

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - CPGEC

**ANÁLISE VISCOELÁSTICA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E
INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE**

Alexandre Rodrigues Pacheco

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - CPGEC, como parte dos requisitos para a obtenção do título de *Mestre em Engenharia*.

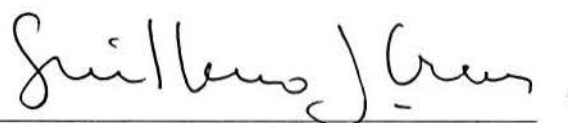
Área de Concentração: Estruturas

Porto Alegre

1996

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título *de Mestre em Engenharia* e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação.

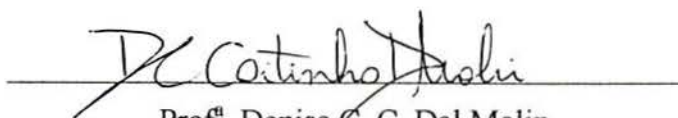
Orientador:



Prof. Guillermo Juan Creus, UFRGS

Banca Examinadora:

- Prof. Guillermo Juan Creus (Presidente), D.Sc. COPPE/UFRJ
- Prof. Marco Túllio de Vilhena, Dr. pelo PROMEC/UFRGS
- Prof. Jorge Daniel Riera, Phd. Univ. of Princeton/USA
- Prof. Armando Miguel Awruch, D.Sc. COPPE/UFRJ
- Prof. João Ricardo Masuero, M.Sc. CPGEC/UFRGS



Prof.^a Denise C. C. Dal Molin

Coordenadora do Curso de Pós-Graduação

Porto Alegre, maio de 1996.

Dedico à minha família

AGRADECIMENTOS

À Prof^a. Denise C. C. Dal Molin, Coordenadora do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, e ao Prof. Jorge Daniel Riera pelo apoio prestado enquanto Coordenador do Curso durante a maior parte do desenvolvimento desta dissertação.

Ao Professor Guillermo Juan Creus pelos ensinamentos e pela valiosa orientação que recebi durante a elaboração do trabalho.

Ao Professor Marco Túllio de Vilhena pela contribuição dada, principalmente na disciplina "Tópicos Especiais em Fenômenos de Transporte: Transformadas Integrais".

Aos colegas: Adair Bianchi, João Kaminski Jr., Moacir Carqueja e Gonzalo Barragán pela amizade, convivência, estímulo, sugestões e observações.

A todos os professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS que de forma direta ou indireta contribuíram para a viabilização do presente trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida e também à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFRGS (PROPESP) pelo auxílio dado para a conclusão desta dissertação.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xi
LISTA DE QUADROS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
1 INTRODUÇÃO	01
1.1 MATERIAIS COMPÓSITOS	01
1.2 COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO	02
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO	03
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	03
1.5 ORGANIZAÇÃO E CONTEÚDO DO TRABALHO	05
2 A TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE	07
2.1 DEFINIÇÃO	07
2.2 FÓRMULAS ELEMENTARES	07
2.3 A TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA: MÉTODOS NUMÉRICOS	11
2.3.1 Definição	11
2.3.2 Método da série trigonométrica	12
2.3.3 Aceleração de convergência de séries: o algoritmo ϵ	13
2.3.4 Método baseado na aceleração de convergência da série de Fourier: método melhorado	15
2.3.5 Método baseado na quadratura de Gauss	16

3 MATERIAIS COMPÓSITOS	18
3.1 CARACTERÍSTICAS BÁSICAS	18
3.2 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS ELÁSTICAS	19
3.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS VISCOELÁSTICAS UNIDIMENSIONAIS	22
3.3.1 Modelos reológicos de Hooke e Newton	23
3.3.2 Modelo reológico de Maxwell	25
3.3.3 Modelo reológico de Kelvin	26
3.3.4 Modelo reológico Standard	27
3.3.5 Modelo reológico de Zener	29
3.3.6 Cadeias Kelvin	30
3.3.6.1 Cadeia com 1 elemento Kelvin	30
3.3.6.2 Cadeia com 2 elementos Kelvin	31
3.3.6.3 Cadeia com 3 elementos Kelvin	32
3.3.6.4 Cadeia com 4 elementos Kelvin	34
3.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS VISCOELÁSTICAS: EXTENSÃO AO CASO TRIDIMENSIONAL	35
3.4.1 O método da correspondência	35
4 SOLUÇÕES VISCOELÁSTICAS SIMPLES	
EMPREGANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE	40
4.1 VIGA VISCOELÁSTICA COM APOIO INTERMEDIÁRIO ELÁSTICO	40
4.2 TUBO VISCOELÁSTICO NA DISTORÇÃO E ELÁSTICO NA DILATAÇÃO	45
4.3 OSCILADOR SIMPLES	53
5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	
E A TRANSFORMADA DE LAPLACE	59
5.1 ANÁLISE QUASI-ESTÁTICA	59
5.2 ANÁLISE DINÂMICA	61
6 HIPÓTESES E PROCEDIMENTOS DO	
MODELO COMPUTACIONAL	64

6.1 HIPÓTESES DO MODELO COMPUTACIONAL	64
6.2 ASPECTOS DA FORMULAÇÃO NUMÉRICA	65
6.3 PRINCIPAIS ETAPAS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL	65
6.4 O MÉTODO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO	67
6.5 FLUXOGRAMA DAS ETAPAS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL	68
7 APLICAÇÕES	71
7.1 VIGA ISÓTROPA VISCOELÁSTICA	71
7.2 LAJE ISÓTROPA VISCOELÁSTICA	72
7.3 PLACA ISÓTROPA SOB CARGA DISTRIBUÍDA	74
7.4 CASCA ISÓTROPA SOB CARGA PUNTUAL	76
7.5 COLISÃO DE PLACAS	78
7.6 PAINEL DE GRAFITE/EPÓXI	85
7.7 CASCA DE GRAFITE/EPÓXI	87
7.8 DISCO DELGADO	88
8 CONCLUSÕES	97
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99
ANEXO A) DIFICULDADES SURGIDAS	102
ANEXO B) MANUAL DE ENTRADA DE DADOS	
DO PROGRAMA PAINEL2	109

LISTA DE FIGURAS

2.1 - A função de Heaviside	08
2.2 - A função delta de Dirac	09
3.1 - Disposição das fibras em uma lâmina	18
3.2 - Uma aplicação para os materiais compósitos	19
3.3 - Componentes de tensão em um elemento infinitesimal	20
3.4 - Direções principais em uma lâmina	21
3.5 - Modelo de Hooke sob tração	24
3.6 - Modelo de Newton sob tração	24
3.7 - Modelo de Maxwell sob tração	25
3.8 - Modelo de Kelvin sob tração	26
3.9 - Modelo Standard sob tração	28
3.10 - Modelo de Zener sob tração	29
3.11 - Cadeia com 1 elemento Kelvin	30
3.12 - Cadeia com 2 elementos Kelvin	31
3.13 - Cadeia com 3 elementos Kelvin	32
3.14 - Cadeia com 4 elementos Kelvin	34
4.1 - Viga com apoio intermediário	40
4.2 - Deflexões da viga conforme o modelo reológico	44
4.3 - Tubo de parede espessa: seção transversal	45
4.4 - Deslocamentos radiais conforme o modelo reológico	49
4.5 - Saída de dados conforme o modelo reológico	52
4.6 - Oscilador simples	53
4.7 - Desempenho do método da quadratura	56
4.8 - Desempenho do método da série trigonométrica	57
4.9 - Desempenho do método da série trigonométrica	58
6.1 - Fluxograma simplificado do programa PAINEL2	69
6.2 - Fluxograma simplificado do programa PAINEL2 (Continuação)	70
7.1 - Viga bi-apoiada de seção transversal retangular	71
7.2- Saída de dados segundo a reologia	72
7.3 - Laje Isótropa viscoelástica	73

7.4 - Discretização da laje	73
7.5 - Deflexões para o centro da laje viscoelástica	75
7.6 - Placa viscoelástica	75
7.7 - Deflexões para o centro da Placa viscoelástica	75
7.8 - Casca esférica viscoelástica	76
7.9 - Discretização da casca esférica	77
7.10 - Modelo reológico para a casca esférica	77
7.11 - Deflexões da casca	78
7.12 - Modelo vibracional	78
7.13 - Colisão de placas	79
7.14 - Deslocamento ao golpe	82
7.15 - Configuração alternativa do problema de colisão	83
7.16 - Discretização do problema de colisão	83
7.17 - Modelo vibracional alternativo	84
7.18 - Saída de resultados	84
7.19 - Painel de grafite/epóxi tracionado	85
7.20 - Cadeias Kelvin nas direções 2-2 e 1-2 das lâminas	86
7.21 - Deformações específicas do painel	87
7.22 - Casca ortótropa viscoelástica	87
7.23 - Deflexões para o centro da casca	88
7.24 - Disco delgado confinado	88
7.25 - Modelo reológico do disco delgado	89
7.26 - Discretização do anel delgado	90
7.27 - Deslocamentos radiais	91
7.28 - Tensões radiais	91
7.29 - Tensões circunferenciais	92
7.30 - Disco delgado livre	92
7.31 - Aproximação do modelo Maxwell	93
7.32 - Deslocamentos radiais	94
7.33 - Modelos dilatacionais e distorcionais	94
A.1 - Modelo Kelvin generalizado de 4 elementos na direção 'ij'	103
A.2 - Placa solicitada segundo a direção 1-1	104

LISTA DE TABELAS

4.1 - Deflexões para o ponto central da viga segundo o modelo Maxwell	43
4.2 - Deflexões para o ponto central da viga segundo o modelo Kelvin	44
4.3 - Deslocamentos radiais segundo o modelo Maxwell	48
4.4 - Deslocamentos radiais segundo modelo Kelvin	48
4.5 - Saída de dados para o modelo Maxwell	51
4.6 - Saída de dados para o modelo Kelvin	51
4.7 - Desempenho dos métodos de inversão	56

LISTA DE QUADROS

4.1- Entrada de dados para a solução numérica da viga viscoelástica	43
4.2 - Entrada de dados para a solução numérica do tubo	47
4.3 - Entrada de dados para o oscilador	55
7.1 - Entrada de dados para a viga viscoelástica	72
7.2 - Entrada de dados para o problema de colisão de placas	82

LISTA DE SÍMBOLOS

\tilde{B}	vetor de operadores diferenciais deslocamentos/deformações
\tilde{C}	matriz tensão-deformação específica do material
\tilde{F}	vetor de cargas nodais
\tilde{K}	matriz de rigidez
\tilde{M}	matriz de massa
\tilde{N}	vetor de funções de interpolação nodais
\tilde{S}	tensor desviador de tensões
\tilde{U}	vetor de deslocamentos
$\tilde{\varepsilon}$	tensor de deformações específicas
$\tilde{\varepsilon}_0$	tensor hidrostático de deformações específicas
$\tilde{\sigma}$	tensor de tensões
$\tilde{\sigma}_0$	tensor hidrostático de tensões
\tilde{e}	tensor desviador de deformações específicas
\tilde{b}	vetor de cargas nodais de volume
\tilde{t}	vetor de cargas nodais de superfície
ε	deformação específica, elemento da tabela épsilon
ε_0	elemento do tensor hidrostático de deformações específicas
$\delta(t)$	função delta de Dirac
γ	abscissa de convergência da transformada de Laplace
η	constante
λ	constante
π	razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência
ν	coeficiente de Poisson
σ_θ	tensão circunferencial
σ_0	elemento do tensor hidrostático de tensões

θ	constante, tempo de retardação
θ_x, θ_y	giros em torno da abscissa 'x' e da ordenada 'y'
τ	limite superior do período de tempo, tensão tangencial, variável de integração
ω	deflexões verticais, parte imaginária de 's', freqüência
ω	freqüência amortecida
ζ	razão de amortecimento
A	área
a, a _i	constantes, coeficientes
A _i	peso do método da quadratura, constantes
b	base ou largura
c	viscosidade
D	operador diferencial linear, função de fluência
E	módulo de Young ou módulo de elasticidade longitudinal, rigidez
f	função genérica
<i>f</i>	transformada de uma função genérica (grafado em itálico)
G	módulo de elasticidade transversal, rigidez
h	altura
H(t)	função de Heaviside
I	momento de inércia estático de uma seção
Im{ }	parte imaginária da quantidade entre chaves
K	módulo de compressibilidade volumétrica, coeficiente de correção, rigidez
k	rigidez
k ₁	rigidez
l	comprimento
L	Operador integral transformada de Laplace
M	inteiro, momento fletor
m	massa
p	carga
P	operador diferencial viscoelástico
p(s)	polinômio em 's' (transformada de Laplace de p(t))
p _i	coeficiente do operador diferencial P, raiz do método da quadratura
Q	operador diferencial viscoelástico, constante
q _i	coeficiente do operador diferencial Q, variáveis de estado
R	constante

r	raio
r_e	raio externo
$\text{Re}\{ \}$	parte real da quantidade entre chaves
r_i	raio interno
s	variável de transformação
s_i	i -ésima raiz do polinômio $p(s)$
S	constante
T	constante
t	tempo
u, v, w	deslocamentos nas direções cartesianas
V	volume
v_0	velocidade no instante zero
x, y, z	coordenadas cartesianas

RESUMO

Este trabalho focaliza a análise viscoelástica de estruturas laminadas em material compósito de matriz polimérica, propondo o emprego de métodos de inversão numérica da transformada de Laplace numa formulação adaptada ao método dos elementos finitos.

Nesta abordagem alternativa, as equações constitutivas viscoelásticas, formuladas no plano complexo da variável de transformação 's', reduzem o problema a uma análise elástica equivalente. As soluções complexas são então retornadas ao plano físico para o valor de tempo desejado, dispensando processos incrementais.

Exemplos de aplicações são executados comparando-se os resultados do Método da Transformada de Laplace com o Método das Variáveis de Estado que trata o problema viscoelástico de forma incremental.

ABSTRACT

The viscoelastic analysis of laminated structures of polymeric matrix composite materials using Laplace transform is the objective of this work. The inverse of the Laplace transform is carried out using numerical methods adapted to a finite element method formulation.

In this alternative approach, as the constitutive equations are formulated on the complex plane in the transformation variable 's', the viscoelastic problem reduces to an equivalent elastic one. The complex solutions are then sent back to the physical plane for the desired time value, dispensing incremental processes.

Examples of applications comparing results obtained with the Laplace Transformation Method and the State Variables Method (that treats the viscoelastic problem in an incremental form) are presented.

1 INTRODUÇÃO

1.1 MATERIAIS COMPÓSITOS

O crescente avanço tecnológico, marcante nas últimas décadas, permite ao profissional em engenharia, ao mesmo tempo em que se exige qualidade e minimização de custos, a realização do aprimoramento das técnicas existentes como também a criação de novos métodos. Hoje, na engenharia de estruturas, projetar não se resume apenas na avaliação das concepções estruturais, mas também o projeto dos materiais passou a ter grande relevância. Neste sentido, os materiais compósitos certamente trouxeram uma grande contribuição, o que se deve principalmente ao ganho obtido na razão resistência/peso em projetos industriais. Desta forma, materiais como o aço e o alumínio, unanimidades em termos de rigidez e resistência mecânica, vêm gradativamente perdendo espaço para a versatilidade e alto desempenho dos materiais compósitos, notadamente nas indústrias automobilística, aeroespacial e, recentemente, na engenharia civil.

A idéia da utilização de dois materiais para a composição de um único que atenda às necessidades de projeto é bastante natural. As próprias árvores são constituídas por fibras de celulose em meio à lignina, dispostas ao longo do tronco e galhos, coincidindo desta forma com as direções principais de tensões. Ainda, o concreto armado mostra-se como um caso particular de material compósito, onde as fibras estão representadas pela armadura.

Consistindo de painéis de fibras com altas características mecânicas, envolvidas por uma matriz, geralmente polimérica, os materiais compósitos permitem a otimização de projetos segundo a determinação da orientação das fibras e do número de painéis a serem superpostos, atendendo desta forma às especificações requeridas. Na fabricação das fibras são empregados materiais com grande rigidez (módulo de Young) e fina rede cristalina como é o caso, por exemplo, do Boro e Carbono. Sob forma de fios de pequeno diâmetro, tais materiais têm aumentada sua resistência mecânica pelo decréscimo na probabilidade de apresentação de fissuras e pela dificuldade em propagá-las entre as fibras, conforme visto por A. A.

Griffith já no início do século em experimentos com vidro. Com relação à matriz, dentre os diversos materiais disponíveis, em geral as resinas sintéticas (epoxídicas, poliéster, etc.) vêm adequadamente desempenhando este papel, suportando, protegendo e transmitindo os esforços atuantes às fibras.

1.2 COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO

Por si só, os painéis de materiais compósitos constituídos de matriz polimérica já justificariam um tratamento viscoelástico na solução de um problema estrutural. No entanto, as condições ambientais como umidade e temperatura proporcionam uma progressiva degradação nas características de resistência mecânica do material polimérico, acentuando ainda mais o seu comportamento viscoelástico.

Da mesma forma que na teoria da elasticidade são correlacionadas as deformações específicas de um corpo com sua distribuição de tensões (relações constitutivas), também em viscoelasticidade necessitamos de leis que correlacionem tais grandezas. Não obstante, em viscoelasticidade, os vetores de tensão e deformação específica não estão acoplados através de operadores biunívocos, mas sim por funcionais que dependem de toda a história do carregamento ou das deformações a que um corpo foi submetido. Logo, é evidenciado claramente um comportamento que conduz à consideração de outra grandeza: o tempo. Assim, a relação um-a-um é observada nos binômios tempo/tensão e tempo/deformação específica. Surge então a dificuldade de se ter que trabalhar, no caso da viscoelasticidade linear, com operadores lineares integrais ou diferenciais.

Com o objetivo de se obter a solução dos sistemas estruturais concebidos, normalmente se tem adotado uma abordagem incremental a qual tem demonstrado eficiência nos resultados. Entretanto sabe-se que, 'a priori', um erro está sendo cometido porque a discretização no tempo resulta num somatório de pequenas discrepâncias que podem, ao final do processo, serem significativas. Ainda, se o intervalo de tempo da análise for relativamente grande e o incremento temporal tiver que ser muito pequeno, a análise do problema exigirá um maior esforço computacional. Este esforço resultará ainda maior se a metodologia de cálculo adotada não atender às freqüentes necessidades de troca do valor incremental da variável independente (Δt variável). Contudo, todo o esforço de máquina poderia ser questionado

se, na análise do problema viscoelástico, a resposta de interesse do sistema fosse somente para um determinado tempo 't', ao invés de todo o histórico de resposta do sistema. Assim, abordagens alternativas para a análise de sistemas estruturais viscoelásticos que viessem a substituir ou, pelo menos, complementar as análises realizadas sob a ótica incremental, já seriam de grande valia.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

O presente trabalho tem como objetivo principal a implementação de uma abordagem viscoelástica alternativa, baseada no Método da Correspondência e na Inversão Numérica da Transformada Integral de Laplace, em um código para análise de estruturas constituídas por painéis viscoelásticos ortótropos planos ou curvos. A eficiência do chamado Método da Transformada de Laplace (MTL), para a análise viscoelástica dos painéis de materiais compósitos, deve ser comparada com o Método das Variáveis de Estado (MVE) que possui uma concepção do tipo incremental. Assim, uma nova versão para o programa PAINEL, implementado por Marques, D.C.S.C. e Marques, S.P.C. (1994), deve ser realizada, fornecendo ao usuário a possibilidade de uso do MTL no cálculo de estruturas laminadas ortótropas. Como objetivo secundário, o presente trabalho visa a avaliação de dois diferentes métodos de inversão numérica de transformadas de Laplace: o método baseado na quadratura de Gauss e o método baseado na aceleração da série de Fourier. O primeiro método de inversão exige um menor esforço computacional, relativamente ao segundo, sendo, desta forma, o método preferido para a realização da nova versão do programa PAINEL. No entanto, segundo a literatura disponível (Davies e Martin, 1979), o método que se baseia na aceleração da série de Fourier possui eficácia numa grande variedade de tipos de funções, justificando sua investigação e implementação para os casos em que o primeiro método venha a falhar. Complementando os objetivos deste trabalho, é almejado ainda a extensão do método empregado no cálculo viscoelástico para o caso de problemas de vibrações estruturais, induzidas por cargas de impacto e com amortecimento viscoso.

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os materiais compósitos começaram a surgir no início da década de 60. Nesta época foram desencadeados os primeiros estudos analíticos e experimentais do comportamen-

to mecânico destes materiais. Ainda, no mesmo período, apareceram os primeiros estudos voltados à caracterização do seu comportamento viscoelástico. Mas foi durante a década de 70, que as investigações experimentais sobre materiais compósitos tiveram um forte impulso e, em paralelo, várias formulações analíticas e numéricas foram propostas. Na maioria dos casos estas formulações somente admitiam comportamento elástico linear, sendo poucos os modelos analíticos que abordavam o comportamento viscoelástico. Contudo, a partir dos anos 80 o progresso na área dos modelos numéricos, especialmente daqueles que utilizam o método dos elementos finitos, foi bastante intenso. Quanto aos modelos numéricos que consideram efeitos viscoelásticos na análise de materiais compósitos, pode-se afirmar que poucos tem sido encontrados na literatura. Raras também são as publicações de resultados experimentais para caracterização do comportamento viscoelástico destes materiais (Marques, 1994).

Quanto aos métodos de inversão numérica da transformada de Laplace, observa-se que os melhores são aqueles baseados na integração numérica da integral de Bromwich (integração da expressão que define a transformada de Laplace inversa), ou na expansão da função original numa série de funções ortogonais (Bellman, Kalaba e Locket, 1966). A avaliação dos diversos métodos numéricos disponíveis para a inversão da transformada de Laplace foi realizada no trabalho publicado por Davies e Martin (1979). Neste trabalho foi testada uma variedade de métodos sobre um conjunto representativo de dezesseis funções no plano transformado, cujas expressões inversas eram conhecidas. Foi concluído que um dos mais eficientes métodos era baseado na aceleração de convergência de uma série de Fourier. Inversões numéricas da Transformada de Laplace através do uso das aproximações por séries de Fourier foram primeiramente usadas por Dubner e Abate (1968), cuja expressão era em termos da série cosseno de Fourier. O método de Dubner e Abate, apesar de muito eficiente, apresentava alguns inconvenientes como o de possuir um domínio limitado. Além disso, o erro cometido na aproximação crescia exponencialmente com o valor temporal requerido na análise. Porém, este método foi consideravelmente melhorado por Durbin (1973) ao adicionar à expressão de Dubner e Abate a série seno de Fourier, eliminando o termo que crescia exponencialmente com o tempo no erro cometido. Ainda, o método melhorado de Durbin expandiu consideravelmente o domínio da variável independente no plano físico. A necessidade da aceleração da convergência destas séries foi mostrada por Crump (1976), utilizando o algoritmo épsilon devido a Wynn (1967), e também por De Hoog, Knight e Stokes (1982) que melhoraram este algoritmo ao trabalhar com termos complexos. Hönig e Hirdes (1988) avaliaram outros métodos de aceleração, concluindo que o desempenho dependia grandemente

do comportamento da função avaliada, e desenvolveram algoritmos que faziam a escolha dos parâmetros livres na expressão para a inversa de forma a minimizar os erros de truncamento e discretização. Piessens e Huysmans (1984), utilizaram apenas fórmulas empíricas para a determinação destes parâmetros livres.

Heydarian, Mullineux e Reed (1981), obtiveram grande desempenho e facilidade de implementação da inversão de equações diferenciais conduzidas ao plano transformado provenientes de equações diferenciais parciais parabólicas, utilizando o método baseado na quadratura de Gauss. Para este tipo de abordagem, Stroud e Secrest (1966), calcularam um grande conjunto de raízes e pesos complexos a serem utilizados, de forma que se pudesse escolher a quantidade de parcelas adequadas para a inversão requerida. No entanto, não obstante a possibilidade de emprego de um número maior de termos na série, Heydarian, Mullineux e Reed, preferiram utilizar somente oito parcelas, alcançando resultados satisfatórios.

Na solução de problemas viscoelásticos, Flügge (1967) utiliza a Transformada de Laplace juntamente com o Método da Correspondência mostrando sua aplicabilidade e resolvendo problemas simples de forma analítica. Neves, Mansur e Telles (1988), alargaram consideravelmente os horizontes deste procedimento ao empregá-lo conjuntamente com o Método dos Elementos de Contorno.

1.5 ORGANIZAÇÃO E CONTEÚDO DO TRABALHO

O presente trabalho consiste basicamente de três partes: conceituação e procedimentos gerais para a análise de materiais compósitos viscoelásticos utilizando a transformada de Laplace, descrição do modelo computacional empregado e exemplos de aplicação. O conteúdo do trabalho é distribuído através de sete capítulos, como descrito abaixo.

No capítulo II são apresentadas as definições de transformada de Laplace e sua inversa, bem como os métodos numéricos envolvidos na inversão ou retorno ao plano físico. No capítulo III são abordados os materiais compósitos quanto às suas características básicas, equações constitutivas elásticas e viscoelásticas. As equações constitutivas viscoelásticas unidimensionais são formuladas no plano físico e também transformado, sendo extendidas em seguida para o caso tridimensional através da introdução do método da correspondência. Os métodos e procedimentos básicos são avaliados no capítulo IV ao serem empregados na

solução de problemas simples que envolvam a inversão numérica de expressões no domínio da transformada de Laplace. Finalmente, esta primeira parte de procedimentos gerais e conceitualização têm seu termo no capítulo V. Este capítulo adapta a transformação de Laplace ao método dos elementos finitos, gerando a expressão básica para a análise viscoelástica e até mesmo dinâmica.

As hipóteses e procedimentos do modelo computacional para a análise de placas e cascas são apresentadas no capítulo VI. Todas as etapas que o programa PAINEL percorre para análise elástica e viscoelástica de estruturas laminadas em material compósito são apresentadas, evidenciando-se as modificações para a implementação do método da transformada de Laplace.

A última etapa do trabalho ocorre no capítulo VII com a execução de exemplos cujos materiais são isotrópicos ou ortótropos. Um dos exemplos é submetido a carregamento impulsivo, testando os procedimentos adotados neste trabalho quando efeitos vibratórios são importantes na análise da estrutura.

Após as conclusões e considerações finais, é reservado um espaço às principais dificuldades encontradas no desenvolvimento deste trabalho, de forma a fornecer subsídios extras para trabalhos subseqüentes. Ainda, é apresentado o manual de entrada de dados para a nova versão do programa PAINEL, que inclui o método da transformada de Laplace para análises quasi-estáticas e dinâmicas.

2 A TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

A idéia de operador linear e seu inverso, proporcionam uma técnica extremamente eficiente para o manuseio e solução de problemas de valor inicial que envolvam equações diferenciais lineares. O operador integral 'L' conhecido como transformada de Laplace é uma transformação linear sobre o domínio das funções seccionalmente contínuas, ou seja, das funções contínuas, exceto num número finito de pontos, onde devem existir os limites à esquerda e à direita da função.

2.1 DEFINIÇÃO

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é uma função da variável complexa 's', representada por $L f(t)$ e definida como

$$f(s) = L f(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.1)$$

A função $f(t)$ deve ser suficientemente bem comportada para que a integral convirja para $f(s)$. Este bom comportamento requer que $f(t)$ cresça menos rapidamente que alguma função exponencial, ou seja, exigindo que o integrando tenda rapidamente para zero enquanto 't' cresce. Diz-se que $f(t)$ deve ser de 'ordem exponencial', garantindo desta forma a existência da transformada de Laplace da função.

2.2 FÓRMULAS ELEMENTARES

Há uma quase infinidade de fórmulas elementares resultantes da aplicação da definição da transformada de Laplace sobre as mais variadas funções, como pode ser comprovado em tabelas disponíveis na literatura afim. Não obstante, são apresentadas a seguir apenas aquelas fórmulas pertinentes a este trabalho.

Se $f(t) = \text{sen } at$, onde 'a' é uma constante, então

$$\begin{aligned} L\{\text{sen } at\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen } at \, dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} e^{-st} \text{sen } at \, dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st_0}}{s^2 + a^2} (-s \text{sen } at_0 - a \cos at_0) + \frac{a}{s^2 + a^2} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como este limite existe se, e somente se, $s > 0$, caso em que ele tem o valor $a/(s^2+a^2)$, segue-se que a transformada de Laplace de $\text{sen } at$ é a função $a/(s^2+a^2)$ limitada ao intervalo $(0, \infty)$. Assim, se pode dizer finalmente que

$$L\{\text{sen } at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0 \quad (2.3)$$

Outras transformadas de Laplace úteis seriam as dadas através da aplicação sobre as funções 'degrau unitário' ou função de Heaviside e 'impulso' ou delta de Dirac. A função de Heaviside pode ser definida como

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases} \quad (2.4)$$

Para as aplicações que se abordará posteriormente a constante 'a' é tomada como nula, produzindo o seguinte gráfico para a função de Heaviside:

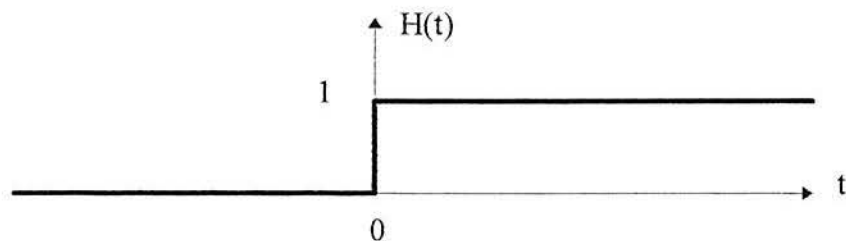


FIGURA 2.1 - A função de Heaviside

A transformada desta função é dada por:

$$L\{H(t-a)\} = \begin{cases} \frac{1}{s} e^{-as} \\ \frac{1}{s}, a=0 \end{cases}, \quad s > 0 \quad (2.5)$$

Quanto ao delta de Dirac, as seguintes propriedades encerram sua definição:

$$\delta(t-a) = 0, \quad t \neq a; \quad (2.6-a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) dt = 1 \quad (2.6-b)$$

que, para 'a' nulo, possui o seguinte gráfico:

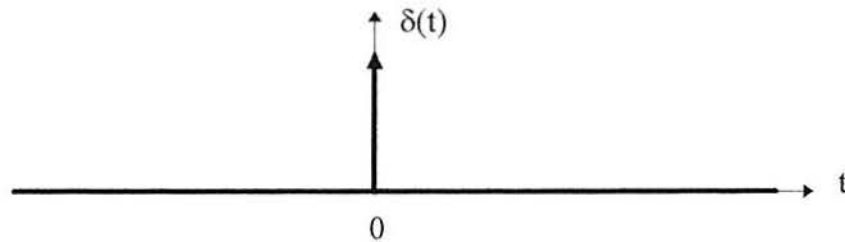


FIGURA 2.2 - A função delta de Dirac

A transformada de Laplace do delta de Dirac é:

$$L\{\delta(t-a)\} = \begin{cases} e^{-as} \\ 1, a=0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Um dos resultados mais importantes da aplicação da transformação de Laplace é uma fórmula que exprime a transformada da derivada da função $f(t)$ em termos de $Lf(t)$ e do comportamento de $f(t)$ em $t = 0$. Esta fórmula é a base da técnica para a solução de

problemas de valor inicial. Se $f(t)$ é seccionalmente contínua em $(0, \infty)$, e suponhamos que $f'(t)$ seja seccionalmente contínua e de ordem exponencial em $[0, \infty)$. Então

$$L f'(t) = s L f(t) - f(0^+), \quad (2.8)$$

na qual $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. De modo mais geral, se $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ são contínuas para todo 't' maior que zero, e se $f^{(n)}(t)$ é seccionalmente contínua e de ordem exponencial em $[0, \infty)$, então

$$L f^{(n)}(t) = s^n L f(t) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (2.9)$$

Outras fórmulas utilizadas no presente trabalho na resolução de problemas estão apresentadas abaixo:

$$L e^{-at} = \frac{1}{a+s} \quad (2.10)$$

$$L \frac{1-e^{-at}}{a} = \frac{1}{s(a+s)} \quad (2.11)$$

$$L \frac{at - (1-e^{-at})}{a^2} = \frac{1}{s^2(a+s)} \quad (2.12)$$

$$L t^n = n! s^{-n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

$$L^{-1} \frac{p_1(s)}{p_2(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{p_1(s_i)}{p_2'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.14)$$

$$L\{f_1(t)*f_2(t)\} = f_1(s)f_2(s) \quad (2.15)$$

Nestas fórmulas, 'a' é constante pertencente ao conjunto dos números complexos. Na fórmula (2.14), necessariamente o grau do polinômio do numerador é menor que 'n' e as raízes 's_i' do polinômio 'p₂' são todas distintas. Na equação (2.15), o asterisco indica

convolução entre as funções ' $f_1(t)$ ' e ' $f_2(t)$ '. Maiores detalhes sobre a teoria da transformada de Laplace e fórmulas elementares podem ser encontradas em Kreider et al (1966) e Spiegel (1992), respectivamente.

2.3 A TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA: MÉTODOS NUMÉRICOS

Aquí se encontra o cerne da questão abordada neste trabalho. Geralmente, a aplicação da transformada de Laplace não envolve maiores dificuldades, porém a inversão ou retorno ao domínio da variável ' t ' normalmente é de difícil execução analítica. Assim, a alternativa natural é uma abordagem através de métodos numéricos de inversão, restando apenas um ponto a ser discutido: qual o melhor método a ser utilizado? Há uma unanimidade entre os pesquisadores quanto a não haver o melhor método de inversão, mas sim o método mais adequado para a classe de funções que se quer inverter, mesmo porque a inversão numérica da transformada de Laplace é notoriamente um processo mal-condicionado (Bellman, Kalaba e Locket, 1966). No entanto, um dos métodos mais bem sucedidos, cobrindo vários tipos de funções é o baseado na aceleração de convergência de uma série trigonométrica. O método da série trigonométrica, juntamente com outro baseado na quadratura de Gauss são abordados após a definição a seguir.

2.3.1 Definição

A transformada de Laplace inversa de uma função $f(s)$ é uma função da variável real ' t ', representada por $L^{-1} f(s)$ e definida como

$$f(t) = L^{-1} f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) ds \quad (2.16)$$

na qual ' γ ' é tal que o contorno de integração está à direita de qualquer singularidade de $f(s)$. Ao se manipular as partes real e imaginária da equação (2.16), é possível se obter as três formas equivalentes abaixo:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} e^{\gamma t} \int_0^{\infty} \text{Re}\{f(s)\} \cos(\omega t) d\omega \quad (2.17)$$

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} e^{\gamma t} \int_0^{\infty} \text{Im}\{f(s)\} \text{sen}(\omega t) d\omega \quad (2.18)$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} e^{\gamma t} \int_0^{\infty} \text{Re}\{f(s)e^{i\omega t}\} d\omega \quad (2.19)$$

em que ' γ ' e ' ω ' são as partes real e imaginária de ' s ', respectivamente.

2.3.2 Método da série trigonométrica

Dubner e Abate (1968) utilizaram a discretização da equação (2.17) através da regra do trapézio com um passo igual a π/T , obtendo uma expressão em termos da série cosseno de Fourier. Durbin (1974) fez o mesmo, porém utilizando a equação (2.18) e realizando a média entre o seu resultado e o resultado obtido por Dubner e Abate, chegando a seguinte expressão para a inversa:

$$f(t) \cong \frac{e^{at}}{T} \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}\{f(a + n\frac{\pi}{T}i)\} \cos(n\frac{\pi}{T}t) - \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}\{f(a + n\frac{\pi}{T}i)\} \text{sen}(n\frac{\pi}{T}t) \right] \quad (2.20)$$

em que ' T ' e ' a ' são parâmetros que devem ser convenientemente escolhidos de forma a minimizar o erro de discretização. Piessens e Huysmans (1984) empregaram a expressão de Durbin utilizando os seguintes valores para estes parâmetros: $a = \gamma + 2/t$ e $T = 16t$. O grande valor escolhido para ' T ' reduz o erro de discretização da fórmula de Durbin, mas, por outro lado, um maior esforço computacional é requerido devido a uma menor convergência das séries infinitas. Para esta particular escolha de ' T ', a confiança é priorizada frente à eficiência.

Deve ser observado que a expressão (2.20) também pode ser desenvolvida a partir da equação (2.19) ao se aplicar uma das identidades de Euler ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta$), prosseguindo com a regra do trapézio da mesma forma que nas equações (2.17) e (2.18).

A expressão acima, por convergir de uma forma muito lenta, não deve ser utilizada sozinha na solução de problemas de valor inicial. A sua utilização, apesar de conduzir a resultados satisfatórios, necessita de centenas de avaliações da função a ser

invertida, tornando-a virtualmente inviável para os objetivos almejados neste trabalho. Assim, torna-se imperativo o uso de um método de aceleração de convergência. Embora os diversos métodos de aceleração de convergência de séries não terem sido objeto desta pesquisa, pode-se comprovar a eficiência de alguns deles no trabalho de Hönig e Hirdes (1988) e também de De Hoog, Knight e Stokes (1982) como o algoritmo do quociente de diferenças ('q-d algorithm'). No entanto, é abordado na seqüência somente o algoritmo épsilon que se mostrou o preferido de vários pesquisadores como Crump (1976), mesmo porque a maior ou menor eficiência destes métodos depende grandemente da classe de funções a serem invertidas.

2.3.3 Aceleração de convergência de séries: o algoritmo épsilon

A técnica de aceleração de convergência pode ser aplicada a qualquer série ou soma de seqüência numérica. No entanto um grande aumento na precisão pode ser esperado quando o algoritmo épsilon é aplicado em somas parciais de séries de potência.

O algoritmo épsilon devido a Wynn (1967), consiste na montagem de uma tabela cujos elementos são calculados conforme a regra do losango:

$$\epsilon_j^{(j-j)} = \epsilon_{j-2}^{(j+1-j)} + \left[\epsilon_{j-1}^{(j+1-j)} - \epsilon_{j-1}^{(j-j)} \right]^{-1}, \quad j=1, \dots, J \quad (2.21)$$

sendo portanto posicionados da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccc} & & \epsilon_0^{(0)} & & \\ & & & & \\ \epsilon_{-1}^{(1)} & & & \epsilon_1^{(0)} & \\ & & \epsilon_0^{(1)} & & \epsilon_2^{(0)} \\ \epsilon_{-1}^{(2)} & & & \epsilon_1^{(1)} & \\ & & \epsilon_0^{(2)} & & \\ \epsilon_{-1}^{(3)} & & & & \end{array} \quad (2.22)$$

Os valores iniciais para a regra do losango são:

$$\varepsilon_{-1}^{(J+1)} = 0 ; \quad \varepsilon_0^{(J)} = \sum_{n=0}^J a_n z^n ; \quad J = 0, 1, \dots \quad (2.23)$$

ou seja, a primeira coluna da tabela consiste de valores nulos enquanto que a segunda é formada a partir das avaliações funcionais da série de potência a ser acelerada.

A cada avaliação funcional vai sendo montada mais uma diagonal da tabela épsilon, conduzindo a estimativas cada vez mais precisas da soma infinita. Estas estimativas são calculadas e armazenadas nas posições com índice superior nulo e inferior par.

Para melhor entender a aplicação das expressões acima, é possível empregá-las num exemplo bastante simples que compreende a seguinte série:

$$d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots, \quad (2.24)$$

que pode representar, por exemplo, o avanço desde uma conhecida posição inicial de um corpo até uma determinada posição final. A cada unidade de tempo, o corpo percorre uma distância equivalente à metade da distância ainda a ser percorrida, de forma que, no limite, quando o tempo tender ao infinito, finalmente terá percorrido os 100% da distância entre os dois pontos ($d=1$). Em princípio, para que a série colocada neste exemplo convergisse para o valor desejado (a unidade), infinitas parcelas seriam necessárias. No entanto, observando que

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}} ; \quad z = 1, \quad (2.25)$$

e aplicando a regra do losango, se teria a seguinte tabela épsilon:

$$\begin{array}{r} 0,500 \\ 0 \quad 4 \\ 0,750 \quad (1) \\ 0 \quad 8 \\ 0,875 \end{array} \quad (2.26)$$

na qual se observa a obtenção do valor exato após formadas apenas três diagonais da tabela. Ou seja, após a soma das três primeiras parcelas, o algoritmo acelera de forma surpreendente a solução do problema até o resultado almejado.

2.3.4 Método baseado na aceleração de convergência da série de Fourier: método melhorado

Uma melhoria considerável foi alcançada por De Hoog, Knight e Stokes (1982) ao considerar elementos complexos na tabela do algoritmo de Wynn (1967) e ao fornecer novos valores para os parâmetros livres da expressão para a transformada inversa de Laplace, além daqueles já fornecidos por Piessens e Huysmans. Em seu trabalho, De Hoog, Knight e Stokes utilizaram: $a = 0,5 + 0,4 \ln(10,0)$ e $T = 7,5$.

A abordagem feita por estes últimos pesquisadores empregou, ao invés da expressão (2.20), a discretização da equação (2.19), ou seja:

$$f(t) \cong \frac{1}{T} e^{at} \left[\frac{f(a)}{2} + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{2M} f\left(a + n \frac{\pi}{T} i\right) e^{n \frac{\pi}{T} t i} \right\} \right] \quad (2.27)$$

Esta expressão foi então combinada com o algoritmo épsilon de forma que a série de potência complexa fosse acelerada, fornecendo aproximações cada vez mais precisas do seu valor de convergência. A tabela épsilon complexa é montada conforme os valores iniciais dados em (2.23), os quais, conforme (2.27) são:

$$\begin{aligned} z &= e^{\frac{\pi}{T} t i}; & a_0 &= f(a)/2 \\ a_n &= f\left(a + n \frac{\pi}{T} i\right); & n &= 1, 2, \dots, 2M \end{aligned} \quad (2.28)$$

Logo, a expressão final para o método de inversão da transformada de Laplace baseado na aceleração da série de Fourier é:

$$f(t) \cong \frac{1}{T} e^{at} \operatorname{Re} \{ e_{2M}^{(0)} \} \quad (2.29)$$

em que '2M' é o número máximo de parcelas a serem somadas na série de potência, de forma que se obtenha a precisão requerida no resultado de $f(t)$.

2.3.5 Método baseado na quadratura de Gauss

Uma maneira largamente empregada na aproximação de uma integral definida é a fórmula da quadratura:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \cong \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (2.30)$$

Os ' x_i ' são chamados de pontos, nós ou raízes da fórmula enquanto que os ' A_i ' são os coeficientes ou pesos. Se $w(x)$ for positivo no intervalo $[a, b]$, então ' n ' raízes e pesos podem ser encontrados para tornar (2.30) exata para todos os polinômios de grau menor ou igual a $(2n-1)$. Esta fórmula é comumente chamada fórmula da quadratura gaussiana porque foi primeiramente estudada por Gauss para o caso especial onde $w(x) = 1$.

O método para o cálculo da transformada de Laplace inversa - equação (2.16) - apresentado por Heydarian, Mullineux e Reed (1981), se baseava na expressão da quadratura de Gauss, apresentando a seguinte expressão:

$$f(t) \cong \sum_{i=1}^n A_i \frac{p_i}{t} f\left(\frac{p_i}{t}\right) \quad (2.31)$$

em que os pesos ' A_i ', para ' n ' igual a oito, foram os seguintes:

$$A_1 = \bar{A}_2 = -39,795288 + 1338,783902 i$$

$$A_3 = \bar{A}_4 = 70,020480 - 641,933247 i$$

$$A_5 = \bar{A}_6 = -34,242643 + 127,808748 i$$

$$A_7 = \bar{A}_8 = 4,517451 - 6,142475 i$$

em que a barra indica o conjugado complexo. Estes pesos foram obtidos por intermédio das soluções da equação

$$\sum_{i=1}^n A_i p_i^{-R} = \frac{1}{R!}, \quad 0 \leq R \leq n-1 \quad (2.32)$$

As raízes 'p_i', por sua vez, foram as seguintes:

$$p_1 = \bar{p}_2 = 10,169446 + 1,649202 i$$

$$p_3 = \bar{p}_4 = 9,406371 + 4,969217 i$$

$$p_5 = \bar{p}_6 = 7,738688 + 8,370879 i$$

$$p_7 = \bar{p}_8 = 4,685495 + 12,010579 i$$

extraídas do polinômio

$$(-1)^n \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} n! \{ (n+i-1) \}}{i! (n-i)!} p^{n-i} = 0 \quad (2.33)$$

Assim, na equação (2.31), é obtida a transformada inversa f(t) para o instante de tempo requerido, a partir da substituição da variável 's' na expressão transformada por raízes de quadratura divididas pelo valor temporal da análise.

Stroud e Secrest (1966) elaboraram tabelas com os pesos e raízes para vários valores de 'n'. Abaixo, encontram-se estes pesos e raízes retirados destas tabelas para 'n' igual a oito, os quais foram obtidos com uma precisão bem maior àquela utilizada por Heydarian, Mullineux e Reed.

$$A_1 = -39,7952877300696 + 133,878390214722 i$$

$$A_3 = +70,0204800546693 - 641,933246796715 i$$

$$A_5 = -34,2426429574756 + 127,808747820743 i$$

$$A_7 = +4,51745063287586 - 6,14247495100365 i$$

$$p_1 = +10,1694460066575 + 1,64920179682223 i$$

$$p_3 = +9,40637121369074 + 4,96921728762329 i$$

$$p_5 = +7,73868814683055 + 8,37087930623798 i$$

$$p_7 = +4,68549463282120 + 12,0105785998138 i$$

Da mesma forma, os conjugados complexos das raízes e pesos com índice par também são idênticos aos valores apresentados acima.

3 MATERIAIS COMPÓSITOS

3.1 CARACTERÍSTICAS BÁSICAS

Uma estrutura laminar do tipo placa ou casca em material compósito, é constituída pela superposição de um determinado número de lâminas, de modo que atinja as características requeridas de resistência e rigidez. Além do número de lâminas, outras variáveis seriam a orientação e disposição das fibras em cada uma das lâminas.

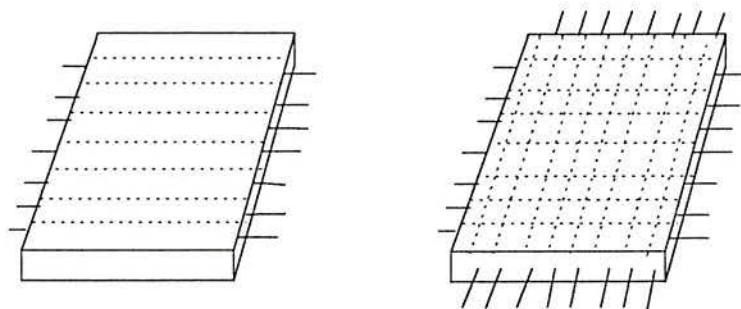


FIGURA 3.1 - Disposição das fibras em uma lâmina

Por exemplo, um reservatório de pressão cilíndrico de paredes finas poderia ser dimensionado de forma que em seu sentido circunferencial houvesse o dobro de resistência à tração do que em seu sentido longitudinal. A economia de material neste caso seria óbvia porque, para esta estrutura, a tensão atuante no sentido circunferencial é a tensão principal máxima e vale o dobro da tensão longitudinal.

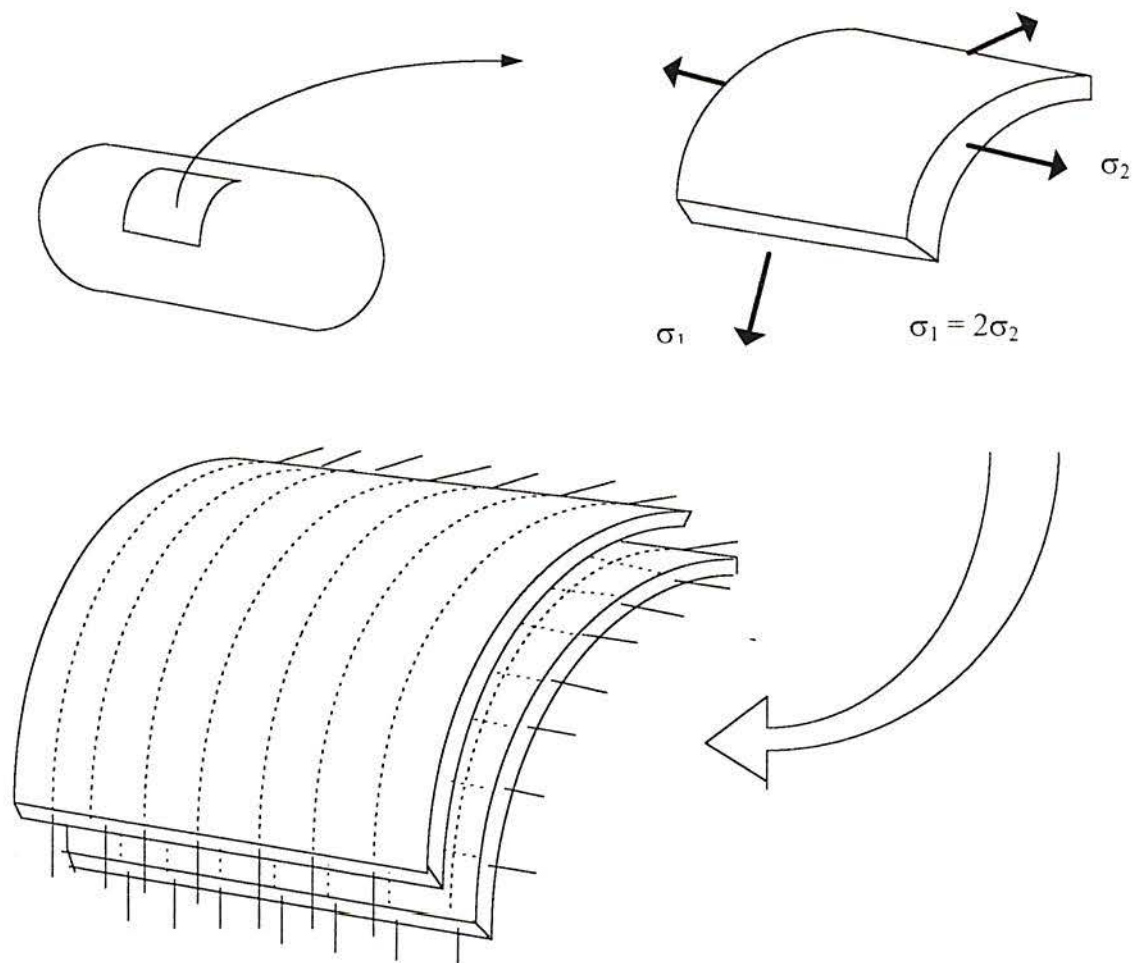


FIGURA 3.2 - Uma aplicação para os materiais compósitos

No exemplo acima, optou-se por realizar a laminação da estrutura de forma que duas camadas de material compósito suprissem a quantidade necessária de fibras na direção longitudinal e o dobro desta quantidade na direção circunferencial.

3.2 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS ELÁSTICAS

Quando as propriedades mecânicas de um material variam com a direção, o material é dito anisótropo ou que ele apresenta anisotropia. Se isto não ocorrer, o material é dito isótropo ou que ele apresenta isotropia, ou seja, neste caso ocorrem infinitos planos de simetria fazendo com que em todas as direções possíveis as propriedades se mantenham as mesmas.

No caso mais genérico, ao se isolar um cubo infinitesimal num ponto qualquer de um material homogêneo, ou seja, que este ponto tenha as mesmas propriedades de qualquer outro ponto do material, se terá nove componentes de tensão atuando.

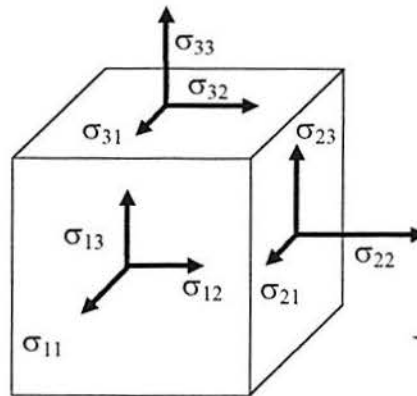


FIGURA 3.3 - Componentes de tensão em um elemento infinitesimal

Reunindo estas componentes de tensão numa matriz, se terá o chamado tensor de tensões:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{SIM.} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Neste caso, as componentes de tensão estarão associadas a um tensor de deformações específicas através de uma matriz constitutiva com 36 constantes ou coeficientes de rigidez, no caso de se assumir um comportamento elástico linear.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{55} & C_{56} & C_{66} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

A matriz tensão-deformação acima, por considerações energéticas também é simétrica (Lekhnitskii, 1963), reduzindo o número de coeficientes independentes para 21. A partir daí, o número de coeficientes independentes vai diminuindo para cada grau de simetria apresentada pelo material em sua estrutura interna. Se houver três planos de simetria mutuamente perpendiculares entre si, nas direções principais do material, a equação matricial (3.2) tem o seu número de coeficientes reduzidos para nove. Para o caso de estruturas laminares, que se enquadram neste grau de simetria, é possível fazer uma simplificação: a deformação específica no sentido da espessura das lâminas pode ser desprezada, restando somente seis coeficientes na matriz de rigidez.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}^2} & \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}^2} & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}^2} & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & G_{12} & 0 & 0 \\ & & & KG_{13} & 0 \\ & & & & KG_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

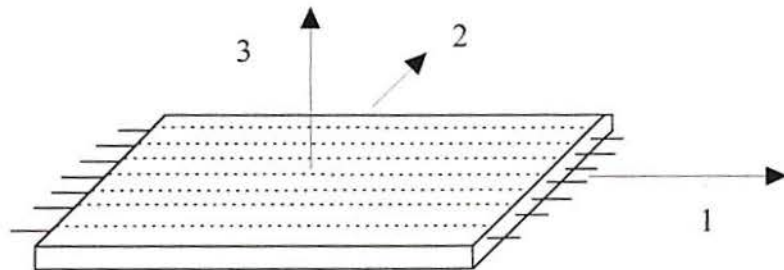


FIGURA 3.4 - Direções principais em uma lâmina

Este caso de anisotropia, que possui três planos de simetria, é chamado de ortotropia e o material é dito ortótropo. O coeficiente de correção 'K', tomado como 5/6 por Marques (1994), compensa o erro cometido ao se assumir a hipótese de distribuição uniforme das deformações de cisalhamento transversais. Para um material isotrópico ou com infinitos planos de simetria, a equação constitutiva elástica seria dada pela equação a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & G & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & \text{KG} & 0 \\ & & & & \text{KG} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

ou seja: $E_{11} = E_{22} = E$; $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$; $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$.

Um caso especial de ortotropia ocorre quando um dos planos de simetria também é plano de isotropia. Este caso é dito transversalmente isotrópico se o plano de isotropia coincidir com o plano 2-3 (FIGURA 3.4), e a equação que emprega a matriz de flexibilidade seria dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{23}} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

em que $G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1-\nu_{12})}$ e $G_{12} = G_{13}$.

3.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS VISCOELÁSTICAS UNIDIMENSIONAIS

Uma maneira de se formular as equações constitutivas dos materiais de uma forma genérica, seria a dada por intermédio da linguagem dos operadores na teoria da viscoelasticidade linear (Flügge, 1967). Desta forma a equação constitutiva de um material pode ser dada pela expressão a seguir:

$$\underline{P}(t)\underline{\sigma}(t) = \underline{Q}(t)\underline{\varepsilon}(t) \quad (3.6)$$

Nesta expressão, 'P' e 'Q' são arranjos que contém operadores diferenciais parciais lineares cuja ordem dependerá do modelo reológico que representa o material da estrutura a ser analisada. A seguir se faz a abordagem a cada um dos modelos pertinentes a este trabalho, indicando os operadores lineares tanto no domínio do tempo como suas transformações integrais, essenciais à aplicação do método da correspondência apresentado mais adiante.

3.3.1 Modelos reológicos de Hooke e Newton

Estes dois modelos são apresentados juntamente e em primeiro lugar porque são a base de todos os outros. O modelo de Hooke fornece a rigidez e o de Newton a viscosidade, compondo os mais diversos modelos reológicos com as mais variadas respostas frente a deslocamentos impostos (relaxação) e a carregamentos (fluência).

Dependendo da quantidade de parâmetros e da interação entre os modelos de Hooke e Newton, se poderá dispor de modelos cujo comportamento se assemelha ao de um fluido ou sólido, obedecendo à seguinte expressão:

$$\left[1 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right] \sigma(t) = \left[q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right] \varepsilon(t) \quad (3.7)$$

Supondo que o material possa ser representado reologicamente pelo modelo de Hooke, se está admitindo que o material possua tensões proporcionais às deformações específicas como em uma mola, como está apresentado na figura a seguir.

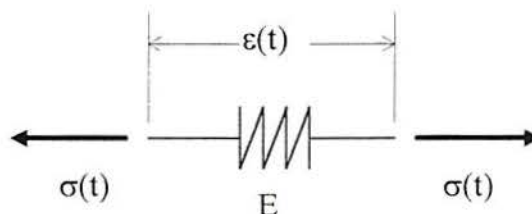


FIGURA 3.5 - Modelo de Hooke sob tração

Sua equação constitutiva viscoelástica seria dada por:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) \quad (3.8)$$

recaindo no caso limite da elasticidade linear. No caso do modelo de Newton, as velocidades específicas é que seriam proporcionais às tensões, gerando um amortecimento viscoso dado pelo amortecedor da figura abaixo.

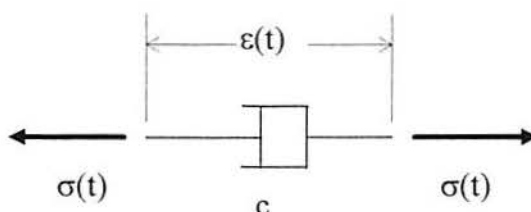


FIGURA 3.6 - Modelo de Newton sob tração

Sua equação constitutiva viscoelástica seria dada por:

$$\sigma(t) = c \dot{\varepsilon}(t) \quad (3.9)$$

na qual o ponto sobre a deformação específica indica sua derivada de primeira ordem em relação ao tempo. Assim, para o modelo de Hooke, o coeficiente ' q_0 ' vale ' E ' enquanto todos os outros são nulos. Já para o modelo de Newton, ' q_1 ' vale ' c ' e os outros coeficientes é que são iguais a zero.

As equações constitutivas de ambos os modelos podem ser colocadas algebricamente em termos da variável 's' através da transformada de Laplace, da mesma maneira que a equação genérica (3.7):

$$[1 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n] \sigma(s) = [q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_ns^n] \varepsilon(s) \quad (3.10)$$

ou seja:

$$\sigma(s) = E \varepsilon(s) \quad (3.11)$$

$$\sigma(s) = c s \varepsilon(s) \quad (3.12)$$

em que se admite sempre condições iniciais nulas.

3.3.2 Modelo reológico de Maxwell

O modelo reológico ou fluido de Maxwell é constituído por um modelo de Hooke com rigidez 'E' e um modelo de Newton com viscosidade 'c', conectados em série:

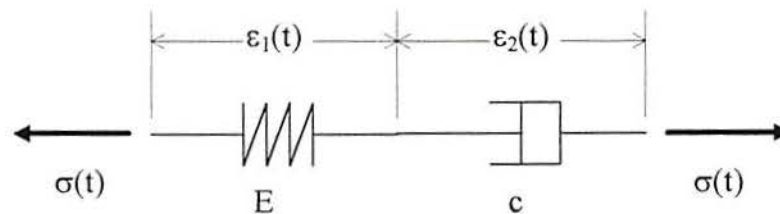


FIGURA 3.7 - Modelo de Maxwell sob tração

As equações constitutivas de cada parte do modelo foram destacadas acima e são repetidas abaixo:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_1(t) \quad (3.13-a)$$

$$\sigma(t) = c\dot{\varepsilon}_2(t) \quad (3.13-b)$$

Ao se somar as parcelas de deformação específica de cada parte do modelo, após a derivação da equação (3.13-a) em relação ao tempo, resulta a equação final para o fluido de Maxwell:

$$c \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(t) = \sigma(t) \left[1 + \frac{c}{E} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (3.14)$$

Conforme (3.7), os operadores 'P' e 'Q' são dados por:

$$P(t) = 1 + \frac{c}{E} \frac{\partial}{\partial t} = 1 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.15-a)$$

$$Q(t) = c \frac{\partial}{\partial t} = q_1 \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.15-b)$$

cujas transformadas seriam:

$$P(s) = 1 + \frac{c}{E} s = 1 + p_1 s \quad (3.16-a)$$

$$Q(s) = c s = q_1 s \quad (3.16-b)$$

3.3.3 Modelo reológico de Kelvin

O modelo reológico ou sólido de Kelvin é constituído por um modelo de Hooke com rigidez 'E' e um modelo de Newton com viscosidade 'c', conectados em paralelo:

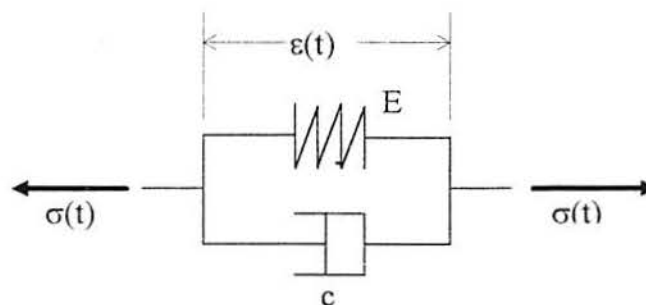


FIGURA 3.8 - Modelo de Kelvin sob tração

Como no modelo de Maxwell, as equações constitutivas de cada parte podem ser escritas como:

$$\sigma_1(t) = E \varepsilon(t) \quad (3.17-a)$$

$$\sigma_2(t) = c \dot{\varepsilon}(t) \quad (3.17-b)$$

Porém, se somando desta vez as parcelas de tensão de cada parte do modelo, resulta a equação para o sólido de Kelvin:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \left[E + c \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (3.18)$$

que também pode ser escrita em função dos operadores 'P' e 'Q', dados por:

$$P(t) = 1 \quad (3.19-a)$$

$$Q(t) = E + c \frac{\partial}{\partial t} = q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.19-b)$$

Para o modelo Kelvin, estes operadores no domínio transformado seriam:

$$P(s) = 1 \quad (3.20-a)$$

$$Q(s) = E + cs = q_0 + q_1 s \quad (3.20-b)$$

3.3.4 Modelo reológico Standard

O modelo reológico Standard ou sólido de três parâmetros é constituído por um modelo de Hooke de rigidez 'E' em série com um modelo de Kelvin de rigidez 'k' e viscosidade 'c'. Este modelo é particularmente importante para o presente estudo porque faz parte da família de modelos reológicos denominadas neste trabalho de cadeias Kelvin. Além dos elementos Kelvin que formam estas cadeias, ocorre também a participação de um modelo de Hooke, responsável pela resposta instantânea do material compósito.

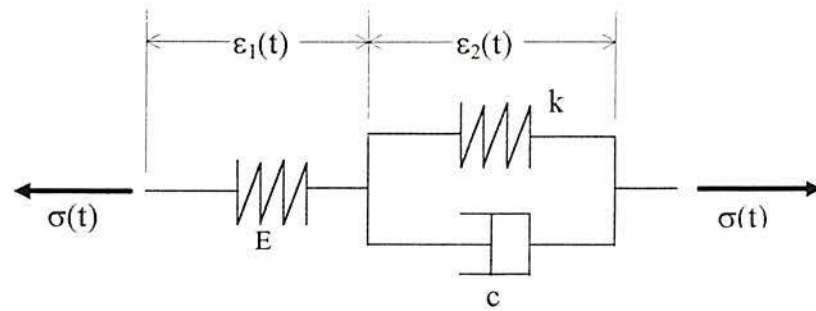


FIGURA 3.9 - Modelo Standard sob tração

Reescrevendo as equações constitutivas de cada parte após a aplicação do operador 'L' e multiplicando a equação do modelo Hooke por $(k + cs)$ e a equação do modelo Kelvin por 'E', resulta:

$$\sigma(s) (k + cs) = E (k + cs) \varepsilon_1(s) \quad (3.21-a)$$

$$\sigma(s) E = E(k + cs)\varepsilon_2(s) \quad (3.21-b)$$

Estas duas equações agora podem ser somadas, compatibilizando suas deformações específicas, obtendo a equação no domínio transformado para o sólido de três parâmetros ou modelo Standard:

$$\sigma(s) \left(1 + \frac{c}{E+k} s \right) = \left(\frac{Ek}{E+k} + \frac{Ec}{E+k} s \right) \varepsilon(s) \quad (3.22)$$

Os operadores algébricos $P(s)$ e $Q(s)$ ficam evidentes:

$$P(s) = 1 + \frac{c}{E+k} s = 1 + p_1 s \quad (3.23-a)$$

$$Q(s) = \frac{Ek}{E+k} + \frac{Ec}{E+k} s = q_0 + q_1 s \quad (3.23-b)$$

3.3.5 Modelo reológico de Zener

O modelo reológico de Zener, também um sólido de três parâmetros, é constituído por um modelo Hooke de rigidez 'E' em paralelo com um modelo Maxwell de rigidez 'k' e viscosidade 'c':

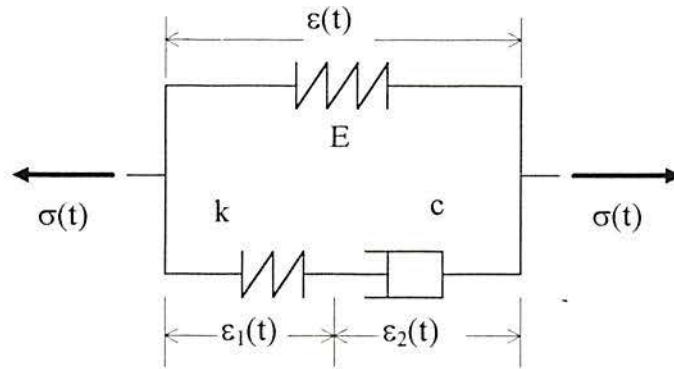


FIGURA 3.10 - Modelo de Zener sob tração

Reescrevendo as equações constitutivas de cada parte após a aplicação do operador 'L' e multiplicando a equação do modelo Hooke por (k + cs), resulta:

$$\sigma_1(s) (k + cs) = E (k + cs) \varepsilon(s) \quad (3.24-a)$$

$$\sigma_2(s) (k + cs) = ck s \varepsilon(s) \quad (3.24-b)$$

Estas duas equações agora podem ser somadas, compatibilizando suas tensões, obtendo a equação no domínio transformado para o modelo Zener:

$$\sigma(s) \left(1 + \frac{c}{k} s \right) = \left[E + \frac{(E+k)c}{k} s \right] \varepsilon(s) \quad (3.25)$$

Os operadores algébricos $P(s)$ e $Q(s)$ ficam mais uma vez evidentes:

$$P(s) = 1 + \frac{c}{k} s = 1 + p_1 s \quad (3.26-a)$$

$$Q(s) = E + \frac{(E+k)c}{k} s = q_0 + q_1 s \quad (3.26-b)$$

3.3.6 Cadeias Kelvin

Uma aproximação bastante razoável do comportamento de qualquer modelo reológico pode ser feita quando se utiliza uma cadeia de modelos Kelvin. Esta é a hipótese básica do método incremental das variáveis de estado utilizado no programa PAINEL, onde ocorrem no máximo quatro elementos Kelvin na aproximação do comportamento diferido do material. Portanto, na aplicação do método da correspondência, a substituição das constantes técnicas, como se verá adiante, se dará por polinômios de no máximo quarta ordem.

Os coeficientes destes polinômios foram calculados e estão apresentados a seguir para cada possibilidade na composição das cadeias Kelvin.

3.3.6.1 Cadeia com 1 elemento Kelvin

Quando ocorre apenas um elemento Kelvin para a simulação do comportamento viscoelástico do material, se tem os mesmos polinômios quando o modelo reológico era o Standard.

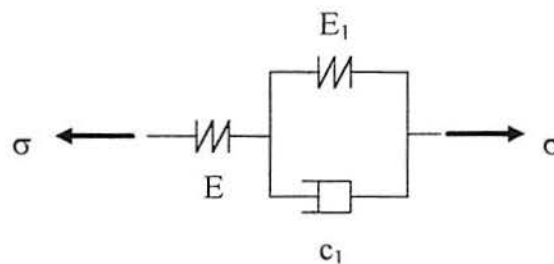


FIGURA 3.11 - Cadeia com 1 elemento Kelvin

Como visto anteriormente:

$$\sigma(s) [E + E_1 + c_1 s] = [E E_1 + E c_1 s] \alpha(s) \quad (3.27)$$

ou, se dividindo tudo por ' $E + E_1$ ' de forma que o primeiro coeficiente seja unitário, conforme a expressão geral (3.10), se obtém que

$$\sigma(s) \left(1 + \frac{c_1}{E + E_1} s \right) = \left(\frac{EE_1}{E + E_1} + \frac{Ec_1}{E + E_1} s \right) \varepsilon(s) \quad (3.28)$$

o que fornece os seguintes resultados para os coeficientes presentes na mesma expressão:

$$p_1 = \frac{c_1}{E + E_1} \quad (3.29-a)$$

$$q_0 = \frac{EE_1}{E + E_1} \quad (3.29-b)$$

$$q_1 = \frac{Ec_1}{E + E_1} \quad (3.29-c)$$

3.3.6.2 Cadeia com 2 elementos Kelvin

A equação (3.27) continua sendo válida para este modelo para descrever as deformações específicas que ocorrem até o primeiro elemento Kelvin.

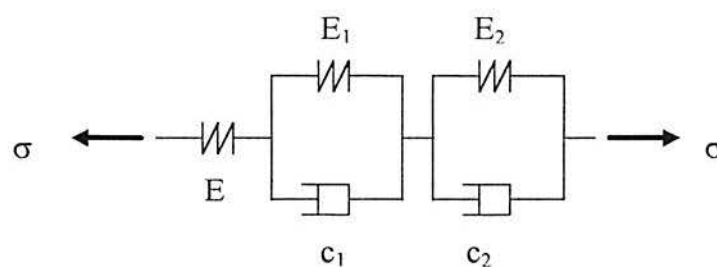


FIGURA 3.12 - Cadeia com 2 elementos Kelvin

Para o segundo elemento Kelvin as deformações são descritas conforme as expressões (3.20), isto é:

$$\sigma(s) = \varepsilon'(s) [E_2 + c_2 s] \quad (3.30)$$

Realizando-se a multiplicação da equação (3.27) por $[E_2 + c_2 s]$ e da equação (3.30) por $[EE_1 + Ec_1 s]$ e efetuando a soma, se obtém que

$$\sigma(s) \{ [E(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + [c_1 E_2 + E_1 c_2 + E(c_1 + c_2)]s + [c_1 c_2]s^2 \} = \varepsilon(s) [(E_1 E_2) + (c_1 E_2 + E_1 c_2)s + (c_1 c_2)s^2] E \quad (3.31)$$

de onde se retira os coeficientes abaixo:

$$p_1 = \frac{c_1 E_2 + E_1 c_2 + E(c_1 + c_2)}{E(E_1 + E_2) + E_1 E_2} \quad (3.32-a)$$

$$p_2 = \frac{c_1 c_2}{E(E_1 + E_2) + E_1 E_2} \quad (3.32-b)$$

$$q_0 = \frac{EE_1 E_2}{E(E_1 + E_2) + E_1 E_2} \quad (3.32-c)$$

$$q_1 = \frac{E(c_1 E_2 + E_1 c_2)}{E(E_1 + E_2) + E_1 E_2} \quad (3.32-d)$$

$$q_2 = \frac{Ec_1 c_2}{E(E_1 + E_2) + E_1 E_2} \quad (3.32-e)$$

3.3.6.3 Cadeia com 3 elementos Kelvin

Para este caso já se tem a equação para as deformações específicas até o segundo modelo Kelvin, dado acima em (3.31).

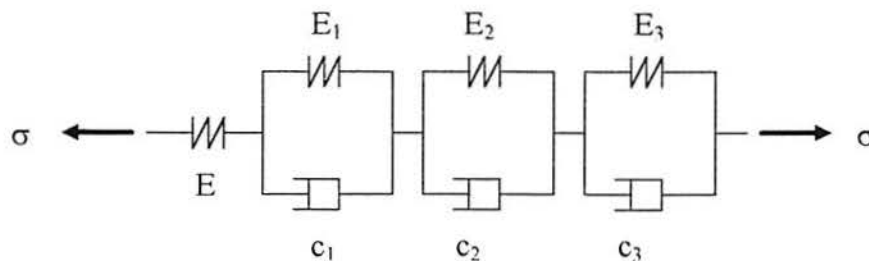


FIGURA 3.13 - Cadeia com 3 elementos Kelvin

Para o último modelo Kelvin, a equação está dada em (3.30). Da mesma forma é realizada a multiplicação da primeira equação por $[E_3 + c_3 s]$ e da segunda por $[(E_1 E_2) + (c_1 E_2 + E_1 c_2) s + (c_1 c_2) s^2] E$, resultando, após a compatibilização das deformações, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sigma(s) \{ & E[E_3(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + E_1 E_2 E_3 + \\ & (E[c_1(E_2 + E_3) + c_2(E_1 + E_3) + c_3(E_1 + E_2)] + c_1 E_2 E_3 + c_2 E_1 E_3 + c_3 E_1 E_2) s + \\ & (E[c_3(c_1 + c_2) + c_1 c_2] + E_1 c_2 c_3 + E_2 c_1 c_3 + E_3 c_1 c_2) s^2 + c_1 c_2 c_3 s^3 \} = \\ \varepsilon(s) [& E_1 E_2 E_3 + (c_1 E_2 E_3 + c_2 E_1 E_3 + c_3 E_1 E_2) s + \\ & (E_1 c_2 c_3 + E_2 c_1 c_3 + E_3 c_1 c_2) s^2 + c_1 c_2 c_3 s^3] E \end{aligned} \quad (3.33)$$

de onde se retira os coeficientes abaixo.

$$p_1 = \frac{E[c_1(E_2 + E_3) + c_2(E_1 + E_3) + c_3(E_1 + E_2)] + c_1 E_2 E_3 + c_2 E_1 E_3 + c_3 E_1 E_2}{E[E_3(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + E_1 E_2 E_3} \quad (3.34-a)$$

$$p_2 = \frac{E[c_3(c_1 + c_2) + c_1 c_2] + E_1 c_2 c_3 + E_2 c_1 c_3 + E_3 c_1 c_2}{E[E_3(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + E_1 E_2 E_3} \quad (3.34-b)$$

$$p_3 = \frac{c_1 c_2 c_3}{E[E_3(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + E_1 E_2 E_3} \quad (3.34-c)$$

$$q_0 = \frac{E E_1 E_2 E_3}{E[E_3(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + E_1 E_2 E_3} \quad (3.34-d)$$

$$q_1 = \frac{E(c_1 E_2 E_3 + c_2 E_1 E_3 + c_3 E_1 E_2)}{E[E_3(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + E_1 E_2 E_3} \quad (3.34-e)$$

$$q_2 = \frac{E(E_1 c_2 c_3 + E_2 c_1 c_3 + E_3 c_1 c_2)}{E[E_3(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + E_1 E_2 E_3} \quad (3.34-f)$$

$$q_3 = \frac{E c_1 c_2 c_3}{E[E_3(E_1 + E_2) + E_1 E_2] + E_1 E_2 E_3} \quad (3.34-g)$$

3.3.6.4 Cadeia com 4 elementos Kelvin

Uma cadeia Kelvin composta por quatro elementos gerará uma equação constitutiva viscoelástica de quarta ordem, caso limite do programa PAINEL e ilustrado abaixo.

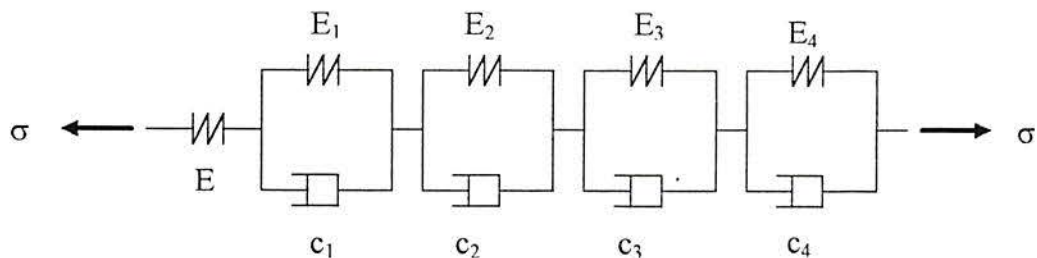


FIGURA 3.14 - Cadeia com 4 elementos Kelvin

Realizando o mesmo processo dos itens anteriores, é possível chegar aos coeficientes relativos à cadeia Kelvin de quatro elementos, dispostos a seguir.

$$p_1 = \frac{EE_4[c_1(E_2 + E_3) + c_2(E_1 + E_3) + c_3(E_1 + E_2)]}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} + \frac{(E + E_4)(c_1E_2E_3 + c_2E_1E_3 + c_3E_1E_2) + c_4\{E[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\}}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-a)$$

$$p_2 = \frac{E\{c_4[c_1(E_2 + E_3) + c_2(E_1 + E_3) + c_3(E_1 + E_2)] + E_4[c_3(c_1 + c_2) + c_1c_2]\}}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} + \frac{(E + E_4)(E_1c_2c_3 + E_2c_1c_3 + E_3c_1c_2) + c_4(c_1E_2E_3 + c_2E_1E_3 + c_3E_1E_2)}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-b)$$

$$p_3 = \frac{E\{c_4[c_3(c_1 + c_2) + c_1c_2] + c_1c_2c_3\} + c_4(E_1c_2c_3 + E_2c_1c_3 + c_1c_2E_3) + c_1c_2c_3E_4}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-c)$$

$$p_4 = \frac{c_1c_2c_3c_4}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-d)$$

$$q_0 = \frac{EE_1E_2E_3E_4}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-e)$$

$$q_1 = \frac{E[E_4(c_1E_2E_3 + c_2E_1E_3 + c_3E_1E_2) + c_4E_1E_2E_3]}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-f)$$

$$q_2 = \frac{E[E_4(E_1c_2c_3 + E_2c_3c_1 + E_3c_1c_2) + c_4(c_1E_2E_3 + c_2E_1E_3 + c_3E_1E_2)]}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-g)$$

$$q_3 = \frac{E[c_4(E_1c_2c_3 + E_2c_1c_3 + E_3c_1c_2) + c_1c_2c_3E_4]}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-h)$$

$$q_4 = \frac{Ec_1c_2c_3c_4}{E\{E_4[E_3(E_1 + E_2) + E_1E_2] + E_1E_2E_3\} + E_1E_2E_3E_4} \quad (3.35-i)$$

3.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS VISCOELÁSTICAS: EXTENSÃO AO CASO TRIDIMENSIONAL

A extensão das equações constitutivas determinadas acima para o caso tridimensional obedecerá o disposto no item seguinte, referente ao método da correspondência. Segundo este método, aquelas equações em 's' são empregadas nas equações constitutivas elásticas tridimensionais, obtendo-se as equações para o material compósito de comportamento viscoelástico, porém no plano transformado. As soluções no domínio do tempo são então provenientes da aplicação de métodos de inversão numérica de transformadas de Laplace.

3.4.1 O método da correspondência

De forma a se definir um problema de tensões arbitrário, três tipos de equações são necessárias: condições de equilíbrio; relações cinemáticas (expressam as deformações específicas em termos dos deslocamentos de cada ponto do contínuo) e equações constitutivas (que dependem do material). Estas últimas é que irão se modificar se um material for tratado como elástico ou viscoelástico. Porém, no caso de materiais viscoelásticos, todas estas equações poderão ser submetidas à transformação de Laplace já que as deformações específicas, deslocamentos e tensões (carregamentos) são dependentes do tempo.

O estado de tensões atuante sobre um corpo isótropo, pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{SIM.} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ & \sigma_0 & 0 \\ \text{SIM.} & & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & S_{22} & S_{23} \\ \text{SIM.} & & S_{33} \end{bmatrix} \quad (3.36-a)$$

ou

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{S}} \quad (3.36-b)$$

A primeira parcela da decomposição diz respeito ao aumento de volume do corpo sem modificações em sua forma original. Trata-se do tensor de tensões esféricas ou tensor hidrostático, onde cada componente é dada pela soma das componentes da diagonal principal ou traço do tensor de tensões original, dividido por três. A segunda parcela é responsável pelas deformações específicas de cisalhamento ou de distorção do corpo, sendo chamado de tensor de tensões desviadoras ou tensor desviador. Uma relação similar pode ser colocada para um estado arbitrário de deformações:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{SIM.} & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ & \varepsilon_0 & 0 \\ \text{SIM.} & & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ & e_{22} & e_{23} \\ \text{SIM.} & & e_{33} \end{bmatrix} \quad (3.37-a)$$

ou

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + \underline{\underline{e}} \quad (3.37-b)$$

Cada uma das componentes dos tensores hidrostáticos de tensões e deformações específicas, em elasticidade linear, estão relacionados da seguinte maneira:

$$\sigma_0 = 3 K \varepsilon_0 \quad (3.38)$$

onde 'K' é o módulo de compressibilidade volumétrica ('bulk modulus'). Da mesma maneira, as componentes dos tensores desviadores de tensões e deformações específicas estão relacionados por

$$S_{ij} = 2 G e_{ij} \quad (3.39)$$

em que 'G' é o módulo de elasticidade transversal. Em viscoelasticidade linear, o estado de tensões genérico aplicado sobre um corpo, também pode ser desmembrado nos tensores esférico e desviador. No entanto, temos que

$$P''(t) \sigma_0(t) = Q''(t) \varepsilon_0(t) \quad (3.40-a)$$

$$P'(t) S_{ij}(t) = Q'(t) e_{ij}(t) \quad (3.40-b)$$

onde P'' e Q'' são operadores diferenciais parciais relativos à dilatação do corpo viscoelástico, enquanto que P' e Q' são também operadores diferenciais, porém, relativos à distorção. Como estas equações são dependentes do tempo, se pode submetê-las à transformada de Laplace:

$$P''(s) \sigma_0(s) = Q''(s) \varepsilon_0(s) \quad (3.41-a)$$

$$Q'(s) S_{ij}(s) = Q'(s) e_{ij}(s) \quad (3.41-b)$$

Comparando as expressões (3.38), (3.39) e (3.41), se pode concluir que as formas equivalentes das constantes de proporcionalidade 'K' e 'G' nas transformações das expressões viscoelásticas são:

$$K \rightarrow \frac{1 Q''(s)}{3 P''(s)} \quad (3.42-a)$$

$$G \rightarrow \frac{1 Q'(s)}{2 P'(s)} \quad (3.42-b)$$

Entretanto, na maioria dos casos, as soluções de problemas elásticos não são escritos em termos de 'K' e 'G', mas sim em termos de 'E', módulo de Young, e 'v', módulo de Poisson. Através das equivalências acima e de relações conhecidas entre estas constantes técnicas, se chega às formas correspondentes de 'E' e 'v' no plano da variável 's':

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \rightarrow \frac{9 \frac{1 Q''(s)}{3 P''(s)} \frac{1 Q'(s)}{2 P'(s)}}{3 \frac{1 Q''(s)}{3 P''(s)} + \frac{1 Q'(s)}{2 P'(s)}} = \frac{3Q''(s)Q'(s)}{2Q''(s)P''(s) + Q''(s)P''(s)} \quad (3.43-a)$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{3K - 2G}{3K + G} \rightarrow \frac{\frac{1}{3} \frac{Q''(s)}{P'''(s)} - \frac{1}{2} \frac{Q'(s)}{P'(s)}}{\frac{1}{3} \frac{Q''(s)}{P'''(s)} + \frac{1}{2} \frac{Q'(s)}{P'(s)}} = \frac{P'(s)Q''(s) - Q'(s)P'''(s)}{2P'(s)Q''(s) + Q'(s)P'''(s)} \quad (3.43-b)$$

Como foi mencionado acima, estas equivalências são válidas para um material que apresenta isotropia. No caso mais geral da elasticidade linear, as equações constitutivas são dadas, conforme a equação (3.2), por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.44)$$

na qual é utilizada a notação indicial de somatória. Por outro lado, em viscoelasticidade linear, a forma equivalente desta equação no domínio transformado, conforme a expressão (3.6), seria dada por:

$$P_{ijkl}(s) \sigma_{ij}(s) = Q_{ijkl}(s) \varepsilon_{kl}(s) \quad (3.45)$$

o que conduz à seguinte correspondência:

$$C_{ijkl} \rightarrow P_{ijkl}^{-1} Q_{ijkl} \quad (3.46)$$

Este resultado, absolutamente geral, aplicado mais tarde em problemas de características bidimensionais ou tridimensionais, é bastante similar àquele que se conseguiria na expressão (3.43-a) acima ao se fazer $Q'' = Q'$ e $P''' = P'$, o que corrobora este último resultado.

Em resumo, as equações constitutivas viscoelásticas no domínio transformado são obtidas por intermédio da aplicação do método da correspondência sobre as equações que

regem o comportamento elástico do material da estrutura, em que o carregamento é substituído por sua transformada de Laplace e as constantes técnicas por razões de polinômios ou operadores algébricos segundo o modelo reológico adotado.

Como foi afirmado anteriormente, o comportamento viscoelástico dos materiais compósitos no programa PAINEL é simulado por intermédio de cadeias Kelvin que possuem no máximo quatro elementos. Então, conforme o número de constantes determinadas no item 3.3.6.4 e a expressão (3.46), as constantes técnicas devem ser substituídas por razões de polinômios de até quarta ordem, ou seja:

$$C_{ijkl} \rightarrow P_{ijkl}(s)^{-1} Q_{ijkl}(s) \Rightarrow \left[\frac{q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3 + q_4s^4}{1 + p_1s + p_2s^2 + p_3s^3 + p_4s^4} \right]_{ijkl} \quad (3.47)$$

A expressão acima indica que cada uma das constantes técnicas envolvidas nas várias componentes do tensor de quarta ordem de propriedades constitutivas devem ser substituídas pela sua respectiva razão de polinômios no domínio transformado.

4 SOLUÇÕES VISCOELÁSTICAS SIMPLES EMPREGANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

A seguir são desenvolvidos problemas onde ficam caracterizadas nas funções soluções a dependência de operadores viscoelásticos. Entretanto, pelo emprego do método da correspondência, não serão evidenciados tais operadores, mas sim suas transformações integrais. O retorno ao plano físico é processado de forma analítica e numérica. Desta forma, ao se obter a solução analítica, se pode medir de forma absoluta o erro cometido pelos dois métodos de inversão numérica empregados.

4.1 VIGA VISCOELÁSTICA COM APOIO INTERMEDIÁRIO ELÁSTICO

Propõe-se inicialmente a estrutura abaixo, onde se deseja conhecer suas deflexões ao longo do tempo:

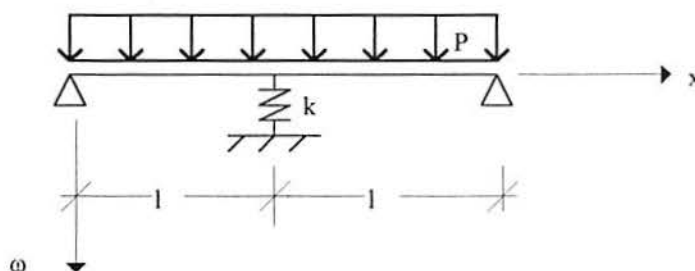


FIGURA 4.1 - Viga com apoio intermediário

Elasticamente, se pode determinar a equação que governa os deslocamentos verticais de cada ponto da estrutura. Isto pode ser feito ao se resolver a equação diferencial da viga através de integrações sucessivas e se utilizando as condições de contorno para a determinação das constantes de integração:

$$E I D^2 \{\omega\} = - M(x) \quad (4.1-a)$$

$$x = 0 \rightarrow \omega = 0; \quad E I D^2 \{\omega\} = 0 \quad (4.1-b)$$

$$x = 1 \rightarrow D\{\omega\} = 0; \quad E I D^3 \{\omega\} = -\frac{1}{2} k\omega \quad (4.1-c)$$

O 'D' indica um operador diferencial linear ordinário em relação à abscissa 'x', enquanto que o seu expoente determina a sua ordem. As condições de contorno estão definidas para a primeira metade da viga, já que ocorre simetria na estrutura. Assim, a equação da linha elástica da viga é a seguinte:

$$\omega(x) = \frac{p}{24EI} \left[(8l^3 - 4x^2l + x^3)x - \frac{5kl^4}{2(6EI + kl^3)} (3l^2 - x^2)x \right] \quad (4.2)$$

Entretanto, é objetivado a solução para a viga de comportamento viscoelástico. Considerando que o carregamento seja constante ao longo do tempo e que, inicialmente, o material de que é constituída a viga se comporte segundo o modelo reológico Maxwell, deverão ser procedidas as seguintes substituições:

$$E \rightarrow E(s) = \frac{q_1 s}{1 + p_1 s} \quad (4.3)$$

$$p(x, s) = \frac{1}{s} p, \quad (4.4)$$

conforme o exposto anteriormente pelo método da correspondência - expressões (3.43) - já que o módulo de Young é a única constante técnica na solução elástica. Os operadores viscoelásticos para o modelo Maxwell no plano complexo foram explicitados em (3.16). A entrada ou estímulo ao sistema é a carga 'p', que ao longo do tempo se comporta segundo a função de Heaviside, cuja transformada está dada em (2.5). Desta forma, a função solução para as deflexões viscoelásticas da viga no domínio transformado fica:

$$\omega(x, s) = \frac{p}{48q_1 I} \left[\frac{1 + p_1 s}{s^2} (16l^3 - 8x^2l + 2x^3)x - \frac{(1 + p_1 s)^2}{(\lambda + s)s^2} 5\lambda (3l^2 - x^2)lx \right] \quad (4.5-a)$$

na qual

$$\lambda = \frac{kl^3}{6q_1I + kl^3p_1} \quad (4.5-b)$$

Para se obter a solução no domínio do tempo, se deve proceder a inversão da expressão (4.5-a). Após algum algebrismo, as fórmulas (2.10) a (2.13) devem conduzir à expressão seguinte, que é a solução para a viga de comportamento viscoelástico segundo o modelo Maxwell.

$$\omega(x, t) = \frac{5p}{8kl^2} \left[1 - \frac{6Iq_1\lambda}{kl^3} e^{-\lambda t} \right] (3l^2 - x^2)x + \frac{p}{48Iq_1} (p_1 + t)(l^3 - 3x^2l + 2x^3)x \quad (4.6)$$

De forma análoga, é possível também determinar as equações para a viga caso o seu material constitutivo respondesse como o modelo reológico Kelvin. Neste caso,


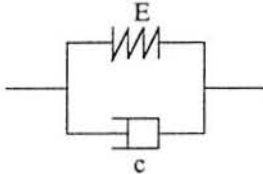
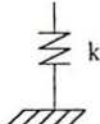
$$\omega(x, s) = \frac{p}{48q_1I} \left[\frac{1}{\left(\frac{q_0}{q_1} + s\right)s} (16l^3 - 8x^2l + 2x^3)x - \frac{1}{\left(\frac{q_0}{q_1} + s\right)(\lambda + s)} \frac{5kl^4}{6Iq_1} (3l^2 - x^2)x \right] \quad (4.7-a)$$

$$\lambda = \frac{6q_0I + kl^3}{6q_1I} \quad (4.7-b)$$

$$\omega(x, t) = \frac{p}{48q_0I} (1 - e^{-\frac{q_0}{q_1}t}) (l^3 - 3x^2l + 2x^3)x - \frac{5pl}{8(6q_0I + kl^3)} (1 - e^{-\lambda t}) (3l^2 - x^2)x \quad (4.8)$$

Para se resolver numericamente este problema, se pode partir tanto das expressões que fornecem a solução no domínio transformado, como da equação que governa o problema elástico, realizando a aplicação do método da correspondência também de forma numérica.

A viga da FIGURA 4.1 foi analisada numericamente para as características apresentadas no quadro a seguir:

Geometria :	
Seção Transversal: 0,30 m x 0,15 m	
Comprimento : 4,00 m (2 x 1)	
Carregamento:	
$p = 0,804 \text{ MN/m}$	
Reologia :	
Maxwell:	Kelvin:
	
$E = 20.000,00 \text{ MPa}$	$c = 2.000.000,00 \text{ MPa dia}$
Apoio Elástico:	
$k = 20.000,00 \text{ MPa}$	

QUADRO 4.1 - Entrada de dados para a solução numérica da viga viscoelástica

Ao se empregar ambos os métodos de inversão numérica da transformada de Laplace - expressões (2.20) e (2.31) - para os dois casos de reologia adotados acima, foram gerados os dados das tabelas a seguir:

TABELA 4.1 - Deflexões para o ponto central da viga segundo o modelo Maxwell

t (dias)	$w(2,t)$ (m)	ERRO (%)			
		MÉTODO DA QUADRATURA	SÉRIE TRIG.+ ACEL (301 Av)	SÉRIE TRIG. + ACEL (149 Av)	SÉRIE TRIG. (509 Av)
1/86400 (1seg)	0,009995	$2,3 \times 10^{-11}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,94 \times 10^{-4}$	1,84
10	0,010988	$0,9 \times 10^{-11}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,83 \times 10^{-4}$	1,67
50	0,014958	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,3 \times 10^{-11}$	$0,58 \times 10^{-4}$	1,22
100	0,019921	$0,1 \times 10^{-11}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,44 \times 10^{-4}$	0,92
500	0,059625	$1,3 \times 10^{-11}$	$2,3 \times 10^{-11}$	$0,29 \times 10^{-4}$	0,30

TABELA 4.2 - Deflexões para o ponto central da viga segundo o modelo Kelvin

t (dias)	$\omega(2,t)$ (m)	ERRO (%)			
		MÉTODO DA QUADRATURA	SÉRIE TRIG. + ACEL (301 Av)	SÉRIE TRIG. + ACEL (149 Av)	SÉRIE TRIG. (509 Av)
1/86400 (1seg)	$3,27 \times 10^{-8}$	$1,74 \times 10^{-11}$	$0,2 \times 10^{-11}$	$0,32 \times 10^{-4}$	$0,15 \times 10^{-1}$
10	0,001014	$100,0 \times 10^{-3}$	$0,3 \times 10^{-11}$	$0,30 \times 10^{-4}$	$0,79 \times 10^{-1}$
50	0,003975	$6,599 \times 10^{-3}$	$0,3 \times 10^{-11}$	$0,31 \times 10^{-4}$	$0,12 \times 10^{-1}$
100	0,006343	$2,135 \times 10^{-3}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,36 \times 10^{-4}$	$0,03 \times 10^{-1}$
500	0,009928	$0,281 \times 10^{-3}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,73 \times 10^{-4}$	$0,55 \times 10^{-1}$

Para o método da série trigonométrica, foi utilizado o algoritmo épsilon devido a Wynn (1967), acelerando a convergência da série. Desta forma, se reduziu o número de parcelas da soma de 509 para 149. Para que houvesse a mesma precisão alcançada pelo método da quadratura, 301 avaliações foram necessárias. Pode-se perceber ainda que o método da quadratura, em comparação com o da série trigonométrica, apresenta uma certa instabilidade na ordem de grandeza do erro cometido quando o modelo é o Kelvin.

Na seqüência, é mostrada a resposta do sistema para cada valor temporal, onde é evidenciado claramente o comportamento de cada modelo reológico. O modelo Kelvin converge para um valor finito, ou seja, tem características de um sólido enquanto que o Maxwell possui resposta ilimitada com o tempo. Obviamente as equações soluções (4.6) e (4.8) estão colocadas em função da hipótese de pequenas deformações.

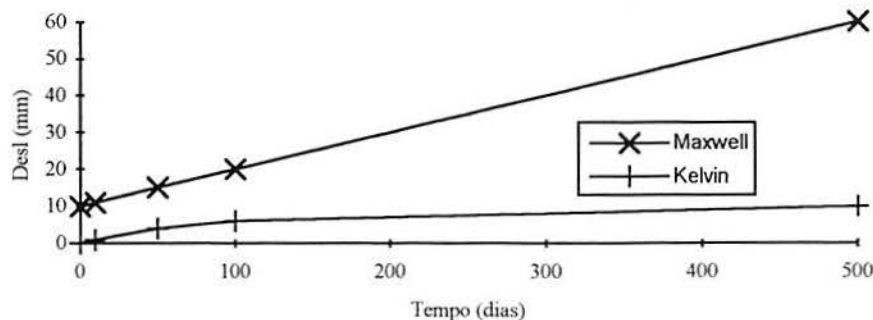


FIGURA 4.2 - Deflexões da viga conforme o modelo reológico

4.2 TUBO VISCOELÁSTICO NA DISTORÇÃO E ELÁSTICO NA DILATAÇÃO

Este exemplo se caracteriza pela sua bidimensionalidade pois, além da substituição do módulo de Young, é feita também a substituição do coeficiente de Poisson por uma razão de polinômios, definindo a transformada integral de outro operador viscoelástico.

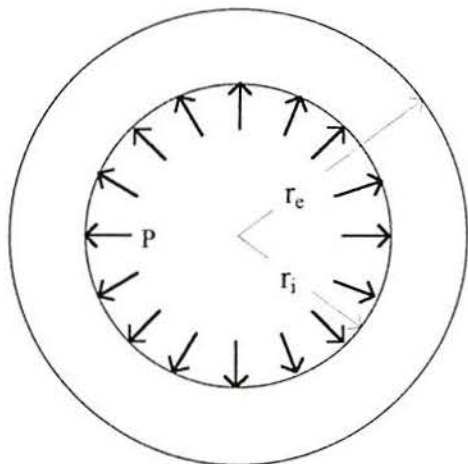


FIGURA 4.3 - Tubo de parede espessa: seção transversal

Segundo a teoria matemática da elasticidade, este problema, que também é conhecido como problema de Lamé, possui as seguintes soluções para deslocamentos radiais e tensões circunferenciais e radiais:

$$u(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r} \quad (4.9.a)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A_1 - \frac{A_2}{r^2} (1-2\nu) \right] \quad (4.9.b)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A_1 + \frac{A_2}{r^2} (1-2\nu) \right] \quad (4.9.c)$$

onde as constantes 'A₁' e 'A₂' são determinadas a partir das condições de contorno do problema.

Admitindo que a superfície externa do tubo esteja livre, as condições de contorno são as seguintes:

$$r = r_i \quad \rightarrow \quad \sigma_r(r_i) = -p \text{ (compress\~{a}o)} \quad (4.10-a)$$

$$r = r_e \quad \rightarrow \quad \sigma_r(r_e) = 0 \quad (4.10-b)$$

definindo as equa\~{c}o'es que governam os deslocamentos radiais e as tens\~{o}es radiais e circunferenciais da seguinte forma:

$$u(r) = \frac{p(1+\nu)r_i^2}{E(r_e^2 - r_i^2)} \left[(1-2\nu)r + \frac{r_e^2}{r} \right] \quad (4.11.a)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{pr_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (4.11.b)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{pr_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (4.11.c)$$

Pode-se observar que apenas a equa\~{c}o'es dos deslocamentos \u00e9 fun\~{c}o'es de constantes t\u00e9cnicas el\u00e1sticas. Logo, para esta situa\~{c}o'es, as equa\~{c}o'es para as tens\~{o}es s\u00e3o iguais tanto no caso el\u00e1stico como no viscoel\u00e1stico.

Considerando que o material constituinte do tubo tem comportamento viscoel\u00e1stico segundo o modelo de Maxwell na distor\~{c}o'es e el\u00e1stico na dilata\~{c}o'es (Hooke), utilizando-se as f\u00f3rmulas (3.43) seria obtida a seguinte correspond\u00eancia:

$$E \quad \rightarrow \quad E(s) = \frac{9Kq_1s}{(6Kp_1 + q_1)s + 6K} \quad (4.12.a)$$

$$\nu \quad \rightarrow \quad \nu(s) = \frac{(3Kp_1 - q_1)s + 3K}{(6Kp_1 + q_1)s + 6K} \quad (4.12.b)$$

Fazendo estas substitui\~{c}o'es na equa\~{c}o'es (3.11-a) dos deslocamentos, se obt\u00e9m:

$$u(r,s) = \frac{pr_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left\{ \left[\frac{1}{(\lambda + s)s} + \frac{1}{(\lambda + s)p_1} \right] \frac{3r}{6Kp_1 + q_1} + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}p_1 \right) \frac{r_e^2}{q_1r} \right\} \quad (4.13-a)$$

$$\lambda = \frac{6K}{6Kp_1 + q_1} \quad (4.13-b)$$

Recorrendo às fórmulas (2.10), (2.11) e (2.13), é fácil verificar que a transformada de Laplace inversa ou solução no domínio do tempo é dada por:

$$u(r, t) = \frac{pr_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left\{ \frac{r}{2K} \left[1 - \frac{q_1}{6Kp_1 + q_1} e^{-\lambda t} \right] + \frac{r_e^2 (p_1 + t)}{q_1 r} \right\} \quad (4.14)$$

Similarmente, se o comportamento na distorção for viscoelástico e regido pelo sólido de Kelvin, se tem que a expressão dos deslocamentos nos domínios complexo e do tempo são:

$$u(r, s) = \frac{pr_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[\frac{1}{(\lambda + s)s} \frac{3r}{q_1} + \frac{1}{(q_0 / q_1 + s)s} \frac{r_e^2}{q_1 r} \right] \quad (4.15-a)$$

$$\lambda = \frac{6K + q_0}{q_1} \quad (4.15-b)$$

$$u(r, t) = \frac{p r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[\frac{3 r}{6k + q_0} (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{r_e^2}{q_0 r} \left(1 - e^{-\frac{q_0}{q_1} t} \right) \right] \quad (4.16)$$

Este exemplo foi implementado numericamente para a seguinte entrada de dados:

<p>Geometria:</p> <p>$r_e = 1,50 \text{ m}$</p> <p>$r_i = 1,10 \text{ m}$</p> <p>$r = (r_e + r_i) / 2 = 1,30 \text{ m}$</p>
<p>Carregamento:</p> <p>$p = 58,74 \text{ MN/m}^2$</p>
<p>Na dilatação:</p> <p>$K = 16.666,67 \text{ MPa}$ (módulo de dilatação volumétrica)</p>

QUADRO 4.2 - Entrada de dados para a solução numérica do tubo

com a qual se obtém os seguintes resultados na inversão numérica:

TABELA 4.3 - Deslocamentos radiais segundo o modelo Maxwell

t (dias)	u (r,t) (m)	ERRO (%)			
		MÉTODO DA QUADRATURA	SÉRIE TRIG. + ACEL (301 Av)	SÉRIE TRIG. + ACEL (149 Av)	SÉRIE TRIG. (509 Av)
1/86400 (1seg)	0,0099984	$0,81 \times 10^{-11}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,94 \times 10^{-4}$	1,84
10	0,0107967	$2,33 \times 10^{-11}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,85 \times 10^{-4}$	1,70
50	0,0139676	$0,17 \times 10^{-11}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$0,62 \times 10^{-4}$	1,31
100	0,0178928	$0,18 \times 10^{-11}$	$0,3 \times 10^{-11}$	$0,48 \times 10^{-4}$	1,02
500	0,0487913	$1,13 \times 10^{-9}$	$0,9 \times 10^{-11}$	$0,30 \times 10^{-4}$	0,36

TABELA 4.4 - Deslocamentos radiais segundo modelo Kelvin

t (dias)	u (r,t) (m)	ERRO (%)			
		MÉTODO DA QUADRATURA	SÉRIE TRIG. + ACEL (301 Av)	SÉRIE TRIG. + ACEL (149 Av)	SÉRIE TRIG. (509 Av)
1/86400 (1seg)	$2,90 \times 10^{-9}$	$5,63 \times 10^{-7}$	$68,2 \times 10^{-11}$	$0,32 \times 10^{-4}$	$0,1 \times 10^{-1}$
10	0,001950	$1,89 \times 10^{-11}$	$0,24 \times 10^{-11}$	$0,36 \times 10^{-4}$	$0,2 \times 10^{-1}$
50	0,005281	$1,16 \times 10^{-8}$	$0,52 \times 10^{-11}$	$0,43 \times 10^{-4}$	$0,3 \times 10^{-1}$
100	0,007169	$2,00 \times 10^{-3}$	$0,65 \times 10^{-11}$	$0,43 \times 10^{-4}$	$0,5 \times 10^{-1}$
500	0,009947	$1,7 \times 10^{-1}$	$0,002 \times 10^{-11}$	$0,78 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-1}$

Em ambas as tabelas é possível perceber uma variabilidade na precisão dos resultados dados quando o método de inversão utilizado é o da quadratura. Para valores temporais mais altos, quando o modelo reológico é o Maxwell, esta variabilidade é mais tênue, onde somente em 500 dias de carregamento o erro percentual aumenta, relativamente aos 100 dias. No entanto, para o sólido de Kelvin, fica bem caracterizada a influência da magnitude da variável 't' no processo de inversão.

O comportamento do tubo segundo ambos os modelos, é apresentado no gráfico a seguir:

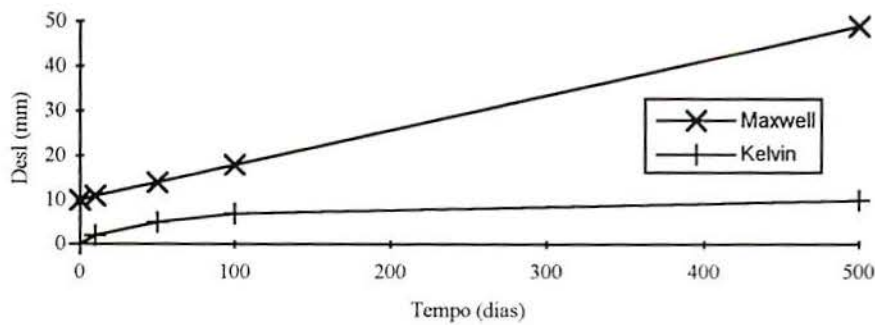


FIGURA 4.4 - Deslocamentos radiais conforme o modelo reológico

Outras condições de bordo para o problema de Lamé poderiam ser as seguintes:

$$r = r_i \quad \rightarrow \quad \sigma_r(r_i) = -p \quad (\text{compressão}) \quad (4.17-a)$$

$$r = r_e \quad \rightarrow \quad u(r_e) = 0 \quad (4.17-b)$$

caracterizando a indeslocabilidade da superfície externa do tubo ao ser limitada por um meio rígido indeformável. Neste caso, as soluções segundo a teoria matemática da elasticidade seriam:

$$u(r) = \frac{pr_e r_i^2}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-2\nu)r_e^2 + r_i^2} \left(\frac{r_e}{r} - \frac{r}{r_e} \right) \quad (4.18-a)$$

$$\sigma_r(r) = -\frac{pr_i^2}{(1-2\nu)r_e^2 + r_i^2} \left[1 + (1-2\nu) \frac{r_e^2}{r^2} \right] \quad (4.18-b)$$

$$\sigma_\theta(r) = -\frac{pr_i^2}{(1-2\nu)r_e^2 + r_i^2} \left[1 - (1-2\nu) \frac{r_e^2}{r^2} \right] \quad (4.18-c)$$

Aqui, tanto os deslocamentos como ambas as tensões são dependentes de constantes elásticas e, portanto, devem ser submetidas ao Método da Correspondência. Se o modelo reológico adotado for o Maxwell, se obtém:

$$u(r, s) = pr_e r_i^2 \frac{1}{s} \frac{1 + p_1 s}{6Kb^2 + [(6Kp_1 + q_1)r_i^2 + 3q_1 r_e^2]s} \left(\frac{r_e}{r} - \frac{r}{r_e} \right) \quad (4.19-a)$$

$$\sigma_r(r, s) = -\frac{pr_i^2}{r^2} \frac{1}{s} \frac{6Kr^2 + [(6Kp_1 + q_1)r^2 + 3q_1 r_e^2]s}{6Kr_i^2 + [(6Kp_1 + q_1)r_i^2 + 3q_1 r_e^2]s} \quad (4.19-b)$$

$$\sigma_\theta(r, s) = -\frac{pr_i^2}{r^2} \frac{1}{s} \frac{6Kr^2 + [(6Kp_1 + q_1)r^2 - 3q_1 r_e^2]s}{6Kr_i^2 + [(6Kp_1 + q_1)r_i^2 + 3q_1 r_e^2]s} \quad (4.19-c)$$

Realizando-se a inversão, as soluções para o tubo viscoelástico na distorção no domínio do tempo ficam:

$u(r, t) = \frac{pr_e}{2K} \left(\frac{r_e}{r} - \frac{r}{r_e} \right) \left[1 - \frac{\lambda q_1 (3r_e^2 + r_i^2)}{6Kr_i^2} e^{-\lambda t} \right]$	(4.20)
$\sigma_r(r, t) = -p \left[1 - \frac{\lambda q_1 r_e^2 (r^2 - r_i^2)}{2Kr_i^2 r^2} e^{-\lambda t} \right]$	
$\sigma_\theta(r, t) = -p \left[1 - \frac{\lambda q_1 r_e^2 (r^2 + r_i^2)}{2Kr_i^2 r^2} e^{-\lambda t} \right]$	
$\lambda = \frac{6Kr_i^2}{6Kp_1 r_i^2 + q_1 (3r_e^2 + r_i^2)}$	

De forma análoga, estabelecendo-se o modelo reológico de Kelvin, obtém-se as seguintes soluções no domínio complexo:

$$u(r, s) = \frac{1}{s} \frac{pr_e r_i^2}{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)(q_0 + q_1 s)} \left(\frac{r_e}{r} - \frac{r}{r_e} \right) \quad (4.21.a)$$

$$\sigma_r(r, s) = -\frac{pr_i^2}{r^2} \frac{1}{s} \frac{6Kr^2 + (r^2 + 3r_e^2)(q_0 + q_1 s)}{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)(q_0 + q_1 s)} \quad (4.21.b)$$

$$\sigma_\theta(r, s) = -\frac{pr_i^2}{r^2} \frac{1}{s} \frac{6Kr^2 + (r^2 - 3r_e^2)(q_0 + q_1 s)}{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)(q_0 + q_1 s)} \quad (4.21.c)$$

que, ao serem invertidas, ficam:

$$\begin{aligned}
 u(r,t) &= \frac{3pr_e r_i^2}{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)q_0} \left(\frac{r_e}{r} - \frac{r}{r_e} \right) (1 - e^{-\lambda t}) \\
 \sigma_r(r,t) &= -\frac{pr_i^2}{r^2} \left\{ \frac{6Kr^2 + (r^2 + 3r_e^2)q_0}{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)q_0} + \left[\frac{r^2 + 3r_e^2}{r_i^2 + 3r_e^2} - \frac{6Kr^2 + (r^2 + 3r_e^2)q_0}{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)q_0} \right] e^{-\lambda t} \right\} \\
 \sigma_\theta(r,t) &= -\frac{pr_i^2}{r^2} \left\{ \frac{6Kr^2 + (r^2 - 3r_e^2)q_0}{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)q_0} + \left[\frac{r^2 - 3r_e^2}{r_i^2 + 3r_e^2} - \frac{6Kr^2 + (r^2 - 3r_e^2)q_0}{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)q_0} \right] e^{-\lambda t} \right\} \\
 \lambda &= \frac{6Kr_i^2 + (r_i^2 + 3r_e^2)q_0}{(r_i^2 + 3r_e^2)q_1}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Através da inversão numérica, para os mesmos parâmetros utilizados no caso do tubo com superfície livre, foram obtidos os resultados apresentados abaixo. Neste exemplo, foi empregado o método da série trigonométrica com 149 avaliações funcionais conjuntamente com o algoritmo épsilon de aceleração de convergência.

TABELA 4.5 - Saída de dados para o modelo Maxwell

t (dias)	u (mm)	ERRO (%)		σ_r (MPa)	ERRO (%)		σ_θ (MPa)	ERRO (%)	
		QUAD	SÉRIE		QUAD	SÉRIE		QUAD	SÉRIE
1 seg.	0,3773	$1,0 \times 10^{-11}$	$9,4 \times 10^{-5}$	-51,624	$0,7 \times 10^{-11}$	$9,4 \times 10^{-5}$	-15,746	$2,617 \times 10^{-12}$	$9,4 \times 10^{-5}$
10	0,3958	$0,7 \times 10^{-11}$	$8,8 \times 10^{-5}$	-51,969	$0,4 \times 10^{-11}$	$9,3 \times 10^{-5}$	-17,831	$11,50 \times 10^{-12}$	$8,0 \times 10^{-5}$
50	0,4613	$1,7 \times 10^{-11}$	$7,3 \times 10^{-5}$	-53,190	$1,9 \times 10^{-11}$	$9,0 \times 10^{-5}$	-25,206	$3,087 \times 10^{-12}$	$5,5 \times 10^{-5}$
100	0,5268	$0,8 \times 10^{-11}$	$6,4 \times 10^{-5}$	-54,411	$0,5 \times 10^{-11}$	$8,8 \times 10^{-5}$	-32,585	$6,237 \times 10^{-12}$	$4,6 \times 10^{-5}$
500	0,7273	$6,8 \times 10^{-11}$	$6,8 \times 10^{-5}$	-58,147	$1,1 \times 10^{-11}$	$8,6 \times 10^{-5}$	-55,157	$113,9 \times 10^{-12}$	$6,0 \times 10^{-5}$

TABELA 4.6 - Saída de dados para o modelo Kelvin

t (dias)	u (mm)	ERRO (%)		σ_r (MPa)	ERRO (%)		σ_θ (MPa)	ERRO (%)	
		QUAD	SÉRIE		QUAD	SÉRIE		QUAD	SÉRIE
1 seg.	$8,7 \times 10^{-8}$	$5,6 \times 10^{-7}$	$3,2 \times 10^{-5}$	-44,593	$0,9 \times 10^{-11}$	$9,4 \times 10^{-5}$	26,734	$1,0 \times 10^{-11}$	$9,4 \times 10^{-5}$
10	0,0680	$1,7 \times 10^{-11}$	$3,3 \times 10^{-5}$	-45,860	$1,0 \times 10^{-11}$	$9,1 \times 10^{-5}$	19,075	$0,3 \times 10^{-11}$	$1,5 \times 10^{-4}$
50	0,2377	$2,1 \times 10^{-11}$	$4,0 \times 10^{-5}$	-49,022	$1,5 \times 10^{-11}$	$8,4 \times 10^{-5}$	-0,0250	$4,5 \times 10^{-8}$	$3,0 \times 10^{-1}$
100	0,3256	$3,0 \times 10^{-11}$	$4,9 \times 10^{-5}$	-50,661	$1,2 \times 10^{-11}$	$8,4 \times 10^{-5}$	-9,9281	$1,4 \times 10^{-10}$	$2,8 \times 10^{-3}$
500	0,3773	$8,0 \times 10^{-4}$	$6,9 \times 10^{-5}$	-51,623	$1,1 \times 10^{-4}$	$9,1 \times 10^{-5}$	-15,744	$2,2 \times 10^{-3}$	$1,9 \times 10^{-4}$

Novamente é possível perceber um aumento do erro percentual quando do uso do método da quadratura para o valor de 500 dias no modelo Kelvin. Ainda, quando a solução é dada para a tensão circunferencial do tubo para 50 dias de carregamento, também ocorre um fenômeno semelhante, agora porém para ambos os métodos de inversão devido ao pequeno valor desta tensão naquele instante de tempo.

A seguir, são apresentados graficamente os resultados para deslocamentos, tensões radiais e tensões circunferenciais, segundo a reologia adotada na solução: líquido de Maxwell ou sólido de Kelvin.

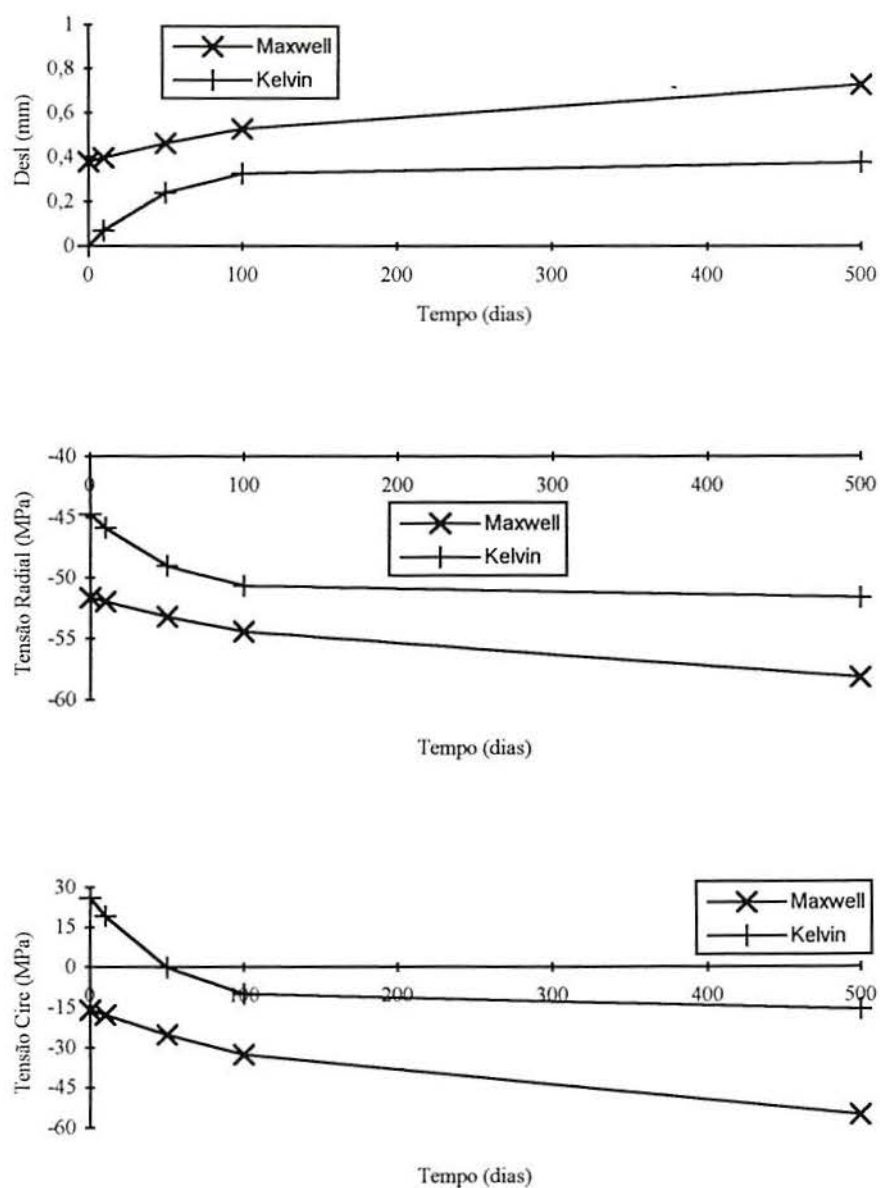


FIGURA 4.5 - Saída de dados conforme o modelo reológico

4.3 OSCILADOR SIMPLES

Este exemplo visa dois pontos básicos: primeiramente, como se trata de uma aplicação simples, cuja solução é comumente encontrada na literatura, fornece respaldo para o desenvolvimento da metodologia adotada neste trabalho não só sob o aspecto estático, como também dinâmico. Em segundo lugar, também permite avaliar o desempenho dos métodos de inversão numérica da transformação de Laplace no caso de sistemas com respostas de caráter oscilatório, como ocorre comumente em vibrações estruturais.

O sistema que se quer analisar, consiste de uma haste engastada-livre de massa desprezível mas de comportamento viscoelástico linear. Em sua extremidade livre se concentra toda a massa do sistema, onde as forças de inércia são atuantes.

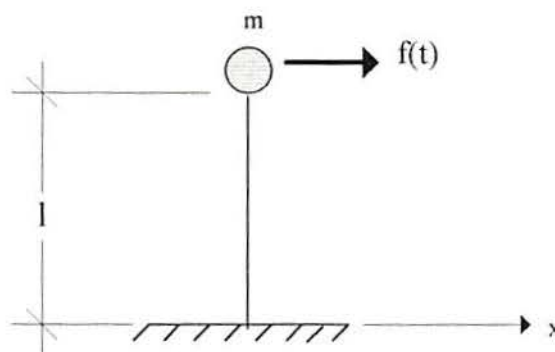


FIGURA 4.6 - Oscilador simples

As vibrações são induzidas através de um impacto que pode ser representado matematicamente pela função delta de Dirac:

$$f(t) = f_0 \delta(t) \quad (4.23)$$

A equação diferencial que descreve a posição da massa concentrada na extremidade da haste com o tempo difere um pouco da clássica equação do movimento da dinâmica das estruturas:

$$m \ddot{x} + K * x = f(t) \quad (4.24)$$

Na verdade se trata da mesma equação, porém com uma apresentação que facilita o tratamento analítico que será dado ao problema.

Na equação (4.24) os dois pontos sobre a variável 'x' indicam a derivada temporal ordinária de segunda ordem e o asterisco indica a convolução da rigidez à flexão 'K' com o deslocamento 'x'. A convolução da rigidez com os deslocamentos diz respeito ao comportamento 'viscoelástico' da haste.

Adotou-se o modelo reológico Kelvin para descrever o comportamento viscoelástico da haste. Portanto, conforme o Método da Correspondência, a rigidez do sistema no domínio transformado é dado por:

$$K = \frac{3I}{l^3} E \quad \rightarrow \quad K(s) = \frac{3I}{l^3} E(s) = \frac{3I}{l^3} (E + c s) \quad (4.25)$$

Fazendo-se a transformação integral da equação (4.24) e colocando em evidência os deslocamentos, se obtém:

$$x(s) = \frac{f_0}{m} \frac{1}{s^2 + 2\eta s + \omega^2} \quad (4.26-a)$$

na qual

$$2\eta = \frac{3Ic}{ml^3} \quad (4.26-b)$$

$$\omega^2 = \frac{3IE}{ml^3} \quad (4.26-c)$$

A equação (4.26-a) também pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$x(s) = \frac{f_0}{m} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (4.27-a)$$

em que

$$s_{1,2} = -\eta \pm \varpi i \quad (4.27-b)$$

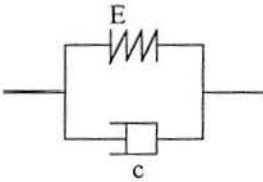

$$\varpi = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.27-c)$$

$$\zeta = \frac{\eta}{\omega} \quad (4.27-d)$$

cuja inversa, segundo as fórmulas (2.3) ou (2.14) é dada por:

$$x(t) = \frac{f_0}{m\varpi} \text{sen}(\varpi t) e^{-\eta t} \quad (4.28)$$

Soluções numéricas podem ser obtidas para os tempos de interesse ao se utilizar a expressão (4.27-a), que fornece os deslocamentos no domínio complexo, e os métodos de inversão da transformada de Laplace. Para este trabalho foram empregados os seguintes dados:

<p>Carregamento:</p> $f(t) = 2,0 \delta(t) \text{ N} \quad \therefore \quad f_0 = 2,0 \text{ N s}$	
<p>Reologia:</p> $E = 12 \times 10^9 \text{ Pa}$ $c = 43 \times 10^7 \text{ Pa s}$	
<p>Geometria:</p> <p>Seção Transversal da haste:</p> $r = 0,0025 \text{ m}$ <p>Comprimento: $l = 0,60 \text{ m}$</p>	
<p>Massa concentrada:</p> $m = 2,12 \text{ kg}$	

QUADRO 4.3 - Entrada de dados para o oscilador

A tabela a seguir mostra os resultados para alguns valores temporais e o erro percentual cometido na utilização de cada método de inversão.

TABELA 4.7 - Desempenho dos métodos de inversão

t (s)	x (mm)	ERRO (%)			
		MÉTODO DA QUADRATURA	SÉRIE TRIG. + ACEL (301 Av)	SÉRIE TRIG. + ACEL (149 Av)	SÉRIE TRIG. (509 Av)
0,25	128,51	$2,4 \times 10^{-11}$	$0,4 \times 10^{-11}$	$5,7 \times 10^{-5}$	$2,7 \times 10^{-2}$
0,75	-90,674	$8,6 \times 10^{-6}$	$9,1 \times 10^{-11}$	$3,9 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-1}$
1,25	63,785	$1,6 \times 10^{-2}$	$7,7 \times 10^{-10}$	$7,4 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-1}$
1,75	-44,733	$9,5 \times 10^{-1}$	$2,8 \times 10^{-9}$	$8,0 \times 10^{-2}$	$5,3 \times 10^{-1}$
2,75	-21,794	132,225	$2,1 \times 10^{-7}$	2,09	1,70

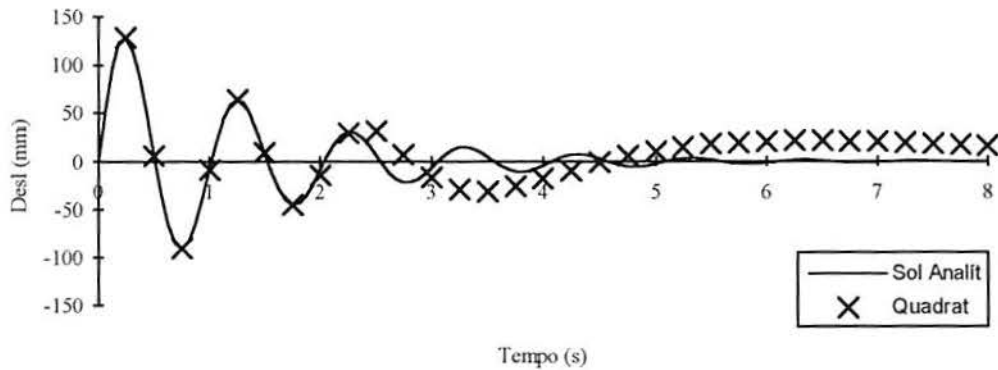


FIGURA 4.7 - Desempenho do método da quadratura

A grande precisão que o método da quadratura mostrou nos casos anteriores, neste exemplo, é rapidamente deteriorada ao longo do tempo, o que leva a resultados bastante longe dos ideais logo após dois ciclos vibratórios. Assim, este método de inversão deve ser evitado quando o problema em questão envolver carregamentos notadamente de características dinâmicas. O resultado seria ainda pior se o sistema não fosse amortecido, o que eliminaria a função exponencial da equação solução.

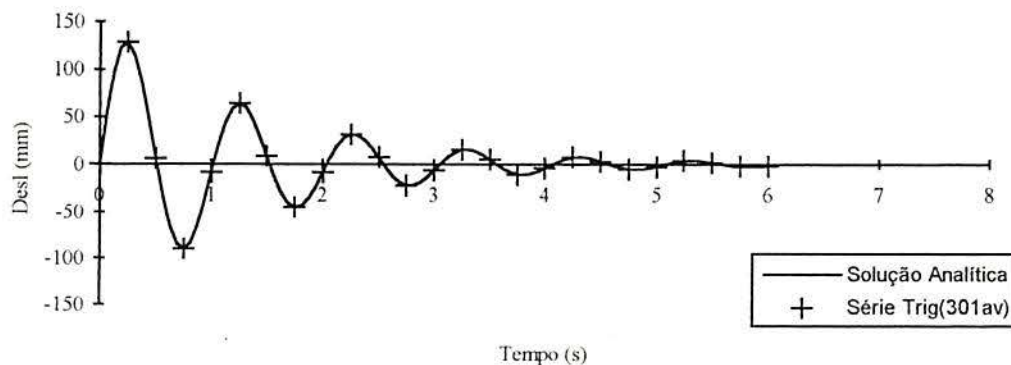


FIGURA 4.8 - Desempenho do método da série trigonométrica com aceleração de convergência

Por outro lado, o método da série de Fourier apresentou bons resultados mesmo quando a amplitude da oscilação já estava muito próxima de zero, onde o erro de arredondamento se torna significativo. No entanto, é necessário que se pague um alto preço por isto. O número de avaliações funcionais cresce muito com a urgência de uma maior precisão nos resultados. Neste exemplo, foram necessárias centenas de avaliações da equação (4.27-a) ao invés das oito necessárias no método da quadratura.

A necessidade da utilização de um acelerador de convergência de séries, no caso, o algoritmo épsilon, mostra-se evidente. Quando se tentou fazer as inversões numéricas das transformadas sem o uso deste algoritmo, o número de avaliações funcionais chegou a 509 de forma que se alcançasse uma precisão razoável. Em seu trabalho, De Hoog, Knight e Stokes (1982), utilizando esta formulação chegaram a 1001 avaliações da função a ser invertida ao desconsiderarem o acelerador de convergência, mas considerando-o, conseguiram diminuir este número para 17 utilizando outro algoritmo de aceleração, chamado algoritmo do quociente de diferenças. Empregando o método baseado na aceleração de convergência da série de Fourier, exposto no item 2.3.4, o número de avaliações funcionais caiu para 35, mantendo a mesma precisão requerida.

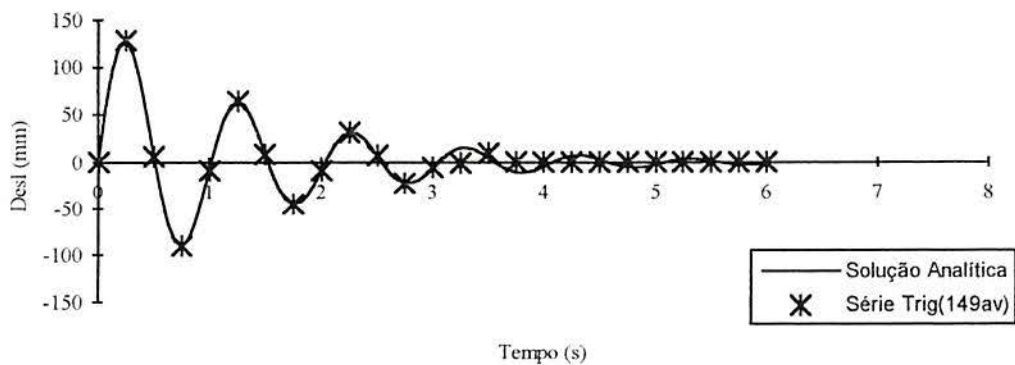


FIGURA 4.9 - Desempenho do método da série trigonométrica com aceleração de convergência

Convém salientar ainda que nas análises quasi-estáticas anteriores, a combinação que forneceu os melhores resultados para o método com acelerador de convergência foi a utilização dos parâmetros fornecidos por Piessens e Huysmans juntamente com a expressão de De Hoog, Knight e Stokes. Esta expressão mostrou-se também mais eficiente quando a análise era vibratória. No entanto, os parâmetros que mais se adequaram foram aqueles dados também por estes últimos pesquisadores.

5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

5.1 ANÁLISE QUASI-ESTÁTICA

Baseando-se no princípio dos trabalhos virtuais, as equações de equilíbrio de um corpo podem ser apresentadas como

$$\int_V \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV = \int_V \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{b}} dV + \int_A \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{t}} dA \quad (5.1)$$

cujo lado esquerdo representa a energia de deformação virtual devido às tensões internas e o lado direito, o trabalho virtual das ações de volume e superfície atuantes externamente. No Método dos Elementos Finitos, o corpo analisado é aproximado de forma que o campo de deslocamentos dentro de cada elemento da discretização, seja interpolado por uma função contínua 'N', ou seja

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{U}}^e \quad (5.2)$$

onde ' $\underline{\underline{U}}^e$ ' é um vetor que contém os valores dos deslocamentos dos nós de um elemento da discretização. Além das equações de equilíbrio, se necessita das relações deslocamentos-deformações:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}^e \quad (5.3)$$

Se o corpo em questão for constituído por um material viscoelástico, esta equação é função do tempo, cuja transformada de Laplace, no caso de condições iniciais nulas, é dada por

$$\underline{\varepsilon}(s) = \underline{B} \underline{U}^e(s) \quad (5.4)$$

o mesmo ocorrendo com a equação (5.2):

$$\underline{U}(s) = \underline{N} \underline{U}^e(s) \quad (5.5)$$

Ainda, são necessárias as relações constitutivas do material de que é constituído o corpo a ser analisado. Se o material obedecesse a leis elástico-lineares, se poderia escrever que

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon} \quad (5.6)$$

em que a matriz de rigidez pode ter, segundo o Método da Correspondência, suas constantes técnicas substituídas pelas razões de polinômios vistas nos capítulos precedentes, originando a transformada de Laplace da equação constitutiva viscoelástica:

$$\underline{\sigma}(s) = \underline{C}(s) \underline{\varepsilon}(s) \quad (5.7)$$

Da mesma forma, a equação (5.1) para materiais elásticos deve ser a mesma no caso de materiais viscoelásticos, quando levada ao domínio transformado pela substituição das constantes técnicas e vetores de carga. Portanto, substituindo (5.7), juntamente com as expressões (5.4) e (5.5), na equação de equilíbrio (5.1), resulta, para variações arbitrárias de deslocamento, que

$$\int_V \underline{B}^T \underline{C}(s) \underline{B} dV \underline{U}^e(s) = \int_V \underline{N}^T \underline{b}(s) dV + \int_A \underline{N}^T \underline{t}(s) dA \quad (5.8)$$

ou, em forma matricial:

$$\underline{K}(s) \underline{U}^e(s) = \underline{F}(s) \quad (5.9)$$

que é o sistema de equações lineares que fornece a solução em termos de deslocamentos viscoelásticos da estrutura no domínio transformado. Neste trabalho, o carregamento é aplicado sobre a estrutura na forma de uma função de Heaviside. No entanto, há a possibilidade de algumas cargas serem aplicadas em instantes de tempo diferentes, ao longo

da estrutura. Assim, segundo (2.5), a equação acima poderia ser escrita da seguinte maneira:

$$\underline{K}(s) \underline{U}^c(s) = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-a_1 s} \\ \vdots \\ e^{-a_n s} \end{Bmatrix} \frac{1}{s} \quad (5.10)$$

ou

$$s \underline{K}(s) \underline{U}^c(s) = \underline{F}_0 \begin{Bmatrix} e^{-a_1 s} \\ \vdots \\ e^{-a_n s} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

ou ainda que

$$\underline{Q}(s) \underline{U}^c(s) = \underline{F}_0 \begin{Bmatrix} e^{-a_1 s} \\ \vdots \\ e^{-a_n s} \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

A transformada dos deslocamentos incógnitos, solução da equação (5.12), é aplicada em (5.4), se obtendo as deformações específicas transformadas, que, por sua vez, podem ser empregadas na obtenção da transformada de Laplace das tensões viscoelásticas, segundo a equação (5.7). O retorno ao plano físico, proporcionado por qualquer método de inversão numérica da transformada de Laplace, fornece as soluções do problema viscoelástico. Para o método baseado na quadratura gaussiana, os deslocamentos seriam dados por:

$$\underline{U}^c(t) = \sum_j A_j s_j \underline{U}_j^c(s) \quad (5.13)$$

e, da mesma forma, as tensões. Ainda, a expressão (5.9) sugere, segundo (2.15), que no domínio físico o problema estaria formulado da seguinte maneira:

$$\underline{K}(t) * \underline{U}^c(t) = \underline{F}(t) \quad (5.14)$$

Para o caso de estruturas de barras analisadas, por exemplo, por um programa para cálculo de sistemas de pórtico plano, como não há a presença da matriz 'B', deve-se proceder ao cálculo das forças de extremidade de barra no domínio transformado diretamente através da expressão (5.9) em termos de elemento, após o cálculo dos deslocamentos incógnitos. As forças no domínio do tempo podem ser então calculadas por uma expressão também semelhante àquela descrita em (5.13).

5.2 ANÁLISE DINÂMICA

Numa análise de vibrações, as forças de inércia são importantes e devem ser consideradas nas equações de equilíbrio. Portanto, pelo princípio dos trabalhos virtuais, mais uma parcela deve contribuir para o trabalho devido às cargas externas:

$$\int_V \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV = \int_V \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{b}} dV + \int_A \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{t}} dA - \int_V \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\ddot{U}}} dV \quad (5.15)$$

O termo inercial, que aparece por último na equação acima, carrega o sinal negativo porque a inércia atua na direção oposta ao sentido positivo das acelerações. O símbolo 'ρ' representa a massa específica e os dois pontos sobre o vetor de deslocamentos indicam derivada segunda dos deslocamentos em relação ao tempo que também pode ser interpolada pelas mesmas funções utilizadas em (5.2):

$$\underline{\underline{\ddot{U}}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\ddot{U}}^e} \quad (5.16)$$

A partir da equação (5.8), ao se anexar o termo devido às forças inerciais, se obtém a expressão a seguir para variações arbitrárias de deslocamentos em que a transformada do vetor de acelerações obedece ao disposto em (2.9), sob condições iniciais nulas.

$$\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}}(s) \underline{\underline{B}} dV \underline{\underline{U}}^e(s) = \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{b}}(s) dV + \int_A \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{t}}(s) dA - s^2 \int_V \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} dV \underline{\underline{U}}^e(s) \quad (5.17)$$

Esta equação, matricialmente fica:

$$s^2 \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}}^e(s) + \underline{\underline{K}}(s) \underline{\underline{U}}^e(s) = \underline{\underline{F}}(s) \quad (5.18)$$

O vetor de cargas neste trabalho será sempre representante de um impacto que, a exemplo do disposto na análise quasi-estática, também pode ter parcelas de carga aplicadas em diversos instantes de tempo ao longo da estrutura. Então, levando em conta (2.7), se obtém que

$$\left[s^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}(s) \right] \underline{\underline{U}}^e(s) = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{F}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{F}}_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-a_1 s} \\ \vdots \\ e^{-a_n s} \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

cuja quantidade entre colchetes conduz a uma nova matriz ' Q ' função da variável ' s ', introduzida anteriormente em (5.12). O problema de vibrações estruturais segundo o MTL fica então definido da seguinte forma:

$$\underline{Q}(s) \underline{U}^e(s) = \underline{F}_0 \begin{Bmatrix} e^{-a_1 s} \\ \vdots \\ e^{-a_n s} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

recaindo na mesma expressão resultante para o caso quasi-estático, ou seja, o problema de vibrações estruturais é o mesmo problema de análise viscoelástica. A diferença reside obviamente no fenômeno, o que conduz a outra ordem de grandeza para as rigidezes e viscosidades envolvidas nos modelos reológicos. O processo de cálculo é o mesmo.

Para os objetivos almejados neste trabalho, a generalidade apresentada na aplicação das cargas sobre as estruturas, conforme as expressões (5.12) e (5.20), não será necessária, sendo reduzida ao caso específico em que o carregamento é aplicado sempre num único instante de tempo, definido na origem. Isto conduz à seguinte simplificação para o sistema de equações no domínio transformado:

$$\underline{Q}(s) \underline{U}^e(s) = \underline{F}_0 \quad (5.21)$$

O processo alternativo de cálculo da resposta viscoelástica e dinâmica de estruturas laminadas em material compósito apresentado acima, será comparado neste trabalho com o processo incremental das variáveis de estado ou Método das Variáveis de Estado (MVE) em exemplos quasi-estáticos. Como este processo alternativo apresenta uma formulação colocada toda em termos de expressões que se encontram no domínio da transformada de Laplace, fica justificado o emprego da denominação Método da Transformada de Laplace ou MTL, utilizada na identificação deste procedimento neste trabalho.

6 HIPÓTESES E PROCEDIMENTOS DO MODELO COMPUTACIONAL

Este capítulo apresenta uma descrição das principais características do modelo numérico proposto por Marques (1994) em seu programa PAINEL. Abaixo, estão apresentadas as hipóteses e os procedimentos numéricos utilizados na elaboração do modelo e as principais etapas de análise do programa computacional.

Como pode ser visto no manual de entrada de dados apresentado nos anexos, o programa PAINEL permite, além de análises estática e dinâmica, análises não-lineares e de falhas, bem como o comportamento do material pode ser dependente da temperatura e umidade. Assim, são omitidos na seqüência todos aqueles procedimentos que dizem respeito a estes tipos de análises e comportamentos por se tratarem de assuntos além do escopo deste trabalho.

6.1 HIPÓTESES DO MODELO COMPUTACIONAL

Na elaboração do modelo computacional, Marques (1994) considerou as seguintes hipóteses:

- a) Os materiais que constituem as estruturas apresentam comportamento elástico linear ou viscoelástico linear.
- b) As estruturas são delgadas ou moderadamente espessas e as lâminas que as constituem devem ser ortótropas.
- c) Os deslocamentos sofridos pela estrutura podem ser arbitrariamente grandes, mas as deformações são supostas pequenas.

6.2 ASPECTOS DA FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Os principais aspectos e procedimentos numéricos do modelo computacional são os seguintes:

- a) A formulação é do tipo incremental e se baseia em uma descrição cinemática lagrangeana total e utiliza como medidas de tensão e deformação o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e o tensor deformação de Green-Lagrange, respectivamente.
- b) Para a modelagem da estrutura, são utilizados elementos finitos tridimensionais degenerados de quatro, oito ou nove nós, deduzidos para a análise de cascas.
- c) Na análise viscoelástica, as deformações dependentes do tempo são obtidas originalmente através do método das variáveis de estado, exposto a seguir. Neste caso, os intervalos de tempo são estabelecidos automaticamente, tendo por base a condição de constância dos incrementos das deformações dependentes do tempo em todos os passos incrementais. A outra alternativa é a utilização do MTL, que dispensa o estabelecimento de intervalos de tempo e que ainda, por intermédio do cálculo da matriz de massa do sistema, pode conduzir a análises dinâmicas da estrutura.
- d) As integrações numéricas inerentes ao método dos elementos finitos podem ser de três tipos: completa, reduzida uniforme e reduzida seletiva.

6.3 PRINCIPAIS ETAPAS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

1. Leitura dos dados que identificam o tipo de análise, os parâmetros de controle, a malha de elementos finitos, o esquema de laminação e as condições de contorno da estrutura.
2. Montagem das matrizes de deformações-deslocamentos nos pontos de integração dos elementos.
3. Leitura dos valores de referência das cargas externas.
4. Montagem do vetor das cargas nodais equivalentes às cargas externas de referência.

5. Se a análise requerida empregar o MTL, ocorre o estabelecimento do parâmetro complexo 's' segundo as possíveis variações deste método: análise viscoelástica utilizando o método da quadratura; da série de Fourier ou análise dinâmica (série de Fourier).
6. Aplicação do método da correspondência, substituindo cada constante técnica por sua respectiva razão de polinômios, caso a análise empregue o MTL.
7. Determinação das matrizes constitutivas dos materiais referidas às direções principais das lâminas.
8. Se a análise for dinâmica, é procedida a montagem da matriz de funções de interpolação para construção das matrizes de massa dos elementos.
9. Montagem das matrizes de rigidez dos elementos.
10. Se a análise for dinâmica por intermédio do MTL, ocorre a montagem das matrizes de massa dos elementos.
11. Se a análise for viscoelástica incremental, monta-se o vetor dos incrementos de cargas viscoelásticas correspondentes ao intervalo de tempo do presente passo incremental.
12. Determinação dos incrementos de deslocamentos nos pontos nodais dos elementos através da solução do sistema de equações lineares pelo método frontal.
13. Determinação das tensões atualizadas e dos vetores das forças equivalentes a estas tensões nos elementos.
14. Para o caso da análise sob o MTL, são processados os somatórios pertinentes a cada método de inversão numérica da transformada de Laplace, tanto para os deslocamentos como para as tensões. Se o método de inversão utilizado for o baseado na série de Fourier, ocorre o encaminhamento das soluções parciais ao algoritmo de aceleração de convergência. Para cada termo do somatório, retorna-se à etapa 5.
15. No caso da análise viscoelástica incremental é verificado se o tempo final foi atingido, em caso contrário retorna-se à etapa 7.

6.4 O MÉTODO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO

Tanto nos aspectos da formulação numérica como nas etapas do programa computacional descritas acima, foi mencionada a abordagem viscoelástica do tipo incremental do método das variáveis de estado. Este método é apresentado a seguir em uma forma bastante sucinta. Uma apresentação mais elaborada é realizada também no trabalho de Marques ao levar em conta a influência da temperatura e umidade.

A colocação de equações constitutivas viscoelásticas em termos de operadores lineares diferenciais foi bastante conveniente para o desenvolvimento e emprego do método da correspondência na solução de problemas de valor inicial. Entretanto, para a dedução do método das variáveis de estado se deve usar a forma integral de Stieltjes dado pelo teorema de Riez:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t - \tau) d\alpha(\tau) \quad (5.1)$$

ou

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{\partial \alpha(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5.2)$$

onde 'D' é a relação funcional contínua e linear existente entre a aplicação da tensão e a resposta do material em termos de deformações específicas, conforme o modelo reológico adotado, conhecido como função de fluência do material. Através da integração por partes realizada na última equação, se obtém a forma alternativa abaixo:

$$\varepsilon(t) = \frac{\alpha(t)}{E} + \int_0^t d(t - \tau) \alpha(\tau) d\tau, \quad d(t - \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} D(t - \tau) \quad (5.3)$$

separando as deformações específicas sofridas pelo material em elásticas ou instantâneas e viscoelásticas.

A partir da adoção de um modelo reológico qualquer para a análise viscoelástica requerida, a parte viscoelástica pode ser simulada por uma seqüência de modelos Kelvin em série, compondo o chamado modelo Kelvin generalizado. Matematicamente isto equivale a se aproximar a derivada parcial da função de fluência por uma série de Dirichlet-Prony:

$$d(t - \tau) \cong \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} e^{-\frac{t-\tau}{\theta_i}} \quad (5.4)$$

que, ao ser substituída na equação (5.3), conduz a

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \sum_{i=1}^n q_i(t) \quad (5.5)$$

na qual

$$q_i(t) = \int_0^t \frac{1}{E_i} e^{-\frac{t-\tau}{\theta_i}} \sigma(\tau) d\tau, \quad q_i(0) = 0 \quad (5.6)$$

Assim, a equação integral (5.1) foi substituída pelas 'n' equações desacopladas, funções das variáveis de estado 'q_i'. A integral da equação (5.6) também pode ser eliminada ao se realizar sua diferenciação com relação a 't' através da regra de Leibniz, resultando nas 'n' equações diferenciais de primeira ordem a seguir.

$$\dot{q}_i(t) + \frac{q_i(t)}{\theta_i} = \frac{\sigma(t)}{E_i} \quad (5.7)$$

Estas equações podem ser resolvidas, por exemplo, de forma numérica através do método incremental das diferenças finitas.

6.5 FLUXOGRAMA DAS ETAPAS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

O fluxograma com todas as etapas do programa computacional pertinentes a este trabalho está apresentado a seguir. As modificações realizadas no programa para o cálculo viscoelástico e dinâmico via inversão numérica da transformada de Laplace (MTL), gerando sua segunda versão, estão apresentadas em contornos pontilhados de forma a serem distinguidos do restante do programa, já existente na primeira versão.

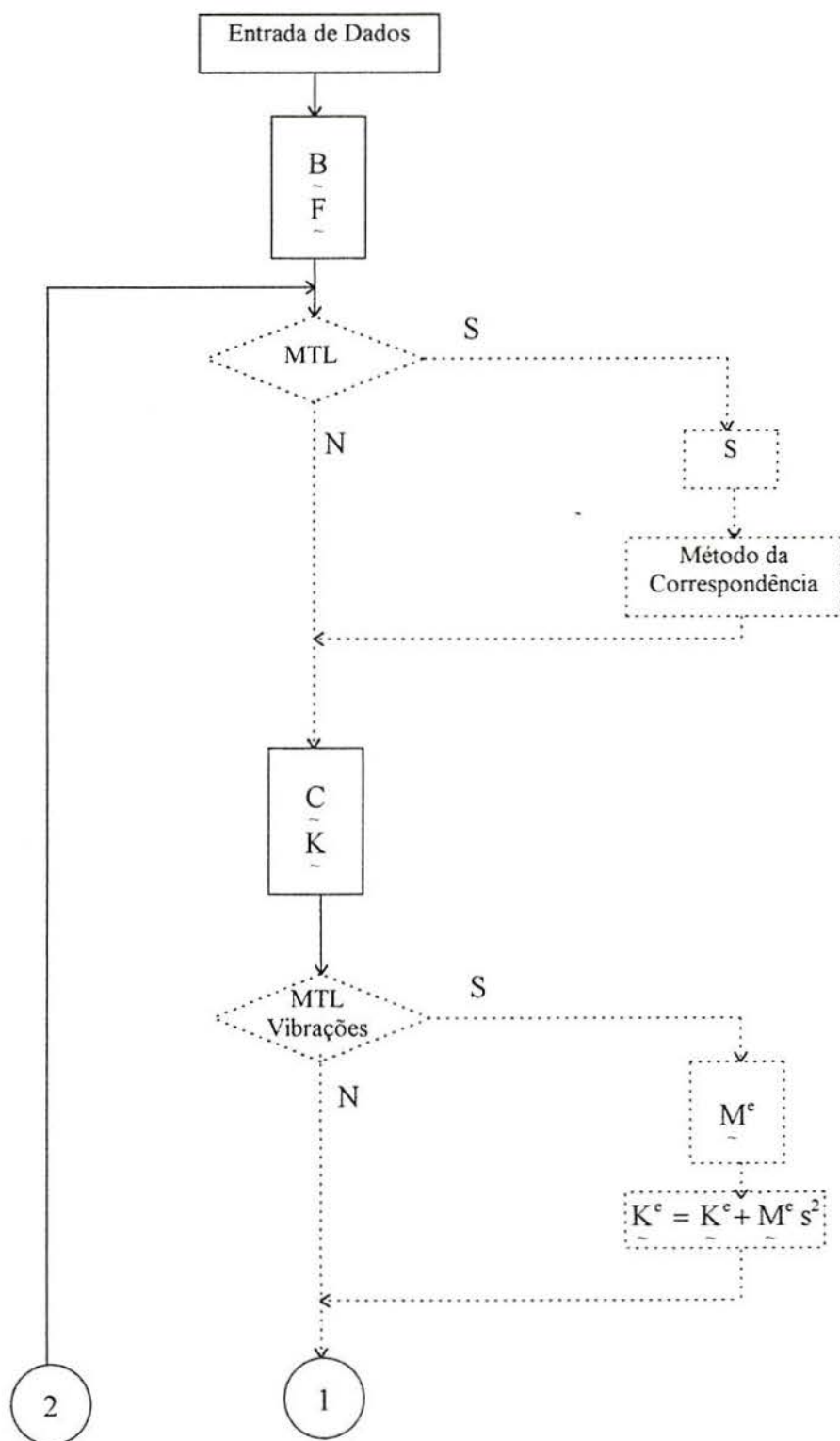


FIGURA 6.1 - Fluxograma simplificado do programa PAINEL2

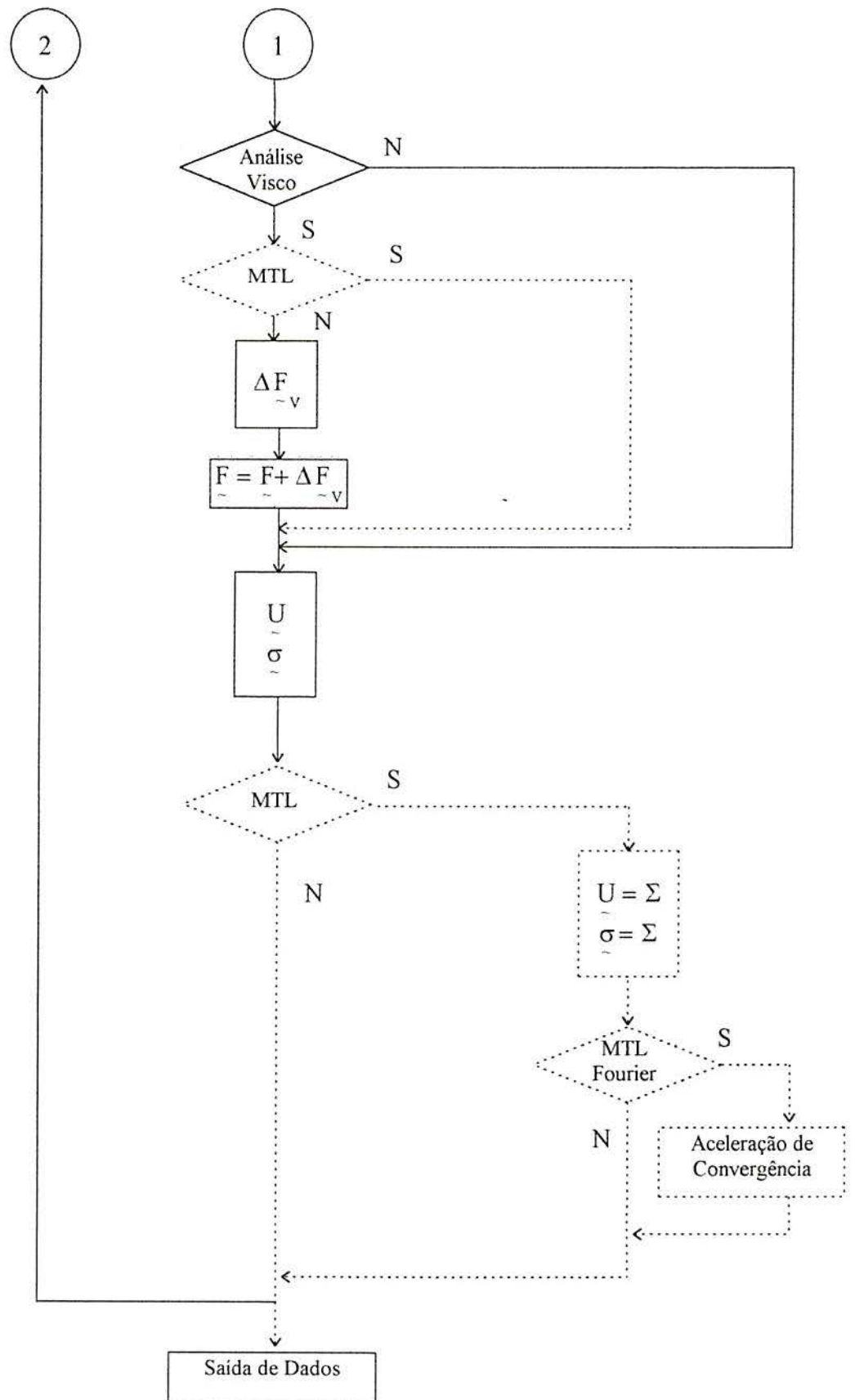


FIGURA 6.2 - Fluxograma simplificado do programa PAINEL2 (continuação)

7 APLICAÇÕES

7.1 VIGA ISÓTROPA VISCOELÁSTICA

Para a análise do exemplo a seguir, foi realizada a implementação do Método da Transformada de Laplace (MTL) ao programa para cálculo de sistemas de pórtico plano dado por Brebbia e Ferrante (1978). Este exemplo consiste na estrutura idealizada na figura abaixo.

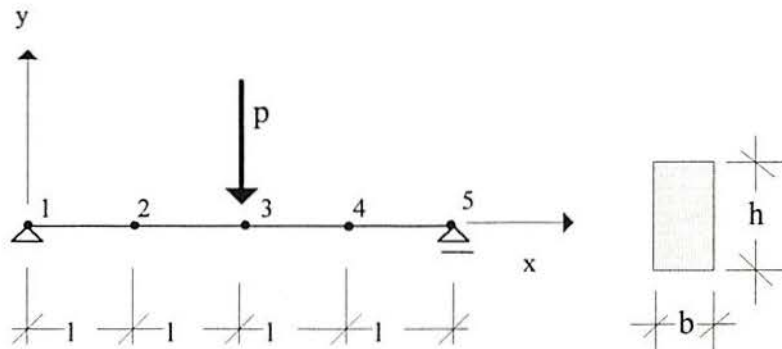
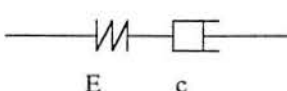
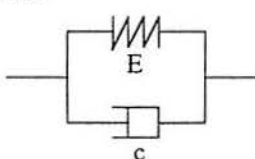
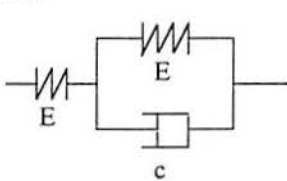


FIGURA 7.1 - Viga bi-apoiada de seção transversal retangular

A viga isostática foi discretizada em quatro barras de pórtico plano de mesmo comprimento e seção transversal. No QUADRO 7.1 são apresentados todos os parâmetros necessários para a solução da estrutura para cada um dos três modelos reológicos implementados no programa. A viga foi analisada segundo os modelos Kelvin, Maxwell e Standard. Os resultados para as deflexões desenvolvidas pela viga estão apresentados na FIGURA 7.2, na qual é notadamente verificado o comportamento de cada modelo ao longo do tempo. Cabe salientar mais uma vez que, apesar do modelo Maxwell possuir uma resposta ilimitada ao longo do tempo, a teoria em que se baseia o cálculo da estrutura está condicionada ao campo das pequenas deformações.

Geometria :		
Seção Transversal	:	0,15 x 0,30 m
Comprimento total	:	2,50 m
Carregamento:		
$p = 0,1 \text{ MN}$		
Reologia :		
Maxwell:	Kelvin:	Standard:
		
$E = 20.000,00 \text{ MPa}$		$c = 2.000.000,00 \text{ MPa dia}$

QUADRO 7.1 - Entrada de dados para a viga viscoelástica

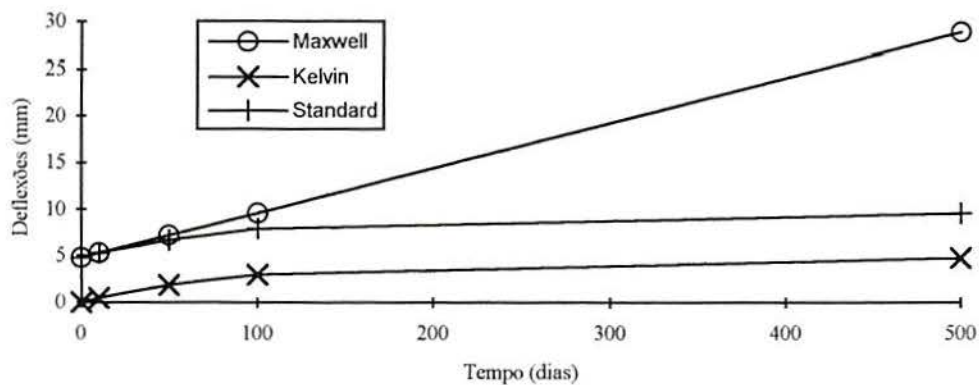


FIGURA 7.2- Saída de dados segundo a reologia

7.2 LAJE ISÓTROPA VISCOELÁSTICA

A aplicação a seguir se trata de uma laje isótropa submetida a uma carga distribuída ao longo de uma linha no sentido da sua maior dimensão, tendendo desta forma ao caso limite da viga analisada no exemplo anterior pelo programa de pórtico plano adaptado ao MTL. A laje mostrada na FIGURA 7.3 foi discretizada em dez elementos de nove nós, conforme a FIGURA 7.4, onde apenas um quarto da laje foi discretizado devido à simetria apresentada pelo problema.

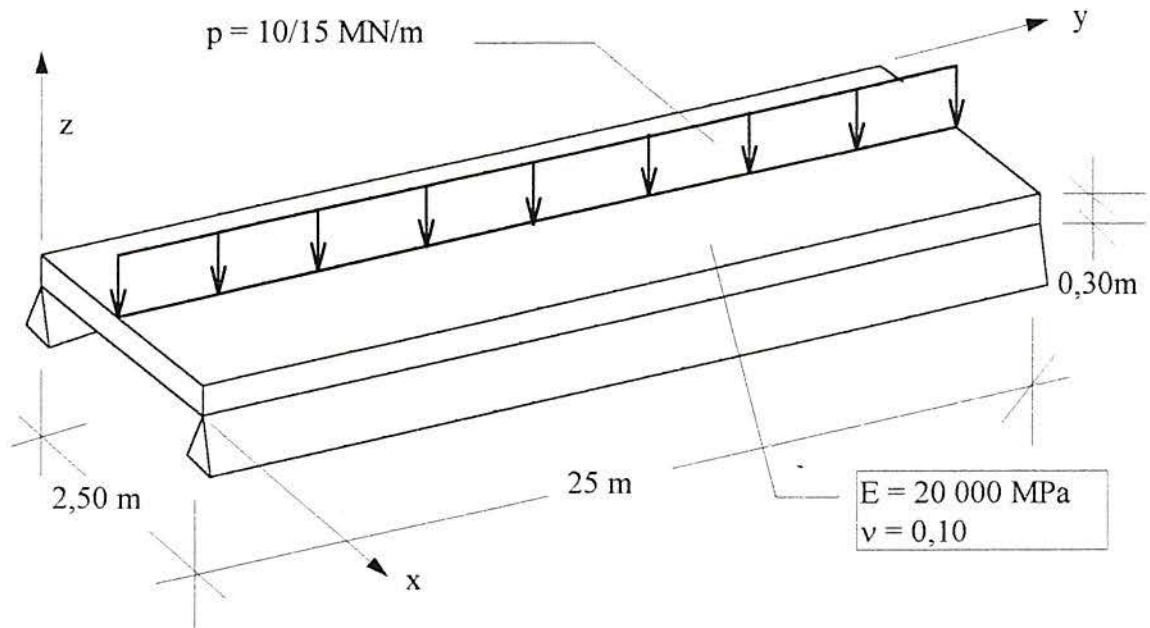


FIGURA 7.3 - Laje isotrópica viscoelástica

Na solução, foi empregado apenas um elemento Kelvin para simular o comportamento viscoelástico da laje, onde o tempo de retardação θ' para a sua função de fluência vale 100. Abaixo, a discretização utilizada.

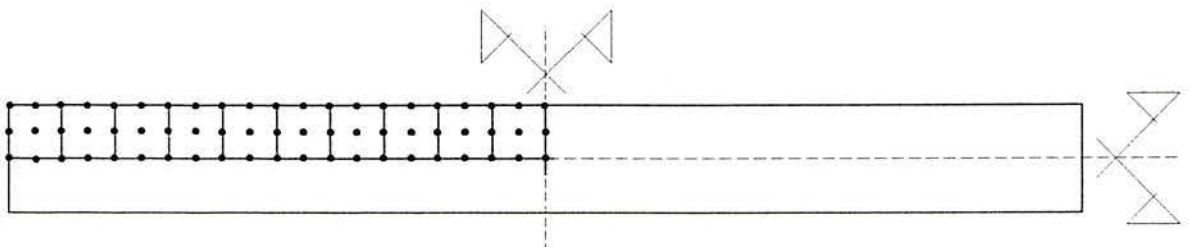


FIGURA 7.4 - Discretização da laje

Os resultados encontrados pelo Método das Variáveis de Estado (MVE) e pelo Método da Transformada de Laplace (MTL), em termos de deflexões para o ponto central da laje, podem ser visualizados na FIGURA 7.5. Os resultados mostram grande concordância entre os métodos, principalmente quando o valor temporal é pequeno. A maior diferença ocorre no final do período da análise (500 dias) e vale 0,80% em relação ao resultado fornecido pelo MVE. Aos 100,51697 dias, esta diferença é de 0,77%; aos 49,45662 dias, 0,55%, e, aos 10,26322 dias, somente 0,17%. Para um valor temporal muito pequeno (0,00001 dia), ambos os métodos fornecem os mesmos resultados.

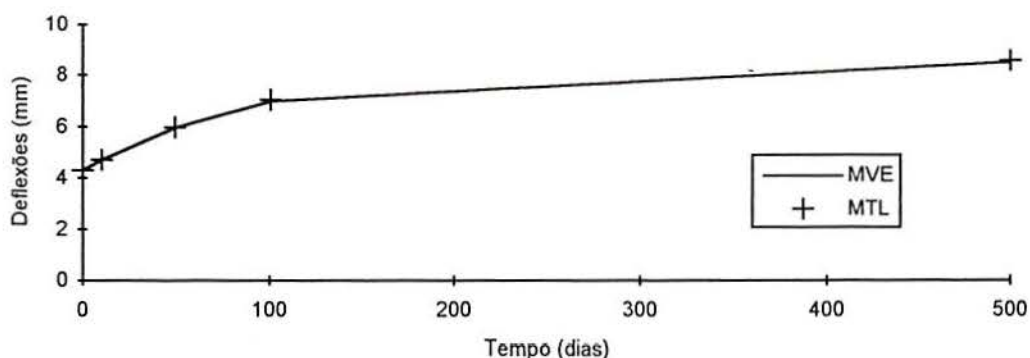


FIGURA 7.5 - Deflexões para o centro da laje viscoelástica

Tanto neste quanto nos próximos exemplos rodados no programa PAINEL, sempre foi utilizada uma regra de integração do tipo reduzida.

7.3 PLACA ISÓTROPA SOB CARGA DISTRIBUÍDA

O exemplo da FIGURA 7.6 consiste de uma placa quadrada isótropa viscoelástica, apoiada em seu contorno, submetida a um carregamento uniformemente distribuído sobre sua superfície. A exemplo do problema anterior, apenas um quarto da placa é discretizado, porém se utilizando oito nós em apenas um elemento finito. Da mesma forma, foi usada uma cadeia com apenas um elemento Kelvin (com $\theta=100$) para o cálculo viscoelástico.

Por sua vez, os resultados para os deslocamentos verticais no centro da placa podem ser vistos na FIGURA 7.7 cujos resultados chegam até a surpreender pela proximidade entre

as soluções provenientes de ambos os métodos. Para o início do período de análise, os resultados continuam coincidindo, e aos 500 dias a diferença chega a 0,02%.

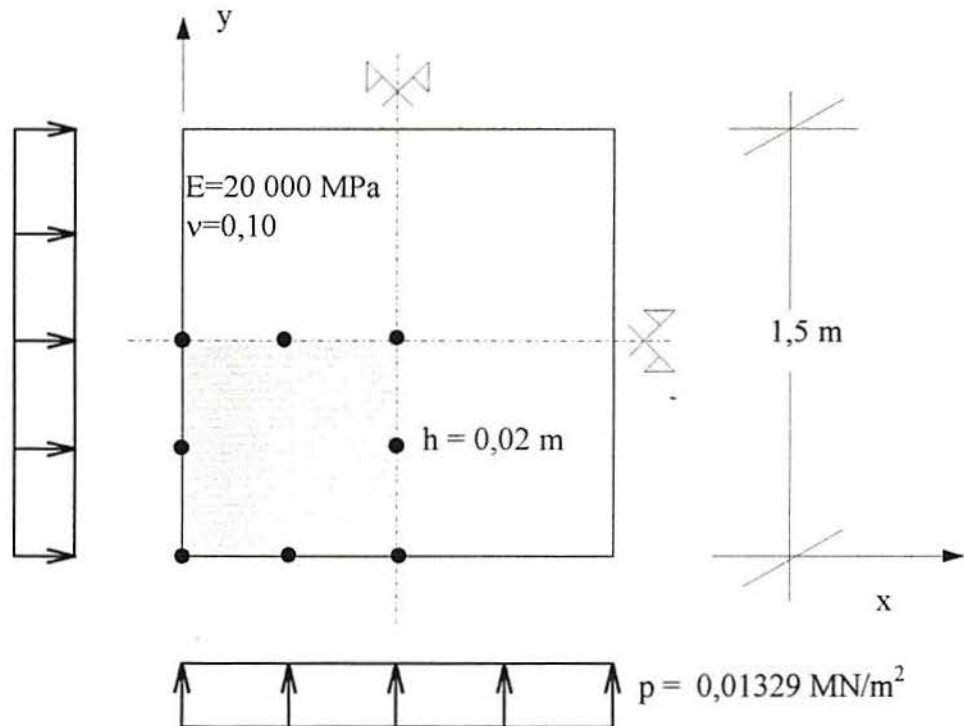


FIGURA 7.6 - Placa viscoelástica

Aos 10 dias, a diferença percentual é de 0,02%; aos 47,90853 dias de 0,04% e, aos 109,70278 dias, volta ao patamar de 0,02%.

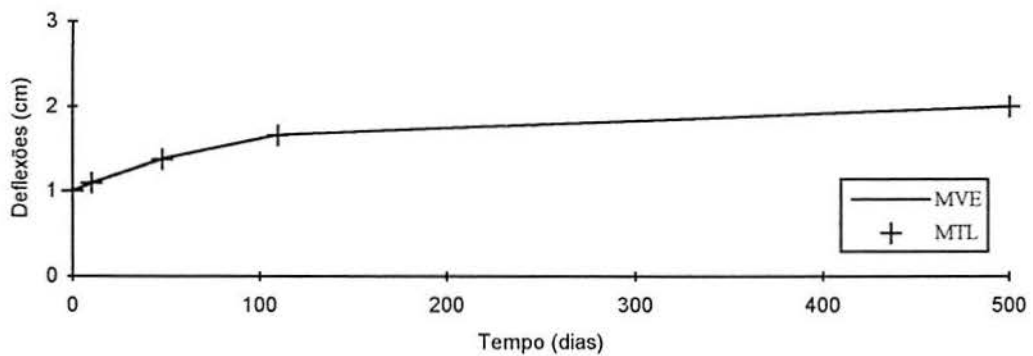


FIGURA 7.7 - Deflexões para o centro da Placa viscoelástica

7.4 CASCA ISÓTROPA SOB CARGA PUNTUAL

A casca esférica ($r = 2,54$ m) da figura abaixo possui uma espessura 'h' de 0,09945 m e uma projeção no plano x-y na forma quadrada, de lado '2a' igual a 1,5698 m. Está carregada puntualmente em seu topo por uma carga de 26,7 kN.

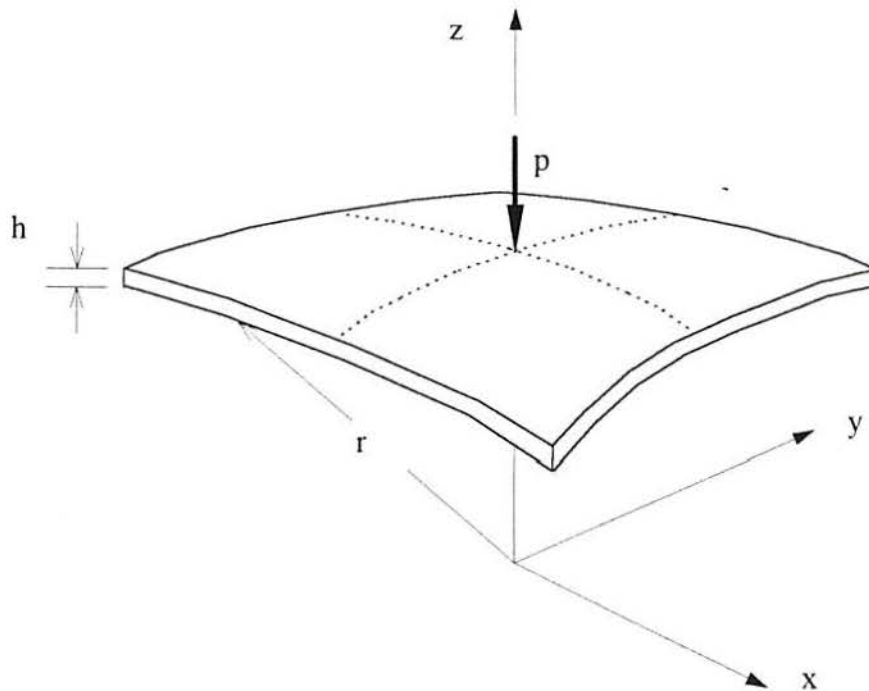


FIGURA 7.8 - Casca esférica viscoelástica

A discretização da casca obedece à configuração mostrada na FIGURA 7.9, onde quatro elementos de nove nós cobrem um quarto da mesma. A estrutura está vinculada da seguinte maneira:

$$x = -a; x = +a : \quad u = v = w = \theta_y = 0 \quad (7.1-a)$$

$$y = -a; y = +a : \quad u = v = w = \theta_x = 0 \quad (7.1-b)$$

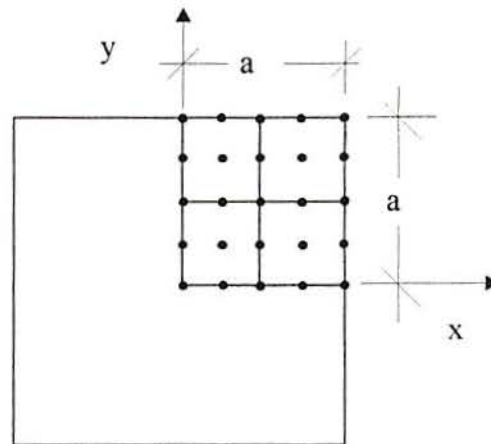


FIGURA 7.9 - Discretização da casca esférica

O material da casca possui comportamento instantâneo e diferido conforme o modelo da FIGURA 7.10, onde 'E' vale 68900 kPa para um coeficiente de Poisson ' ν ' igual 0,30. A unidade de medida do amortecedor é kPa h.

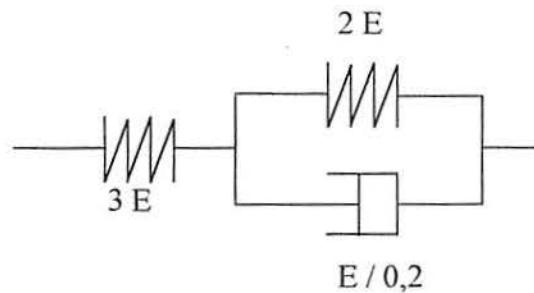


FIGURA 7.10 - Modelo reológico para a casca esférica

Os resultados da análise para as deflexões sofrida pela casca em seu ponto central estão expostos no gráfico a seguir. A resposta viscoelástica da casca para o MTL aproximou-se muitíssimo daquela fornecida através do MVE. Para este exemplo não houve coincidência de resultados, mesmo no início do período da análise, porém a diferença percentual entre as respostas dadas pelos métodos chegou, no máximo, a 2,38% para o instante de tempo de 8,90872 h.

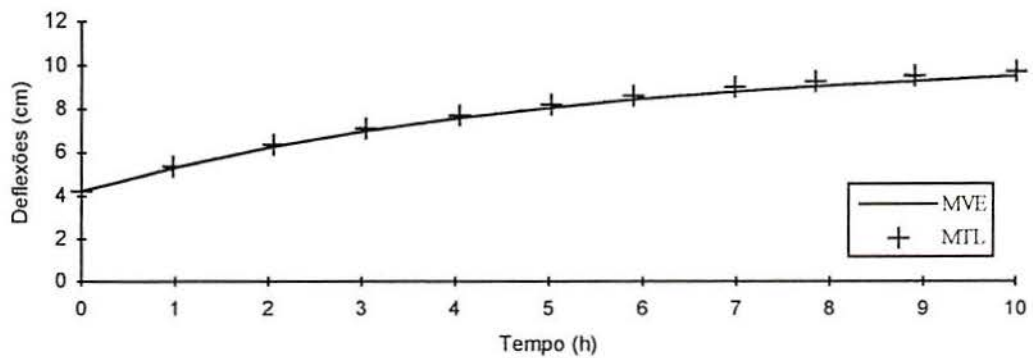


FIGURA 7.11 - Deflexões da casca

7.5 COLISÃO DE PLACAS

O exemplo a seguir trata da colisão de uma placa de massa ' m ' contra outra de massa desprezível a uma velocidade ' v_0 ' medida no instante $t = 0$. As placas possuem a mesma seção transversal de área ' A '. A placa maior, de comprimento ' l_0 ', sofre as vibrações induzidas pela colisão, que são dissipadas segundo o modelo reológico de Zener, mostrado na FIGURA 7.12.

A solução deste exemplo será dada a seguir conforme a extensão do método da transformada de Laplace para sistemas dinâmicos. Primeiramente será utilizado este método com uma inversão analítica da expressão transformada, chegando-se a uma solução fechada exata para o problema. Esta solução, calculada segundo os preceitos desenvolvidos para o método da transformada de Laplace, é comparada com a solução fornecida por Volterra e Zachmanogiu que também resolveram analiticamente este problema em 1965.

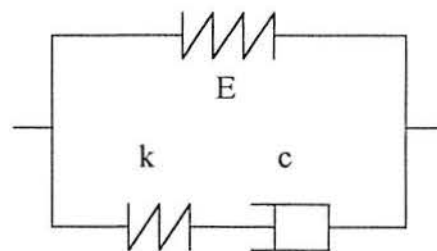


FIGURA 7.12 - Modelo vibracional

Depois, o problema também é resolvido conforme o método da transformada de Laplace, porém através do uso do programa PAINEL, demonstrando desta forma o emprego do MTL conjuntamente com o método dos elementos finitos em sistemas vibratórios.

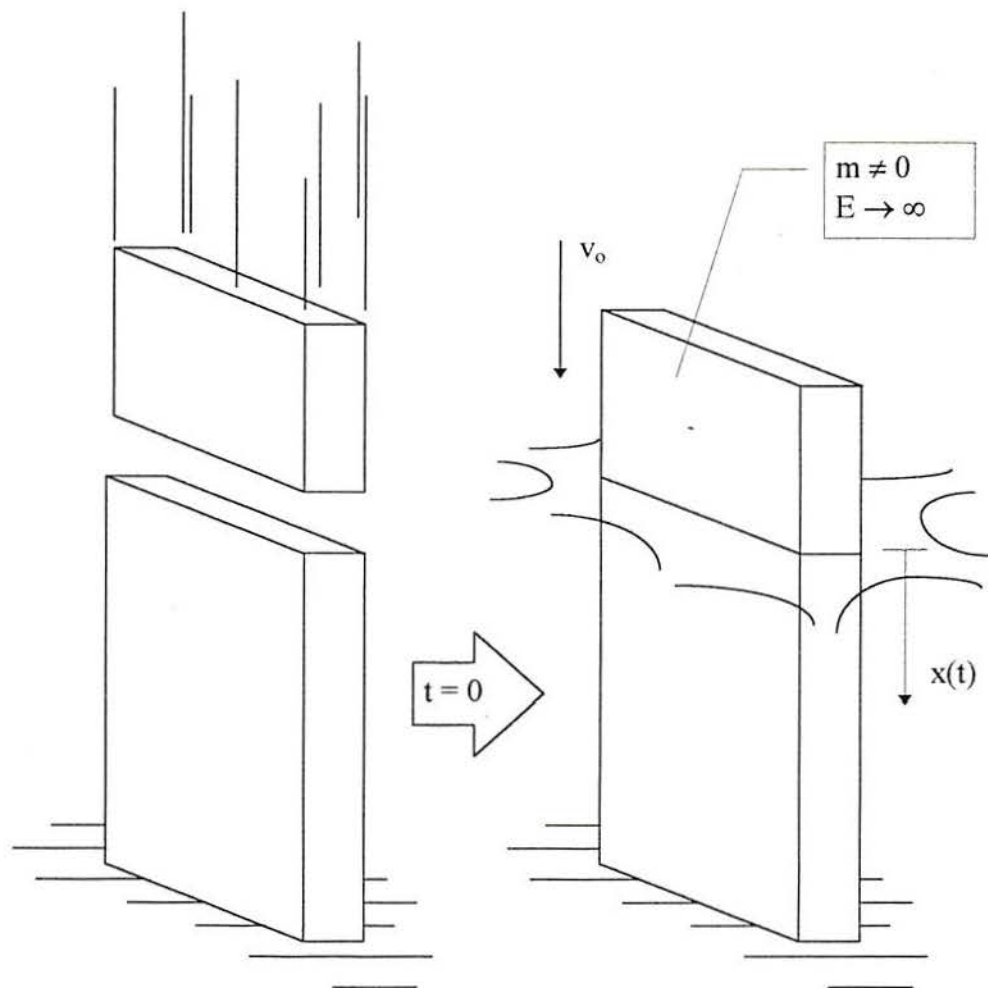


FIGURA 7.13 - Colisão de placas

A equação do movimento para o sistema pode ser escrita como:

$$m\ddot{x} + Kx = f(t) \quad (7.2)$$

em que 'K' é a rigidez a deslocamentos axiais da placa inferior. Esta rigidez, em elasticidade linear, é função do módulo de Young e , portanto, deve ser submetida ao método da correspondência:

$$K = \frac{A}{l_0} E \quad \Rightarrow \quad K(s) = \frac{A}{l_0} \frac{\frac{k+k_1}{k_1} c_1 s + k}{\frac{c_1}{k_1} s + 1} \quad (7.3)$$

Nesta expressão, os polinômios em função de 's' foram desenvolvidos para o modelo Zener no capítulo III (expressões 3.26).

Aplicando à equação (7.2) o operador 'L', resulta que

$$x(s) = \left[\frac{f(s)}{m} + sx(0) + \dot{x}(0) \right] \frac{1}{s^2 + \frac{K(s)}{m}} \quad (7.4)$$

na qual as condições iniciais do problema são

$$x(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (7.5)$$

resultando a seguinte equação no plano transformado:

$$x(s) = v_0 \frac{s + a_1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} \quad (7.6)$$

em que 's₁', 's₂' e 's₃' são as raízes da equação de terceiro grau abaixo:

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \quad (7.7-a)$$

$$a_1 = \frac{k_1}{c_1} \quad (7.7-b)$$

$$a_2 = \frac{A}{l_0 m} (k + k_1) \quad (7.7-c)$$

$$a_3 = \frac{A k k_1}{l_0 m c_1} \quad (7.7-d)$$

Realizando a transformada de Laplace inversa da expressão (7.6) por intermédio da fórmula (2.14), surge finalmente a solução do problema de colisão entre as placas:

$$x(t) = v_0 \left[\frac{s_1 + a_1}{3s_1^2 + 2a_1s_1 + a_2} e^{b_1 t} + \frac{s_2 + a_1}{3s_2^2 + 2a_1s_2 + a_2} e^{b_2 t} + \frac{s_3 + a_1}{3s_3^2 + 2a_1s_3 + a_2} e^{b_3 t} \right] \quad (7.8)$$

A expressão analítica de Volterra e Zachmanogiu era a seguinte:

$$x(t) = A_1 e^{-\lambda t} + e^{-\eta t} (A_2 \cos \omega t + A_3 \sin \omega t) \quad (7.9-a)$$

$$A_1 = \gamma_1 v_0 ; \quad A_2 = \gamma_1 v_0 ; \quad A_3 = \gamma_2 v_0 \quad (7.9-b)$$

$$\gamma_1 = \frac{2\eta}{\omega^2 + (\eta - \lambda)^2} ; \quad \gamma_2 = \frac{\omega^2 + \lambda^2 - \eta^2}{\omega[\omega^2 + (\eta - \lambda)^2]} \quad (7.9-c)$$

em que ' λ ', ' η ' e ' ω ' são as partes reais e imaginárias das mesmas raízes encontradas na solução da equação (7.7), ou seja:

$$s_1 = -\lambda \quad (7.10-a)$$

$$s_2 = -\eta + \omega i \quad (7.10-b)$$

$$s_3 = -\eta - \omega i \quad (7.10-c)$$

Estas raízes podem ser encontradas através do emprego das expressões abaixo, que calculam justamente o caso em que ocorrem duas raízes complexas e uma real.

$$\lambda = -S - T + a_1/3 \quad (7.11-a)$$

$$\eta = (S+T)/2 + a_1/3 \quad (7.11-b)$$

$$\omega = (S - T)\sqrt{3} / 2 \quad (7.11-c)$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}, \quad Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \quad (7.11-d)$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad (7.11-e)$$

Os resultados estão plotados no gráfico a seguir para a entrada de dados constante do QUADRO 7.2. As soluções são coincidentes.

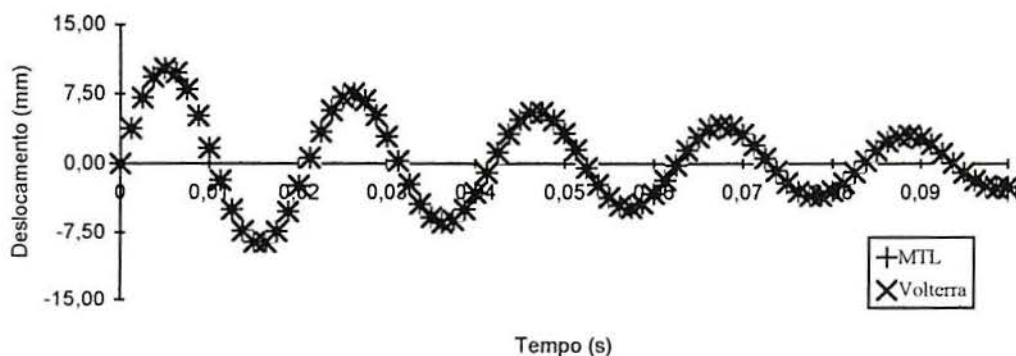


FIGURA 7.14 - Deslocamento ao golpe

<p>Reologia:</p> <p>$E = 3.289.868,134 \text{ Pa}$</p> <p>$k = 657.973,6268 \text{ Pa}$</p> <p>$c = 2.300,00 \text{ Pa s}$</p>
<p>Geometria:</p> <p>$A = 1/40 \text{ m}^2 (1/4 \times 1/10 \text{ m})$</p> <p>$l_0 = 1/2 \text{ m}$</p>
<p>Outros dados:</p> <p>$m = 2 \text{ kg}$</p> <p>$v_0 = \pi \text{ m/s}$</p>

QUADRO 7.2 - Entrada de dados para o problema de colisão de placas

Alternativamente, a situação descrita na FIGURA 7.13 pode muito bem ser substituída pela configuração do problema colocado na FIGURA 7.15, onde as duas placas estão sobrepostas quando, no instante inicial, ocorre a aplicação de uma força impulsiva de módulo ' mv_0 ', solicitando o sistema. O problema de colisão fica assim adequadamente apresentado para o tratamento pelo programa PAINEL.

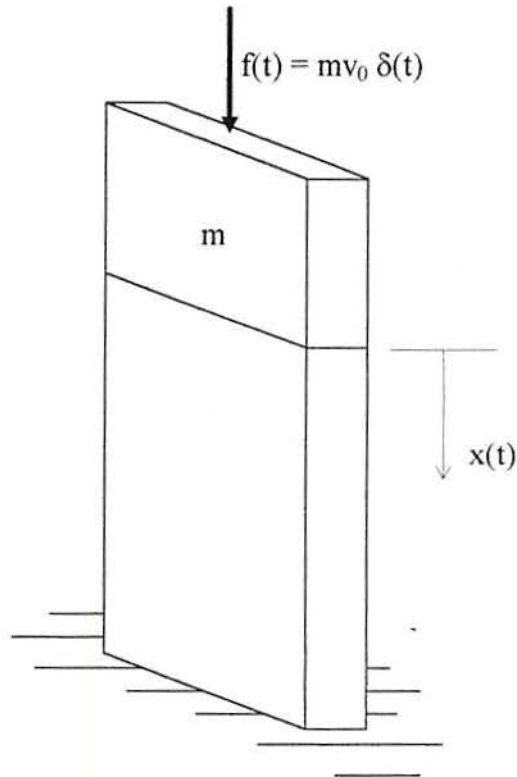


FIGURA 7.15 - Configuração alternativa para o problema de colisão

O problema acima foi discretizado em dois elementos, como mostra a FIGURA 7.16. Cada elemento corresponde a uma das placas. A carga concentrada foi aplicada de forma que a primeira oscilação tomasse o sentido positivo das abcissas. Ainda, em cada elemento ocorre a presença de duas lâminas de espessura 0,05 m cada uma.

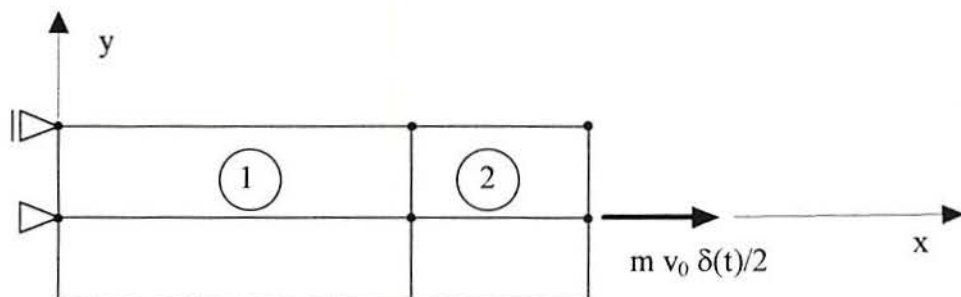


FIGURA 7.16 - Discretização do problema de colisão

Como o programa PAINEL trabalha apenas com cadeias Kelvin, o modelo apresentado na FIGURA 7.12 pode muito bem ser substituído pelo modelo abaixo, cuja equação constitutiva é idêntica àquela gerada pelo modelo Zener atribuído inicialmente ao sistema.

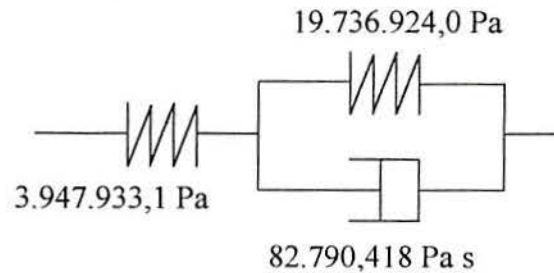


FIGURA 7.17 - Modelo vibracional alternativo

O elemento número dois foi tomado como tendo um comportamento elástico linear cujo módulo de Young na direção 1-1 vale 10^{10} Pa, suficiente para garantir a rigidez axial necessária para a placa de massa 'm'. Os resultados estão plotados abaixo frente à solução exata calculada anteriormente:

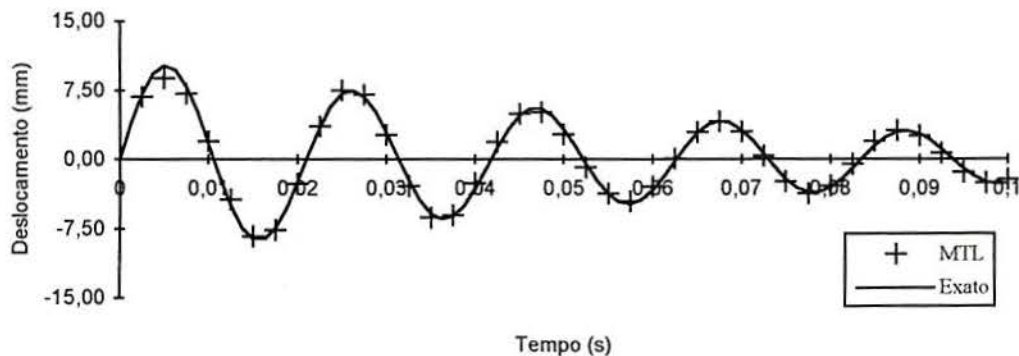


FIGURA 7.18 - Saída de resultados

Os resultados gerados para cada valor temporal pelo programa PAINEL ficaram, em média, 7,53% distantes da solução exata, porém com uma boa aderência à curva o que mostra a eficácia da extensão do método da transformada de Laplace conjuntamente com o método dos elementos finitos para o caso de sistemas vibratórios.

Deve ser levado em consideração ainda que o exemplo acima não foi eficientemente modelado porque não foi desvinculada transversalmente uma placa da outra durante as oscilações. Assim, a placa rígida limita as oscilações transversais no topo da placa inferior e, por conseguinte, acabando por limitar suas oscilações longitudinais também. Ainda assim os resultados são satisfatórios porque não se está comparando, neste exemplo, o MTL com o MVE. Não obstante, o MTL parece não ser interessante quando se objetiva todo o histórico de resposta da estrutura ao longo do tempo, porque o esforço computacional tende a ser bastante grande devido às várias soluções de sistemas de equações para cada ponto de tempo, principalmente quando o método de inversão adotado se baseia na aceleração da série de Fourier. No entanto, apesar de ser menos ágil que os métodos incrementais, o importante é que o exemplo acima mostra que o MTL também pode ser empregado em dinâmica, o que garante sobretudo uma maior confiança no método para resultados em análises viscoelásticas.

7.6 PAINEL DE GRAFITE/EPÓXI

O painel da figura a seguir é constituído por oito lâminas de matriz em resina epóxi e fibras de grafite. Cada lâmina possui uma espessura de 0,00014 m, dispostas num esquema de laminação simétrico conhecido como 'angle-ply', isto é, em relação a um plano médio, as lâminas se repetem, formando ângulos de 45 graus em relação à direção 'x' abaixo. A notação utilizada nesse caso é a seguinte: $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_S$.

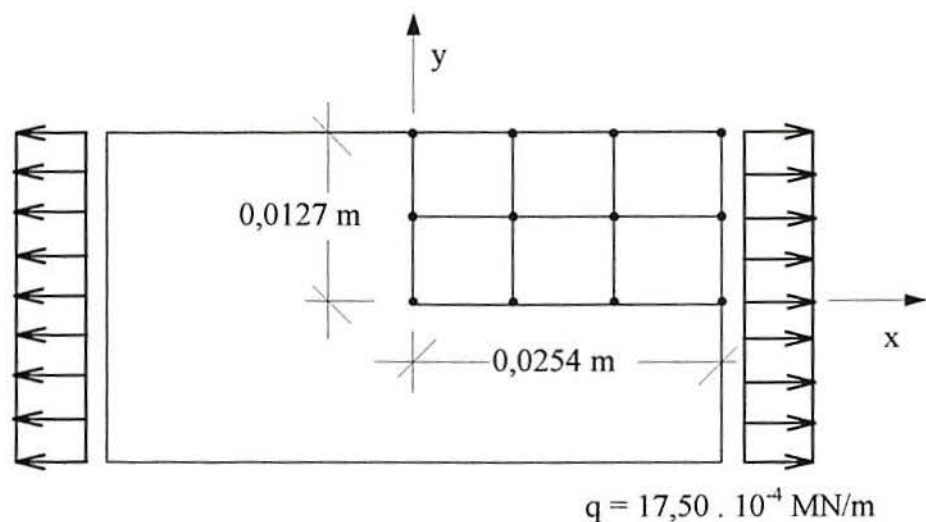


FIGURA 7.19 - Painel de grafite/epóxi tracionado

A discretização utilizada também pode ser vista na FIGURA 7.19 e consiste numa malha de seis elementos finitos de quatro nós. As constantes elásticas utilizadas no problema são: $E_{11}=126540$ MPa; $E_{22}=9842$ MPa; $G_{12}=6327$ MPa e $\nu_{12}=0,34$. Desta forma, é assumido que o material se comporta elasticamente na direção das fibras e viscoelasticamente na direção transversal a elas e também em cisalhamento. Assim, se pode apresentar o comportamento viscoelástico do material nestas direções conforme as cadeias apresentadas a seguir.

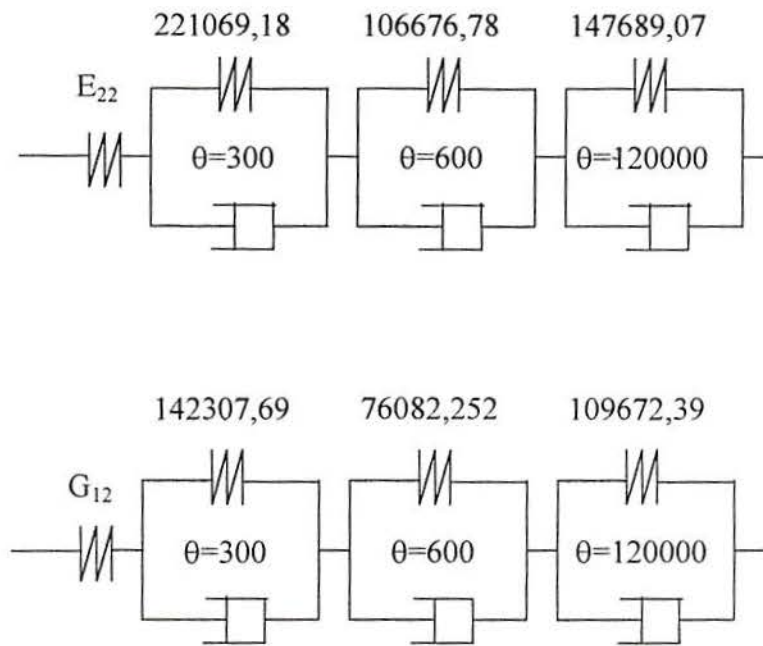


FIGURA 7.20 - Cadeias Kelvin nas direções 2-2 e 1-2 das lâminas

As propriedades do material foram extraídas do trabalho de Lin e Hwang (Marques, 1994), as quais foram aproximadas pelas expressões exponenciais no tempo através de um procedimento iterativo para ajuste de curvas.

Na FIGURA 7.21 se pode ver os resultados encontrados na utilização de ambos os métodos de análise viscoelástica. Novamente a diferença entre o MVE e o MTL coincide no início do período analisado e vai aumentando com o tempo. Não obstante, quando o tempo vale 12000 min esta diferença, percentualmente, é de apenas 1,57%.

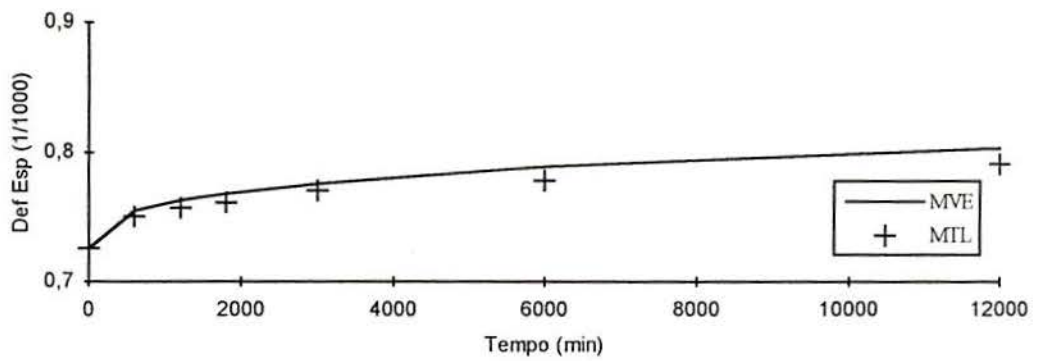


FIGURA 7.21 - Deformações específicas do painel

7.7 CASCA DE GRAFITE/EPÓXI

A casca apresentada na FIGURA 7.22 possui as mesmas dimensões e vinculações adotadas para a estrutura da FIGURA 7.8. Desta vez, porém, esta estrutura é constituída por quatro lâminas de resina epóxi com fibras de grafite, portanto, com as mesmas propriedades constantes no exemplo anterior. As propriedades viscoelásticas são estendidas de forma que nas direções 1-2, 5-5 (relacionadas com a direção 2-2) e 4-4 (idêntica à direção 3-3) não residam valores nulos, conforme um material transversalmente isótropo. As quatro lâminas, cada uma com espessura de 0,00028 m, constituem um esquema de laminação conhecido como 'cross-ply', ou seja, $[0^\circ/90^\circ]_s$.

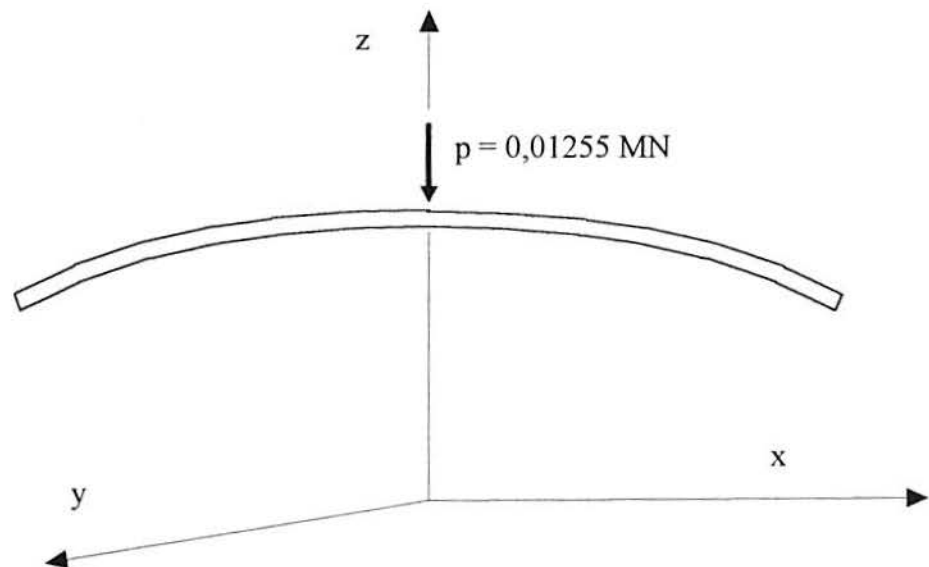


FIGURA 7.22 - Casca ortótropa viscoelástica

Da mesma maneira que ocorreu no exemplo anterior, a estrutura demonstrou um comportamento dependente do tempo pouco acentuado. Não obstante, os resultados estão apresentados na FIGURA 7.23, onde a maior diferença percentual entre o MVE e MTL ficou em 1,44%.

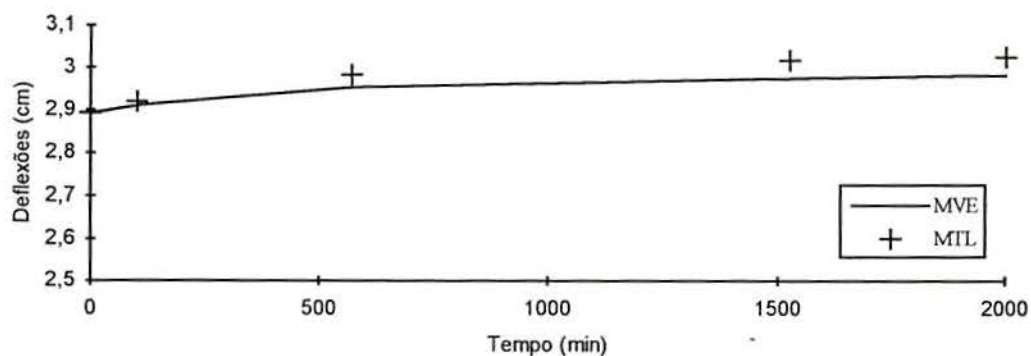


FIGURA 7.23 - Deflexões para o centro da casca

7.8 DISCO DELGADO

No capítulo IV foram desenvolvidas as expressões que regem o comportamento viscoelástico do tubo de parede espessa sob pressão interna. Similarmente, se pode desenvolver as soluções para o disco delgado da FIGURA 7.24 que se enquadra num estado plano de tensões.

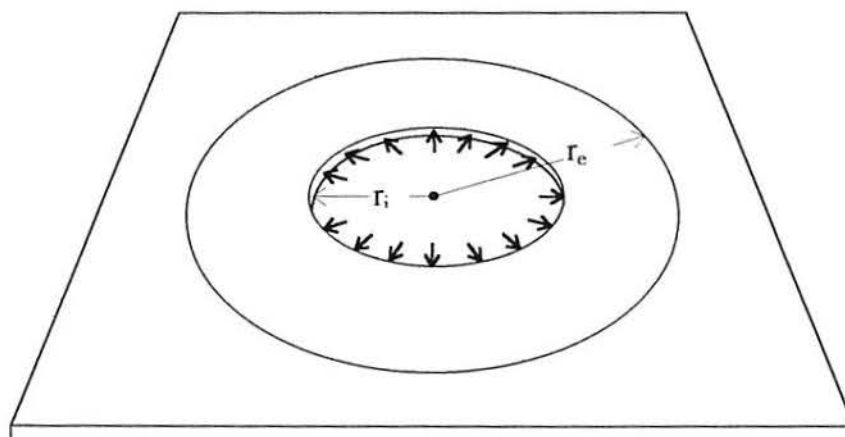


FIGURA 7.24 - Disco delgado confinado

Ao se isolar um elemento infinitesimal do disco e se resolvendo simultaneamente suas equações constitutivas elásticas, de equilíbrio estático e compatibilidade geométrica, se obtém as seguintes equações genéricas para deslocamentos e tensões:

$$u = A_1 r + \frac{A_2}{r} \quad (7.12-a)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[A_1(1+\nu) - \frac{A_2}{r^2}(1-\nu) \right] \quad (7.12-b)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[A_1(1+\nu) + \frac{A_2}{r^2}(1-\nu) \right] \quad (7.12-c)$$

Para se determinar as constantes das equações (7.12), é necessário que se conheça as condições de contorno do problema. No caso mostrado na FIGURA 7.24, o disco está submetido internamente a uma carga compressiva de borda e limitado externamente por um meio indeformável, então:

$$r = r_i \rightarrow \sigma_r(r_i) = -p \quad (7.13-a)$$

$$r = r_e \rightarrow \sigma_r(r_e) = 0 \quad (7.13-b)$$

fornecendo, por conseguinte, as seguintes soluções elásticas:

$$u = \frac{p}{E} \frac{r_i^2 (r_e^2 - r^2)}{r} \frac{1 - \nu^2}{(r_e^2 + r_i^2) - (r_e^2 - r_i^2)} \quad (7.14-a)$$

$$\sigma_r = -p \frac{r_i^2 (r_e^2 + r^2) - (r_e^2 - r^2)\nu}{r^2 (r_e^2 + r_i^2) - (r_e^2 - r_i^2)\nu} \quad (7.14-b)$$

$$\sigma_\theta = p \frac{r_i^2 (r_e^2 - r^2) - (r_e^2 + r^2)\nu}{r^2 (r_e^2 + r_i^2) - (r_e^2 - r_i^2)\nu} \quad (7.14-c)$$

Para o presente exemplo é assumido que o material de que é constituído o anel se comporte viscoelasticamente apenas sob sollicitações distorcionais, permanecendo elástico na dilatação. O modelo reológico adotado é o seguinte:

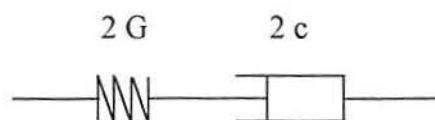


FIGURA 7.25 - Modelo reológico do disco delgado

Gerando, por intermédio da aplicação do método da correspondência e transformada inversa de Laplace, as seguintes equações analíticas viscoelásticas para o problema:

$$u(r, t) = p_0 \frac{r_i^2 (r_e^2 - r^2)}{r} \frac{e^{-\lambda t} [3Kp_1 (p_1 \lambda - 2)\lambda + 2q_1 (p_1 \lambda - 1)\lambda + 3K] + 3K(\lambda t - 1) + 2(3Kp_1 + q_1)\lambda}{3Kq_1 (r_e^2 + 3r_i^2)\lambda} \quad (7.15-a)$$

$$\sigma_r(r, t) = -p_0 \frac{e^{-\lambda t} [3K(r_e^2 + 3r^2)(p_1 \lambda - 1) + 2q_1 \lambda r_e^2] + 3K(r_e^2 + 3r^2)}{3K(r_e^2 + 3r_i^2)} \frac{r_i^2}{r^2} \quad (7.15-b)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = p_0 \frac{e^{-\lambda t} [3K(r_e^2 - 3r^2)(p_1 \lambda - 1) + 2q_1 \lambda r_e^2] + 3K(r_e^2 - 3r^2)}{3K(r_e^2 + 3r_i^2)} \frac{r_i^2}{r^2} \quad (7.15-c)$$

em que

$$\lambda = \frac{3K(r_e^2 + 3r_i^2)}{3Kp_1(r_e^2 + 3r_i^2) + 2q_1 r_e^2}, \quad p_1 = c/G \text{ e } q_1 = 2c \quad (7.15-d)$$

e as constantes 'G', 'c' e 'K' valendo 1000 kN/mm², 1000 kN/mm² dia e 2166,67 kN/mm², respectivamente. Foi adotada uma carga 'p' de 10 kN/mm² interna ao disco de espessura unitária e raios interno e externo iguais a 10 mm e 30 mm, conforme a discretização em nove elementos finitos de oito nós mostrada na FIGURA 7.26.

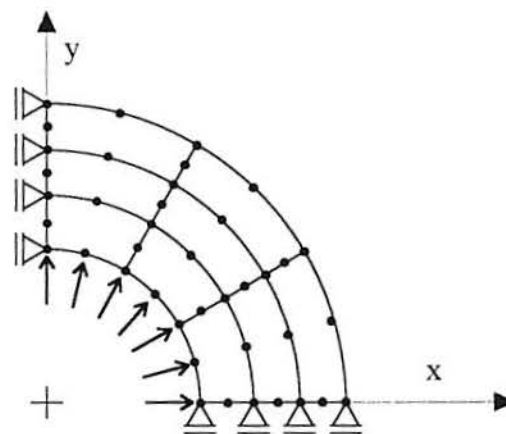


FIGURA 7.26 - Discretização do anel delgado

Para os deslocamentos viscoelásticos se obteve o gráfico da FIGURA 7.27, onde as diferenças percentuais entre os métodos mais uma vez foi pequena, de 0% a 1,92%. Para os tempos de 6

e 8 dias, no entanto, o MTL chegou a fornecer resultados cujos erros, respectivamente, foram 5,42% e 8,69% mais altos que os resultados do MVE,. Entretanto, em relação à solução analítica, os dois métodos cometem erros significativos. O MVE alcança um erro de 7,27% já na solução instantânea, o que indica erro na solução elástica do problema. Para o MTL, houve coincidência de resultado com o MVE no início do período e depois o erro ficou em 7,64%. Para o tempo de 8 dias o erro chegou a 14,07%.

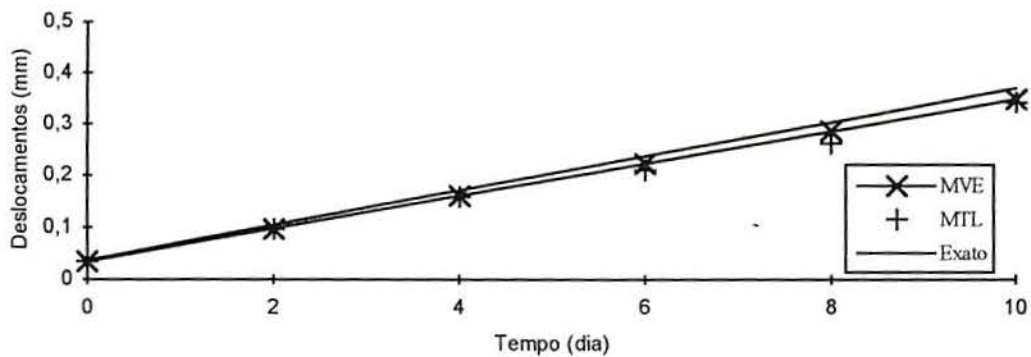


FIGURA 7.27 - Deslocamentos radiais

Nas FIGURAS 7.28 e 7.29 estão apresentados os resultados para as tensões principais radiais e circunferenciais do anel. Para o gráfico da FIGURA 7.28, os resultados provenientes do MVE não refletem o pequeno comportamento dependente do tempo do material, enquanto que o MTL diverge a partir do tempo 4 dias onde o erro já é de 11,53%.

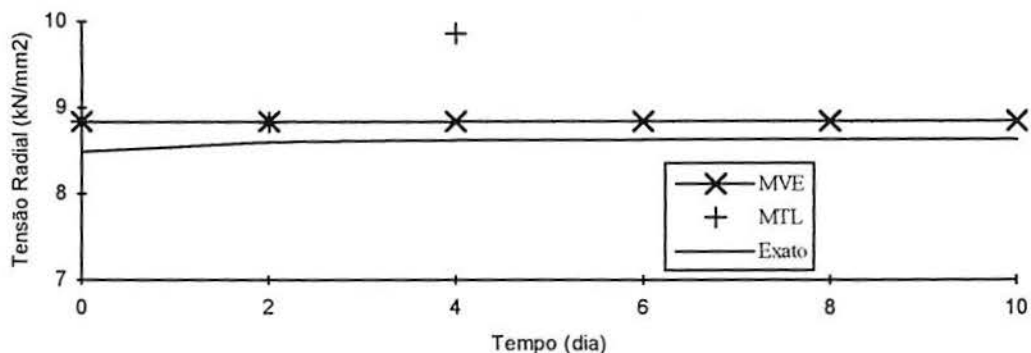


FIGURA 7.28 - Tensões radiais

Para os resultados em termos de tensões circunferenciais, a situação fica ainda mais crítica para o MVE cujos erros variam de 6,16% até 33,75%. Quanto ao MTL, a exemplo do gráfico anterior, ocorrem diferenças pequenas com o MVE nos dois primeiros valores temporais, divergindo a seguir. Para o tempo 10 dias o MTL volta a se aproximar do MVE.

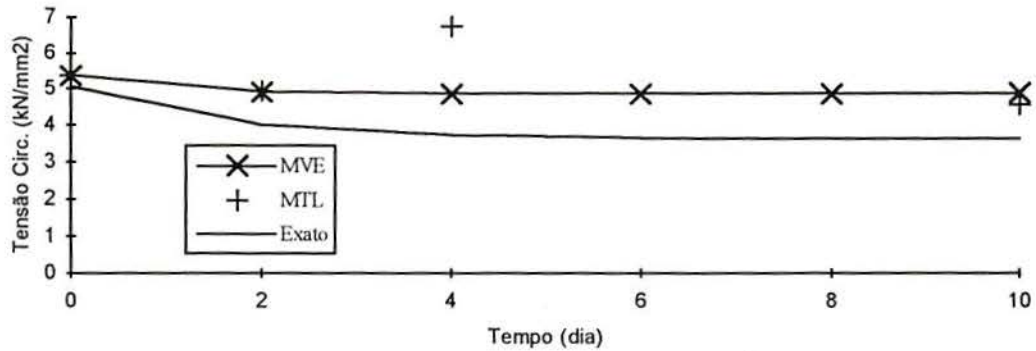


FIGURA 7.29 - Tensões circunferenciais

Retornando às equações (7.12) e aplicando as seguintes condições de contorno:

$$r = r_i \rightarrow \sigma_r(r_i) = -p \quad (7.16-a)$$

$$r = r_e \rightarrow \sigma_r(r_e) = 0 \quad (7.16-a)$$

ou seja, eliminando o meio rígido que limitava externamente o disco, se obtém as equações (7.17) que descrevem o comportamento elástico do problema da FIGURA 7.30.

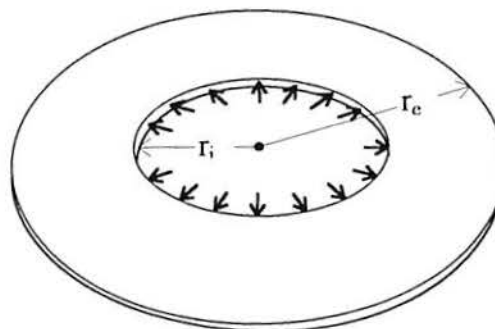


FIGURA 7.30 - Disco delgado livre

$$u = \frac{p}{E} \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{v(r_e^2 - r^2) + (r_e^2 + r^2)}{r} \quad (7.17-a)$$

$$\sigma_r = -p \frac{r_i^2(r_e^2 - r^2)}{r^2(r_e^2 - r_i^2)} \quad (7.17-b)$$

$$\sigma_\theta = p \frac{r_i^2(r_e^2 + r^2)}{r^2(r_e^2 - r_i^2)} \quad (7.17-c)$$

As equações de tensões são as mesmas calculadas no capítulo IV para o tubo de parede espessa livre externamente e, da mesma forma, não servem para a aplicação do método da correspondência por não serem funções de constantes técnicas. Assim, para o modelo reológico apresentado na FIGURA 7.25, o comportamento viscoelástico do disco delgado se dará somente conforme a solução analítica abaixo.

$$u(r,t) = p_0 \frac{r_i^2(3r_e^2 + r^2)}{r(r_e^2 - r_i^2)} \frac{1 + \lambda t}{3q_1 \lambda} \quad (7.18-a)$$

em que

$$\lambda = \frac{3K(r^2 + 3r_e^2)}{3Kp_1(r^2 + 3r_e^2) + 2q_1 r^2} \quad (7.18-b)$$

No entanto, o programa PAINEL trabalha apenas com cadeias de modelos Kelvin, de forma que o modelo reológico da FIGURA 7.25 foi aproximado pelo modelo abaixo:

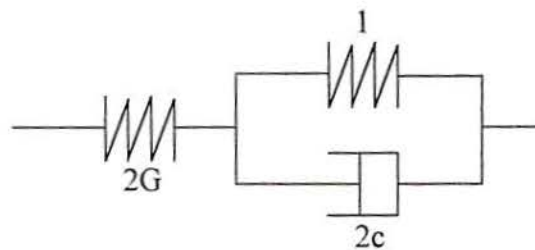


FIGURA 7.31 - Aproximação do modelo Maxwell

Assim, a solução analítica para o disco viscoelástico, ao invés da equação (7.18), é dada pela equação (7.19). A diferença percentual entre as soluções dadas pelas duas equações não ultrapassa 0,23%, portanto os erros cometidos pelos métodos MVE e MTL em relação às soluções exatas não tiveram origem na aproximação do modelo reológico feita pelo programa PAINEL.

$$u(r,t) = p_0 \frac{r_i^2}{r(r_e^2 - r_i^2)} \frac{3K(r^2 + 3r_e^2)[q_1 + (p_1 q_0 - q_1)e^{-\frac{q_0}{q_1}t}] + 2q_0 q_1 r^2}{9Kq_0 q_1} \quad (7.19-a)$$

em que

$$p_1 = \frac{2c}{1+2c}, \quad q_0 = \frac{2G}{2G+1} \quad e \quad q_1 = \frac{4Gc}{2G+1} \quad (7.19-b)$$

Os resultados dos deslocamentos para $r = 10$ mm podem ser visualizados na FIGURA 7.31, na qual ambos os métodos de avaliação iniciam a análise com um erro de 4,52%. No final da análise o MVE apresenta um erro de 9,11% enquanto que o MTL erra em 10,38%.

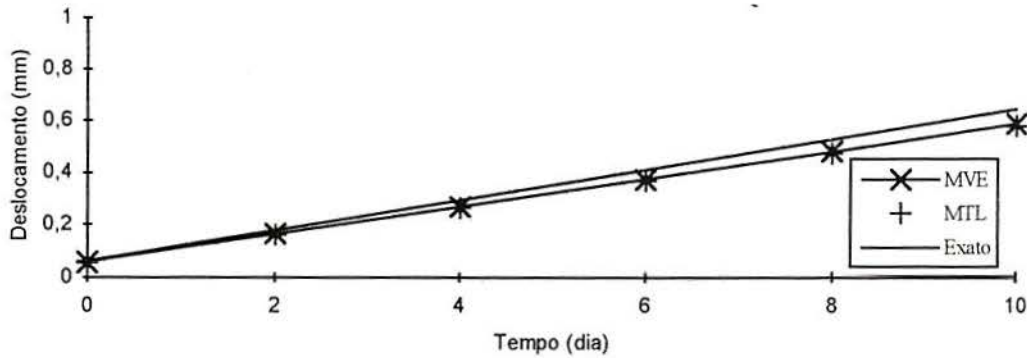


FIGURA 7.32 - Deslocamentos radiais

Se o material se comportar viscoelasticamente tanto na dilatação como em cisalhamento, isto é, adotando-se os seguintes modelos:

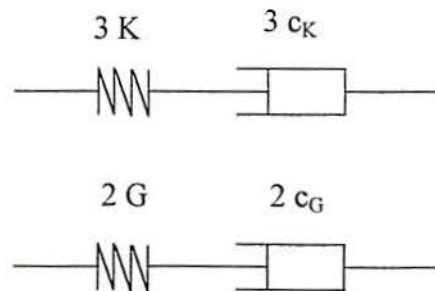


FIGURA 7.33 - Modelos dilatacionais e distorcionais

em que o modelo distorcional permanece com os mesmos valores até então adotados e o dilatacional possui rigidez em função do módulo de dilatação volumétrica e viscosidade ' $3c_G$ ' em que ' c_G ' vale $2166,67 \text{ kN/mm}^2 \text{ dia}$. A solução exata para os deslocamentos viscoelásticos é dada por:

$$u(r, t) = p \frac{r_i^2}{r(r_e^2 - r_i^2)} \frac{3c_K(r^2 + 3r_e^2) + 4c_G r^2}{18c_K c_G} (1 + t) \quad (7.20)$$

e se pode ver, através da FIGURA 7.34, que a solução numérica proveniente tanto do MVE quanto do MTL fica bem mais próxima da solução exata. Na verdade, ambos os métodos iniciaram o período da análise com um erro de 4,51% e terminaram com 4,84% e 4,83%, respectivamente para o MVE e MTL.

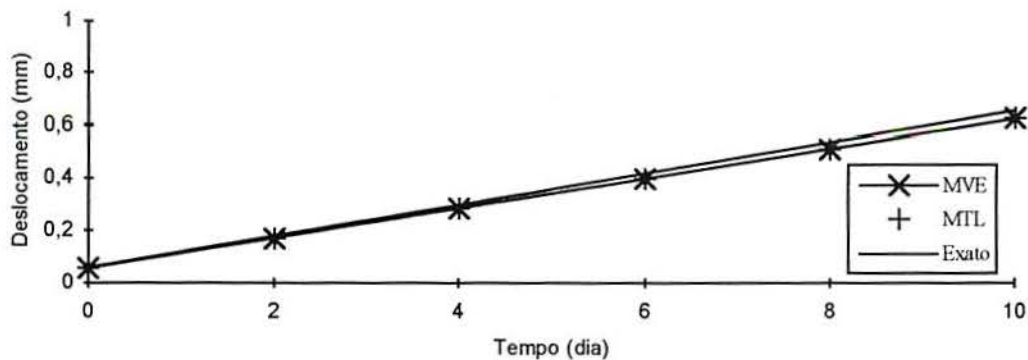


FIGURA 7.34 - Deslocamentos radiais

Assim, uma pequena parte do erro cometido pelos métodos está associado também ao artifício adotado para simular o tratamento diferenciado do material quanto a solicitações do tipo hidrostático e desviador (ver anexos). Entretanto, a maior parte do erro se deve seguramente ao fato de que o programa PAINEL desconsidera deformações e tensões transversais às lâminas. No presente exemplo, por se tratar de um problema do EPT, ocorre transversalmente ao disco delgado deformações ' ϵ_z ' que valem

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (7.21)$$

Quanto a estes últimos resultados, observou-se que a diminuição do valor do ' Δt ' aumentou consideravelmente o tempo de máquina gasto na análise segundo o método das variáveis de estado. Para um ' Δt ' de 2 dias, o tempo gasto foi de, aproximadamente, trinta segundos ao executar 6 incrementos de tempo. Quando o ' Δt ' passou para 0,2 dia, este tempo saltou para três minutos, executando 51 incrementos e para trinta minutos quando o ' Δt ' era de 0,02 dia, culminando com 501 incrementos na análise. Apesar de não se ter observado melhorias nos resultados porque o primeiro valor do incremento de tempo já foi adequado, esta diminuição do valor do incremento já fornece uma idéia de quanto o esforço computacional pode crescer para determinados problemas segundo este parâmetro. Para a análise através do método da transformada de Laplace, o tempo de máquina gasto para a obtenção dos resultados para um único valor temporal se aproximava dos dois minutos. Logo, uma análise que leve em consideração o MTL parece ser mais adequada quando se está interessado em resultados relativos a poucos valores temporais. Na medida em que o número de valores de tempo cresça ou quando se está interessado em todo o histórico de tensões e/ou deformações da estrutura, o MTL deixa de ser adequado por exigir muito esforço de máquina para cada ponto, sendo muito mais natural o procedimento de cálculo via método das variáveis de estado. Assim, parece que cada um dos métodos se encaixa numa determinada situação, o que torna sua confrontação quanto à eficiência ou rapidez na obtenção de resultados sem significado, porém sua eficácia ou obtenção de resultados precisos, de suma importância.

Um caso limite aconteceria se, para um determinado problema, houvesse acúmulo de erro considerável por parte do método incremental das variáveis de estado. Nesta situação, mesmo que o esforço computacional fosse grande para a obtenção de todo o histórico de tensões e/ou deformações, o MTL seria a melhor opção porque não envolveria acúmulo de erro nas várias soluções parciais. A influência da magnitude da variável independente poderia ser contornada através do emprego de um computador de grande precisão, permitindo aumentar o número de parcelas nos somatórios dos métodos de inversão numérica da transformada de Laplace, diminuindo o erro de arredondamento.

O computador utilizado para a obtenção destes e demais resultados do trabalho foi um microcomputador tipo IBM com 8 Mbytes de memória RAM e microprocessador 486 DX4 de 100 MHz.

8 CONCLUSÕES

Tendo como base um modelo numérico fundamentado em uma descrição cinemática lagrangeana total e em elementos finitos tridimensionais degenerados deduzidos para a análise de cascas em que ocorram grandes deslocamentos e pequenas deformações, foi implementado o chamado Método da Transformada de Laplace como alternativa aos métodos incrementais para análises viscoelásticas e dinâmicas de estruturas laminadas em material composto. Basicamente, o MTL é a união de técnicas já consagradas como o Método da Correspondência, que conduz o sistema de equações lineares ao domínio da Transformada de Laplace, e métodos de inversão numérica desta transformação, que retornam as soluções ao plano físico. Esta abordagem alternativa para solução de problemas viscoelásticos, principalmente em placas e cascas em materiais compostos, foi respaldada pela extensão do método ao caso de análise de vibrações estruturais cujas soluções oscilatórias tendem a ser de difícil obtenção segundo os métodos de inversão numérica de transformadas de Laplace. Ainda, todos os resultados provenientes da técnica proposta foram sempre comparados com aqueles fornecidos pelo método incremental das variáveis de estado, originalmente disponível no modelo numérico, permitindo desta forma o desenvolvimento dos parágrafos conclusivos apresentados seguir.

1) Inicialmente foi imaginado que o Método das Variáveis de Estado, por se basear numa metodologia incremental, poderia conduzir a erros cumulativos para cada incremento de tempo, até o final do período da análise. Entretanto, não foi possível constatar este problema porque as soluções analíticas, disponíveis no exemplo 7.8, foram obtidas de uma situação que não pôde ser recriada adequadamente pelo programa de elementos finitos, o que conduziu a erros que mascararam quaisquer comportamento inadequado que uma análise incremental viesse a ter.

2) Observou-se em aplicações preliminares a influência da magnitude do valor da variável independente no aumento do erro cometido pelo Método da Transformada de Laplace quando o método de inversão numérica adotado era o baseado na quadratura gaussiana, conforme comentado nas soluções viscoelásticas simples presentes no capítulo IV.

3) A literatura indica (Bellman et alii, 1966) que as inversões numéricas das expressões transformadas são inerentemente mal-condicionadas, ou seja, em que pequenas perturbações no processo podem adquirir contornos catastróficos na solução. Este fenômeno pôde ser observado no exemplo do disco delgado, cujos deslocamentos, que já carregavam uma parcela de erro considerável, eram utilizados no processo de cálculo das tensões radiais e circunferenciais que, portanto, devem ser avaliadas com maior cuidado em análises que envolvam o MTL.

4) Não obstante o observado no parágrafo anterior, de uma forma geral, o MTL se mostrou bastante confiável, o que pôde ser observado na execução dos exemplos de aplicação, os quais apontaram erros que variaram de 0,8% a 2,38%. Em uma ocasião o erro chegou curiosamente a 8,97% e noutra, no exemplo 7.8, a 14,07% por motivos já mencionados.

5) Nos casos cujas forças de inércia são relevantes, o método de inversão numérica de transformadas de Laplace baseado na quadratura gaussiana não deve ser usado devido a sua grande instabilidade em situações que envolvam respostas oscilatórias. No entanto, o método baseado na aceleração da série de Fourier, principalmente em sua versão melhorada (ver item 2.3.4), consegue ser eficaz mesmo nestas situações, porém demandando uma maior quantidade de soluções parciais. Este método de inversão fundamentalmente dá prioridade à precisão nos resultados enquanto que aquele baseado na quadratura exige um menor esforço de máquina e conseqüente redução no tempo de análise.

6) Os métodos incrementais, como o MVE em análises quasi-estáticas ou mesmo aqueles utilizados em análises dinâmicas como o clássico método de Newmark, são ideais para a obtenção de todo o histórico de resposta dos sistemas estruturais, enquanto que métodos como o MTL, desenvolvido neste trabalho, mostram-se muito adequados quando se está interessado apenas em resultados para poucos valores da variável independente. Entretanto deve ser ressaltada a importância de se observar o exposto acima na conclusão número dois.

Finalizando, se espera que este trabalho tenha contribuído positivamente para incrementar as alternativas de cálculo disponíveis em programas de elementos finitos para análise viscoelástica e até mesmo dinâmica, principalmente de estruturas laminadas em material compósito tão em voga ultimamente. Deseja-se ainda que o MTL seja um aliado dos métodos incrementais no sentido de corroborar resultados e também uma abordagem interessante em análises que envolvam poucos valores temporais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 BATHE, K. J. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.
- 2 BELLMAN, R.; KALABA, R.E.; LOCKET, J.A. **Numerical inversion of the Laplace transform**. New York: Elsevier, 1966.
- 3 BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J. **Computational methods for the solution of engineering problems**. London: Pentech Press, 1978.
- 4 CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975.
- 5 CREUS, G. J. **Viscoelasticity: basic theory and applications to concrete structures**. Berlin: Springer-Verlag, 1986. (Lecture notes in engineering, 16).
- 6 CRUMP, K. S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation. **Journal of the Association for Computing Machinery**, v.23, n.1, p. 89-96, Jan. 1976.
- 7 DAVIES, B.; MARTIN, B. Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods. **Journal of Computational Physics**, v. 33, p. 1-32, 1979.
- 8 DE HOOG, F. R.; KNIGHT, J. H.; STOKES, A. N. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v.3, n.3, p. 357-366, Sept. 1982.
- 9 DUBNER, H.; ABATE, J. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform. **Journal of the Association for Computing Machinery**, v.15, n.1, p. 115-123, Jan. 1968.

- 10 DURBIN, F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. **The Computer Journal**, v.17, n.4, p. 371-376, June 1973.
- 11 FLÜGGE, W. **Viscoelasticity**. Waltham, Massachusetts: Blaisdell, 1967.
- 12 GRÖEHS, A. G. **Introdução à integração numérica**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1979. 163p. (Caderno Técnico, 9).
- 13 HÖNIG, G.; HIRDES, U. **A method for the numerical inversion of Laplace transforms**. Comunicação Privada. 1988.
- 14 HEYDARIAN, M.; MULLINEUX, N.; REED, J. R. Solution of parabolic partial differential equations. **Journal of the Association for Computing Machinery**. 1981.
- 15 KREIDER, D.L. et al. **Introdução à análise linear**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico., 1966. 330 p.
- 16 LEKHNITSKII, S.G. **Theory of elasticity of an anisotropic elastic body**. SanFrancisco: Holden-Day, 1963.
- 17 MARQUES, S. P. C. **Um modelo numérico para análise de estruturas de materiais compostos considerando efeitos viscoelásticos e falhas progressivas**. Porto Alegre, 1994. 181 p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.
- 18 MASUERO, J. R. **Análise de problemas de fratura em materiais viscoelásticos via elementos finitos**. Porto Alegre, 1992. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.
- 19 MIDDLETON, D. H. **Composite materials in aircraft structures**. London: Longman, 1990.

- 20 NEVES, A. C.; MANSUR, W. J.; TELLES, J. C. F. Análise de problemas viscoelásticos utilizando o método dos elementos de contorno. **Revista Brasileira de Engenharia**. Caderno de Engenharia Estrutural, São Paulo, v.6, n.1, p. 19-40, 1988.
- 21 OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; YOUNG, I. T. **Signals and systems**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall International, 1983.
- 22 PIESSENS, R.; HUYSMANS, R. Automatic numerical inversion of the Laplace transform. **Journal of the Association for Computing Machinery**. Transactions on Mathematical Software, v.10, n.3, p. 348-353, Sept. 1984.
- 23 SPIEGEL, M.R. **Manual de fórmulas, métodos e tabelas de matemática**: Ed. rev. e ampl. São Paulo: Makron: McGraw-Hill, 1992. 420 p. (Coleção Schaum).
- 24 STROUD, A.H.; SECREST, D. **Gaussian quadrature formulas**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1966.
- 25 VOLTERRA, E.; ZACHMANOGIOU, E.C. **Dynamics of vibrations**. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill Books, 1965.
- 26 WEAVER Jr., W.; JOHNSTON, P. R. **Finite elements for structural analysis**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984. 403 p.
- 27 WYNN, P. Transformations to accelerate the convergence of Fourier series. In: Mond, B. (Ed.). **Blanch Anniversary Volume**, Washington: U.S. Air Force, 1967. p. 339-379.

ANEXO A) DIFICULDADES SURTIDAS

Das diversas dificuldades encontradas no desenvolvimento deste trabalho, são apresentadas abaixo aquelas que tiveram maior relevância e que seriam de maior interesse para um futuro trabalho de complementação e continuação deste.

1 NA APLICAÇÃO DO MÉTODO DA CORRESPONDÊNCIA

No programa PAINEL quando a análise viscoelástica é feita sob a ótica do Método das Variáveis de Estado, inicialmente é realizado o cálculo da resposta instantânea elástica onde a equação matricial (3.3) para materiais ortótropos é utilizada. Em seguida o programa encaminha o cálculo das deformações viscoelásticas por intermédio das funções de fluência dadas para o material. As funções de fluência são organizadas como na matriz (A.1), sob a hipótese de material ortótropo transversalmente isotrópico, isto é, de acordo com a matriz de flexibilidade apresentada na equação (3.5).

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & D_{44} & 0 \\ & & & & D_{55} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Para uma cadeia com quatro elementos Kelvin (FIGURA A.1), qualquer função de fluência desta matriz seria escrita da seguinte forma:

$$D_{ij} = \frac{1}{D_{ij}^0} - \frac{1}{D_{ij}^1} e^{-\frac{t}{\theta_{ij}^1}} - \frac{1}{D_{ij}^2} e^{-\frac{t}{\theta_{ij}^2}} - \frac{1}{D_{ij}^3} e^{-\frac{t}{\theta_{ij}^3}} - \frac{1}{D_{ij}^4} e^{-\frac{t}{\theta_{ij}^4}} \quad (\text{A.2})$$

na qual a primeira parcela representa a soma dos inversos de todas as rigidezes na direção 'ij', e 'D¹', por exemplo, é a rigidez do primeiro elemento Kelvin nesta direção. A variável 'θ', razão entre viscosidade e rigidez, é chamada de tempo de retardação dos elementos da cadeia.

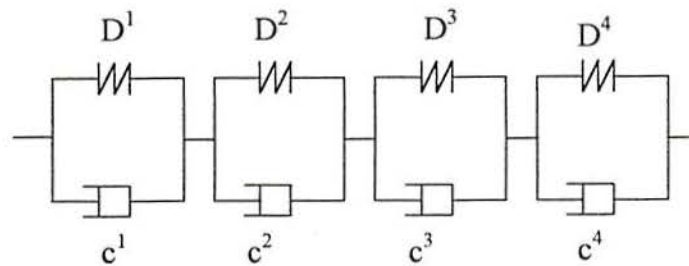


FIGURA A.1 - Modelo Kelvin generalizado de 4 elementos na direção 'ij'

Já no Método da Transformada de Laplace, os modelos Kelvin generalizados não são pertinentes a uma direção, mas sim a uma das cinco constantes técnicas presentes na matriz de rigidez ortótropa. As cinco constantes a serem submetidas ao método da correspondência são: os módulos de elasticidade longitudinais E_{11} e E_{22} e os módulos de elasticidade transversais G_{12} , G_{13} e G_{23} . Parece que, ao proceder desta maneira, se está ferindo o método da correspondência pois se está deixando de fora a constante técnica ' ν_{12} '. No entanto este foi o caminho seguido para contornar a dificuldade de se ter que encontrar uma função no tempo para esta constante. Algumas tentativas forneceram resultados piores ou iguais aos que eram obtidos fazendo ' ν_{12} ' constante, justificando desta forma o procedimento adotado. As alternativas testadas foram: a) fazer todos os parâmetros do modelo reológico iguais a ' ν_{12} ', portanto ' θ ' sempre é unitário, e b) adotar os mesmos valores de ' θ ' das outras funções e as rigidezes iguais a ' ν_{12} '.

2 NO COMPORTAMENTO DO MATERIAL

Os materiais compósitos são geralmente tratados como elásticos na direção de suas fibras de grande rigidez e viscoelásticos no sentido transversal a elas e em cisalhamento, devido à natureza polimérica da matriz. Entretanto outro tipo de comportamento também é alvo deste trabalho. Se deseja analisar estruturas que apresentem desempenho elástico quando em dilatação e viscoelástico no caso de solicitações de distorção. Isto é desenvolvido através da decomposição dos tensores de tensão e deformação específica em seus respectivos tensores hidrostático e desviadores. No entanto, o programa PAINEL não foi montado de acordo com este tipo de esquema. Para contornar esta dificuldade se lançou mão de um

artifício aplicado sobre os modelos Kelvin generalizados para que estes incorporassem os desempenhos dilatacional e distorcional requeridos, como é mostrado a seguir na seqüência.

2.1 Modelo Hooke na dilatação e Maxwell na distorção

2.1.1 Direção 1-1

Ao carregar a placa da figura A.2 segundo a direção 1-1, deixando todas as outras direções descarregadas, serão originadas deformações específicas nesta direção, dadas pela equação (A.4).

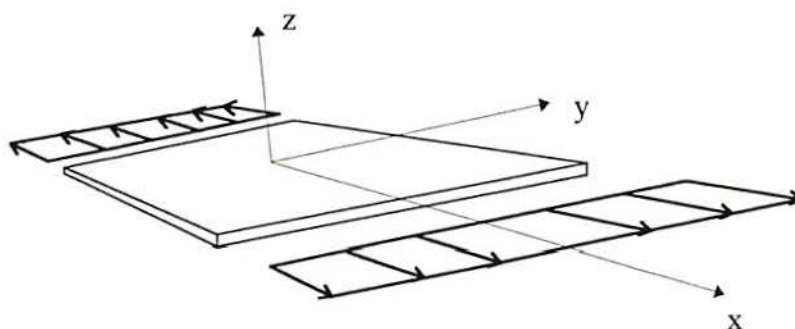


FIGURA A.2 - Placa solicitada segundo a direção 1-1

$$\varepsilon_{11}(t) = D_{11} \sigma_{11}(t) \quad (\text{A.4})$$

Nesta equação, 'D₁₁' é a função de fluência da direção 1-1. A tensão ' σ_{11} ' e a deformação específica ' ε_{11} ' podem ser decompostas em suas componentes hidrostática e desviadora, conforme o exposto em (3.36) e (3.37). Então, correlacionando estas componentes conforme o modelo reológico adotado, ou seja:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{11}(t) = D_{11} \sigma_{11}(t) \\ \Downarrow \quad \quad \Downarrow \\ \varepsilon_0(t) \quad \sigma_0(t) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{---} \text{3K} \text{---}} \\ \xrightarrow{\text{---} \text{2G} \text{---} \text{2c} \text{---}} \end{array} \begin{array}{l} \varepsilon_0 = \sigma_0 / 3K \\ e_{11} = (1/2G + 1/2c t) S_{11} \end{array} \quad (\text{A.5-a})$$

$$\begin{array}{l} + \\ e_{11}(t) \end{array} \begin{array}{c} + \\ S_{11}(t) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{---} \text{2G} \text{---} \text{2c} \text{---}} \\ \xrightarrow{\text{---} \text{2G} \text{---} \text{2c} \text{---}} \end{array} \begin{array}{l} e_{11} = (1/2G + 1/2c t) S_{11} \end{array} \quad (\text{A.5-b})$$

nas quais se pode substituir ' σ_0 ' por $\sigma_{11}/3$ e ' S_{11} ' por $2\sigma_{11}/3$. Realizando a soma destas partes e lembrando da relação entre 'K', 'G' e 'E' dada em (3.43-a), se obtém a equação

$$\varepsilon_{11}(t) = \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{3c} t \right] \sigma_{11}(t) \quad (\text{A.6})$$

cuja quantidade entre colchetes representa a função de fluência para o material na direção 1-1, segundo os modelos reológicos de Hooke e Maxwell na dilatação e distorção, respectivamente. A função de fluência para a direção 2-2 é idêntica. Esta função de fluência representa um modelo de Maxwell de rigidez 'E' e viscosidade '3c'.

2.1.2 Direção 3-3

Para este caso, a placa da FIGURA A.2 está carregada por forças cisalhantes atuantes perpendicularmente ao plano x-y, tendendo à distorção da mesma neste plano. As deformações hidrostáticas devem ser nulas porque a tensão ' σ_{12} ' é uma tensão de cisalhamento, forçando a estrutura apenas a mudar de forma e não de volume. Assim, a função de fluência neste caso é influenciada apenas pela parte desviadora, ou seja:

$$D_{33} = \frac{1}{2G} + \frac{1}{2c} t \quad (\text{A.7})$$

Resultados idênticos devem aparecer nas posições 4-4 e 5-5 da matriz (A.1) por se tratar da mesma situação.

2.1.3 Direção 1-2

A função de fluência para a direção 1-2 é encontrada quando a placa da FIGURA A.2 é solicitada da mesma forma que mostra a figura, porém medida a deformação específica que ocorre no sentido transversal à direção de carregamento, isto é

$$\varepsilon_{22}(t) = D_{21} \sigma_{11}(t) \quad (\text{A.8})$$

Na verdade, esta equação é a função de fluência para a direção 2-1. No entanto pela simetria da matriz (A.1), ambas as funções são idênticas. Realizando o mesmo raciocínio feito para a direção 1-1, se obtém que

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_{22}(t) = D_{21} \sigma_{11}(t) & & \\ \Downarrow & \Downarrow & \\ \varepsilon_0(t) & \sigma_0(t) \xrightarrow{\text{---} \frac{-3K}{v} \text{---}} & \varepsilon_0 = -v \sigma_0 / 3K \quad (\text{A.9-a}) \\ + & + & \\ \varepsilon_{22}(t) & S_{11}(t) \xrightarrow{\text{---} \frac{-2G}{v} \text{---} \text{---} \frac{-2c}{v} \text{---}} & \varepsilon_{22} = - (v/2G + v/2c t) S_{11} \quad (\text{A.9-b}) \end{array}$$

conduzindo, através da soma das equações (A.9), à função de fluência abaixo.

$$D_{12} = \frac{1}{E/-v} + \frac{1}{3c/-v} t \quad (\text{A.10})$$

caracterizando a função de fluência de um modelo Maxwell de rigidez ' E/v ' e viscosidade ' $3c/v$ '.

2.2 Modelo Maxwell na dilatação e distorção

A seguir, se executa o cálculo das funções de fluência para o caso limite do material que possui comportamento idêntico na dilatação e distorção segundo o modelo Maxwell. Esta hipótese de comportamento do material foi realizada para que se observasse a ocorrência de erro pertinente a este artifício adotado. Os resultados provenientes do exemplo do disco delgado (capítulo VII) mostraram a existência deste erro que, como pôde ser observado, alcançou magnitude desprezível frente a outras fontes de erro. A seguir são mostradas as funções de fluência adotadas para cada direção. Os resultados para esta hipótese de comportamento do material são óbvios.

2.2.1 Direção 1-1

A função de fluência para a direção 1-1 pode ser extraída pelo mesmo processo realizado anteriormente. Agora porém, se deve levar em conta a viscoelasticidade segundo Maxwell tanto para a dilatação como para a distorção.

$$\begin{array}{rcl}
 \varepsilon_{11}(t) = D_{11} \sigma_{11}(t) & & \\
 \Downarrow & \Downarrow & \\
 \varepsilon_0(t) & \sigma_0(t) & \xrightarrow{\text{---} \left[\begin{array}{c} 3K \\ \text{---} \end{array} \right] \text{---} \left[\begin{array}{c} 3c_K \\ \text{---} \end{array} \right] \text{---}} \varepsilon_0 = (1/3K + 1/3c_K t) \sigma_0 \quad (\text{A.11-a}) \\
 + & + & \\
 e_{11}(t) & S_{11}(t) & \xrightarrow{\text{---} \left[\begin{array}{c} 2G \\ \text{---} \end{array} \right] \text{---} \left[\begin{array}{c} 2c_G \\ \text{---} \end{array} \right] \text{---}} e_{11} = (1/2G + 1/2c_G t) S_{11} \quad (\text{A.11-b})
 \end{array}$$

A função de fluência já esperada é

$$D_{11} = \frac{1}{E} + \frac{1}{c_E} t \quad (\text{A.12})$$

2.2.2 Direção 3-3

Pelas mesmas justificativas dadas anteriormente para o caso da direção 3-3, a função de fluência é a seguinte:

$$D_{33} = \frac{1}{2G} + \frac{1}{2c_G} t \quad (\text{A.14})$$

2.2.3 Direção 1-2

Finalmente, para a direção 1-2, a exemplo do executado anteriormente, os modelos reológicos adotados são os mesmos da direção 1-1 sob intervenção do coeficiente de Poisson:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{11}(t) = D_{12} \sigma_{22}(t) \\ \Downarrow \quad \Downarrow \\ \varepsilon_0(t) \quad \sigma_0(t) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} -3K/v \quad -3c_K/v \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} -2G/v \quad -2c_G/v \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon_0 = -(v/3K + v/3c_K t) \sigma_0 \quad (\text{A.15-a}) \\ \varepsilon_{11} = -(v/2G + v/2c_G t) S_{22} \quad (\text{A.15-b}) \end{array}$$

o que fornece a função de fluência dada abaixo.

$$D_{12} = \frac{1}{E/v} + \frac{1}{c_E/v} t \quad (\text{A.16})$$

3 NA EQUIVALÊNCIA ENTRE O MVE E O MTL

O método das variáveis de estado permite, segundo a matriz A.1, que cada direção possua ou não uma determinada função de fluência. Assim, é possível que a direção 1-2 funcione apenas elasticamente ao se zerar a sua função de fluência, mesmo que a direção 2-2 possua um comportamento diferido. Já no método da transformada de Laplace, como é empregada a matriz constitutiva elástica em que a posição 1-2 é função da 2-2, (ver a expressão A.17), não se pode fazer a mesma coisa. Para contornar esta aparente limitação do MTL, foram inseridos comandos condicionais no programa PAINEL para que, no cálculo da posição 1-2, quando a sua função de fluência fosse nula, utilizasse somente as partes elásticas das cadeias Kelvin pertinentes. Este artifício, no entanto, se mostrou bastante ineficiente, conduzindo a soluções mais distantes daquelas fornecidas segundo o MVE que aquelas dadas ao se permitir o comportamento diferido na posição 1-2.

$$C_{12} = \frac{v_{12} E_{22}}{1 - v_{12}^2 \frac{E_{11}}{E_{22}}} \quad (\text{A.17})$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - CPGEC

MANUAL DE ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA PAINEL2

PAINEL 2.0

PROGRAMA PARA ANÁLISE INTEGRADA NÃO-LINEAR
DE ESTRUTURAS LAMINADAS

Versão 2.0

AUTORES:

DILZE CODÁ DOS SANTOS CAVALCANTI MARQUES

SEVERINO PEREIRA CAVALCANTI MARQUES

ALEXANDRE RODRIGUES PACHECO (Implementa a Versão 2.0)

ESTRUTURA DO ARQUIVO DE DADOS:

O arquivo de entrada de dados deve conter as informações dispostas de acordo com a estrutura descrita abaixo:

I Título do problema a ser resolvido

Ex.: CASCA ESFÉRICA VISCOELÁSTICA SOB CARGA CONCENTRADA

II Dados de identificação do tipo de análise (1a. parte)

ITYPE, KTNAL, KUTER, LARGE, IFAIL, NCRIF, NELEK, LGAEL (8I5)

Obs.: O código entre parêntesis representa o formato de escrita.

ITYPE: 1- Análise estática; 2- Análise dinâmica.

KTNAL: 1- Análise elástica; 2- Análise viscoelástica MVE;
3 - Análise viscoelástica MTL (método da quadratura);
4- Análise viscoelástica MTL (método da série de Fourier);
5- Análise dinâmica MTL (método da série de Fourier).

KUTER: 1- Existe carga térmica ou higroscópica; 0- caso contrário.

LARGE: 1- Análise não-linear geométrica; 0- Análise linear geométrica.

IFAIL: 1- Análise de falhas 'first ply failure';
2- Análise de falhas 'last ply failure';
0- Não considera falhas.

NCRIF: 1- Critério de falha de Hashin;
2- Critério de falha de Tsai-Wu;
3- Critério da máxima deformação.

NELEK: Número de elementos Kelvin utilizados na análise viscoelástica.

Obs.: Valor máximo para NELEK: 4

LGAEL: 1- Ler dados gerados pelo sistema GAELI; 0- Caso contrário.

III Dados de identificação do tipo de análise (2a. parte)

NUMET,NALGO,NINTE,NGAUS,NCRIT,NINCS,NUCAR,IGAEL (815)

NUMET: 1- Método de controle por deslocamentos generalizados;
2- Método de Newton-Raphson.

NALGO: 1- Rigidez inicial;
2- Rigidez atualizada em todas as iterações;
3- Rigidez atualizada no início do passo.

NINTE: 1- Integração completa;
2- Integração reduzida;
3- Integração seletiva.

NGAUS: 2- 2x2 pontos de integração; 3- 3x3 pontos de integração.

NCRIT: 1- Critério de convergência em forças;
2- Critério de convergência em deslocamentos.

NINCS: Número total de passos incrementais da análise.

NUCAR: Número de estágios de carregamento.

IGAEL: 1- Imprime resultados em arquivos do sistema GAELI;
0- Caso contrário.

IV Dados de controle da análise

TOLER, DELTA, ALPHA, BETHA, FACLO (5F10.5)

TOLER: Margem de tolerância do critério de convergência.

DELTA: Incremento de tempo na análise viscoelástica ou dinâmica.

ALPHA: Parâmetro de integração do método de Newmark.

BETHA: Parâmetro de integração do método de Newmark.

FACLO: Fator de carga inicial para o método de controle por deslocamentos generalizados.

V Dados gerais da estrutura

NPOIN, NELEM, NVFIX, NULAM, NMATS (5I5)

NPOIN: Número de pontos nodais na malha de elementos finitos.

NELEM: Número de elementos finitos da malha.

NVFIX: Número de nós com restrições.

NULAM: Número de lâminas diferentes.

NMATS: Número de materiais da estrutura.

VI Dados de controle para impressão (1a. parte)

NOUTP(1), NOUTP(2), NOUTP(3), NOUTP(4), NOUTP(5) (5I5)

NOUTP(1): Intervalo (no. de passos) p/ gravação de deslocamentos.

Se NOUTP(1) = 0, não grava deslocamentos.

NOUTP(2): No. de passos p/ gravação de tensões e esforços.

Se NOUTP(2) = 0, não grava tensões e esforços.

NOUTP(3): Indica o No. de passos para gravação de reações.

Se NOUTP(3) = 0, não grava reações.

NOUTP(4): Indica o intervalo (No. de passos) para gravação de velocidades e acelerações.

Se NOUTP(4) = 0, não grava velocidades e acelerações.

NOUTP(5): Intervalo No. de passos p/ gravação de relatórios de falha.

Se NOUTP(5) = 0, não grava relatórios de falha.

VII Dados de controle de impressão (2a. parte)

NIMPO(1), NIMPO(2) (2I5)

NIMPO(1): Número de pontos nodais com deslocamentos a imprimir.

Obs.: $NIMPO(1) = NPOIN$ ou $NIMPO(1) \leq 10$

NIMPO(2): Número de elementos (máx 10) com tensões e esforços a imprimir.

Obs.: $NIMPO(2) = NPOIN$ ou $NIMPO(2) \leq 10$

VIII Dados de controle de impressão de deslocamentos

NNOSD(1), NNOSD(2), ..., NNOSD(NIMPO(1)) (10I5)

NNOSD(I), $I \leq 10$: Pontos nodais com deslocamentos a imprimir.

Obs.: Esta linha existe somente se $NIMPO(1) \leq 10$ e $NOUTP(1) = 1$.

IX Dados de controle de impressão de tensões e esforços

NELMO(1), NELMO(2), ..., NELMO(NIMPO(2)) (10I5)

NELMO(I), $I \leq 10$: Elementos com tensões e esforços a imprimir.

Obs.: Esta linha existe somente se $NIMPO(2) \leq 10$.

X Informações dos números dos passos cujos resultados devem ser gravados nos arquivos de pós-processamento do GAELI.

NGA(1), NGA(2), ..., NGA(10) (10I5)

Obs.: Esta linha somente existe se $IGAEL = 1$

XI Dados que identificam o material, a orientação das fibras e a espessura das diferentes lâminas.

1, MATLA(1), ANGLO(1), ESPES(1) (2I5,2F10.5)

2, MATLA(2), ANGLO(2), ESPES(2) (2I5,2F10.5)

... .. " "

N, MATLA(N), ANGLO(N), ESPES(N) (2I5,2F10.5)

N: Número de lâminas que apresentam material, espessura ou orientação das fibras diferentes.

MATLA(I): Material da lâmina I.

ANGLO(I): Ângulo entre a dir. das fibras e o eixo local x_1 da lâmina I.

ESPES(I): Espessura da lâmina I.

XII Dados sobre os elementos: número de nós, número de camadas, excentricidade, seqüência das lâminas e conetividades

1, NNODE(1), NLAYR(1), EXCEN(1)	(3I5,F10.5)
MATNO(1,1), MATNO(1,2), ..., MATNO(1, NLAYR(1))	(5X, 30I3)
LNODS(1,1), LNODS(1,2), ..., LNODS(1, NNODE(1))	(5X, 9I5)
2, NNODE(2), NLAYR(2), EXCEN(2)	(3I5,F10.5)
MATNO(2,1), MATNO(2,2), ..., MATNO(2, NLAYR(2))	(5X, 30I3)
LNODS(2,1), LNODS(2,2), ..., LNODS(2, NNODE(2))	(5X, 9I5)
.....	
N, NNODE(N), NLAYR(N), EXCEN(N)	(3I5,F10.5)
MATNO(N,1), MATNO(N,2), ..., MATNO(N, NLAYR(N))	(5X, 30I3)
LNODS(N,1), LNODS(N,2), ..., LNODS(N, NNODE(N))	(5X, 9I5)

N:	No. total de elementos
NNODE(I):	No. de nós do elemento I
NLAYR(I):	No. de lâminas do elemento I
EXCEN(I):	Excentricidade do elemento I
MATNO(I,J):	No. de identificação da lâmina J do elemento I. As lâminas devem ser seqüenciadas de baixo para cima dentro do elemento. Se houver mais de 30 lâminas, a identificação da seqüência das mesmas deve continuar na linha imediatamente abaixo das 30 primeiras, no mesmo formato.
LNODS(I,K):	No. externo do nó K do elemento I (conetividade).

XIII Coordenadas dos pontos nodais

1, COORD(1,1), COORD(1,2), COORD(1,3)	(I5,3F15.6)
2, COORD(2,1), COORD(2,2), COORD(2,3)	(I5,3F15.6)
... ..	
N, COORD(N,1), COORD(N,2), COORD(N,3)	(I5,3F15.6)

N: No. de pontos nodais
 COORD(I,1): Coordenada do ponto I segundo as direção global X.
 COORD(I,2): Coordenada do ponto I segundo as direção global Y.
 COORD(I,3): Coordenada do ponto I segundo as direção global Z.
 Obs.: Se forem dadas somente as coordenadas dos nós de canto dos elementos de 9 ou 8 nós, o programa obtém as coordenadas dos nós intermediários por interpolação linear. Neste caso, é necessário que as coordenadas do nó de maior número sejam fornecidas por último.

XIV Dados que identificam as condições de contorno

NOFIX(1), IFPRE	(1X,I4,5X,I5)
NOFIX(1), IFPRE	(1X,I4,5X,I5)
... ..	
NOFIX(1), IFPRE	(1X,I4,5X,I5)

NOFIX(I): Número do I-ésimo nó com restrição

IFPRE: Número constituído por uma cadeia de algarismos 0 e 1 com 5 casas correspondentes aos 5 graus de liberdade do nó. 0- deslocamento livre; 1- deslocamento impedido.

Ex.: 10010 : translação segundo X impedido; translações segundo Y e Z livres; rotação na dir. X impedida e rotação na direção Y livre.

XV Propriedades dos materiais

Para cada material devem ser fornecidas as seguintes propriedades:

NUMAT: Número do material.	(I5)
$E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \rho$	(7F10.7)
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$	(4F15.10)
$X_T, X_C, Y_T, Y_C, S_A, S_T$	(6F10.7)
$1/D_{11}, \theta_{11}, 1/D_{12}, \theta_{12}, 1/D_{22}, \theta_{22}$	Para cada (6E11.4)
$1/D_{11}, \theta_{11}, 1/D_{12}, \theta_{12}, 1/D_{22}, \theta_{22}$	elemento Kelvin (6E11.4)
SHIFT(NUMAT)	(F15.5)

E_{IJ} :	Módulos de elasticidade do material da lâmina
G_{IJ} :	Módulos de elasticidade transversal do material da lâmina
α_1, α_2 :	Coef. de dilatação térmica nas direções principais 1 e 2 da lâmina.
β_1, β_2 :	Coeficientes de dilatação higroscópica nas direções principais 1 e 2 da lâmina.
X_T, X_C :	Resistências (tensão ou def.) de falha para a direção principal 1 da lâmina (T - tração; C - compressão)
Y_T, Y_C :	Resistências (tensão ou def.) de falha para a direção principal 2 da lâmina (T - tração; C - compressão)
S_A :	Resistência (tensão ou deformação) de falha ao cisalhamento axial (planos 1-2 e 1-3)
S_T :	Resistência (tensão ou def.) de falha ao cisalhamento transversal (plano 2-3)
SHIFT:	“Shift factor” do material. Admitiu-se um único fator para todas as direções.

Para fornecer as propriedades viscoelásticas do material, as seguintes informações são importantes:

1) As funções de fluência do material D_{IJ} são reunidas na matriz:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix}$$

onde os termos são dispostos de acordo com o vetor de tensões

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}\}$$

2) Cada função de fluência é expressa na forma:

$$D_{IJ} = D_{IJ}^0 - D_{IJ}^1 \text{EXP}(-t / \theta_{IJ}^1) - D_{IJ}^2 \text{EXP}(-t / \theta_{IJ}^2) - \dots - D_{IJ}^K \text{EXP}(-t / \theta_{IJ}^K)$$

θ_{IJ}^K : Tempo de retardação correspondente ao elemento Kelvin K.

Obs. 1: Os coeficientes de dilatação higrótérmicos, as propriedades de falhas e viscoelásticas não devem ser fornecidos se a análise não inclui efeitos higrótérmicos, de falhas ou viscoelásticos.

Obs. 2: Caso KTNAL for igual a 3, 4 ou 5, não é necessário fornecer os parâmetros viscoelásticos para a direção 1-2.

XVI Coeficientes de degradação do material (falhas progressivas)

DEGRA(1), DEGRA(2), DEGRA(3) (F15.10)

DEGRA(1): Reserva de rigidez das fibras após falha das mesmas.
Normalmente admitida nula

DEGRA(2): Reserva de rigidez da matriz após falha da mesma.
Normalmente admitida nula

DEGRA(3): Tenta levar em conta a redução de rigidez das fibras quando ocorre falha na matriz (β_a). Em geral é adotado como sendo igual a 1.

XVII Valores dos tempos inicial e final do estágio de carga

TIME1, TIME2 (2F15.5)

Obs. 1: Somente devem ser fornecidos no caso da análise viscoelástica.

Obs. 2: Caso KTNAL for igual 3, 4 ou 5 então o valor de tempo da análise deve ser fornecido na posição para TIME2.

XVIII Códigos dos tipos de cargas

KCONC, KDIST, KEDGE, KUMTE, KPRES (515)

KCONC: Cargas concentradas (0- não existem; 1- existem).

KDIST: Cargas distribuídas (0- não existem; 1- existem e mudam de valor ao longo da estrutura; 2- existem e são constantes ao longo da estrutura).

KEDGE: Cargas de bordas (0- não existem; 1- existem).

KUMTE: Cargas térmicas e higroscópicas (0- não existem; 1- existem e mudam ao longo dos elementos; 2- existem e todos os elementos estão sob condições de temperatura e umidade idênticas).

KPRES: Cargas de pressão (0- não existem; 1- existem e mudam ao longo da estrutura; 2- existem e são constantes ao longo da estrutura)

XIX Número total de incrementos de cargas

NSTEP (15)

Obs.: Quando se usa o método de controle por deslocamentos generalizados $NSTEP = NINCS$.

XX Dados relativos aos valores das cargas atuantes

a) Cargas Concentradas:

NCOLO (15)

I, F₁, F₂, F₃, M₁, M₂ (15,5F15.10)

NCOLO: Número de nós carregados.

I: Ponto genérico carregado.

F₁, F₂, F₃: Componentes da força segundo as direções globais X, Y e Z, atuantes no ponto I.

M₁, M₂: Momentos em torno dos eixos locais x₂ e x₁, respectivamente, no ponto I.

b) Cargas distribuídas:

J, F, p(1), p(2), p(3) (15, F10.2,3F15.5)

J: Número do elemento carregado

F: Número da face carregada (-1: superfície inferior;

0: superfície média; 1-superfície superior)

p(1), p(2), p(3): comp. da carga distribuída no elemento J.

Obs.: Se KDIST=2, fornecer somente os dados do elemento 1.

c) Cargas de pressão:

J, F, p (I5,F10.2,F15.5)

J: Número do elemento.

F: Número da face carregada (-1: superfície inferior;
0: superfície média; 1: superfície superior)

p: pressão no elemento J.

Obs.: Se KPRES=2, fornecer somente os dados do elemento 1.

d) Cargas de borda:

NEDGE (I5)

IELEM, ILADO (2I5)

p(1), p(2), p(3) (3F15.5)

.....

NEDGE: Número de bordas carregadas.

IELEM: Número do elemento.

ILADO: Número do lado carregado.

p(1),p(2),p(3): Comp. da carga nos nós do lado ILADO.

Obs.: O número do lado é obtido numerando-se seqüencialmente os lados do elemento no sentido de estabelecimento das conectividades.

e) Cargas térmicas e higroscópicas:

IELEM (I5)

I, ΔT , ΔH (I5,2F15.5)

.....

IELEM: Número do elemento.

I: Número da camada.

ΔT : Variação de temperatura.

ΔH Variação de umidade.

Obs.: Se KUMTE=2, fornecer apenas informações do elemento 1.

XXI Incrementos de carga para análise com o método de Newton-Raphson

$$\Delta\lambda_1 \quad (F10.2)$$

$$\Delta\lambda_2$$

...

$$\Delta\lambda_{nstep}$$

Obs.: Se não for utilizado o método de Newton-Raphson, não é necessário entrar com estes dados.