left| 1 - \frac{x^2}{1 + f_k(x)} - \sqrt{1 - x^2} \right| \\ &= \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} \left| \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + f_k(x)) - x^2}{1 + f_k(x)} \right| \\ &= \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} \left| \frac{(f_k(x) - \sqrt{1 - x^2})(1 - \sqrt{1 - x^2})}{1 + f_k(x)} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + a(\epsilon_0)} \right) M_k M_1 \end{aligned}$$

Note que, seguindo este raciocínio,

$$M_{k+2} \leq \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_0}}{1 + a(\epsilon_0)} \right) M_{k+1} \leq \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_0}}{1 + a(\epsilon_0)} \right)^2 M_k$$

ou seja,

$$M_k \leq \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_0}}{1 + a(\epsilon_0)} \right)^{k-1} M_1.$$

Como

$$\frac{1 - \sqrt{\epsilon_0}}{1 + a(\epsilon_0)} < 1$$

temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{k+1} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_0}}{1 + a(\epsilon_0)} \right)^k M_1 = 0,$$

ou seja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |f_{k+1}(x) - \sqrt{1 - x^2}| = 0.$$

(iii) Considerando a expansão em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ da função $\sqrt{1 - x^2}$, temos que, para $N = 1$

$$\sqrt{1 - x^2} - f_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \dots - 1 = \mathcal{O}(x^2)$$

e para $N = 2$

$$\sqrt{1 - x^2} - f_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \dots - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \mathcal{O}(x^4)$$

Suponhamos que o ítem (iii) seja válido para $N \leq k$. Para $N = k + 1$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} - f_{k+1}(x) &= \sqrt{1 - x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{1 + f_k(x)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2}(1 + f_k(x)) - (1 + f_k(x)) + x^2}{1 + f_k(x)} \\ &= \frac{(\sqrt{1 - x^2} - f_k(x)) + f_k(x)\sqrt{1 - x^2} - (1 - x^2)}{1 + f_k(x)} \\ &= \frac{(\sqrt{1 - x^2} - f_k(x)) + \sqrt{1 - x^2}(f_k(x) - \sqrt{1 - x^2})}{1 + f_k(x)} \\ &= \frac{(\sqrt{1 - x^2} - f_k(x))(1 - \sqrt{1 - x^2})}{1 + f_k(x)} \\ &= \frac{\mathcal{O}(x^{2k}) \mathcal{O}(x^2)}{\mathcal{O}(1)} \\ &= \mathcal{O}(x^{2k+2}) \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Lema 3.2. *Os polinômios T_{N+1} e S_{N+1} satisfazem*

$$\begin{aligned} \text{para } N \text{ ímpar: } \text{grau } T_N(x^2) &= N - 1, \text{ grau } S_N(x^2) = N - 1, \\ \text{para } N \text{ par: } \text{grau } T_N(x^2) &= N, \text{ grau } S_N(x^2) = N - 2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \text{para } N \text{ ímpar: } S_N(x^2) &= (-1)^{(N-1)/2} x^{N-1} + \mathcal{O}(x^{N-3}), \\ \text{para } N \text{ par: } T_N(x^2) &= (-1)^{N/2} x^N + \mathcal{O}(x^{N-2}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Prova. Vamos provar (3.34) e (3.35) por indução em N .

Para (3.34), com $N = 1$, temos que $\text{grau } T_1 = 0$ e $\text{grau } S_1 = 0$. Com $N = 2$, temos que $\text{grau } T_2 = 2$ e $\text{grau } S_2 = 0$. Supomos que (3.34) seja válida para $N \leq k-1$.

Para $N = k$ ímpar

$$\begin{aligned} \text{grau } T_k &= \text{grau} \left(2 \underbrace{T_{k-1}}_{\text{par}} - x^2 \underbrace{T_{k-2}}_{\text{ímpar}} \right) \\ \text{grau } S_k &= \text{grau} \left(2 \underbrace{S_{k-1}}_{\text{par}} - x^2 \underbrace{S_{k-2}}_{\text{ímpar}} \right), \end{aligned}$$

e como, nesse caso, $\text{grau}(2T_{k-1}) = k - 1$ e $\text{grau}(-x^2T_{k-2}) = (2) + (k - 3) = k - 1$, $\text{grau}(2S_{k-1}) = k - 3$ e $\text{grau}(-x^2S_{k-2}) = (2) + (k - 3) = k - 1$, temos que

$$\text{grau } T_k = k - 1$$

$$\text{grau } S_k = k - 1.$$

Para $N = k$ par

$$\begin{aligned} \text{grau } T_k &= \text{grau} \left(2 \underbrace{T_{k-1}}_{\text{ímpar}} - x^2 \underbrace{T_{k-2}}_{\text{par}} \right) \\ \text{grau } S_k &= \text{grau} \left(2 \underbrace{S_{k-1}}_{\text{ímpar}} - x^2 \underbrace{S_{k-2}}_{\text{par}} \right), \end{aligned}$$

e como, nesse caso, $\text{grau}(2T_{k-1}) = k - 2$ e $\text{grau}(-x^2T_{k-2}) = (2) + (k - 2) = k$, $\text{grau}(2S_{k-1}) = k - 2$ e $\text{grau}(-x^2S_{k-2}) = (2) + (k - 4) = k - 2$, temos que

$$\text{grau } T_k = k$$

$$\text{grau } S_k = k - 2.$$

Para (3.35), com $N = 3$, temos $S_3(x^2) = 4 - x^2 = (-1)^1 x^2 + \mathcal{O}(x^0)$, e com $N = 4$, temos $T_4(x^2) = x^4 - 4x^2 = (-1)^2 x^4 + \mathcal{O}(x^2)$. Supomos que (3.35) seja válida para $N \leq k - 1$. Assim, para $N = k$ ímpar

$$\begin{aligned} S_k(x^2) &= 2 \underbrace{S_{k-1}}_{\text{par}} - x^2 \underbrace{S_{k-2}}_{\text{ímpar}} \\ &= 2\mathcal{O}(x^{k-3}) - x^2 \left((-1)^{\frac{(k-2)-1}{2}} x^{(k-2)-1} + \mathcal{O}(x^{(k-2)-3}) \right) \\ &= 2\mathcal{O}(x^{k-3}) + (-1)^{\frac{k-1}{2}} x^{k-1} - \mathcal{O}(x^{k-3}) \\ &= (-1)^{\frac{k-1}{2}} x^{k-1} + \mathcal{O}(x^{k-3}), \end{aligned}$$

e para $N = k$ par

$$\begin{aligned} T_k(x^2) &= 2 \underbrace{T_{k-1}}_{\text{ímpar}} - x^2 \underbrace{T_{k-2}}_{\text{par}} \\ &= 2\mathcal{O}(x^{k-2}) - x^2 \left((-1)^{\frac{k-2}{2}} x^{k-2} + \mathcal{O}(x^{(k-2)-2}) \right) \\ &= 2\mathcal{O}(x^{k-2}) + (-1)^{\frac{k}{2}} x^k - \mathcal{O}(x^{k-2}) \\ &= (-1)^{\frac{k}{2}} x^k + \mathcal{O}(x^{k-2}), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. \square

Para derivar as condições de contorno \mathcal{B}^N , façamos a transformada de Fourier em (3.29) e assim podemos reescrever a condição de contorno como

$$0 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \hat{u} \Big|_{x=a}.$$

Observe que $\mathcal{R}u|_{x=a}$ é a transformada de Fourier inversa de $i(\omega/c) \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} \hat{u}(a, \omega, \eta)$.

Do lema (3.1), segue que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \hat{u} \Big|_{x=a} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} f_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right) \hat{u} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \mathcal{O} \left(\left| \frac{c\eta}{\omega} \right|^{2N} \right) \hat{u} \Big|_{x=a}.$$

Usando (3.31), a condição de contorno absorvente aproximada é da forma

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \left(1 + \frac{T_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)}{S_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)} \right) \hat{u} \Big|_{x=a} = 0, \quad (3.36)$$

a qual é equivalente a

$$S_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c}\left(S_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + T_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\right)\hat{u}\Big|_{x=a} = 0. \quad (3.37)$$

Observe pelo lema (3.2) que grau $S_N(c\eta/\omega) \leq N - 1$ e grau $T_N(c\eta/\omega) \leq N$. Como cada condição de contorno absorvente é definida por um operador de símbolo polinomial em ω e η , podemos multiplicar (3.37) por $(i\omega)^{N-1}$,

$$\left[(i\omega)^{N-1}S_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(i\omega)^N}{c}\left(S_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + T_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\right)\right]\hat{u}\Big|_{x=a} = 0.$$

Deste modo, podemos definir o operador $\mathcal{B}^N = \mathcal{B}^N\left(i\omega, i\eta, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ da forma

$$\mathcal{B}^N = \frac{1}{2^N}\left[(i\omega)^{N-1}S_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(i\omega)^N}{c}\left(S_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + T_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\right)\right], \quad (3.38)$$

onde (3.38) é um polinômio de grau no máximo N em (ω, η) . Quando referenciarmos (3.38), é importante também observar (3.36). Se usarmos a correspondência $i\omega \leftrightarrow \partial/\partial t$, $i\eta \leftrightarrow \partial/\partial y$, para definir $\mathcal{B}^N(\partial/\partial t, \partial/\partial y, \partial/\partial x)$, então $\mathcal{B}^N(\partial/\partial t, \partial/\partial y, \partial/\partial x)$ é a condição de contorno local de Padé em $x = a$. Usando (3.38) e as identidades do lema (3.2) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^N &= \frac{(i\omega)^{N-1}}{2^N}\left(2S_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}S_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \frac{(i\omega)^N}{2^N c}\left(2S_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}S_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + 2T_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}T_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\right) \\ &= \frac{i\omega}{2^{N-1}}\left((i\omega)^{N-2}S_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(i\omega)^{N-1}}{c}\left(S_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + T_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2^{N-2}}\frac{c^2\eta^2}{4}\left((i\omega)^{N-3}S_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(i\omega)^{N-2}}{c}\left(S_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + T_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

e por (3.38), chegamos à

$$\mathcal{B}^N = i\omega\mathcal{B}^{N-1} + \frac{c^2\eta^2}{4}\mathcal{B}^{N-2}, \quad (3.39)$$

que correspondem às condições em (3.23).

Observação 3.2. Para soluções suaves (próximas da fronteira em $x = a$) da equação da onda, a condição de contorno (3.22) pode ser reescrita em termos das derivadas de t e y somente. De fato, \mathcal{B}^N é par com respeito à variável x e, graças a equação da onda, a derivada de segunda ordem com respeito a x pode ser trocada por derivadas de t e y :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Em consequência, podemos mostrar que \mathcal{B}^N escreve-se formalmente como

$$\mathcal{B}^N = \frac{1}{2^{N-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N, \quad (3.40)$$

e, por conseguinte,

$$\mathcal{B}^N u = 0 \iff \tilde{\mathcal{B}}^N u = 0, \quad \tilde{\mathcal{B}}^N = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N. \quad (3.41)$$

A demonstração é imediata por indução em N : é evidente que \mathcal{B}^0 e \mathcal{B}^1 satisfazem (3.40). Se \mathcal{B}^{N-1} e \mathcal{B}^N satisfazem (3.40), então, pela definição (3.23) de \mathcal{B}^{N+1} , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{N+1} &= \frac{1}{2^{N-1}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N - \frac{1}{2^N} c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^{N-1} \\ &= \frac{1}{2^{N-1}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N - \frac{1}{2^N} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^{N-1} \end{aligned}$$

Observe que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

logo

$$\mathcal{B}^{N+1} = \frac{1}{2^{N-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right).$$

Como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

segue que

$$\mathcal{B}^{N+1} = \frac{1}{2^N} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^{N+1}.$$

Observação 3.3. Note que, por (3.38), \mathcal{B}^N pode ser reescrito na forma

$$\mathcal{B}^N = \mathcal{P}_{N-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{Q}_N \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

onde \mathcal{P}_{N-1} e \mathcal{Q}_N são polinômios homogêneos de duas variáveis de graus $N - 1$ e N , respectivamente. Em particular, \mathcal{B}^N continua sendo de primeira ordem com respeito a x ; a condição (3.22) pode ser vista como uma condição de contorno do tipo Dirichlet to Neumann (DtN) desde que podemos reescrevê-la como

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\mathcal{Q}_N \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right)}{\mathcal{P}_{N-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right)} u = 0 \quad (3.42)$$

3.2.2 Estabilidade e convergência

Agora, considere $u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ satisfazendo o problema (3.24),

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0, y, t) = g(y, t), & \text{em } x = 0, \\ u(x, y, t) = 0, & \text{para } t \leq 0. \end{cases}$$

Suponha que δ , um erro aceitável, e $a_0 > 0$ são dados. Considere o domínio $\Omega_a = \{x / 0 < x < a\}$. O objetivo é encontrar uma condição de contorno, \mathcal{B}^N , sobre a fronteira $x = a$, com $a \geq a_0$ tão próximo de a_0 quanto possível, de modo que se $u_N : \bar{\Omega}_a \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_N = 0, & \text{em } \Omega_a \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u_N(0, y, t) = g(y, t), & \text{em } x = 0 \\ \mathcal{B}^N u_N = 0, & \text{em } x = a \\ u_N(x, y, t) = 0, & \text{para } t \leq 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

então

$$\left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{a_0} |u - u_N|^2 dx dy dt \right)^{1/2} < \delta \quad (3.44)$$

para tempos T prolongados, de modo que o tempo de movimento das ondas pudesse produzir M reflexões na fronteira artificial em $x = a$, onde M é um inteiro positivo

dado. Além disso, a condição de contorno \mathcal{B}^N deve satisfazer (3.9). Obviamente, a fim de que (3.44) possa ser satisfeita, a condição de contorno \mathcal{B}^N deve também minimizar a amplitude das ondas refletidas.

Definição 3.2. *Um problema de valor inicial escalar*

$$\left(A_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) u = 0, \quad x > 0,$$

$$u(0, y, t) = u_0(y, t)$$

com $A_1(\omega, \eta)$, $A_2(\omega, \eta)$ polinômios homogêneos de graus $N - 1$, N , respectivamente, é (fracamente) bem posto como um operador evolutivo em x na direção $x > 0$, se

$$A_1(i\omega, i\eta)K + A_2(i\omega, i\eta) = 0, \quad (3.45)$$

para $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 > 0$, implica que $\mathcal{R}e(K) \leq 0$. \square

Enunciemos agora uma proposição que será importante na prova do teorema (3.1):

Proposição 3.3. *Assuma que $\mathcal{B}^N(i\omega, i\eta, K)$ é um polinômio homogêneo de grau N da forma*

$$\frac{\partial^N}{\partial t^N} + P_N^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + P_N^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde $P_N^1(i\omega, i\eta)$, $P_N^2(i\omega, i\eta)$ são polinômios homogêneos de grau $N - 1$. Assuma também que \mathcal{B}^N , como um operador evolutivo em x com direção $x > 0$, é bem posto. Então, dados η , K com $\mathcal{R}e(K) > 0$, o número de raízes $\tau_j(\eta, K)$ satisfazendo $\mathcal{B}^N(\tau_j, i\eta, K) = 0$ e $\mathcal{R}e(\tau_j) > 0$ é uma constante independente de η e K com $\mathcal{R}e(K) > 0$. Em particular, quando \mathcal{B}^N é dado pela condição de contorno de Padé, o número de raízes é zero, independentemente de η e K , com $\mathcal{R}e(K) > 0$.

Prova. Para (η, K) fixos, $\mathcal{B}^N(\tau, i\eta, K)$ é um polinômio de grau N em τ cujos coeficientes dependem continuamente de $(i\eta, K)$. Conseqüentemente, as raízes τ_j , $j = 1, \dots, N$, de $\mathcal{B}^N(\tau_j, i\eta, K)$ são funções contínuas de $(i\eta, K)$. Assim, por contra-posição, se o número de raízes τ_j com $\mathcal{R}e(\tau_j) > 0$ é não constante, então existe um

η_0 e um K_0 com $\mathcal{R}e(K_0) > 0$ e uma raiz puramente imaginária $\tau = i\omega_0$ satisfazendo $\mathcal{B}^N(i\omega_0, i\eta_0, K_0) = 0$. Ou seja, o número de raízes de $\mathcal{B}^N(\tau_j, i\eta, K)$ é fixo, N , no entanto o número de raízes de $\mathcal{B}^N(\tau_j, i\eta, K)$ com $\mathcal{R}e(\tau_j) > 0$, num dado instante, é m , e para $\mathcal{R}e(\tau_j) < 0$ é $N - m$; num outro instante, para $\mathcal{R}e(\tau_j) > 0$ é $m - 1$, e para $\mathcal{R}e(\tau_j) < 0$ é $N - (m - 1)$. Logo, em algum instante, para algum η_0 e K_0 com $\mathcal{R}e(K_0) > 0$, de fato haverá uma raiz puramente imaginária $\tau = i\omega_0$ satisfazendo $\mathcal{B}^N(i\omega_0, i\eta_0, K_0) = 0$. Mas isso contradiz o fato que \mathcal{B}^N é um operador evolutivo bem-posto com direção $x > 0$, pois para isso teríamos que ter $\mathcal{R}e(K) \leq 0$. Logo, (3.45) é satisfeita. Aplicando a primeira parte dessa proposição para as condições de contorno de Padé, precisamos somente contar as raízes τ com $\mathcal{R}e(\tau) > 0$ quando $i\eta \equiv 0$, pois o número de raízes de $\mathcal{B}^N(\tau, i\eta, K)$ para todo η e K com $\mathcal{R}e(K) > 0$ deve ser igual ao número de raízes de $\mathcal{B}^N(\tau, 0, K)$, com $\mathcal{R}e(K) > 0$. Mas, por (3.31), $f_N(0) = 1$, e, de acordo com (3.38) e (3.45), $\mathcal{B}^N(\tau, i\eta, K)$ pode ser escrito como

$$\frac{1}{2^N} \tau^{N-1} \left[K + \frac{\tau}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{\tau} \right) \right],$$

e assim satisfaz

$$\left(K + \frac{\tau}{c} \right) \tau^{N-1} = 0,$$

o que implica que $\tau^{N-1} = 0$ ou $\tau = -Kc$. Desde que $\mathcal{R}e(\tau) > 0$ e $\mathcal{R}e(K) > 0$, o número de raízes é zero, o que completa a prova. \square

Note que, dada uma combinação linear

$$\varphi = c_1 e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y},$$

temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{B}^N \varphi \\ &= \mathcal{B}^N (c_1 e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y}) + \mathcal{B}^N (c_2 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y}) \\ &= c_1 \mathcal{B}^N (e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y}) + c_2 \mathcal{B}^N (e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y}), \end{aligned}$$

o que implica que

$$c_1 = - \frac{\mathcal{B}^N (e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y})}{\mathcal{B}^N (e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y})} c_2.$$

Mas $\mathcal{B}^N(s, i\omega, \partial/\partial x)$ pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2^N} s^{N-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right) \right],$$

logo

$$c_1 = - \frac{\left(-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right) \right)}{\left(\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right) \right)} c_2.$$

Assim, definimos o *coeficiente de reflexão* $R_N(s, i\eta)$ dado por

$$R_N(s, i\eta) \equiv \frac{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right)}{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right)}. \quad (3.46)$$

Observação 3.4. *Segue de (3.46) que $R_N(s, i\eta)$ é holomorfo em s para $\mathcal{R}e(s) > 0$, pois não há pólos, nem singularidades essenciais, no máximo singularidades removíveis. Segue de [12] que*

$$|R_N(s, i\eta)| \leq 1 \quad \mathcal{R}e(s) \geq 0. \quad (3.47)$$

Observe que a equação da onda (2.3) resulta na relação de dispersão (2.5) que pode ser reescrita como

$$1 = \left(\frac{c\xi}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)^2$$

ou ainda

$$\left(\frac{c\xi}{\omega} \right)^2 = 1 - \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)^2.$$

Se $c^2\eta^2/\omega^2 \approx 1$, então temos que $\xi \approx 0$, ou seja, a incidência é tangencial, e além disso, $\mathbf{v}_g \approx (0, \pm 1)$. Se $c^2\eta^2/\omega^2 < 1$, teríamos que $c^2\xi^2/\omega^2 > 0$, o que implicaria que $\xi \in \mathbb{R}$. Logo as soluções seriam senóides e/ou cossenóides da forma $Ae^{i\xi x} + Be^{-i\xi x}$, ou seja, temos modos propagativos. Se $c^2\eta^2/\omega^2 > 1$, então $c^2\xi^2/\omega^2 < 0$, o que implica que ξ é puramente imaginário. Logo a solução seria da forma $Ae^{|\xi|x} + Be^{-|\xi|x}$. No entanto, a solução exponencial $e^{|\xi|x}$ não é uma solução fisicamente

aceitável, e portanto temos soluções com decaimento exponencial em x , ou seja, temos modos evanescentes.

Assim, definimos, para todo $\epsilon_0 > 0$, as regiões

$$G_1 = \left\{ (\omega, \eta) \left| 1 - \epsilon_0 \leq \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} \leq 1 + \epsilon_0 \text{ ou } |\omega|^2 + |c\eta|^2 < \epsilon_0 \right. \right\}$$

$$G_2 = \left\{ (\omega, \eta) \left| \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} < 1 - \epsilon_0, |\omega|^2 + |c\eta|^2 > \epsilon_0 \right. \right\}$$

$$G_3 = \left\{ (\omega, \eta) \left| \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} > 1 + \epsilon_0, |\omega|^2 + |c\eta|^2 > \epsilon_0 \right. \right\}$$

onde G_1 representa a região dos modos tangenciais, G_2 representa a região propagativa, e G_3 representa a região dos modos evanescentes. Além disso, considere

$$F_j = \left(\int \int_{G_j} |\hat{g}(\omega, \eta)|^2 d\omega d\eta \right)^{1/2} \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Uma vez que o domínio do problema (3.43) situa-se à esquerda do contorno artificial, convém interpretar o critério de Kreiss, segundo a proposição 3.1, da seguinte forma [12]:

Definição 3.3. *A condição de contorno \mathcal{B}^N , sobre a fronteira $x = 0$, juntamente com a equação da onda, agindo sobre funções definidas em $x \leq 0$, $t \geq 0$, é fortemente bem-posta desde que não existam soluções da forma*

$$\varphi(s, \eta) = e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y} \quad (3.48)$$

onde $s = \rho + i\omega$, com $\mathcal{R}e(s) \geq 0$, satisfazendo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) \varphi(s, \eta) = 0 \quad \text{em } x < 0, \quad (3.49)$$

$$\mathcal{B}^N \varphi(s, \eta)|_{x=0} = 0.$$

Além disso, para $|\frac{s}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ e $\mathcal{R}e(s) \geq 0$, deve existir $c_0 > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}(\varphi(s, \eta))| \geq c_0. \quad (3.50)$$

Considerando o problema (3.43), enunciemos agora o teorema central de [12]:

Teorema 3.1. (a) Toda \mathcal{B}^N é uma condição de contorno local fortemente bem-posta para a equação da onda.

(b) Dados $\delta > 0$, um inteiro arbitrariamente grande $M > 0$, e uma função forçante arbitrária $g(y, t) \in L^2 \cap L^1$ tal que $g(y, t) = 0$ para $t \leq 0$, existem $N_0 = N_0(\delta, M)$ e $a_0 = a_0(\delta, M)$ tal que se, para todo $N \geq N_0$ e $a \geq a_0$, temos que u_N resolve o problema de valor de contorno em (3.43), então

$$\left(\int_0^T \int_0^{a_0} \int_{\mathbb{R}} |u - u_N|^2 dy dx dt \right)^{1/2} < \delta \quad (3.51)$$

para todo tempo T com $0 \leq T \leq 2aM$.

Prova. (a) Usando as definições (3.3) e (3.2), começaremos por provar que

$$\mathcal{B}_N \text{ é um operador evolutivo (fracamente) bem-posto para } x > 0. \quad (3.52)$$

Quando $\omega \neq 0$, (3.38) e (3.45) implicam que

$$K + \frac{i\omega}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{i\omega} \right) = 0$$

e, como f_N tem coeficientes reais, temos que

$$\mathcal{R}e(K) + i\mathcal{I}m \left(K + \frac{\omega}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{i\omega} \right) \right) = 0,$$

o que implica que $\mathcal{R}e(K) = 0$. Por outro lado, quando $\omega = 0$, segue do Lema (3.2) e de (3.38) que

$$\begin{aligned} (-1)^{(N-1)/2} 2^{-N} c^{N-1} (i\eta)^{N-1} K &= 0, & \text{se } N \text{ é ímpar} \\ (-1)^{N/2} 2^{-N} c^{N-1} (i\eta)^N &= 0, & \text{se } N \text{ é par.} \end{aligned} \quad (3.53)$$

De fato, para N ímpar, do Lema (3.2) e de (3.38), segue que

$$\begin{aligned}
2^N \mathcal{B}^N(i\omega, i\eta, K) &\equiv (i\omega)^{N-1} \left((-1)^{(N-1)/2} c^{N-1} \frac{(i\eta)^{N-1}}{(i\omega)^{N-1}} + \mathcal{O}\left(c^{N-3} \frac{(i\eta)^{N-3}}{(i\omega)^{N-3}} \right) \right) K \\
&+ \frac{(i\omega)^N}{c} \left((-1)^{(N-1)/2} c^{N-1} \frac{(i\eta)^{N-1}}{(i\omega)^{N-1}} + \mathcal{O}\left(c^{N-3} \frac{(i\eta)^{N-3}}{(i\omega)^{N-3}} \right) \right) \\
&+ \frac{(i\omega)^N}{c} \mathcal{O}\left(c^{N-1} \frac{(i\eta)^{N-1}}{(i\omega)^{N-1}} \right) \\
&\equiv \left((-1)^{(N-1)/2} c^{N-1} (i\eta)^{N-1} + \mathcal{O}\left(c^{N-3} (i\omega)^2 (i\eta)^{N-3} \right) \right) K \\
&+ \left((-1)^{(N-1)/2} c^{N-2} (i\eta)^{N-1} (i\omega) + \mathcal{O}\left(c^{N-4} (i\eta)^{N-3} (i\omega)^3 \right) \right) \\
&+ \mathcal{O}\left(c^{N-2} (i\eta)^{N-1} (i\omega) \right)
\end{aligned}$$

logo, para $\omega = 0$, temos a primeira parte de (3.53). Agora, para N par, segue do Lema (3.2) e de (3.38) que

$$\begin{aligned}
2^N \mathcal{B}^N(i\omega, i\eta, K) &\equiv (i\omega)^{N-1} \left(\mathcal{O}\left(c^{N-2} \frac{(i\eta)^{N-2}}{(i\omega)^{N-2}} \right) \right) K \\
&+ \frac{(i\omega)^N}{c} \left(\mathcal{O}\left(c^{N-2} \frac{(i\eta)^{N-2}}{(i\omega)^{N-2}} \right) \right) \\
&+ \frac{(i\omega)^N}{c} \left((-1)^{N/2} c^N \frac{(i\eta)^N}{(i\omega)^N} + \mathcal{O}\left(c^{N-2} \frac{(i\eta)^{N-2}}{(i\omega)^{N-2}} \right) \right) \\
&\equiv \left(\mathcal{O}\left(c^{N-2} (i\omega) (i\eta)^{N-2} \right) \right) K \\
&+ \left(\mathcal{O}\left(c^{N-3} (i\omega)^2 (i\eta)^{N-2} \right) \right) \\
&+ \left((-1)^{N/2} c^{N-1} (i\eta)^N + \mathcal{O}\left(c^{N-3} (i\omega)^2 (i\eta)^{N-2} \right) \right),
\end{aligned}$$

logo, para $\omega = 0$, temos a segunda parte de (3.53). Assim, no primeiro caso, $K = 0$, enquanto no segundo, não existe raiz de K . Isso verifica a afirmação em (3.52).

Agora, suponhamos que

$$\varphi(s, \eta) = e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y}$$

com $\mathcal{R}e(s) > 0$, satisfaz (3.49). Tomemos $K = \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}$ e $\tau = s$. Naturalmente temos $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}))\varphi(s, \eta) = (s^2 - c^2((\frac{s^2}{c^2} + \eta^2) - \eta^2))\varphi = 0$. Por (3.38), temos

que

$$\mathcal{B}^N \varphi = 0$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right) \right) \varphi \\ &= \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} \varphi + \left(\frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right) \right) \varphi \\ &= \left(K + \frac{\tau}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{\tau} \right) \right) \varphi. \end{aligned}$$

Assim, (τ, K) é raiz de $\mathcal{B}^N(\tau, i\eta, K) = 0$ com $\mathcal{R}e(K) > 0$ e $\mathcal{R}e(\tau) > 0$, e isso contradiz a última sentença da proposição (3.3). Logo, (3.49) é satisfeita para $\mathcal{R}e(s) > 0$.

Observe que $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ é compacto, e $|\mathcal{B}^N \varphi(\omega, \eta)|_{x=0}$ é contínua, logo assume máximo e mínimo em $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$. Assim,

$$|\mathcal{B}^N \varphi(\omega, \eta)|_{x=0} \geq \min_{|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1} |\mathcal{B}^N \varphi(\omega, \eta)|_{x=0}.$$

Desse modo, para verificar (3.50) por compacidade, precisamos somente verificar que, para $s = i\omega$ fixo, com $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$,

$$\left| (i\omega)^N S_N \left(c \frac{i\eta}{i\omega} \right) \left(1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} \right)^{1/2} + \frac{(i\omega)^N}{c} \left(S_N \left(c \frac{i\eta}{i\omega} \right) + T_N \left(c \frac{i\eta}{i\omega} \right) \right) \right| \neq 0, \quad (3.54)$$

pois isso acontecerá se, e somente se, $\min_{|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1} |\mathcal{B}^N \varphi(\omega, \eta)| > 0$. Para $\omega \neq 0$, a condição em (3.54) é equivalente a

$$\left| \left(1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} \right)^{1/2} + \frac{1}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{i\omega} \right) \right| > 0. \quad (3.55)$$

Para $c^2 \eta^2 / \omega^2 \geq 1$, o termo $(1 - c^2 \eta^2 / \omega^2)^{1/2}$ é puramente imaginário, logo (3.55) é satisfeita. Se $c^2 \eta^2 / \omega^2 = 1$, o termo $(1 - c^2 \eta^2 / \omega^2)^{1/2}$ desaparece, e como temos que f_N é real com $f_N(1) \neq 0$, (3.55) tem módulo positivo. Para $c^2 \eta^2 / \omega^2 < 1$, temos que $(1 - c^2 \eta^2 / \omega^2)^{1/2} > 0$, e pelo Lema (3.1), $0 < f_N \leq 1$, o que satisfaz (3.55). Quando $\omega = 0$, observe que $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ implica que $\eta \neq 0$. Assim, usando

ambas as expressões em (3.53), aplicando a primeira com $K = \sqrt{\eta^2}$, temos que $|\mathcal{B}^N \varphi(0, \eta)| = 2^{-N} c^{N-1} |\eta|^N > 0$. Logo (3.50) é satisfeita para $\mathcal{R}e(s) = 0$.

Agora note que, para $\mathcal{R}e(s) = 0$ temos que $|\mathcal{B}^N \varphi(\omega, \eta)|_{x=0} \geq c_0$ em $|\frac{s}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$, ou seja, $|\mathcal{B}^N \varphi(\omega, \eta)|_{x=0} \neq 0$ para algum (s, η) . Assim, (3.48) não é solução de (3.49) para todo (s, η) com $\mathcal{R}e(s) = 0$. Note ainda que, por contraposição, se existem soluções da forma (3.48) satisfazendo (3.49) para todo (s, η) com $\mathcal{R}e(s) > 0$, então $\mathcal{B}^N \varphi(s, \eta)$ não satisfaz (3.50) para $|\frac{s}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ com $\mathcal{R}e(s) > 0$. Assim, completamos a prova da parte (a) do teorema.

(b) Associado com a condição de contorno \mathcal{B}^N e a exponencial, com $\mathcal{R}e(s) \geq 0$, dada por

$$e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y}$$

está o coeficiente de reflexão $R_N(s, i\eta)$ definido em (3.46). Sem perda de generalidade, podemos assumir que g é suficientemente suave.

Usando transformada de Fourier-Laplace em (3.43), chegamos ao problema

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}_N}{dx^2} - \left(\frac{s^2}{c^2} + \eta^2 \right) \hat{u}_N = 0, & \text{em } \Omega_a \\ \hat{u}_N(0, \eta, s) = \hat{G}(\eta, s), & \text{em } x = 0 \\ \mathcal{B}^N \hat{u}_N|_{x=a} = 0, & \text{em } x = a, \end{cases} \quad (3.56)$$

onde $s = \rho + i\omega$, com $\mathcal{R}e(s) > 0$. Aqui, $\hat{G}(\eta, s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-st - i\eta y} g(y, t) dy dt$.

Resolvendo a EDO, temos que

$$\hat{u}_N(x, \eta, s) = c_1 e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x}. \quad (3.57)$$

Aplicando a primeira condição de contorno, temos que

$$c_1 + c_2 = \hat{G}(\eta, s)$$

e assim

$$\hat{u}_N(x, \eta, s) = (\hat{G}(\eta, s) - c_2) e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x}. \quad (3.58)$$

Observe que a segunda condição de contorno pode ser reescrita como

$$\mathcal{B}^N \hat{u}_N|_{x=a} = \frac{\partial \hat{u}_N}{\partial x} \Big|_{x=a} + \hat{u}_N \Big|_{x=a} \frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right).$$

Assim, denotando $\hat{G} = \hat{G}(\eta, s)$, $f_N = f_N(ci\eta/s)$, $\tilde{s} = s/c$ e $(\tilde{s}^2 + \eta^2) = \lambda$, aplicando a segunda condição de contorno em (3.58), temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\hat{G} - c_2) \sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} + (\hat{G} - c_2) e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N + c_2 e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N \\ &= \hat{G} \sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} + \hat{G} e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N - c_2 e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N + c_2 e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N \\ &= \hat{G} (\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N) + c_2 (-\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} - e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N + e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N) \end{aligned}$$

o que implica que

$$c_2 (\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N - e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N) = \hat{G} (\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\hat{G} (\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N)}{(\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N) \left(1 + \frac{\sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} - e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N}{\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N} \right)} \\ &= \frac{\hat{G}}{1 + \frac{\sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} - e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N}{\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N}}. \end{aligned}$$

Observe que

$$1 + \frac{\sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} - e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N}{\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N} = 1 + \frac{e^{-a\sqrt{\lambda}} (\sqrt{\lambda} - \tilde{s} f_N)}{e^{a\sqrt{\lambda}} (\sqrt{\lambda} + \tilde{s} f_N)} = 1 - \left(\frac{-\sqrt{\lambda} + \tilde{s} f_N}{\sqrt{\lambda} + \tilde{s} f_N} \right) e^{-2a\sqrt{\lambda}}.$$

Pela definição de $R_N = R_N(i\eta, s)$, em (3.46), temos que

$$c_2 = \frac{\hat{G}}{1 - R_N e^{-2a\sqrt{\lambda}}} = \hat{G} (1 - R_N e^{-2a\sqrt{\lambda}})^{-1}.$$

Expandindo o último termo numa série binomial temos

$$c_2 = \hat{G} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-2aj\sqrt{\lambda}} \right).$$

Logo

$$c_1 = \hat{G} - c_2 = -\hat{G} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-2aj\sqrt{\lambda}}.$$

Substituindo c_1 e c_2 em (3.57) temos

$$\begin{aligned} \hat{u}_N(x, \eta, s) &= -\hat{G} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-2aj\sqrt{\lambda}} e^{x\sqrt{\lambda}} + \hat{G} e^{-x\sqrt{\lambda}} + \hat{G} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-2aj\sqrt{\lambda}} e^{-x\sqrt{\lambda}} \\ &= \hat{G} e^{-x\sqrt{\lambda}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\hat{G} (-1)^{j+1} R_N^j e^{(x-2aj)\sqrt{\lambda}} + \hat{G} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-(x+2aj)\sqrt{\lambda}} \right) \\ &= \hat{G} e^{-x\sqrt{\lambda}} + \hat{G} \sum_{j=1}^{\infty} \left((-1)^j R_N^j e^{(x-2aj)\sqrt{\lambda}} + (-1)^{j+1} R_N^j e^{-(x+2aj)\sqrt{\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Aplicando a inversa de Fourier-Laplace obtemos

$$\begin{aligned} u_N(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta y} \left(\frac{1}{i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{st} \hat{G} e^{-x\sqrt{\lambda}} ds \right) d\eta \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i\eta y} \left(\frac{1}{i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{st} e^{(x-2aj)\sqrt{\lambda}} (-1)^j R_N^j \hat{G} ds \right) d\eta \right. \\ &\left. + \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta y} \left(\frac{1}{i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{st} e^{-(x+2aj)\sqrt{\lambda}} (-1)^{j+1} R_N^j \hat{G} ds \right) d\eta \right] \quad (3.59) \end{aligned}$$

para todo $\rho > 0$.

Agora, observe que, quando $\rho \rightarrow 0$, o limite de ambos os integrandos das três parcelas da soma acima em (3.59) são dominados pela função $\hat{G}(i\omega, \eta) \in L^2 \cap L^1$. Assim, considerando a observação (3.1), pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\begin{aligned} u_N(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x\sqrt{\lambda} + i\omega t + i\eta y} \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(x-2aj)\sqrt{\lambda} + i\omega t + i\eta y} (-1)^j R_N^j \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \right. \\ &\left. + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+2aj)\sqrt{\lambda} + i\omega t + i\eta y} (-1)^{j+1} R_N^j \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \right] \quad (3.60) \end{aligned}$$

onde $\hat{g}(\omega, \eta) = \hat{G}(i\omega, \eta)$.

Assim, fazendo $\rho \rightarrow 0$, observando (3.28), temos que a solução u_N de (3.43) é dada por

$$u_N(x, y, t) = u(x, y, t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_N^j(x, y, t), \quad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned} u_N^j(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}+i\omega t+i\eta y} (-1)^j R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}+i\omega t+i\eta y} (-1)^{j+1} R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta. \end{aligned}$$

Além disso, segue de (3.47) e do teorema de Paley-Wiener [56] que, dado T com $T \leq 2aM$, $u_N^j(x, y, t) \equiv 0$ para $t \leq T$ e $j > M$. De fato, defina

$$\begin{aligned} \varphi_N^j(x, y, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}+i\omega(\tau+T)+i\eta y} (-1)^j R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}+i\omega(\tau+T)+i\eta y} (-1)^{j+1} R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta. \end{aligned}$$

onde $\tau = t - T$. Observe que $\varphi_N^j(x, y, \tau) = u_N^j(x, y, t - T)$.

Note que, como $g(y, t) \in L^2 \cap L^1$, pelo teorema (A.3), temos que $\hat{g}(i\eta, s) \in H^2(0)$. Da observação (3.1), segue que $e^{(\pm x - 2aj)\sqrt{\eta^2 + \frac{s^2}{c^2}}}$ é holomorfa para $\mathcal{R}e(s) > 0$. Da observação (3.4), segue que $R_N(i\eta, s)$ é holomorfa para $\mathcal{R}e(s) > 0$. Assim, temos que $\hat{\varphi}_N^j$ é holomorfa para $\mathcal{R}e(s) > 0$.

Como $\mathcal{R}e(\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}) > \mathcal{R}e(s) > 0$, temos

$$|e^{(x-2aj)\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}} e^{sT}| < |e^{((x-2aj)+T)s}|. \quad (3.62)$$

Como $0 < x \leq a$, temos que $(x - 2aj) + T \leq a(1 - 2j) + T \leq a(1 - 2j) + 2Ma$. Assim, a expressão (3.62) ficará menor que 1 somente se $j > M$. Analogamente, $|e^{-(x+2aj)\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}} e^{sT}| < 1$ somente se $j > M$. Logo, por (3.47), temos que

$$\begin{aligned} &|e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 + \frac{s^2}{c^2}} + sT} (-1)^j R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta)| \\ &+ |e^{-(x+2aj)\sqrt{\eta^2 + \frac{s^2}{c^2}} + sT} (-1)^j R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta)| < 2|\hat{g}(\omega, \eta)| \end{aligned}$$

para $j > M$, e deste modo, temos que $\hat{\varphi}_N^j \in L^2$. Assim, pelo teorema em (A.3), temos que $\hat{\varphi}_N^j \in H^2(0)$. Logo, pelo teorema de Paley-Wiener (A.4), temos que $\varphi_N^j(x, y, \tau)$ se anula para $\tau < 0$. Isso implica que $u_N^j(x, y, t - T)$ se anula para $t - T < 0$, isto é, para $t < T$.

Agora precisamos mostrar que

$$\sum_{j=1}^M \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} < \delta. \quad (3.63)$$

Note que, por (3.61),

$$\hat{u}_N^j = e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^j R_N^j \hat{g} + e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{j+1} R_N^j \hat{g}$$

e portanto

$$\begin{aligned} (\hat{u}_N^j)^2 &= \left(e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^j + e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{j+1} \right)^2 (R_N^j \hat{g})^2 \\ &= \left(e^{2(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{2j} + e^{-2(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{2j+2} \right. \\ &\quad \left. + e^{-4aji(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{2j+1} \right) (R_N^j \hat{g})^2 \\ &= \left(e^{2(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} + e^{-2(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} - e^{-4aji(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} \right) (R_N^j \hat{g})^2 \\ &\leq \left(e^{2(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} + e^{-2(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} \right) (R_N^j \hat{g})^2 \end{aligned}$$

e por consequência

$$\begin{aligned} |\hat{u}_N^j|^2 &\leq \left| e^{2(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} R_N^{2j} \hat{g}^2 \right| + \left| e^{-2(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} R_N^{2j} \hat{g}^2 \right| \\ &= \left| e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} R_N^j \hat{g} \right|^2 + \left| e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} R_N^j \hat{g} \right|^2 \quad (3.64) \end{aligned}$$

Para fazer a estimativa sobre a região G_1 , considere (3.47), e observe que se $1 - c^2\eta^2/\omega^2 \geq 0$, temos que $(x - 2aj)(\omega/c)\sqrt{1 - c^2\eta^2/\omega^2} \in \mathbb{R}$, e portanto $|e^{i[(x-2aj)(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}]}| = 1$. Se $1 - c^2\eta^2/\omega^2 < 0$, tomemos o ramo de $\sqrt{\cdot}$ tal que

$\sqrt{1 - c^2\eta^2/\omega^2} = -i\sqrt{|1 - c^2\eta^2/\omega^2|}$, conforme observação (3.1). Note que, como $0 \leq x \leq a$, temos que $x - 2aj \leq a(1 - 2j) < 0$, pois $j \geq 1$. Assim, como $\omega > 0$,

$$|e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}}| = |e^{(x-2aj)(\omega/c)\sqrt{|1-c^2\eta^2/\omega^2|}}| \leq 1. \quad (3.65)$$

Analogamente temos

$$|e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}}| = |e^{-(x+2aj)(\omega/c)\sqrt{|1-c^2\eta^2/\omega^2|}}| \leq 1. \quad (3.66)$$

Logo,

$$|\hat{u}_N^j| \leq 2|\hat{g}|^2.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_1} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\omega d\eta \right)^{1/2} &\leq \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_1} 2|\hat{g}|^2 a_0 d\omega d\eta \right)^{1/2} \\ &= M(2a_0)^{1/2} \left(\int \int_{G_1} |\hat{g}|^2 d\omega d\eta \right)^{1/2} \\ &= (2a_0)^{1/2} M F_1 \end{aligned}$$

Como a região G_1 é limitada, podemos escolher ϵ_0 tão pequeno de modo que

$$F_1 \leq \frac{\delta}{3(2a)^{1/2}M},$$

e deste modo

$$\sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_1} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\omega d\eta \right)^{1/2} \leq \frac{\delta}{3}. \quad (3.67)$$

Agora, precisamos estimar a contribuição da região G_2 correspondendo aos modos propagativos. Como G_2 é uma região ilimitada, vamos encontrar uma melhor estimativa para R_N . Pela propriedade (i) do Lema (3.1), dado ϵ_0 ,

$$\min_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1 - x^2} + f_N(x)| \geq \sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0) > 0. \quad (3.68)$$

De fato, observe que

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1 - x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

logo $x = 0$ é ponto de máximo de $\sqrt{1-x^2}$. Assim, o ponto de mínimo ocorre em $|x| = \sqrt{1-\epsilon_0}$, o que implica em $\sqrt{1-(1-\epsilon_0)} = \sqrt{\epsilon_0}$. Da propriedade (i) do Lema (3.1), temos que $f_N(x) > a(\epsilon_0) > 0$. Logo

$$\min_{x^2 \leq 1-\epsilon_0} |\sqrt{1-x^2} + f_N(x)| \geq \min_{x^2 \leq 1-\epsilon_0} |\sqrt{1-x^2}| + \min_{x^2 \leq 1-\epsilon_0} |f_N(x)| > \sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0) > 0.$$

Agora, dado δ' , pela propriedade (ii) do Lema (3.1), existe N_0 tal que, para todo $N \geq N_0$,

$$\max_{x^2 \leq 1-\epsilon_0} |\sqrt{1-x^2} - f_N(x)| < \delta'(\sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0)) \quad (3.69)$$

Pela definição de $R_N(i\eta, s)$ em (3.46), temos que, para $s = i\omega$,

$$\begin{aligned} R_N(i\eta, i\omega) &= \frac{-\sqrt{\eta^2 + \frac{(i\omega)^2}{c^2}} + \frac{i\omega}{c} f_N\left(c \frac{i\eta}{i\omega}\right)}{\sqrt{\eta^2 + \frac{(i\omega)^2}{c^2}} + \frac{i\omega}{c} f_N\left(c \frac{i\eta}{i\omega}\right)} \\ &= \frac{-\left(\sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} - f_N\left(c \frac{i\eta}{i\omega}\right)\right)}{\sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} + f_N\left(c \frac{i\eta}{i\omega}\right)} \end{aligned}$$

o que implica que

$$|R_N(i\eta, i\omega)| = \frac{\left|\sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} - f_N\left(c \frac{i\eta}{i\omega}\right)\right|}{\left|\sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} + f_N\left(c \frac{i\eta}{i\omega}\right)\right|}.$$

Assim

$$\max_{(\omega, \eta) \in G_2} |R_N(i\omega, i\eta)| \leq \frac{\max \left| \sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} - f_N\left(c \frac{i\eta}{i\omega}\right) \right|}{\min \left| \sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} + f_N\left(c \frac{i\eta}{i\omega}\right) \right|} < \frac{\delta'(\sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0))}{\sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0)} = \delta'$$

Logo, para a região G_2 , por (3.64), (3.65) e (3.66), temos que

$$|\hat{u}_N^j|^2 \leq 2|R_N^j|^2|\hat{g}|^2 < 2(\delta')^{2j}|\hat{g}|^2.$$

Assim, com $\delta' < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_2} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} &\leq \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_2} 2a_0 |R_N^j \hat{g}|^2 d\eta d\omega \right)^{1/2} \\ &< \sum_{j=1}^M (\delta')^j \sqrt{2a_0} \left(\int \int_{G_2} |\hat{g}|^2 d\eta d\omega \right)^{1/2} \\ &= \sum_{j=1}^M (\delta')^j \sqrt{2a_0} F_2 \end{aligned}$$

Observe que, tomando $S = \sum_{j=1}^M (\delta')^j$, temos que

$$\frac{1 - \delta' \delta' + (\delta')^2 + \dots + (\delta')^M}{1 - \delta'} = \frac{S}{\delta'}.$$

Desde que $(1 - \delta')(1 + \delta' + (\delta')^2 + \dots + (\delta')^{M-1}) = 1 - (\delta')^M$, temos que

$$S = \delta' \left(\frac{1 - (\delta')^M}{1 - \delta'} \right).$$

Deste modo, escolhendo δ' apropriadamente, temos que

$$\sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_2} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} < \sqrt{2a_0} F_2 \delta' \left(\frac{1 - (\delta')^M}{1 - \delta'} \right) \leq \frac{\delta}{3} \quad (3.70)$$

Finalmente, para a estimativa sobre os modos evanescentes da região G_3 , somente as propriedades de estabilidade das condições de contorno, como a expressa em (3.47), entram nas estimativas. Sobre a região G_3 , $c^2 \eta^2 / \omega^2 \geq 1 + \epsilon_0$ e $(|\omega|^2 + |c\eta|^2)^{1/2} \geq \sqrt{\epsilon_0}$; assim

$$\max_{(\omega, \eta) \in G_3} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \geq \sqrt{\epsilon_0} > 0. \quad (3.71)$$

De fato,

$$\max_{(\omega, \eta) \in G_3} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \geq \max_{|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

e

$$\max_{(\omega, \eta) \in G_3} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \geq \max_{\frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} = 1 + \epsilon_0} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

O máximo de $\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ ocorre no mesmo ponto que o máximo de $\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ ocorre. Assim, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos $(\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2})$ sujeito à restrição $|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0$. Definimos que $F(\eta, \omega) = \eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ e $G(\eta, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} + \eta^2$, e deste modo temos $\nabla F = \lambda \nabla G$ e $|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0$. Logo, temos o sistema

$$\begin{aligned} 2\eta &= \lambda 2\eta \\ -2\frac{\omega}{c^2} &= \lambda 2\frac{\omega}{c^2} \\ |\omega|^2 + |c\eta|^2 &= \epsilon_0. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 1$, temos que $\omega = 0$, o que implica que $\eta = \pm\sqrt{\epsilon_0}/c$. Se $\eta = 0$, temos que $\omega = \pm\sqrt{\epsilon_0}$. Logo

$$\max_{|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0} F(\eta, \omega) = \frac{\epsilon_0}{c^2}$$

o que implica que

$$\max_{|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{c}.$$

Note que, para a curva $c^2\eta^2/\omega^2 = 1 + \epsilon_0$, o método dos multiplicadores de Lagrange fornece apenas a localização do mínimo de $\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$.

Como $i(\omega/c)\sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} = \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$, temos que

$$\max_{\substack{(\omega, \eta) \in G_3 \\ 0 \leq x \leq a_0}} (|e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}|, |e^{-(x+2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}|) = \max_{\substack{(\omega, \eta) \in G_3 \\ 0 \leq x \leq a_0}} |e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}|$$

Desde que $a \geq a_0$ e $j \geq 1$, a última exponencial na expressão acima é decrescente.

Assim, denotando $\tilde{\epsilon}_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{c}$, por (3.71),

$$\max_{\substack{(\omega, \eta) \in G_3 \\ 0 \leq x \leq a_0}} |e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}| \leq e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0}.$$

Logo, por (3.64) e (3.47), temos que

$$\begin{aligned} |\hat{u}_N^j|^2 &\leq |e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} R_N^j \hat{g}|^2 + |e^{-(x+2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} R_N^j \hat{g}|^2 \\ &\leq |e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0} \hat{g}|^2 + |e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0} \hat{g}|^2 \\ &= 2|e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0} \hat{g}|^2. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_3} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} &\leq \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_3} 2|e^{(a_0-2aj)\tilde{c}_0} \hat{g}|^2 a_0 d\eta d\omega \right)^{1/2} \\
&= \sum_{j=1}^M e^{(a_0-2aj)\tilde{c}_0} \sqrt{2a_0} \left(\int \int_{G_3} |\hat{g}|^2 d\omega d\xi \right)^{1/2} \\
&= e^{a_0\tilde{c}_0} \sum_{j=1}^M e^{-2aj\tilde{c}_0} \sqrt{2a_0} F_3.
\end{aligned}$$

Como $e^{-2a\tilde{c}_0} < 1$, temos uma soma geométrica $S = \sum_{j=1}^M e^{-2aj\tilde{c}_0}$, e logo,

$$\frac{1 - e^{2a\tilde{c}_0}}{1 - e^{-2a\tilde{c}_0}} \left(\frac{e^{-2a\tilde{c}_0} + e^{-4a\tilde{c}_0} + \dots + e^{-2Ma\tilde{c}_0}}{e^{-2a\tilde{c}_0}} \right) = \frac{S}{e^{-2a\tilde{c}_0}}.$$

Desde que $(1 - e^{2a\tilde{c}_0})(1 + e^{-2a\tilde{c}_0} + e^{-4a\tilde{c}_0} + \dots + e^{-(2M-2)a\tilde{c}_0}) = 1 - e^{-2Ma\tilde{c}_0}$, temos então que

$$\begin{aligned}
e^{a_0\tilde{c}_0} \sum_{j=1}^M e^{-2aj\tilde{c}_0} \sqrt{2a_0} F_3 &= e^{a_0\tilde{c}_0} e^{-2a\tilde{c}_0} \left(\frac{1 - e^{-2Ma\tilde{c}_0}}{1 - e^{-2a\tilde{c}_0}} \right) \sqrt{2a_0} F_3 \\
&= \sqrt{2a_0} e^{-(2a-a_0)\tilde{c}_0} \left(\frac{1 - e^{-2Ma\tilde{c}_0}}{1 - e^{-2a\tilde{c}_0}} \right) F_3.
\end{aligned}$$

Por fim, dado δ ,

$$\sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_3} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} \leq \frac{\delta}{3} \quad (3.72)$$

de modo que a seja escolhido suficientemente grande. Somando (3.67), (3.70) e (3.72), chegamos à estimativa em (3.63). Pelo Teorema de Plancherel [56], temos que

$$\sum_{j=1}^M \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |u_N^j|^2 dx dy dt \right)^{1/2} < \delta. \quad (3.73)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^M \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |u_N^j|^2 dx dy dt \right)^{1/2} &< \sum_{j=1}^M \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |u_N^j|^2 dx dy dt \right)^{1/2} \\
&= \sum_{j=1}^M \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |u_N^j|^2 dx dy dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Assim, chegamos ao resultado de convergência em (3.51). \square

Note que os parâmetros N da ordem da condição de contorno e a da distância do suporte dos dados iniciais são muito importantes. O fato do resultado em (3.73) requerer que a seja suficientemente grande mostra que os modos evanescentes não são corretamente tratados pelas condições de contorno (3.23), ou seja, é necessário que o suporte dos dados iniciais esteja suficientemente longe do contorno $x = a$ a fim de aniquilar a amplitude dos modos evanescentes. O fato de que o resultado é válido para um intervalo de tempo da forma $[0, 2Ma]$ indica que o resultado leva em consideração um número grande, arbitrário, de reflexões sobre a condição de contorno. Uma discussão sobre o teorema acima é feita em [9, 8].

3.3 Condições de contorno de Higdon

Ao invés de procurar diretamente condições de contorno analíticas e então discretizá-las, Higdon [32] propôs a idéia de trabalhar primeiramente com a aproximação em diferenças finitas. Essas aproximações o conduziram à algumas condições de contorno analíticas consistentes com as condições de contorno aproximadas. Tais condições são perfeitamente absorventes para ondas viajando num certo ângulo de incidência não-nulo, em contraste com as condições de contorno em [12], que absorvem muito bem ondas num ângulo de incidência normal.

3.3.1 Formulação geral

Seguindo Higdon [32], descreveremos agora algumas propriedades das condições de contorno que desejamos encontrar. Para os pontos interiores da malha computacional, usaremos o esquema de diferenças centrais de segunda ordem dado em (2.9). Outros esquemas numéricos são abordados em [34]. Aqui, adotaremos que c , a

velocidade da onda, é igual a 1. Podemos reescrever (2.8) como

$$\kappa^j e^{i\eta y} z^n \quad (3.74)$$

onde

$$\kappa = e^{i\xi\Delta x} \quad \text{e} \quad z = e^{i\omega\Delta t} \quad (3.75)$$

Se $\xi\Delta x = 0$, então $\kappa = 1$ e a onda é constante em x . Se $\xi\Delta x = \pm\pi$, então $\kappa = -1$ e a onda é uma função dente-de-serra em x . Analogamente valem as mesmas observações para a variável z .

Sejam K e Z os operadores *shift* com respeito a x e t , respectivamente, definidos por

$$Ku_{j,m}^n = u_{j+1,m}^n, \quad Zu_{j,m}^n = u_{j,m}^{n+1}, \quad (3.76)$$

e consideremos a condição de contorno da forma

$$\mathcal{B}(K, Z^{-1})u_{0,m}^{n+1} = 0 \quad (3.77)$$

onde \mathcal{B} é um polinômio em duas variáveis com um termo constante não nulo, ou seja,

$$\mathcal{B}(K, Z^{-1})u_{0,m}^{n+1} = c_0 u_{0,m}^{n+1} + \left(\sum_{r,\ell} c_{r,\ell} K^r (Z^{-1})^\ell \right) u_{0,m}^{n+1}. \quad (3.78)$$

A fim de estudar as propriedades de reflexão de (3.77), consideremos a combinação linear

$$u_{j,m}^n = c_1 \kappa_1^j (e^{i\eta\Delta y})^m z^n + c_2 \kappa_2^j (e^{i\eta\Delta y})^m z^n \quad (3.79)$$

Aqui $\kappa_1 = e^{i\xi_1\Delta x}$ e $\kappa_2 = e^{i\xi_2\Delta x}$ são escolhidos tal que κ_1 corresponde às ondas refletidas, ou seja, que apontam para dentro do domínio, e κ_2 às ondas incidentes, ou seja, que apontam para fora do domínio. Reescrevendo (3.79) para $u_{0,m}^{n+1}$ temos

$$u_{0,m}^{n+1} = c_1 \underbrace{(e^{i\eta\Delta y})^m z^{n+1}}_{u_{0,m}^{n+1} \text{ in}} + c_2 \underbrace{(e^{i\eta\Delta y})^m z^{n+1}}_{u_{0,m}^{n+1} \text{ out}} \quad (3.80)$$

Observação 3.5. $\mathcal{B}(K, Z^{-1})$ é um operador linear. De fato, fazendo indução em r sobre o operador K , obtemos

$$\begin{aligned} Ku_{j,m}^n &= u_{j+1,m}^n \\ &= c_1 \kappa_1^{j+1} (e^{i\eta\Delta y})^m z^n + c_2 \kappa_2^{j+1} (e^{i\eta\Delta y})^m z^n \\ &= c_1 K(\kappa_1^j (e^{i\eta\Delta y})^m z^n) + c_2 K(\kappa_2^j (e^{i\eta\Delta y})^m z^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(K^r u_{j,m}^n) &= c_1 K(K^r \kappa_1^j (e^{i\eta\Delta y})^m z^n) + c_2 K(K^r \kappa_2^j (e^{i\eta\Delta y})^m z^n) \\ &= c_1 K^{r+1}(\kappa_1^j (e^{i\eta\Delta y})^m z^n) + c_2 K^{r+1}(\kappa_2^j (e^{i\eta\Delta y})^m z^n) \end{aligned}$$

ou seja,

$$K^r(c_1 u_{j,m_{in}}^n + c_2 u_{j,m_{out}}^n) = K^r c_1 u_{j,m_{in}}^n + K^r c_2 u_{j,m_{out}}^n$$

Analogamente, fazendo indução em ℓ sobre o operador Z^{-1} temos

$$(Z^{-1})^\ell(c_1 u_{j,m_{in}}^n + c_2 u_{j,m_{out}}^n) = (Z^{-1})^\ell c_1 u_{j,m_{in}}^n + (Z^{-1})^\ell c_2 u_{j,m_{out}}^n$$

Logo

$$\begin{aligned} K^r \left[(Z^{-1})^\ell (c_1 u_{j,m_{in}}^n + c_2 u_{j,m_{out}}^n) \right] &= K^r \left[(Z^{-1})^\ell c_1 u_{j,m_{in}}^n + (Z^{-1})^\ell c_2 u_{j,m_{out}}^n \right] \\ &= K^r (Z^{-1})^\ell c_1 u_{j,m_{in}}^n + K^r (Z^{-1})^\ell c_2 u_{j,m_{out}}^n. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{B}(K, Z^{-1})$ é da forma (3.78), segue que $\mathcal{B}(K, Z^{-1})$ é linear.

Deste modo, ao inserirmos (3.80) em (3.77), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{B}(K, Z^{-1}) u_{0,m}^{n+1} \\ &= \mathcal{B}(K, Z^{-1}) \left[c_1 u_{0,m_{in}}^{n+1} + c_2 u_{0,m_{out}}^{n+1} \right] \\ &= \mathcal{B}(K, Z^{-1}) c_1 u_{0,m_{in}}^{n+1} + \mathcal{B}(K, Z^{-1}) c_2 u_{0,m_{out}}^{n+1} \\ &= \mathcal{B}(K c_1 u_{0,m_{in}}^{n+1}, Z^{-1} c_1 u_{0,m_{in}}^{n+1}) + \mathcal{B}(K c_2 u_{0,m_{out}}^{n+1}, Z^{-1} c_2 u_{0,m_{out}}^{n+1}) \\ &= \mathcal{B}(c_1 \kappa_1 (e^{i\eta\Delta y})^m z^{n+1}, c_1 (e^{i\eta\Delta y})^m z^n) + \mathcal{B}(c_2 \kappa_2 (e^{i\eta\Delta y})^m z^{n+1}, c_2 (e^{i\eta\Delta y})^m z^n) \\ &= \mathcal{B}(\kappa_1, z^{-1}) c_1 (e^{i\eta\Delta y})^m z^{n+1} + \mathcal{B}(\kappa_2, z^{-1}) c_2 (e^{i\eta\Delta y})^m z^{n+1} \end{aligned}$$

logo

$$c_1 \mathcal{B}(\kappa_1, z^{-1}) + c_2 \mathcal{B}(\kappa_2, z^{-1}) = 0 \quad (3.81)$$

ou

$$c_1 = -\frac{\mathcal{B}(\kappa_2, z^{-1})}{\mathcal{B}(\kappa_1, z^{-1})} c_2 = R(\eta, z) c_2 \quad (3.82)$$

onde $R(\eta, z)$ é o coeficiente de reflexão. A notação (η, z) é usada porque κ_1 e κ_2 são funções de η e z . Desse modo, poderíamos expressar (3.80) como

$$u_{0,m}^{n+1} = u_{0,m}^{n+1}{}_{out} + R(\eta, z) u_{0,m}^{n+1}{}_{in}.$$

Nossa meta então é encontrar um operador \mathcal{B} tal que a magnitude do coeficiente de reflexão seja a menor possível, ou seja, de modo a aniquilar a maior quantidade possível de ondas refletidas, e, além disso, tal que possamos manter a estabilidade, ou seja, pequenos erros não podem crescer incontrolavelmente de forma a invalidar a solução numérica.

O ideal seria termos

$$\mathcal{B}(\kappa_2, z^{-1}) = 0$$

para todo z e correspondente κ_2 . Isso significa que as ondas incidentes satisfariam a condição de contorno exatamente, ou seja, $R(\eta, z) = 0$. No entanto, na prática, esse ideal não pode ser plenamente atingido.

Para a análise de estabilidade da condição de contorno, Higdon [32] utiliza um critério análogo ao usado originalmente por Gustafsson, Kreiss e Sundström [24] para provar resultados de estabilidade para sistemas hiperbólicos de primeira ordem em uma dimensão. Consideremos então o critério

$$\mathcal{B}(\kappa, z^{-1}) \neq 0 \quad \text{sempre que} \quad |z| \geq 1, |\kappa| \leq 1, \quad (3.83)$$

e $\kappa^j e^{iny} z^n$ é a solução da equação de diferenças (2.9). Se ξ ou ω é real, então $|\kappa| = 1$ ou $|z| = 1$, respectivamente. Mas aqui permitimos que κ e z sejam números complexos, e estamos estendendo a definição de κ e z dadas em (3.75). Observe os seguintes casos:

(a) Suponhamos que $|z| > 1$, $|\kappa| < 1$, e $\kappa^j e^{iny} z^n$ é a solução da esquema de diferenças (2.9). Se esse modo satisfaz as condições de contorno, então temos uma solução do problema em questão que cresce exponencialmente com o número de passos de tempo, ou seja, $|\kappa|^j$ é controlado para y fixo, mas $|z|^n$ explode à medida que n cresce. Isso constitui uma forma de instabilidade, e a condição (3.83) é então essencial.

(b) Suponhamos agora que $|z| \rightarrow 1$ e $|\kappa| \rightarrow 1$. (Esses limites são tomados dos domínios $|z| > 1, |\kappa| < 1$.) Temos modos puramente oscilatórios. O modo obtido pelo processo limite deve ter uma velocidade de grupo que aponta para dentro do domínio espacial [33, 46, 47]. Então $\kappa = \kappa_1$. Nesse caso, se o critério (3.83) não fosse satisfeito, haveriam ondas irradiando para dentro do domínio sem qualquer simulação de ondas incidentes ou funções forçantes na condição de contorno, ou seja, esses modos geram ondas numéricas que podem, de fato, estragar a solução. No entanto, o critério (3.83) exclui esses modos.

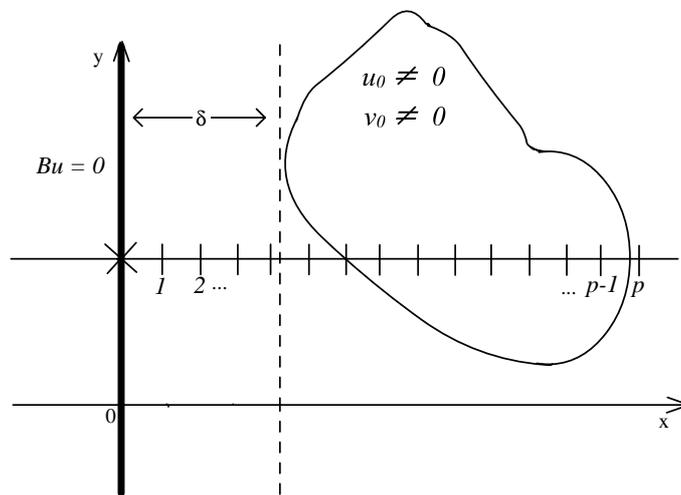


Figura 3.1: Cálculo computacional de $u_{0,m}^{n+1}$ com p pontos.

Por exemplo, considere a aproximação (2.9) para a equação diferencial (2.3), com condições iniciais $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ e $u_t(x, y, 0) = v_0(x, y)$, e com uma condição de contorno artificial exata $\mathcal{B}u = 0$ em $x = 0$, tal que o suporte de u_0

e v_0 está contido em $(\delta, \infty) \times \mathbb{R}$, para algum $\delta > 0$. Suponha que para calcularmos computacionalmente o valor de $u_{0,m}^{n+1}$ precisamos de p pontos, conforme Figura 3.1. Se o critério (3.83) não for satisfeito, então

$$c_0 u_{0,m}^{n+1} = c_1 u_{1,m}^n + c_2 u_{2,m}^n + \dots + c_p u_{p,m}^n \Leftrightarrow \mathcal{B}(K, Z^{-1}) u_{0,m}^{n+1} = 0,$$

ou seja, podemos ter $u_{0,m}^{n+1} \neq 0$. Contudo, na solução física do problema, o valor da solução em $(0, m\Delta y, (n+1)\Delta t)$ é zero. Logo, se uma onda que se move para dentro do domínio satisfaz $\mathcal{B}(\kappa, z^{-1}) = 0$, ela pode então “sujar” a solução. Isso seria uma forma de instabilidade.

O caso (b) não cobre o caso dos modos evanescentes para os quais $|z| = 1$ e $|\kappa| < 1$. Considere δ como sendo a distância entre o contorno artificial e a região de interesse, isto é, o suporte dos dados iniciais, conforme Figura 3.1. Para δ suficientemente grande, os modos evanescentes não serão um problema, pois a amplitude destes modos decai exponencialmente em x , à medida que o tempo passa. No entanto, quando o suporte dos dados iniciais está muito próximo do contorno artificial, podem ocorrer problemas [7, 28].

Analisemos agora um importante caso, onde temos frequência zero $\xi\Delta x = \omega\Delta t = \eta\Delta y = 0$, isto é, $\kappa = z = 1$ e $\eta = 0$. Esse é o ponto onde dois ramos da relação de dispersão se cruzam, ou seja, para $\xi\Delta x = \omega\Delta t = \eta\Delta y \approx 0$, (2.10) implica $\omega^2 \approx \xi^2 + \eta^2$, e assim $\eta \approx \pm\sqrt{\omega^2 - \xi^2} = \pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$, onde $(\omega^2 - \xi^2)$ é um número complexo $z = re^{i\theta}$. Logo, para $\theta = 0$ temos $\eta \approx \sqrt{r}$, mas para $\theta = 2\pi$ temos $\eta \approx -\sqrt{r}$, e assim temos um ponto de ramificação em $z = 0$. Por um lado temos ondas refletidas, e por outro ondas incidentes. O caso $\kappa = z = 1$ corresponde então às ondas refletidas e incidentes ao mesmo tempo. Se a condição de contorno aniquila as ondas incidentes para $\kappa = z = 1$, isto é, $\mathcal{B}(1, 1) = 0$, então ela também aniquila as ondas refletidas, e a condição (3.83) é violada. Por outro lado, se (3.83) é satisfeita para $\kappa = z = 1$, então nesse ponto o coeficiente de reflexão satisfaz $|R| = 1$, e assim existe uma total reflexão na frequência zero.

O rótulo *autovalor generalizado* é algumas vezes associado com situações onde uma condição de contorno permite ondas refletidas para $|z| = 1$, como no presente caso. Segundo Trefethen [48] e Higdon [32], os autovalores generalizados podem causar leves instabilidades, consistindo de ondas irradiando espontaneamente para o interior do domínio. Deste modo, os autovalores generalizados (onde $\mathcal{B}(1, 1) = 0$) não impedem de encontrarmos condições de contorno absorventes efetivas.

3.3.2 Condições de contorno discretas

Descreveremos aqui duas classes de condições de contorno absorventes discretas, discutidas por Higdon em [32], que o conduziram à condições de contorno analíticas, consistentes com as discretas. Para cada classe, verificaremos sua formulação, propriedades de estabilidade e reflexão, e consistência com condições de contorno analíticas.

3.3.2.1 Método das médias

A primeira classe de condições de contorno absorventes discutidas por Higdon [32] são definidas por

$$\left[I - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{I + K}{2} \right) \right]^p u_{0,m}^{n+1} = 0 \quad (3.84)$$

onde p é um inteiro positivo, e K e Z são os operadores *shift* definidos em (3.76).

Para o caso $p = 1$ temos

$$\left(I - \frac{I + K + Z^{-1} + KZ^{-1}}{4} \right) u_{0,m}^{n+1} = 0,$$

e, multiplicando tudo por $4/3$, obtemos

$$u_{0,m}^{n+1} = \frac{1}{3}(u_{1,m}^{n+1} + u_{0,m}^n + u_{1,m}^n).$$

Uma motivação para essa forma da condição de contorno é dada pelo seguinte. Queremos uma condição de contorno do tipo

$$A(K, Z^{-1})u_{0,m}^{n+1}$$

tal que a magnitude do coeficiente de reflexão seja a menor possível, e que possamos manter a estabilidade. Também queremos que $A(\kappa, z^{-1}) = 1$ enquanto $\kappa = -1$ ou $z = -1$. Isso significaria que o operador $A(K, Z^{-1})$ é o operador identidade para os modos *parasitas* [46]. Esses modos são funções dente-de-serra com respeito ao espaço e ao tempo, artificialmente gerados pelo método numérico, cujas frequências ficam próximas aos extremos $\xi = \pm \frac{\pi}{\Delta x}$ e/ou $\omega = \pm \frac{\pi}{\Delta t}$. É comum que tais modos tenham velocidade de grupo com sinal oposto do que é fisicamente correto. De um modo geral, queremos garantir que os modos parasitas não possam, “involuntariamente”, satisfazer a condição de contorno homogênea e assim gerar instabilidades.

Observe que, para $\omega\Delta t = \pm\pi$ temos $\cos\omega\Delta t = -1$ e $\sin\omega\Delta t = 0$, e assim $1 + z^{-1} = 0$. Similarmente, para $\xi\Delta x = \pm\pi$, temos $\cos\xi\Delta x = -1$ e $\sin\xi\Delta x = 0$, e assim $1 + \kappa = 0$. Logo, para este caso, temos $(1 + z^{-1})(1 + \kappa) = 0$. Para o caso $\xi\Delta x = \omega\Delta t = 0$ temos $\kappa = z = 1$, e deste modo

$$\left(\frac{1 + z^{-1}}{2}\right)\left(\frac{1 + \kappa}{2}\right) = 1.$$

Assim, definindo

$$P(\kappa, z^{-1}) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{2}\right)\left(\frac{1 + \kappa}{2}\right), \quad (3.85)$$

e

$$A(\kappa, z^{-1}) = 1 - P(\kappa, z^{-1}), \quad (3.86)$$

temos a condição desejada. O correspondente operador diferença $A(K, Z^{-1})$ fornece (3.84) para $p = 1$. O método de alta ordem em (3.84) é obtido usando o operador $A(K, Z^{-1})^p$.

Segundo Higdon [32], poderíamos usar z no lugar de z^{-1} e/ou κ^{-1} no lugar de κ , mas, entretanto, isso poderia complicar a implementação. Com relação à qualquer

ponto da fronteira dado, precisamos ter *shifts* para trás no tempo e para frente no espaço, de modo que a condição de contorno use valores da solução que já foram calculados pelo computador.

Proposição 3.4. *O método (3.84) satisfaz o critério de estabilidade (3.83),*

$$A(\kappa, z^{-1})^p \neq 0, \quad \text{para } |z| \geq 1, |\kappa| \leq 1,$$

com a exceção que $A(1, 1) = 0$.

Prova. O fator z em $P(\kappa, z^{-1})$ satisfaz

$$\left| \frac{1 + z^{-1}}{2} \right| < 1$$

para $|z| \geq 1$, exceto quando $z = 1$. (Considere vetores no plano complexo, estendendo de -1 a z^{-1} , conforme Figura (3.2)).

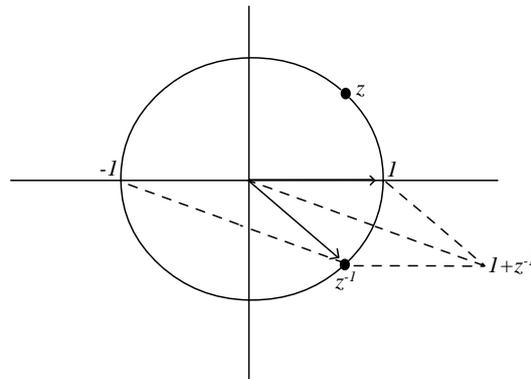


Figura 3.2: Vetor $1 + z^{-1}$

Note que sempre temos

$$\left| \frac{1 + z^{-1}}{2} \right| \leq \frac{1 + |z^{-1}|}{2}.$$

No entanto, a igualdade ocorre se e somente se $|1 + z^{-1}| = 1 + |z^{-1}|$, ou seja, se e somente se

$$|1 + (\cos \omega \Delta t - i \operatorname{sen} \omega \Delta t)|^2 = (1 + |\cos \omega \Delta t - i \operatorname{sen} \omega \Delta t|)^2$$

$$\iff (1 + \cos \omega \Delta t)^2 + \sin^2 \omega \Delta t = 4 \iff \cos \omega \Delta t = 1 \iff \omega \Delta t = \pm 2n\pi \iff z = 1$$

Um argumento similar vale para o fator κ . Logo, $|P(\kappa, z^{-1})| < 1$ enquanto $|z| \geq 1$ e $|\kappa| \leq 1$, exceto quando $z = \kappa = 1$. Comparando com (3.86), temos

$$|A(\kappa, z^{-1})| = |1 - P(\kappa, z^{-1})| \leq 1 + |P(\kappa, z^{-1})| < 2,$$

exceto quando $z = \kappa = 1$. Deste modo, para o método de alta ordem (3.84), temos

$$|A(\kappa, z^{-1})|^p < 2^p \neq 0$$

exceto quando $z = \kappa = 1$, ou seja, $A(1, 1) = 0$. □

O caso excepcional $A(1, 1) = 0$ significa que existe um autovalor generalizado correspondente à frequência zero, conforme visto na seção 3.3.1.

Agora consideraremos os coeficientes de reflexão para (3.84). De acordo com (3.82) e (3.84)-(3.86), eles são dados por

$$R_p(\eta, z) = -\frac{A(\kappa_2, z^{-1})^p}{A(\kappa_1, z^{-1})^p} = -\left(\frac{A(\kappa_2, z^{-1})}{A(\kappa_1, z^{-1})}\right)^p = -(-R_1(\eta, z))^p. \quad (3.87)$$

A proposição seguinte aplica-se para todas as ondas oscilatórias admitidas pelo *esquema de diferenças interior*, isto é, dos pontos interiores da malha, mas não exatamente aquelas que são bem resolvidas pela malha.

Proposição 3.5. *Se $|z| = |\kappa_1| = |\kappa_2| = 1$ e $z \neq 1$, então o coeficiente de reflexão para o caso $p = 1$ satisfaz $|R_1(\eta, z)| < 1$, exceto quando $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ou $\kappa_2 = \kappa_1 = -1$.*

Prova. Seja $z = e^{i\omega\Delta t}$ e $\kappa_j = e^{i\xi_j\Delta x}$, com $j = 1, 2$. Conforme a Figura (2.3), $\omega\Delta t$ e $\xi\Delta x$ têm sinais opostos para ondas refletidas e sinais iguais para ondas incidentes.

Assim, $\arg z^{-1}$ e $\arg \kappa_1$ têm o mesmo sinal, e $\arg z^{-1}$ e $\arg \kappa_2$ têm sinais opostos. Além disso, a simetria da relação de dispersão (2.10) implica que $\arg \kappa_2 = -\arg \kappa_1$.

Vejamos, para ω e η fixos, pela relação (2.10),

$$\left(\operatorname{sen} \frac{\xi \Delta x}{2}\right)^2 = \tilde{f}(\omega, \eta, \Delta t, \Delta x, \Delta y)$$

ou seja,

$$\operatorname{sen} \frac{\xi \Delta x}{2} = \pm \sqrt{\tilde{f}(\omega, \eta, \Delta t, \Delta x, \Delta y)}.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\omega > 0$, ao tomarmos $\xi < 0$ temos que $\operatorname{sen} \frac{\xi_1 \Delta x}{2} = -\sqrt{\tilde{f}(\omega, \eta, \Delta t, \Delta x, \Delta y)}$, e para $\xi > 0$ temos $\operatorname{sen} \frac{\xi_2 \Delta x}{2} = \sqrt{\tilde{f}(\omega, \eta, \Delta t, \Delta x, \Delta y)}$.

Logo $\xi_2 = -\xi_1$, isto é, $\arg \kappa_2 = -\arg \kappa_1$.

Observe agora que $|1 + \kappa_1| = |1 + \kappa_2|$, ou seja,

$$|1 + e^{i\xi_1 \Delta x}|^2 = |1 + e^{-i\xi_1 \Delta x}|^2.$$

Segue que os produtos

$$P(\kappa_1, z^{-1}) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{2}\right) \left(\frac{1 + \kappa_1}{2}\right), \quad P(\kappa_2, z^{-1}) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{2}\right) \left(\frac{1 + \kappa_2}{2}\right),$$

têm o mesmo módulo. Contudo, no segundo caso, há um cancelamento parcial dos argumentos enquanto $\kappa_1 \neq \kappa_2$, visto que $\arg z^{-1}$ e $\arg \kappa_2$ têm sinais opostos (veja Figura 3.3). Isso não acontece no primeiro caso. Então, $P(\kappa_2, z^{-1})$ está mais próximo de 1 que $P(\kappa_1, z^{-1})$, enquanto $\kappa_1 \neq \kappa_2$.

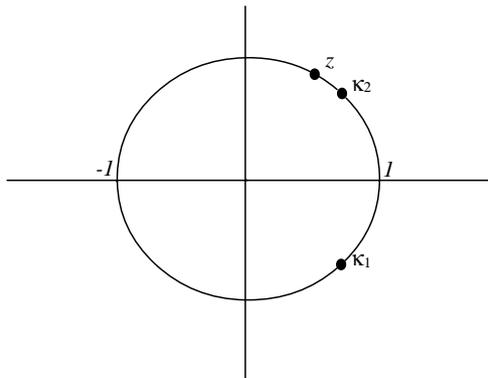


Figura 3.3: Posicionamento típico de z , κ_1 e κ_2 .

Como $|P(\kappa_1, z^{-1})| = |P(\kappa_2, z^{-1})|$, com $P(\kappa_2, z^{-1})$ mais próximo de 1, temos

$$|1 - P(\kappa_2, z^{-1})| < |1 - P(\kappa_1, z^{-1})|.$$

Assim, pela definição (3.86) e (3.87), temos

$$|R_1(\eta, z)| = \frac{|A(\kappa_2, z^{-1})|}{|A(\kappa_1, z^{-1})|} = \frac{|1 - P(\kappa_2, z^{-1})|}{|1 - P(\kappa_1, z^{-1})|} < 1$$

enquanto $\kappa_1 \neq \kappa_2$. □

Note que, pela Figura 2.3, a hipótese $z \neq 1$ implica $\eta \neq 0$, e se $\xi\Delta x = 0$ então a componente x da velocidade de grupo é zero para tais modos. Além disso, se $\xi\Delta x = \pm\pi$ então a componente x da velocidade de grupo para tais modos também é zero. Deste modo, o caso excepcional na proposição (3.5) é de leve consequência, pois esses modos não se propagam para o interior do domínio.

Para todos os outros casos, a proposição (3.5) e (3.87) implicam que

$$|R_p(\eta, z)| \stackrel{(3.87)}{=} | - (-R_1(\eta, z))^p | = |R_1(\eta, z)|^p \stackrel{Prop.}{=} \left(\frac{1}{n}\right)^p$$

para algum $n > 1$, ou seja, $R_p(\eta, z) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$.

A próxima proposição aplica-se somente para aquelas ondas que são bem resolvidas pela malha.

Proposição 3.6. *O coeficiente de reflexão $R_p(\eta, z)$ para (3.84) satisfaz*

$$R_p(\eta, z) = -\left(\frac{\lambda - \cos \theta}{\lambda + \cos \theta}\right)^p + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^2. \quad (3.88)$$

Aqui, $\lambda = \Delta t/\Delta x$, e θ é o ângulo de incidência medido com relação à incidência normal.

Prova. De acordo com (3.87) e (3.84), o coeficiente de reflexão é dado por

$$R_p(\eta, z) = -\left[\frac{1 - \frac{1}{2}(1 + z^{-1})\frac{1}{2}(1 + \kappa_2)}{1 - \frac{1}{2}(1 + z^{-1})\frac{1}{2}(1 + \kappa_1)}\right]^p.$$

Aplicando expansões em séries de Taylor para $z = \exp(i\omega\Delta t)$ e $\kappa_j = \exp(i\xi_j\Delta x)$, com $j = 1, 2$, temos

$$1 + z^{-1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega\Delta t)^n}{n!} = 2 + (-i\omega\Delta t) + \frac{(-i\omega\Delta t)^2}{2!} + \dots$$

e

$$1 + \kappa_j = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi_j\Delta x)^n}{n!} = 2 + (i\xi_j\Delta x) + \frac{(i\xi_j\Delta x)^2}{2!} + \dots$$

Multiplicando os termos temos

$$\begin{aligned} (1 + z^{-1})(1 + \kappa_j) &= 4 + 2(i\xi_j\Delta x) + (i\xi_j\Delta x)^2 + \frac{2}{3!}(i\xi_j\Delta x)^3 + \dots \\ &+ 2(-i\omega\Delta t) + (-i\omega\Delta t)(i\xi_j\Delta x) + \frac{1}{2!}(-i\omega\Delta t)(i\xi_j\Delta x)^2 + \dots \\ &+ (-i\omega\Delta t)^2 + \frac{1}{2!}(-i\omega\Delta t)^2(i\xi_j\Delta x) + \frac{1}{2!2!}(-i\omega\Delta t)^2(i\xi_j\Delta x)^2 + \dots \\ &+ \frac{2}{3!}(-i\omega\Delta t)^3 + \frac{1}{3!}(-i\omega\Delta t)^3(i\xi_j\Delta x) + \frac{1}{2!3!}(-i\omega\Delta t)^3(i\xi_j\Delta x)^2 + \dots \end{aligned}$$

e por conseqüência

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_j) &= \frac{1}{2}(i\omega\Delta t - i\xi_j\Delta x) \\ &- \frac{1}{4} \left[(i\xi_j\Delta x)^2 + (-i\omega\Delta t)(i\xi_j\Delta x) + (-i\omega\Delta t)^2 \right] \\ &- \frac{1}{8} \left[(-i\omega\Delta t)(i\xi_j\Delta x)^2 + (-i\omega\Delta t)^2(i\xi_j\Delta x) \right] \\ &- \dots \\ &= \frac{1}{2}(i\omega\Delta t - i\xi_j\Delta x) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{c(n, m)}{m!(n-m)!} (-i\omega\Delta t)^{n-m} (i\xi_j\Delta x)^m \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = \Delta t/\Delta x$, podemos simplificar essa equação, de modo que

$$\begin{aligned} (-i\omega\Delta t)^{n-m} (i\xi_j\Delta x)^m &= (-1)^{n-m} i^n \xi_j^m \omega^{n-m} (\Delta t)^{n-m} (\Delta x)^m \\ &= (-1)^{n-m} i^n \xi_j^m \omega^{n-m} (\Delta t)^n \lambda^{-m} \\ &= (-1)^{n-m} i^n \xi_j^m \frac{\omega^m \lambda^m}{(\omega\Delta t)^n} \\ &= (-1)^n i^n \left(\frac{-\xi_j}{\omega\lambda} \right)^m (\omega\Delta t)^n \end{aligned}$$

e assim temos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_j) &= \frac{1}{2}i\Delta x(\lambda\omega - \xi_j) - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n i^n (\omega\Delta t)^n \sum_{m=0}^n \left(-\frac{\xi_j}{\omega\lambda}\right)^m \frac{c(n, m)}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{1}{2}i\Delta x(\lambda\omega - \xi_j) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{i^n}{n!} (\omega\Delta t)^n \sum_{m=0}^n c(n, m) \left(-\frac{\xi_j}{\omega\lambda}\right)^m \binom{n}{m} \end{aligned}$$

O segundo somatório da expressão acima pode ser definido como uma função que só depende de n e j , $D_{n,j}$, e assim

$$1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_j) = \frac{1}{2}i\Delta x(\lambda\omega - \xi_j) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{i^n}{n!} D_{n,j} (\omega\Delta t)^n$$

e ainda podemos definir a quantidade $(-1)^{n+1} i^n (n!)^{-1} D_{n,j}$ como uma função $E_{n,j}$.

Dessa forma, para $j = 1, 2$, temos

$$\frac{1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_2)}{1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_1)} = \frac{\frac{1}{2}i\Delta x(\lambda\omega - \xi_2) + \sum_{n=2}^{\infty} E_{n,2} (\omega\Delta t)^n}{\frac{1}{2}i\Delta x(\lambda\omega - \xi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} E_{n,1} (\omega\Delta t)^n}$$

Chamando as quantidades $\frac{1}{2}i\Delta x(\lambda\omega - \xi_j)$ por a_j , dividindo os polinômios, obtemos

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{E_{2,2} - \frac{a_2}{a_1} E_{2,1}}{a_1} (\omega\Delta t)^2 + \dots$$

Por fim, temos que

$$\left[\frac{1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_2)}{1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_1)} \right]^p = \left(\frac{\lambda\omega - \xi_2}{\lambda\omega - \xi_1} + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^2 \right)^p$$

Expandindo o segundo termo obtemos

$$\binom{p}{0} \left(\frac{\lambda\omega - \xi_2}{\lambda\omega - \xi_1} \right)^p + \binom{p}{1} \left(\frac{\lambda\omega - \xi_2}{\lambda\omega - \xi_1} \right)^{p-1} \mathcal{O}(\omega\Delta t)^2 + \dots + \binom{p}{p} (\mathcal{O}(\omega\Delta t)^2)^p$$

e assim

$$\left[\frac{1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_2)}{1 - \frac{1}{4}(1 + z^{-1})(1 + \kappa_1)} \right]^p = \left(\frac{\lambda\omega - \xi_2}{\lambda\omega - \xi_1} \right)^p + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^2$$

Logo

$$R_p(\eta, z) = - \left(\frac{\lambda\omega - \xi_2}{\lambda\omega - \xi_1} \right)^p + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^2 \quad (3.89)$$

A relação de dispersão (2.10) e a fórmula (2.11) para velocidade de grupo implicam que $\xi_2/\omega \approx \cos \theta$ e $\xi_1/\omega \approx -\cos \theta$. De fato, derivando (2.10) com relação a ξ e η , respectivamente, obtemos

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{\xi \Delta x}{2} \right) \cos \left(\frac{\xi \Delta x}{2} \right) \quad (3.90)$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \beta \operatorname{sen} \left(\frac{\eta \Delta y}{2} \right) \cos \left(\frac{\eta \Delta y}{2} \right) \quad (3.91)$$

onde $\alpha = \frac{c^2}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x}$ e $\beta = \frac{c^2}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta y}$. Utilizando a relação trigonométrica $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, podemos reescrever (3.90) e (3.91) como

$$\operatorname{sen} (\omega \Delta t) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \alpha \operatorname{sen} (\xi \Delta x) \quad (3.92)$$

$$\operatorname{sen} (\omega \Delta t) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \beta \operatorname{sen} (\eta \Delta y) \quad (3.93)$$

Elevando ao quadrado e somando os termos de (3.92) e (3.93) obtemos

$$\operatorname{sen}^2 (\omega \Delta t) |\mathbf{v}|^2 = \alpha^2 \operatorname{sen}^2 (\xi \Delta x) + \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\eta \Delta y),$$

onde $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\partial \omega / \partial \xi)^2 + (\partial \omega / \partial \eta)^2}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\operatorname{sen} (\omega \Delta t) > 0$, ou seja, $\omega > 0$. Assim

$$\operatorname{sen} (\omega \Delta t) |\mathbf{v}| = \sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 (\xi \Delta x) + \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\eta \Delta y)} \quad (3.94)$$

Podemos reescrever (3.92) e (3.93) da forma

$$\operatorname{sen} (\omega \Delta t) \left(-\frac{\partial \omega}{\partial \xi}, -\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = (-\alpha \operatorname{sen} (\xi \Delta x), -\beta \operatorname{sen} (\eta \Delta y)) \quad (3.95)$$

Como $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$, e por (3.94) e (3.95), temos

$$\operatorname{sen} (\omega \Delta t) (-|\mathbf{v}|(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)) = \sqrt{\tilde{f}} \left(\frac{-\alpha \operatorname{sen} (\xi \Delta x)}{\sqrt{\tilde{f}}}, \frac{-\beta \operatorname{sen} (\eta \Delta y)}{\sqrt{\tilde{f}}} \right),$$

onde

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\xi, \eta, \Delta x, \Delta y, \Delta t) = \alpha^2 \operatorname{sen}^2 (\xi \Delta x) + \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\eta \Delta y)$$

Deste modo,

$$-\cos \theta = \frac{-\alpha \operatorname{sen}(\xi \Delta x)}{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\xi \Delta x) + \beta^2 \operatorname{sen}^2(\eta \Delta y)}} \quad (3.96)$$

$$-\operatorname{sen} \theta = \frac{-\beta \operatorname{sen}(\eta \Delta y)}{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\xi \Delta x) + \beta^2 \operatorname{sen}^2(\eta \Delta y)}} \quad (3.97)$$

Agora, observe que (2.10) implica $\omega^2 \approx \xi^2 + \eta^2$ quando as quantidades Δt , Δx , Δy são suficientemente pequenas. Logo

$$\cos \theta \approx \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{\xi}{|\omega|}$$

Lembremos da hipótese de que $\omega > 0$. Assim, se $\xi > 0$ temos ondas incidentes, ou seja,

$$\frac{\xi_2}{\omega} \approx \cos \theta,$$

e se $\xi < 0$ temos ondas refletias, ou seja,

$$\frac{\xi_1}{\omega} \approx -\cos \theta.$$

Assim, (3.89) implica (3.88). □

A proposição 3.6 implica que a reflexão é essencialmente zero quando $\cos \theta = \lambda$ e $|\omega \Delta t|$ é pequeno. Se

$$\left| \arg \left(\frac{1 + z^{-1}}{2} \right) \right| = \left| \arg \left(\frac{1 + \kappa_2}{2} \right) \right|, \quad (3.98)$$

então $P(\kappa_2, z^{-1})$ é real. Se, além disso, z e κ_2 estão próximos de 1, então $P(\kappa_2, z^{-1})$ está mais próximo de 1 que $P(\kappa_1, z^{-1})$, e a reflexão é essencialmente zero. Mas (3.98) é equivalente a dizer que $\arg z^{-1} = \arg \kappa_2$, ou $\omega \Delta t = \xi_2 \Delta x$. Então, nesse caso, $\cos \theta \approx \lambda$.

A próxima proposição diz respeito à consistência da condição de contorno discreta em relação à condição de contorno analítica. Dizemos que um esquema

em diferenças finitas $P(j\Delta x, n\Delta t)u_j^n = f$ é consistente com a EDP $Lu = f$ se, e somente se, para toda $u(x, t)$ suave,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} P(j\Delta x, n\Delta t)u_j^n = Lu \Big|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}},$$

de modo que a convergência seja pontual em cada ponto da malha [42].

Proposição 3.7. *O método (3.84) é consistente com a condição de contorno analítica*

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^p u = 0. \quad (3.99)$$

Prova. Primeiramente, afirmamos que (3.84) é consistente com

$$\underbrace{\left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{I - Z^{-1}}{\Delta t} \right) - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{K - I}{\Delta x} \right) \right]^p}_{\Lambda} u_{0,m}^{n+1} = 0, \quad (3.100)$$

por exemplo. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{\Delta x} \left[(I - Z^{-1}) - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) (K - I) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[(I - Z^{-1}) - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(K - I - \frac{K}{2} + \frac{3I}{2} + \frac{K}{2} - \frac{3I}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[(I - Z^{-1}) - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{I + K}{2} \right) - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{K - 3I}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[I - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{I + K}{2} \right) - Z^{-1} - \frac{K}{4} + \frac{3I}{4} - \frac{Z^{-1}K}{4} + \frac{3Z^{-1}}{4} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[I - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{I + K}{2} \right) - \underbrace{\frac{Z^{-1}}{4} - \frac{K}{4} + \frac{3I}{4} - \frac{Z^{-1}K}{4}}_{4N} \right] \end{aligned}$$

Denotemos $(-Z^{-1} - K + 3I - Z^{-1}K) = N$. Como $\lambda = \Delta t/\Delta x$ é constante, ao fazermos $\Delta x \rightarrow 0$, temos $\Delta t = \lambda\Delta x \rightarrow 0$. Assim, para y_0 fixo,

$$\begin{aligned} Nv_{j,m}^{n+1} &= -v_{j,m}^n - v_{j+1,m}^{n+1} + 3v_{j,m}^{n+1} - v_{j+1,m}^n \\ &= -\underbrace{(v_{j,m}^n + v_{j+1,m}^n)}_{(1)} + \underbrace{(-v_{j+1,m}^{n+1} + 3v_{j,m}^{n+1})}_{(2)} \end{aligned}$$

Ao fazermos $n\Delta t = t_0$ e $j\Delta x = x_0$,

$$(1) \rightarrow -2v(t_0, x_0, y_0) \quad \text{quando } \Delta x \rightarrow 0$$

$$(2) \rightarrow 2v(t_0 + \Delta t, x_0, y_0) \quad \text{quando } \Delta x \rightarrow 0$$

Como $\Delta t \rightarrow 0$ também, $(1) + (2) \rightarrow 0$. Logo $Nv_{j,m}^{n+1} \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, para y_0 fixo. Assim, provamos a primeira afirmação.

Afirmamos agora que (3.100) é consistente com (3.99). De fato, ao fazermos $\Delta x \rightarrow 0$, e por conseqüência $\Delta t \rightarrow 0$, temos que

$$\left(\frac{I + Z^{-1}}{2}\right)u_{0,m}^{n+1} = \frac{u_{0,m}^{n+1} + u_{0,m}^n}{2} \approx u_{0,m}^n$$

e como

$$\left(\frac{K - I}{\Delta x}\right)u_{0,m}^{n+1} = \frac{u_{1,m}^{n+1} - u_{0,m}^{n+1}}{\Delta x}$$

temos

$$\left(\frac{I + Z^{-1}}{2}\right)\left(\frac{K - I}{\Delta x}\right)u_{0,m}^{n+1} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

Além disso, como

$$\left(\frac{I - Z^{-1}}{\Delta t}\right)u_{0,m}^{n+1} = \frac{u_{0,m}^{n+1} - u_{0,m}^n}{\Delta t} \approx \frac{\partial u}{\partial t}$$

e $\lambda = \Delta t/\Delta x$, provamos a segunda afirmação, o que conclui a demonstração. \square

Em [32], Higdon afirma que, em outros problemas hiperbólicos, poderíamos fazer algumas modificações no operador (3.86) a fim de dominar indesejáveis ondas parasitas. Por exemplo, para dominar os modos parasitas correspondentes a $\kappa = -1$ e $z = 1$, poderíamos usar o operador definido por

$$1 - \left(\frac{1 + z^{-1}}{2}\right)\left(\frac{1 - \kappa}{2}\right).$$

A função é zero para $\kappa = -1$, $z = 1$. No entanto, a função é igual a 1 para $\kappa = 1$ e para $\kappa = z = -1$, de modo que o operador é “desligado” longe do modo em questão. Variações similares podem ser usadas para modos parasitas para $\kappa = 1$ e $z = -1$ ou $\kappa = z = -1$.

3.3.2.2 Método da extrapolação espacial-temporal

Consideremos agora as seguintes condições de contorno

$$(I - Z^{-1}K)^p u_{0,m}^{n+1} = 0. \quad (3.101)$$

Aqui, p é um inteiro positivo.

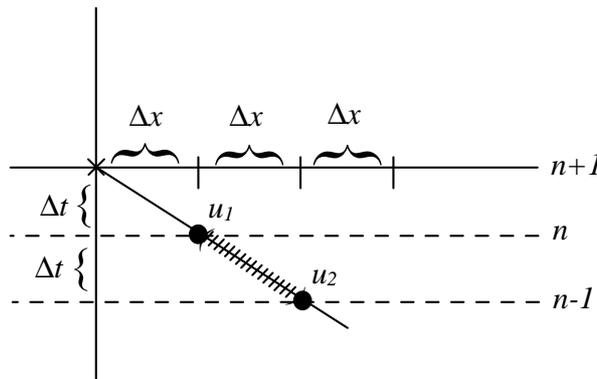


Figura 3.4: *Stencil* para o caso $p = 2$.

Por exemplo, para o caso $p = 1$ temos $u_{0,m}^{n+1} = u_{1,m}^n$. Para o caso $p = 2$ (veja Figura 3.4),

$$u(x, y_0, t) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2$$

Assim

$$u_{0,m}^{n+1} = \frac{-2\Delta x}{-\Delta x} u_{1,m}^n + \frac{-\Delta x}{\Delta x} u_{2,m}^{n-1}$$

logo

$$u_{0,m}^{n+1} = 2u_{1,m}^n - u_{2,m}^{n-1}$$

Os *stencils* são diagonais no plano (x, t) .

Algumas propriedades de operadores diferenciais e polinômios de interpolação implicam que essas condições de contorno são verdadeiros polinômios de extrapolação. Por exemplo, quando $p = 2$, a condição de contorno ajusta um função linear para os valores $u_{1,m}^n$ e $u_{2,m}^{n-1}$, que é utilizada para obter um valor aproximado

para $u_{0,m}^{n+1}$ (veja Figura 3.4). O caso $p = 2$ pode ser considerado como uma extrapolação linear no espaço e no tempo. Observe que, para $p > 2$, a extrapolação não será linear.

Primeiramente, faremos uma análise de estabilidade. Seja $S_p(K, Z^{-1})$ denotando o operador $(I - Z^{-1}K)^p$ usado em (3.101).

Proposição 3.8. *O método de extrapolação espacial-temporal de ordem p satisfaz o critério de estabilidade (3.83), com a exceção que $S_p(1, 1) = 0$.*

Prova. Primeiramente, suponhamos $|z| > 1$ e $|\kappa| < 1$. Então $|z^{-1}\kappa| < 1$, e assim $1 - z^{-1}\kappa \neq 0$.

Agora, consideremos o caso limite $|z| \rightarrow 1$. Se nesse caso $|\kappa| < 1$, então $|z^{-1}\kappa| < 1$ como antes. De outro modo, consideremos $|\kappa| \rightarrow 1$. De acordo com os comentários feitos após (3.83), esse κ deve ser κ_1 ao invés de κ_2 . Então precisamos mostrar que $1 - z^{-1}\kappa_1 \neq 0$, ou $\omega\Delta t \neq \xi_1\Delta x$. Mas para as ondas que se movem para o interior do domínio, $\omega\Delta t$ e $\xi_1\Delta x$ têm sinais opostos, exceto quando $\omega\Delta t = \xi\Delta x = \eta\Delta y = 0$, o que implica que $S_p(1, 1) = 0$ (Veja a Figura 3.2). Assim, concluímos a demonstração. \square

Agora, consideremos os coeficientes de reflexão para as condições de contorno (3.101). Eles são dados por

$$R_p^{ST}(\eta, z) = -\frac{(1 - z^{-1}\kappa_2)^p}{(1 - z^{-1}\kappa_1)^p} = -\left(\frac{z - \kappa_2}{z - \kappa_1}\right)^p \quad (3.102)$$

Proposição 3.9. *Supomos que $|z| = |\kappa_1| = |\kappa_2| = 1$ e $z \neq 1$. Então*

$$|R_p^{ST}(\eta, z)| < 1,$$

exceto quando $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ou $\kappa_1 = \kappa_2 = -1$.

Prova. Um típico posicionamento de z , κ_1 e κ_2 no círculo unitário é indicado na Figura 3.3.

Fica claro que $|z - \kappa_2| < |z - \kappa_1|$ exceto quando κ_1 e κ_2 coincidem, ou seja, quando $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ou $\kappa_1 = \kappa_2 = -1$. Logo, por (3.102),

$$|R_p^{ST}(\eta, z)| = \left| \frac{z - \kappa_2}{z - \kappa_1} \right|^p < 1.$$

□

Como na proposição 3.5, o caso excepcional é de pouca relevância. Para todos os outros casos, desde que $|z - \kappa_2| < |z - \kappa_1|$ sempre que $\kappa_1 \neq \kappa_2$, $R_p^{ST}(\eta, z) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$.

A próxima proposição aplica-se para ondas que são bem resolvidas pela malha.

Proposição 3.10. *O coeficiente de reflexão para o método de extrapolação espacial-temporal de ordem p satisfaz*

$$R_p^{ST}(\eta, z) = - \left(\frac{\lambda - \cos \theta}{\lambda + \cos \theta} \right)^p + \mathcal{O}(\omega \Delta t)^2,$$

onde θ é o ângulo de incidência e $\lambda = \Delta t / \Delta x$.

Prova. De acordo com (3.87) e (3.101), o coeficiente de reflexão é dado por

$$R_p^{ST}(\eta, z) = - \left[\frac{1 - z^{-1}\kappa_2}{1 - z^{-1}\kappa_1} \right]^p.$$

Aplicando expansões em séries de Taylor para $z = \exp(i\omega \Delta t)$ e $\kappa_j = \exp(i\xi_j \Delta x)$, com $j = 1, 2$, temos que

$$z^{-1}\kappa_j = \left(1 + (-i\omega \Delta t) + \frac{(-i\omega \Delta t)^2}{2!} + \frac{(-i\omega \Delta t)^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + (i\xi_j \Delta x) + \frac{(i\xi_j \Delta x)^2}{2!} + \frac{(i\xi_j \Delta x)^3}{3!} + \dots \right)$$

e

$$\begin{aligned} 1 - z^{-1}\kappa_j &= -i\xi_j \Delta x - \frac{(i\xi_j \Delta x)^2}{2!} + \dots \\ &\quad - (-i\omega \Delta t) - (-i\omega \Delta t)(i\xi_j \Delta x) - \frac{1}{2!}(-i\omega \Delta t)(i\xi_j \Delta x)^2 - \dots \\ &\quad - \frac{1}{2!}(-i\omega \Delta t)^2 - \frac{1}{2!}(-i\omega \Delta t)^2(i\xi_j \Delta x) - \frac{1}{2!2!}(-i\omega \Delta t)^2(i\xi_j \Delta x)^2 - \dots \\ &\quad - \frac{1}{3!}(-i\omega \Delta t)^3 - \frac{1}{3!}(-i\omega \Delta t)^3(i\xi_j \Delta x) - \frac{1}{3!2!}(-i\omega \Delta t)^3(i\xi_j \Delta x)^2 - \dots \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever $1 - z^{-1}\kappa_j$ como

$$i\Delta x(\lambda\omega - \xi_j) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!(n-m)!} (-i\omega\Delta t)^{n-m} (i\xi_j\Delta x)^m.$$

Como vimos na demonstração da proposição (3.6),

$$(-i\omega\Delta t)^{n-m} (i\xi_j\Delta x)^m = (-1)^n i^n \left(\frac{-\xi_j}{\lambda\omega}\right)^m (\omega\Delta t)^n$$

e assim temos que

$$\begin{aligned} 1 - z^{-1}\kappa_j &= i\Delta x(\lambda\omega - \xi_j) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{i^n}{n!} (\omega\Delta t)^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{-\xi_j}{\lambda\omega}\right)^m \binom{n}{m} \\ &= i\Delta x(\lambda\omega - \xi_j) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{i^n}{n!} (\omega\Delta t)^n \left(1 - \frac{\xi_j}{\lambda\omega}\right)^n \end{aligned}$$

Definindo a quantidade $(-1)^{n+1} i^n (n!)^{-1} (1 - \xi_j/(\lambda\omega))^n$ por $E_{n,j}$, para $j = 1, 2$, temos

$$\frac{1 - z^{-1}\kappa_2}{1 - z^{-1}\kappa_1} = \frac{i\Delta x(\lambda\omega - \xi_2) + \sum_{n=2}^{\infty} E_{n,2}(\omega\Delta t)^n}{i\Delta x(\lambda\omega - \xi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} E_{n,1}(\omega\Delta t)^n}$$

Chamando as quantidades $i\Delta x(\lambda\omega - \xi_j)$ por a_j , dividindo os polinômios, obtemos

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{E_{2,2} - \frac{a_2}{a_1} E_{2,1}}{a_1} (\omega\Delta t)^2 + \dots$$

Por fim, temos

$$R_p^{ST}(\eta, z) = \left(\frac{\lambda\omega - \xi_2}{\lambda\omega - \xi_1} + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^2\right)^p$$

e analogamente à demonstração da proposição (3.6), obtemos o resultado desejado.

□

A reflexão é essencialmente zero quando $\cos\theta = \lambda$. Observe que o coeficiente de reflexão (3.102) é exatamente zero se $z = \kappa_2$; quando $|z| = |\kappa_2| = 1$, isso significa que $\omega\Delta t = \xi_2\Delta x$, ou $\xi_2/\omega = \Delta t/\Delta x = \lambda$. Para ondas que são bem resolvidas pela malha, $\xi_2/\omega \approx \cos\theta$.

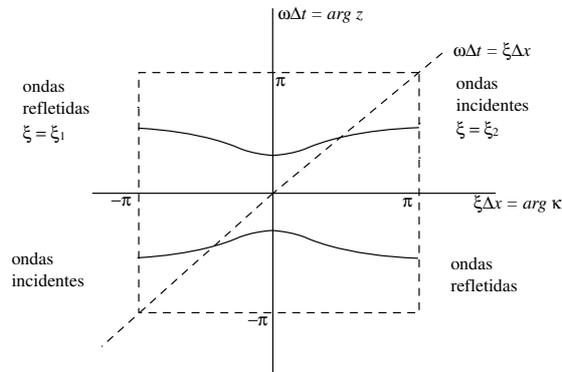


Figura 3.5: Frequências altas quando $|z| = |\kappa_2| = 1$.

Proposição 3.11. *O método de extrapolação espacial-temporal de ordem p é consistente com a condição de contorno analítica*

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^p u = 0. \quad (3.103)$$

Prova. O operador (3.101) é consistente, por exemplo, com o operador *Euler forward*

$$\underbrace{\lambda \left(\frac{I - Z^{-1}}{\Delta t} \right) - Z^{-1} \left(\frac{K - I}{\Delta x} \right)}_{\Lambda_{Euler}}.$$

De fato, reescrevendo-o temos

$$\begin{aligned} \Lambda_{Euler} &= \frac{1}{\Delta x} \left[(I - Z^{-1}) - Z^{-1} \left(\frac{K - I}{\Delta x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} [I - Z^{-1}K] \end{aligned}$$

Afirmamos agora que o operador *Euler forward* é consistente com o operador (3.103).

De fato,

$$\left(\frac{I - Z^{-1}}{\Delta t} \right) u_{0,m}^{n+1} = \frac{u_{0,m}^{n+1} - u_{0,m}^n}{\Delta t} \approx \frac{\partial u}{\partial t}$$

e

$$\left(\frac{K - I}{\Delta x} \right) u_{0,m}^{n+1} = \frac{u_{1,m}^{n+1} - u_{0,m}^{n+1}}{\Delta x}$$

o que implica que

$$Z^{-1} \left(\frac{K - I}{\Delta x} \right) u_{0,m}^{n+1} = \frac{u_{1,m}^n - u_{0,m}^n}{\Delta x} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

O operador (3.101) é consistente também, por exemplo, com o operador *Box scheme*

$$\underbrace{\lambda \left(\frac{I - Z^{-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{I + K}{2} \right) - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{K - I}{\Delta x} \right)}_{\Lambda_{Box}}$$

De fato, reescrevendo-o temos

$$\begin{aligned} \Lambda_{Box} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} (I - Z^{-1})(I + K) - \frac{1}{2} (I + Z^{-1})(K - I) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} [I - Z^{-1}K] \end{aligned}$$

Afirmamos que o operador *Box scheme* é consistente com o operador (3.103). De fato, ao fazermos $\Delta x \rightarrow 0$, e conseqüentemente $\Delta t \rightarrow 0$, temos que

$$\left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) u_{0,m}^{n+1} \approx u_{0,m}^n$$

como na demonstração da proposição (3.7), e

$$\left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{K - I}{\Delta x} \right) u_{0,m}^{n+1} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Temos também que

$$\left(\frac{I + K}{2} \right) u_{0,m}^{n+1} = \frac{u_{0,m}^{n+1} + u_{1,m}^{n+1}}{2} \approx u_{0,m}^{n+1}$$

ou seja, o operador identidade, e assim

$$\left(\frac{I - Z^{-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{I + K}{2} \right) u_{0,m}^{n+1} \approx \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Logo, provamos a afirmação, e concluímos a demonstração. \square

3.3.3 Generalização para ângulos arbitrários de incidência

Vimos que as condições de contorno discretas discutidas nas seções 3.3.2 e 3.3.3 são consistentes com as condições de contorno analíticas da forma

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^p u = 0$$

A razão $\Delta t/\Delta x = \lambda$ é o cosseno do ângulo de melhor absorção. Isso sugere que poderíamos usar

$$\left((\cos \alpha) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (3.104)$$

para aniquilar ondas propagando-se num ângulo de incidência $\pm\alpha$, e que a versão de ordem arbitrária, dada por

$$\prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (3.105)$$

pode perfeitamente absorver ondas de ângulos de incidência $\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_p$. (Aqui $|\alpha_j| < \pi/2$, para todo j). Agora consideraremos problemas analíticos ao invés de aproximações discretas.

Podemos interpretar as condições de contorno (3.104) e (3.105) da seguinte forma. Considere uma onda plana da forma

$$u(x, y, t) = f(x \cos \alpha + y \sin \alpha + t)$$

onde f é alguma função dada. Essa onda move-se para fora do domínio $x > 0$ num ângulo de incidência $\pm\alpha$, para $1 \leq j \leq m$. Essa onda satisfaz (3.104), e, em particular, a condição de contorno $(\partial/\partial t - \partial/\partial x)u = 0$ é compatível com ondas incidentes movendo-se na incidência normal (Veja proposição 3.13). Similarmente, uma combinação linear de ondas planas movendo-se para fora do domínio $x > 0$, com ângulos de incidência $\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_p$, satisfaria exatamente a versão de ordem arbitrária (3.105).

Proposição 3.12. *O coeficiente de reflexão para (3.105) é dado por*

$$- \prod_{j=1}^p \left(\frac{\cos \alpha_j - \cos \theta}{\cos \alpha_j + \cos \theta} \right) \quad (3.106)$$

onde θ é o ângulo de incidência

Prova. Considere uma combinação linear de uma onda refletida e de uma onda incidente

$$c_1 e^{i(\xi_1 x + \eta y + \omega t)} + c_2 e^{i(\xi_2 x + \eta y + \omega t)}.$$

Inserindo-a na condição (3.105) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) (c_1 e^{i(\xi_1 x + \eta y + \omega t)} + c_2 e^{i(\xi_2 x + \eta y + \omega t)}) \\
&= \prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) (c_1 e^{i(\xi_1 x + \eta y + \omega t)}) + \prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) c_2 e^{i(\xi_2 x + \eta y + \omega t)} \\
&= \prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) c_1 i \omega e^{i(\xi_1 x + \eta y + \omega t)} - c_1 i \xi_1 e^{i(\xi_1 x + \eta y + \omega t)} \right) \\
&\quad + \prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) c_2 i \omega e^{i(\xi_2 x + \eta y + \omega t)} - c_2 i \xi_2 e^{i(\xi_2 x + \eta y + \omega t)} \right)
\end{aligned}$$

o que implica que

$$-\prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) i \omega - i \xi_2 \right) c_2 e^{i(\xi_2 x + \eta y + \omega t)} = \prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) i \omega - i \xi_1 \right) c_1 e^{i(\xi_1 x + \eta y + \omega t)}$$

logo

$$\frac{c_1 e^{i(\xi_1 x + \eta y + \omega t)}}{c_2 e^{i(\xi_2 x + \eta y + \omega t)}} = - \frac{\prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) i \omega - i \xi_2 \right)}{\prod_{j=1}^p \left((\cos \alpha_j) i \omega - i \xi_1 \right)} = - \prod_{j=1}^p \left(\frac{(\cos \alpha_j) i \omega - i \xi_2}{(\cos \alpha_j) i \omega - i \xi_1} \right)$$

Como c_1 é a amplitude da onda refletida e c_2 é a amplitude da onda incidente, por (3.82),

$$R = - \prod_{j=1}^p \left(\frac{(\cos \alpha_j) i \omega - i \xi_2}{(\cos \alpha_j) i \omega - i \xi_1} \right)$$

Usando o fato de que $\xi_2/\omega \approx \cos \theta$ e $\xi_1/\omega \approx -\cos \theta$ (como demonstrado na proposição (3.6)) temos

$$R = - \prod_{j=1}^p \left(\frac{\cos \alpha_j - \cos \theta}{\cos \alpha_j + \cos \theta} \right).$$

□

O valor absoluto de cada fator em (3.106) é menor que 1, exceto quando $\theta = \pi/2$. Segundo Higdon [32], essa exceção não tem nenhuma consequência, visto que esse caso corresponde à incidência tangencial. Os modos correspondentes não

se propagam para o interior do domínio. Para maiores detalhes sobre os modos tangenciais, veja [33].

Proposição 3.13. *A condição de contorno de Engquist e Majda de ordem p é equivalente a*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^p u = 0 \quad (3.107)$$

ou seja, $\alpha_j = 0$ para todo j .

Prova. As condições de contorno de Engquist e Majda de ordem p [12], são dadas recursivamente por (3.23). Considere a mudança $\tilde{x} = -x$ em (3.107), de modo que temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right)^p u = 0. \quad (3.108)$$

Quando $p = 1$, temos que (3.108) é equivalente a condição de contorno de primeira ordem em (3.23). Quando $p = 2$, (3.108) é da forma

$$u_{tt} + 2u_{t\tilde{x}} + u_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0.$$

Mas por (2.3), $u_{\tilde{x}\tilde{x}} = u_{tt} - u_{yy}$, e então a condição de contorno pode ser reescrita da forma

$$2u_{tt} + 2u_{t\tilde{x}} - u_{yy} = 0$$

que é equivalente a condição de contorno de segunda ordem em (3.23). Similarmente, quando $p = 3$, (3.108) é da forma

$$2u_{ttt} + 4u_{tt\tilde{x}} - 4u_{t yy} - u_{\tilde{x} yy} + 2u_{t\tilde{x}\tilde{x}} = 0$$

que por (2.3) pode ser reescrita da forma

$$4u_{ttt} + 4u_{tt\tilde{x}} - 3u_{t yy} - u_{\tilde{x} yy} = 0.$$

Assim, por indução em p , lembrando de (3.40), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_p &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}_{p-1} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{B}_{p-2} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2^{p-2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^{p-1} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{2^{p-3}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^{p-2} \\
&= \frac{1}{2^{p-2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^{p-2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\
&= \frac{1}{2^{p-2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^{p-2} \mathcal{B}_2 \\
&= \frac{1}{2^{p-2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^{p-2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2^{p-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^p
\end{aligned}$$

Voltando à variável original, temos

$$\frac{1}{2^{p-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^p u = 0,$$

que é equivalente a (3.107). □

O coeficiente de reflexão para (3.107) é

$$-\left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^p,$$

conforme (3.106). Esse coeficiente de reflexão tem um zero de multiplicidade $2p$ em $\theta = 0$, enquanto o coeficiente para (3.105) tem zeros em $\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_p$. A forma geral (3.105), assim, permite um espalhamento de zeros e, desse modo, amplia a variação de ângulos onde o coeficiente de reflexão é pequeno.

Usando o método de energia padrão, é possível mostrar que a condição de primeira ordem (3.104) é bem posta [25]. Para o caso mais geral, (3.105), usamos o critério de estabilidade de Kreiss [38]. Esse critério é análogo ao critério (3.83) usado anteriormente para aproximações em diferenças finitas.

Seguindo Higdon [32], o critério pode ser descrito da seguinte maneira. Denotemos uma condição de contorno homogênea envolvendo derivadas em x , t por

$$\mathcal{B}(\partial/\partial x, \partial/\partial t)u = 0, \quad (3.109)$$

onde \mathcal{B} é um polinômio em duas variáveis. Considere soluções de (2.3) da forma

$$e^{\gamma x + i\eta y + st} \quad (3.110)$$

onde γ e s são números complexos, $\mathcal{R}e(s) \geq 0$ e $\mathcal{R}e(\gamma) \leq 0$. As variáveis duais devem satisfazer $s^2 = \gamma^2 + (i\eta)^2$. O critério de estabilidade é

$$\mathcal{B}(\gamma, s) \neq 0 \quad \mathcal{R}e(s) \geq 0. \quad (3.111)$$

O valor de γ para $\mathcal{R}e(s) = 0$ é definido como sendo o limite dos valores de γ correspondente a $\mathcal{R}e(s) > 0$.

Consideremos dois casos:

(1) Suponhamos que $\mathcal{R}e(s) > 0$, $\mathcal{R}e(\gamma) < 0$, e (3.110) satisfaz a condição de contorno (3.109). Os modos

$$e^{c[\gamma x + i\eta y + st]}$$

também são soluções de PVIC, para todo c . (Isso requer que os vários termos da condição de contorno tenham o mesmo grau total, como é o caso de (3.105).) Quando $c \rightarrow \infty$ essas soluções crescem exponencialmente em t , cada vez mais, mas ainda mantêm norma finita em x , pois $\mathcal{R}e(\gamma) < 0$. O PVIC seria então fortemente mal-posto (veja a proposição 3.1). A condição (3.111) garante que esses modos são excluídos.

(2) Considere agora o limite $\mathcal{R}e(s) \rightarrow 0$, isto é, $s \rightarrow i\omega$. Se $\mathcal{R}e(\gamma) \rightarrow 0$ também (isto é, $\gamma \rightarrow i\xi$), então o valor limitante deve ser $i\xi_1$ ao invés de $i\xi_2$ [33]. Como vimos na seção 3.3.1, esses modos devem ser evitados por satisfazerem a condição de contorno espontaneamente, sem qualquer simulação de ondas incidentes ou funções forçantes na condição de contorno. Equivalentemente, a condição (3.111) permite

resolver para ondas refletidas em termos de ondas incidentes, desde que $\mathcal{B}(i\xi_1, i\omega)$ é o denominador do coeficiente de reflexão [33]. A condição (3.111) também exclui os modos evanescentes para os quais $\mathcal{R}e(\gamma) < 0$.

Proposição 3.14. *Se $|\alpha_j| < \pi/2$ para todo j , então as condições de contorno (3.105) satisfazem o critério (3.111), com a exceção que $\mathcal{B}(0, 0) = 0$.*

Prova. Seja $\mathcal{B}(\partial/\partial x, \partial/\partial t)u = 0$ denotando a condição de contorno (3.105). Então

$$\mathcal{B}(\gamma, s) = \prod_{j=1}^p ((\cos \alpha_j)s - \gamma). \quad (3.112)$$

Aqui $\cos \alpha_j > 0$ para todo j .

Se $\mathcal{R}e(s) > 0$ e $\mathcal{R}e(\gamma) < 0$, então cada um dos fatores em (3.112) é não nulo.

Considere agora o caso em que $\mathcal{R}e(s) = 0$. Se $\mathcal{R}e(\gamma) < 0$, então ainda cada fator em (3.112) é não nulo. Se $\mathcal{R}e(\gamma) = 0$, então $\gamma = i\xi_1$ (onda refletida), e um fator de (3.112) pode ser escrito como

$$(\cos \alpha_j)i\omega - i\xi_1.$$

Mas ω e ξ_1 têm sinais opostos (veja Figura 2.1, e a demonstração da proposição 3.6), então cada fator em (3.112) é não nulo, exceto quando $\omega = \xi_1 = 0$. Isso dá a conclusão desejada. \square

O caso excepcional significa que ainda temos um autovalor generalizado correspondente à frequência zero. Na notação usada para o problema discreto, esse é o caso onde $\kappa = z = 1$.

A prova dessa proposição mostra que se uma condição de contorno pode ser fatorada dentro da forma (3.105), então sua análise de estabilidade reduz-se a uma análise de operadores unidimensionais de primeira ordem. Assuntos relacionados à implementação da condição de contorno (3.105) e à escolha de ângulos α_j convenientes, são abordados por Higdon em [32, 34].

3.3.4 Teorema da fatorização

Supomos que a condição de contorno tem a forma

$$P(\partial/\partial x, \partial/\partial t)u = 0 \quad (3.113)$$

onde P é um polinômio real no qual os termos têm o mesmo grau total. A homogeneidade significa que P pode ser fatorado dentro da forma

$$\prod_j Q_j(\partial/\partial x, \partial/\partial t) \quad (3.114)$$

onde cada Q_j é linear ou uma forma quadrática real irredutível. Nossa pretensão é caracterizar esses fatores Q_j .

Proposição 3.15. *A condição de contorno (3.113), (3.114), cada uma*

(1) *fatora-se dentro da forma (3.105), ou*

(2) *viola o critério de estabilidade (3.111), ou*

(3) *não é ótima, no sentido de que é possível modificar os coeficientes em pelo menos um dos Q_j e então reduzir a magnitude do coeficiente de reflexão.*

Prova. O critério de estabilidade (3.111) é equivalente a $Q_j(\gamma, s) \neq 0$ para todo j , e o coeficiente de reflexão é dado por

$$-\prod_j \frac{Q_j(i\xi_2, i\omega)}{Q_j(i\xi_1, i\omega)}$$

conforme a demonstração da proposição (3.12). Podemos então analisar os fatores individualmente. Um fator Q_j tem a forma

(I) $b\partial/\partial t - \partial/\partial x$, onde b é real, ou

(II) quadrática real irredutível.

Primeiramente, consideremos o caso (I).

Se $0 < b \leq 1$, então Q tem a forma de uma fator em (3.105), com $\cos \alpha = b$, visto que a forma (3.105) pode absorver perfeitamente ondas com ângulos de incidência $|\alpha_j| < \pi/2$, para todo j .

Se $-1 \leq b < 0$, então Q permite ondas refletidas de ângulos $\cos^{-1} b$ (veja, por exemplo, a Figura 2.1 e a demonstração da proposição 3.6). Isso é uma forma de instabilidade.

O caso $b < -1$ corresponde à instabilidades exponenciais. Considere

$$s = \frac{|\eta|}{\sqrt{b^2 - 1}} \quad \text{e} \quad \gamma = sb.$$

A relação de dispersão $s^2 = \gamma^2 + (i\eta)^2$ é satisfeita. Logo existem soluções do tipo $\exp[c(\gamma x + i\eta y + st)]$ com

$$\mathcal{R}e(s) = \frac{|\eta|}{\sqrt{b^2 - 1}} > 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{R}e(\gamma) = sb < 0.$$

Como comentado na seção 3.3.3, isso é uma forma de instabilidade.

Se $b > 1$ não existe instabilidade. No entanto, a correspondente contribuição para o coeficiente de reflexão é

$$R_Q = \frac{b - (\xi_2/\omega)}{b - (\xi_1/\omega)}.$$

Aqui, $\xi_2/\omega = -\xi_1/\omega \geq 0$ (veja demonstração da proposição 3.6). Observe que

$$\begin{aligned} \frac{dR_Q}{db} &= \frac{(b - \xi_1/\omega) - (b - \xi_2/\omega)}{(b - \xi_1/\omega)^2} \\ &= \frac{(\xi_2 - \xi_1)/\omega}{(b - \xi_1/\omega)^2} > 0 \end{aligned}$$

Logo, um pequeno decréscimo em b permite um decréscimo em $|R_Q|$, e um pequeno acréscimo em b permite um acréscimo em $|R_Q|$, sempre que $\xi_1 \neq \xi_2$. Assim, Q pode ser modificado a fim de dar uma reflexão menor, e não pode ser parte de uma condição de contorno ótima.

Para o caso $b = 0$ também temos condições de contorno que não são ótimas. Nesse caso, a correspondente contribuição para o coeficiente de reflexão é dada por

$$R_Q = \frac{\xi_2/\omega}{\xi_1/\omega}.$$

Como $\xi_2/\omega = -\xi_1/\omega$, temos que $|R_Q| = 1$, ou seja, a reflexão é total.

No caso (II), o polinômio quadrático $Q(\xi/\omega, 1)$ nunca é nulo. Sem perda de generalidade, assumimos que ele é positivo. Se o vértice da parábola está centrado na origem ou à esquerda da origem, então

$$\left| \frac{Q(\xi_2/\omega, 1)}{Q(\xi_1/\omega, 1)} \right| = \frac{|1 - \xi_2/\omega|}{|1 - \xi_1/\omega|} \geq 1$$

De fato, como $\xi_2/\omega = -\xi_1/\omega$, temos que $|1 - \xi_2/\omega| > |1 - \xi_1/\omega|$.

Por outro lado, se o vértice é centrado à direita da origem, a razão é menor que 1. No entanto, ela pode ser reduzida, levando a parábola mais perto do eixo horizontal. Logo, para este caso, a condição de contorno não é ótima. \square

3.4 Forma geral de representação

Aqui, apresentaremos uma forma geral de representação de condições de contorno absorventes para a equação da onda não-dispersiva

$$u_{tt} = c^2 \Delta u. \quad (3.115)$$

As mesmas fórmulas valem para a equação da onda dispersiva, $u_{tt} = c^2 \Delta u - f^2 u$ [36]. Suponhamos que a fronteira artificial está localizada em $x = A$, e o interior do domínio computacional em $x > A$. A condição de contorno absorvente em $x = A$ tem a forma

$$\mathcal{B}(\partial/\partial x, \partial/\partial t)u|_{x=A} = \left[\prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_j \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u|_{x=A} = 0, \quad (3.116)$$

onde os c_j 's são constantes positivas. Discussões sobre a escolha dos parâmetros c_j podem ser vistas em [36, 7].

Uma motivação para a forma (3.116) é dada pelo seguinte. Considere o caso da equação da onda unidimensional, a qual tem uma solução da forma

$$e^{i(kx+c_jt)}. \quad (3.117)$$

Essa onda move-se para fora do domínio $x > A$ com velocidade de fase $-c_j$, e pode ser interpretada como uma onda que viaja na incidência normal para a fronteira. A onda (3.117) satisfaz a condição de contorno (3.116) exatamente, e, então, não há reflexões artificiais geradas pela fronteira artificial.

Para a análise das propriedades de reflexão e de estabilidade, consideraremos o problema bidimensional. A análise em mais dimensões é análoga à análise bidimensional [36]. A fim de analisar as propriedades de reflexão, considere uma combinação linear da forma

$$a_{in}e^{i\xi_{in}x+i\eta y-i\omega t} + a_{out}e^{i\xi_{out}x+i\eta y-i\omega t}, \quad (3.118)$$

onde ξ_{in} e ξ_{out} correspondem às ondas movimentando-se para dentro e para fora do domínio computacional $x > A$, respectivamente. Devido à simetria da relação de dispersão (2.5), temos que $\xi_{out} = -\xi_{in}$, conforme Figura (2.1). Além disso, observe que ω e ξ_{in} têm sinais iguais, enquanto ω e ξ_{out} têm sinais diferentes. Assumimos que a_{out} é dado, e queremos encontrar a_{in} . Inserindo a combinação linear (3.118) na condição de contorno (3.116) temos que

$$a_{in} = -a_{out} \frac{\mathcal{B}(i\xi_{out}, -i\omega) e^{i\xi_{out}x+i\eta y-i\omega t}}{\mathcal{B}(i\xi_{in}, -i\omega) e^{i\xi_{in}x+i\eta y-i\omega t}},$$

de modo que o coeficiente de reflexão é dado por

$$R = \left| \frac{a_{in}}{a_{out}} \right| = \left| \frac{\mathcal{B}(i\xi_{out}, -i\omega)}{\mathcal{B}(i\xi_{in}, -i\omega)} \right| = \prod_{j=1}^N \left| \frac{-\omega/c_j - \xi_{out}}{-\omega/c_j - \xi_{in}} \right|. \quad (3.119)$$

Para uma análise de estabilidade, considere o critério de Kreiss (veja a proposição 3.1). Temos a seguinte definição:

Definição 3.4. *Para um PVIC definido num domínio espacial $x > A$, a condição de contorno cumpre o critério de Kreiss se, e somente se, a condição de contorno não*

é satisfeita para qualquer solução não-nula da equação interior, ou seja, calculada nos pontos interiores ao domínio, pertencendo às seguintes categorias:

- (a) soluções da forma $\varphi(x)e^{i\eta y+st}$ tal que $\mathcal{R}e(s) > 0$ e $\varphi(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$;
- (b) soluções que são limites das soluções em (a), com $\mathcal{R}e(s) \rightarrow 0$ através de valores positivos.

Soluções do tipo (a) têm norma finita em x , mas têm um crescimento exponencial com respeito a t , o que não é fisicamente correto, e não podemos permitir que sejam soluções do PVIC. Soluções do tipo (b) consistem de modos oscilatórios e/ou modos evanescentes, e tais modos oscilatórios têm velocidade de grupo apontando para dentro do domínio espacial $x > A$ (veja a seção 3.3.1). A exclusão de soluções do tipo (b) também implica que o denominador do coeficiente de reflexão (3.119) é sempre não-nulo (veja um raciocínio análogo na proposição 3.14).

Proposição 3.16. *Se a condição de contorno (3.116) é usada conjuntamente com a equação (3.115) para os pontos interiores ao domínio, então o resultante PVIC satisfaz a definição (3.4).*

Prova. Primeiramente, vamos caracterizar as soluções da equação interior dos tipos (a) e (b), conforme definição (3.4), e então mostrar que essas soluções não podem satisfazer a condição de contorno.

Suponha que a solução é da forma $\varphi(x)e^{i\eta y+st}$. Ao inserirmos essa solução na versão bidimensional de (3.115), temos que $s^2\varphi(x) = c^2(\varphi''(x) - \eta^2\varphi(x))$, ou

$$\varphi''(x) = \left(\frac{s^2}{c^2} + \eta^2\right)\varphi(x). \quad (3.120)$$

As soluções de (3.120) podem ser escritas como uma superposição de soluções especiais da forma $e^{\gamma x}$, onde $\gamma \in \mathbb{C}$. Ao inserirmos essas soluções em (3.120) temos que

$$\gamma^2 = \left(\frac{s}{c}\right)^2 + \eta^2. \quad (3.121)$$

Assim, vamos analisar as soluções da equação interior da forma

$$e^{\gamma x + i\eta y + st}, \quad (3.122)$$

onde γ , η e s satisfazem a relação (3.121).

É necessário agora, caracterizar as raízes γ de (3.121) para $\mathcal{R}e(s) \geq 0$. Esse raciocínio pode ser visto em [35]. Primeiramente, consideremos os conjuntos H_j , $j = 1, 2, 3, 4$, que denotam todo ponto $z \in \mathbb{C}$ pertencente ao j -ésimo quadrante, e o conjunto $H = \{z \in \mathbb{C} / \mathcal{I}m > 0\}$, que corresponde ao semi-plano superior.

Se s pertence ao interior de H_1 , então $(s/c)^2$ pertence à H , e γ^2 também deve pertencer à H . Uma solução γ de (3.121) deve pertencer à H_3 , e outra à H_1 . Denotamos essas raízes por γ_1 e γ_2 , respectivamente. Se s é real e $s \geq 0$, então $\gamma^2 \geq \eta^2$; seja γ_1 a raiz não-positiva e γ_2 a raiz não-negativa. Se s é puramente imaginário, $s = i\omega$, e $0 < \mathcal{I}m(s) < c\eta$, ou seja, $0 < \omega^2 < c^2\eta^2$, então $\gamma^2 = -(\omega/c)^2 + \eta^2 < \eta^2$, ou seja, $0 < |\gamma| < \eta$; seja γ_1 e γ_2 as raízes negativa e positiva, respectivamente. Se s é puramente imaginário com $\mathcal{I}m(s) > c\eta$, ou seja, $\eta^2 < (\omega/c)^2$, então $\gamma^2 < 0$, ou seja, γ é puramente imaginário. Nesse caso, seja γ_1 a raiz com parte imaginária negativa e seja γ_2 a raiz com parte imaginária positiva. Para o caso onde s pertence à H_4 , pode-se fazer uma análise similar ao caso anterior, invertendo os sinais de $\mathcal{I}m(\gamma_1)$ e $\mathcal{I}m(\gamma_2)$.

Considere o caso onde $\gamma = i\xi$ e $s = -i\omega$, que corresponde aos modos oscilatórios (veja seção 3.3.1). Se $\xi = \xi_{in}$ (os modos que apontam para dentro do domínio), então ξ e ω têm o mesmo sinal. Nesse caso, $\mathcal{I}m(s)$ e $\mathcal{I}m(\gamma)$ tem sinais opostos, tal que $\gamma = \gamma_1$. Note que, se s está em H_4 , então γ_1 está em H_2 . Logo, esses modos podem ser considerados como limites, tal que $\mathcal{R}e(s) \rightarrow 0$ através de valores positivos, dos modos (3.122). Similarmente, se $\xi = \xi_{out}$, então ξ e ω têm sinais opostos, o que implica que $\mathcal{I}m(s)$ e $\mathcal{I}m(\gamma)$ tem sinais iguais, e assim $\gamma = \gamma_2$.

Os mapeamentos $s \mapsto \gamma_1$ e $s \mapsto \gamma_2$ são contínuos e injetivos no domínio $\mathcal{R}e(s) \geq 0$; eles são quase sempre analíticos, exceto quando $s = \pm ic\eta$, onde γ_1 e γ_2 coincidem [35, 36].

Desse modo, se $\mathcal{R}e(s) > 0$, então existe exatamente uma raiz γ_1 de (3.121), para a qual $\mathcal{R}e(\gamma) < 0$, o que corresponde às soluções do tipo (a). Agora, extendemos γ_1 por uma função contínua de s sobre a região fechada $\mathcal{R}e(s) \geq 0$. Se $\mathcal{R}e(s) = 0$, então $\mathcal{R}e(\gamma_1) < 0$ ou $\mathcal{I}m(s)$ e $\mathcal{I}m(\gamma_1)$ têm sinais opostos, o que corresponde às soluções do tipo (b).

A meta agora, é mostrar que funções da forma (3.122), com $\gamma = \gamma_1$ e $\mathcal{R}e(s) \geq 0$, não satisfazem a condição de contorno (3.116), ou seja, mostrar que

$$\mathcal{B}(\gamma_1, s) = \prod_{j=1}^N (s - c_j \gamma_1) \neq 0. \quad (3.123)$$

Assumimos que $c_j > 0$, para todo j . A demonstração desse fato é análoga à demonstração da proposição 3.14, que mostra ainda que o critério é violado se $s = \gamma_1 = \eta = 0$. Em [32, 35] é mostrado que esse modo corresponde a um autovalor generalizado, e que apenas causa leves instabilidades [46, 47]. Assim, temos que $s - c_j \gamma_1 \neq 0$ para $\mathcal{R}e(s) \geq 0$, para cada j , e a propriedade (3.123) é válida. \square

O seguinte resultado é estabelecido em termos das condições de contorno para (3.115), e sua demonstração é similar à da proposição 3.15 e encontra-se em [36].

Lema 3.3. *Suponha que a condição de contorno para (3.115) tem a forma*

$$\mathcal{B}(\partial/\partial x, \partial/\partial t)u \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.124)$$

onde \mathcal{B} é um polinômio em duas variáveis, para o qual todos os termos têm o mesmo grau total. Então a condição de contorno (3.124) ou é

- (a) equivalente à (3.116), para certos parâmetros c_j , para os quais $c_j \geq c$; ou,
- (b) instável; ou,
- (c) não ótima, no sentido que a condição de contorno pode ser modificada, sem acréscimo na ordem, de forma a tornar o coeficiente de reflexão menor para ondas tendo uma componente normal não-nula da velocidade de grupo.

3.5 Aproximações racionais

Analisaremos aqui, a formulação de condições de contorno absorventes, para a equação da onda, a partir de aproximações racionais para o operador pseudo-diferencial em (3.6). Engquist e Majda [12] usaram aproximações racionais de Padé para chegar às condições de contorno absorventes (3.23) para a equação da onda clássica. Mais tarde, Wagatha [54] usou aproximações por mínimos quadrados. Trefethen e Halpern [50] usaram uma variedade de aproximações racionais para o mesmo problema. Mostraremos aqui que as condições de contorno desse tipo podem ser reduzidas à forma analisada no lema 3.3, e assim, ou são equivalentes à forma (3.116), ou são instáveis, ou não são ótimas.

Começemos com dois exemplos. Consideraremos aqui, a versão bidimensional de (3.115),

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}). \quad (3.125)$$

A relação de dispersão para (3.125) é dada por $\omega^2 = c^2(\xi^2 + \eta^2)$. As soluções de (3.125) podem ser dadas por uma família especial de soluções da forma $e^{i\xi x + i\eta y - i\omega t}$, que satisfazem a relação de dispersão $\omega^2 = c^2(\xi^2 + \eta^2)$. Resolvendo para ξ , as ondas que movem-se para fora do domínio $x > A$ são caracterizadas por

$$\xi = -\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (3.126)$$

com $\alpha = \frac{c\eta}{\omega}$.

Desde que a raiz quadrada em (3.126) é uma função irracional de η/ω , (3.126) é uma equação contendo um operador pseudo-diferencial, não-local no espaço e no tempo. No entanto, podemos aproximar a raiz quadrada para produzir uma família de equações diferenciais parciais que podem ser implementadas numericamente. Essas condições não serão exatas porque uma pequena quantidade de energia da onda será refletida em direção ao interior do domínio. O objetivo, então, é aproximar a raiz quadrada com uma função racional, e assim obtermos uma equação polinomial em ω , ξ e η . As correspondências

$$-i\omega \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \quad i\xi \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad i\eta \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.127)$$

serão usadas para obter o operador diferencial aproximado que aniquila as ondas incidentes.

Exemplo 3.1. *Considere a aproximação em séries de Taylor $\sqrt{1 - \alpha^2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$. Nesse caso, a relação (3.126) fica da forma*

$$\xi \approx -\frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)^2 \right). \quad (3.128)$$

A relação (3.128) é equivalente a $2c\xi\omega \approx -2\omega^2 + c^2\eta^2$, ou $2c(i\xi)(-i\omega) - 2(-i\omega)^2 + c^2(i\eta)^2 \approx 0$. Agora, usando as correspondências (3.127), chegamos ao operador diferencial da forma

$$2u_{tt} - 2cu_{xt} - c^2u_{yy} = 0. \quad (3.129)$$

Assumimos que (3.129) é satisfeita na fronteira $x = A$, e assumimos que a equação (3.125) vale no interior do domínio $x > A$. Também assumimos que a solução e suas derivadas de ordem dois ou menos são contínuas na região fechada $x \geq A$. Se resolvermos para u_{xx} a equação interior (3.125) e inserirmos em (3.129), temos que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u = 0. \quad (3.130)$$

Similarmente, se (3.130) é satisfeita na fronteira, então (3.130) implica em (3.129). As condições (3.129) e (3.130) são, assim, equivalentes. A condição (3.130) tem a

forma (3.116), com $N = 2$ e $c_1 = c_2 = c$. A condição (3.130) também é equivalente à condição de segunda ordem de Engquist e Majda [12], conforme proposição 3.13.

Exemplo 3.2. Considere agora a aproximação $\sqrt{1 - \alpha^2} = 1 - \alpha^2$. Essa aproximação é obtida por interpolação entre $s = 0$ e $s = 1$. Nesse caso, a relação (3.126) fica da forma $\xi \approx -(\omega/c) + (c\eta^2/\omega)$. Isso é equivalente a $c\xi\omega \approx -\omega^2 + c^2\eta^2$, ou $c(i\xi)(-i\omega) \approx (-i\omega)^2 - c^2(i\eta)^2$. Usando as correspondências (3.127) temos a condição de contorno dada por

$$cu_{xt} - u_{tt} + c^2u_{yy} = 0. \quad (3.131)$$

Similarmente ao exemplo 3.1, usando a equação interior (3.125), temos que $cu_{xt} - c^2u_{xx} = 0$, ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (3.132)$$

O fator $\partial/\partial x$ implica que (3.132) não pode ser ótima no sentido do lema 3.3. De fato, calculando o coeficiente de reflexão para (3.132), temos que

$$R = \left| \frac{\xi_{out}(-\omega/c - \xi_{out})}{\xi_{in}(-\omega/c - \xi_{in})} \right| = \left| \frac{-\omega/c - \xi_{out}}{-\omega/c - \xi_{in}} \right|,$$

do fato que $\xi_{out} = -\xi_{in}$. Logo, o fator $\partial/\partial x$ em (3.132) não contribui para a absorção na fronteira. As propriedades de absorção de (3.132) são idênticas àquelas do operador de primeira ordem $\partial/\partial t - c\partial/\partial x$. Logo, (3.132) não é ótima, no sentido do lema 3.3.

Agora, vamos desenvolver uma representação geral para as condições de contorno obtidas via aproximação racional. Trefethen e Halpern [50, 30] generalizaram a idéia de Engquist e Majda [11, 12], propondo uma melhor aproximação para a raiz quadrada em (3.126). A idéia é substituir a raiz quadrada por uma função racional $r(\alpha)$, do tipo exato (m, n) para algum $m \geq 0$ e $n \geq 0$, ou seja, a razão de um polinômio p_m de grau m e um polinômio q_n de grau n com nenhum zero em comum

$$r(\alpha) = \frac{p_m(\alpha)}{q_n(\alpha)}. \quad (3.133)$$

Assim, a relação de dispersão (3.126) fica

$$\xi \approx -\frac{\omega}{c}r(\alpha). \quad (3.134)$$

Podemos reescrever (3.134) como

$$\xi q_n(\alpha) \approx -\frac{\omega}{c}p_m(\alpha)$$

e considerando $q_n(\alpha) = b_n\alpha^n + \dots + b_0$ e $p_m(\alpha) = a_m\alpha^m + \dots + a_0$, temos que

$$\xi \left(b_n \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)^n + \dots + b_0 \right) \approx -\frac{\omega}{c} \left(a_m \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)^m + \dots + a_0 \right),$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^n b_j \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)^j \xi c \approx -\omega \sum_{j=0}^m a_j \left(\frac{c\eta}{\omega} \right)^j.$$

Multiplicando ambos os lados pelo fator ω^M , onde $M = \max\{m-1, n\}$, temos que

$$\sum_{j=0}^n b_j \eta^j \omega^{M-j} \xi c^{j+1} \approx -\sum_{j=0}^m a_j (c\eta)^j \omega^{M-j+1}, \quad (3.135)$$

ou ainda,

$$\sum_{j=0}^n b_j (i\eta)^j (-i\omega)^{M-j} i \xi c^{j+1} \approx -\sum_{j=0}^m a_j c^j (i\eta)^j (-i\omega)^{M-j+1},$$

a qual é a relação de dispersão da equação

$$\sum_{j=0}^n b_j c^{j+1} u_{y^j t^{M-j} x} + \sum_{j=0}^m a_j c^j u_{y^j t^{M-j+1}} = 0,$$

onde

$$u_{y^j t^k x^\ell} = \frac{\partial^j}{\partial y^j} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} u.$$

Agora observe que o grau de cada termo do polinômio (3.135) tem grau $1+M$, ou seja, $\max\{m, n+1\}$. Assim, podemos representar (3.134) como um polinômio homogêneo, com coeficientes reais, de grau $\max\{m, n+1\}$, em ω , ξ e η ,

$$P(\omega, \xi, \eta) = 0,$$

e a relação de dispersão torna-se uma verdadeira equação diferencial. A escolha padrão da aproximação $r(\alpha)$ são os aproximantes de Padé para $\sqrt{1 - \alpha^2}$. A desvantagem dos aproximantes de Padé é que, apesar de serem muito precisos para ondas num ângulo de incidência $\alpha \approx 0$, são imprecisos perto das singularidades $\alpha = \pm 1$ [12, 32, 30]. Dois candidatos razoáveis, tratados em [50], são as aproximações de Tchebyshev e a aproximação por mínimos quadrados (também tratada em [54]).

Por exemplo, suponha que $r(\alpha)$ é um aproximante de Padé do tipo (2, 2),

$$r(\alpha) = \frac{1 - \frac{3}{4}\alpha^2}{1 - \frac{1}{4}\alpha^2}.$$

Então, (3.134) torna-se $\xi(1 - \frac{1}{4}(c\eta/\omega)^2) \approx -\frac{\omega}{c}(1 - \frac{3}{4}(c\eta/\omega)^2)$, ou $\xi\omega^2 - \frac{1}{4}\xi c^2\eta^2 \approx -\frac{1}{c}\omega^3 - \frac{3}{4}c\omega\eta^2$, o que corresponde à equação diferencial

$$u_{xtt} - \frac{c^2}{4}u_{xyy} = -\frac{1}{c}u_{ttt} + \frac{3c}{4}u_{tyy}.$$

A proposição seguinte [36] diz respeito à forma geral de representação das condições de contorno absorventes obtidas via aproximações racionais para o operador pseudo-diferencial (3.6).

Proposição 3.17. *Supomos que o método das aproximações racionais descrito acima é usado para formular uma condição de contorno absorvente para a equação da onda (3.115) sobre o domínio $x > A$. Supomos também que a solução e todas as suas derivadas de ordem m ou menos são contínuas na região fechada $x \geq A$, onde m é a ordem da condição de contorno. Então a condição de contorno ou é equivalente à forma (3.116); ou é instável; ou não é ótima, no sentido do lema 3.3.*

Prova. A análise é dada em duas dimensões, mas a mesma análise vale para mais dimensões. Suponhamos que (3.115) é válida para todo o interior do domínio $x > A$ e que as condições de contorno valem em $x = A$. Se $m = 1$, então os polinômios p e q são constantes, e a análise do lema 3.3 pode ser aplicada imediatamente. Para o caso $m \geq 2$, a equação interior também vale em $x = A$. A versão bidimensional de

(3.115) implica que

$$c^2 u_{yy} = u_{tt} - c^2 u_{xx}.$$

Assim, na condição de contorno, a cada ocorrência do operador $(i\eta)^2$, podemos trocá-lo por derivadas de segunda ordem com respeito a x e t . A condição de contorno fica, assim, equivalente à forma descrita nas hipóteses do lema 3.3, e as conclusões do lema podem ser aplicadas. \square

Observação 3.6. *Considere a aproximação racional (3.133) para a raiz quadrada em (3.126) e a condição de contorno de Higdon (3.105). A fatorização, analisada na seção 3.3.5, pode ser descrita em termos de pontos onde a aproximação racional r em (3.133) é igual à raiz quadrada em (3.126). Em qualquer desses pontos, $\xi_2(\eta, \omega) = -\frac{\omega}{c}r(\eta/\omega)$. Isso significa que os modos incidentes $e^{i\xi_2(\eta, \omega)x + i\eta y + i\omega t}$ satisfazem exatamente a condição de contorno derivada de (3.134), e a absorção é perfeita. Nesse caso, cada raiz de $P(\xi/\omega, 1)$ em (3.113) corresponde a um fator de $P(\partial/\partial x, \partial/\partial t)$, ou ainda, cada ponto de interpolação de $r(\eta/\omega) \approx \sqrt{1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}}$ corresponde a um fator de $\prod_j ((\cos \alpha_j) \partial/\partial t - c \partial/\partial x)$.*

4 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE DIAZ E JOLY

Graças ao método de Cagniard-De Hoop [4, 37], Diaz e Joly [9] propõem uma expressão explícita da solução fundamental da equação da onda bidimensional em $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+ = \{(x, y, t) / y \geq 0, t \geq 0\}$, associada com as condições de contorno absorventes de alta ordem de Engquist e Majda (3.23), ou de Higdon (3.105), sobre a fronteira $\Upsilon = \{(x, y) / y = 0\} = \partial\mathbb{R}_+^2$. Essa expressão permitiu derivar novos resultados de convergência quando a ordem da condição de contorno tende a $+\infty$, bem como estimativas de erros.

4.1 Solução Fundamental

O método de Cagniard-De Hoop é particularmente conhecido entre os físicos e engenheiros para o cálculo de soluções analíticas para problemas de propagação de ondas, especialmente em sismologia [37]. Uma extensa análise do método é dada em [8].

A idéia do método é, primeiramente, obter explicitamente $\hat{u}(\xi, y, s)$, aplicando a transformada de Laplace no tempo e a transformada de Fourier na variável espacial x (de modo que ξ é a variável dual de x e s é a variável dual de t), a fim de obter uma EDO, a qual pode ser resolvida explicitamente. O segundo passo consiste em aplicar a transformada inversa de Fourier na variável x na solução da EDO, a fim de obter

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, y, s) e^{-i\xi x} dx; \quad (4.1)$$

e, por meio de métodos de análise complexa, transformar a integral (4.1) numa integral da forma

$$\tilde{u}(x, y, s) = \int_0^{\infty} F(x, y, t) e^{-st} dt, \quad (4.2)$$

o que fornece

$$u(x, y, t) \equiv F(x, y, t). \quad (4.3)$$

Uma vez que o problema é invariante sobre translações na direção y , podemos nos restringir ao caso onde o ponto de origem é $(0, h)$ com $h > 0$. Assim, nosso problema é encontrar $u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \delta(x) \times \delta(y - h) \times \delta(t), & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}^N u = 0, & \text{sobre } \Upsilon \\ u(x, y, t) = 0, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

onde \mathcal{B}^N é condição de contorno de Higdon (3.105), e δ é a função delta de Dirac. A imagem do ponto de origem é dada por $(-h, 0)$, e assim definimos

$$r^2 = r^2(x, y) = x^2 + (y - h)^2, \quad r^* = r^*(x, y) = x^2 + (y + h)^2. \quad (4.5)$$

Definimos também a função $\theta = \theta(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, por

$$\theta(x, y) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad (x, y + h) = (r^* \sin \theta, r^* \cos \theta). \quad (4.6)$$

O teorema a seguir é demonstrado em [9], associado às condições de contorno de Engquist e Majda (3.23). Para o problema (4.4), associado às condições de contorno de Higdon (3.105), é dada apenas a solução em [9]. Aqui, demonstraremos passo a passo a solução de (4.4).

Teorema 4.1. *A solução $u(x, y, t)$ do problema (4.4) é dada por:*

$$u(x, y, t) = G_i(x, y, t) + G_r^N(x, y, t), \quad (4.7)$$

onde, se H denote a função de Heaviside,

$$\begin{cases} G_i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} H(ct - r), \\ G_r^N(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}}} \rho(x, y, t) \cos(\psi(x, y, t)) H(ct - r^*), \end{cases} \quad (4.8)$$

onde $\rho(x, y, t)$ e $\psi(x, y, t)$ são dados por

$$\rho(x, y, t) = \sqrt{\prod_{j=1}^N \rho_j(x, y, t)} \quad e \quad \psi(x, y, t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x, y, t), \quad (4.9)$$

onde

$$\rho_j(x, y, t) = \frac{(ct - a_j)^2 - b_j^2}{(ct + a_j)^2 - b_j^2}, \quad (4.10)$$

e

$$\cos(\psi_j(x, y, t)) = \frac{r^{*2} - c^2 t^2 + r^{*2} \cos^2 \alpha_j - (y + h)^2}{\sqrt{((ct - a_j)^2 - b_j^2)((ct + a_j)^2 - b_j^2)}} \quad (4.11)$$

com

$$a_j = r^* \cos \alpha_j \cos \theta = (y + h) \cos \alpha_j \quad (4.12)$$

e

$$b_j = r^* \sin \alpha_j \sin \theta = x \sin \alpha_j \quad (4.13)$$

Prova. As fórmulas (4.7) e (4.8) resultam diretamente da aplicação do método de Cagniard-De Hoop no problema (4.4). Primeiramente, decompomos a solução u de (4.4) como

$$u = G_i + u^r$$

onde G_i é a solução fundamental da equação da onda bidimensional [14], dada por

$$G_i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} H(ct - r). \quad (4.14)$$

Pela linearidade, temos que G_i e u^r satisfazem, respectivamente,

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_i}{\partial t^2} - \Delta G_i = \delta(x) \times \delta(y - h) \times \delta(t), & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+ \\ G_i(x, y, t) = 0, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

e

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^r}{\partial t^2} - \Delta u^r = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{B}^N u^r = -\mathcal{B}^N G_i, & \text{sobre } \Upsilon \\ u^r(x, y, t) = 0, & \text{para } t < 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Para encontrar a solução de (4.16), considere primeiramente a transformada de Laplace no tempo sobre u^r , dada por

$$\tilde{u}^r(x, y, s) = \int_0^\infty u^r(x, y, t)e^{-st} dt. \quad (4.17)$$

Agora, considere a transformada de Fourier sobre a variável espacial x , dada por

$$\hat{u}^r(\xi, y, s) = \int_{-\infty}^\infty \tilde{u}^r(x, y, s)e^{i\xi x} dx. \quad (4.18)$$

A solução de (4.16) é dada pelo método de Cagniard-De Hoop. Primeiramente, aplicando a transformada de Laplace no tempo e aplicando a transformada de Fourier na variável x para a equação da onda, temos que a função $y \mapsto \hat{u}^r(\xi, y, s)$ satisfaz

$$-\frac{d^2 \hat{u}^r}{dy^2} + \left(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) \hat{u}^r = 0.$$

A solução do problema acima que é limitada quando $y \rightarrow \infty$ é dada por

$$\hat{u}^r(\xi, y, s) = A(\xi, s)e^{-(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2})^{1/2}y}, \quad (4.19)$$

onde $A(\xi, s)$ é uma função de valor complexo. Escolhemos o ramo da raiz complexa correspondente a

$$\mathcal{R}e(z^{1/2}) \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (4.20)$$

o que corresponde a fazer o corte do ramo de $z^{1/2}$ coincidindo com o eixo semi-real $\mathcal{I}m(z) = 0, \mathcal{R}e(z) < 0$.

Desde que $u^r + G_i$ é suave para $y < h$, podemos usar o fato que

$$\mathcal{B}^N(u^r + G_i) = 0 \iff \prod_{j=1}^N \left(\cos \alpha_j \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (u^r + G_i) = 0 \text{ para } y = 0. \quad (4.21)$$

Aplicando a transformada de Laplace no tempo em (4.15), temos que

$$\frac{1}{c^2} s^2 \tilde{G}_i - \Delta \tilde{G}_i = \delta(x) \times \delta(y - h), \quad (4.22)$$

usando o fato de que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = e^0 = 1$. Agora, aplicando a transformada de Fourier na variável x em (4.22), temos que

$$\frac{\partial^2 \hat{G}_i}{\partial y^2} - \left(\frac{s^2}{c^2} + \xi^2 \right) \hat{G}_i = -\delta(y - h).$$

Enfim, por (B.7), temos que

$$\hat{G}_i(\xi, y, s) = \frac{e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} |y-h|}}{2\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2}}, \quad (4.23)$$

a qual é a transformada de Fourier-Laplace da solução fundamental da equação da onda bidimensional.

Tomando as soluções de \hat{u}^r em (4.19) e \hat{G}_i em (4.23), aplicando na condição de contorno (4.21), temos que

$$\prod_{j=1}^N \left(\cos \alpha_j \frac{s}{c} + \left(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{1/2} \right) A(\xi, s) + \frac{1}{2} \prod_{j=1}^N \left(\cos \alpha_j \frac{s}{c} - \left(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{1/2} \right) \frac{e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c^2}} h}}{\sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c^2}}} = 0.$$

Assim, computamos

$$A(\xi, s) = -\frac{\prod_{j=1}^N \left(\cos \alpha_j \frac{s}{c} - \left(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{1/2} \right) e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c^2}} h}}{\prod_{j=1}^N \left(\cos \alpha_j \frac{s}{c} + \left(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{1/2} \right) 2\sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c^2}}},$$

e, finalmente,

$$\hat{u}^r(\xi, y, s) = -R^N \left(\xi, \frac{s}{c} \right) \frac{e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c^2}} (y+h)}}{2\sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c^2}}}, \quad (4.24)$$

onde

$$R^N(\xi, \sigma) = \prod_{j=1}^N \frac{(\cos \alpha_j) \sigma - (\xi^2 + \sigma^2)^{1/2}}{(\cos \alpha_j) \sigma + (\xi^2 + \sigma^2)^{1/2}}. \quad (4.25)$$

Desta forma, temos

$$\tilde{u}^r(x, y, s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R^N \left(\xi, \frac{s}{c} \right) \frac{e^{-(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2})^{1/2} (y+h)}}{(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2})^{1/2}} e^{-i\xi x} d\xi, \quad (4.26)$$

a qual gostaríamos de transformar numa integral da forma (4.2).

Desde que o coeficiente de reflexão (4.25) é homogêneo de grau k em s e ξ , isto é, $R^N(k\xi, k\frac{s}{c}) = R^N(\xi, \frac{s}{c})$, podemos aplicar a mudança de variável $\xi = ps/c$, e assim obtemos

$$\tilde{u}^r(x, y, s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R^N(p, 1) \frac{e^{-s[(1+p^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{y+h}{c}) + ip\frac{x}{c}]} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} dp, \quad \left(\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(p) dp \right). \quad (4.27)$$

Fixemos $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ com $x > 0$ (o que não é restritivo, desde que a solução que queremos é par em x). Introduzimos r^* e θ ($\in [0, \pi/2]$ desde que $x \geq 0$) de acordo com as definições (4.5) e (4.6).

A idéia agora é considerar a variável p como uma variável complexa e ver a integral (4.27) como uma integral de contorno, com o contorno coincidindo com o eixo real. A chave do método é encontrar um caminho no plano complexo, de modo que possamos transformar essa integral numa integral de contorno sobre alguma curva Γ , sobre a qual possamos usar uma representação paramétrica da forma

$$(1+p^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y+h}{c} \right) + ip\frac{x}{c} = t \quad \text{para } t > 0, \quad (4.28)$$

sobre o termo exponencial em (4.27).

Para conseguir isso, primeiramente observamos que o integrando $\Psi(p)$ em (4.27) é uma função analítica de p se excluirmos os dois cortes de ramo constituídos de duas linhas parciais de números puramente imaginários cujo módulo é maior que 1, ou seja, se $p = i\mathcal{I}m(p)$, então só haverão singularidades em $\Psi(p)$ se $|\mathcal{I}m(p)| > 1$. Então introduzimos o chamado contorno Γ de Cagniard-De Hoop, definido como

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \\ \Gamma^\pm = \left\{ p = \gamma^\pm(t) \equiv -i\frac{ct}{r^*} \sin \theta \pm \cos \theta \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1}, t \geq \frac{r^*}{c} \right\}. \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Claramente vê-se que as duas curvas Γ^\pm são simétricas com respeito ao eixo imaginário, e encontram-se no ponto $-i \sin \theta$ (para $t = r^*/c$). Se $\frac{r^*}{c} \leq t < \infty$, a

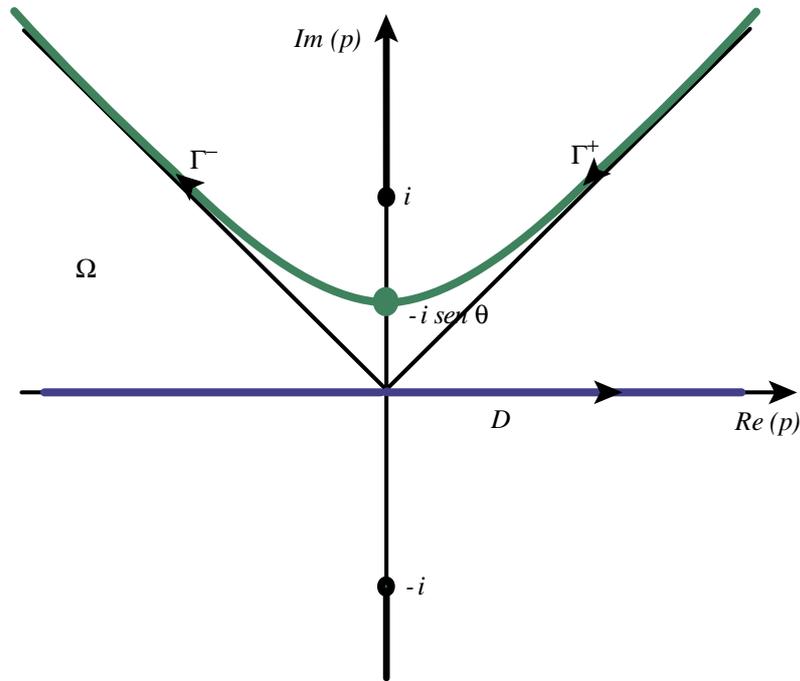


Figura 4.1: Os contornos Γ e D

equação em (4.29) representa o ramo de uma hipérbole, localizado no semi-plano superior $\mathcal{I}m(p) > 0$. Note que essa hipérbole não intercepta os dois cortes de ramo de Ψ . Todas essas informações estão na Figura 4.1.

Observe que, elevando ao quadrado em ambos os lados de (4.28), temos que

$$(1 + p^2) \frac{r^{*2} \cos^2 \theta}{c^2} = t^2 - 2ipt r^* \frac{\text{sen } \theta}{c} - p^2 r^{*2} \frac{\text{sen}^2 \theta}{c^2}.$$

Assim, cada solução p de (4.29) é uma raiz do polinômio de segunda ordem

$$P(t) = p^2 + 2i \frac{ct}{r^*} \text{sen } \theta p + \cos^2 \theta - \frac{c^2 t^2}{r^{*2}}.$$

Calculando as raízes dessa equação em p , temos que

$$p = \frac{1}{2 \frac{r^{*2}}{c^2}} \left(-2itr^* \frac{\text{sen } \theta}{c} \pm \sqrt{-4t^2 r^{*2} \frac{\text{sen}^2 \theta}{c^2} - 4 \frac{r^{*2}}{c^2} \left(\frac{r^{*2} \cos^2 \theta}{c^2} - t^2 \right)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-itr^*(\text{sen } \theta/c)}{(r^*/c)^2} \pm \frac{\sqrt{-t^2 r^{*2} \frac{\text{sen}^2 \theta}{c^2} - \frac{r^{*4} \cos^2 \theta}{c^4} + \frac{r^{*2} t^2}{c^2}}}{\sqrt{(r^*/c)^4}} \\
&= -i \frac{ct}{r^*} \text{sen } \theta \pm \sqrt{-\frac{t^2 c^2 \text{sen}^2 \theta}{r^{*2}} - \cos^2 \theta + \frac{c^2 t^2}{r^{*2}}} \\
&= -i \frac{ct}{r^*} \text{sen } \theta \pm \cos \theta \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1},
\end{aligned}$$

de modo que, para $t \geq \frac{r^*}{c}$, as duas raízes $p = \gamma^\pm(t)$ de P são dadas por (4.29).

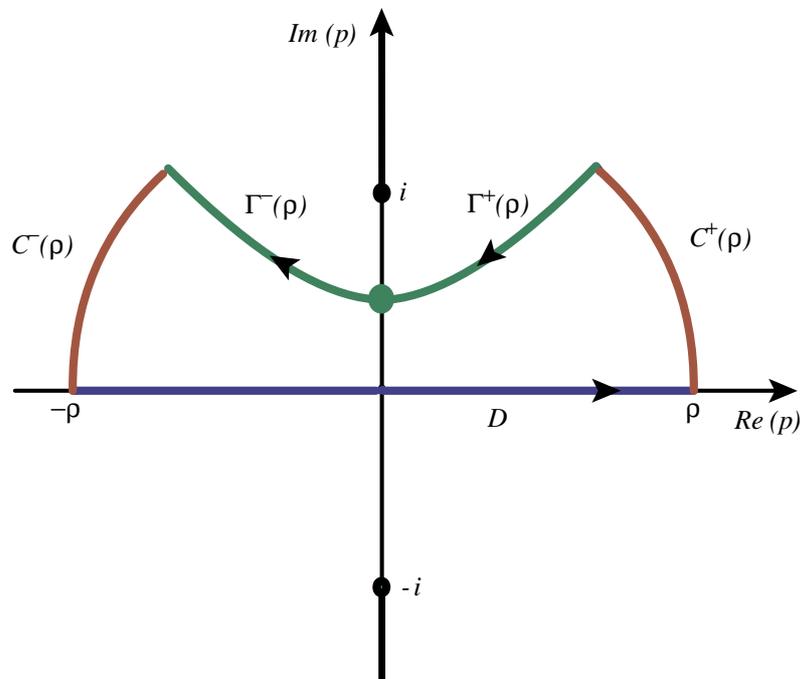


Figura 4.2: O contorno fechado $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$

Denotemos por D a linha real e por Ω a parte do plano complexo delimitada por D e Γ . Seja $\rho > 0$ um parâmetro que está determinado a tender a $+\infty$. Tomemos os conjuntos

$$\begin{cases} D_\rho = \{p \in D / |p| \leq \rho\}, & \Gamma_\rho = \{p \in \Gamma / |p| \leq \rho\}, \\ C_\rho = \{p \in \Omega / |p| = \rho\}. \end{cases}$$

Note que C_ρ é feito de dois arcos do círculo de centro 0 e raio ρ que liga D_ρ a Γ_ρ , de modo que $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$ é uma curva fechada. Como $\Psi(p)$ é analítica em Ω , a

integral de Ψ ao longo de $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$ (escolhemos a orientação desse caminho de modo que o segmento real é descrito no sentido em que os valores crescem - veja a Figura 4.2) é identicamente 0 (Teorema de Cauchy-Goursat):

$$\int_{D_\rho} \Psi(p) dp + \int_{C_\rho} \Psi(p) dp + \int_{\Gamma_\rho} \Psi(p) dp = 0.$$

Devido à escolha do ramo da raiz quadrada, e como $y+h > 0$, a função $\Psi(p)$ satisfaz as hipóteses do lema de Jordan. Conseqüentemente,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{C_\rho} \Psi(p) dp = 0.$$

Assim, fazendo $\rho \rightarrow +\infty$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(p) dp = - \int_{\Gamma} \Psi(p) dp,$$

ou seja,

$$\tilde{u}^r(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} R^N(p, 1) \frac{e^{-s[(1+p^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{y+h}{c}) + ip\frac{x}{c}]} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} dp.$$

Usando a parametrização em (4.28), temos que

$$(1+p^2)^{1/2} r^* \cos \theta = ct - ipr^* \sin \theta,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} (1+p^2)^{1/2} r^* \sin \theta &= ct \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - ipr^* \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \\ &= ct \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - i \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \left(-ict \sin \theta \pm \cos \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}} \right) \\ &= ct \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - ct \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \mp i \sin^2 \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}} \\ &= ct \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (1 - \sin^2 \theta) \mp i \sin^2 \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}} \\ &= ct \sin \theta \cos \theta \mp i \sin^2 \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}. \end{aligned}$$

Note que

$$pr^* \cos \theta = -ict \sin \theta \cos \theta \pm \cos^2 \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} pr^* \cos \theta + ir^* \operatorname{sen} \theta (1 + p^2)^{1/2} &= -ict \operatorname{sen} \theta \cos \theta \pm \cos^2 \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}} \\ &\quad + ict \operatorname{sen} \theta \cos \theta \mp (i)^2 \operatorname{sen}^2 \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}} \\ &= \pm \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}. \end{aligned}$$

Derivando p em relação a t , chegamos a

$$\frac{dp}{dt} \left(r^* \cos \theta + \frac{2p}{2(1 + p^2)^{1/2}} ir^* \operatorname{sen} \theta \right) = \pm \frac{2tc^2}{2(c^2 t^2 - r^{*2})^{1/2}},$$

o que implica que

$$\frac{dp}{dt} \frac{(1 + p^2)^{1/2} r^* \cos \theta + ipr^* \operatorname{sen} \theta}{(1 + p^2)^{1/2}} = \pm \frac{tc^2}{(c^2 t^2 - r^{*2})^{1/2}},$$

ou ainda

$$\frac{dp}{dt} \frac{ct}{(1 + p^2)^{1/2}} = \pm \frac{tc^2}{(c^2 t^2 - r^{*2})^{1/2}}.$$

Por fim, temos

$$\pm \frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{(1 + p^2)} \frac{dp}{dt} = c.$$

Logo, usando as parametrizações $p = \gamma^+(t)$ e $p = \gamma^-(t)$, para $t \geq \frac{r^*(x)}{c}$, ao longo de Γ^+ e Γ^- , respectivamente, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + p^2)^{1/2} \left(\frac{y + h}{c} \right) + ip \frac{x}{c} = t \quad (\text{por construção}) \\ \frac{dp}{(1 + p^2)^{1/2}} = \pm \frac{dt}{(t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2})^{1/2}} \quad \text{sobre } \Gamma^\pm. \end{array} \right.$$

Desde que t vai de $+\infty$ à $\frac{r^*}{c}$ em Γ^+ e de $\frac{r^*}{c}$ à $+\infty$ em Γ^- , temos que

$$\begin{aligned} \tilde{u}^r(x, y, s) &= \frac{1}{4\pi} \int_{+\infty}^{\frac{r^*}{c}} R^N(\gamma^+(t), 1) \frac{e^{-st}}{(t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2})^{1/2}} dt \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{r^*}{c}}^{+\infty} R^N(\gamma^-(t), 1) (-1) \frac{e^{-st}}{(t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2})^{1/2}} dt \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\frac{r^*}{c}}^{+\infty} [R^N(\gamma^+(t), 1) + R^N(\gamma^-(t), 1)] \frac{e^{-st}}{(t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2})^{1/2}} dt \end{aligned}$$

Observe agora que $\gamma^-(t)^2 = \overline{\gamma^+(t)^2}$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \gamma^-(t)^2 &= \left(-i\frac{ct}{r^{*2}} \operatorname{sen} \theta\right)^2 + 2\left(-i\frac{ct}{r^{*2}} \operatorname{sen} \theta\right) \left(-\cos \theta \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1}\right) + \left(-\cos \theta \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1}\right)^2 \\
 &= -\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} \operatorname{sen}^2 \theta + 2i\frac{ct}{r^{*2}} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1} + \cos^2 \theta \left(\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1\right) \\
 &= \frac{c^2 t^2}{r^{*2}} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) - \cos^2 \theta + 2i\frac{ct}{r^{*2}} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1} \\
 &= \overline{\gamma^+(t)^2}.
 \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\sqrt{\bar{z}} = \overline{\sqrt{z}}$, temos que

$$\begin{aligned}
 R^N(\gamma^-(t), 1) &= \left[\frac{1 - (\gamma^-(t)^2 + 1)^{1/2}}{1 + (\gamma^-(t)^2 + 1)^{1/2}} \right]^N \\
 &= \left[\frac{1 - \overline{(\gamma^+(t)^2 + 1)^{1/2}}}{1 + \overline{(\gamma^+(t)^2 + 1)^{1/2}}} \right]^N \\
 &= \left[\frac{1 - \overline{\sqrt{\gamma^+(t)^2 + 1}}}{1 + \overline{\sqrt{\gamma^+(t)^2 + 1}}} \right]^N \\
 &= \overline{R^N(\gamma^+(t), 1)},
 \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
 R^N(\gamma^+(t), 1) + R^N(\gamma^-(t), 1) &= R^N(\gamma^+(t), 1) + \overline{R^N(\gamma^+(t), 1)} \\
 &= 2\operatorname{Re}[R^N(\gamma^+(t), 1)].
 \end{aligned}$$

Logo

$$\tilde{u}^r(x, y, s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{r^*}{c}}^{+\infty} \operatorname{Re}[R^N(\gamma^+(t), 1)] \frac{e^{-st}}{(t^2 - \frac{r^{*2}}{c})^{1/2}} dt. \quad (4.30)$$

Denominemos por $Q_j(\xi, \frac{s}{c})$, $j = 1, \dots, N$, cada um dos termos do produtório em (4.25), e assim, $R^N(\gamma^+(t), 1) = \prod_{j=1}^N Q_j(\gamma^+(t), 1)$. Façamos $Q_j = Q_j(\gamma^+(t), 1) = \varphi_j(t)e^{i\phi_j(t)}$. Assim

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=1}^N Q_j &= \prod_{j=1}^N \varphi_j(t)e^{i\phi_j(t)} \\
 &= \left(\prod_{j=1}^N \varphi_j(t) \right) \left(\prod_{j=1}^N e^{i\phi_j(t)} \right) \\
 &= \left(\prod_{j=1}^N \varphi_j(t) \right) (e^{i\phi_1(t)} e^{i\phi_2(t)} \dots e^{i\phi_N(t)}) \\
 &= \left(\prod_{j=1}^N \varphi_j(t) \right) e^{i(\sum_{j=1}^N \phi_j(t))}
 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Temos que

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{\cos \alpha_j - \sqrt{\gamma^+(t)^2 + 1}}{\cos \alpha_j + \sqrt{\gamma^+(t)^2 + 1}} \\ &= \frac{r^* \cos \alpha_j - ct \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{r^* \cos \alpha_j + ct \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Q_j) &= \frac{r^{*2} \cos^2 \alpha_j - c^2 t^2 \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta (c^2 t^2 - r^{*2})}{r^{*2} \cos^2 \alpha_j + 2r^* ct \cos \theta \cos \alpha_j + c^2 t^2 \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta (c^2 t^2 - r^{*2})} \\ &= \frac{r^{*2} \cos^2 \alpha_j - c^2 t^2 + r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta}{r^{*2} \cos^2 \alpha_j (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + 2r^* ct \cos \theta \cos \alpha_j + c^2 t^2 - r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta (\cos^2 \alpha_j + \operatorname{sen}^2 \alpha_j)} \\ &= \frac{r^{*2} \cos^2 \alpha_j - c^2 t^2 + r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta}{r^{*2} \cos^2 \alpha_j \cos^2 \theta + 2r^* ct \cos \theta \cos \alpha_j + c^2 t^2 - r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \alpha_j} \\ &= \frac{r^{*2} \cos^2 \alpha_j - c^2 t^2 + r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta}{a_j^2 + 2cta_j + c^2 t^2 - b_j^2} \\ &= \frac{r^{*2} \cos^2 \alpha_j - c^2 t^2 + r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta}{(ct + a_j)^2 - b_j^2}, \end{aligned}$$

e com mais algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Q_j) &= \frac{r^{*2} \cos^2 \alpha_j - c^2 t^2 + r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{(ct + a_j)^2 - b_j^2} \sqrt{(ct + a_j)^2 - b_j^2}} \frac{\sqrt{(ct - a_j)^2 - b_j^2}}{\sqrt{(ct - a_j)^2 - b_j^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(ct - a_j)^2 - b_j^2}}{\sqrt{(ct + a_j)^2 - b_j^2}} \frac{r^{*2} \cos^2 \alpha_j - c^2 t^2 + r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{((ct - a_j)^2 - b_j^2)((ct + a_j)^2 - b_j^2)}}, \end{aligned}$$

com a_j, b_j dados por (4.12) e (4.13), respectivamente. Dos cálculos acima temos então que

$$\begin{cases} \varphi_j(t) = \sqrt{\frac{(ct - a_j)^2 - b_j^2}{(ct + a_j)^2 - b_j^2}} \\ \cos \phi_j(t) = \frac{r^{*2} \cos^2 \alpha_j - c^2 t^2 + r^{*2} \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{((ct - a_j)^2 - b_j^2)((ct + a_j)^2 - b_j^2)}}. \end{cases} \quad (4.32)$$

Desde que

$$\prod_{j=1}^N \varphi_j(t) = \sqrt{\prod_{j=1}^N \frac{(ct - a_j)^2 - b_j^2}{(ct + a_j)^2 - b_j^2}},$$

por (4.31), (4.32) e (4.30), concluímos a demonstração. \square

Observe que a função $G_i(x, y, t)$ não depende do parâmetro N , sendo a restrição da solução fundamental da equação da onda bidimensional no espaço todo para \mathbb{R}_+^2 . Chamamos $G_i(x, y, t)$ de *campo incidente*. Por outro lado, a função G_r^N , devido à presença da fronteira Γ , é chamado *campo refletido*, a qual depende do parâmetro N .

A presença do fator $H(ct-r^*)$ indica que o campo refletido $G_r^N(., t)$ tem suporte compacto no conjunto $\Omega(t) = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$, conforme definição 4.45.

4.2 Estimativas do erro

Considere agora a aproximação, no semi-plano superior, da solução $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ do problema

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \delta(x) \times \delta(y-h) \times f(t), & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.33)$$

onde assumimos que o termo fonte $f(t)$ é suave, limitado, e tem suporte em $[0, T]$, pela solução $u^N : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ do problema

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} - \Delta u^N = \delta(x) \times \delta(y-h) \times f(t), & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{B}^N u^N = 0, & \text{sobre } \Upsilon, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.34)$$

O termo h corresponde ao ponto de origem $(0, h)$, com $h > 0$, dado na seção anterior, no problema (4.4). Queremos agora estimar o erro, isto é, a diferença da solução do PVI (4.33) e da solução do PVIC aproximado (4.34). Para isso, utilizaremos o seguinte resultado [7]:

Lema 4.1. *Para t, y fixados, o máximo de $|\cos(\psi(x, y, t))\rho(x, y, t)|$ ocorre em $x = 0$.*

Logo

$$\max_x |\cos(\psi(x, y, t))\rho(x, y, t)| = |\cos(\psi(0, y, t))\rho(0, y, t)| = \prod_{j=1}^N \left(\frac{ct - \cos \alpha_j(y+h)}{ct + \cos \alpha_j(y+h)} \right)$$

Prova. Primeiramente,

$$\max_x |\cos(\psi(x, y, t))\rho(x, y, t)| \leq \max_x |\cos(\psi(x, y, t))| \max_x |\rho(x, y, t)|.$$

Afirmamos que a igualdade acima vale com o máximo atingido em $x = 0$, isto é, afirmamos que $\max_x |\cos(\psi)|$ e $\max_x |\rho|$ são ambos obtidos em $x = 0$.

Começamos por $\max_x |\cos(\psi)|$. Considerando (4.9) e (4.11), temos que, em $x = 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{r^{*2} - c^2 t^2 + r^{*2} \cos^2 \alpha_j - (y + h)^2}{\sqrt{((ct - a_j)^2 - b_j^2)((ct + a_j)^2 - b_j^2)}} \\ &= \frac{-(c^2 t^2 - \cos^2 \alpha_j (y + h)^2) + x^2 (1 + \cos^2 \alpha_j)}{\sqrt{(c^2 t^2 - \cos^2 \alpha_j (y + h)^2)^2 - 2x^2 \sin^2 \alpha_j (c^2 t^2 + \cos^2 \alpha_j (y + h)^2) + x^4 \sin^4 \alpha_j}} = -1 \end{aligned}$$

Assim, $\psi_j = \arccos(-1) = \pi$, e por conseqüência, $\psi = m\pi$ e $|\cos(\psi)| = 1$ em $x = 0$.

Agora, considere $\max_x |\rho|$. Considere (4.9) e (4.10), de modo que

$$\frac{(ct - a_j)^2 - b_j^2}{(ct + a_j)^2 - b_j^2} = \frac{(ct - \cos \alpha_j (y + h))^2 - x^2 \sin^2 \alpha_j}{(ct + \cos \alpha_j (y + h))^2 - x^2 \sin^2 \alpha_j}.$$

Por simplicidade, denominamos $\beta = x^2$ e reescrevemos ρ_j como

$$\frac{(ct - \cos \alpha_j (y + h))^2 - \beta \sin^2 \alpha_j}{(ct + \cos \alpha_j (y + h))^2 - \beta \sin^2 \alpha_j}.$$

Assim, temos

$$\frac{d\rho_j}{d\beta} = -\frac{4ct \cos \alpha_j \sin^2 \alpha_j (y + h)}{((ct + \cos \alpha_j (y + h))^2 - \beta \sin^2 \alpha_j)^2} \leq 0,$$

com igualdade se $\cos \alpha_j = 1$ (ou $\sin \alpha_j = 0$). Assim, temos que, para todo $1 \leq j \leq m$, a função $x^2 \mapsto \rho_j$ é decrescente, e o máximo de ρ acontece também em $x = 0$, e segue o resultado. \square

O teorema a seguir foi demonstrado em [9] para as condições de contorno de Engquist e Majda (3.23). Aqui, o faremos para as condições de contorno de Higdon (3.105).

Teorema 4.2. Para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, temos as estimativas pontuais:

$$|u(x, y, t) - u^N(x, y, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \rho(x, y, t) \log \left(\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{r^*} \right) \|f\|_{L^\infty}, \quad (4.35)$$

para $\frac{r^*}{c} \leq t \leq \frac{r^*}{c} + T$ ($\Leftrightarrow (x, y) \in \Omega_1(t)$ - veja definição (4.45)), e

$$|u(x, y, t) - u^N(x, y, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \rho(x, y, t) \log \left(\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{c(t - T) + \sqrt{c^2 (t - T)^2 - r^{*2}}} \right) \|f\|_{L^\infty} \quad (4.36)$$

para $t > \frac{r^*}{c} + T$ ($\Leftrightarrow (x, y) \in \Omega_2(t)$ - veja definição (4.45)).

Além disso, temos as estimativas uniformes:

$$\|(u - u^N)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} \leq \frac{1}{2\pi} \prod_{j=1}^N \left(\frac{ct - \cos \alpha_j (y + h)}{ct + \cos \alpha_j (y + h)} \right) \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - (h/c)^2}}{(h/c)} \right) \|f\|_{L^\infty} \quad (4.37)$$

para $\frac{h}{c} \leq t \leq \frac{h}{c} + T$, e

$$\|(u - u^N)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} \leq \frac{1}{2\pi} \prod_{j=1}^N \left(\frac{ct - \cos \alpha_j (y + h)}{ct + \cos \alpha_j (y + h)} \right) \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - (t - T)^2}}{t - T} \right) \|f\|_{L^\infty} \quad (4.38)$$

para $t > \frac{h}{c} + T$.

Prova. Sejam u e u^N as respectivas soluções de (4.33) e (4.34). Introduzimos o erro e^N definido por:

$$e^N = u^N - u. \quad (4.39)$$

Para as estimativas pontuais (4.33) e (4.34), fixamos $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ e sejam r^* e θ , conforme (4.5) e (4.6). Pelas propriedades da função de Green, e^N pode ser calculado por uma convolução no tempo entre G_r^N e o termo fonte f :

$$e^N(x, y, t) = G_r^N(x, y, t) * f(t) = \int_0^\infty G_r^N(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Pela presença da função de Heaviside em G_r^N , temos que $e^N(x, y, t) = 0$ para $t \leq r^*/c$. Desde que f tem suporte compacto em $[0, T]$, e G_r^N se anula para $t < r^*/c$,

temos que

$$e^N(x, y, t) = \int_{\max(\frac{r^*}{c}, t-T)}^t G_r^N(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, \quad t \geq \frac{r^*}{c}. \quad (4.40)$$

Observe que $t - \tau < T$ implica que $\tau > t - T$. Observe também que, se $\max(\frac{r^*}{c}, t - T) = \frac{r^*}{c}$, então $t - T \leq \frac{r^*}{c}$, ou ainda, $\frac{r^*}{c} \leq t \leq \frac{r^*}{c} + T$. Se $\max(\frac{r^*}{c}, t - T) = t - T$, então $\frac{r^*}{c} \leq t - T$, ou seja, $t \geq \frac{r^*}{c} + T$. Além disso, se $\frac{r^*}{c} \leq t \leq \frac{r^*}{c} + T$, então $t < T$, e a melhor estimativa uniforme para $f(t)$ está em $(0, t)$. Se $t \geq \frac{r^*}{c} + T$, então $t > T$, e a melhor estimativa uniforme para $f(t)$ está em $(0, T)$. Assim, deduzimos que

$$\begin{cases} |e^N(x, y, t)| \leq \|f\|_{L^\infty(0,t)} \cdot \|G_r^N(x, y, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)}, & \text{se } \frac{r^*}{c} \leq t \leq \frac{r^*}{c} + T, \\ |e^N(x, y, t)| \leq \|f\|_{L^\infty(0,T)} \cdot \|G_r^N(x, y, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)}, & \text{se } t \geq \frac{r^*}{c} + T. \end{cases} \quad (4.41)$$

Agora, queremos obter uma estimativa na norma L^1 , no tempo, de $G_r^N(x, y, \cdot)$. Afirmamos agora que a função $ct \mapsto \rho_j$ é crescente para $t \geq \frac{r^*}{c}$, para todo $1 \leq j \leq m$, e por conseqüência, a função $ct \mapsto \rho$ é crescente para $t \geq \frac{r^*}{c}$. De fato, denominando $ct = \mu$,

$$\frac{d\rho_j}{d\mu} = \frac{4 \cos \alpha_j (y+h)(\mu^2 - (y+h)^2) + 4 \cos \alpha_j \sin^2 \alpha_j (y+h)((y+h)^2 + x^2)}{((\mu + \cos \alpha_j (y+h))^2 - x^2 \sin^2 \alpha_j)^2} \geq 0,$$

desde que $ct > r^* \geq r^* \cos \theta$, e assim $\mu^2 - (y+h)^2 = (ct - (y+h))(ct + (y+h)) > 0$.

Usando esse fato, e que

$$|G_r^N(x, y, t)| \leq \frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}}} |\rho(x, y, t) \cos(\psi(x, y, t))|, \quad (4.42)$$

temos que

$$\begin{aligned} \|G_r^N(x, y, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{r^*}{c}}^t \frac{1}{\sqrt{\tau - \frac{r^{*2}}{c^2}}} \max_{\frac{r^*}{c} \leq \tau \leq t} |\rho(x, y, \tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \rho(x, y, t) \int_{\frac{r^*}{c}}^t \frac{1}{\sqrt{\tau - \frac{r^{*2}}{c^2}}} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \rho(x, y, t) \log \left(\tau + \sqrt{\tau^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}} \right) \Big|_{\frac{r^*}{c}}^t \\ &= \frac{1}{2\pi} \rho(x, y, t) \log \left(\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{r^*} \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

enquanto que, para $t > \frac{r^*}{c} + T$,

$$\begin{aligned} \|G_r^N(x, y, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} &\leq \frac{1}{2\pi} \rho(x, y, t) \int_{t-T}^t \frac{1}{\sqrt{\tau - \frac{r^{*2}}{c^2}}} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \rho(x, y, t) \log \left(\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{c(t-T) + \sqrt{c^2 (t-T)^2 - r^{*2}}} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Assim, usando (4.41), (4.43) e (4.44), obtemos as estimativas (4.35) e (4.36).

Para provar as estimativas uniformes (4.37) e (4.38), introduzimos dois conjuntos disjuntos:

$$\begin{cases} \Omega_1(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / c(t-T) < r^* \leq ct\} \\ \Omega_2(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / r^* \leq c(t-T)\}. \end{cases} \quad (4.45)$$

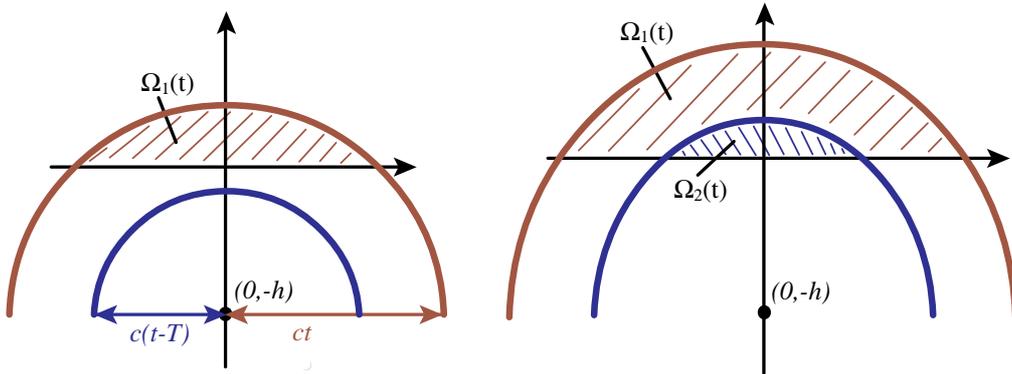


Figura 4.3: Os conjuntos $\Omega_1(t)$, para $\frac{h}{c} \leq t \leq \frac{h}{c} + T$, e $\Omega_1(t)$ e $\Omega_2(t)$, para $t \geq \frac{h}{c} + T$.

Esses dois conjuntos estão representados na Figura 4.3, para dois valores de t . Note que, em $\Omega_1(t)$, $c(t-T) < h \leq r^* \leq ct$, o que implica que $\frac{h}{c} \leq t < \frac{h}{c} + T$, enquanto que em $\Omega_2(t)$, $h \leq r^* \leq c(t-T)$, o que implica que $t \geq \frac{h}{c} + T$. O conjunto $\Omega(t) = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$ representa o suporte do campo refletido no tempo t . Observe que $\Omega_1(t)$ é não-vazio assim que $t > \frac{h}{c}$, enquanto que $\Omega_2(t)$ é não-vazio assim que $t > \frac{h}{c} + T$. Procuramos agora majorar as quantidades

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_1(t)} |e^N(x, y, t)|, \quad \text{para } \frac{h}{c} + T > t > \frac{h}{c}$$

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)} |e^N(x, y, t)|, \quad \text{para } t > \frac{h}{c} + T.$$

Como

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)} |e^N(x, y, t)| = \max \left(\sup_{(x,y) \in \Omega_1(t)} |e^N(x, y, t)|; \sup_{(x,y) \in \Omega_2(t)} |e^N(x, y, t)| \right),$$

é equivalente majorar as quantidades

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_1(t)} |e^N(x, y, t)|, \quad \text{para } t > \frac{h}{c}$$

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_2(t)} |e^N(x, y, t)|, \quad \text{para } t > \frac{h}{c} + T.$$

De acordo com (4.41), a fim de obter uma estimativa de $e^N(\cdot, t)$ na norma L^∞ , precisamos um limite superior para as quantidades

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_1(t)} \|G_r^N(x, y, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} \quad \text{quando } t > \frac{h}{c},$$

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_2(t)} \|G_r^N(x, y, \cdot)\|_{L^1(t-T)} \quad \text{quando } t > \frac{h}{c} + T.$$

Ponhamos agora

$$r_1^*(t) = \min_{(x,y) \in \Omega_1(t)} r^*(x, y),$$

e como a função

$$\varphi_1 : r \mapsto \frac{ct}{r} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad \text{para } r \in [0, ct]$$

é decrescente, temos que

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_1(t)} \log \left| \frac{ct}{r^*} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1} \right| = \log \left| \frac{ct}{r_1^*(t)} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r_1^*(t)^2} - 1} \right|.$$

Ponhamos agora

$$r_2^*(t) = \max_{(x,y) \in \Omega_2(t)} r^*(x, y).$$

Afirmamos que a função

$$\varphi_2 : r \mapsto \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^2}}, \quad \text{para } r \in [0, c(t-T)], \quad (t > T),$$

é crescente, pois

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{rc \left[t\sqrt{c^2t^2 - r^2} + (t-T)\sqrt{c^2(t-T)^2 - r^2} + 2ctT - cT^2 \right]}{(c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^2})^2 \sqrt{c^2t^2 - r^2} \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^2}} \\ &> \frac{rc \left[T\sqrt{c^2(t-T)^2 - r^2} + 2cT^2 - cT^2 \right]}{(c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^2})^2 \sqrt{c^2t^2 - r^2} \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^2}} > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_2(t)} \log \left| \frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - r^{*2}}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^{*2}}} \right| = \log \left| \frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - r_2^*(t)^2}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r_2^*(t)^2}} \right|.$$

Observando a Figura 4.3, podemos ver que

$$\begin{cases} r_1^*(t) = h, & \text{se } \frac{h}{c} \leq t < \frac{h}{c} + T, \\ r_1^*(t) = c(t-T), & \text{se } t \geq \frac{h}{c} + T, \end{cases}$$

e que

$$r_2^*(t) = c(t-T), \quad \text{se } t \geq \frac{h}{c} + T.$$

Por conseguinte,

$$\begin{cases} \sup_{(x,y) \in \Omega_1(t)} \log \left| \frac{ct}{r^*} + \sqrt{\frac{c^2t^2}{r^{*2}} - 1} \right| = \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - (h/c)^2}}{(h/c)} \right), & \text{se } \frac{h}{c} \leq t < \frac{h}{c} + T, \\ \sup_{(x,y) \in \Omega_1(t)} \log \left| \frac{ct}{r^*} + \sqrt{\frac{c^2t^2}{r^{*2}} - 1} \right| = \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - (t-T)^2}}{t-T} \right), & \text{se } t \geq \frac{h}{c} + T, \end{cases}$$

e

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_2(t)} \log \left| \frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - r^{*2}}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^{*2}}} \right| = \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - (t-T)^2}}{t-T} \right), \quad \text{se } t \geq \frac{h}{c} + T.$$

Ponhamos

$$\gamma = \gamma(x, y, t) = \cos(\psi(x, y, t))\rho(x, y, t),$$

e assim, por (4.42), temos que

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_1(t)} \|G_r^N(x, y, \cdot)\|_{L^1(r^*, t)} \leq \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - (h/c)^2}}{(h/c)} \right) \max_{(x,y) \in \Omega_1(t)} |\gamma|, \quad \text{se } t > \frac{h}{c},$$

e

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_2(t)} \|G_r^{LN}(x, y, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} \leq \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - (t-T)^2}}{t-T} \right) \max_{(x,y) \in \Omega_2(t)} |\gamma|, \text{ se } t > \frac{h}{c} + T$$

Usando essas últimas duas desigualdades acima, pelo lema 4.1 e por (4.41), temos a conclusão desejada. \square

Observe que o erro converge para 0, na norma uniforme, quando $N \rightarrow \infty$. Observando o comportamento do erro para t grande, se assumirmos que $T < +\infty$, afirmamos que, para t grande, o termo produtório que aparece na estimativa (4.38) comporta-se como 1, e o termo logarítmico comporta-se como $\sqrt{T/(2t-T)}$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - (t-T)^2}}{t-T} \right) &= \log \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \sqrt{t^2 - (t-T)^2}}{t-T} \right) \\ &= \log \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \sqrt{T}\sqrt{2t-T}}{t-T} \right) \\ &= \log \left(1 + \sqrt{\frac{T}{2t-T}} \right). \end{aligned}$$

Desde que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{para } |x| \leq 1, x \neq -1,$$

temos que

$$\log \left(1 + \sqrt{\frac{T}{2t-T}} \right) \sim \sqrt{\frac{T}{2t-T}},$$

o que mostra que, para todo N e h , o erro converge uniformemente para 0 quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, quando $T = +\infty$, o lado direito da estimativa (4.37) comporta-se como

$$\frac{1}{2\pi} \log t,$$

pois

$$\frac{t + \sqrt{t^2 - (h/c)^2}}{(h/c)} \sim \frac{2t}{(h/c)} \sim t,$$

para t grande, o que mostra um crescimento logarítmico sobre o erro quando $t \rightarrow \infty$. Isso é o que acontece se $f(t)$ for, por exemplo, a função de Heaviside.

Apresentamos aqui a análise de erro fornecida em [9] para a aproximação da solução do problema (4.33) pela solução do problema (4.34), associado a um termo fonte pontual. Segundo Diaz e Joly, não seria complicado adaptar a prova do teorema 4.2 para o caso de um termo fonte distribucional, ou a dados iniciais u_0 e u_1 não-nulos. Apresentamos também estimativas na norma L^∞ , mas, no entanto, seria possível adaptar a prova a fim de conseguirmos estimativas L^p ou estimativas de energia.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Apresentamos, formalmente, uma revisão bibliográfica sobre os métodos utilizados por Engquist e Majda [12] e Higdon [32], para a construção de condições de contorno capazes de absorver as reflexões causadas pela imposição de uma fronteira artificial num domínio infinito, em problemas de propagação de ondas. Além disso, apresentamos uma forma geral de representação para as condições de contorno absorventes [36], e a teoria das aproximações racionais [50] para a raiz quadrada presente no operador pseudo-diferencial das condições de contorno exatas de alta absorção. O intuito é que, a partir dessas idéias, possamos elucidar a formulação de novas condições de contorno, melhorando aspectos como facilidade de implementação e custo computacional.

Como apontado em [7, 27], temos que o controle sobre o erro gerado pelos modos evanescentes torna-se essencial quando deseja-se truncar o domínio ao máximo, de forma a reduzir o custo computacional de simulação. Tal fato não é evidente nos resultados apresentados por Higdon, que analisa essencialmente o coeficiente de reflexão gerado pelos modos propagativos da solução. As condições de contorno de Engquist e Majda são um caso particular das condições de contorno de Higdon, onde $\alpha_j = 0$, para todo $1 \leq j \leq N$. Recentemente, foi apresentado em [28] uma nova classe de condições de contorno, capazes de controlar os modos evanescentes de forma mais efetiva, sem ignorar a necessidade de controle sobre os modos propagativos e tangenciais. Porém, a exemplo das condições de contorno de Higdon, o erro gerado pelas condições apresentadas por Hagstrom depende de certos parâmetros, relacionados com os ângulos de perfeita absorção. Ainda não é claro qual seria a escolha ótima de tais parâmetros. Discussões sobre a escolha desses parâmetros podem ser vistas em [7, 36].

Apresentamos também a fórmula de Diaz e Joly [9] para o problema associado à equação da onda bidimensional no meio-plano $y \geq 0$, com condições de contorno de Higdon. A partir desta fórmula, é possível obter estimativas, pontuais e uniformes, para o erro gerado para tais condições de contorno, tanto para os modos propagativos, como para os modos evanescentes. Tal fórmula permitiu um melhor entendimento na escolha dos parâmetros α_j , e destacou a importância dos modos evanescentes no erro gerado pela condição de contorno aproximada. É possível estender esse método para a obtenção de soluções explícitas da solução fundamental de outros problemas hiperbólicos. Em [10], Diaz e Joly apresentam uma formulação semelhante para problemas associados à equação da onda com PML's. Num trabalho futuro, pretendemos formalizar a solução fundamental obtida por Diaz e Joly, através da teoria das distribuições [41].

Apêndice A

A.1 Notações e Resultados Úteis

Definição A.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. O espaço L^p , $1 \leq p < \infty$, é definido por*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mensurável} / \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\},$$

e sua norma é definida por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço L^∞ é definido por

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mensurável} / \sup \text{ess } |f| < \infty\},$$

onde $\sup \text{ess } f = \inf\{c \in \mathbb{R} / |\{x \in \Omega / f(x) > c\}| = 0\}$. A norma é definida por

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup \text{ess } |f|.$$

Definição A.2. *Definimos a transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pela expressão*

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} f(x) dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.1})$$

e a sua transformada de Fourier inversa pela expressão

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} \hat{f}(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.2})$$

Desde que $|e^{\pm ix \cdot y}| = 1$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, essas integrais convergem para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.1. [**Teorema de Plancherel**]: *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier \hat{T}_f de T_f é definida pela função $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é,*

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}} \quad \text{com } \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

e

$$\|\hat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|. \quad (\text{A.3})$$

Definição A.3. Em vista da igualdade (A.3), podemos definir a transformada de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Escolhemos uma seqüência $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ com

$$f_k \longrightarrow f \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

De acordo com (A.3), $\|\hat{f}_k - \hat{f}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f_k - f_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_k - f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, e assim $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Essa seqüência conseqüentemente converge para um limite, o qual definimos para ser \hat{f} :

$$\hat{f}_k \longrightarrow \hat{f} \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Teorema A.2. Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$\widehat{D^\alpha f} = (iy)^\alpha \hat{f},$$

para todo multi-índice α , tal que $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, onde $D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

As definições e as demonstrações dos teoremas acima podem ser encontrados em [14]. As definições seguintes, de símbolo de um operador e operador pseudo-diferencial, podem ser encontradas em [45].

Definição A.4. Assumindo $\rho, \delta \in [0, 1]$, $m \in \mathbb{R}$, definimos $S_{\rho, \delta}^m$ a classe das funções $a(x, \xi) \in C^\infty$ satisfazendo

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|},$$

para todo índice α, β , onde $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$. Dizemos que $a(x, \xi)$ é o símbolo de $a(x, D)$.

Definição A.5. Um operador pseudo-diferencial é um mapeamento $f \longrightarrow Tf$ definido por

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

para toda $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy$$

é a transformada de Fourier de f , e onde $a(x, \xi)$ é o símbolo de T .

No caso especial, onde

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

é um operador diferencial, e onde $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$ é a transformada inversa de Fourier, temos que

$$\begin{aligned} a(x, D)f(x) &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha f(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

onde

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

é o símbolo de $a(x, D)$.

As demonstrações dos próximos dois teoremas encontram-se em [56].

Teorema A.3. *Seja $g(t) \in L^2(0, \infty)$. Então a transformada de Laplace unilateral*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(t) e^{-tz} dt \quad (\operatorname{Re}(z) > 0)$$

pertence à chamada classe de Hardy-Lebesgue $H^2(0)$, ou seja, (i) $f(z)$ é holomorfa no meio-plano tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$, (ii) para cada $x > 0$ fixado, $f(x + iy)$ como uma função de y pertence a $L^2(-\infty, \infty)$ de modo que

$$\sup_{x>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x + iy)|^2 dy \right) < \infty.$$

A partir desse teorema podemos enunciar o teorema de Paley-Wiener:

Teorema A.4. [**Teorema de Paley-Wiener**]: Seja $f(z) \in H^2(0)$. Então a função de contorno $f(iy) \in L^2(-\infty, \infty)$ de $f(x + iy)$ existe no sentido que

$$\lim_{x \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(iy) - f(x + iy)|^2 dy = 0$$

de modo que a transformada inversa de Fourier

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(iy) e^{ity} dy$$

desaparece para $t < 0$ e $f(z)$ pode ser obtida como uma transformada de Laplace unilateral de $g(t)$.

As demonstrações dos próximos resultados podem ser encontradas em [40].

Lema A.1. [**Lema de Jordan**]: Suponhamos que

(i) uma função $f(z)$ é analítica para todos os pontos z pertencentes ao meio-plano superior $y \geq 0$ que são exteriores ao círculo $|z| = R_0$;

(ii) C_R denota um semicírculo $z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), onde $R > R_0$;

(iii) para todos os pontos z sobre C_R , existe uma constante positiva M_R tal que $|f(z)| \leq M_R$, onde

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0.$$

Então, para toda constante positiva a ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0. \quad (\text{A.4})$$

Teorema A.5. [**Teorema de Cauchy-Goursat**]: Seja um conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, simplesmente conexo. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, e seja γ um caminho retificável fechado em Ω . Então

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Teorema A.6. [*Teorema da Convergência Dominada*]: Seja $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma seqüência de funções integráveis convergindo quase sempre em Ω , para uma função f , dominadas por uma função g , integrável. Então

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Por dominado, entende-se $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Apêndice B

B.1 Transformada de Fourier-Laplace da solução fundamental da equação da onda 2D

Considere a equação

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda s(x)]y = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (\text{B.1})$$

Assumimos que as soluções da equação homogênea, $u_1(x)$ e $u_2(x)$, são linearmente independentes. Cada solução é escolhida para satisfazer uma das condições de contorno a serem satisfeitas pela solução $y(x)$, isto é, se $y(a) = y'(b) = 0$, então tomamos $u_1(a) = 0$ e $u_2'(b) = 0$. Pelo método da variação de parâmetros, podemos escrever $y(x)$ como

$$y(x) = A(x)u_1(x) + B(x)u_2(x). \quad (\text{B.2})$$

O método da variação de parâmetros é usualmente aplicado para equações as quais o coeficiente de y'' é igual a 1. Reescrevendo (B.1), temos que

$$y''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}y'(x) + \frac{q(x) + \lambda s(x)}{p(x)}y(x) = \frac{f(x)}{p(x)}.$$

O uso padrão do método de variação de parâmetros nos dá

$$\begin{aligned} A'(x)u_1(x) + B'(x)u_2(x) &= 0 \\ A'(x)u_1'(x) + B'(x)u_2'(x) &= \frac{f(x)}{p(x)}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Assim, por (B.2),

$$0 = y(a) = A(a)u_1(a) + B(a)u_2(a) = B(a)u_2(a) \implies B(a) = 0.$$

Derivando (B.2), temos que

$$y'(x) = A'(x)u_1(x) + A(x)u_1'(x) + B'(x)u_2(x) + B(x)u_2'(x),$$

e assim, por (B.3),

$$0 = y'(b) = A(b)u_1'(b) + B(b)u_2'(b) = A(b)u_1'(b) \implies A(b) = 0.$$

Resolvendo a primeira equação de (B.3) para $A'(x)$, temos que

$$A'(x) = -B'(x) \frac{u_2(x)}{u_1(x)},$$

e a segunda para $B'(x)$, temos que

$$\begin{aligned} -B'(x) \frac{u_2(x)}{u_1(x)} u_1'(x) + B'(x) u_2'(x) &= \frac{f(x)}{p(x)} \\ \implies B'(x) &= \left(\frac{f(x)}{p(x)} \right) \frac{u_1(x)}{u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)} = \frac{f(x) u_1(x)}{p(x) W(x)}, \end{aligned}$$

onde $W(x)$ é o wronskiano, e logo

$$A'(x) = -\frac{f(x) u_2(x)}{p(x) W(x)}.$$

Integrando, temos que

$$\int_x^b A'(s) ds = -\int_x^b \frac{f(s)u_2(s)}{p(s)W(s)} ds \quad \text{e} \quad \int_a^x B'(s) ds = \int_a^x \frac{f(s)u_1(s)}{p(s)W(s)} ds,$$

o que implica que

$$-A(x) = -\int_x^b \frac{f(s)u_2(s)}{p(s)W(s)} ds \quad \text{e} \quad B(x) = \int_a^x \frac{f(s)u_1(s)}{p(s)W(s)} ds$$

O wronskiano para problemas de Sturm-Liouville é dado por $W(x) = c/p(x)$. Assim

$$y(x) = \frac{u_1(x)}{c} \int_x^b f(s)u_2(x) ds + \frac{u_2(x)}{c} \int_a^x f(s)u_1(s) ds. \quad (\text{B.4})$$

Agora, olhemos para o caso específico onde $f(x) = -J\delta(x - x_0)$, onde J pode ser constante ou função de x . Quando essa $f(x)$ é usada em (B.4), somente um dos dois termos será integrado através da função delta, e assim não será nulo. Desta forma,

$$\begin{aligned} y_{<}(x) &= -Ju_1(x) \frac{u_2(x_0)}{c}, \quad \text{para } x < x_0 \\ y_{>}(x) &= -Ju_2(x) \frac{u_1(x_0)}{c}, \quad \text{para } x > x_0, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$y(x) = G(x) = \begin{cases} y_<(x) = -Ju_1(x) \frac{u_2(x_0)}{p(x_0)W(x_0)}, & \text{para } x < x_0 \\ y_>(x) = -Ju_2(x) \frac{u_1(x_0)}{p(x_0)W(x_0)}, & \text{para } x > x_0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Nosso objetivo é resolver a equação

$$\frac{\partial}{\partial y} \hat{G}_i(\xi, y, s) - \left(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) \hat{G}_i(\xi, y, s) = -\delta(y - h), \quad (\text{B.6})$$

com as condições de contorno $\hat{G}_i(\xi, a, s) = \frac{\partial}{\partial y} \hat{G}_i(\xi, b, s) = 0$, com $a \leq y \leq b$. Resolvendo a equação homogênea em (B.6), temos que

$$\hat{G}_i(\xi, y, s) = Ae^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} y} + Be^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} y}.$$

Para $\hat{G}_i(\xi, a, s) = 0$, a única solução que converge quando $a \rightarrow -\infty$ é dada por $u_1(\xi, y, s) = e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} y}$. Para $\hat{G}_i'(\xi, b, s) = 0$, a única solução que converge quando $b \rightarrow \infty$ é dada por $u_2(\xi, y, s) = e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} y}$. Calculando o wronskiano, temos que

$$W(\xi, y, s) = u_1(\xi, y, s) \frac{\partial}{\partial y} u_2(\xi, y, s) - u_2(\xi, y, s) \frac{\partial}{\partial y} u_1(\xi, y, s) = -2\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2}.$$

Tomando $p(x) = 1$ e $J = 1$ em (B.5), temos que

$$\hat{G}_i(\xi, y, s) = \begin{cases} -\frac{e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} y} e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} h}}{-2\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2}}, & \text{para } y < h \\ -\frac{e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} y} e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} h}}{-2\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2}}, & \text{para } y > h, \end{cases}$$

ou seja,

$$\hat{G}_i(\xi, y, s) = \frac{e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2} |y-h|}}{2\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \xi^2}}. \quad (\text{B.7})$$

Todo o raciocínio acima pode ser encontrado em [17].

Bibliografia

- [1] D. Appelö, T. Hagstrom, and G. Kreiss. Perfectly matched layers for hyperbolic systems: General formulation, well-posedness and stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67:1–23, 2006.
- [2] J. P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114:185–200, 1994.
- [3] J. Broeze and J. E. Romate. Absorbing boundary conditions for free surface wave simulation with a panel method. *Journal of Computational Physics*, 99(1):146–158, 1992.
- [4] L. Cagniard. *Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves*. McGraw-Hill, New York, 1962.
- [5] F. Collino and P. Monk. The perfect matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19:2061–2090, 1998.
- [6] E. X. L. de Andrade and C. F. Bracciali. Frações contínuas: propriedades e aplicações. *Notas em Matemática Aplicada, SBMAC*, 20, 2005.
- [7] M. L. de Castro. *Stability of Parabolic Systems on a Half-Space and Theoretical Aspects of Absorbing Boundary Conditions*. PhD thesis, University of New Mexico, 2005.
- [8] J. Diaz. *Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d’ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées*. PhD thesis, L’Université Paris 6, 2005.
- [9] J. Diaz and P. Joly. An analysis of high-order boundary conditions for the wave equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65:1547–1575, 2005.

- [10] J. Diaz and P. Joly. A time domain analysis of PML models in acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:3820–3853, 2006.
- [11] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31(629–651), 1977.
- [12] B. Engquist and A. Majda. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 32(313–357), 1979.
- [13] B. Engquist and A. Majda. Numerical radiation boundary conditions for unsteady transonic flow. *Journal of Computational Physics*, 40:91–103, 1981.
- [14] L. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [15] J. Fang. Absorbing boundary conditions applied to model wave propagation in microwave integrated-circuits. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, 42(8):1506–1513, 1994.
- [16] T. Fevens and H. Jiang. Absorbing boundary conditions for the Schrödinger equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(1):255–282, 1999.
- [17] Jr. G. L. Lamb. *Introductory applications of partial differential equations with emphasis on wave propagation and diffusion*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [18] D. Givoli. High-order nonreflecting boundary conditions without high-order derivatives. *Journal of Computational Physics*, 170:849–870, 2001.
- [19] D. Givoli. High-order local non-reflecting boundary conditions: a review. *Wave Motion*, 39(4):319–326, 2004.

- [20] D. Givoli, T. Hägstrom, and I. Patlashenko. Finite element formulation with high-order absorbing boundary conditions for time-dependent waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:3666–3690, 2006.
- [21] D. Givoli and B. Neta. High-order non-reflecting boundary scheme for time-dependent waves. *Journal of Computational Physics*, 186(1):24–46, 2003.
- [22] D. Givoli and I. Patlashenko. An optimal high-order non-reflecting finite element scheme for wave scattering problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(10):2389–2411, 2002.
- [23] M. J. Grote and J. B. Keller. Nonreflecting boundary conditions for Maxwell’s equations. *Journal of Computational Physics*, 139:327–342, 1998.
- [24] B. Gustafsson, H. O. Kreiss, and A. Sundström. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems, II. *Mathematics of Computation*, 26:649–686, 1972.
- [25] T. Ha-Duong and P. Joly. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods. Part 1: The homogeneous case. *Mathematics of Computation*, 62(206):539–563, 1994.
- [26] T. Hagstrom. Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Acta Numerica*, 8:47–106, 1999.
- [27] T. Hagstrom, M. de Castro, D. Givoli, and D. Tzemach. Local high-order absorbing boundary conditions for time-dependent waves in guides. *Journal of Computational Acoustics*, 15(1):1–22, 2007.
- [28] T. Hagstrom, A. Mar-Or, and D. Givoli. High-order local absorbing conditions for the wave equation: Extensions and improvements. *Journal of Computational Physics*, 227:3322–3357, 2008.

- [29] T. Hagstrom and T. Warburton. A new auxiliary variable formulation of high-order local radiation boundary conditions: corner compatibility conditions and extensions to first-order systems. *Wave Motion*, 39(4):327–338, 2004.
- [30] L. Halpern and L. N. Trefethen. Wide-angle one-way wave-equations. *Journal Of The Acoustical Society Of America*, 84(4):1397–1404, 1988.
- [31] E. Heikkola, T. Rossi, and J. Toivanen. Fast direct solution of the Helmholtz equation with a perfectly matched layer or an absorbing boundary condition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(14):2007–2025, 2003.
- [32] R. L. Higdon. Absorbing boundary-conditions for difference approximations to the multidimensional wave-equation. *Mathematics Of Computation*, 47(176):437–459, 1986.
- [33] R. L. Higdon. Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems. *SIAM Review*, 28:177–217, 1986.
- [34] R. L. Higdon. Numerical absorbing boundary-conditions for the wave-equation. *Mathematics Of Computation*, 49(179):65–90, 1987.
- [35] R. L. Higdon. Radiation boundary-conditions for elastic wave-propagation. *SIAM Journal On Numerical Analysis*, 27(4):831–869, 1990.
- [36] R. L. Higdon. Radiation boundary-conditions for dispersive waves. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(1):64–100, 1994.
- [37] A. T. De Hoop. A modification of Cagniard’s method for solving seismic pulse problems. *Applied Scientific Research, Section B*, 8(1):349–356, 1960.
- [38] H. O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 23:277–298, 1970.

- [39] J. Lighthill. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1978.
- [40] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. international ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- [41] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science, New York, 1991.
- [42] J. C. Strikwerda. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Chapman & Hall, New York, 1989.
- [43] J. Szeftel. Design of absorbing boundary conditions for Schrödinger equation in \mathbb{R}^d . *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(4):1527–1551, 2004.
- [44] J. Szeftel. Absorbing boundary conditions for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Numerische Mathematik*, 104:103–127, 2006.
- [45] M. Taylor. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [46] L. N. Trefethen. Group velocity in finite difference schemes. *SIAM Review*, 24:113–136, 1982.
- [47] L. N. Trefethen. Group velocity interpretation of the stability theory of Gustafsson, Kreiss and Sundström. *Journal of Computational Physics*, 49:119–217, 1983.
- [48] L. N. Trefethen. Instability of difference models for hyperbolic initial boundary value problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37:329–367, 1984.
- [49] L. N. Trefethen. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations. Cornell University. Available at <http://www.comlab.ox.ac.uk/nick.trefethen/pdefront.ps>, 1996.

- [50] L. N. Trefethen and L. Halpern. Well-posedness of one-way wave-equations and absorbing boundary conditions. *Mathematics Of Computation*, 47(176):421–435, 1986.
- [51] E. Turkel and A. Yefet. Absorbing PML boundary layers for wave-like equations. *Applied Numerical Mathematics*, 27:533–557, 1998.
- [52] Portal Universia and MIT-Massachusetts Institute of Technology. Velocidade de grupo. Available at <http://www.universia.com.br/mit>.
- [53] V. van Joolen, D. Givoli, and B. Neta. High-order non-reflecting boundary conditions for dispersive waves in cartesian, cylindrical and spherical coordinate systems. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17:263–274, 2003.
- [54] L. Wagatha. Approximation of pseudodifferential operators in absorbing boundary conditions for hyperbolic equations. *Numerische Mathematik*, 42(1):51–64, 1983.
- [55] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience, New York, 1974.
- [56] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-verlag, Berlin, 6th edition, 1980.