

Thèse

préparée au

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Spécialité : Automatique

par

João Manoel GOMES DA SILVA Jr.

Engenheiro Eletricista - UFRGS (Brésil)

Mestre em Engenharia Elétrica - UFSC (Brésil)

Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes

Soutenue le 1er octobre 1997 devant le jury:

MM.	J.M. DION	Président
	A.J. FOSSARD	Rapporteur
	M. MALABRE	Rapporteur
	C. BURGAT	Examineur
	L. EL GHAOUI	Examineur
	G. GARCIA	Examineur
Mlle.	S. TARBOURIECH	Directeur de thèse

Cette thèse a été préparée au LAAS-CNRS
7, Avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse Cedex 4

Rapport LAAS N° 97383



A minha esposa Silvia.

*A meus pais, Lisete e João Manoel;
a minha irmã, Isabela;
a meu avô João.*

Avant-Propos

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes du CNRS (LAAS), au sein du Groupe Commande des Systèmes Continus (CSC). Je remercie Mr. Alain Costes, de m'avoir accepté dans ce laboratoire, et Mr. Jacques Bernussou de m'avoir accueilli dans son groupe. Je suis reconnaissant à tout le personnel du LAAS, qui directement ou indirectement a fourni le support matériel et informatique pour la réalisation de cette thèse. D'autre part, je remercie profondément le peuple brésilien, qui, par l'intermédiaire de la Fundação Coordenação de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a financé mes trois ans d'études.

Je tiens à remercier Mr. A.J. Fossard, professeur à l'Ecole Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (SUPAERO), et Mr. M. Malabre, directeur de recherche du CNRS à l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes (IRCyN), pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont démontré pour mon travail.

Je remercie également Messieurs J.M. Dion, directeur du Laboratoire d'Automatique de Grenoble, C. Burgat, professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse (UPS), L. El Ghaoui, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA), G. Garcia, maître de conférence à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA), d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude à Mlle. Sophie Tarbouriech, chargée de recherche au CNRS, d'avoir accepté d'encadrer mon travail de thèse et pour la façon irréprochable dont elle l'a dirigé. L'intérêt qu'elle a démontré pour mon travail, sa disponibilité et son ouverture pour toute discussion scientifique, ses conseils, l'encouragement qu'elle m'a toujours donné pour poursuivre de nouveaux chemins aussi bien que la confiance qu'elle m'a accordée pendant ces trois ans ont été fondamentaux pour l'aboutissement de cette thèse. D'autre part, l'amitié et le respect qu'elle m'a témoigné, en me traitant non pas comme un simple étudiant mais plutôt comme un collègue, aussi bien que son bon humour quotidien (ce qui m'a permis de lui faire quelques "remarques" pas très méchantes de temps

en temps) ont été pour moi extrêmement importants sur le plan personnel.

Je tiens à remercier Mr. Eugênio Castelan, professeur à l' Universidade Federal de Santa Catarina au Brésil, qui m'a fait prendre goût à la recherche et qui m'a mis sur la route de " la commande de systèmes sous contraintes", de m'avoir encouragé à traverser l'Atlantique pour poursuivre mes études.

Je remercie en particulier les collègues et amis Humberto Araújo et Carlos Eduardo Trabuco Dórea pour les diverses discussions techniques que nous avons eu et qui ont beaucoup apporté à ce travail.

Je ne peux pas oublier tous les camarades du groupe CSC et les copains brésiliens: leur soutien amical aussi bien que les moments de détente que nous avons passé ensemble, ont été fondamentaux pour garder le moral et se "défouler" de temps en temps. Je ne cite pas de noms pour éviter d'oublier quelqu'un. Je suis sûr qu'ils se reconnaîtront dans ce paragraphe.

Finalement il me faut dire un tendre "muito obrigado meu amor" à Silvia qui était à mon côté pendant toute cette période et qui a su me soutenir, m'encourager et même me supporter dans les moments les plus critiques! Cette thèse est aussi un peu la sienne.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Notations	ix
Introduction Générale	1
I Etude bibliographique	5
1 Concepts de base	7
1.1 Introduction	7
1.2 Invariance positive et contractivité	8
1.3 Stabilité au sens de Lyapunov	9
1.3.1 Stabilité par la seconde méthode de Lyapunov	10
1.3.2 Principe d'invariance de LaSalle	13
1.3.3 La région d'attraction de l'origine	15
1.4 Stabilité des systèmes linéaires	16
1.4.1 Caractérisation à partir des valeurs propres de A	16
1.4.2 Caractérisation à partir des fonctions de Lyapunov	17
1.5 Systèmes linéaires variables	20
1.6 Conclusion	21
2 Systèmes avec saturation de commandes	23
2.1 Introduction	23
2.2 Le système saturé	24
2.3 Les problèmes d'analyse et de synthèse	27

2.4	Stabilité globale	28
2.5	Stabilité semi-globale	30
2.5.1	Approche par placement de pôles	31
2.5.2	Approche par équation de Riccati	32
2.6	Stabilité locale	33
2.6.1	Stabilisation locale sans saturation	33
2.6.2	Stabilisation locale avec saturation	39
2.7	Conclusion	43
II Approche polyédrale		45
3	Approche par régions de saturation	47
3.1	Introduction	47
3.2	Modélisation du système saturé	48
3.2.1	Les régions de saturation	48
3.2.2	Le modèle dans chaque région de saturation	49
3.3	Invariance positive	50
3.4	Contractivité et stabilité asymptotique	53
3.5	Détermination du coefficient maximum d'homothétie	57
3.6	Polyèdres non-bornés	60
3.7	Exemple numérique	66
3.8	Conclusion	68
4	Approche par polytope de matrices	71
4.1	Introduction	71
4.2	Modélisation du système saturé	72
4.3	Domaines de stabilité locale	75
4.3.1	Invariance et contractivité	77
4.3.2	Stabilité asymptotique locale	81
4.3.3	Expansion homothétique	82
4.3.4	Expansion non-homothétique	86
4.4	Exemple numérique	97
4.5	Conclusion	98
III Approche ellipsoïdale		103
5	Analyse	105
5.1	Introduction	105
5.2	Stabilité asymptotique locale	105
5.3	Détermination de régions de stabilité asymptotique	108

5.3.1	Méthode 1 : expansion homothétique	108
5.3.2	Méthode 2 : optimisation convexe	110
5.4	Ellipsoïdes non-bornés	117
5.5	Exemple numérique	119
5.6	Conclusion	120
6	Synthèse	123
6.1	Introduction	123
6.2	Le problème de synthèse	124
6.3	Stabilisation asymptotique locale	126
6.3.1	Relations d'inclusion	126
6.3.2	Résultats de base	128
6.3.3	Performance temporelle autour de l'origine	130
6.3.4	Synthèse de retour d'état saturé à partir de la solution de LMIs	132
6.3.5	Le compromis entre \mathcal{D} , \mathcal{X}_0 et α	134
6.3.6	Exemple numérique	136
6.4	Stabilisation semi-globale	140
6.5	Résultats de base	140
6.6	Stabilisation semi-globale avec saturation	143
6.6.1	Exemple Numérique	144
6.7	Synthèse de commandes du type multi-modes	145
6.7.1	Méthode basée sur la solution de LMIs	147
6.7.2	Exemple numérique	149
6.8	Conclusion	152
	Conclusion générale	155
A	Polyèdres et ellipsoïdes	161
A.1	Ensembles polyédraux	161
A.1.1	Polyèdres non-bornés	162
A.1.2	Cônes polyédraux	163
A.1.3	Polyèdre à facettes parallèles	164
A.1.4	Polytopes	165
A.2	Ensembles ellipsoïdaux	165
A.2.1	Ellipsoïdes centrés à l'origine	166
A.2.2	Cylindres de section ellipsoïdale	167
	Bibliographie	168

Table des figures

1.1	(a) Invariance Positive; (b) Contractivité	9
1.2	Contractivité des trajectoires	13
2.1	Fonction saturation	25
2.2	$D_0 \subseteq \mathcal{S} \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$	34
3.1	Les domaines $S(R_j, d_j)$ et $S(D_j, s_j)$	51
3.2	Instabilité dans des polyèdres contractifs non-bornés	64
3.3	a. $S(G, w)$; b. $S(F, u_{min}, u_{max})$; c. $S(G, \delta_{max}w)$	68
3.4	$\delta = 10$	69
3.5	$\delta = 10.001$	69
4.1	$S(G, \delta w)$, $S(F, \zeta u)$, $S(F, \delta u_{min}, \delta u_{max})$	83
4.2	a. $S(G, w)$; b. $S(G, \delta_{max}w)$; c. $S(P_{max}, \varphi_{max})$; d. $S(F, u_{min}, u_{max})$	98
5.1	Approximation de la région d'attraction	110
5.2	Application de l'algorithme 5.2: ellipsoïdes générés itérativement	120
6.1	Réponse temporelle des états	139
6.2	Réponse temporelle de la commande	140
6.3	Réponse temporelle des états avec $u(k) = F_{lin}x(k)$	145
6.4	Réponse temporelle des états avec $u(k) = sat(F_{lmi}x(k))$	146
6.5	Comparaison entre les deux commandes	146
6.6	Trajectoire de l'état	151
6.7	Réponse temporelle de la commande	152
6.8	Surfaces de commutations	152
A.1	Polyèdres non-bornés	163
A.2	Ensemble ellipsoïdal	167

Liste des tableaux

6.1	Compromis entre performance et taille de \mathcal{X}_0	138
6.2	Compromis entre tolérance à la saturation et performance	138

Notations

\cap	: intersection.
\cup	: union.
$\subset (\subseteq)$: contenu (contenu ou égal).
\in	: appartient.
\notin	: n'appartient pas.
\exists	: il existe.
\forall	: quel que soit.
\nexists	: il n'existe pas.
\mathfrak{R}^n	: espace \mathfrak{R}^n .
$\mathfrak{R}^{n \times m}$: espace des matrices réelles de dimension $n * m$.
\mathcal{C}	: ensemble des nombres complexes.
$Re(z)$: partie réelle d'un nombre complexe.
$Im(z)$: partie imaginaire d'un nombre complexe.
$x_{(i)}$: $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur x .
$ x $: vecteur composé des valeurs absolues des éléments du vecteur x .
$x \succ (\succeq, \prec, \preceq)y$: inégalités élément à élément.
$diag(x)$: matrice diagonale générée à partir du vecteur x .
$A_{(i)}$: $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .
A^T	: transposée de A .
$\mathcal{Ker} A$: noyau de A .
$rang(A)$: rang de A .
$\lambda_i(A)$: $i^{\text{ème}}$ valeur propre de A .
$\lambda_{max}(A)$: valeur propre maximale de A .
$\sigma(A)$: spectre de A .
$A > (\geq) 0$: matrice (semi) définie positive.
$A > (\geq) B$: matrice $A - B$ (semi) définie positive.
$\ A\ $: norme euclidienne de A .
$\prod_k A_j$: produit quelconque de k matrices $A_j, A_j \in \Xi$.
I_n	: matrice identité d'ordre n .
1_n	: vecteur de dimension n avec tous les éléments égaux à 1.
$0_{n \times m}$: matrice de dimension $n * m$ avec tous les éléments égaux à 0.
0_n	: vecteur de dimension n avec tous les éléments égaux à 0.
∂D	: frontière de D .
$int(D)$: intérieur de D .
$\text{Co}\{\cdot\}$: enveloppe convexe.

Introduction Générale

La théorie de la commande moderne se développe dans le but d'expliquer et de résoudre des problèmes qui émanent de l'environnement industriel. Des raisons économiques et de sécurité, conduisent à la recherche de lois de commande de plus en plus performantes afin de garantir efficacité et rendement de production d'une part et d'assurer la sûreté et fiabilité des équipements industriels et de consommation d'autre part. Pour cela il est important de comprendre et de prendre en compte toutes les particularités d'un système de commande.

En particulier, au cours de ces dernières années, la théorie de la commande des systèmes linéaires a permis, à partir d'outils mathématiques relativement simples, le développement de techniques et de stratégies de commande pour traiter des problèmes jusque là impossibles à résoudre avec la théorie de la commande classique. Dans ce sens, dans le cadre des systèmes multivariables, il existe aujourd'hui des méthodes de détermination de lois de commande assurant, par exemple, la garantie de certains niveaux de performance, de robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation, de rejet de perturbation, de découplage et de décentralisation. D'une manière générale, ces lois de commande sont conçues sans considérer, a priori, de contraintes sur l'amplitude de la commande et/ou des états.

Néanmoins, à cause des limitations physiques et technologiques, les actionneurs ne peuvent fournir que des signaux de commande appartenant à un certain intervalle d'amplitude. En outre, pour des raisons de sécurité, les états d'un système doivent, en général, rester confinés dans un ensemble spécifique de l'espace d'état. Quelques exemples de ces limitations sont : des vannes qui présentent une ouverture maximale et une ouverture minimale ; des amplificateurs électroniques qui doivent opérer dans des frontières d'alimentation en tension ; des actionneurs de chauffage ou de refroidissement, dont la puissance fournie ou retirée du système ne peut pas dépasser certaines limites ; des convertisseurs de puissance électriques, qui ne peuvent actionner des machines que dans les limites de puissance pour lesquelles ils ont été conçus ; des contraintes sur le couple moteur et la vitesse des machines électriques.

Nous pouvons donc conclure que le problème de saturation des commandes et/ou des états est présent dans pratiquement tous les systèmes de commande.

L'application de lois de commande conçues sans prendre en compte la possibilité de saturation peut avoir des conséquences indésirables ou même catastrophiques. Si le système de commande en boucle fermée est conçu d'une façon linéaire pour satisfaire certains objectifs de commande, l'apparition imprévue de la saturation peut alors dégrader la satisfaction de tels objectifs. Par ailleurs, le système en boucle fermée peut présenter des points d'équilibre parasites et/ou des cycles limites, ou même devenir instable à cause de la caractéristique non-linéaire de la saturation.

Ce sont de ces problèmes issus de la pratique que sont nés la motivation et l'intérêt pour l'analyse et la synthèse des systèmes de commande soumis à la saturation. Ces deux problèmes ont attiré l'attention de plusieurs automaticiens durant les dernières années. Concernant le problème de la saturation des commandes, une intéressante revue bibliographique chronologique a été faite par par Berstein et Michel dans [6]. Si l'on considère la saturation des états nous pouvons citer l'ouvrage de Liu et Mitchel [66] et ses références.

Dans cette thèse, nous nous intéressons, en particulier, à l'étude du problème de **la stabilité et de la stabilisation locale** des systèmes linéaires avec saturation des commandes. Notre but est de proposer de nouvelles méthodes et techniques pour :

1. la détermination de régions de stabilité pour le système en boucle fermée avec les commandes saturés ;
2. la détermination de la loi de commande en prenant en compte, a priori, la possibilité de saturation des commandes.

Dans ce sens, la thèse est organisée en trois parties.

La première partie correspond à la présentation de certains concepts de base et à une étude de l'état de l'art concernant le problème de commande des systèmes linéaires avec saturation des commandes. Dans le chapitre 1, nous présentons tout d'abord les concepts d'invariance positive et de contractivité. Ensuite, nous faisons un rappel des résultats sur la théorie de la stabilité de Lyapunov. Ces concepts et résultats serviront de base pour le développement des résultats présentés dans les parties 2 et 3 de la thèse. Dans le chapitre 2 nous définissons tout d'abord les problèmes d'analyse et de synthèse que l'on souhaite aborder concernant les systèmes linéaires avec saturation des commandes. A partir de cela, nous faisons une brève

étude bibliographique concernant ces deux types de problèmes. Nous présentons les principaux résultats existants dans la littérature dans trois contextes de stabilité : globale, semi-globale et locale.

La deuxième partie est dédiée à la détermination des régions de stabilité locale de type polyédral pour des systèmes linéaires avec saturation des commandes. Cette approche est liée à la détermination de fonctions de Lyapunov du type polyédral pour un système avec saturations des commandes. Les résultats établis sont basés sur deux types de représentation du système saturé. Dans le chapitre 3 nous considérons la représentation par régions de saturation. Par cette approche, nous divisons l'espace d'état en régions de saturation. Dans chaque région de saturation le système saturé est représenté par un système linéaire avec une perturbation additive. Basée sur cette représentation nous proposons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'invariance et la contractivité de domaines polyédraux par rapport au système saturé. Ces conditions permettront de garantir la stabilité asymptotique du système saturé dans des domaines polyédraux. Dans le chapitre 4 nous considérons la représentation locale du système saturé par un système polytopique. A partir de cette représentation nous formulons des conditions suffisantes pour l'invariance positive, la contractivité et la stabilité asymptotique des trajectoires du système dans des ensembles polyédraux. Les conditions établies à partir de ces deux représentations nous permettront la formulation d'algorithmes, basés sur des schémas de programmation linéaire, pour l'expansion homothétique et non-homothétique d'ensembles polyédraux contractifs dans la région de comportement non-linéaire du système en boucle fermée. Ces algorithmes serviront ainsi pour la détermination de régions de stabilité asymptotique locale pour des systèmes linéaires avec des commandes saturantes. Pour terminer la partie 2 une comparaison entre les résultats obtenus en considérant les deux représentations est faite.

Dans la troisième partie, l'analyse et la synthèse de lois de commande du type retour d'état saturant sont abordées en considérant des fonctions de Lyapunov du type quadratique. L'analyse est menée dans le chapitre 5. Dans ce chapitre, nous considérons la détermination de régions de stabilité locale de type ellipsoïdal. Nous formulons des conditions suffisantes pour la contractivité d'ellipsoïdes par rapport au système saturé. Ces conditions sont présentées sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Ainsi, à partir de ces conditions nous proposons un algorithme basé sur des schémas d'optimisation convexe pour la détermination d'approximations de la région d'attraction de l'origine à travers des ellipsoïdes contractifs. Le chapitre 6 est consacré à la synthèse de lois de commandes du type retour d'état saturant. Etant donné un ensemble de conditions initiales admissibles \mathcal{X}_0 , nous proposons tout d'abord des conditions suffisantes, également sous la forme de LMIs, permettant la détermination d'un retour d'état saturant garantissant la stabilité asymptotique

vers l'origine de toutes les trajectoires initialisées dans \mathcal{X}_0 . Ensuite nous soulignons le compromis entre performance, tolérance à la saturation et taille du domaine à stabiliser. Enfin, nous appliquons la méthode de synthèse proposée au cas de la stabilisation semi-globale et à la détermination de lois de commandes de type multi-modes.

Enfin une annexe sur les ensembles polyédraux et ellipsoïdaux est proposée. L'objectif de cette annexe est de rappeler de manière succincte quelques définitions et propriétés qui sont utilisées dans ce mémoire concernant ces deux types d'ensembles.

Première partie

Etude bibliographique

Chapitre 1

Concepts de base

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons quelques concepts de base sur la stabilité des systèmes dynamiques qui sont fondamentaux pour la présentation des chapitres suivants.

Le chapitre est organisé de la manière suivante :

Tout d'abord nous donnons les définitions d'ensembles contractifs et positivement invariants pour un système dynamique. Ensuite, nous rappelons brièvement la notion de stabilité au sens de Lyapunov ainsi que les principes de la deuxième méthode de Lyapunov. A partir de cela, nous donnons les concepts de région d'attraction et de région de stabilité d'un point d'équilibre asymptotiquement stable. Nous terminons par la présentation de quelques résultats concernant en particulier la stabilité des systèmes linéaires.

Les définitions et résultats présentés dans ce chapitre sont assez classiques et peuvent, sauf référence explicite, être trouvés dans des ouvrages traitant des systèmes non-linéaires. Ainsi, pour les démonstrations de ces résultats nous pouvons citer, par exemple, les ouvrages de Khalil [57], Slotine et Li [83] et Vidyasagar [97].

1.2 Invariance positive et contractivité

Soit le système dynamique autonome obéissant à l'équation aux différences :

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1.1)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

En considérant une condition initiale $x = x(0) \in \mathbb{R}^n$, la *solution* ou la *trajectoire* du système (1.1) correspondant à $x(0)$ est notée $\phi(k, x(0))$.

Nous présentons maintenant deux concepts concernant le comportement de trajectoires $\phi(k, x(0))$ du système (1.1) dans un ensemble \mathcal{M} de l'espace d'état.

Définition 1.1 : L'ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est **positivement invariant** par rapport au système (1.1) si

$$\forall x(0) \in \mathcal{M} \Rightarrow \phi(k, x(0)) \in \mathcal{M} \quad , \quad \forall k \geq 0$$

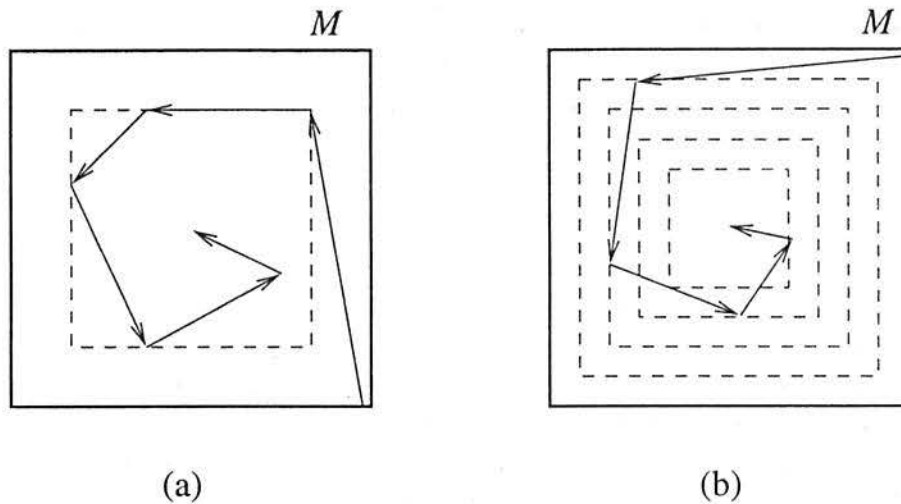
Définition 1.2 : L'ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est **contractif** par rapport au système (1.1) si $\forall x(k) \in \beta_k \partial \mathcal{M}$, $\beta_k \leq 1$, il existe $0 \leq \beta_{k+1} < \beta_k$ tel que $x(k+1) \in \beta_{k+1} \partial \mathcal{M}$.

Ainsi, d'après la définition 1.1, dire qu'un ensemble \mathcal{M} est positivement invariant par rapport au système (1.1) signifie que pour toute condition initiale prise dans \mathcal{M} , la trajectoire respective reste confinée dans \mathcal{M} .

D'autre part, d'après la définition 1.2, la contractivité représente un cas particulier d'invariance positive dans le sens où toute trajectoire du système (1.1) initialisée dans \mathcal{M} évolue toujours vers l'intérieur de l'ensemble. Autrement dit, si à l'instant k , $x(k)$ appartient à la frontière d'un homothétique intérieur de \mathcal{M} , i.e., $x(k) \in \beta_k \partial \mathcal{M}$, $\beta_k \leq 1$, à l'instant suivant l'état appartient à l'intérieur de l'ensemble $\beta_k \mathcal{M}$, c'est-à-dire, $x(k+1) \in \beta_{k+1} \partial \mathcal{M}$ avec $\beta_{k+1} < \beta_k$. En particulier si $\beta_{k+1} \leq \mu \beta_k$, $\forall k$, avec $0 < \mu < 1$, le domaine \mathcal{M} est μ -contractif.

Notons qu'un ensemble contractif est toujours positivement invariant mais la réciproque n'est pas vérifiée. La figure 1.1 schématise une trajectoire possible dans un ensemble positivement invariant et dans un ensemble contractif.

Dans la section suivante, nous allons voir que les concepts d'ensembles positivement invariants et contractifs sont liés au concept de *domaines de stabilité* d'un système dynamique.

FIG. 1.1 – (a) *Invariance Positive*; (b) *Contractivité*

1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Considérons le système (1.1) avec $f : U \rightarrow \mathfrak{R}^n$ étant une fonction localement Lipschitz dans le domaine $U \subseteq \mathfrak{R}^n$.

On dira que x_e est un point d'équilibre (ou point singulier) du système (1.1) s'il satisfait :

$$x_e = f(x_e) \quad (1.2)$$

Dans cette section et les suivantes notre but est de caractériser et d'étudier la stabilité d'un point d'équilibre x_e . Désormais, par simplicité et sans perte de généralité, nous considérons $x_e = 0$. En effet, comme le système est autonome nous pouvons toujours translater le point d'équilibre à l'origine à partir d'un changement de variable du type :

$$\bar{x}_e = x - x_e \quad (1.3)$$

Ainsi, en considérant que $f(x(k))$ satisfait $f(0) = 0$ nous allons étudier la stabilité de l'origine relativement aux solutions (ou trajectoires) $\phi(k, x(0))$ du système (1.1).

Nous présentons maintenant ce que l'on appelle la stabilité au sens de Lyapunov.

Définition 1.3 : Le point $x = 0$ pour le système (1.1) est :

- **stable**, si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tel que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(k)\| < \epsilon, \quad \forall k \geq 0$$

- **asymptotiquement stable**, s'il est stable et δ peut être choisi de façon à avoir :

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

- **instable**, s'il n'est pas stable.

Ainsi, la notion de stabilité au sens de Lyapunov est basée sur le concept de voisinage d'un point. Rappelons que le voisinage $U(x)$ d'un point x est un ensemble contenant x dans son intérieur. Alors, d'après la définition 1.3, l'origine ($x = 0$) d'un système dynamique est stable si pour un voisinage quelconque de $x = 0$, $U_1(0, \epsilon)$, il existe un voisinage $U_2(0, \delta(\epsilon))$ tel que pour toute condition initiale prise dans $U_2(0, \delta(\epsilon))$ la trajectoire reste dans $U_1(0, \epsilon)$. En plus, si dans le voisinage $U_1(0, \epsilon)$ la trajectoire tend vers $x = 0$ lorsque k tend vers l'infini, l'origine est dite asymptotiquement stable. D'autre part, dire que $x = 0$ est instable signifie qu'il existe un voisinage de l'origine $U_1(0, \epsilon)$, tel que pour tout voisinage $U_2(0, \delta(\epsilon)) \subseteq U_1(0, \epsilon)$, il existe au moins une trajectoire $\phi(k, x(0))$, avec $x(0) \in U_2(0, \delta(\epsilon))$, qui n'est pas contenue dans $U_1(0, \epsilon)$.

L'application directe de la définition 1.3, pour conclure sur la stabilité de l'origine par rapport aux trajectoires du système (1.1), suppose la connaissance explicite de celles-ci. Cependant, la détermination des solutions analytiques de (1.1) peut être difficile, voire impossible. Dans ce cas, on peut utiliser la notion de fonction de Lyapunov et appliquer ce que l'on appelle la *seconde méthode de Lyapunov*.

1.3.1 Stabilité par la seconde méthode de Lyapunov

L'objectif de la seconde méthode de Lyapunov est d'étudier le comportement des solutions (trajectoires) au voisinage d'un point d'équilibre sans la connaissance explicite de ces dernières. Cette méthode est basée sur l'utilisation de fonctions auxiliaires possédant certaines propriétés de positivité, et permet de conclure sur la stabilité d'un point équilibre par l'étude de l'évolution de telles fonctions le long des trajectoires du système.

Relativement aux systèmes du type (1.1), le théorème suivant donne des conditions pour la stabilité autour de l'origine.

Théorème 1.1 :[Stabilité Locale] Soit l'origine ($x = 0$) un point d'équilibre de (1.1). Soit $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et définie dans le voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de

$x = 0$, et soit $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$. Si :

(i) $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x \neq 0, x \in U$.

(ii) $\Delta V(x(k)) \leq 0, \forall x(k) \in U$, alors l'origine est stable.

Si de plus :

(iii) $\Delta V(x(k)) < 0, \forall x(k) \in U \setminus \{0\}$, alors l'origine est asymptotiquement stable.

Définition 1.4 :

- La satisfaction de la propriété (i) du théorème 1.1 indique que la fonction $V(x)$ est une **fonction définie positive** dans U . Par contre, si on a $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0, \forall x \neq 0, V(x)$ est une **fonction semi-définie positive**.
- D'autre part, une fonction est dite **définie (semi-définie) négative** si $-V(x)$ est définie (semi-définie) positive.

Définition 1.5 : Une fonction $V(x)$ définie positive satisfaisant les conditions (ii) ou (iii) du théorème 1.1 est appelée **fonction de Lyapunov**.

Notons que le théorème 1.1 garantit la stabilité dans un sens *local*, c'est-à-dire, la stabilité n'est assurée que dans un voisinage de l'origine contenu dans l'ensemble U pour lequel la fonction $V(x)$ vérifie les conditions (i) et (ii) ou (i) et (iii).

Supposons maintenant, qu'un système présente la propriété suivante : pour toute condition initiale dans l'espace d'état, i.e., $\forall x(0) \in \mathfrak{R}^n$, la convergence des trajectoires vers l'origine est garantie. Dans ce cas, la stabilité asymptotique du système est obtenue dans un sens *global*.

Définition 1.6 : Si pour tout $x(0) \in \mathfrak{R}^n$, la trajectoire respective $\phi(k, x(0))$ du système (1.1) converge vers l'origine quand $k \rightarrow \infty$, alors l'origine est dite **globalement asymptotiquement stable**.

Il est donc intéressant d'établir sous quelles conditions on peut initialiser le système aussi loin que l'on veut et garantir que la trajectoire converge vers l'origine. L'idée immédiate serait d'utiliser le théorème 1.1 en considérant $U \triangleq \mathfrak{R}^n$. Cependant,

cela n'est pas suffisant. En fait, il est nécessaire aussi que $V(x)$ soit une fonction radialement non-bornée (condition (ii) ci-après). Ces conditions sont exprimées dans le théorème suivant :

Théorème 1.2 : *Soit l'origine ($x = 0$) un point d'équilibre du système (1.1). Soit la fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dans \mathbb{R}^n . Si :*

- (i) $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x \neq 0,$
- (ii) $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty,$
- (iii) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \forall x(k) \in \mathbb{R}^n, x(k) \neq 0,$

alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Une interprétation géométrique des théorèmes 1.1 et 1.2 peut être donnée à partir du concept de surfaces de Lyapunov.

Définition 1.7 : *Soit $V(x)$ une fonction de Lyapunov. La surface définie dans l'espace d'état par :*

$$\{x \in \mathbb{R}^n ; V(x) = c\}$$

est appelée surface de Lyapunov ou surface de niveau.

La condition $\Delta V(x(k)) < 0$ implique que si $x(k) \in U$ et $V(x(k)) = c$, $x(k+1)$ appartient à l'intérieur de l'ensemble

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n ; V(x) \leq c\}$$

Autrement dit, la trajectoire du système (1.1) évolue vers une surface de Lyapunov intérieure $V(x) = c_1$, $c_1 < c$. Ainsi, à mesure que le temps progresse, la surface sur laquelle est $x(k)$ se contracte vers l'origine, ce qui montre que l'état du système s'approche asymptotiquement de l'origine. Ce raisonnement est illustré par la figure 1.2.

La fonction de Lyapunov est associée à une distance généralisée entre l'état du système (1.1) à l'instant k et l'origine. Si cette distance n'augmente pas à l'instant $k+1$ alors le système est stable. De plus, si elle diminue alors le système est asymptotiquement stable.

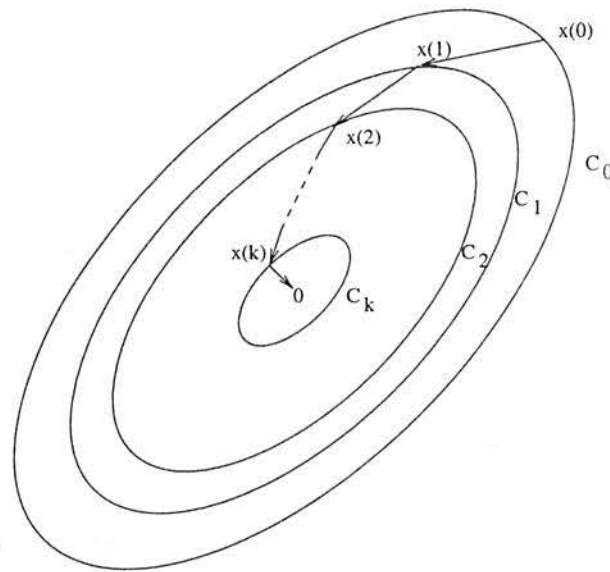


FIG. 1.2 – Contractivité des trajectoires

Il est important de remarquer que le théorème 1.1 fournit une condition *suffisante* pour la stabilité. Par conséquent, si nous ne sommes pas capables de trouver une fonction de Lyapunov nous ne pouvons rien conclure sur la stabilité de l'origine par rapport aux trajectoires du système (1.1).

La difficulté majeure de la deuxième méthode de Lyapunov réside dans le choix de la "bonne" fonction. Malheureusement, il n'existe pas de méthode systématique pour la détermination de fonctions de Lyapunov. En général, le choix de la fonction fait appel à l'expérience du concepteur. Dans des cas particuliers (systèmes mécaniques et/ou électriques, par exemple), on peut faire appel à l'interprétation physique du théorème de Lyapunov et choisir des fonctions représentant l'énergie du système. Dans ce cas, si l'énergie est dissipée le long des trajectoires du système, la fonction sera potentiellement une fonction de Lyapunov.

1.3.2 Principe d'invariance de LaSalle

Si la fonction de Lyapunov choisie est telle que $\Delta V(x(k)) \leq 0$ le long des trajectoires du système (1.1), on ne peut rien affirmer sur la stabilité asymptotique de l'origine à partir de l'application du théorème 1.1 (ou 1.2). Cependant, si on peut garantir qu'aucune trajectoire ne peut rester aux points où $\Delta V(x(k)) = 0$, à l'exception de $x = 0$, alors la convergence des trajectoires vers l'origine sera certaine. Ce résultat, connu comme *le principe d'invariance de LaSalle*, est donc "plus fort"

que les théorèmes 1.1 et 1.2. Il est énoncé de la manière suivante :

Théorème 1.3 : *Soient :*

- U un ensemble compact positivement invariant par rapport au système (1.1)
- $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $\Delta V(x(k)) \leq 0$ dans U .
- E l'ensemble de tous les points de U vérifiant $\Delta V(x(k)) = 0$.
- \mathcal{M} le plus grand ensemble invariant contenu dans E .

Alors, toute trajectoire initialisée dans U converge vers \mathcal{M} quand $k \rightarrow \infty$.

Ainsi, lorsque $\Delta V(x(k)) \leq 0$ pour prouver que l'origine est asymptotiquement stable on doit montrer que le plus grand ensemble invariant contenu dans E est l'origine ($x = 0$). Cela est établi en montrant qu'aucune trajectoire ne peut rester indéfiniment dans E sauf la trajectoire triviale $\phi(k, 0) = 0$. Dans ce cas on peut formuler les deux corollaires suivants permettant de conclure sur la stabilité asymptotique de l'origine.

Corollaire 1.1 : *Soient :*

- $x = 0$ un point d'équilibre du système (1.1).
- $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et définie positive dans un voisinage U de l'origine telle que $\Delta V(x(k)) \leq 0$ dans U .
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; \Delta V(x(k)) = 0\}$.

Supposons qu'aucune trajectoire ne peut rester dans S sauf la trajectoire triviale $\phi(k, 0) = 0$. Alors l'origine est asymptotiquement stable.

Corollaire 1.2 : *Soient :*

- $x = 0$ un point d'équilibre du système (1.1).

- $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, définie positive, radialement non-bornée et telle que $\Delta V(x(k)) \leq 0, \forall x(k) \in \mathbb{R}^n$.
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; \Delta V(x(k)) = 0\}$.

Supposons qu'aucune trajectoire ne peut rester dans S sauf la trajectoire triviale $\phi(k, 0) = 0$. Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

1.3.3 La région d'attraction de l'origine

En général, il n'est pas suffisant de déterminer si l'origine du système est asymptotiquement stable. En effet, lorsque l'origine est asymptotiquement stable, on s'intéresse souvent à savoir quel est le plus grand domaine dans l'espace d'état dans lequel toute trajectoire qui y commence converge vers l'origine. Cette question nous amène à la définition de la *région d'attraction de l'origine*.

Définition 1.8 : Soit $\phi(k, x(0))$ la trajectoire qui part, à l'instant $k = 0$, de l'état $x(0)$. La **région d'attraction de l'origine** est définie comme l'ensemble de tous les points x de l'espace d'état tels que pour $x = x(0)$ on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k, x(0)) = 0$.

Le domaine d'attraction de l'origine est donc l'ensemble :

$$R_A \triangleq \{x(0) \in \mathbb{R}^n ; \phi(k, x(0)) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty\} \quad (1.4)$$

Remarquons que si le système est globalement asymptotiquement stable, alors la région d'attraction de l'origine est tout l'espace d'état, i.e., $R_A = \mathbb{R}^n$.

La détermination exacte de la région d'attraction de l'origine d'une façon analytique est une tâche en général difficile, voire impossible [57], [86]. Cependant, on peut déterminer des approximations de la région d'attraction, c'est-à-dire, on peut déterminer des régions de l'espace d'état où la convergence asymptotique des trajectoires vers l'origine est garantie.

Définition 1.9 : Une région R_s de l'espace d'état est une **région de stabilité asymptotique** par rapport à l'origine du système (1.1) si pour toute condition initiale $x(0) \in R_s$ on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k, x(0)) = 0$.

En particulier, il est toujours possible de déterminer des régions de stabilité asymptotique à partir des domaines de Lyapunov et d'ensembles positivement invariants [57]. En fait, si l'on considère une fonction de Lyapunov telle que $\Delta V(x) < 0$ le long des trajectoires du système dans une région :

$$\mathcal{S}_c = \{x \in \mathbb{R}^n ; V(x) \leq c\}$$

on garantit que toute trajectoire initialisée dans \mathcal{S}_c y reste et converge vers l'origine quand $k \rightarrow \infty$. D'autre part, d'après le principe d'invariance de LaSalle, si le corollaire 1.1 s'applique en considérant un ensemble \mathcal{M} positivement invariant, nous pouvons conclure sur la stabilité asymptotique dans cet ensemble.

1.4 Stabilité des systèmes linéaires

Considérons maintenant un système linéaire à temps discret décrit par l'équation :

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{1.5}$$

Les états d'équilibre de ce système sont les points x_e vérifiant :

$$x_e = Ax_e$$

Remarquons que l'origine est toujours un point d'équilibre du système (1.5), mais ce point d'équilibre n'est pas forcément unique.

La stabilité de l'origine du système (1.5), ou tout simplement la stabilité de ce système, peut être caractérisée de deux manières :

1. à partir des valeurs propres de la matrice A .
2. à partir de l'application de la deuxième méthode de Lyapunov.

1.4.1 Caractérisation à partir des valeurs propres de A

Il est bien connu (voir, par exemple [62]) que la stabilité du système (1.5) est caractérisée par le spectre de la matrice A selon la définition suivant :

Définition 1.10 : Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.5) est :

- (i) **asymptotiquement stable** si $|\lambda_i(A)| < 1, \forall i = 1, \dots, n$.
- (ii) **critiquement stable** si $|\lambda_i(A)| \leq 1, \forall i = 1, \dots, n$ et la multiplicité géométrique de chaque valeur propre $\lambda_i(A)$ telle que $|\lambda_i(A)| = 1$ est égale à sa multiplicité algébrique.
- (iii) **critiquement instable** si $|\lambda_i(A)| \leq 1, \forall i = 1, \dots, n$ et la multiplicité géométrique d'au moins une valeur propre $\lambda_i(A)$ telle que $|\lambda_i(A)| = 1$ est différente de sa multiplicité algébrique.
- (iv) **instable** s'il existe au moins une valeur propre de $A, \lambda_i(A),$ telle que $|\lambda_i(A)| > 1$.

Remarque 1.1 : Pour une valeur propre donnée, $\lambda_i(A)$, la multiplicité algébrique correspond à la multiplicité de cette valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique de A ; la multiplicité géométrique de cette même valeur propre est le nombre de vecteurs propres de A linéairement indépendants associés à $\lambda_i(A)$ [26]. Ainsi, dire que le système (1.5) (ou la matrice A) est critiquement stable signifie que les blocs de Jordan correspondant aux valeurs propres de module égal à 1 sont bloc-diagonaux ou semi-simples [62].

A partir de cette définition, la stabilité d'un système linéaire se caractérise par la localisation des valeurs propres de A par rapport au cercle de rayon unité du plan complexe : si toutes les valeurs propres sont contenues dans le cercle on a la stabilité asymptotique ; s'il existe des valeurs propres sur le cercle le système sera critiquement stable ou critiquement instable ; l'existence d'au moins une valeur propre en dehors du cercle caractérise l'instabilité.

1.4.2 Caractérisation à partir des fonctions de Lyapunov

Etant donné que le système (1.5) correspond à une classe particulière de systèmes du type (1.1), on peut utiliser des fonctions de Lyapunov afin de caractériser sa stabilité.

Nous avons remarqué dans la section 1.3.1 que d'une part, la détermination d'une "bonne" fonction de Lyapunov n'est pas toujours évidente et, que d'autre part, les conditions données par l'application des théorèmes de Lyapunov ne sont que suffisantes. Néanmoins, dans le cas des systèmes linéaires, la stabilité implique

obligatoirement l'existence d'une fonction de Lyapunov. Autrement dit, si le système est stable, il est toujours possible de déterminer des fonctions de Lyapunov particulières, à savoir : *fonctions quadratiques* et *fonctions polyédrales*.

Fonctions de Lyapunov quadratiques

Le théorème suivant garantit l'existence de fonctions de Lyapunov quadratiques pour tout système linéaire asymptotiquement stable.

Théorème 1.4 : [56] [62] *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.5) est asymptotiquement stable, i.e., $|\lambda_i(A)| < 1, \forall i = 1, \dots, n$, si et seulement si, pour toute matrice symétrique et définie positive Q , il existe une matrice symétrique et définie positive P solution unique de l'équation de Lyapunov :*

$$A^T P A - P = -Q \quad (1.6)$$

A partir de ce théorème la fonction quadratique définie comme :

$$V(x) = x^T P x \quad (1.7)$$

satisfait les conditions du théorème 1.1 avec

$$\Delta V(x(k)) = -x(k)^T Q x(k) < 0, \quad \forall x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad x(k) \neq 0$$

Ce type de fonction est associé à des domaines de Lyapunov de type ellipsoïdal. En fait, si $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.5), alors les ellipsoïdes (voir annexe A):

$$\mathcal{E}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P x \leq c\}, \quad c > 0$$

sont des domaines contractifs pour ce système.

Fonctions de Lyapunov polyédrales

Un résultat analogue à celui du théorème 1.4 qui concerne des fonctions de Lyapunov de type polyédral est donné par le théorème suivant établi par Molchanov et Pyatnitskii [73],[74].

Théorème 1.5 : *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.5) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un indice $m \geq n$, une matrice $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et une matrice $\Gamma \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ tels que :*

$$(i) \quad \Gamma L = LA$$

$$(ii) \quad \|\Gamma\|_\infty \leq 1 \text{ ou de manière équivalente } \max_{1 \leq i \leq m} \sum_j^m |\gamma_{(i,j)}| \leq 1$$

Dans ce cas, la fonction de Lyapunov est définie comme :

$$V(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |L_{(i)}x| \quad (1.8)$$

Les domaines de Lyapunov associés à (1.8) sont des polyèdres symétriques du type :

$$S(L, r1_m, r1_m) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; -r1_m \preceq Lx \preceq r1_m\}$$

avec $r > 0$. Ces domaines sont, par conséquent, des domaines d'invariance quand $\max_{1 \leq i \leq m} \sum_j^m |\gamma_{(i,j)}| \leq 1$ et des domaines contractifs dans le cas où cette inégalité est vérifiée strictement.

L'équation (i) du théorème 1.5 peut être considérée comme une relation de similarité généralisée entre les matrices A et Γ [89] ou une équation de projection canonique quand $\text{rang}(L) < n$ [98],[40]. Dans [73], les auteurs donnent une solution à cette équation, lorsque toutes les valeurs propres de la matrice A sont réelles, distinctes et telles que $|\lambda_i(A)| < 1$.

Un résultat similaire à celui du théorème 1.5, en considérant la relation (ii) avec une norme quelconque, est établi dans [58].

D'une façon plus générale, si l'on considère un polyèdre

$$S(G, w) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; Gx \preceq w\} \quad , \quad G \in \mathfrak{R}^{g \times n}, \quad w \in \mathfrak{R}^g$$

on peut toujours associer à $S(G, w)$ une fonction polyédrale du type :

$$V(x) = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x}{w_{(i)}} \right\} \quad (1.9)$$

Lorsque $S(G, w)$ est compact et contient l'origine dans son intérieur, la fonction (4.19) est appelée *fonctionnelle de Minkowski* [28]. Dans ce cas, si $S(G, w)$ est positivement invariant et/ou contractif par rapport au système (1.5), il est possible de

démontrer que la fonction (1.9) est une fonction de Lyapunov pour le système (voir par exemple [9],[88],[13],[92]).

Remarque 1.2 : *La stabilité asymptotique d'un système linéaire est toujours dans un sens global. En effet, si les fonctions (1.7) et (1.8) vérifient, respectivement, les conditions des théorèmes 1.4 et 1.5 elles vérifient aussi les conditions du théorème 1.2.*

1.5 Systèmes linéaires variables

Nous rappelons, dans cette section, un résultat dû à Opoitsev [75] concernant une classe particulière de systèmes variants dans le temps. Si l'on considère le système (1.5) pour lequel la matrice A varie à chaque instant k et appartient de plus à un ensemble compact \mathcal{W} , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) \\ \text{avec } A(k) \in \mathcal{W}, \forall k \end{cases} \quad (1.10)$$

nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.6 : *[75] Pour la stabilité asymptotique du système dynamique (1.10), il est nécessaire et suffisant qu'il existe dans \mathfrak{R}^n une norme $\|\cdot\|_*$ telle que :*

$$\|A(k)x(k)\|_* \leq \mu \|x(k)\|_*, \quad \forall x(k) \in \mathfrak{R}^n, \quad A(k) \in \mathcal{W} \quad (1.11)$$

avec $\mu \in [0, 1[$.

Ainsi le théorème 1.6 indique que $V(x) = \|x(k)\|_*$ est une fonction de Lyapunov puisque elle est définie positive, et de plus, concernant la décroissance $\Delta V(x(k))$, on a :

$$\Delta V(x(k)) = \|x(k+1)\|_* - \|x(k)\|_* \leq \mu \|x(k)\|_* - \|x(k)\|_* \Leftrightarrow \Delta V(x(k)) \leq \epsilon \|x(k)\|_*$$

avec $-1 \leq \epsilon = \mu - 1 < 0$. Donc, d'après le théorème 1.1, on obtient la stabilité asymptotique du système (1.10). Ceci signifie également qu'il y a contraction stricte de la norme $\forall x(k) \in \mathfrak{R}^n, \forall A(k) \in \mathcal{W}$.

1.6 Conclusion

Tout d'abord nous avons donné les définitions d'ensembles positivement invariants et contractifs. Ensuite, nous avons donné un rapide aperçu des résultats relatifs à la stabilité des systèmes dynamiques. Dans un premier temps, nous avons rappelé les résultats classiques de la théorie de Lyapunov concernant la stabilité dans un sens local et dans un sens global. Dans le cas de la stabilité asymptotique locale, nous avons défini la région d'attraction de l'origine (d'un point d'équilibre). Puisque cette région en général n'est pas analytiquement déterminable, nous avons vu qu'il est toujours possible de déterminer des régions de stabilité asymptotique à partir de fonctions de Lyapunov. Ces régions peuvent donc être considérées comme des approximations de la région d'attraction de l'origine. Ensuite nous avons présenté quelques résultats classiques relatifs à la stabilité des systèmes linéaires. Nous avons rappelé que la stabilité d'un système linéaire peut être caractérisée par les valeurs propres de la matrice dynamique du système aussi bien que par la deuxième méthode de Lyapunov. En particulier, quand le système linéaire est stable il est toujours possible de déterminer une fonction de Lyapunov soit quadratique, soit polynomiale. Enfin, nous avons présenté un résultat concernant la stabilité d'une classe particulière de systèmes linéaires variants dans le temps.

Ces résultats et définitions serviront ainsi de base, directement ou indirectement, pour l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes linéaires avec saturation de la commande qui sera menée dans cette thèse.

Chapitre 2

Systèmes linéaires avec saturation des commandes

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de la problématique de la commande des systèmes linéaires avec contraintes d'amplitude sur les signaux de commande.

Premièrement, nous définissons la loi de commande saturante et le système non-linéaire en boucle fermée qui seront les objets d'étude de cette thèse. En fonction de ces définitions deux problèmes génériques sont formulés : le problème d'analyse de la stabilité du système en boucle fermée avec saturation des commandes et le problème de synthèse d'une loi de commande qui prend en compte, a priori, la possibilité de saturation des commandes.

Ensuite, nous passons à une brève étude bibliographique sur le sujet. Notre objectif est de donner une vision globale des approches et méthodes existantes dans la littérature concernant la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires avec commande saturante. Ces résultats seront présentés dans trois contextes de stabilité : global, semi-global et local.

2.2 Le système saturé

Soit un système linéaire, à temps discret, invariant dans le temps, décrit par l'équation suivante :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.1)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, A et B sont des matrices réelles de dimensions respectives $n * n$ et $n * m$.

Considérons que la commande est une fonction linéaire de l'état, c'est-à-dire, le système est bouclé par un retour d'état du type :

$$u(k) = Fx(k) \quad (2.2)$$

avec $F \in \mathbb{R}^{m*n}$.

Si aucune contrainte d'amplitude n'est présente sur les états ou sur la commande du système (2.1), le système en boucle fermée est donné par l'équation *linéaire* classique :

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) \quad (2.3)$$

Dans ce cas, d'après ce qui a été présenté dans la section 1.4.1, la stabilité du système en boucle fermée est caractérisée par les valeurs propres de $(A + BF)$. Si le système (2.1) est stabilisable, la matrice F peut être choisie telle que toutes les valeurs propres de $(A + BF)$ sont dans le cercle unité. La stabilité asymptotique du système linéaire (2.3) est alors garantie dans un sens global.

Supposons maintenant que la commande $u(k)$ soit soumise à des contraintes d'amplitude, c'est-à-dire, chaque composante $u_{(i)}(k)$, $i = 1, \dots, m$, du vecteur de commande est comprise entre une valeur maximale et une valeur minimale. Autrement dit, à chaque instant k le vecteur de commande $u(k)$ doit appartenir à un ensemble polyédral Ω défini dans l'espace de commande par :

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^m ; -u_{min} \preceq u \preceq u_{max}\} \quad (2.4)$$

avec $u_{min(i)}, u_{max(i)} > 0$, pour $i = 1, \dots, m$.

Ainsi, en considérant le retour d'état (2.2), si la valeur de $F_{(i)}x(k)$ est supérieure à $u_{max(i)}$, la commande restera bloquée sur $u_{max(i)}$. De la même façon, si $F_{(i)}x(k)$ est inférieure à $-u_{min(i)}$ la commande restera bloquée sur $-u_{min(i)}$. Dans ce cas, on dit qu'il y a *saturation de la commande*. La loi de commande effectivement appliquée au système (2.1) est donc :

$$u(k) = sat(Fx(k)) \quad (2.5)$$

avec chaque composante $u_{(i)}(k)$, $i = 1, \dots, m$, définie par :

$$u_{(i)}(k) = (\text{sat}(Fx(k)))_{(i)} = \begin{cases} -u_{\min(i)} & \text{si } F_{(i)}x(k) < -u_{\min(i)} \\ F_{(i)}x(k) & \text{si } -u_{\min(i)} \leq F_{(i)}x(k) \leq u_{\max(i)} \\ u_{\max(i)} & \text{si } F_{(i)}x(k) > u_{\max(i)} \end{cases} \quad (2.6)$$

La loi de commande (2.5) est appelée dans la littérature *retour d'état saturé* ou *retour d'état saturant*. La fonction saturation $u(k) = \text{sat}(Fx(k))$ que nous considérons est décrite par la courbe montrée dans la figure 2.1.

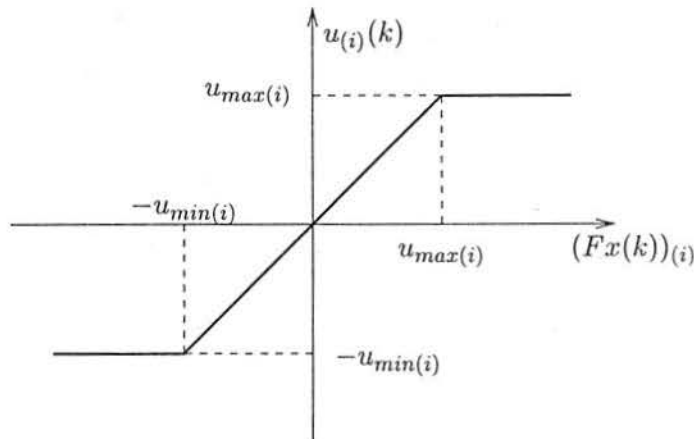


FIG. 2.1 – Fonction saturation

Le système en boucle fermée, obtenu par l'application du *retour d'état saturant* au système (2.1), est le système *non-linéaire* suivant :

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(Fx(k)) \quad (2.7)$$

Désormais, nous appellerons le système le (2.7) *système en boucle fermée avec saturation des commandes*, ou, tout simplement, *système saturé*.

Si l'état du système (2.7) est tel que la valeur de $F_{(i)}x(k)$ est comprise entre $u_{\min(i)}$ et $u_{\max(i)}$, $\forall i = 1, \dots, m$, les commandes ne sont pas saturées. L'ensemble des états ayant cette propriété est appelé *région de linéarité* du système (2.7). Cette région est donc définie par :

$$\mathcal{D}_l = S(F, u_{\min}, u_{\max}) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; -u_{\min} \preceq Fx \preceq u_{\max}\} \quad (2.8)$$

Dans cette région polyédrale, on dit que le système saturé (2.7) admet un modèle localement linéaire. En effet, si $x(k) \in S(F, u_{\min}, u_{\max})$, $x(k+1)$ peut être déterminé en utilisant l'équation linéaire (2.3). Néanmoins, il est important de remarquer que le

fait d'avoir $x(k) \in S(F, u_{\min}, u_{\max})$ n'implique pas $x(k+1) \in S(F, u_{\min}, u_{\max})$. Ainsi, même si les valeurs propres de $(A+BF)$ sont placées dans le cercle unité, on ne peut pas conclure, a priori, que toute trajectoire qui est initialisée dans $S(F, u_{\min}, u_{\max})$ converge vers l'origine. Pour cela il faut considérer le comportement non-linéaire du système (2.7).

Remarque 2.1 : *Nous avons considéré par simplicité comme loi de commande saturée un retour d'état. Cependant, l'étude de la stabilité d'un système avec saturation des commandes considérant une loi du type retour d'état linéaire est assez générique. En fait, si l'on s'intéresse à des lois de commande du type retour de sortie linéaire saturé on peut toujours écrire le système en boucle fermée sous la forme (2.7). Dans ce cas, si l'on considère que la sortie du système est donnée par*

$$y(k) = Cx(k) \quad (2.9)$$

avec $y \in \mathbb{R}^p$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, il suffit de redéfinir la loi de commande saturée et la région de linéarité de la manière suivante :

- cas statique : Soit $K \in \mathbb{R}^{p \times m}$ la matrice de gain statique appliquée sur la sortie du système. Alors on a :

$$u(k) \triangleq \text{sat}(Ky(k)) = \text{sat}(KCx(k))$$

et la région de linéarité est donc décrite par :

$$\mathcal{D}_l \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; -u_{\min} \preceq KCx \preceq u_{\max}\} = S(KC, u_{\min}, u_{\max})$$

- cas dynamique : Soit le compensateur dynamique d'ordre n_c décrit par :

$$\begin{cases} \eta(k+1) = M\eta(k) + Ny(k) \\ u(k) = \text{sat}(K\eta(k) + Dy(k)) \end{cases} \quad (2.10)$$

Si l'on définit :

$$\hat{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} \triangleq \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad \hat{C} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(k) \triangleq \begin{bmatrix} x(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix}, \quad \hat{y}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \eta(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

le système en boucle fermée peut être écrit comme [55] :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}\hat{u}(k) \\ \hat{y}(k) = \hat{C}\hat{x}(k) \end{cases}$$

où

$$\hat{u}(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ \eta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sat}([DC \ K]\hat{x}(k)) \\ [NC \ M]\hat{x}(k) \end{bmatrix}$$

Dans ce cas la région de linéarité est donc définie par [34]:

$$\mathcal{D}_l \triangleq \{ \hat{x} \in \mathbb{R}^{n_c+n} ; -u_{\min} \preceq [DC \ K]\hat{x} \preceq u_{\max} \}$$

2.3 Les problèmes d'analyse et de synthèse

En considérant un système linéaire du type (2.1) sur lequel on applique une loi de commande du type (2.5) deux types de problèmes peuvent être formulés, à savoir : un problème d'analyse et un problème de synthèse.

Il existe aujourd'hui dans la littérature de nombreuses techniques et méthodes permettant la détermination de lois de commande linéaires pour un système linéaire du type (2.1). En général, ces lois de commande sont conçues sans prendre en compte explicitement les limites sur la commande. Autrement dit, on suppose qu'il n'existe pas de contraintes sur la commande et on détermine une matrice F , telle que le système linéaire (2.3) soit asymptotiquement stable et, en plus, qu'il satisfasse des spécifications de commande supplémentaires, par exemple, des spécifications de performance et de robustesse. Dans ce cas, suivant où le système est initialisé, la trajectoire correspondante peut ne pas être contenue dans la région de linéarité du système saturé (2.7). La saturation de la commande peut ainsi amener le système en boucle fermée à présenter un comportement instable ou encore provoquer la convergence des trajectoires vers des points d'équilibre parasites ou des cycles limites.

Ainsi, à partir de la loi de commande déterminée sans considérer les contraintes d'amplitude, le concepteur doit analyser la stabilité du système en boucle fermée avec saturation (2.7). Autrement dit, il doit déterminer des régions de stabilité asymptotique pour le système (2.7) et vérifier si cette région "englobe" toute la région dans laquelle le système peut être initialisé ou dans laquelle l'état du système peut être amené par l'action d'une perturbation temporaire. Dans ce cas on peut dire que l'on garantit la sûreté de fonctionnement du système en boucle fermée en présence de la saturation.

En résumé, le problème d'analyse se pose de la façon suivante :

Problème 2.1 : *Etant donnée une matrice F telle que $(A + BF)$ est asymptotiquement stable, déterminer des régions dans l'espace d'état où la convergence des trajectoires du système saturé (2.7) vers l'origine est garantie.*

L'autre type de problème qui peut être formulé est celui de la synthèse de lois de commande en considérant, lors de l'étape de conception, les contraintes sur la commande et la possibilité de saturation. Dans ce cas, on peut considérer comme donnée du problème la région dans l'espace d'état où le système doit être stable, c'est-à-dire, où l'application de la loi de commande saturée doit être capable d'assurer la convergence asymptotique vers l'origine de toute trajectoire initialisée dans une telle région. Cette région est donc considérée comme une région d'états initiaux admissibles dans laquelle le système en boucle fermée peut être initialisé ou encore l'état du système peut être amené lors de l'action de perturbations temporaires.

Le problème de synthèse s'énonce donc de la manière suivante :

Problème 2.2 : *Etant donné un domaine d'états initiaux admissibles D_0 , déterminer une matrice F telle que toute trajectoire du système (2.7) commençant dans D_0 converge asymptotiquement vers l'origine.*

Nous allons présenter maintenant une rapide revue bibliographique concernant ces deux types de problème dans trois contextes de stabilité : global, semi-global et local.

2.4 Stabilité globale

Le problème de la stabilisation globale d'un système linéaire soumis à des contraintes du type saturation sur la commande a reçu l'attention de plusieurs chercheurs durant les dernières années. Nous pouvons tout d'abord citer les travaux de Sontag et Sussmann [84] et de Yang et al. [101] pour le cas des systèmes continus et le travail de Yang [100] considérant des systèmes discrets. Ces travaux conduisent au résultat suivant :

Théorème 2.1 : *Le système (2.1) soumis à des contraintes sur la commande du type (2.4) est globalement stabilisable si et seulement si*

- (i) la paire (A, B) est stabilisable,

(ii) les valeurs propres de la matrice A ne sont pas strictement instables.

La condition (ii) du théorème 2.1 signifie :

- dans le cas continu : toutes les valeurs propres commandables de la matrice A sont contenues dans le demi-plan gauche fermé du plan complexe (i.e., l'axe imaginaire y compris).
- dans le cas discret : toutes les valeurs propres commandables de la matrice A sont contenues dans ou sur le cercle unité.

En fait, le résultat établi dans le théorème 2.1 est facile à justifier d'une façon intuitive : si le système est instable en boucle ouverte et la commande est bornée, on ne disposera pas "d'énergie" de commande suffisante pour ramener à l'origine un état trop éloigné.

Si l'on suppose que les conditions (i) et (ii) du théorème 2.1 sont satisfaites, une question qui se pose naturellement est la suivante :

Est-ce qu'il est toujours possible de déterminer une loi de commande du type (2.5) qui stabilise globalement le système (2.1)?

Autrement dit, sous les conditions (i) et (ii) du théorème 2.1 est-il toujours possible de déterminer une matrice F telle que le système (2.7) soit globalement asymptotiquement stable?

La réponse négative à cette question a été tout d'abord donnée dans [35] puis dans [87] et [68]. Dans [35] et [87], il est prouvé dans le cas des systèmes continus que pour une chaîne d'intégrateurs d'ordre $n \geq 3$ avec saturations, il n'existe pas de contrôleur linéaire assurant la stabilité globale. Dans [68], un résultat identique est démontré dans le cas des systèmes discrets. C'est pourquoi, dans le cas général, sous les hypothèses du théorème 2.1, il est nécessaire d'utiliser une loi de commande non-linéaire, c'est-à-dire,

$$u_{(i)}(k) = \text{sat}(\psi_{(i)}(x(k)))$$

où $\psi_{(i)}(x(k))$ est une fonction non-linéaire de l'état à l'instant k . Ce type de lois de commande est étudié dans [101] et [94] pour le cas des systèmes continus.

Cependant, dans les cas spécifiques où le système en boucle ouverte est *asymptotiquement* ou *critiquement stable*, Burgat et Tarbouriech [18],[19],[89] ont montré qu'il est toujours possible de trouver une loi de commande du type (2.5) qui stabilise

le système (2.7) globalement. Pour cela, il suffit de déterminer la matrice F de la façon suivante :

$$F = D(\beta)B^T P A$$

où $D(\beta)$ est une matrice diagonale telle que $0 < \beta_{(i)} < \frac{2}{\|B^T P B\|}$, $\forall i = 1, \dots, m$ et $P = P^T > 0$ est solution de l'équation de Lyapunov :

$$A^T P A - P = -Q \quad \text{avec} \quad Q = Q^T \geq 0$$

Dans le cas où la matrice A est asymptotiquement stable, ils ont montré qu'il est toujours possible de choisir la matrice $Q = Q^T \geq 0$ permettant d'obtenir une vitesse de convergence à l'origine pour le système en boucle fermée (2.7) plus rapide que celle du système en boucle ouverte.

2.5 Stabilité semi-globale

En pratique, l'évolution d'un système est plutôt restreinte à une région spécifique de l'espace d'état dans la mesure où l'on ne souhaite pas que l'état du système puisse avoir une norme trop grande et presque infinie. C'est pourquoi l'intérêt pratique de la stabilité globale peut être remis en cause. Par ailleurs, en général, les lois de commande globalement stabilisantes n'améliorent pas réellement la dynamique du système en boucle ouverte, voire la dégradent dans certains cas.

Ainsi, une approche alternative à la stabilisation globale du système saturé (2.7) est la stabilisation dite *semi-globale*. Ce concept a été introduit dans la littérature presque simultanément par Lin et Saberi [63],[64] et Alvarez-Ramirez et al. [1]. A partir de ces travaux, la stabilisation semi-globale d'un système linéaire soumis à des contraintes sur la commande peut être définie comme :

Définition 2.1 : *[Stabilisation semi-globale] Un système linéaire soumis à des contraintes de type saturation sur la commande est semi-globalement stabilisable, si pour un ensemble borné quelconque $D_0 \in \mathbb{R}^n$, contenant l'origine et aussi grand que l'on veut, il existe une loi de commande du type $u(k) = \text{sat}(F x(k))$ telle que :*

- *le système en boucle fermée est localement asymptotiquement stable.*
- *D_0 est contenu dans la région d'attraction du système en boucle fermée.*

D'après cette définition, on peut dire que la stabilité semi-globale se situe à mi-chemin entre les concepts de stabilité globale et stabilité locale. En fait, comme D_0 peut être aussi grand que l'on veut, on peut supposer $D_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ et on retombe sur le cas d'une stabilisation globale. Par ailleurs, comme la stabilité asymptotique n'est garantie que pour les états appartenant à D_0 , la stabilisation semi-globale peut être considérée comme une stabilisation locale.

Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation semi-globale [63] [1] est que la paire (A, B) soit stabilisable et les valeurs propres commandables de la matrice A soient asymptotiquement ou critiqueusement stables ou critiqueusement instables. Cette condition implique donc, dans le cas discret, que les valeurs propres de A soient contenues dans ou sur le cercle unité. Il a été aussi montré dans les travaux cités ci-dessus que, dans ce cas, on peut toujours déterminer la matrice F de façon à éviter la saturation de la commande pour toute trajectoire du système initialisée dans D_0 , c'est-à-dire, F est telle que :

- $(A + BF)$ est asymptotiquement stable.
- $D_0 \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$.
- $x(k) \in S(F, u_{min}, u_{max}), \forall k \geq 0, \forall x(0) \in D_0$.

On rencontre dans la littérature principalement deux approches pour la conception de lois de commande qui stabilisent le système (2.7) semi-globalement : l'approche par placement de pôles et l'approche par équation de Ricatti.

2.5.1 Approche par placement de pôles

Cette approche a été proposée dans [64] pour le cas des systèmes discrets et dans [63] et [1] pour des systèmes continus. La méthode pour le cas discret consiste tout d'abord à déterminer une transformation de similarité T , telle que les matrices A et B soient mises respectivement sous la forme suivante :

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \dots & A_{1q} & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & A_{2q} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_o \end{bmatrix} ; \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & B_2 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_q & * \\ B_{o1} & B_{o2} & \dots & B_{oq} & * \end{bmatrix}$$

où chaque matrice A_i est sous la forme canonique commandable [26], chaque $B_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$ et (A_o, B_o) représente la partie non-commandable de la paire (A, B) .

Ainsi, il est possible de déterminer pour chaque paire (A_i, B_i) , $i = 1, \dots, q$ un gain "découplé" $F_i(\epsilon)$ tel que :

$$|\lambda(A_i + B_i F_i(\epsilon))| = (1 - \epsilon)|\lambda(A_i)|$$

avec $0 < \epsilon \leq 1$.

En appliquant cette procédure à chaque paire (A_i, B_i) , $i = 1, \dots, q$, on obtient un retour d'état paramétrisé en ϵ :

$$u(k) = \begin{bmatrix} \text{diag}(F_i(\epsilon)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}x(k)$$

On démontre alors qu'étant donné un ensemble quelconque borné D_0 contenant l'origine, il est possible de déterminer une borne supérieure pour ϵ , notée ϵ^* , telle que $\forall \epsilon \in (0, \epsilon^*]$ l'inclusion $D_0 \subseteq S(F(\epsilon), u_{min}, u_{max})$ est satisfaite et $\forall x(0) \in D_0$ la trajectoire du système reste confinée dans $S(F(\epsilon), u_{min}, u_{max})$, c'est-à-dire, les commandes ne saturent pas. Cette borne ϵ^* ne peut malheureusement être déterminée que par simulation.

2.5.2 Approche par équation de Riccati

Cette approche a été proposée par Lin et Saberi dans [65] pour des systèmes discrets (pour le cas continu nous pouvons citer [79]).

L'approche est basée sur la solution d'une équation de Riccati paramétrisée en ϵ , $\epsilon > 0$:

$$P(\epsilon) = A^T P(\epsilon) A + \epsilon I_n - A^T P(\epsilon) B (B^T P(\epsilon) B + I_m)^{-1} B^T P(\epsilon) A \quad (2.11)$$

A partir de cette équation on démontre qu'étant donnée une région quelconque bornée, $D_0 \in \mathbb{R}^n$, contenant l'origine, il est toujours possible de déterminer un ϵ^* tel que $\forall \epsilon \in (0, \epsilon^*]$ l'équation (2.11) possède une solution $P(\epsilon)$ telle que la loi de commande définie par :

$$u(k) = -(B^T P(\epsilon) B + I_m)^{-1} B^T P(\epsilon) A x(k) = F(\epsilon) x(k)$$

stabilise le système pour toute condition initiale choisie dans D_0 sans saturation de la commande.

2.6 Stabilité locale

Lorsque le système en boucle ouverte est strictement instable, ni la stabilité globale, ni la stabilité semi-globale ne peuvent être envisagées lorsque la commande est contrainte. Par ailleurs, même si le système est stable, la satisfaction d'autres spécifications de commande (comme par exemple, performance, découplage entre modes, rejet de perturbations) peut ne pas être possible en utilisant des lois de commande qui stabilisent le système de façon globale ou semi-globale. Dans ce cas, on est amené à raisonner en termes de stabilité locale.

Ainsi, d'un point de vue d'analyse, il est intéressant de déterminer la région d'attraction de l'origine du système saturé (2.7). Malheureusement la détermination analytique d'une telle région est en général difficile, voire impossible [86]. Dans ce cas, nous nous intéressons à fournir des approximations de la région d'attraction à partir de la détermination de régions dans l'espace d'état où la stabilité asymptotique du système en boucle fermée est garantie.

Considérant le problème de la synthèse, on s'intéresse à la détermination d'une loi de commande saturante de façon à assurer la stabilité asymptotique dans une certaine région de l'espace d'état contenant l'ensemble des états initiaux admissibles.

Dans ce contexte, plusieurs travaux ont été proposés dans la littérature. Parmi eux, on peut identifier deux axes de recherche : le premier consiste à déterminer des régions et/ou la loi de commande de façon à éviter la saturation de la commande ; le deuxième considère la saturation effective de la commande et, par conséquent, le comportement non-linéaire du système en boucle fermée.

2.6.1 Stabilisation locale sans saturation

Le but dans ce cas est d'éviter la saturation de la commande. Etant donnée une région d'états initiaux admissibles D_0 , la philosophie de cette approche consiste à déterminer une loi de commande $u(k) = Fx(k)$ et/ou une région \mathcal{S} positivement invariante par rapport au modèle linéaire en boucle fermée (2.3) telles que [47] :

- les valeurs propres de la matrice $(A + BF)$ soient contenues dans le cercle unité.
- \mathcal{S} contienne la région d'états initiaux admissibles et soit contenue dans la

région de linéarité du système saturé (2.7), c'est-à-dire :

$$D_0 \subseteq \mathcal{S} \subseteq S(F, u_{min}, u_{max}) \quad (2.12)$$

Ainsi, si la relation (2.12) est vérifiée et \mathcal{S} est positivement invariant par rapport au système (2.3), toute trajectoire initialisée dans D_0 (ou \mathcal{S}) est telle que $x(k) \in S(F, u_{min}, u_{max})$, $\forall k \geq 0$, et, par conséquent, les commandes ne saturent pas. En plus, comme $|\lambda_i(A + BF)| < 1$, $\forall i = 1, \dots, n$, la convergence de ces trajectoires vers l'origine est garantie. La figure (2.2) illustre l'inclusion (2.12).

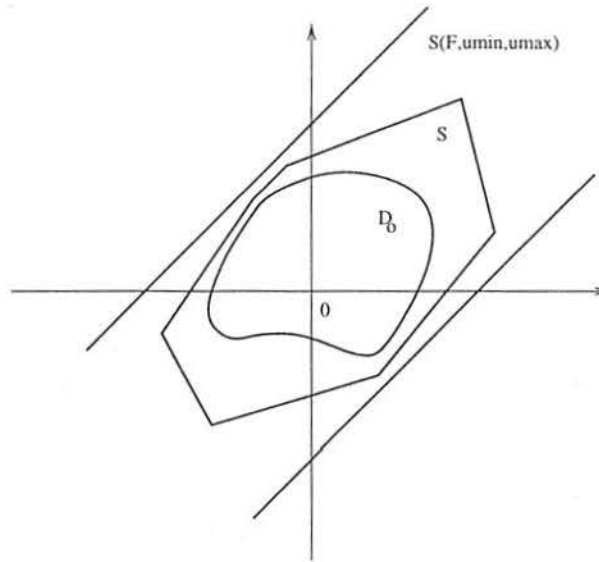


FIG. 2.2 - $D_0 \subseteq \mathcal{S} \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$

Dans la littérature, deux types de domaines invariants sont plus particulièrement utilisés : des domaines ellipsoïdaux et des domaines polyédraux.

Domaines ellipsoïdaux

Un système linéaire stable quelconque admet des ensembles positivement invariants associés à des fonctions de Lyapunov quadratiques (voir théorème 1.4) :

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x \\ \Delta V(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble ellipsoïdal

$$\mathcal{E}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P x \leq c\}$$

soit positivement invariant par rapport au système linéaire (2.3) est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.1 : *L'ellipsoïde $\mathcal{E}(c)$ est positivement invariant par rapport au système linéaire (2.3) si et seulement si :*

$$(A + BF)^T P (A + BF) - P \leq 0 \quad (2.13)$$

Ainsi, étant donné un domaine de conditions initiales admissibles D_0 , il suffit de déterminer une matrice F et une matrice P vérifiant l'inégalité (2.13) telles que :

$$D_0 \subseteq \mathcal{E}(c) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max}) \quad (2.14)$$

Ce type de solution a été proposée par Gutman et Hagander [47]. Dans ce papier, la détermination de F et $\mathcal{E}(c)$ est faite en utilisant une méthode de "trial and error" qui consiste à jouer avec les matrices de pondération d'un problème LQ classique. En fait, on détermine F et P satisfaisant (2.13) et on vérifie s'il existe c tel que la relation d'inclusion (2.14) est vérifiée.

D'autre part, dans un problème purement d'analyse où le but est de déterminer des domaines de stabilité pour une matrice de retour d'état F donnée, ces domaines peuvent être obtenus à partir d'une matrice P solution de l'équation de Lyapunov :

$$(A + BF)^T P (A + BF) - P = -Q \quad \text{avec} \quad Q = Q^T > 0$$

Dans ce cas, on peut toujours déterminer l'ellipsoïde maximal associé à la matrice P contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$ en faisant [47]:

$$c = \min_{x \in \partial S(F, u_{min}, u_{max})} \{x^T P x\} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{u_{min(i)}^2}{F_{(i)} P^{-1} F_{(i)}^T} ; \frac{u_{max(i)}^2}{F_{(i)} P^{-1} F_{(i)}^T} \right\}$$

Domaines polyédraux

Dans ce cas, il s'agit de trouver un polyèdre invariant $S(G, w)$:

$$S(G, w) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; Gx \preceq w\} \quad , \quad G \in \mathbb{R}^{g \times n} \quad , \quad w \in \mathbb{R}^g$$

et une matrice F telles que :

$$D_0 \subseteq S(G, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max}) \quad (2.15)$$

Comme nous l'avons vu dans la section 1.4.2, un système linéaire stable admet toujours des polyèdres invariants associés à des fonctions de Lyapunov de type polyédral (voir théorème 1.5). Dans ce cas les domaines de Lyapunov sont des polyèdres compacts.

La propriété d'invariance dans un sens plus générique, c'est-à-dire, considérant des polyèdres non-bornés et même des cônes polyédraux, a été étudiée par plusieurs auteurs. Nous pouvons citer, par exemple, [9],[49],[51] et [4] pour le cas discret et [10],[23],[24] et [90] pour le cas continu. En particulier, si l'on considère le système linéaire discret (2.3), la condition d'invariance positive polyédrale générique est exprimée par la proposition suivante.

Proposition 2.2 : *Le polyèdre $S(G, w)$ est positivement invariant par rapport au système (2.3) si, et seulement si, il existe une matrice H , à éléments non-négatifs, telle que :*

$$HG = G(A + BF) \quad (2.16)$$

$$Hw \preceq w \quad (2.17)$$

Ce résultat a été démontré de différentes manières dans les travaux cités ci-dessus. Notons que les relations (2.16) et (2.17) peuvent être vues comme une généralisation des relations du théorème 1.5.

Remarque 2.2 : *Il est important de faire les remarques suivantes :*

1. *La relation (2.17) implique que $H\beta w \preceq \beta w, \forall \beta > 0$. Cela signifie que tous les ensembles homothétiques à $S(G, w)$ sont aussi positivement invariants par rapport au système linéaire (2.3).*
2. *Si on s'intéresse à la stabilité de l'origine, il faut que le polyèdre $S(G, w)$ contienne l'origine, c'est-à-dire, on doit avoir $w_{(i)} \geq 0, \forall i = 1, \dots, g$.*
3. *Si le polyèdre est non-borné, l'invariance de $S(G, w)$ n'est pas suffisante pour conclure sur la stabilité du système dans $S(G, w)$ [53].*

En considérant l'approche polyédrale, on peut classer les travaux existants dans la littérature pour résoudre les problèmes de synthèse et d'analyse de lois de commande *non saturantes* selon trois axes principaux :

A) Placement de structure propre

En prenant en compte que la région de linéarité $S(F, u_{min}, u_{max})$ est un ensemble polyédral, un problème qui a été étudié à la fin des années 80 a été celui d'établir sous quelles conditions l'ensemble $S(F, u_{min}, u_{max})$ est un ensemble invariant et/ou contractif pour le système (2.3).

Benzaouia et Burgat dans leur papier [4] montrent qu'une condition nécessaire pour cela est de satisfaire :

$$rang \begin{bmatrix} F(A + BF) \\ F \end{bmatrix} = m \quad (2.18)$$

Un peu plus tard, Hennet et Castelan dans l'article [53] ont montré que la relation (2.18) est équivalente à l' $(A + BF)$ -invariance de $\text{Ker } F$ et, par conséquent, à effectuer un placement partiel de structure propre. Autrement dit, F doit être telle qu'au moins $(n - m)$ valeurs propres en boucle ouverte soient maintenues en boucle fermée. Dans ce cas il est possible de déterminer F telle que $S(F, u_{min}, u_{max})$ soit positivement invariant par rapport au système (2.3) si et seulement si le nombre de valeurs propres instables en boucle ouverte, r , est tel que $r \leq m$. A partir de cela, dans ce même papier, une méthode fondée sur le placement de structure propre est proposée et permet de déterminer F . Dans le cas où $r \geq m$, il est toujours possible, également par placement de structure propre, de déterminer F et un polyèdre contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$ ayant des facettes communes avec ce dernier.

En suivant cette même idée, Bitsoris et Vassilaki [11] et Benzaouia [3] ont proposé plus récemment des résultats similaires à ceux trouvés dans [53]. D'autre part, il a été proposé par Castelan et al. [22] une méthode qui permet de déterminer des polyèdres invariants contenus dans $S(F, u_{min}, u_{max})$ à partir des techniques de placement partiel de structure propre en utilisant un système d'ordre réduit.

B) Programmation linéaire

Un autre type de problème traité dans la littérature considère $D_0 = S(G, w)$. Dans ce cas il s'agit de déterminer une matrice F telle que la matrice $(A + BF)$ soit stable et admette $S(G, w)$ comme polyèdre invariant. Puisque les relations (2.16) et (2.17) sont linéaires en H et F si G est donné, on peut les considérer comme contraintes dans un programme linéaire. Dans ce cas il suffit d'ajouter aussi une contrainte, qui s'écrit sous une forme linéaire, garantissant l'inclusion $S(G, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$.

Ce type de formulation a été présenté initialement par Vassilaki et al. [96] en considérant une condition suffisante pour la relation d'inclusion de $S(G, w)$ dans

$S(F, u_{min}, u_{max})$. Hennes et Béziat [51] proposent une méthode permettant de déterminer F , à partir de schémas de programmation linéaire, dans le but de rendre $S(F, u_{min}, u_{max})$ positivement invariant. Cette méthode, ne pouvant être appliquée que dans le cas où la matrice B est carrée, a été généralisée dans [22].

D'une manière générale le problème de programmation linéaire se pose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Min } \epsilon \\ & \text{sous} \\ (i) & \quad HG = G(A + BF) \\ (ii) & \quad Hw \preceq \epsilon w \\ (iii) & \quad \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix} = RG \\ (iv) & \quad R w \preceq \begin{bmatrix} u_{max} \\ u_{min} \end{bmatrix} \\ (v) & \quad 0 < \epsilon \leq 1 \end{aligned}$$

avec H et R étant des matrices à éléments non-négatifs. Les contraintes (iii)–(iv) représentent l'inclusion $S(G, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$. Cette formulation a été proposée dans [8] à partir de l'application directe du lemme de Farkas étendu, proposé dans [49]. Cette contrainte d'inclusion peut aussi être exprimée en fonction des sommets de $S(G, w)$ [95]. La minimisation de ϵ implique la minimisation du rayon spectral de $(A + BF)$ et, par conséquent, la maximisation de la vitesse de convergence des trajectoires du système (2.3) vers l'origine.

D'autres travaux qui utilisent des schémas de programmation linéaire dans ce contexte sont, par exemple, [52] et [72]

C) Détermination de l'ensemble maximal invariant contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$

En considérant le problème d'analyse 2.1, dans le but d'éviter la saturation, on cherche à déterminer des régions invariantes contenues dans $S(F, u_{min}, u_{max})$. Dans ce cas, les questions suivantes se posent naturellement :

1. Sous quelles conditions est-il possible de déterminer l'ensemble invariant maximal contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$?
2. Comment déterminer un tel domaine?

Des réponses à ces questions ont été données initialement par Gilbert et Tan [37]. Dans ce papier, les auteurs considèrent un système linéaire discret et un ensemble Y défini par

$$Y \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p\}$$

où la fonction $f_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $f_i(0) \leq 0$. Ils établissent des conditions pour que l'ensemble invariant maximal contenu dans Y soit déterminable de manière finie. À partir de ces conditions un algorithme basé sur des schémas d'optimisation est donc proposé pour calculer cet ensemble maximal.

Par ailleurs, en considérant un système linéaire plus général, c'est-à-dire, avec des incertitudes de modèle et soumis à des perturbations additives, Blanchini propose dans [13] une méthode permettant de déterminer l'ensemble μ -contractif maximal contenu dans un ensemble convexe et compact.

L'application de ces deux méthodes au problème de la détermination de l'ensemble invariant maximal contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$ est directe. Dans ce cas, sous l'hypothèse que (F, A) est observable, l'ensemble maximal est polyédral et déterminable de manière finie. Nous avons développé dans [42] un algorithme pour déterminer un tel ensemble, basé sur des schémas de programmation linéaire.

Il est important de remarquer que ces approches concernent les systèmes linéaires discrets dans le temps. Pour les systèmes à temps continu le problème reste ouvert : il est seulement possible pour le moment, d'obtenir des approximations de l'ensemble maximal [37],[16].

D'autres travaux qui peuvent être cités dans ce contexte sont : [61], [14] et [31].

Extensions

Toujours dans le but d'éviter la saturation, nous pouvons encore citer quelques extensions des travaux présentés dans cette section telles que : lois de commande du type retour de sortie, systèmes linéaires incertains et systèmes linéaires soumis à des perturbations additives.

- Retour de sortie : [25], [91], [46] et [34].
- Systèmes linéaires incertains : [88] et [72].
- Systèmes linéaires soumis à des perturbations additives : [12], [80], [90] et [71].

2.6.2 Stabilisation locale avec saturation

Dans ce type d'étude, le comportement non-linéaire du système (2.7) est pris en compte. La loi de commande est conçue ou analysée en considérant l'appari-

tion effective de la saturation. Dans un cadre de synthèse, cela permet en général de stabiliser des domaines d'états initiaux admissibles plus grands sans une dégradation importante de la performance du système en boucle fermée. D'un point de vue analyse, la prise en compte de la saturation permet de déterminer des régions de stabilité asymptotique locale non contenues dans la région de linéarité du système saturé et, par conséquent, d'avoir des approximations de la région d'attraction beaucoup moins conservatives. Autrement dit, la région où nous pouvons garantir un comportement "sûr" pour le système saturé est forcément plus grande que celle obtenue lorsque l'on évite la saturation.

Nous présentons maintenant quelques travaux existants dans la littérature qui considèrent effectivement la saturation et le comportement non-linéaire du système (2.7). Nous divisons la présentation en deux approches selon le type de région de stabilité ou fonction de Lyapunov utilisée: approche ellipsoïdale et approche polyédrale.

Approche ellipsoïdale

A) Synthèse

Concernant le problème de synthèse nous pouvons citer la méthode proposée par Gutman et Hagander [47]. Etant donné un domaine d'états initiaux admissibles D_0 , cette méthode peut être décomposée en trois pas :

1. Déterminer une matrice F_1 telle que $(A + BF_1)$ soit asymptotiquement stable et $D_0 \subseteq S(F_1, u_{min}, u_{max})$.
2. Trouver une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$ pour le système linéaire $x(k+1) = (A + BF_1)x(k)$ telle qu'il existe un domaine ellipsoïdal $\mathcal{E}(c)$ associé à cette fonction satisfaisant : $D_0 \subseteq \mathcal{E}(c) \subseteq S(F_1, u_{min}, u_{max})$.
3. A partir de la matrice P de la fonction de Lyapunov, déterminer un gain $F_2(P, K)$ qui est fonction de P et d'une matrice K contenant des paramètres d'ajustement.

La loi de commande effectivement appliquée au système a la forme suivante :

$$u(k) = \text{sat}((F_1 + F_2(P, K))x(k)) \quad (2.19)$$

Les auteurs montrent que cette loi de commande stabilise asymptotiquement le système pour toutes les conditions initiales appartenant à D_0 . Dans ce cas, la satu-

ration est utilisée pour rendre la réponse temporelle du système en boucle fermée plus rapide. Cela est fait en jouant avec la matrice des paramètres d'ajustement K . Le principal inconvénient de cette méthode est qu'il n'y a pas un procédé systématique pour déterminer la matrice F_1 telle que les étapes 1 et 2 soient satisfaites. D'autre part, pour le cas discret multivariable la méthode n'est pas générique. Dans ce cas la loi de commande (2.19) n'est pas toujours stabilisante, c'est-à-dire, d'autres conditions, plus restrictives, doivent être vérifiées.

B) Analyse

Dans un contexte d'analyse, nous pouvons citer le travail de Dolphus et Schmítendorf [29], les travaux de Burgat et Tarbouriech [20], [93], [19] et encore le travail de Kim et Bien [59].

Dans [29], en considérant donnée une loi du type (2.19), le compromis entre la taille du domaine de conditions initiales et l'amplitude des bornes de commande est étudié. Les auteurs définissent un coefficient d'homothétie γ_x pour un ensemble de conditions initiales D_0 (sous la forme ellipsoïdale ou polyédrale) et un coefficient d'homothétie γ_u pour l'ensemble Ω des contraintes sur la commande. Ils proposent donc un algorithme pour déterminer deux régions dans le plan $\gamma_x \times \gamma_u$ où le comportement asymptotiquement stable du système en boucle fermée, par rapport aux ensembles $\gamma_x D_0$ et $\gamma_u \Omega$, peut être garanti. Dans une première région, la stabilité asymptotique peut être obtenue sans saturation. Dans la deuxième région, pour obtenir la région $\gamma_x D_0$ comme région de stabilité avec les contraintes sur la commande définies par $\gamma_u \Omega$ la commande doit forcément saturer. La détermination de telles régions pour un système incertain est aussi abordée. Il faut remarquer que cette analyse est assez restrictive dans le sens où elle s'applique seulement à des lois de commande du type (2.19) obtenues par la méthode de Gutman et Hagander [47].

Dans [20], étant donnée une matrice F telle que le système linéaire (2.3) est asymptotiquement stable, les auteurs proposent un algorithme permettant de déterminer des régions de stabilité asymptotique pour le système saturé (2.7) à partir de l'utilisation des fonctions de Lyapunov du système (2.3). Pour cela, le comportement non-linéaire du système saturé est représenté par celui d'un système polytopique. La méthode peut être décomposée en deux étapes :

- Déterminer une fonction de Lyapunov générique $\mathcal{V}(x)$ pour le système linéaire (2.3) et associer à cette fonction les domaines de Lyapunov $D(\mathcal{V}, \mu) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; \mathcal{V}(x) \leq \mu, \mu > 0\}$.
- En considérant $\mu > \beta_{max} = \max\{\beta ; D(\mathcal{V}, \beta) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})\}$ et la représentation polytopique du système saturé, le scalaire maximal μ_{max} est déter-

miné tel que dans l'ensemble $D(\mathcal{V}, \mu_{max})$ la fonction $\mathcal{V}(x)$ satisfasse $\dot{\mathcal{V}}(x) < 0$ le long des trajectoires du système saturé (2.7).

L'ensemble $D(\mathcal{V}, \mu_{max})$ ainsi obtenu est un domaine de stabilité asymptotique locale et de comportement non-linéaire pour le système (2.7). En particulier, dans [93] cette méthode est appliquée en considérant des fonctions de Lyapunov ellipsoïdales et, par conséquent, des régions ellipsoïdales de stabilité sont obtenues.

Enfin, dans [59], en considérant le cas des systèmes continus dans le temps, une autre méthode intéressante pour déterminer des régions de stabilité asymptotique pour le système saturé (2.7) est proposée. En utilisant deux types de décomposition pour le terme de saturation, la méthode consiste à déterminer des régions de stabilité ellipsoïdales à partir de la résolution interactive d'une équation de Riccati modifiée. Le cas des systèmes avec incertitudes non-structurées est également considéré dans ce papier.

Approche polyédrale

A notre connaissance, il n'existe pratiquement pas de travaux dans la littérature concernant des régions de stabilité asymptotique locale et de comportement non-linéaire du type polyédral pour un système du type (2.7). Nous pouvons, cependant, citer la thèse de master de Rocha [77] et le récent travail de Romanchuk [78].

Dans [77], basée sur une représentation du système saturé par régions de saturation, une condition nécessaire et suffisante pour la contractivité d'un polyèdre à facettes parallèles par rapport au système saturé à temps discret est proposée. Cette condition présuppose le test de la décroissance d'une fonction de Lyapunov polyédrale en un nombre fini de points de l'espace d'état. L'inconvénient majeur de cette condition est justement la détermination de cet ensemble de points à tester. En effet, pour déterminer ces points, une explosion combinatoire pratiquement ingérable d'un point de vue algorithmique apparaît.

Dans [78], une méthode est proposée permettant l'approximation de la région d'attraction d'un système du type (2.7) à temps continu à travers des polytopes. Un algorithme, assez compliqué d'un point de vue mathématique, est formulé pour des systèmes du deuxième ordre. La généralisation de la méthode à des systèmes d'ordre supérieur, comme souligné par l'auteur, présente une complexité mathématique beaucoup plus grande et des problèmes algorithmiques qui restent encore ouverts.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord défini les problèmes d'analyse et de synthèse pour les systèmes linéaires avec saturation des commandes. Puis nous avons fait une brève revue bibliographique des méthodes et approches existantes dans la littérature pour résoudre ces deux types de problèmes.

Nous avons vu qu'une condition nécessaire pour la stabilisation globale du système saturé est que le système en boucle ouverte ne soit pas strictement instable. En particulier, il faut que le système soit stable pour pouvoir le stabiliser globalement à partir de l'application d'un retour d'état linéaire saturant. Dans ce cas, le retour stabilisant confère, en général, une faible performance au système en boucle fermée.

Lorsque nous nous intéressons au comportement du système en boucle fermée autour d'un voisinage de l'origine D_0 , dans le cas où le système n'est pas strictement instable, il est toujours possible de stabiliser le système semi-globalement. Dans ce contexte, des méthodes proposées dans la littérature permettent la conception de lois de commande linéaires garantissant la convergence vers l'origine de toute trajectoire du système initialisée dans D_0 sans saturation de la commande. A notre avis, ces lois de commande ne permettent pas une grande amélioration de la performance du système en boucle fermée, surtout quand la taille du domaine D_0 est importante. Dans ce cas, nous pensons que l'utilisation de la saturation permet d'obtenir des réponses temporelles plus rapides.

Lorsque le système en boucle ouverte est strictement instable et/ou nous avons d'autres spécifications de commande à satisfaire, la stabilisation globale ou semi-globale du système n'est pas envisageable. Nous devons alors penser en termes de stabilisation locale. Dans ce contexte, nous avons vu qu'il existe deux approches pour traiter le problème.

La première approche consiste à éviter la saturation. L'idée centrale de cette approche consiste à déterminer une loi de commande et/ou un ensemble positivement invariant qui contient le domaine d'états initiaux admissibles et est contenu dans la région de linéarité du système saturé. D'un point de vue d'analyse, cette approche est conservative puisqu'elle permet seulement la détermination de régions de stabilité qui sont contenues dans la région de linéarité du système saturé. Pour le problème de synthèse, si l'ensemble D_0 est assez "grand", le problème peut ne pas avoir de solution. Par ailleurs, nous pensons que ce type d'approche a atteint sa maturité et est un sujet de recherche pratiquement fermé.

La deuxième approche dans le contexte de la stabilisation locale, considère la

saturation et le comportement non-linéaire du système en boucle fermée. En comparaison avec la première approche, la quantité des travaux rencontrés dans la littérature est plus restreinte. Nous remarquons que la majorité des travaux utilisent des fonctions de Lyapunov quadratiques. Dans ce cas, les méthodes de synthèse proposées ne sont pas assez systématiques et génériques, surtout dans le cas des systèmes discrets. Certes, les méthodes d'analyse permettent de déterminer des régions de stabilité et de comportement non-linéaire du type ellipsoïdal. Cependant, dans ce cas, les méthodes proposées sont attachées au choix, a priori, de la fonction de Lyapunov ce qui peut amener à des régions de stabilité qui sont des approximations très conservatives de la région d'attraction de l'origine ou qui peuvent ne pas contenir l'ensemble des états initiaux admissibles. Enfin, concernant les domaines de stabilité polyédraux la quantité de travaux publiés est encore plus réduite. En plus les méthodes proposées pour la détermination de régions polyédrales de stabilité et de comportement non-linéaire sont assez complexes d'un point de vue algorithmique.

Deuxième partie

Approche polyédrale

Chapitre 3

Approche par régions de saturation

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser une modélisation pour le système saturé qui nous permettra d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour garantir l'invariance positive et la contractivité de domaines polyédraux. L'analyse de ces propriétés et, par conséquent, de la stabilité locale du système saturé sera faite à partir d'une division de l'espace d'état en régions de comportement non-linéaire appelées *régions de saturation*. Dans chacune de ces régions, l'évolution des trajectoires du système saturé sera déterminée par l'utilisation d'un système linéaire avec une perturbation additive [77].

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Tout d'abord, nous définissons les régions de saturation et la modélisation du système saturé. A partir de cette représentation, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'invariance positive d'une région polyédrale quelconque. Nous verrons que ces conditions sont une généralisation des relations classiques d'invariance positive obtenues pour des systèmes linéaires en boucle fermée non-saturés [9],[51],[49]. Puis, en considérant des polyèdres compacts, nous formulons une condition nécessaire et suffisante pour la contractivité de ce type d'ensembles. A partir de ces conditions, nous proposons un algorithme pour calculer l'ensemble contractif maximal homothétique à un polyèdre donné. Le polyèdre compact ainsi obtenu sera aussi un domaine de stabilité locale pour le système saturé. Ensuite, nous donnons des conditions supplémentaires pour garantir la contractivité et la stabilité locale dans des polyèdres non-bornés.

3.2 Modélisation du système saturé

Considérons le système en boucle fermée :

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(Fx(k)) \quad (3.1)$$

3.2.1 Les régions de saturation

Définissons un vecteur $\xi \in \mathfrak{R}^m$ dont chaque composante $\xi_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, peut prendre les valeurs 1, -1 ou 0 selon que la composante de la commande est saturée à la borne supérieure, saturée à la borne inférieure ou est non-saturée. Autrement dit, on a :

- Si $u_{(i)}(k) = u_{\max(i)}$ alors $\xi_{(i)} = 1$, c'est-à-dire, $x(k)$ est tel que $F_{(i)}x(k) > u_{\max(i)}$.
- Si $u_{(i)}(k) = F_{(i)}x(k)$ alors $\xi_{(i)} = 0$, c'est-à-dire, $x(k)$ est tel que $-u_{\min(i)} \leq F_{(i)}x(k) \leq u_{\max(i)}$.
- Si $u_{(i)}(k) = -u_{\min(i)}$ alors $\xi_{(i)} = -1$, c'est-à-dire, $x(k)$ est tel que $F_{(i)}x(k) < -u_{\min(i)}$.

Chaque vecteur ξ ainsi construit représente une combinaison possible entre entrées saturées et non-saturées. Il est possible de construire 3^m vecteurs ξ . Pour chacun de ces vecteurs, que l'on note $\xi_j \in \mathfrak{R}^m$, $j = 1, \dots, 3^m$, le vecteur d'état, $x(k)$, appartient à une région bien définie dans \mathfrak{R}^n qui sera appelée *région de saturation*. Chaque région de saturation est donc déterminée par l'intersection de demi-espaces du type $F_{(i)}x \leq d_{(i)}$ ou $-F_{(i)}x \leq d_{(i)}$, $d_{(i)}$ pouvant être $(u_{\min})_{(i)}$, $-(u_{\min})_{(i)}$, $(u_{\max})_{(i)}$ ou $-(u_{\max})_{(i)}$.

Par exemple, si on considère un système avec deux entrées tel qu'à l'instant k la première entrée est saturée à $(u_{\max})_{(1)}$ et la deuxième entrée n'est pas saturée. Ceci correspond à un vecteur $\xi = [1 \ 0]^T$ et on a

$$x(k) \in S(R, d) \triangleq \left\{ x \in \mathfrak{R}^n ; \begin{bmatrix} -F_{(1)} \\ F_{(2)} \\ -F_{(2)} \end{bmatrix} x \preceq \begin{bmatrix} -u_{\max(1)} \\ u_{\max(2)} \\ u_{\min(2)} \end{bmatrix} \right\}$$

$S(R, d)$ est donc la région de saturation associée au vecteur $\xi = [1 \ 0]^T$.

D'une manière générale, chaque ξ_j , $j = 1, \dots, 3^m$, est ainsi associé à une région polyédrale du type :

$$S(R_j, d_j) = \{x \in \mathbb{R}^n ; R_j x \preceq d_j\} \quad (3.2)$$

où $d_j \in \mathbb{R}^l$ est un vecteur composé à partir des composantes de u_{max} , $-u_{max}$, u_{min} et $-u_{min}$, et $R_j \in \mathbb{R}^{l \times n}$ est une matrice formée à partir des lignes de F et $-F$.

Notons que la région qui correspond à $\xi_{j(i)} = 0_m$, $\forall i = 1, \dots, m$, est la région de linéarité du système en boucle fermée :

$$S(F, u_{min}, u_{max}) = \{x \in \mathbb{R}^n ; -u_{min} \preceq Fx \preceq u_{max}\} \quad (3.3)$$

Dans les autres régions de saturation il y a au moins une entrée qui est saturée.

3.2.2 Le modèle dans chaque région de saturation

Considérons l'exemple précédent dans lequel on avait $\xi = [1 \ 0]^T$. Si à l'instant k l'état du système appartient à la région associée à ξ , $x(k+1)$ est donné par :

$$x(k+1) = Ax(k) + B \begin{bmatrix} u_{max(1)} \\ F_{(2)}x(k) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ou de manière équivalente :

$$x(k+1) = Ax(k) + B \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Fx(k) + B \begin{bmatrix} u_{max(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + B \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) Fx(k) + B \begin{bmatrix} u_{max(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Ainsi, dans chaque région de saturation, $S(R_j, d_j)$, l'évolution des trajectoires du système (3.1) peut être déterminée à partir de l'équation suivante :

$$x(k+1) = (A + B \text{diag}(1_m - |\xi_j|)F)x(k) + Bu(\xi_j) \quad (3.7)$$

où

$$u_{(i)}(\xi_j) = \begin{cases} -u_{min(i)} & \text{si } \xi_{j(i)} = -1 \\ 0 & \text{si } \xi_{j(i)} = 0 \\ u_{max(i)} & \text{si } \xi_{j(i)} = 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

Pour tout $x(k) \in S(R_j, d_j)$ le vecteur $x(k+1)$ est donné d'une façon générique par un système linéaire avec une perturbation additive :

$$x(k+1) = \bar{A}_j x(k) + p_j \quad (3.9)$$

avec $\bar{A}_j \triangleq A + B \text{diag}(1_m - |\xi_j|)F$ et $p_j \triangleq Bu(\xi_j)$.

3.3 Invariance positive

Considérons un ensemble polyédral dans l'espace d'état :

$$S(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n; Gx \preceq w\} \quad (3.10)$$

avec $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$ et $w \in \mathbb{R}^g$.

Dans cette section, nous allons étudier les conditions pour que le polyèdre $S(G, w)$ soit positivement invariant par rapport au système saturé (3.1). Pour cela nous allons utiliser la représentation du système saturé par régions de saturation définie dans la section 3.2.2.

Définissons tout d'abord l'ensemble polyédral $S(D_j, s_j)$ comme l'intersection du polyèdre $S(G, w)$ avec la $j^{\text{ème}}$ région de saturation :

$$S(D_j, s_j) \triangleq S(G, w) \cap S(R_j, d_j) \quad (3.11)$$

Notons que par définition $S(D_j, s_j)$ est inclus dans $S(G, w)$. C'est pourquoi $S(D_j, s_j)$ peut être représenté sous la forme générique :

$$S(D_j, s_j) = \{x \in \mathbb{R}^n; D_j x \preceq s_j\} \quad (3.12)$$

avec

$$D_j \triangleq \begin{bmatrix} \bar{G}_j \\ R_j \end{bmatrix} \text{ et } s_j \triangleq \begin{bmatrix} \bar{w}_j \\ d_j \end{bmatrix}$$

$\bar{G}_j \in \mathbb{R}^{g_j \times n}$ et $\bar{w}_j \in \mathbb{R}^{g_j}$ correspondent à des facettes de $S(G, w)$ qui ont une intersection non-vide avec $S(R_j, d_j)$, autrement dit, $\bar{G}_{j(i)}x \leq \bar{w}_{j(i)}$ est une contrainte commune à $S(G, w)$ et $S(D_j, s_j)$.

La figure 3.1 illustre les régions de saturation $S(R_j, d_j)$ (notées R_j) et les domaines $S(D_j, s_j)$ (notés D_j) pour un système d'ordre 2 avec deux entrées.

Considérons l'ensemble d'indices $\mathcal{J} \triangleq \{j; S(D_j, s_j) \neq \emptyset\}$. Nous pouvons maintenant énoncer une condition nécessaire et suffisante pour l'invariance positive de l'ensemble $S(G, w)$ par rapport au système saturé (3.1).

Théorème 3.1 : [45] *L'ensemble polyédral $S(G, w)$ est positivement invariant pour le système (3.1) si et seulement si, pour chaque région $S(D_j, s_j)$ non-vide ($j \in \mathcal{J}$), il existe une matrice $H_j \in \mathbb{R}^{g \times (g_j + l_j)}$ à éléments non-négatifs telle que*

$$H_j D_j = G \bar{A}_j \quad (3.13)$$

$$H_j s_j \preceq w - G p_j \quad (3.14)$$

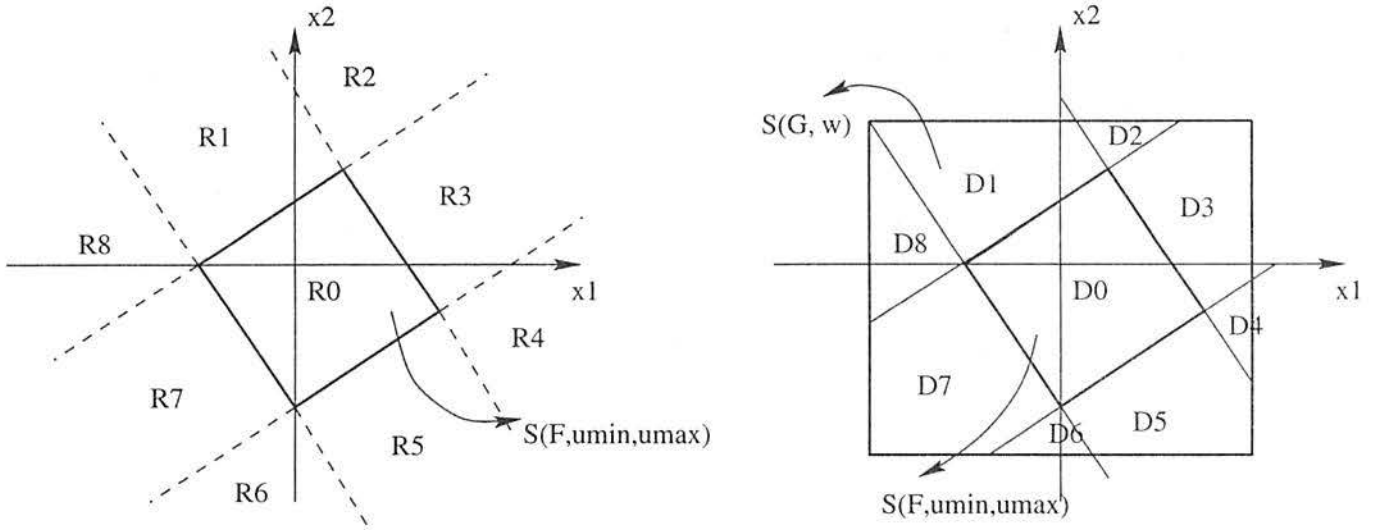


FIG. 3.1 – Les domaines $S(R_j, d_j)$ et $S(D_j, s_j)$.

Démonstration :

Nécessité : Une condition nécessaire pour l'invariance positive de $S(G, w)$ est

$$Gx(k+1) \preceq w \quad \forall x(k) \in S(G, w)$$

ou, d'une façon équivalente, $\forall x(k) \in S(D_j, s_j)$, $\forall j \in \mathcal{J}$ on doit avoir :

$$G_{(i)}x(k+1) = G_{(i)}(\bar{A}_jx(k) + p_j) \leq w_{(i)} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, g \quad (3.15)$$

Définissons les programmes linéaires suivants :

$$P1_i : \begin{cases} y_{j,i} = \max_x G_{(i)}\bar{A}_jx + G_{(i)}p_j \\ \text{soumis à} \\ D_jx \preceq s_j \end{cases} \quad i = 1, \dots, g. \quad (3.16)$$

Notons que chaque $P1_i$ détermine la valeur maximale de $G_{(i)}x(k+1)$ étant donné que $x(k) \in S(D_j, s_j)$. Puisque $S(D_j, s_j)$ a été supposé non-vidé, on a au moins une solution admissible pour $P1_i$.

D'après les résultats de dualité en programmation linéaire [67], le programme $P1_i$ est équivalent au programme :

$$P2_i : \begin{cases} y_{j,i} = \min_{z_{j,i}} z_{j,i} s_j + G_{(i)}p_j \\ \text{soumis à} \\ z_{j,i}D_j = (G\bar{A}_j)_{(i)} \\ z_{j,i} \succeq 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, g. \quad (3.17)$$

avec $z_{j,i}^T \in \mathfrak{R}^{g_j+l_j}$. Ainsi, si x^* est la solution optimale de $P1_i$ (primal) et $z_{j,i}^*$ est la solution de $P2_i$ (dual), d'après (3.15) une condition nécessaire pour l'invariance positive de $S(G, w)$ est :

$$y_{j,i} = z_{j,i}^* s_j + G_{(i)} p_j = G_{(i)} \bar{A}_j x^* + G_{(i)} p_j \leq w_{(i)} \quad , \quad i = 1, \dots, g. \quad (3.18)$$

A partir de la formulation de $P2_i$ et d'après (3.18), si on considère $z_{j,i}$ comme la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice H_j , c'est-à-dire, $H_{j(i)} \triangleq z_{j,i}$, alors une condition nécessaire pour l'invariance positive de $S(G, w)$ est l'existence d'une matrice H_j , à éléments non-négatifs vérifiant les relations (3.13) et (3.14) pour chaque $j \in \mathcal{J}$.

Suffisance : Supposons que $x(k) \in S(G, w)$. En particulier, supposons que $x(k)$ appartient à une des régions $S(D_j, s_j)$, $j \in \mathcal{J}$. Alors, si la relation (3.14) est vérifiée, $\forall j \in \mathcal{J}$, avec une matrice H_j à éléments non-négatifs, on a :

$$H_j D_j x(k) \preceq H_j s_j \preceq w - G p_j$$

En outre, si (3.13) est aussi satisfaite, $\forall j \in \mathcal{J}$, on a :

$$H_j D_j x(k) = G \bar{A}_j x(k) \preceq w - G p_j$$

$$G(\bar{A}_j x(k) + p_j) \preceq w$$

$$Gx(k+1) \preceq w$$

Puisque ce raisonnement peut être appliqué $\forall x(k) \in S(G, w)$ la suffisance est prouvée.

□

Remarque 3.1 : *Aucune hypothèse n'a été faite sur la matrice G et le vecteur w . Le théorème 3.1 est donc complètement générique dans le sens qu'il s'applique à tous les types d'ensembles polyédraux, y compris aux cônes et aux polyèdres non-bornés.*

Remarque 3.2 : *Les relations classiques d'invariance positive pour le cas linéaire, c'est-à-dire, quand $S(G, w)$ est contenu dans la région de linéarité (3.3) du système (3.1) [9],[51],[49]*

$$HG = G(A + BF) \quad (3.19)$$

$$Hw \preceq w \quad (3.20)$$

peuvent être considérées comme un cas particulier des relations (3.13) et (3.14). En fait, si $S(G, w) \subseteq S(F, u_{\min}, u_{\max})$, la seule région de saturation non-vidée est le propre polyèdre $S(G, w)$. Dans ce cas on a : $\bar{A}_j = (A + BF)$, $p_j = 0$, $D_j = G$ et $s_j = w$.

Les conditions données par le théorème 3.1 garantissent que toutes les trajectoires qui sont initialisées dans $S(G, w)$ ne quittent pas le polyèdre. Cependant, ce fait n'est pas suffisant pour conclure à la stabilité du système saturé dans $S(G, w)$. En effet, il est nécessaire d'éliminer la possibilité d'existence de cycles limites et/ou points d'équilibre parasites dans $S(G, w)$. Les points d'équilibre parasites du système saturé peuvent être déterminés facilement en résolvant, pour chaque région de saturation $S(R_j, d_j)$, l'équation suivante [89] :

$$x_e = \bar{A}_j x_e + p_j$$

Si $x_e \in S(R_j, d_j)$ alors il est effectivement un point d'équilibre du système saturé. Par contre, la condition d'existence d'un cycle limite n'est pas si évidente à tester [57],[83]. Cependant, si l'on est capable d'assurer que le polyèdre est aussi contractif cette possibilité est éliminée. C'est pourquoi, nous donnons maintenant des conditions pour la contractivité d'un domaine polyédral par rapport au système saturé.

3.4 Contractivité et stabilité asymptotique

Nous basant sur la représentation locale du système dans les régions de saturation, nous allons maintenant énoncer une condition nécessaire et suffisante pour la contractivité d'un domaine polyédral. Ce résultat suppose la connaissance des sommets du polyèdre $S(G, w)$ et s'applique en particulier au cas des polytopes, i.e., des polyèdres compacts¹. Par conséquent, ce résultat assure aussi la stabilité asymptotique dans le domaine.

Considérons donc l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1 : *Le polyèdre $S(G, w)$ est un polyèdre compact contenant l'origine.*

Soit V l'ensemble des sommets de $S(G, w)$:

$$V = \{v_1, \dots, v_p\}$$

Soit V_i l'ensemble des n_{v_i} sommets de $S(G, w)$ qui appartiennent à la $i^{\text{ème}}$ facette de $S(G, w)$, notée $\partial_i S(G, w)$:

$$V_i \triangleq \{v \in V ; G_{(i)}v = w_{(i)}\}$$

1. Dans la section 3.6 nous allons voir que cette hypothèse peut être relâchée dans certains cas.

Définissons le cône polyédral généré par la facette $\partial_i S(G, w)$:

$$\mathcal{K}_i \triangleq \left\{ x \in \mathfrak{R}^n ; x = \sum_{l=1}^{n_{v_i}} \gamma_l v_l, \quad v_l \in V_i, \quad \gamma_l \geq 0 \right\} \quad (3.21)$$

Pour chaque $j \in \mathcal{J}$ définissons l'ensemble des indices i correspondant à tous les cônes \mathcal{K}_i qui ont une intersection non-vide avec la région $S(R_j, d_j)$:

$$\mathcal{I}_j \triangleq \{ i ; \mathcal{K}_i \cap S(R_j, d_j) \neq \emptyset \}$$

D'après ces définitions nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.2 : [45] *Considérons la description (3.9) du système (3.1) dans la région de saturation j . Pour chaque $i \in \mathcal{I}_j$ définissons les programmes linéaires suivants :*

$$\begin{cases} y_{j(l,i)} = \max_x \left(G_{(l)} \bar{A}_j - \frac{w_{(l)}}{w_{(i)}} G_{(i)} \right) x + G_{(l)} p_j \\ \text{soumis à} \\ x \in (\mathcal{K}_i \cap S(R_j, d_j) \cap S(G, w)) \setminus \{0\} \end{cases} \quad l = 1, \dots, g. \quad (3.22)$$

et soit

$$y_j = \max \{ y_{j(l,i)} ; i \in \mathcal{I}_j, l = 1, \dots, g \}$$

Le polyèdre $S(G, w)$ est contractif par rapport au système (3.1) si et seulement si pour chaque région de saturation $j, j \in \mathcal{J}$, on a :

$$y_j < 0$$

Démonstration :

Suffisance : Pour tout $x \in S(G, w)$, $x \neq 0$ il existe un coefficient $\nu \in \mathfrak{R}_+$, $\nu \leq 1$, tel que x appartient à, au moins, une facette de $S(G, w/\nu)$. Autrement dit,

$$x \in \partial_i S(G, w/\nu) \triangleq \{ x \in \mathfrak{R}^n ; G_{(i)} x = w_{(i)}/\nu, \quad G_{(l)} \leq w_{(l)}/\nu, \quad \forall l \neq i, \quad l = 1, \dots, g \}$$

En plus, x appartient à une des régions de saturation $S(R_j, d_j)$ et, par conséquent, on a :

$$(\mathcal{K}_i \cap S(R_j, d_j)) \setminus \{0\} \neq \emptyset$$

$$\partial_i S(G, w/\nu) \subset (\mathcal{K}_i \cap S(R_j, d_j) \cap S(G, w))$$

Supposons donc qu'à l'instant k , $x(k) \in \partial_i S(G, w/\nu)$.

Si $y_j < 0$, $\forall j \in \mathcal{J}$, on a :

$$(G_{(l)} \bar{A}_j - \frac{w_{(l)}}{w_{(i)}} G_{(i)}) x(k) + G_{(l)} p_j < 0, \quad \forall l = 1, \dots, g$$

$$G_{(l)} x(k+1) < \frac{w_{(l)}}{w_{(i)}} G_{(i)} x(k) = w_{(l)}/\nu \quad \forall l = 1, \dots, g$$

et donc

$$Gx(k+1) \prec w/\nu$$

Ainsi, il existe un réel β , $0 < \beta < 1$, tel que $x(k+1) \in \beta \partial S(G, w/\nu)$, i.e., $x(k+1) \in \text{int} S(G, w/\nu)$. Comme ce raisonnement peut être appliqué $\forall x \in S(G, w)$, la contractivité de $S(G, w)$ est garantie si $y_j < 0$, $\forall j \in \mathcal{J}$.

Nécessité: Supposons que $S(G, w)$ est contractif et qu'il existe $j \in \mathcal{J}$ tel que $y_j \geq 0$. Cela veut dire que pour un $j \in \mathcal{J}$, il existe $i \in \mathcal{I}_j$ and l tels que $y_{j(l,i)} \geq 0$. Ainsi, il existe $x \in (\mathcal{K}_i \cap S(R_j, d_j) \cap S(G, w)) \setminus \{0\}$, en particulier, $x \in \partial_i S(G, w/\nu)$, avec $\nu \leq 1$, tel que :

$$(G_{(l)} \bar{A}_j - \frac{w_{(l)}}{w_{(i)}} G_{(i)}) x + G_{(l)} p_j \geq 0 \quad (3.23)$$

Supposons qu'à l'instant k , $x(k) = x$. Puisque $x \in \partial_i S(G, w/\nu)$ on a $G_{(i)} x(k) = w_{(i)}/\nu$ et en substituant cela dans (3.23) on obtient :

$$G_{(l)} (\bar{A}_j x(k) + p_j) - w_{(l)}/\nu \geq 0 \quad (3.24)$$

$$G_{(l)} x(k+1) \geq w_{(l)}/\nu \quad (3.25)$$

Alors $x(k+1) \in S(G, w/\nu_1)$, $\nu_1 \leq \nu$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. La nécessité de la condition est donc prouvée.

□

Considérons maintenant la propriété suivante.

Propriété 3.1 : *Si un polyèdre compact $S(G, w)$ contient l'origine dans son intérieur ($w_{(i)} > 0$, $\forall i = 1, \dots, g$) alors pour chaque $x \in S(G, w)$, $x \neq 0$, il existe toujours au moins une composante du vecteur Gx qui est positive.*

Démonstration :

Si $0 \in \text{Int } S(G, w)$ alors $w \succ 0$. Considérons un vecteur x sur la frontière de $S(G, w)$, $x \in \partial S(G, w)$, alors il satisfait :

$$\begin{cases} (Gx)_{(i)} = G_{(i)}x = w_{(i)} \\ (Gx)_{(l)} = G_{(l)}x \leq w_{(l)} \quad , \quad l \neq i \end{cases}$$

Et donc $(Gx)_{(i)} = w_{(i)} > 0$.

Si l'on considère un vecteur x appartenant à l'intérieur de $S(G, w)$, $x \in \text{Int } S(G, w)$, on peut faire le même type de raisonnement en considérant que x est sur la frontière d'un domaine $S(G, \nu w)$, $0 < \nu < 1$.

□

Etant donné que $S(G, w)$ est compact et contractif, il est possible de lui associer une fonction de Lyapunov polyédrale. Cette fonction est strictement décroissante le long des trajectoires du système (3.1) dans $S(G, w)$. Ce résultat est synthétisé dans le corollaire suivant :

Proposition 3.1 : [45] *Si les conditions du théorème 3.2 sont satisfaites alors :*

- (i) *Le système (3.1) est localement asymptotiquement stable dans $S(G, w)$.*
- (ii) *La fonction polyédrale $\mathcal{V}(x(k)) = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x(k)}{w_{(i)}} \right\}$ est une fonction de Lyapunov strictement décroissante pour le système (3.1) dans $S(G, w)$.*

Démonstration :

(i) D'après le théorème 3.2, si $x(k) \in S(G, w/\nu_k)$, $x(k) \neq 0$, $\nu_k \geq 1$, alors $x(k+1) \in S(G, w/\nu_{k+1})$ avec $\nu_{k+1} \geq \nu_k$. Ainsi, lorsque $k \rightarrow \infty$ on a aussi $\nu_k \rightarrow \infty$ et, par conséquent $S(G, w/\nu_k) \rightarrow \{0\}$, c'est-à-dire, $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$, $\forall x(0) \in S(G, w)$.

(ii) Puisque $S(G, w)$ est compact on a $\text{Ker } G = \{0\}$. Ainsi d'après la propriété 3.1 on a $\mathcal{V}(x(k)) > 0$, $\forall x(k) \neq 0$ et $\mathcal{V}(x(k)) = 0$ si et seulement si $x = 0$. D'après le théorème 3.2, $\forall x(k) \in S(G, w/\nu_k)$, $\nu_k \geq 1$, on a $\mathcal{V}(x(k)) = 1/\nu_k$ et $\mathcal{V}(x(k+1)) = 1/\nu_{k+1}$ avec $\nu_{k+1} \geq \nu_k$ et, par conséquent, $\mathcal{V}(x(k+1)) - \mathcal{V}(x(k)) < 0$, $\forall x(k) \in S(G, w)$, $x(k) \neq 0$.

□

3.5 Détermination du coefficient maximum d'homothétie

Pour un système linéaire en boucle fermée sans contraintes sur les commandes, les conditions (3.19) et (3.20) garantissent que tous les ensembles homothétiques de $S(G, w)$ sont aussi contractifs (invariants) (voir remarque 2.2). Par contre, quand la commande est contrainte, les conditions (3.19) et (3.20) ne garantissent que la contractivité (l'invariance) des homothétiques contenus dans la région de linéarité. Autrement dit, il existe un scalaire β_{max} tel que $S(G, \beta_{max}w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$ et tous les ensembles $S(G, \beta w)$, avec $0 < \beta \leq \beta_{max}$, sont aussi contractifs (invariants). Cependant, si $\delta > \beta_{max}$, i.e., $S(G, \delta w) \not\subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$, rien ne peut être garanti a priori.

Nous considérons maintenant un polyèdre $S(G, w)$ contractif (et/ou invariant) pour le système saturé, contenu ou pas dans la région de linéarité. A partir de cet ensemble $S(G, w)$ nous allons proposer un algorithme, basé sur les conditions données dans le théorème 3.2, qui permettra de déterminer le coefficient maximal d'homothétie, δ_{max} , pour lequel l'ensemble $S(G, \delta_{max}w)$ préserve la propriété de contractivité (invariance).

Le principe de l'algorithme est le suivant : à chaque itération on fixe un coefficient d'homothétie, δ , ensuite on teste si $S(G, \delta w)$ satisfait les conditions du théorème 3.2, si oui on augmente δ sinon on le diminue. Ainsi, à chaque itération on s'approche de l'ensemble maximal homothétique contractif de $S(G, w)$. On s'arrête lorsqu'une précision de calcul pré-établie est atteinte.

Les tests des conditions du théorème 3.2 sont mis en oeuvre à partir de la résolution des programmes linéaires (3.22). Pour cela, il faut d'abord représenter d'une manière convenable l'ensemble des vecteurs x , appartenant à $(\mathcal{K}_i \cap S(R_j, d_j) \cap S(G, \delta w))$.

Remarquons que le cône \mathcal{K}_i peut aussi être défini de la manière suivante :

$$\mathcal{K}_i = U_i \mathfrak{R}_+^{n_{v_i}}$$

où U_i est la matrice génératrice du cône \mathcal{K}_i et $\mathfrak{R}_+^{n_{v_i}}$ est l'orthant positif d'ordre n_{v_i} . Les vecteurs colonnes de U_i définissent les vecteurs extrémaux du cône \mathcal{K}_i . La matrice U_i peut donc être construite à partir des n_{v_i} sommets de la facette $\partial_i S(G, w)$, c'est-à-dire, chaque vecteur colonne de U_i est un sommet de $\partial_i S(G, w)$.

Ainsi, si $x \in \mathcal{K}_i$, par définition il existe un vecteur $\gamma \in \mathfrak{R}_+^{n_{v_i}}$, c'est-à-dire, $\gamma_{(i)} \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n_{v_i}$, tel que :

$$x = U_i \gamma$$

Si on considère un changement de variable, l'intersection entre \mathcal{K}_i , $S(R_j, d_j)$ et $S(G, \delta w)$ peut donc être exprimée en fonction de la variable γ de la manière suivante :

$$(\mathcal{K}_i \cap S(R_j, d_j) \cap S(G, \delta w)) \triangleq \left\{ \gamma \in \mathbb{R}_+^{n_{vi}} ; \begin{bmatrix} R_j \\ G \end{bmatrix} U_i \gamma \leq \begin{bmatrix} d_j \\ \delta w \end{bmatrix} \right\}$$

Le critère à maximiser devient alors :

$$\max_{\gamma} (G_{(l)} \bar{A}_j - \frac{w_{(l)}}{w_{(i)}} G_{(i)}) U_i \gamma + G_{(l)} p_j$$

Nous pouvons ainsi formuler l'algorithme suivant.

Algorithme 3.1 :

• **Pas 0 -**

- Initialiser : $\delta = \delta_0$.
- Choisir la précision de calcul désirée.

• **Pas 1 -**

- Déterminer les sommets de $S(G, w)$.
- Pour chaque facette $\partial_i S(G, w)$ déterminer la matrice U_i qui génère le cône \mathcal{K}_i .

• **Pas 2 -**

- Déterminer \mathcal{J} and \mathcal{I}_j par rapport à $S(G, \delta w)$.
- Pour chaque $j \in \mathcal{J}$ et $i \in \mathcal{I}_j$, résoudre les programmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{j(l,i)} = \max_{\gamma} (G_{(l)} \bar{A}_j - \frac{w_{(l)}}{w_{(i)}} G_{(i)}) U_i \gamma + G_{(l)} p_j \\ \text{soumis à} \\ \begin{bmatrix} R_j \\ G \end{bmatrix} U_i \gamma \leq \begin{bmatrix} d_j \\ \delta w \end{bmatrix} \\ \gamma \geq 0, U_i \gamma \neq 0 \end{array} \right. \quad l = 1, \dots, g \quad (3.26)$$

• **Pas 3 :**

- Déterminer $y_j = \max\{y_{j(l,i)} ; i \in \mathcal{I}_j, l = 1, \dots, g\}$.

– Si $y_j < 0, \forall j \in \mathcal{J}$, aller au pas 5, sinon aller au pas 4.

- **Pas 4 :** Diminuer δ et retourner au pas 2.
- **Pas 5 :** Si la différence entre le scalaire δ de cette itération et celui de l'itération précédente est plus grande que la précision choisie au pas 0 alors augmenter δ , sinon $\delta_{max} = \delta$. **FIN.**

Remarquons que $S(G, \delta_{max}w)$ est effectivement le plus grand ensemble contractif homothétique à $S(G, w)$ par rapport au système (3.1) parce que les conditions du théorème 3.2, utilisées pour le déterminer, sont nécessaires et suffisantes. Etant donné que $S(G, \delta_{max}w)$ est compact il est donc le domaine maximal de stabilité asymptotique engendré par la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}(x(k)) = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x(k)}{w_{(i)}} \right\}$. Ainsi, $S(G, \delta_{max}w)$ peut être considéré comme une approximation de la région d'attraction de l'origine associée au système (3.1). Cette approximation peut être améliorée si on considère, par exemple, l'union de différents polyèdres obtenus à partir de l'algorithme 3.1. Dans ce cas, le domaine résultant peut être non-convexe.

Remarque 3.3 : D'après la démonstration du théorème 3.2, si nous voulons garantir la μ -contractivité du domaine $S(G, \delta w)$, il suffit de remplacer le critère du programme linéaire (3.26) par :

$$y_{j(l,i)} = \max_{\gamma} (G_{(l)}\bar{A}_j - \mu \frac{w_{(l)}}{w_{(i)}} G_{(i)}) U_i \gamma + G_{(l)} p_j$$

Remarque 3.4 : Dans le cas où nous nous intéressons uniquement à la détermination du plus grand ensemble invariant homothétique à $S(G, w)$, nous pouvons utiliser le même algorithme. Pour cela il suffit de substituer les programmes linéaires (3.26) par les programmes linéaires (3.16) ou (3.17) et tester si

$$\max\{y_{j,i}\} \leq w_{(i)}, \quad \forall i = 1, \dots, g, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Remarque 3.5 : Notre hypothèse de départ présuppose la connaissance ou la détermination d'un ensemble $S(G, w)$ contractif (ou invariant). Il faut remarquer que la détermination d'un polyèdre contractif pour le système saturé directement à partir des conditions du théorème 3.2 n'est pas une tâche facile.

Cependant, nous avons vu dans la section 2.6.1 qu'il est toujours possible de déterminer des ensembles polyédraux invariants et contractifs, contenus dans la région de comportement linéaire du système (3.1). Par exemple, les méthodes proposées dans [13] et [37] permettent de déterminer le plus grand ensemble invariant et contractif contenu dans la région de linéarité $S(F, u_{\min}, u_{\max})$. D'autre part, il existe des techniques permettant la détermination de tels domaines à partir de la structure propre de $(A + BF)$ [54],[50]. Nous pouvons aussi citer les techniques basées sur le placement de structure propre [4],[53], qui permettent de calculer de façon simultanée une matrice F et un polyèdre invariant $S(G, w) \subset S(F, u_{\min}, u_{\max})$, et les techniques basées sur la programmation linéaire [51],[96] qui permettent de calculer F de façon à rendre un polyèdre donné $S(G, w)$ invariant par rapport au système en boucle fermée sans saturation.

Ainsi, nous pouvons toujours déterminer un polyèdre invariant et/ou contractif pour le système saturé en construisant tout d'abord un polyèdre $S(G, w)$ contenu dans $S(F, u_{\min}, u_{\max})$ à partir des techniques mentionnées ci-dessous et, ensuite, en appliquant l'algorithme 3.1 d'expansion homothétique

3.6 Polyèdres non-bornés

Des conditions pour la stabilité asymptotique locale d'un système saturé ont été proposées dans le cas de polyèdres compacts. L'hypothèse de compacité a été considérée afin que la fonction polyédrale $\mathcal{V}(x)$ soit une fonction de Lyapunov locale pour le système saturé et ainsi que nous puissions garantir que toutes trajectoires initialisées dans le polyèdre considéré convergent asymptotiquement vers l'origine.

Nous allons voir maintenant que, sous des hypothèses complémentaires, il est possible de garantir la stabilité asymptotique locale du système saturé pour une classe de domaines polyédraux non-bornés. Pour cela considérons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.2 : *$S(G, w)$ est un polyèdre non-borné et il existe $\nu \geq 1$ tel que $S(G, w/\nu) \subseteq S(F, u_{\min}, u_{\max})$.*

Pour que l'hypothèse 3.2 soit satisfaite il faut que $\text{Ker } G \subseteq \text{Ker } F$. Ainsi, la classe de polyèdres que l'on considère correspond à celle des polyèdres non-bornés dans les directions associées à $\text{Ker } F$.

Avant de donner une condition nécessaire pour qu'un polyèdre respectant l'hypothèse 3.2 puisse être un domaine contractif pour le système saturé, rappelons que

dans la région $S(F, u_{min}, u_{max})$ l'évolution du système saturé (3.1) est donnée par le modèle linéaire :

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) \quad (3.27)$$

Proposition 3.2 : *Pour que le polyèdre non-borné $S(G, w)$, satisfaisant l'hypothèse 3.2, soit contractif par rapport au système saturé (3.1), il est nécessaire qu'il soit aussi contractif par rapport au système linéaire (3.27).*

Démonstration :

Si $S(G, w)$ est contractif pour le système (3.1), par définition, tous les homothétiques $S(G, w/\nu)$, avec $\nu \geq 1$, sont aussi contractifs pour le système (3.1). D'après l'hypothèse 3.2, il existe $\nu \geq 1$ tel que $S(G, w/\nu) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$ et, par conséquent, $S(G, w/\nu)$ est forcément contractif par rapport au système (3.27).

□

Corollaire 3.1 : *Une condition nécessaire pour que le polyèdre non-borné $S(G, w)$, satisfaisant l'hypothèse 3.2, soit contractif (positivement invariant) par rapport au système saturé (3.1) est que $\text{Ker } G$ soit $A - \text{invariant}$.*

Démonstration :

D'après la Proposition 3.2 pour que $S(G, w)$, satisfaisant l'hypothèse 3.2, soit contractif pour le système (3.1) il faut que l'équation $HG = G(A + BF)$ soit vérifiée. Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que $\text{Ker } G$ soit $(A + BF) - \text{invariant}$ [23]. Comme par hypothèse nous avons $\text{Ker } G \subseteq \text{Ker } F$, cela implique que $\text{Ker } G$ est $A - \text{invariant}$.

□

Soit $\text{rang}(G) = r < n$, alors la dimension de $\text{Ker } G$ est $(n - r)$. Nous pouvons donc définir une matrice $Q \triangleq [Q_o \quad Q_r]$ où :

- $Q_o \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ est une base associée au sous-espace $\mathcal{S}_o \triangleq \text{Ker } G$.
- $Q_r \in \mathbb{R}^r$ est une base pour le sous-espace \mathcal{S}_r complémentaire de $\text{Ker } G$.

A partir de la matrice Q définissons le changement de base suivant :

$$x = Qz = [Q_o \quad Q_r] \begin{bmatrix} z_o \\ z_r \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

En considérant que $\text{Ker } G$ est A -invariant, le système (3.1) s'écrit dans la base définie par la matrice Q comme :

$$\begin{bmatrix} z_o(k+1) \\ z_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_o & R_2 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o(k) \\ z_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} \text{sat}([F_o \quad F_r] \begin{bmatrix} z_o(k) \\ z_r(k) \end{bmatrix}) \quad (3.29)$$

où

- $\begin{bmatrix} R_o & R_2 \\ 0_{r \times (n-r)} & R_r \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ$; $\begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} = Q^{-1}B$ et $F[Q_o \quad Q_r] = [F_o \quad F_r]$
- $z_o \in \mathbb{R}^{n-r}$ est la projection de x sur \mathcal{S}_o le long de \mathcal{S}_r ; et $z_r \in \mathbb{R}^r$ est la projection de x sur \mathcal{S}_r le long de \mathcal{S}_o .

Comme Q_o est une base pour $\text{Ker } G$ et puisque $\text{Ker } G \subseteq \text{Ker } F$, on a $F_o = FQ_o = 0$ et le système (3.29) s'écrit :

$$z_o(k+1) = R_o z_o(k) + R_2 z_r(k) + B_o \text{sat}(F_r z_r(k)) \quad (3.30)$$

$$z_r(k+1) = R_r z_r(k) + B_r \text{sat}(F_r z_r(k)) \quad (3.31)$$

Notons que l'équation (3.31) ne dépend pas de z_o , autrement dit, z_r est complètement découplé de z_o .

Le polyèdre $S(G, w)$ s'écrit dans la base Q comme :

$$S(G, w) = \{z \in \mathbb{R}^n ; G[Q_o \quad Q_r]z \leq w\} = \{z \in \mathbb{R}^n ; [0_{g \times (n-r)} \quad G_r]z \leq w\} \quad (3.32)$$

et donc la projection de $S(G, w)$ sur \mathcal{S}_r le long de \mathcal{S}_o est donnée par le polyèdre suivant :

$$S(G_r, w) \triangleq \{z_r \in \mathbb{R}^r ; G_r z_r \leq w\} \quad (3.33)$$

avec $G_r \in \mathbb{R}^{g \times r}$. Remarquons que comme $\text{Ker } G_r = \{0\}$ et $S(G, w) \subseteq S(F, u_{\min}, u_{\max})$ $S(G_r, w)$ est compact.

A partir de cette représentation dans la base Q , nous pouvons énoncer, d'une manière similaire à ce qui a été fait dans [22] et [32] pour des systèmes linéaires sans saturation des commandes, la propriété suivante.

Proposition 3.3 : *Le polyèdre $S(G, w)$, sous l'hypothèse 3.2, est un ensemble contractif pour (3.1) si et seulement si $\text{Ker } G$ est un sous-espace A -invariant et $S(G_r, w)$ est contractif pour le système d'ordre réduit (3.31).*

Démonstration :

Rappelons que $S(G, w)$ est contractif pour le système (3.1) si et seulement si

$$x(k) \in \partial S(G, w/\nu) \Rightarrow Gx(k+1) \prec w/\nu \quad \forall \nu \geq 1 \quad (3.34)$$

Dans ce cas, d'après le corollaire 3.1, $\text{Ker } G$ doit être A -invariant. Donc on peut écrire le système dans la base Q . La condition (3.34) devient alors :

$$z(k) \in \partial S(GQ, w/\nu) \Rightarrow GQz(k+1) \prec w/\nu, \quad \forall \nu \geq 1$$

ou de manière équivalente :

$$z(k) \in \partial S(G \begin{bmatrix} Q_o & Q_r \end{bmatrix}, w/\nu) \Rightarrow G \begin{bmatrix} Q_o & Q_r \end{bmatrix} z(k+1) \prec w/\nu, \quad \forall \nu \geq 1$$

Compte tenu du fait que Q_o est une base pour $\text{Ker } G$, la condition (3.34) est équivalente à :

$$z_r(k) \in \partial S(G_r, w/\nu) \Rightarrow G_r z_r(k+1) \prec w/\nu, \quad \forall \nu \geq 1 \quad (3.35)$$

Cette implication représente la condition nécessaire et suffisante pour la contractivité de $S(G_r, w)$ par rapport au système (3.31).

□

Il est important d'insister sur le fait que la contractivité de $S(G, w)$ n'est pas suffisante pour garantir la stabilité asymptotique du système dans ce domaine. En effet, il peut exister des directions d'instabilité associées à $\text{Ker } G$. Ce fait est illustré par la figure 3.2. Ainsi nous avons besoin d'une condition supplémentaire pour pouvoir assurer la stabilité asymptotique dans $S(G, w)$.

Proposition 3.4 : *Supposons que $S(G, w)$ soit un polyèdre non-borné pour lequel l'hypothèse 3.2 est satisfaite. Alors $S(G, w)$ est un domaine de stabilité asymptotique pour le système saturé (3.1) si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $\text{Ker } G$ est A -invariant.
- (ii) $S(G_r, w)$ est contractif par rapport au système réduit (3.31).
- (iii) Les valeurs propres de la matrice R_o sont à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire, sont asymptotiquement stables.

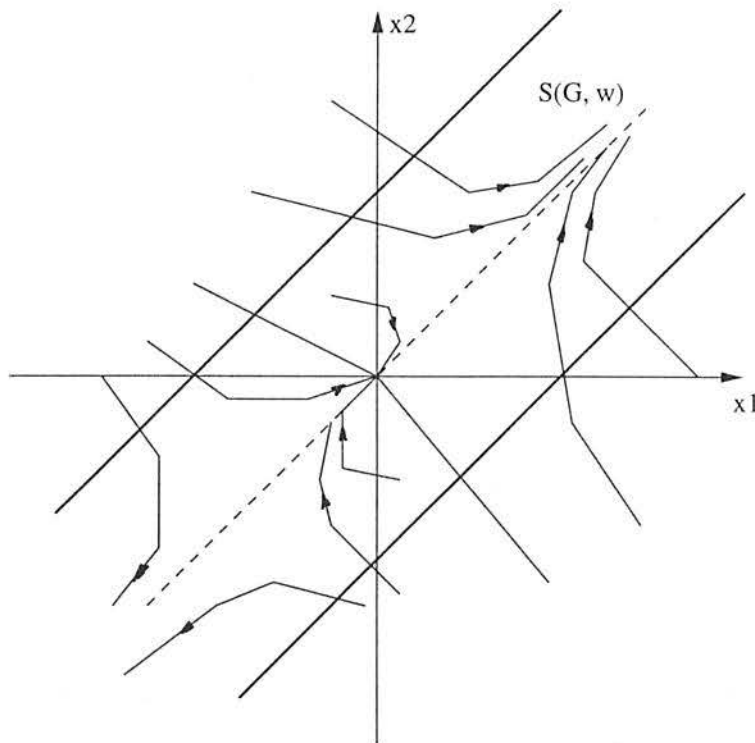


FIG. 3.2 – *Instabilité dans des polyèdres contractifs non-bornés*

Démonstration :

Comme $S(G_r, w)$ est compact, s'il est contractif par rapport au système d'ordre réduit (3.31), d'après la proposition 3.1 il est aussi un domaine de stabilité locale pour ce système et donc :

$$z_r(k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty, \quad \forall z_r(0) \in S(G_r, w)$$

Ainsi si toutes les valeurs propres de R_o sont asymptotiquement stables, d'après le théorème 1 (p.15) dans [101], on peut conclure que :

$$z_o(k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty, \quad \forall z_o(0) \in \mathfrak{R}^{n-r}, \quad \forall z_r \in S(G_r, w)$$

Ceci implique que $z(k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, $\forall z(0) \in S(GQ, w)$, ou d'une manière équivalente, $x(k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, $\forall x(0) \in S(G, w)$.

□

En résumé :

Sous l'hypothèse 3.2 nous pouvons conclure que la contractivité et la stabilité asymptotique dans le polyèdre non-borné $S(G, w)$ peuvent être analysées en considérant un système d'ordre réduit qui décrit l'évolution des trajectoires du système saturé dans le sous-espace complémentaire de $\text{Ker } G$. Dans ce cas, il suffit de vérifier la contractivité de $S(G_r, w)$ par rapport au système (3.31). Comme $S(G_r, w)$ est compact, cela peut être accompli en appliquant le théorème 3.2. En outre, l'algorithme 3.1, qui permet de déterminer l'expansion homothétique d'un polyèdre contractif dans la zone de comportement non-linéaire, peut être appliqué en considérant $S(G_r, w)$ et le système (3.31).

Remarque 3.6 : *Considérons l'équation (3.29). Si $\text{Ker } G \subseteq \text{Ker } F$, on a $F_o = 0$ et le système en boucle fermée dans la région de linéarité est donné par :*

$$\begin{bmatrix} z_o(k+1) \\ z_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_o & R_2 + B_r F_r \\ 0 & R_r + B_r F_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o(k) \\ z_r(k) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Ainsi, nous pouvons conclure que satisfaire simultanément l' A -invariance de $\text{Ker } G$, et $\text{Ker } G \subseteq \text{Ker } F$ implique un placement partiel de structure propre, autrement dit, F ne déplace qu'une partie des valeurs (vecteurs) propres de A . Notons que les valeurs (vecteurs) propres de A associées au sous-espace S_o sont aussi valeurs (vecteurs) propres de $A + BF$, c'est-à-dire,

$$\sigma(A + BF) \cap \sigma(A) = \sigma(R_o)$$

En fait, l' A -invariance de $\text{Ker } G$ dans ce cas est équivalente à l'existence d'une matrice H telle que l'équation $HG = G(A + BF)$ est satisfaite. Il a été montré dans [39],[40] que lorsque $\text{Ker } G \subseteq \text{Ker } F$ l'équation $HG = G(A + BF)$ peut être considérée comme une équation de projection canonique [98] et est équivalente à un placement partiel de structure propre.

La construction de polyèdres $S(G, w)$ et de la matrice F satisfaisant ces conditions a été étudiée dans [53], [21]. Dans ce contexte, une méthode utilisant un système d'ordre réduit a été proposée dans [22] et [39].

D'autre part, le problème du calcul d'une matrice de retour F qui modifie seulement les pôles instables de la boucle ouverte est relié au problème de minimisation de l'énergie de la commande (voir par exemple [86] et ses références).

Remarque 3.7 : *La base $Q = [Q_o \ Q_r]$ peut être obtenue à partir du calcul des vecteurs propres de A ou en utilisant des transformations orthogonales. D'un point*

de vue numérique, l'utilisation de transformations orthogonales est préférable (voir [76], page 13). Ainsi, la base Q peut être générée d'une façon efficace à partir d'une décomposition de Schur de la matrice A suivie, si nécessaire, d'un ré-arrangement des blocs de Schur [30],[38].

Remarque 3.8 : Si $\text{Ker } G$ est un sous-espace A -invariant contenu dans $\text{Ker } F$, les paires (F, A) et (G, A) sont forcément non-observables. Alors la condition (iii) de la proposition 3.4 est équivalente à la détectabilité de la paire (G, A) [98].

3.7 Exemple numérique

Considérons l'exemple académique étudié dans [77]. Le système (2.1) est décrit par :

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Les commandes du système sont bornées de la façon suivante :

$$-\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \leq u \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Une matrice F qui stabilise le système linéaire est donnée par :

$$F = \begin{bmatrix} -0.95 & 0 \\ 2.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Considérons le polyèdre $S(G, w)$ défini comme :

$$S(G, w) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ -\begin{bmatrix} 1 \\ 4.5 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \preceq \begin{bmatrix} 1 \\ 4.5 \end{bmatrix} \right\}$$

ce polyèdre est positivement invariant par rapport au système linéaire en boucle fermée (3.27).

La matrice F et les contraintes sur la commande définissent neuf régions de saturation. Etant donné que les polyèdres $S(G, w)$ et $S(F, u_{min}, u_{max})$ sont symétriques, il suffit d'analyser cinq de ces régions.

Région 1 ($\xi_1 = [0 \ 0]^T \Leftrightarrow$ Région de Linéarité):

$$\bar{A}_1 = A + BF = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 1.5 & 0.65 \end{bmatrix} ; p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; R_1 = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix} ; d_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Région 2 ($\xi_2 = [1 \ 1]^T$):

$$\bar{A}_2 = A ; p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} ; R_2 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ -2.2 & -0.3 \end{bmatrix} ; d_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Région 3 ($\xi_3 = [0 \ 1]^T$):

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} ; p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} ; R_3 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ -0.95 & 0 \\ -2.2 & -0.3 \end{bmatrix} ; d_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Région 4 ($\xi_4 = [-1 \ 1]^T$):

$$\bar{A}_4 = A ; p_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} ; R_4 = \begin{bmatrix} -0.95 & 0 \\ -2.2 & -0.3 \end{bmatrix} ; d_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Région 5 ($\xi_5 = [-1 \ 0]^T$):

$$\bar{A}_5 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 1.5 & 0.65 \end{bmatrix} ; p_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} ; R_5 = \begin{bmatrix} -0.95 & 0 \\ 2.2 & 0.3 \\ -2.2 & -0.3 \end{bmatrix} ; d_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

L'ensemble V des sommets de $S(G, w)$ est donné par :

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -4.5 \end{bmatrix} \right\}$$

Comme $S(G, w)$ a quatre facettes, il existe quatre cônes polyédraux qui sont générés par les matrices suivantes :

$$U_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4.5 & 4.5 \end{bmatrix} ; U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4.5 & -4.5 \end{bmatrix} ; U_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4.5 & -4.5 \end{bmatrix} ; U_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

L'application de l'algorithme 3.1 nous donne $\delta_{max} = 9.99$ (avec une précision de 0.01). $S(G, \delta_{max}w)$ est donc l'ensemble maximal homothétique à $S(G, w)$ pour lequel la contractivité par rapport au système (3.1) est assurée. Compte tenu que le domaine est compact, d'après la proposition 3.1, il est aussi un domaine de stabilité asymptotique. Il est important de remarquer que l'ensemble maximal homothétique à $S(G, w)$ contenu dans la région de linéarité $S(F, u_{min}, u_{max})$ est obtenu pour $\delta = 1.1268$. La figure 3.3 dépeint les domaines $S(G, w)$, $S(F, u_{min}, u_{max})$, $S(G, \delta_{max}w)$, et les régions de saturation (R_j).

L'ensemble maximal homothétique à $S(G, w)$ pour lequel l'invariance positive est garantie, c'est-à-dire, les conditions (3.13) and (3.14) sont satisfaites, est obtenu pour $\delta = 10$. Dans ce cas, la contractivité n'est plus satisfaite parce qu'il existe des trajectoires qui, initialisées à la frontière du domaine, y restent. Ce fait est dû à l'existence de points d'équilibre parasites sur la frontière de $S(G, 10w)$ ($e_1 = [10 \ 12]^T$, $e_2 = [-10 \ -12]^T$). Pour $\delta > 10$ il existe des trajectoires instables qui partent du domaine. Ces deux situations sont montrées dans les figures 3.4 et 3.5.

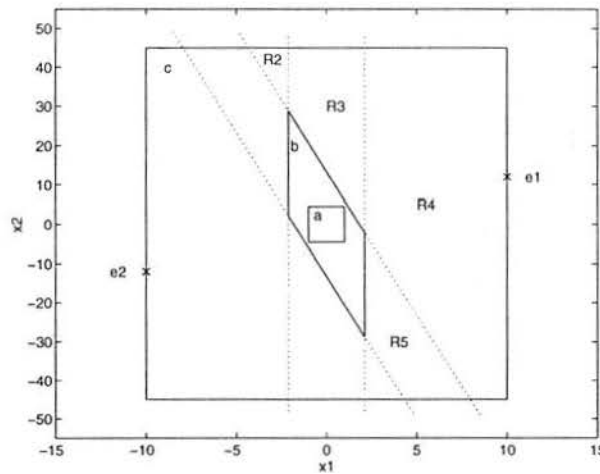
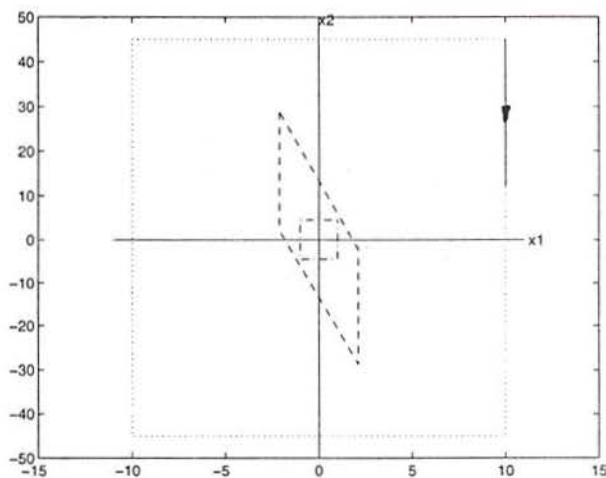
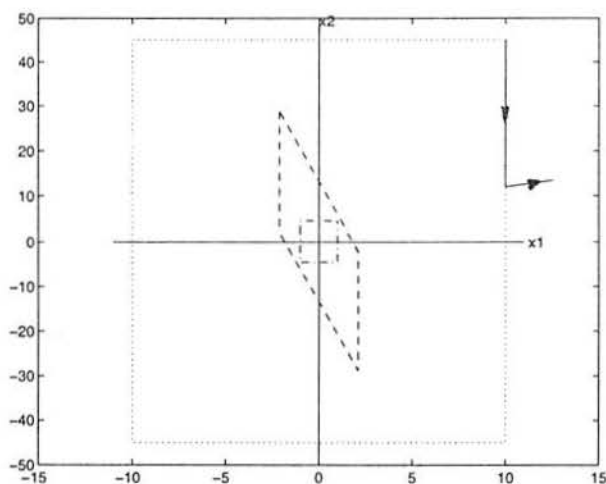


FIG. 3.3 – a. $S(G, w)$; b. $S(F, u_{min}, u_{max})$; c. $S(G, \delta_{max}w)$

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé des outils théoriques pour l'analyse des systèmes linéaires avec saturation de commandes. Pour cela nous avons modélisé localement le comportement du système saturé. L'espace d'état est divisé en régions appelées *régions de saturation*. Dans chacune de ces régions le système saturé est représenté par un système linéaire avec une perturbation additive.

FIG. 3.4 - $\delta = 10$ FIG. 3.5 - $\delta = 10.001$

Cette représentation a permis tout d'abord la formulation de conditions nécessaires et suffisantes pour l'invariance positive d'un ensemble polyédral quelconque par rapport au système saturé. Ensuite, nous avons donné des conditions également nécessaires et suffisantes pour la contractivité de polyèdres compacts par rapport au système saturé. Dans ce cas, nous avons montré que le polyèdre contractif est associé à une fonction de Lyapunov polyédrale pour le système saturé et est un domaine de stabilité et de comportement non-linéaire pour un tel système. A partir de ces conditions nous avons proposé un algorithme qui permet de déterminer le plus grand ensemble homothétique à un polyèdre contractif (ou seulement positivement invariant) pour lequel la contractivité (ou l'invariance positive) est garantie par rapport

aux trajectoires du système saturé.

Les résultats ont été présentés en considérant un système à temps discret et une loi de commande du type retour d'état. Nous avons établi des résultats similaires dans [43] et [44] en considérant des systèmes à temps continu. D'autre part, l'extension de cette méthode d'analyse au cas d'un retour dynamique est immédiate. Pour cela il suffit de redéfinir les régions de saturation et le modèle linéaire dans chacune de ces dernières en fonction de la loi de commande appliquée (voir remarque 2.1).

Chapitre 4

Approche par polytope de matrices

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, le comportement non-linéaire du système saturé est pris en compte à partir de l'utilisation d'un modèle polytopique. Ce type de modélisation, proposé initialement dans [73] et [74] dans un contexte plus général de systèmes non-linéaires a été particularisé dans [20] et [19] pour le cas des systèmes linéaires avec saturation des commandes.

Nous montrons tout d'abord comment obtenir un tel modèle. Ensuite, la validité du modèle et les conditions pour qu'il représente vraiment le comportement du système saturé sont discutées.

A partir de ces considérations nous énonçons des conditions pour l'invariance positive et la μ -contractivité de domaines polyédraux par rapport au système saturé. Etant donné un ensemble polyédral invariant et contractif contenu dans la région de linéarité en boucle fermée (i.e., où les commandes neaturent pas), ces conditions sont utilisées pour formuler une méthode d'augmentation de ce domaine polyédral dans la zone de comportement non-linéaire. Cette méthode peut être décomposée en deux parties : la première correspond à une expansion homothétique et la deuxième consiste à déterminer le plus grand domaine μ -contractif contenu dans le domaine de validité du modèle polytopique. L'ensemble polyédral ainsi obtenu est

donc un domaine μ -contractif pour le système saturé et, sous certaines hypothèses complémentaires, un domaine de stabilité asymptotique locale.

4.2 Modélisation du système saturé

Considérons la loi de commande du type retour d'état saturé $u(k) = \text{sat}(Fx(k))$. Le système en boucle fermée est :

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(Fx(k)) \quad (4.1)$$

Chaque composante du vecteur de commande peut être redéfinie comme :

$$u(k)_{(i)} = \text{sat}(F_{(i)}x(k)) = \alpha(x(k))_{(i)}F_{(i)}x(k) \quad (4.2)$$

où

$$\alpha(x(k))_{(i)} = \begin{cases} \frac{-u_{\min(i)}}{F_{(i)}x(k)} & \text{si } F_{(i)}x(k) < -u_{\min(i)} \\ 1 & \text{si } -u_{\min(i)} \leq F_{(i)}x(k) \leq u_{\max(i)} \\ \frac{u_{\max(i)}}{F_{(i)}x(k)} & \text{si } F_{(i)}x(k) > u_{\max(i)} \end{cases} \quad (4.3)$$

avec $0 < \alpha(x(k))_{(i)} \leq 1$, $i = 1, \dots, m$.

Le coefficient $\alpha(x(k))_{(i)}$ nous donne une idée du degré de saturation de la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de commande. Autrement dit, plus $\alpha(x(k))_{(i)}$ est petit plus le vecteur d'état se trouve éloigné de la région de linéarité du système (4.1). Notons que $\alpha(x(k))_{(i)}$ dépend de la valeur de l'état à l'instant k . Toutefois, afin de simplifier la notation nous considérons désormais $\alpha(k)_{(i)} \triangleq \alpha(x(k))_{(i)}$.

En dénotant le vecteur des coefficients $\alpha(k)_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, par $\alpha(k)$, définissons la matrice $D(\alpha(k)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ comme suit :

$$D(\alpha(k)) = \begin{bmatrix} \alpha(k)_{(1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha(k)_{(2)} & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha(k)_{(i)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha(k)_{(m)} \end{bmatrix} = \text{diag}(\alpha(k)) \quad (4.4)$$

En prenant en compte les définitions précédentes, le système (4.1) peut aussi s'écrire comme :

$$x(k+1) = (A + BD(\alpha(k))F)x(k) \quad (4.5)$$

ou encore,

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) = \mathcal{A}_k x(k) \quad (4.6)$$

A chaque instant k la matrice \mathcal{A}_k est une fonction de $\alpha(k)$ et, par conséquent, dépend de la valeur de $x(k)$.

Considérons un ensemble \mathcal{S}_0 dans l'espace d'état. Si \mathcal{S}_0 est compact ou non-borné seulement le long des directions associées à $\text{Ker } F$, nous pouvons définir une borne inférieure pour le terme de saturation $\alpha(k)_{(i)}$:

$$(\alpha_{min})_{(i)} \triangleq \min\{\alpha(x(k))_{(i)} : x(k) \in \mathcal{S}_0\} \quad (4.7)$$

$(\alpha_{min})_{(i)}$ sera appelé *coefficient de saturation* de la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de commande dans \mathcal{S}_0 . D'après cette définition on a

$$(\alpha_{min})_{(i)} \leq \alpha(x(k))_{(i)} \leq 1 \quad , \quad \forall x(k) \in \mathcal{S}_0$$

Considérons maintenant toutes les combinaisons vectorielles d'ordre m où la $i^{\text{ème}}$ composante de chaque vecteur peut prendre la valeur 1 ou $(\alpha_{min})_{(i)}$. On a un total de 2^m combinaisons possibles. A chacune de ces combinaisons nous associons un vecteur γ_j , $j = 1, \dots, 2^m$, et nous définissons les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} D_j(\alpha_{min}) &= D(\gamma_j) \triangleq \text{diag}(\gamma_j) \\ A_j &= A + BD(\gamma_j)F \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ainsi, si on a par exemple deux entrées de commande ($m = 2$), nous obtenons :

- $\gamma_1 = [1 \ 1]^T \Rightarrow A_1 = A + BD(\gamma_1)F = A + BF$
- $\gamma_2 = [1 \ (\alpha_{min})_{(2)}]^T \Rightarrow A_2 = A + BD(\gamma_2)F$
- $\gamma_3 = [(\alpha_{min})_{(1)} \ 1]^T \Rightarrow A_3 = A + BD(\gamma_3)F$
- $\gamma_4 = [(\alpha_{min})_{(1)} \ (\alpha_{min})_{(2)}]^T \Rightarrow A_4 = A + BD(\gamma_4)F$

D'après la définition des matrices A_j on peut conclure que $\forall x(k) \in \mathcal{S}_0$ on a :

$$\mathcal{A}_k \in \text{Co}\{A_j ; j = 1, \dots, 2^m\} \quad (4.9)$$

autrement dit, \mathcal{A}_k appartient à un polytope de matrices dont les sommets sont les matrices A_j .

De ce fait, le système (4.1) peut être représenté localement par le système polytopique suivant :

$$x(k+1) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j x(k) \quad (4.10)$$

avec $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} = 1$, $\lambda_{j,k} \geq 0$. Ainsi, à chaque instant k , la matrice \mathcal{A}_k peut être déterminée comme une combinaison linéaire convexe des matrices A_j .

Le modèle polytopique (4.10) a été défini à partir des coefficients de saturation dans l'ensemble \mathcal{S}_0 . Par conséquent, ce modèle ne sera valable que dans une région de l'espace d'état où le vecteur d'état est tel que : $(\alpha_{min})_{(i)} \leq \alpha(k)_{(i)} \leq 1$.

D'après la définition de $\alpha(k)$ (équation (4.3)), cette région est polyédrale et définie comme :

$$S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n ; -u_{min}^\alpha \preceq Fx \preceq u_{max}^\alpha\} \quad (4.11)$$

où $u_{min(i)}^\alpha \triangleq \frac{u_{min(i)}}{(\alpha_{min})_{(i)}}$ et $u_{max(i)}^\alpha \triangleq \frac{u_{max(i)}}{(\alpha_{min})_{(i)}}$.

Ainsi, le système (4.10) représente le système (4.1) à l'instant k seulement si $x(k) \in S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$.

Remarquons que le domaine $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ contient forcément l'ensemble \mathcal{S}_0 . Néanmoins, si on considère que $x(k)$ appartient à \mathcal{S}_0 , on ne peut pas garantir que $x(k+1) \in \mathcal{S}_0$. En effet, pour pouvoir utiliser le modèle polytopique afin de conclure quant à la stabilité locale du système saturé (4.1), il faut être capable de garantir que toutes les trajectoires qui émanent de \mathcal{S}_0 y restent. Une manière d'assurer cela est de considérer \mathcal{S}_0 comme un domaine positivement invariant pour le système (4.10). Par conséquent, \mathcal{S}_0 sera aussi un domaine positivement invariant pour le système saturé (4.1) et ainsi, dans \mathcal{S}_0 , le modèle (4.10) peut être utilisé pour représenter le comportement du système (4.1).

Remarque 4.1 : *Ce type de représentation est utilisé pour la modélisation de certains systèmes linéaires incertains (voir par exemple [7]). Dans ce cas, la matrice dynamique est fonction d'un vecteur $r(k) \in \mathbb{R}^r$ qui représente les variations paramétriques, c'est-à-dire,*

$$x(k+1) = M(r(k))x(k) = \mathcal{M}_k x(k) \quad (4.12)$$

Ainsi, si $r_{\min} \preceq r(k) \preceq r_{\max}$, le système (4.12) peut être représenté par le modèle polytopique

$$x(k+1) = \sum_{j=1}^{2^r} \beta_{j,k} M_j x(k) \quad (4.13)$$

où les matrices M_j sont obtenues à partir de r_{\min} et r_{\max} . Dans ce cas, on suppose que $r(k)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[r_{\min}, r_{\max}]$. Ainsi, il y a une parfaite équivalence entre les systèmes (4.12) et (4.13), i.e., toute trajectoire possible pour le système incertain est aussi une trajectoire possible pour le système polytopique et vice-versa.

Toutefois, il est important de remarquer que dans le cas du système saturé l'équivalence entre (4.1) et (4.10) n'est pas satisfaite. En fait, toutes les trajectoires possibles pour le système saturé contenues dans $S(F, u_{\min}^\alpha, u_{\max}^\alpha)$ sont aussi trajectoires possibles du système polytopique mais le contraire n'est pas vrai. Cette différence par rapport au cas des systèmes incertains s'explique par la dépendance de \mathcal{A}_k avec $x(k)$.

Ainsi, par exemple, les trajectoires produites par

$$x(k+1) = \mathcal{M}_k x(k) = M_j x(k) \quad \forall k > 0 \quad (4.14)$$

seraient des trajectoires possibles pour un système incertain. Par contre les trajectoires générées par

$$x(k+1) = \mathcal{A}_k x(k) = A_j x(k) \quad \forall k > 0 \quad (4.15)$$

ne seront jamais des trajectoires du système saturé (4.6) puisque \mathcal{A}_k varie obligatoirement à chaque instant avec $x(k)$.

En conclusion, on peut dire que la représentation polytopique est une représentation conservatrice pour le système saturé. Cela permet d'expliquer la nature suffisante des résultats qui seront établis le long de ce mémoire à partir de cette représentation.

4.3 Domaines de stabilité locale

Dans cette section, nous proposons une méthode pour déterminer des zones de stabilité asymptotique, de type polyédral, qui ne sont pas contenues dans la région de linéarité du système en boucle fermée. Autrement dit, nous voulons déterminer des zones de comportement non-linéaire, dans lesquelles la stabilité asymptotique du système (4.1) est garantie.

Pour cela, nous allons d'abord formuler des conditions qui garantissent l'invariance et la contractivité de domaines polyédraux par rapport au système saturé à partir de la représentation polytopique définie dans la section précédente. Ainsi, le premier problème que nous traitons est le suivant :

Problème 4.1 : *Etant donné un ensemble polyédral*

$$S(G, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n; Gx \preceq \rho\}, \quad G \in \mathbb{R}^{g \times n} \quad \rho \succ 0_g \quad (4.16)$$

tel que $S(G, \rho) \not\subset S(F, u_{min}, u_{max})$, exprimer des conditions afin que :

1. *L'ensemble $S(G, \rho)$ soit positivement invariant et contractif par rapport au système (4.1).*
2. *La stabilité asymptotique de l'origine soit garantie dans $S(G, \rho)$.*

A partir des conditions établies comme solutions du problème 4.1, nous passons à la formulation d'une méthode pour déterminer des régions de stabilité asymptotique locale de type polyédral pour le système saturé (4.1).

Etant donnée une matrice F telle que les valeurs propres de $(A + BF)$ sont contenues dans le cercle unité, le point de départ de notre méthode est la détermination d'un ensemble polyédral positivement invariant et contractif $S(G, w)$ contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$. Nous supposons que cette étape peut être menée à bien par l'application d'une des techniques mentionnées précédemment dans la remarque 3.5. Ainsi, l'hypothèse suivante est considérée.

Hypothèse 4.1 : *Le polyèdre $S(G, w)$ est contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$ et est ϵ_0 -contractif par rapport au système linéaire $x(k + 1) = (A + BF)x(k)$.*

Notons que cette hypothèse implique que si $S(G, w)$ est un polyèdre non-borné, les directions où il est non-borné doivent être contenues dans $\text{Ker } F$. Ainsi, par exemple, nous ne considérons pas le cas où $S(G, w)$ est un cône polyédral. L'hypothèse 4.1 garantit aussi que tous les homothétiques de $S(G, w)$ contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$ sont aussi ϵ_0 -contractifs par rapport au système $x(k + 1) = (A + BF)x(k)$. En fait, il existe un scalaire positif β_{max} tel que $S(G, \beta_{max}w)$ est le plus grand ensemble homothétique de $S(G, w)$ contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$. Comme nous avons déjà remarqué dans la section 3.5, si l'on considère un scalaire $\delta > \beta_{max}$

on a $S(G, \delta w) \not\subset S(F, u_{min}, u_{max})$ et, sans des conditions supplémentaires, on ne peut pas garantir que $S(G, \delta w)$ est contractif par rapport au système (4.1).

Le deuxième problème que nous allons traiter peut donc être énoncé de la manière suivante :

Problème 4.2 : *Sous l'hypothèse 4.1 et considérant les conditions déterminées comme solutions du problème 4.1, déterminer le coefficient maximum d'homothétie, δ_{max} , tel que $S(G, \delta_{max}w)$ est μ_0 -contractif, $\mu_0 \geq \epsilon_0$, par rapport au système (4.1).*

Ce problème est donc un problème d'expansion homothétique. Considérant le cas où $S(G, \delta_{max}w)$ est compact notre objectif sera ensuite d'essayer d'augmenter la région polyédrale de stabilité d'une façon non-homothétique. Le dernier problème que nous allons aborder est donc :

Problème 4.3 : *Considérons que $S(G, \delta_{max}w)$ est compact et μ_0 -contractif par rapport au système saturé (4.1). A partir des coefficients de saturation de l'ensemble $S(G, \delta_{max}w)$, déterminer, pour le système saturé (4.1), le plus grand ensemble μ -contractif ($\mu > \mu_0$) contenu dans la région de validité du modèle polytopique associé qui satisfait les conditions établies dans le problème 4.1.*

4.3.1 Invariance et contractivité

Dans cette section nous traitons le problème 4.1. Nous présentons tout d'abord une proposition permettant d'établir une condition suffisante pour l'invariance positive du polyèdre $S(G, \rho)$ par rapport au système (4.1) représenté par un système du type (4.10). Cette condition garantit aussi la non-croissance, le long des trajectoires du système saturé, d'une fonction polyédrale non-négative. Des résultats similaires pour un système non-saturé sont présentées dans [9] et [5].

Considérons les coefficients de saturation associés au polyèdre $S(G, \rho)$ et définissons les matrices A_j à partir de ces derniers comme dans l'équation (4.8).

Proposition 4.1 : [92] *S'il existe des matrices $H_j \in \mathbb{R}^{g \times g}$ à éléments non-négatifs telles que :*

$$H_j G = G A_j \quad (4.17)$$

$$H_j \rho \preceq \rho \quad (4.18)$$

pour $j = 1, \dots, 2^m$, alors

(i) Le polyèdre $S(G, \rho)$ est positivement invariant par rapport au système (4.1);

(ii) La fonction

$$\mathcal{V}(x(k)) \triangleq \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x(k)}{\rho_{(i)}} \right\}, \quad i = 1, \dots, g \quad (4.19)$$

est non-croissante le long des trajectoires du système (4.1).

Démonstration :

(i) - $S(G, \rho)$ est positivement invariant par rapport au système (4.1) si

$$\forall x(k) \in S(G, \rho) \Rightarrow x(k+1) \in S(G, \rho)$$

En considérant les coefficients de saturation dans $S(G, \rho)$ et la définition des matrices A_j à partir de ces derniers, si $x(k) \in S(G, \rho)$, $x(k+1)$ peut être déterminé par le système polytopique (4.10). Alors pour tout $x(k) \in S(G, \rho)$, c'est-à-dire, pour tout $x(k)$ tel que $Gx(k) \preceq \rho$ on a :

$$Gx(k+1) = G \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j x(k) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} G A_j x(k) \quad (4.20)$$

Si les relations (4.17) et (4.18) sont satisfaites $\forall j = 1, \dots, 2^m$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} G A_j x(k) &= \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} H_j G x(k) \\ &\preceq \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} H_j \rho \\ &\preceq \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} \rho \end{aligned} \quad (4.21)$$

Comme $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} = 1$ on obtient $Gx(k+1) \preceq \rho$ et l'invariance de $S(G, \rho)$ par rapport à (4.10) et, par conséquent, par rapport au système (4.1) est prouvée.

(ii) - On a :

$$\mathcal{V}(x(k+1)) = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x(k+1)}{\rho_{(i)}} \right\} = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)} \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j x(k)}{\rho_{(i)}} \right\} \quad (4.22)$$

Si l'équation (4.17) est vérifiée on peut écrire :

$$\mathcal{V}(x(k+1)) = \max_i \left\{ \frac{\left(\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} H_j \right)_{(i)} Gx(k)}{\rho_{(i)}} \right\} \quad (4.23)$$

Puisque l'on a

$$\max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x}{\rho_{(i)}} \right\} \geq \frac{G_{(i)}x}{\rho_{(i)}} , \quad \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V}(x) \geq \frac{G_{(i)}x}{\rho_{(i)}}$$

et puisque $\rho_{(i)} > 0, \forall i$, on a

$$\mathcal{V}(x)\rho \geq Gx$$

Donc on peut écrire :

$$\mathcal{V}(x(k+1)) \leq \max_i \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} H_{j(i)} \mathcal{V}(x(k)) \rho}{\rho_{(i)}} \right\} = \mathcal{V}(x(k)) \max_i \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} H_{j(i)} \rho}{\rho_{(i)}} \right\}$$

Alors, si la relation (4.18) est satisfaite on a $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} H_{j(i)} \rho \leq \rho_{(i)}$ et, par conséquent,

$$\mathcal{V}(x(k+1)) \leq \mathcal{V}(x(k))$$

La non-croissance de $\mathcal{V}(x(k))$ le long des trajectoires du système (4.1) est donc prouvée.

□

Ce résultat est analogue à celui présenté dans [72] en considérant des systèmes linéaires incertains. Dans ce cas, les condition (4.17) et (4.18) sont aussi nécessaires. Cependant, d'après la remarque 4.1, les conditions (4.17) et (4.18) ne peuvent être que suffisantes pour le cas des systèmes saturés.

Dans le chapitre 3, nous avons insisté sur le fait que la garantie de l'invariance positive d'un ensemble par rapport au système saturé n'est pas suffisante pour pouvoir conclure sur la stabilité locale dans ce dernier. Un moyen de garantir la convergence asymptotique vers l'origine des trajectoires initialisées dans $S(G, \rho)$ est donc d'assurer que l'ensemble considéré est aussi contractif.

Proposition 4.2 : [92] *S'il existe des matrices $H_j \in \mathbb{R}^{g \times g}$ à éléments non-négatifs telles que :*

$$H_j G = G A_j \quad (4.24)$$

$$H_j \rho \prec \rho \quad (4.25)$$

pour $j = 1, \dots, 2^m$, alors

(i) *Le polyèdre $S(G, \rho)$ est contractif par rapport au système (4.1) ;*

(ii) *La fonction*

$$\mathcal{V}(x(k)) \triangleq \max_i \left\{ \frac{G_{(i)} x(k)}{\rho_{(i)}} \right\}, \quad (i = 1, \dots, g) \quad (4.26)$$

est strictement décroissante le long des trajectoires du système (4.1).

Démonstration :

Si on prend en compte la définition de la contractivité et l'inégalité stricte (4.25), la démonstration de cette proposition suit les mêmes lignes que celle de la proposition 4.1.

□

L'interprétation géométrique de la condition (ii) de la proposition 4.2 est la suivante: considérons qu'à l'instant k , $\mathcal{V}(x(k)) = \lambda_k$ avec $\lambda_k \leq 1$. Cela implique que $x(k)$ appartient à la frontière d'un domaine homothétique $S(G, \lambda_k \rho)$. Si maintenant $\mathcal{V}(x(k))$ est décroissante le long des trajectoires du système (4.1) on obtient $\mathcal{V}(x(k+1)) = \lambda_{k+1} < \lambda_k$, ce qui veut dire que $x(k+1)$ appartient à la frontière de $S(G, \lambda_{k+1} \rho)$ et, par conséquent, à l'intérieur de $S(G, \lambda_k \rho)$. Ainsi, à chaque instant la trajectoire du système se contracte à l'intérieur du polyèdre. Cependant, notons que ce résultat ne nous permet pas de conclure sur la stabilité du système saturé car aucune hypothèse n'a été faite sur la matrice G . En effet, si $\text{Ker } G \neq \{0\}$, $S(G, \rho)$ est non-borné et, d'après ce que nous avons vu dans la section 3.6, il peut exister des directions d'instabilité dans $S(G, \rho)$, $\mathcal{V}(x(k))$ étant décroissante. Ceci signifie que $\mathcal{V}(x(k))$ n'est pas nécessairement une fonction de Lyapunov.

Remarque 4.2 : Notons que les conditions de contractivité pour le système linéaire $x(k+1) = (A + BF)x(k)$

$$HG = G(A + BF) \quad (4.27)$$

$$H\rho \prec \rho \quad (4.28)$$

sont des conditions nécessaires pour la contractivité du polyèdre $S(G, \rho) \not\subseteq S(F, u_{\min}, u_{\max})$ par rapport au système saturé puisque $\gamma_j = 1_m$ implique $A_j = (A + BF)$.

Remarque 4.3 : Si $S(G, \rho)$ vérifie la relation (4.17) ou (4.24) alors $\text{Ker } G$ est A_j -invariant.

4.3.2 Stabilité asymptotique locale

Nous venons d'insister sur le fait que l'invariance positive et la contractivité ne sont pas suffisantes pour garantir le comportement asymptotiquement stable du système saturé dans un ensemble polyédral. Nous allons donc fournir des conditions supplémentaires qui nous permettront de conclure quant à la stabilité asymptotique locale du système saturé.

Proposition 4.3 : [92] Si $S(G, \rho)$ est compact et contient l'origine ($\rho_{(i)} > 0$, $\forall i = 1, \dots, g$), le système (4.1) est asymptotiquement stable dans le domaine $S(G, \rho)$ s'il existe des matrices $H_j \in \mathbb{R}^{g \times g}$ à éléments non-négatifs vérifiant les relations (4.24) et (4.25).

Démonstration :

En considérant les démonstrations des propositions 3.1 et 4.1 la preuve est immédiate.

□

Considérons un scalaire ϵ , $0 < \epsilon < 1$. Si les relations (4.24) et (4.25) de la proposition 4.2 sont substituées par :

$$H_j G = G A_j \quad (4.29)$$

$$H_j \rho \preceq \epsilon \rho \quad (4.30)$$

nous dirons que l'ensemble $S(G, \rho)$ est ϵ -contractif par rapport au système (4.1). Ce scalaire ϵ correspond à un indice de vitesse de convergence à l'origine ou encore à un indice de contraction. Cela équivaut à dire que la fonction $\mathcal{V}(x(k))$ décroît avec un taux plus grand ou égal à ϵ , c'est-à-dire, $\mathcal{V}(x(k+1)) \leq \epsilon \mathcal{V}(x(k))$.

En considérant la remarque 4.3, si le polyèdre $S(G, \rho)$ est non-borné¹ nous pouvons, à partir des résultats présentés dans la section 3.6, énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 4.1 : *Soit $S(G, \rho)$ un domaine non-borné satisfaisant les relations (4.24) et (4.25). Si les valeurs propres associées à la restriction de la matrice A dans le sous-espace $\text{Ker } G$ sont asymptotiquement stables, alors $S(G, \rho)$ est une région de stabilité asymptotique du système saturé (4.1).*

4.3.3 Expansion homothétique

Dans cette section, nous allons étudier le problème 4.2. A partir des résultats présentés dans la section précédente, nous proposons maintenant une méthode pour calculer le coefficient maximal d'homothétie, $\delta_{max} \geq \beta_{max}$, pour lequel on garantit la satisfaction des relations (4.24) et (4.25) ((4.17) et (4.18)) et, par conséquent, la contractivité (l'invariance positive) du polyèdre $S(G, \delta_{max}w)$ par rapport au système (4.1).

D'après la proposition 4.1, on doit d'abord, pour un scalaire δ candidat, déterminer les matrices A_j associées au domaine $S(G, \delta w)$. Dans une deuxième étape, on doit vérifier l'existence des matrices H_j qui satisfont les relations (4.24) et (4.25) (ou (4.17) et (4.18)).

Ainsi, on peut chercher itérativement le plus grand δ , pour lequel on est capable de trouver les matrices H_j satisfaisant (4.24) et (4.25) (ou (4.17) et (4.18)).

Procédure pour déterminer les matrices A_j

D'après (4.8), afin de déterminer les matrices A_j , on doit déterminer les scalaires $(\alpha_{min})_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, en considérant les états qui appartiennent à $S(G, \delta w)$.

1. Rappelons que pour utiliser la représentation polytopique pour conclure sur l'invariance positive et/ou la contractivité de $S(G, \rho)$ lorsque il est non-borné, il doit être non-borné seulement dans les directions associées à $\text{Ker } F$.

Par définition, le scalaire $(\alpha_{min})_{(i)}$ est obtenu pour le maximum $F_{(i)}x(k)$ ou le minimum $F_{(i)}x(k)$ dans $S(G, \delta w)$. Considérons donc les deux programmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{max_i} = \max_x F_{(i)}x \\ \text{sous } Gx \preceq \delta w \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{min_i} = \min_x F_{(i)}x \\ \text{sous } Gx \preceq \delta w \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Alors, on a $(\alpha_{min})_{(i)} \triangleq \min \left\{ \frac{-u_{min(i)}}{y_{min_i}}, \frac{u_{max(i)}}{y_{max_i}} \right\}, \forall i = 1, \dots, m$.

On peut donc donner une interprétation géométrique pour $(\alpha_{min})_{(i)}$ ou plutôt pour son inverse $\zeta_{(i)} = (\alpha_{min})_{(i)}^{-1}$: $\zeta_{(i)}$ est le coefficient d'extension de la $i^{\text{ème}}$ facette du polyèdre $S(F, u_{min}, u_{max})$ pour lequel cette facette est "tangente" au polyèdre $S(G, \delta w)$. Ceci est illustré par la figure 4.1.

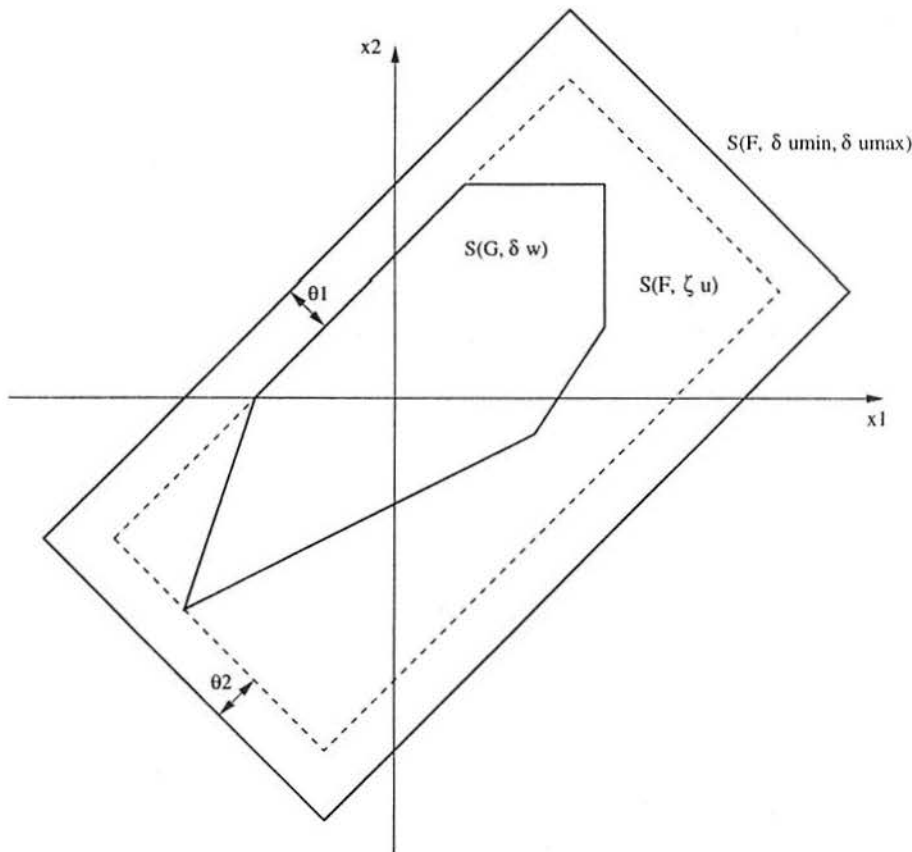


FIG. 4.1 - $S(G, \delta w)$, $S(F, \zeta u)$, $S(F, \delta u_{min}, \delta u_{max})$

Définissons le polyèdre $S(F, \zeta u) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; -\zeta_{(i)}u_{min(i)} \leq F_{(i)}x \leq \zeta_{(i)}u_{max(i)}, i = 1, \dots, m\}$. Ainsi, puisque nous supposons que $S(G, w)$ satisfait l'hypothèse 4.1,

la condition d'inclusion suivante est satisfaite :

$$S(G, \delta w) \subseteq S(F, \zeta u) \subseteq S(F, \delta u_{min}, \delta u_{max}) \quad (4.32)$$

Dans cette approche, pour chaque δ , on doit trouver le polyèdre $S(F, \zeta u)$ qui est "tangent" à $S(G, \delta w)$. Cela peut être fait à partir de la solution des programmes linéaires (4.31). Cependant, il n'est pas nécessaire de faire ce calcul à chaque instant. Pour cela considérons les programmes linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{0max_i} = \max_x F_{(i)}x \\ \text{sous } Gx \preceq w \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{0min_i} = \min_x F_{(i)}x \\ \text{sous } Gx \preceq w \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Définissons :

$$\theta_i \triangleq \min \left\{ \frac{-u_{min(i)}}{y_{0min_i}}, \frac{u_{max(i)}}{y_{0max_i}} \right\} \quad (4.34)$$

Notons que puisque $S(G, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$, on a $\theta_i \geq 1$.

Considérons maintenant le polyèdre

$$S(F, \bar{u}_{max}, \bar{u}_{min}) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; -\bar{u}_{min} \preceq Fx \preceq \bar{u}_{max}\} \quad (4.35)$$

avec $\bar{u}_{min(i)} = \theta_i^{-1} u_{min(i)}$ et $\bar{u}_{max(i)} = \theta_i^{-1} u_{max(i)}$.

Ainsi le polyèdre $S(F, \bar{u}_{max}, \bar{u}_{min})$ est "tangent" au domaine $S(G, w)$. Par conséquent on peut appliquer le même coefficient d'homothétie δ et donc satisfaire :

$$S(G, \delta w) \subseteq S(F, \delta \bar{u}_{min}, \delta \bar{u}_{max}) = S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha) \quad (4.36)$$

avec

$$(\alpha(\delta)_{min})_{(i)} \triangleq (\theta_i/\delta) \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (4.37)$$

Procédure pour déterminer les matrices H_j

D'après la proposition 4.2 s'il existe pour chaque j , $j = 1, \dots, 2^m$, au moins une matrice H_j à éléments non-négatifs vérifiant les relations (4.24) et (4.25) alors $S(G, \delta w)$ est contractif par rapport au système (4.1). On peut formuler le programme linéaire suivant pour trouver les matrices H_j :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \epsilon \\ \text{sous} \\ H_j G = G A_j \\ H_j \delta w \preceq \epsilon \delta w \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Si $\forall j$, il existe $0 < \epsilon < 1$, alors l'ensemble $S(G, \delta w)$ est contractif pour le système (4.1). Sinon, nous devons "diminuer" le scalaire δ .

Algorithme pour calculer δ_{max}

Basé sur ce que nous venons de présenter précédemment, en considérant un scalaire $\mu_0 \geq \epsilon_0$, nous proposons maintenant un algorithme pour obtenir le coefficient maximal d'homothétie, δ_{max} , tel que $S(G, \delta_{max} w)$ est μ_0 -contractif par rapport au système (4.1).

Algorithme 4.1 :

- **Pas 0** - *Initialisation* : $\delta = \delta_0$, *précision*, $dif = \delta_0/2$
- **Pas 1** - *Déterminer les θ_i ($i = 1, \dots, m$)*
- **Pas 2** - *Déterminer les matrices A_j ($j = 1, \dots, 2^m$) à partir des $(\alpha(\delta)_{min})_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, calculés par l'équation (4.37)*
- **Pas 3** - *Pour chaque $j = 1, \dots, 2^m$, résoudre le programme linéaire (4.38).*
 - *Si $\epsilon \leq \mu_0$, $\forall j = 1, \dots, 2^m$, alors aller au pas 4.*
 - *Si non faire :*
 - $\delta_{ant} = \delta$
 - $\delta = \delta - |dif|/2$
 - $dif = \delta - \delta_{ant}$
 - *Retourner au pas 2*
- **Pas 4** -
 - *Si dans toutes les itérations précédentes on a obtenu $\epsilon \leq \mu_0$, $\forall j = 1, \dots, 2^m$, alors faire :*
 - $\delta_{ant} = \delta$
 - $\delta = \delta * 2$
 - $dif = \delta - \delta_{ant}$
 - *Retourner au pas 2*
 - *Si non faire :*
 - *Si (précision < dif) faire :*
 - $\delta_{ant} = \delta$
 - $\delta = \delta + |dif|/2$
 - $dif = \delta - \delta_{ant}$

- Retourner au pas 2
- Sinon :
 - $\delta_{max} = \delta$
 - FIN

Si l'ensemble de départ $S(G, w)$ est compact et contient l'origine, d'après la proposition 4.3 l'ensemble μ_0 -contractif $S(G, \delta_{max}w)$, obtenu à partir de l'application de l'algorithme 4.1, est un domaine de stabilité asymptotique et de comportement non-linéaire pour le système saturé (4.1).

Remarque 4.4 : *La modélisation du système saturé par un système polytopique a permis de formuler des conditions uniquement suffisantes pour l'invariance positive et la contractivité de domaines polyédraux. D'après la remarque 4.1, le système polytopique est une représentation conservative pour le système saturé. Ainsi, si on considère un polyèdre $S(G, w)$, l'ensemble $S(G, \delta_{max}w)$, déterminé à partir de l'application de l'algorithme 4.1, n'est pas forcément l'ensemble homothétique maximal de $S(G, w)$ qui préserve la propriété de contractivité (invariance). En effet, $S(G, \delta_{max}w)$ est seulement l'ensemble homothétique maximal de $S(G, w)$ qui satisfait les relations (4.29) et (4.30) avec $\epsilon = \mu_0$.*

Remarque 4.5 : *Puisque l'ensemble de départ $S(G, w)$ est par hypothèse ϵ_0 -contractif, et puisque nous supposons $\mu_0 \geq \epsilon_0$, la convergence de l'algorithme 4.1 est garantie. En fait, dans le pire des cas on obtient $\delta_{max} = \beta_{max}$ et $\mu_0 = \epsilon_0$.*

4.3.4 Expansion non-homothétique

Maintenant nous abordons le problème 4.3. La méthode proposée dans la section 4.3.3 fournit un coefficient δ_{max} qui résout le problème 4.2, c'est-à-dire, elle donne le coefficient maximal d'homothétie pour lequel l'ensemble $S(G, \delta_{max}w)$ est μ_0 -contractif pour le système (4.1). En considérant ce coefficient maximal d'homothétie on obtient les coefficients de saturation $(\alpha_{min})_{(i)}, \forall i = 1, \dots, m$, par rapport à $S(G, \delta_{max}w)$. Considérons le polyèdre $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ obtenu à partir de ces coefficients. Nous nous intéressons donc à déterminer le plus grand ensemble μ -contractif ($\mu > \mu_0$) pour le système (4.1) vérifiant les relations (4.29) et (4.30) et contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$.

Les résultats théoriques, qui sont présentés dans ce qui suit, sont basés sur les travaux de Gilbert et Tan [37] et Blanchini [13],[15] relatifs à la détermination d'ensembles maximaux d'invariance et de contractivité pour des systèmes linéaires. Nos résultats peuvent être considérés comme une extension de ces travaux au cas des systèmes polytopiques et, par conséquent, au cas des systèmes saturés. Nous allons montrer que sous l'hypothèse d'observabilité de la paire (F, A) , l'ensemble maximal μ -contractif pour le système (4.1), vérifiant les relations (4.29) et (4.30) et contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$, est borné et déterminable en un nombre fini de pas. Ces résultats nous permettront ensuite de formuler un algorithme.

La méthode

L'idée centrale de la méthode est d'ajouter, à chaque itération, des facettes au polyèdre déterminé dans l'itération précédente de façon à s'approcher de l'ensemble cherché.

Considérons un ensemble $S(G, \rho)$ qui contient l'origine et qui est un ensemble compact et μ_0 -contractif pour le système saturé (4.1). A partir des coefficients de saturation $(\alpha_{min})_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, que nous obtenons par rapport à $S(G, \rho)$, définissons :

- $\Xi \triangleq \{A_1, \dots, A_{2^m}\}$: l'ensemble des matrices $A_j = A + BD_j(\alpha_{min})F$, $j = 1, \dots, 2^m$.
- $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$: la région de validité du modèle polytopique associée au vecteur α_{min}

L'ensemble de départ est noté $S(P_0, \varphi_0)$ et correspond au polyèdre $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$. Ainsi, procédons à quelques définitions préliminaires :

- $S(P_0, \varphi_0) = \{x \in \mathbb{R}^n ; P_0 x \preceq \varphi_0\}$
- $P_0 = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix}$; $\varphi_0 = \begin{bmatrix} u_{max}^\alpha \\ u_{min}^\alpha \end{bmatrix}$
- $T_0 \triangleq P_0$, $r_0 \triangleq \varphi_0$, $m_0 \triangleq 2m$
- L'ensemble d'indices $\mathcal{I}_0 \triangleq \{1, \dots, m_0\}$ correspond au nombre de lignes de T_0 .
- L'ensemble d'indices $\mathcal{J} \triangleq \{1, \dots, 2^m\}$ correspond au nombre de matrices A_j .

Considérons maintenant les programmes linéaires suivants :

$$PL_0(i, j) : \begin{cases} y_{0,i,j} = \max_x T_{0(i)} A_j x \\ \text{soumis à} \\ x \in S(P_0, \varphi_0) \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_0, j \in \mathcal{J} \quad (4.39)$$

A partir des programmes linéaires $PL_0(i, j)$ définissons :

- L'ensemble d'indices $\mathcal{J}_{0,i} \triangleq \{j \in \mathcal{J} ; y_{0,i,j} > \mu r_{0(i)}\}$
- $S(T_1, r_1)_{i,j} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; T_{0(i)} A_j x \leq \mu r_{0(i)}\}$
- $S(T_1, r_1)_i \triangleq \bigcap_{j \in \mathcal{J}_{0,i}} S(T_1, r_1)_{i,j}$
- $S(T_1, r_1) \triangleq \bigcap_{i \in \mathcal{I}_0} S(T_1, r_1)_i$

Ainsi, à partir de la résolution des programmes linéaires $PL_0(i, j)$, nous déterminons quelles sont les contraintes $T_{0(i)} A_j \leq \mu r_{0(i)}$ qui ne sont pas satisfaites et, ensuite, nous les groupons en définissant l'ensemble $S(T_1, r_1)$. Autrement dit, nous vérifions si pour tout $x(k) \in S(P_0, \varphi_0)$ on a $x(k+1) \in S(P_0, \varphi_0)$ et en plus s'il contracte vers l'intérieur du domaine avec un taux de contraction au moins égal à μ . Une manière de vérifier cela est d'analyser si toutes les contraintes $T_{0(i)} x(k+1)$ sont plus petites ou égales à $\mu r_{0(i)}$. Puisque $x(k+1)$ est donné par le modèle polytopique (4.10), cela peut être fait en testant, pour chaque matrice A_j , si $T_{0(i)} A_j \leq \mu r_{0(i)}$, $\forall i \in \mathcal{I}_0, \forall x(k) \in S(P_0, \varphi_0)$. S'il existe des contraintes qui sont violées, elles doivent donc être considérées dans la prochaine itération afin de limiter le domaine de recherche. Ainsi, l'ensemble qui doit être considéré dans l'itération suivante sera :

$$S(P_1, \varphi_1) \triangleq S(P_0, \varphi_0) \cap S(T_1, r_1) = \{x \in \mathbb{R}^n ; P_1 x \preceq \varphi_1\} \quad (4.40)$$

avec $P_1 \triangleq \begin{bmatrix} P_0 \\ T_1 \end{bmatrix}$; $\varphi_1 \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ r_1 \end{bmatrix}$, $T_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $r_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$.

Si on continue avec ce même raisonnement, une série de polytopes $S(P_k, \varphi_k)$ peut être définie. Le premier élément de la série est $S(P_0, \varphi_0)$ et le $k^{\text{ème}}$ élément est défini génériquement par :

$$S(P_k, \varphi_k) \triangleq S(P_{k-1}, \varphi_{k-1}) \cap S(T_k, r_k) = \{x \in \mathbb{R}^n ; P_k x \preceq \varphi_k\} \quad (4.41)$$

avec $P_k \triangleq \begin{bmatrix} P_{k-1} \\ T_k \end{bmatrix}$, $\varphi_k \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_{k-1} \\ r_k \end{bmatrix}$, $T_k \in \mathbb{R}^{m_k \times n}$, $P_k \in \mathbb{R}^{n l_{pk} \times n}$, $r_k \in \mathbb{R}^{m_k}$, $\varphi_k \in \mathbb{R}^{n l_{pk}}$.

Le $(k + 1)^{\text{ème}}$ élément peut donc être déterminé en considérant les programmes linéaires suivants :

$$PL_k(i, j) : \begin{cases} y_{k,i,j} = \max_x T_{k(i)} A_j x \\ \text{soumis à} \\ x \in S(P_k, \varphi_k) \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_k, j \in \mathcal{J} \quad (4.42)$$

et en définissant

- $\mathcal{I}_k \triangleq \{1, \dots, m_k\}$.
- $\mathcal{J}_{k,i} \triangleq \{j \in \mathcal{J} ; y_{k,i,j} > \mu r_{k(i)}\}$
- $S(T_{k+1}, r_{k+1})_{i,j} \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; T_{k(i)} A_j x \leq \mu r_{k(i)}\}$
- $S(T_{k+1}, r_{k+1})_i \triangleq \bigcap_{j \in \mathcal{J}_{k,i}} S(T_{k+1}, r_{k+1})_{i,j}$
- $S(T_{k+1}, r_{k+1}) \triangleq \bigcap_{i \in \mathcal{I}_k} S(T_{k+1}, r_{k+1})_i$

Ainsi, $S(P_{k+1}, \varphi_{k+1})$ est défini par :

$$S(P_{k+1}, \varphi_{k+1}) \triangleq S(P_k, \varphi_k) \cap S(T_{k+1}, r_{k+1}) \quad (4.43)$$

ou de façon équivalente par :

$$S(P_{k+1}, \varphi_{k+1}) = \{x \in S(P_k, \varphi_k) ; T_{k(i)} A_j x \leq \mu r_{k(i)} ; \forall i \in \mathcal{I}_k ; \forall j \in \mathcal{J}\} \quad (4.44)$$

Résultats Théoriques

Remarquons que, par construction, on a $S(P_{k+1}, \varphi_{k+1}) \subseteq S(P_k, \varphi_k)$. En outre, s'il existe k^* tel que $\mathcal{J}_{k^*,i} = \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}_{k^*}$ on a $S(P_k, \varphi_k) = S(P_{k^*}, \varphi_{k^*}), \forall k \geq k^*$.

Nous allons maintenant démontrer que s'il existe un tel indice k^* , le polyèdre obtenu $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ vers lequel la série converge est μ -contractif par rapport au système (4.1) ou (4.10).

Proposition 4.4 : [92] *S'il existe k^* tel que $\mathcal{J}_{k^*,i} = \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}_{k^*}$, alors le polyèdre $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ est μ -contractif pour le système (4.1) ou (4.10).*

Démonstration :

Considérons le programme dual du programme linéaire (4.42) :

$$DLP_k(i, j) : \begin{cases} y_{k,j,i} = \max_{c_{k,j,i}} c_{k,j,i} \varphi_k \\ \text{soumis à} \\ c_{k,j,i} P_k = T_{k(i)} A_j \\ c_{k,j,i} \geq 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

où le variable d'optimisation est $c_{k,j,i}$.

Soit maintenant les matrices $H1_{j,k}$ et $H2_{j,k}$ dont chaque ligne est définie, avec $i \in \mathcal{I}_k$, $j \in \mathcal{J}$, comme :

- Si $y_{k,j,i} \leq \mu r_{k(i)}$ alors $\begin{cases} H1_{j,k(i)} \triangleq c_{k,j,i} \\ H2_{j,k(i)} \triangleq 0_{m_{k+1}} \end{cases}$
- Si $y_{k,j,i} > \mu r_{k(i)}$ alors $\begin{cases} H1_{j,k(i)} \triangleq 0_{nl_{pk}} \\ H2_{j,k(i)} \triangleq I_{m_{k+1}(l)} \end{cases}$

où l correspond à la $l^{\text{ème}}$ ligne de la matrice T_{k+1} , laquelle est donnée par $T_{k(i)} A_j$.

A partir de la définition ci-dessus, si $y_{j,k,i} \leq \mu r_{k(i)}$ les relations suivantes sont satisfaites :

$$[H1_{j,k(i)} \quad 0_{m_{k+1}}] \begin{bmatrix} P_k \\ T_{k+1} \end{bmatrix} = T_{k(i)} A_j \quad (4.46)$$

$$[H1_{j,k(i)} \quad 0_{m_{k+1}}] \begin{bmatrix} \varphi_k \\ r_{k+1} \end{bmatrix} \leq \mu r_{k(i)} \quad (4.47)$$

d'autre part, si $y_{k,j,i} > \mu r_{k(i)}$ on vérifie

$$[0_{nl_{pk}} \quad 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} P_k \\ * \\ * \\ \vdots \\ T_{k(i)} A_j \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} = [0_{nl_{pk}} \quad I_{m_{k+1}(l)}] \begin{bmatrix} P_k \\ T_{k+1} \end{bmatrix} = T_{k(i)} A_j \quad (4.48)$$

$$[0_{nl_{pk}} \quad I_{m_{k+1}(l)}] \begin{bmatrix} \varphi_k \\ r_{k+1} \end{bmatrix} = r_{k+1}(l) = \mu r_{k(i)} \quad (4.49)$$

Ainsi, pour chaque k définissons la matrice $H_{j,k}$:

$$H_{j,k} \triangleq \begin{bmatrix} H_{j,k-1} & 0_{nl_{pk} \times m_{k+1}} \\ H1_{j,k} & H2_{j,k} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

En remarquant que si $k = k^*$, $H2_{j,k^*}$ n'est pas définie et $H_{j,k^*} = \begin{bmatrix} H_{j,k^*-1} \\ H1_{j,k^*} \end{bmatrix}$, d'après la définition de $H_{j,k}$, donné en (4.50), il existe des matrices H_{j,k^*} , $j \in \mathcal{J}$ qui satisfont

$$H_{j,k^*} P_{k^*} = P_{k^*} A_j \quad (4.51)$$

$$H_{j,k^*} \varphi_{k^*} \preceq \mu \varphi_{k^*} \quad (4.52)$$

Ainsi, selon la proposition 4.2, la μ -contractivité de $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ par rapport au système (4.1) (ou (4.10)) est garantie.

□

Maintenant, nous montrons sous quelles conditions l'ensemble $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ est déterminable en un nombre fini de pas. Pour cela il nous faut présenter quelques résultats préliminaires.

Lemme 4.1 : Soit $\mathcal{V}(x) = \max_i \left\{ \frac{G^{(i)}x}{\rho^{(i)}} \right\}$ une fonction de Lyapunov μ_0 -contractive commune à un ensemble de systèmes du type

$$x(k+1) = A_j x(k) \quad A_j \in \Xi \quad (4.53)$$

Si $x \in S(G, \eta\rho)$, $\eta > 0$, alors²

$$\left(\prod_{j=1}^k A_j \right) x \in \mu_0^k S(G, \eta\rho) = S(G, \mu_0^k \eta\rho) \quad (4.54)$$

Démonstration :

2. Rappelons que $\prod_{j=1}^k A_j$ dénote un produit quelconque de k matrices A_j , $A_j \in \Xi$

Si $x \in S(G, \eta\rho)$, $\eta > 0$, alors $\mathcal{V}(x) \leq \eta$. En outre, comme $\mathcal{V}(x)$ est une fonction de Lyapunov μ_0 -contractive pour tous les systèmes (4.53) on a $\mathcal{V}(A_j x) \leq \mu_0 \mathcal{V}(x) \leq \mu_0 \eta$, $\forall j = 1, \dots, 2^m$. Cela implique que $A_j x \in \mu_0 S(G, \eta\rho)$. Puisque ce raisonnement peut être appliqué d'une façon récursive on a $(\prod_{j=1}^k A_j)x \in \mu_0^k S(G, \eta\rho) = S(G, \mu_0^k \eta\rho)$.

□

Corollaire 4.2 : Si $\mathcal{V}(x) = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x}{\rho_{(i)}} \right\}$ est une fonction de Lyapunov μ_0 -contractive commune aux systèmes (4.53) alors :

(i) $(\prod_{j=1}^k A_j)x \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\mathcal{V}(x)$ est une fonction de Lyapunov μ_0 -contractive pour le système polytopique (4.10) avec $A_j \in \Xi$.

Lemme 4.2 : Si la paire (F, A) est observable alors les paires (F, A_j) sont aussi observables $\forall A_j \in \Xi$.

Démonstration :

Par définition [26], si (F, A) est observable on a

$$x^T \begin{bmatrix} F^T & A^T F^T & \dots & (A^{n-1})^T F^T \end{bmatrix} = 0$$

si et seulement si $x = 0$.

Supposons maintenant que la paire $(F, A_j) = (F, (A + BD(\gamma_j)F))$ n'est pas observable. Alors $\exists x \neq 0$ tel que :

$$\begin{bmatrix} F \\ F(A + BD(\gamma_j)F) \\ \vdots \\ F(A + BD(\gamma_j)F)^{n-1} \end{bmatrix} x = 0 \quad (4.55)$$

ceci implique que

$$\begin{bmatrix} F \\ FA \\ \vdots \\ FA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0$$

ce qui représente une contradiction par rapport à l'hypothèse d'observabilité de la paire (F, A) .

□

Lemme 4.3 : *Si la paire (F, A) est observable, alors le plus grand ensemble polyédral μ -contractif pour le système (4.10) contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ est borné.*

Démonstration :

Si $\text{rang}(F) = n$ le polyèdre $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ est borné et, par conséquent, tous les ensembles invariants qu'il contient sont aussi bornés.

D'autre part, si $\text{rang}(F) < n$ on a $\text{Ker } F \neq \{0\}$ et donc $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ est non-borné dans les directions de $\text{Ker } F$. Une condition nécessaire pour qu'un polyèdre non-borné contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ soit invariant pour le système (4.10) est qu'il existe un sous-espace non vide A_j -invariant, $\forall j = 1, \dots, 2^m$, contenu dans $\text{Ker } F$ [23],[22]. Pour cela il faut que toutes les paires (F, A_j) soient non-observables. Cependant, sous l'hypothèse d'observabilité de la paire (F, A) , d'après le lemme 4.2 cela n'est pas possible et, par conséquent, le plus grand ensemble polyédral μ -contractif contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ est forcément borné.

□

Théorème 4.1 : [92] *Si la paire (F, A) est observable et $\mathcal{V}(x) = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x}{\rho_{(i)}} \right\}$ est une fonction de Lyapunov μ_0 -contractive pour le système polytopique (4.10) alors si on considère $\mu > \mu_0$:*

- (i) *Il existe k^* tel que $S(P_k, \varphi_k) = S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$, $\forall k \geq k^*$.*
- (ii) *$S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ est le plus grand ensemble μ -contractif contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$.*
- (iii) *$S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ est borné.*

Démonstration :

(i) Considérons les polyèdres suivants :

$$S(Q_j, q_{min}, q_{max}) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; -q_{min} \preceq Q_j x \preceq q_{max}\} \quad (4.56)$$

$$\text{avec } q_{\min} = \begin{bmatrix} u_{\min}^{\alpha} \\ \mu u_{\min}^{\alpha} \\ \vdots \\ \mu^{n-1} u_{\min}^{\alpha} \end{bmatrix}, Q_j = \begin{bmatrix} F \\ F A_j \\ \vdots \\ F A_j^{n-1} \end{bmatrix} \text{ et } q_{\max} = \begin{bmatrix} u_{\max}^{\alpha} \\ \mu u_{\max}^{\alpha} \\ \vdots \\ \mu^{n-1} u_{\max}^{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Puisque (F, A) est observable, d'après le lemme 4.2, la paire (F, A_j) est aussi observable et, par conséquent, $S(Q_j, q_{\min}, q_{\max})$ est un polyèdre borné. Par construction, on a

$$S(P_{n-1}, \varphi_{n-1}) \subseteq S(Q_j, q_{\min}, q_{\max})$$

cette inclusion implique qu'il existe $\bar{k} \leq n-1$ tel que $S(P_{\bar{k}}, \varphi_{\bar{k}})$ est borné.

Puisque $\mathcal{V}(x)$ est une fonction de Lyapunov, $S(G, \rho)$ est un polyèdre compact. Alors, il existe $\nu > 0$ tel que $S(P_{\bar{k}}, \varphi_{\bar{k}}) \subseteq S(G, \nu\rho)$. Le domaine $S(G, \nu\rho)$ est le plus petit domaine homothétique à $S(G, \rho)$ qui contient $S(P_{\bar{k}}, \varphi_{\bar{k}})$.

D'après le lemme 4.1 et comme $\mu > \mu_0$, il existe k^* tel que :

$$\left(\prod_{j=1}^{k^*+1} A_j \right) S(G, \nu\rho) \subset \mu_0^{k^*+1} S(G, \nu\rho) \subset \mu^{k^*+1} S(F, u_{\min}^{\alpha}, u_{\max}^{\alpha}) \quad (4.57)$$

Comme $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*}) \subseteq S(P_{\bar{k}}, \varphi_{\bar{k}}) \subseteq S(G, \nu\rho)$. Cela implique que $\forall x \in \left(\prod_{j=1}^{k^*+1} A_j \right) S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ on a :

$$-\mu^{k^*+1} u_{\min}^{\alpha} \preceq Fx \preceq \mu^{k^*+1} u_{\max}^{\alpha}$$

Autrement dit on a, $\forall i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \max_{x \in S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})} F_{(i)} \left(\prod_{j=1}^{k^*+1} A_j \right) x &\leq \mu^{k^*+1} u_{\max}^{\alpha(i)} \\ \text{et} \\ \min_{x \in S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})} F_{(i)} \left(\prod_{j=1}^{k^*+1} A_j \right) x &\geq -\mu^{k^*+1} u_{\min}^{\alpha(i)} \end{aligned}$$

Alors, par construction,

$$S(P_{k^*+1}, \varphi_{k^*+1}) = S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$$

et donc $S(P_k, \varphi_k) = S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$, $\forall k \geq k^*$.

(ii) En considérant toutes les combinaisons possibles de $\lambda_{j,k}$ (avec $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} = 1$ et $0 \leq \lambda_{j,k} \leq 1$, $\forall j = 1, \dots, 2^m$, $\forall k$), l'équation

$$x(k) = \left(\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j \right)^k x(0) \quad (4.58)$$

permet d'engendrer toutes les trajectoires possibles pour le système polytopique (4.10), ou de manière équivalente, permet de déterminer toutes les valeurs possibles pour l'état à l'instant k à partir d'une condition initiale $x(0)$.

Par construction, $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ peut être défini par :

$$S(P_{k^*}, \varphi_{k^*}) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; (\prod_{j=1}^k A_j)x \in \mu^k S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha), \forall k \geq k^*\} \quad (4.59)$$

D'après (4.58) et (4.59) nous pouvons conclure que :

$$S(P_{k^*}, \varphi_{k^*}) \triangleq \{x(0) \in \mathfrak{R}^n ; x(k) = (\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j)^k x(0) \in \mu^k S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha), \forall k \geq k^*\} \quad (4.60)$$

Supposons maintenant que $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ n'est pas le plus grand ensemble μ -contractif pour le système polytopique (4.10) contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$. Considérons que \mathcal{M} est cet ensemble. Ainsi $\exists \bar{x}(0) \in \mathcal{M}$ et $\bar{x}(0) \notin S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$. Puisque $\mathcal{M} \subset S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$, $\bar{x}(0) \in \mathcal{M}$ implique que $x(k) \in \mu^k S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$. Alors d'après (4.60) $\bar{x}(0) \in S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$, ce qui représente une contradiction.

(iii) D'après le lemme 4.3 le domaine $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ est borné puisque (F, A) est observable.

□

Comme $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ est le plus grand ensemble contractif contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ pour le système (4.10), nous pouvons établir le théorème suivant.

Théorème 4.2 : [92] Si la paire (F, A) est observable et $\mathcal{V}(x) = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x}{\rho_{(i)}} \right\}$ est une fonction de Lyapunov μ_0 -contractive pour le système polytopique (4.10) alors :

- (i) $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ est le plus grand ensemble μ -contractif ($\mu > \mu_0$) pour le système saturé (4.1) qui est contenu dans $S(F, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha)$ et satisfait les relations (4.24) et (4.25).
- (ii) $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ est une région de stabilité asymptotique pour le système saturé.

Démonstration :

En considérant la remarque 4.1, la preuve est immédiate à partir des démonstrations de la proposition 4.4 et du théorème 4.1.

□

Algorithme pour déterminer $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$

Supposons qu'à partir d'un ensemble $S(G, w)$ compact satisfaisant l'hypothèse 4.1 nous avons déterminé $S(G, \delta_{max}w)$ à partir de l'algorithme 4.1. Alors la fonction $\mathcal{V}(x) = \max_i \left\{ \frac{G^{(i)}x}{\rho^{(i)}} \right\}$, avec $\rho = \delta_{max}w$ est une fonction de Lyapunov μ_0 -contractive pour le système saturé. Comme $S(G, w)$ satisfait l'hypothèse 4.1 et est compact, la paire (F, A) est observable. Nous pouvons ainsi déterminer $S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ en utilisant l'algorithme suivant.

Algorithme 4.2 :

- **Pas 0 :** *Initialisation* : $T_0 = P_0$; $r_0 = \varphi_0$; $m_0 = 2m$; $\mathcal{I}_0 = \{1, \dots, m_0\}$.
- **Pas 1 :** Pour $i \in \mathcal{I}_k$ et $j \in \mathcal{J}$, résoudre les programmes linéaires (4.42).
- **Pas 2 :** *Définir*
 - $\mathcal{J}_{k,i} = \{j \in \mathcal{J} ; y_{ki,j} > \mu r_{k(i)}\}$
 - $l = 1$
- **Pas 3 :**
 - Si $\mathcal{J}_{k,i} = \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}_k$, alors :
 - $S(P_k, \varphi_k)$ est le plus grand ensemble μ -contractif
 - **FIN**
 - Sinon, aller au pas 4.
- **Pas 4 :** Pour chaque $j \in \mathcal{J}$, pour $i = 1$ jusqu'à $i = m_k$ faire
 - Si $j \in \mathcal{J}_{k,i}$:
 - $T_{k+1(l)} = T_{k(i)}A_j$
 - $r_{k+1(l)} = \mu r_{k(i)}$
 - $l = l + 1$
- **Pas 5 :**
 - *Définir*
 - $P_{k+1} = \begin{bmatrix} P_k \\ T_{k+1} \end{bmatrix}$; $\varphi_{k+1} = \begin{bmatrix} \varphi_k \\ r_{k+1} \end{bmatrix}$

- m_{k+1} = nombre de lignes de la matrice T_{k+1}
- $k = k + 1$

– Retourner au pas 1

4.4 Exemple numérique

Considérons le système étudié dans [96]; il est décrit par :

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les contraintes sur la commande sont définies par $u_{min} = u_{max} = 7$.

La matrice A est instable puisque $\sigma(A) = \{1 \pm j0.4\}$.

La matrice $F = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \end{bmatrix}$ est déterminée dans [96] dans le but de stabiliser le système et de rendre le polyèdre $S(G, w)$ défini par :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1.5 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1.5 & -2 \end{bmatrix} ; w = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

positivement invariant et contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$.

En choisissant $\mu_0 = 0.998$ et en appliquant l'algorithme 4.1 pour déterminer δ_{max} on obtient

$$\theta = 1 ; \delta_{max} = 1.8629 ; \alpha_{min} = 0.5368$$

Si maintenant on choisit $\mu = 0.999$, l'application de l'algorithme 4.2 nous donne

$S(P_{max}, \varphi_{max}) = S(P_{k^*}, \varphi_{k^*})$ défini par :

$$P_{max} = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \\ 0.4351 & 1.3096 \\ 0.6806 & -0.2501 \\ 0.6057 & 0.2865 \\ 0.5723 & 0.4991 \\ -0.2888 & 1.8350 \\ -0.4351 & -1.3096 \\ -0.6806 & 0.2501 \\ -0.6057 & -0.2865 \\ -0.5723 & -0.4991 \end{bmatrix} ; \varphi_{max} = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ 6.9930 \\ 6.9930 \\ 6.9790 \\ 6.9790 \\ 7.0000 \\ 6.9930 \\ 6.9930 \\ 6.9790 \\ 6.9790 \end{bmatrix}$$

La figure 4.2 dépeint les différents domaines.

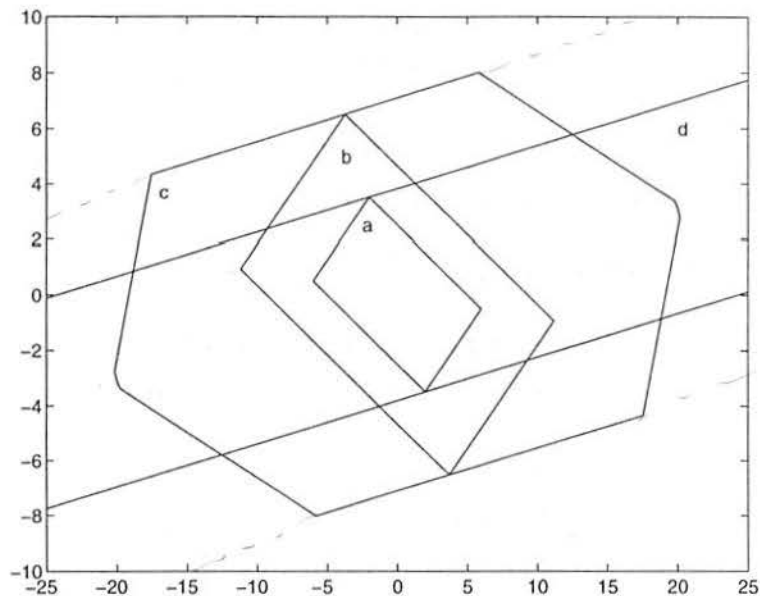


FIG. 4.2 – a. $S(G, w)$; b. $S(G, \delta_{max}w)$; c. $S(P_{max}, \varphi_{max})$; d. $S(F, u_{min}, u_{max})$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une technique pour la détermination de domaines polyédraux de comportement non-linéaire pour le système saturé dans lesquels la stabilité asymptotique du système est assurée. Le comportement non-linéaire

du système avec saturation des commandes est pris en compte par l'utilisation d'un modèle polytopique. Ce modèle permet de représenter toutes les trajectoires du système saturé dans un certain ensemble de l'espace d'état. Sur la base de cette modélisation, nous avons formulé des conditions suffisantes pour l'invariance positive, la contractivité et la stabilité asymptotique dans des ensembles polyédraux.

A partir de ces conditions nous avons proposé une méthode basée sur des schémas de programmation linéaire pour la détermination de régions de stabilité asymptotique. En supposant qu'un polyèdre contractif $S(G, w)$ contenu dans la région de linéarité du système saturé ait été déterminé en utilisant une des techniques existantes dans la littérature, la méthode proposée peut être décomposée en deux étapes principales :

- Une expansion homothétique de $S(G, w)$ dans la zone de comportement non-linéaire.
- La détermination de l'ensemble μ -contractif maximal par rapport à la représentation polytopique du système saturé.

Cette méthode d'analyse peut être étendue directement au cas où des incertitudes sur le modèle linéaire ou des perturbations additives sont présentes. Il est clair que, dans ce cas, nous allons obtenir des solutions plus conservatives. Par ailleurs, même si nous avons présenté la méthode en considérant un retour d'état, son application au cas d'un retour dynamique suit les mêmes étapes, moyennant la re-définition de la région de linéarité.

Conclusion de la partie II

Le principal avantage de l'approche par régions de saturation par rapport à celle par polytope de matrices est la nature nécessaire et suffisante des conditions établies. Cependant, ces conditions sont plus complexes à vérifier et demandent une quantité de calculs nettement supérieure à celle établie à partir de la représentation polytopique. Cela vient du fait qu'il faut, d'abord, déterminer les sommets d'un polytope et, ensuite, pour chacune des régions de saturation, résoudre $g * \dim(\mathcal{I}_j)$ programmes linéaires. Sachant que l'on a 3^m régions de saturation, si le polyèdre $S(G, w)$ a une intersection non-vide avec toutes les régions de saturation, on aura, au minimum, $3^m * g$ programmes linéaires à résoudre. D'autre part, le nombre de sommets et la complexité pour les calculer augmentent avec l'ordre du système et la quantité de contraintes qui définissent le polyèdre, c'est-à-dire, le nombre de lignes de G . Cependant, aujourd'hui il existe des algorithmes efficaces pour le calcul des sommets d'un polytope (voir par exemple [69] et [70] et leurs références). Par ailleurs, le temps de calcul n'est pas critique sachant que seule l'analyse du système avec des saturations est envisagée et que les algorithmes sont basés sur la programmation linéaire (ce qui, en général, ne pose pas de problèmes d'ordre numérique). C'est pourquoi, nous pensons que l'approche par régions de saturation peut parfaitement être mise en oeuvre avec les ressources informatiques actuelles.

Les tests des conditions formulées avec l'approche par polytope de matrices sont moins complexes. Par conséquent, la mise en oeuvre des algorithmes formulés à partir de cette approche est plus facile et directe. En effet, il n'est pas nécessaire de calculer les sommets du polyèdre et on a seulement 2^m (le nombre de matrices A_j) programmes linéaires à résoudre. Par contre, comme les conditions obtenues par cette approche ne sont que suffisantes nous pouvons obtenir des expansions homothétiques conservatives. Ce fait est bien illustré, pour le cas d'un système continu, dans [44]. Néanmoins, nous considérons que le point fort de l'approche par polytope de matrices est la possibilité de réaliser une expansion non-homothétique, c'est-à-dire, après l'expansion homothétique on peut déterminer le plus grand ensemble contractif contenu dans la région de validité du modèle polytopique vérifiant les conditions suffisantes données. Avec l'approche par régions de saturation cette expansion non-homothétique reste pour le moment un sujet de recherche ouvert.

Les deux approches ayant, à la fois, des avantages et des inconvénients, nous pouvons essayer de les combiner afin de profiter de leurs points forts et d'éviter (ou minimiser) les problèmes associés à chacune d'elles. Ainsi, nous proposons maintenant deux manières alternatives de combiner les deux approches.

Première proposition

Etant donné un polyèdre $S(G, w)$ contractif et contenu dans $S(F, u_{min}, u_{max})$, nous commençons par une expansion homothétique en utilisant l'algorithme 4.1 basé sur l'approche polytopique. Soit δ_{max} le coefficient d'homothétie maximal vérifiant les relations (4.24) et (4.25). Considérons un polyèdre $S(G, (\delta_{max} + \epsilon)w)$, avec $\epsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire, ϵ est un scalaire positif aussi petit que l'on veut.

Ensuite, nous pouvons vérifier si $S(G, (\delta_{max} + \epsilon)w)$ est positivement invariant pour le système saturé en utilisant les relations (3.13) et (3.14) basées sur l'approche par régions de saturation. Ainsi, si ces relations ne sont pas vérifiées, on peut conclure que $S(G, \delta_{max}w)$ est le plus grand domaine engendré par la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}(x) = \max_i \left\{ \frac{G_{(i)}x}{w_{(i)}} \right\}$. Cela est formalisé dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.3 : *Supposons que δ_{max} est le coefficient maximal pour lequel les relations de contractivité (4.24) et (4.25) sont satisfaites. Si le polyèdre $S(G, (\delta_{max} + \epsilon)w)$, avec $\epsilon \rightarrow 0$, n'est pas positivement invariant par rapport au système (3.1), alors le domaine $S(G, \delta_{max}w)$ est le domaine contractif maximal homothétique à $S(G, w)$ pour le système (3.1).*

De cette façon, si la condition du corollaire 4.3 est satisfaite pour un domaine $S(G, w)$ compact, nous pouvons conclure que $S(G, \delta_{max}w)$ est le domaine maximal engendré par la fonction $\mathcal{V}(x)$ sans avoir besoin de calculer les sommets du polyèdre. Dans le cas où $S(G, (\delta_{max} + \epsilon)w)$ est positivement invariant, on peut conclure que l'expansion homothétique est conservative. Alors on peut appliquer l'algorithme 3.1 pour continuer l'expansion et obtenir un domaine plus grand. En outre, si nous voulons garantir un certain taux de contractivité μ , alors au lieu des relations d'invariance (3.13) et (3.14) il faudra utiliser la condition donnée dans le théorème 3.2.

Deuxième proposition

Supposons que nous avons obtenu une expansion homothétique et ensuite une expansion non-homothétique en utilisant les algorithmes 4.1 et 4.2 basés sur la représentation polytopique. Soit $S(P^*, \varphi^*) = S(P_{max}, \varphi_{max})$ l'ensemble ainsi obtenu. Nous pouvons alors appliquer sur cet ensemble l'algorithme 3.1, basé sur les régions de saturation, afin de vérifier si $S(P_{max}, \varphi_{max})$ peut encore être augmenté homothétiquement en gardant la propriété de contractivité par rapport au système saturé.

Troisième partie

Approche ellipsoïdale

Chapitre 5

Analyse

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la détermination de domaines de stabilité de type ellipsoïdal pour le système saturé :

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(Fx(k)) \quad (5.1)$$

Pour cela nous utilisons la représentation polytopique du système saturé décrite dans le chapitre 4. A partir de cette représentation nous formulons d'abord des conditions sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) pour la contractivité d'un ensemble ellipsoïdal par rapport aux trajectoires du système saturé. Ensuite, ces conditions sont utilisées pour présenter un algorithme, basé sur la résolution de problèmes d'optimisation convexes, permettant la détermination de régions de stabilité ellipsoïdales.

5.2 Stabilité asymptotique locale

Considérons un ensemble ellipsoïdal centré à l'origine (voir annexe A).

$$\mathcal{E}(c) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; x^T P x \leq c\} \quad (5.2)$$

avec $c \in \mathfrak{R}$, $c > 0$ et $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $P = P^T > 0$.

Dans cette section nous donnons une condition suffisante pour la garantie de la stabilité asymptotique locale du système saturé (5.1) dans des domaines ellipsoïdaux du type (5.2).

Considérons les matrices A_j définies à partir des coefficients de saturation associés à un ensemble \mathcal{S}_0 (voir section 4.2). Supposons que $\mathcal{E}(c) \subseteq \mathcal{S}_0$.

Proposition 5.1 : *Si l'inégalité matricielle*

$$A_j^T P A_j - P < 0 \quad (5.3)$$

est satisfaite $\forall j = 1, \dots, 2^m$, alors l'ellipsoïde $\mathcal{E}(c)$ est un domaine contractif de stabilité asymptotique pour le système (5.1).

Démonstration :

Supposons que $x(k) \in \mathcal{E}(c)$. En particulier, $x(k) \in \partial\mathcal{E}(c_1)$, $c_1 \leq c$, c'est-à-dire, $x(k)^T P x(k) = c_1$. Soient les coefficients de saturation, $(\alpha_{min})_{(i)}$, dans \mathcal{S}_0 . Puisque $\mathcal{E}(c) \subseteq \mathcal{S}_0$, l'état à l'instant $(k+1)$ peut être déterminé comme une combinaison linéaire convexe des matrices A_j :

$$x(k+1) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j x(k) \quad (5.4)$$

avec $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} = 1$, $\lambda_{j,k} \geq 0$

D'après le complément de Schur, l'inégalité (5.3) est équivalente à l'inégalité

$$\begin{bmatrix} P & A_j^T \\ A_j & P^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.5)$$

Considérons que l'inégalité (5.3) est satisfaite $\forall j = 1, \dots, 2^m$. Par convexité on a :

$$\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} \left(\begin{bmatrix} P & A_j^T \\ A_j & P^{-1} \end{bmatrix} \right) > 0$$

ou de manière équivalente

$$\left(\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j \right)^T P \left(\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j \right) - P < 0 \quad (5.6)$$

L'inégalité (5.6) implique que :

$$x(k)^T \left(\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j \right)^T P \left(\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j \right) x(k) - x(k)^T P x(k) < 0 \quad \forall x(k) \neq 0 \quad (5.7)$$

Ainsi, d'après (5.4) l'inégalité (5.7) signifie que :

$$x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) < 0 \quad \forall x(k) \neq 0 \quad (5.8)$$

c'est-à-dire,

$$x(k+1)^T P x(k+1) < c_1$$

Donc on obtient $x(k+1) \in \text{int}\mathcal{E}(c_1)$, ce qui montre que $\mathcal{E}(c)$ est un ensemble contractif. Puisque l'ensemble est aussi compact, la stabilité asymptotique locale du système saturé (5.1) dans $\mathcal{E}(c)$ est garantie.

□

Dans la proposition 5.1 nous associons au système saturé une fonction de Lyapunov quadratique

$$\mathcal{V}(x) = x^T P x \quad (5.9)$$

et sous la condition (5.3), cette fonction est strictement décroissante pour tous les états appartenant à $\mathcal{E}(c)$. Autrement dit, cette proposition garantit la stabilité du système saturé dans un contexte *local*. Cette proposition peut être vue comme une application du théorème 1.1 au système saturé (5.1) en considérant $V : U \rightarrow \mathfrak{R}$ avec $U \triangleq \mathcal{E}(c)$ et V définie par (5.9). Dans ce cas, comme $\mathcal{E}(c)$ est aussi un domaine de Lyapunov, la convergence asymptotique vers l'origine de tous les états appartenant à ce domaine est garantie, c'est-à-dire, $\mathcal{E}(c)$ est une région de stabilité asymptotique pour le système (5.1).

Il est important de remarquer la différence de ce résultat, qui considère le comportement d'un système saturé, par rapport au résultat classique (voir par exemple dans [17]) considérant des systèmes linéaires avec des incertitudes du type polytopique (comme nous l'avons défini dans la remarque 4.1). Pour ce type de systèmes, nous pouvons montrer que la condition (5.3) est une condition suffisante de stabilité asymptotique *globale*, c'est-à-dire, la fonction $\mathcal{V}(x)$ vérifie les conditions du théorème 1.2.

Par ailleurs, la condition (5.3) est seulement suffisante pour garantir la contractivité d'un ensemble $\mathcal{E}(c)$ contenu dans un ensemble \mathcal{S}_0 par rapport au système saturé alors que cette condition est aussi nécessaire si l'on considère un système incertain (voir remarque 4.1).

5.3 Détermination de régions de stabilité asymptotique

Supposons que la matrice F ait été calculée pour satisfaire des objectifs de commande prédéterminés et que cette matrice soit telle que toutes les valeurs propres de $(A + BF)$ sont contenues dans le cercle unité. De la même façon que dans les chapitres 3 et 4, nous nous intéressons dans cette section à la détermination de régions de l'espace d'état pour lesquelles le comportement asymptotiquement stable du système en boucle fermée peut être garanti par l'application de lois de commande du type $sat(Fx(k))$.

Nous étudions plus particulièrement des domaines de type ellipsoïdal. Dans ce contexte, nous proposons deux méthodes de détermination de régions de stabilité asymptotique locale pour le système saturé (5.1). La première est analogue à l'expansion homothétique présentée dans la section 4.3.3 pour des domaines polyédraux. La deuxième consiste à résoudre itérativement deux problèmes d'optimisation convexes afin d'obtenir un ellipsoïde maximal selon un certain critère géométrique.

5.3.1 Méthode 1 : expansion homothétique

Cette méthode consiste à appliquer l'algorithme générique proposé dans [20] en considérant une fonction de Lyapunov quadratique. Ceci a été présenté pour le cas continu dans [93] et [60]. L'extension au cas discret est immédiate. Dans ce cas les étapes à suivre sont données par l'algorithme suivant :

Algorithme 5.1 :

- **Pas 0 :** Choisir une matrice $Q = Q^T > 0$ et la précision de calcul désirée.
- **Pas 1 :** Déterminer P vérifiant l'équation :

$$(A + BF)^T P (A + BF) - P = -Q$$

- **Pas 2 :** Déterminer :

$$- \begin{cases} \mu_i = \max_x x^T P x \\ \text{sous} \\ -u_{\min(i)} \leq F_{(i)} x \leq u_{\max(i)} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

$$- \mu = \min_i \{\mu_i\} = \frac{(\min_i \{u_{\min(i)}, u_{\max(i)}\})^2}{F_{(i)} P^{-1} F_{(i)}^T}$$

• Pas 3 :

– Résoudre les problèmes suivants, $i=1, \dots, m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{\max_i} = \max_x F_{(i)} x \\ \text{sous } x^T P x = \mu \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{\min_i} = \min_x F_{(i)} x \\ \text{sous } x^T P x = \mu \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$- \text{Déterminer : } \theta_i = \min \left\{ \frac{-u_{\min(i)}}{y_{\min_i}}, \frac{u_{\max(i)}}{y_{\max_i}} \right\} = \frac{\min \{-u_{\min(i)}, u_{\max(i)}\}}{\sqrt{\mu F_{(i)} P^{-1} F_{(i)}^T}}$$

• Pas 4 :

– Déterminer $\alpha(\delta)_{(i)} = (\frac{\theta_i}{\delta})$, $i = 1, \dots, m$

– A partir des $\alpha(\delta)_{(i)}$ déterminer les matrices A_j .

• Pas 5 : Tester $A_j^T P A_j - P$, $j = 1, \dots, 2^m$.

– Si $A_j^T P A_j - P \geq 0$ alors : faire $\delta_{\text{ant}} = \delta$; diminuer δ ; retourner au Pas 4.

– Sinon

* Si $|\delta - \delta_{\text{ant}}| > \text{précision}$ alors : faire $\delta_{\text{ant}} = \delta$; augmenter δ ; retourner au Pas 4.

* Sinon $c = \delta^2 \mu$. FIN

Ainsi, d'après la proposition 5.1, $\mathcal{E}(c)$, avec $c = \delta^2 \mu$, est l'ellipsoïde maximal associé à la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}(x) = x^T P x$ pour lequel la relation (5.3) est vérifiée, $\forall j = 1, \dots, 2^m$.

L'inconvénient majeur de cette méthode, que l'on retrouve aussi dans le cas des ensembles polyédraux, est que l'on fixe dès le départ la forme du domaine de stabilité. En effet, dans ce cas, le choix de la matrice Q fixe la matrice P et, par conséquent, la forme de l'ensemble ellipsoïdal. De cette façon, si on fait le "bon" choix, on va obtenir un ensemble ellipsoïdal de stabilité asymptotique relativement "grand". Autrement dit, l'ellipsoïde ainsi obtenu sera une bonne approximation de la région d'attraction de l'origine. Par contre, si le choix est "mauvais", l'axe majeur de l'ellipsoïde peut, par exemple, coïncider avec la direction le long de laquelle le domaine d'attraction est plus "étroit". Dans ce cas, l'ellipsoïde obtenu sera une

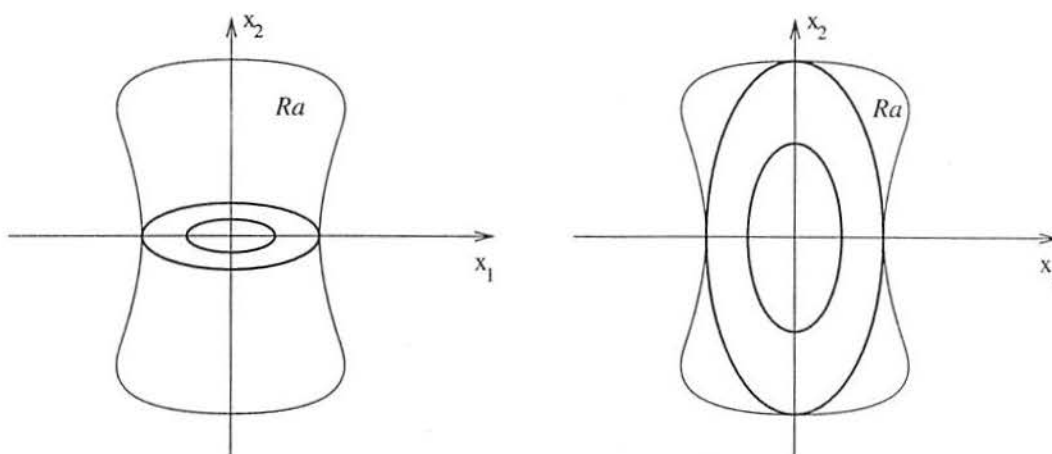


FIG. 5.1 – Approximation de la région d'attraction

approximation très conservatrice de la région d'attraction de l'origine. La Figure 5.1 illustre ce fait.

Ainsi, il est intéressant de déterminer un ellipsoïde qui “colle” de la meilleure façon possible à la région d'attraction. Pour cela il faut laisser le choix de P libre afin de satisfaire un critère relié à la maximisation en termes de “taille” du domaine ellipsoïdal final. Dans le but d'atteindre cet objectif nous proposons la méthode suivante.

5.3.2 Méthode 2 : optimisation convexe

Pour simplifier, considérons que les contraintes sur la commande sont symétriques, c'est-à-dire :

$$-\rho \preceq u(k) \preceq \rho, \quad \rho \in \mathbb{R}^m, \quad \rho \succ 0$$

Soit $\alpha = [\alpha_{(1)} \dots \alpha_{(m)}]^T$ un vecteur de coefficients de saturation. A partir de ces coefficients de saturation nous pouvons déterminer les matrices $A_j = A + D_j(\alpha)F$ (voir section 4.2) et représenter le comportement du système saturé dans l'ensemble

$$S(F, \rho/\alpha) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; -\rho/\alpha \preceq Fx \preceq \rho/\alpha\} \quad (5.11)$$

par un système polytopique. Par conséquent, le domaine ellipsoïdal contractif que nous allons déterminer, en utilisant cette représentation polytopique, doit être contenu dans $S(F, \rho/\alpha)$. Ainsi, nous sommes intéressés tout d'abord par la détermination de

conditions garantissant l'inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre symétrique. Pour cela considérons les ensembles :

$$\mathcal{E}(\eta^{-1}) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P x \leq \eta^{-1}\}$$

et

$$S(G, w, w) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; -w \preceq Gx \preceq w\}$$

où $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P^T > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$, $w \in \mathbb{R}^g$ et $w_{(i)} > 0$, $\forall i = 1, \dots, g$. Le lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'ellipsoïde $\mathcal{E}(\eta^{-1})$ soit contenu dans le polyèdre $S(G, w, w)$.

Lemme 5.1 : [41] [34] $\mathcal{E}(\eta^{-1}) \subset S(G, w, w)$ si et seulement si l'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & (G_{(i)}P^{-1})^T \\ (G_{(i)}P^{-1}) & \eta w_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.12)$$

est satisfaite $\forall i = 1, \dots, g$.

Démonstration :

A partir du complément de Schur, l'inégalité (5.12) est équivalente à :

$$\begin{aligned} P^{-1} - (G_{(i)}P^{-1})^T w_{(i)}^{-2} \eta^{-1} (G_{(i)}P^{-1}) &\geq 0 \\ P^{-1} &\geq P^{-1} G_{(i)}^T G_{(i)} P^{-1} w_{(i)}^{-2} \eta^{-1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

En multipliant par $P^{1/2}$ les deux côtés de l'inégalité (5.13) on obtient

$$\begin{aligned} I_n &\geq P^{-1/2} G_{(i)}^T G_{(i)} P^{-1/2} w_{(i)}^{-2} \eta^{-1} \\ \Leftrightarrow w_{(i)}^2 &\geq \lambda_{\max}((\eta P)^{-1/2} G_{(i)}^T G_{(i)} (\eta P)^{-1/2}) \\ \Leftrightarrow w_{(i)}^2 &\geq \max_{\|y\|=1} \|G_{(i)} (\eta P)^{-1/2} y\|^2 = \max_{\|y\| \leq 1} \|G_{(i)} (\eta P)^{-1/2} y\|^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Considérons maintenant le changement de variable suivant :

$$x = (\eta P)^{-1/2} y$$

Alors l'inégalité (5.14) est équivalente à

$$w_{(i)}^2 \geq \max_{\|(\eta P)^{1/2} x\| \leq 1} \|G_{(i)} x\|^2 \quad (5.15)$$

En prenant en compte que

$$\|(\eta P)^{1/2}x\| \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^T(\eta P)x} \leq 1 \Leftrightarrow x^T P x \leq \eta^{-1}$$

l'inégalité (5.15) équivaut à

$$\begin{aligned} w_{(i)}^2 &\geq \max_{x \in \mathcal{E}(\eta^{-1})} \|G_{(i)}x\|^2 \\ \Leftrightarrow w_{(i)}^2 &\geq (G_{(i)}x)^2 && \forall x \in \mathcal{E}(\eta^{-1}) \\ \Leftrightarrow -w_{(i)} &\leq G_{(i)}x \leq w_{(i)} && \forall x \in \mathcal{E}(\eta^{-1}) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'inégalité (5.12) est équivalente à l'inclusion $\mathcal{E}(\eta^{-1}) \subset S(G, w, w)$.

□

Soit maintenant $f(\mathcal{E}(\eta^{-1}))$ une fonction convexe associée à la région ellipsoïdale que nous voulons déterminer. Nous supposons que la minimisation de cette fonction implique la maximisation, dans un sens géométrique, d'une caractéristique de la région, par exemple : le volume, la longueur de l'axe mineur de l'ellipsoïde ou encore l'extension de l'ellipsoïde le long de certaines directions.

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$y = \min f(\mathcal{E}(\eta^{-1}))$$

soumis à

$$(i) \quad \begin{bmatrix} W & W(A + BD_j(\alpha)F)^T \\ (A + BD_j(\alpha)F)W & W \end{bmatrix} > 0 \quad j = 1, \dots, 2^m \quad (5.16)$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} W & W F_{(i)}^T \alpha_{(i)} \\ \alpha_{(i)} F_{(i)} W & \eta (\rho_{(i)})^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

où $W = W^T > 0$, $0 < \alpha_{(i)} \leq 1$ et $\eta > 0$ sont les variables du problème.

Proposition 5.2 : *Chaque solution admissible (W, α, η) de (5.16) est telle que l'ellipsoïde*

$$\mathcal{E}(\eta^{-1}) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; x^T W^{-1} x \leq \eta^{-1}\}$$

est un domaine de stabilité asymptotique pour le système saturé (5.1).

Démonstration :

Considérons une solution admissible (W, α, η) de (5.16). A partir du complément de Schur, l'inégalité (i) nous donne :

$$WA_j^T W^{-1} A_j W - W < 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^m \quad (5.17)$$

avec $A_j = (A + BD_j(\alpha)F)$. Les scalaires $\alpha_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$ sont les coefficients de saturation associés à l'ensemble $S(F, \rho/\alpha)$.

En multipliant l'inégalité (5.17) à gauche et à droite par $P = W^{-1}$ on a :

$$A_j^T P A_j - P < 0$$

D'après le lemme 5.1, l'inégalité (ii) garantit que $\mathcal{E}(\eta^{-1}) \subset S(F, \rho/\alpha)$. Ainsi, d'après la proposition 5.1 la stabilité asymptotique pour le système (5.1) est assurée dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}(\eta^{-1})$.

□

Ainsi, la solution optimale de (5.16) fournit un domaine ellipsoïdal de stabilité asymptotique pour le système (5.1) qui est maximal par rapport à la caractéristique géométrique décrite par la fonction $f(\mathcal{E}(\eta^{-1}))$.

Notons que les inégalités (i) et (ii) sont non-linéaires en W et α ce qui rend le problème d'optimisation (5.16) difficile à résoudre. Toutefois, nous pouvons découper ce problème en deux autres problèmes convexes avec des contraintes sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) et les résoudre d'une façon itérative. En fait, nous proposons l'utilisation d'un schéma de $W - \alpha$ itération analogue à la méthode de $D - K$ itération utilisée pour résoudre des problèmes de μ -synthèse (voir par exemple, [85] et [2]). La méthode est décrite par l'algorithme suivant :

Algorithme 5.2 :

- **Pas 0 :** Fixer $\alpha_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, la précision de calcul désirée, $k = 1$.

• Pas 1 :

– Résoudre le problème d'optimisation convexe suivant :

$$y_k = \min_{W_k} f(\mathcal{E}(1))$$

soumis à

$$(i) \begin{bmatrix} W_k & W_k(A + BD_j(\alpha)F)^T \\ (A + BD_j(\alpha)F)W_k & W_k \end{bmatrix} > 0 \quad j = 1, \dots, 2^m$$

$$(ii) \begin{bmatrix} W_k & W_k F_{(i)}^T \alpha_{(i)} \\ \alpha_{(i)} F_{(i)} W_k & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$(iii) W_k = W_k^T > 0$$
(5.18)

– Si $|y_k - y_{k-1}| < \text{précision}$ alors

* $W_k = W_{\text{final}}$

* **FIN**

– Sinon aller au Pas 2.

• Pas 2 :

– A partir de la matrice W_k obtenue dans le Pas 1, résoudre le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min_{\alpha_k, \eta_k} \eta_k$$

soumis à

$$(i) \begin{bmatrix} W_k & W_k(A + BD_j(\alpha_k)F)^T \\ (A + BD_j(\alpha_k)F)W_k & W_k \end{bmatrix} > 0 \quad j = 1, \dots, 2^m$$

$$(ii) \begin{bmatrix} W_k & W_k F_{(i)}^T \alpha_{k(i)} \\ \alpha_{k(i)} F_{(i)} W_k & \eta_k \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$(iii) 0 < \alpha_{k(i)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad ; \quad \eta_k > 0$$
(5.19)

– $\alpha = \alpha_k$

– Retourner au Pas 1

Remarquons que dans le pas 1 de l'algorithme 5.2 la seule inconnue est la matrice W_k et dans le pas 2 les inconnues sont les scalaires η_k et $\alpha_{k(i)}$, $i = 1, \dots, m$ (i.e. le vecteur α_k). Notons aussi que dans le pas 1 de l'algorithme nous considérons $\eta = 1$. En fait, cela est possible, sans perte de généralité, puisque si W_k est une solution admissible du problème d'optimisation (5.18), alors W_k/η l'est aussi, $\forall \eta > 0$. Ainsi, pour le vecteur α_k solution optimale de (5.19), il existe au moins une solution admissible pour le problème (5.18).

En résumé :

Dans le pas 1, nous fixons le vecteur α des coefficients de saturation et nous déterminons une matrice W , telle que l'ellipsoïde

$$\mathcal{E}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T W^{-1} x \leq 1\} \quad (5.20)$$

est un domaine de stabilité asymptotique pour le système (5.1). Dans le pas 2, nous fixons W en laissant α libre de façon à déterminer le coefficient d'homothétie maximal η^{-1} pour lequel $\mathcal{E}(\eta^{-1})$ est encore un domaine de stabilité asymptotique. Ensuite nous retournons au pas 1, avec le nouveau α afin d'essayer de trouver une nouvelle matrice W telle que le critère choisi soit encore amélioré. Dans le pire des cas nous trouverons comme solution la matrice W_k/η_k .

Quant au critère $f(\mathcal{E}(\eta^{-1}))$, il doit, comme nous l'avons mentionné précédemment, être relié à la taille ou la forme du domaine ellipsoïdal. Nous détaillons dans la suite l'utilisation de trois critères, lorsque nous considérons l'ellipsoïde centré à l'origine et normalisé défini par (5.20).

Maximisation du volume de l'ellipsoïde

Comme le volume de l'ellipsoïde est proportionnel à $\sqrt{\det(W)}$, si nous minimisons $\log(\det(W^{-1}))$ (voir annexe A), nous maximisons le volume de $\mathcal{E}(1)$ [17]. En outre, le problème d'optimisation (5.18) avec

$$f(\mathcal{E}(\eta^{-1})) = \log(\det(W^{-1}))$$

est un problème convexe.

Il est important de remarquer que, même si la matrice W_k solution de (5.18) donne un ellipsoïde de volume maximal, celui-ci peut ne pas être un ellipsoïde souhaitable. Par exemple, la maximisation du volume peut conduire à un ensemble très allongé le long de certaines directions et aplati le long d'autres directions. Ceci veut

dire que la matrice W_k est mal conditionnée. Cet inconvénient peut être contourné, si on considère des contraintes supplémentaires sur le conditionnement de W_k qui s'écrivent très simplement sous forme de LMIs [17].

Maximisation de l'axe mineur de l'ellipsoïde

La longueur de l'axe mineur de l'ellipsoïde (5.20) est proportionnelle à $\sqrt{\lambda_{\min}(W)}$ [17]. Ainsi, en maximisant la plus petite valeur propre de W , nous maximisons la longueur de l'axe mineur de l'ellipsoïde défini dans (5.20) [17].

Si nous considérons donc

$$f(\mathcal{E}(\eta^{-1})) = -\lambda_{\min}(W_k)$$

(5.18) est un problème de valeur propre (EVP) et est équivalent au problème convexe suivant [17]:

$$y_k = \max_{W_k, \lambda} \lambda$$

soumis à

$$(i) \quad \begin{bmatrix} W_k & W_k(A + BD_j(\alpha)F)^T \\ (A + BD_j(\alpha)F)W_k & W_k \end{bmatrix} > 0 \quad j = 1, \dots, 2^m$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} W_k & W_k F_{(i)}^T \alpha_{(i)} \\ \alpha_{(i)} F_{(i)} W_k & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$(iii) \quad W_k \geq \lambda I$$

$$(iv) \quad W_k = W_k^T > 0$$

Maximisation de l'ellipsoïde le long de certaines directions

Dans le cas où nous connaissons des directions préférentielles où le système va être initialisé ou où l'état va être amené par des perturbations temporaires, il est intéressant d'essayer de maximiser l'ellipsoïde le long de ces directions.

Soit D l'ensemble des directions le long desquelles l'ellipsoïde (5.20) doit être maximisé:

$$D \triangleq \{d_1, \dots, d_s\}$$

avec $d_l \in \mathfrak{R}^n$, $l = 1, \dots, s$

Nous devons donc pour chaque d_l , $l = 1, \dots, s$, satisfaire

$$\beta_l d_l^T W^{-1} d_l \beta_l \leq 1$$

avec un scalaire positif β_l le plus grand possible.

Ainsi, dans le pas 1 de l'algorithme 5.2 la maximisation de l'ellipsoïde, dans les directions données par D , peut être accomplie si nous considérons le problème convexe suivant au lieu de (5.18) :

$$y_k = \max_{W_k, \beta_l} \sum_{l=1}^s p_l \beta_l$$

soumis à

$$(i) \quad \begin{bmatrix} W_k & W_k(A + BD_j(\alpha)F)^T \\ (A + BD_j(\alpha)F)W_k & W_k \end{bmatrix} > 0 \quad j = 1, \dots, 2^m$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} W_k & W_k F_{(i)}^T \alpha_{(i)} \\ F_{(i)} W_k \alpha_{(i)} & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$(iii) \quad \begin{bmatrix} 1 & \beta_l d_l^T \\ \beta_l d_l & W_k \end{bmatrix} \geq 0 \quad l = 1, \dots, s$$

$$(iv) \quad W_k = W_k^T > 0, \quad \beta_l > 0$$

où le scalaire p_l correspond au poids de la maximisation dans la direction d_l .

5.4 Ellipsoïdes non-bornés

La condition pour la stabilité asymptotique dans des ensembles ellipsoïdaux donnée par la proposition 5.1 suppose que la matrice P est symétrique et définie positive. Lorsque la matrice P est symétrique et semi-définie positive l'ellipsoïde $\mathcal{E}(c)$ est non-borné dans les directions associées à $\mathcal{Ker} P$ et a la forme d'un cylindre de section ellipsoïdale (voir annexe A). Dans ce cas, en utilisant le même type de raisonnement que dans la section 3.6, sous certaines conditions supplémentaires nous pouvons assurer que $\mathcal{E}(c)$ avec $P = P^T \geq 0$ est un domaine de stabilité pour le système saturé.

Considérons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.1 : L'ensemble $\mathcal{E}_{nb}(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P x \leq c\}$ avec $P = P^T \geq 0$ est tel que :

- (i) $\text{Ker } P \subseteq \text{Ker } F$.
- (ii) $\text{Ker } P$ est un sous-espace A -invariant.

Considérons que $\text{rang}(P) = r < n$, alors la dimension de $\text{Ker } P$ est $(n - r)$. Soit $Q \triangleq [Q_o \ Q_r]$ une base orthonormale ($Q^T Q = Q Q^T = I_n$) où

- $Q_o \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ est une base associée au sous-espace $\mathcal{S}_o \triangleq \text{Ker } P$.
- $Q_r \in \mathbb{R}^r$ est une base pour le sous-espace \mathcal{S}_r complémentaire de $\text{Ker } P$.

Soient les matrices A_j définies à partir des coefficients de saturation dans $\mathcal{E}(c)$. L'hypothèse 5.1 implique que $\text{Ker } P$ est un sous-espace A_j -invariant, $\forall j = 1, \dots, 2^m$. Alors, dans la base Q on a :

$$\bar{A}_j = Q^T A_j Q = \begin{bmatrix} R_o & R_{2j} \\ 0 & R_{rj} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{P} = Q^T P Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_r \end{bmatrix}$$

où $R_{rj} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $P_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ avec $P_r = P_r^T > 0$.

Supposons maintenant que l'inégalité suivante est vérifiée $\forall j = 1, \dots, 2^m$:

$$A_j^T P A_j - P \leq 0$$

Cette inégalité est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & A_j^T \\ A_j & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \bar{A}_j^T \bar{P} \bar{A}_j - \bar{P} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{rj}^T P_r R_{rj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_r \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant, analogue à celui de la proposition 3.4 :

Proposition 5.3 : *Supposons que l'ensemble ellipsoïdal non-borné \mathcal{E}_{nb} satisfasse l'hypothèse 5.1. Alors \mathcal{E}_{nb} est un domaine de stabilité asymptotique pour le système saturé (5.1) si les deux conditions suivantes sont vérifiées $\forall j = 1, \dots, 2^m$:*

$$(i) \quad R_{rj}^T P_r R_{rj} - P_r < 0.$$

(ii) *Les valeurs propres de la matrice R_o sont à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire, sont asymptotiquement stables.*

Démonstration :

Puisque $\text{Ker } P \subset \text{Ker } F$ et $\text{Ker } P$ est un sous-espace A -invariant le système saturé (5.1) s'écrit dans la base Q comme :

$$z_o(k+1) = R_o z_o(k) + R_2 z_r(k) + B_o \text{sat}(F_r z_r(k)) \quad (5.21)$$

$$z_r(k+1) = R_r z_r(k) + B_r \text{sat}(F_r z_r(k)) \quad (5.22)$$

En considérant que $R_{rj} = R_r + B_r D_j(\alpha) F_r$, si la condition (i) de la proposition est vérifiée, d'après la proposition 5.1, l'ellipsoïde $\mathcal{E}_r(c) \triangleq \{z_r \in \mathbb{R}^{r^*} ; z_r^T P_r z_r \leq c\}$ est un ensemble compact et contractif pour le système (5.22). Alors en considérant que la condition (ii) est vérifiée la preuve est identique à celle de la proposition 3.4.

□

Remarque 5.1 : *Lorsque la paire (F, A) est non-observable, il existe un sous-espace A -invariant contenu dans $\text{Ker } F$. Ce fait, comme nous avons vu dans la remarque 3.6, équivaut à dire que F place partiellement les pôles de $(A + BF)$. Dans ce cas, si les valeurs propres du système associées à $\text{Ker } F$ (i.e., communes à A et $(A + BF)$) sont asymptotiquement stables, nous pouvons toujours déterminer des régions non-bornées de stabilité asymptotique du type cylindriques pour le système saturé. Pour cela il suffit d'appliquer les techniques présentées dans la section 5.3 au système d'ordre réduit (5.22).*

5.5 Exemple numérique

Soit le système traité dans l'exemple du chapitre 3.

A cet exemple nous appliquons l'algorithme 5.2 en prenant comme critère d'optimisation la maximisation de l'axe mineur du domaine ellipsoïdal.

En considérant une précision de 0.01, l'algorithme converge après 11 itérations. Les valeurs finales obtenues sont :

$$W = \begin{bmatrix} 99.9959 & -12.4073 \\ -12.4073 & 1.45585 \times 10^8 \end{bmatrix} ; \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0.21052 \\ 0.00064 \end{bmatrix} ; \quad \eta = 1$$

La figure 5.2 dépeint l'évolution des domaines ellipsoïdaux au cours du processus itératif.

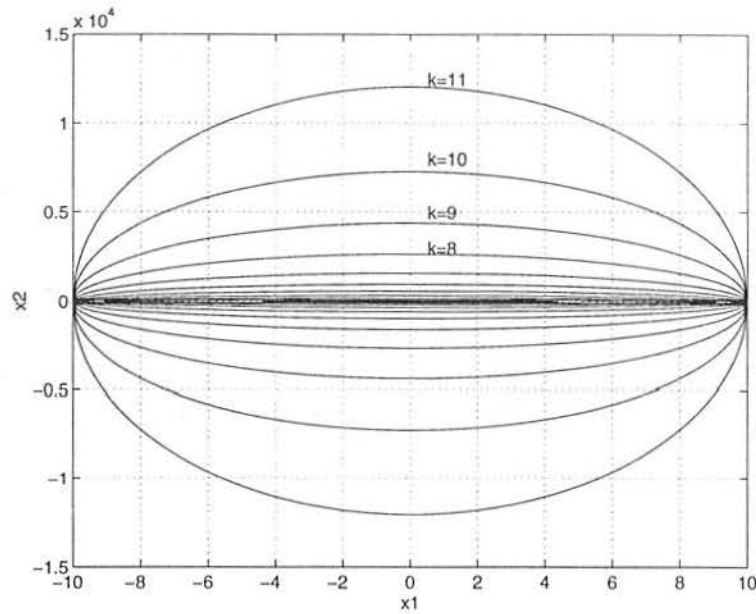


FIG. 5.2 – Application de l'algorithme 5.2: ellipsoïdes générés itérativement

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilité asymptotique locale des systèmes linéaires avec saturation des commandes en considérant des régions de stabilité ellipsoïdales.

A partir de la représentation du système saturé par un modèle polytopique, nous avons établi des conditions suffisantes pour la contractivité d'un ellipsoïde par

rapport au système saturé. Dans ce cas, l'ellipsoïde contractif est associé à une fonction de Lyapunov quadratique pour le système saturé.

Ensuite, nous avons présenté deux méthodes pour déterminer des régions de stabilité ellipsoïdales. La première méthode consiste dans une première étape à déterminer un ellipsoïde contractif pour le modèle du système dans la région de linéarité. Cela est fait en résolvant une équation de Lyapunov quadratique. Dans une deuxième étape, nous procédons à une expansion homothétique de cet ensemble dans la région de comportement non-linéaire du système en boucle fermée. La deuxième méthode est basée sur la résolution de problèmes d'optimisation convexes. Les conditions pour que l'ellipsoïde devant être obtenu soit une région de stabilité asymptotique sont exprimées sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Ces conditions sont donc considérées comme contraintes des programmes d'optimisation convexes qui permettent d'obtenir un domaine de stabilité maximal selon des critères géométriques. Dans ce sens, nous avons proposé trois critères : maximisation du volume de l'ellipsoïde, maximisation de la longueur de l'axe mineur de l'ellipsoïde et maximisation de l'ellipsoïde le long de certaines directions.

A notre avis, la deuxième méthode que nous avons proposée, est plus puissante dans le sens que nous ne fixons pas la forme de l'ellipsoïde de départ. En effet, nous cherchons le "meilleur" ellipsoïde satisfaisant un critère géométrique et les conditions suffisantes de contractivité.

Chapitre 6

Synthèse

6.1 Introduction

Les systèmes de commandes sont, en général, conçus d'une façon linéaire. La théorie moderne de la commande linéaire fournit en effet des techniques et des méthodes qui font appel à des outils mathématiques relativement simples. Dans ce contexte on peut citer, par exemple, le cas de l'approche quadratique qui permet de déterminer des lois de commande garantissant la stabilité du système en boucle fermée avec la satisfaction de spécifications de performance et de robustesse.

Cependant, en général, ces techniques et ces méthodes, ne prennent pas explicitement en compte les limitations sur les signaux de commande. Ainsi, comme la loi de commande stabilise et satisfait les spécifications dans un contexte linéaire, la saturation non prévue de la commande peut amener le système en boucle fermée à un comportement instable. Il est donc important de s'intéresser à un autre aspect de la stabilité dite "robuste" : la loi de commande doit être capable d'assurer la stabilité du système en boucle fermée lorsque les actionneurs saturent. Autrement dit, la robustesse de la stabilité, vis-à-vis des limites de la commande, doit être considérée lors de la conception de la loi de commande.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que la stabilisation globale des systèmes linéaires avec saturation des commandes, peut être accomplie seulement lorsque le système en boucle ouverte est asymptotiquement ou critiquement stable ou encore critiquement instable. Dans ce cas, la solution obtenue peut conduire à des lois de commande qui confèrent une performance non satisfaisante autour de l'origine. Pour contourner ce problème on peut toujours penser à construire des lois de commande du type multi-

modes [89]. Néanmoins, la détermination de bonnes surfaces de commutation n'est pas un problème trivial. En outre, lorsque un système linéaire a été obtenu à partir de la linéarisation d'un système non-linéaire, le concept de stabilisation globale n'a pas de sens réellement physique. Ainsi, à notre avis, les notions de stabilisation locale et semi-globale ont un intérêt nettement plus pratique.

Dans ce chapitre, nous allons donc étudier la stabilisation locale et semi-globale d'un système avec saturation des commandes relativement à un domaine de conditions initiales admissibles \mathcal{X}_0 préalablement donné. Nous considérons, en particulier, la synthèse de lois de commande du type retour d'état. A partir de la représentation du système saturé par un système polytopique, présenté dans le chapitre 4, nous proposons des conditions sous la forme de LMIs. Ces LMIs peuvent être incorporées facilement dans des problèmes d'optimisation convexes dont le but est la détermination d'une matrice de retour d'état F garantissant : non seulement la stabilité asymptotique pour toutes les trajectoires initialisées dans \mathcal{X}_0 mais aussi une certaine performance pour la réponse temporelle des trajectoires contenues dans la région de linéarité du système saturé.

6.2 Le problème de synthèse

Considérons le système en boucle ouverte suivant :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (6.1)$$

Pour ce système nous supposons que les hypothèses suivantes sont respectées.

Hypothèse 6.1 : *La commande est soumise à des contraintes de type polyédral symétrique, c'est-à-dire, $u(k)$ doit appartenir à une région Ω définie dans l'espace de commande comme :*

$$\Omega \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m ; -\rho \preceq u \preceq \rho\} \quad (6.2)$$

avec $\rho \succ 0_m$.

Hypothèse 6.2 : *La paire (A, B) est contrôlable.*

Hypothèse 6.3 : *L'ensemble d'états initiaux admissibles pour le système (6.1) est connu et noté \mathcal{X}_0 .*

A partir de ces hypothèses, le problème que nous allons traiter est le suivant.

Problème 6.1 : Déterminer une matrice F telle que :

- (i) la loi de commande $u(k) = \text{sat}(Fx(k))$ garantisse la convergence vers l'origine de toute trajectoire du système (6.1) initialisée dans \mathcal{X}_0 .
- (ii) un certain niveau de performance soit garanti pour le système en boucle fermée dans la région de linéarité, c'est-à-dire, dans la région où les commandes ne saturent pas.

Ainsi, ce problème peut être interprété comme :

- un problème de stabilisation locale si aucune hypothèse de stabilité n'est faite sur la matrice A .
- un problème de stabilisation semi-globale si la matrice A est asymptotiquement stable, critiqueusement stable ou critiqueusement instable et si l'ensemble \mathcal{X}_0 est aussi grand que l'on veut.

De la même manière, dans ces deux cas nous devons déterminer une matrice F de façon à ce que \mathcal{X}_0 soit contenu dans la région d'attraction du système saturé :

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(Fx(k)) \quad (6.3)$$

De plus, étant donné que dans la région de linéarité

$$S(F, \rho) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; -\rho \preceq Fx \preceq \rho\} \quad (6.4)$$

une certaine performance, dans le sens temporel, doit être assurée, nous pouvons par exemple chercher une matrice F qui place les pôles de $(A+BF)$ dans une région pré-spécifiée contenue dans le cercle unité.

Pour traiter ce problème nous allons utiliser la représentation polytopique du système saturé (6.3) présentée dans le chapitre 4. Rappelons qu'en considérant un vecteur $\alpha = [\alpha_{(1)} \dots \alpha_{(m)}]^T$ des coefficients de saturation et les matrices $A_j \triangleq (A + BD_j(\alpha)F)$ associées à ce dernier, si l'état du système (6.3) appartient à

$$S(F, \rho/\alpha) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; -\rho/\alpha \preceq Fx \preceq \rho/\alpha\} \quad (6.5)$$

alors $x(k+1)$ peut être déterminé par le modèle polytopique

$$x(k+1) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} A_j x(k) \quad (6.6)$$

avec $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} = 1, \lambda_{j,k} \geq 0.$

6.3 Stabilisation asymptotique locale

6.3.1 Relations d'inclusion

Pour résoudre le problème 6.1, en utilisant la représentation polytopique du système saturé, on doit être capable de déterminer une matrice F et un ensemble contractif pour le système saturé. Cet ensemble doit être contenu dans la région de validité du modèle polytopique et doit contenir l'ensemble des conditions initiales admissibles \mathcal{X}_0 . Dans ce chapitre nous allons utiliser plus particulièrement une approche basée sur des fonctions de Lyapunov quadratiques et, par conséquent, nous sommes concernés par des ensemble contractifs de type ellipsoïdal. En résumé, pour résoudre le problème 6.1, nous cherchons un ellipsoïde contractif \mathcal{E} et une matrice F tels que :

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E} \subset S(F, \rho/\alpha) \quad (6.7)$$

Il est donc important d'établir les conditions qui doivent être vérifiées afin de satisfaire la relation d'inclusion (6.7).

Une condition pour que $\mathcal{E} \subset S(F, \rho/\alpha)$ est obtenue à partir de l'application directe du lemme 5.1.

Nous allons maintenant présenter des résultats concernant l'inclusion de \mathcal{X}_0 dans \mathcal{E} . En particulier, nous considérons \mathcal{X}_0 comme étant un polytope ou un ellipsoïde. Ainsi, nous donnons d'abord une condition pour l'inclusion d'un polytope, décrit par ses sommets, dans un ensemble ellipsoïdal. Ensuite, nous présentons une condition pour l'inclusion d'un ellipsoïde centré à l'origine dans un autre ellipsoïde centré aussi à l'origine.

Considérons l'ensemble ellipsoïdal

$$\mathcal{E}(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P x \leq c\}$$

avec $P = P^T > 0$ et $c > 0$.

Soit un polytope \mathcal{Z} dans \mathfrak{R}^n représenté par ses sommets :

$$\mathcal{Z} = \mathbf{Co}\{v_1, \dots, v_{n_v}\} \quad (6.8)$$

Lemme 6.1 : [17] *L'ellipsoïde $\mathcal{E}(c)$ contient le polytope \mathcal{Z} si et seulement si*

$$\begin{bmatrix} c & v_r^T \\ v_r & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall r = 1, \dots, n_v. \quad (6.9)$$

Démonstration :

Une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{Z} soit inclus dans $\mathcal{E}(c)$ est que chaque sommet de \mathcal{D} soit contenu dans $\mathcal{E}(c)$, c'est-à-dire

$$v_r^T P v_r \leq c \quad \forall r = 1, \dots, n_v \quad (6.10)$$

Alors, à partir du complément de Schur l'inégalité (6.10) s'écrit comme l'inégalité (6.9).

□

Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathcal{E}_1(c_1) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; x^T P_1 x \leq c_1\} \quad (6.11)$$

avec $P_1 = P_1^T > 0$ et $c_1 > 0$.

Lemme 6.2 : [99] *$\mathcal{E}_1(c_1) \subseteq \mathcal{E}(c)$ si et seulement si*

$$\frac{P_1}{c_1} - \frac{P}{c} \geq 0 \quad (6.12)$$

Démonstration :

Pour avoir $\mathcal{E}_1(c_1) \subseteq \mathcal{E}(c)$ il est nécessaire et suffisant que pour chaque $x \in \partial\mathcal{E}(c)$, i.e., $x^T P x = c$, il existe un scalaire β , $0 < \beta \leq 1$, tel que $\beta x^T P_1 x = c_1$. Alors on peut écrire $x^T \frac{P}{c} x = 1$ et $x^T \frac{P_1}{c_1} x = \frac{1}{\beta}$. Par conséquent :

$$\frac{P_1}{c_1} - \frac{P}{c} = \frac{1}{\beta} - 1 \geq 0$$

□

Désormais, nous considérons que l'ensemble \mathcal{X}_0 est décrit par l'union d'un polytope du type (6.8) et de n_e ellipsoïdes du type (6.11), c'est-à-dire :

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{Z} \cup \left(\bigcup_{s=1}^{n_e} \mathcal{E}_s(c_s) \right) \quad (6.13)$$

où $\mathcal{E}_s(c_s) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P_s x \leq c_s\}$, $P_s = P_s^T > 0$, $c_s > 0$.

6.3.2 Résultats de base

Nous présentons maintenant quelques conditions qui serviront de base pour l'algorithme de synthèse que nous allons proposer dans la suite.

Considérons un vecteur donné, $\alpha = [\alpha_{(1)} \quad \alpha_{(2)} \quad \dots \quad \alpha_{(m)}]^T$, des coefficients de saturation.

La proposition suivante donne une condition qui permet de calculer une matrice F de retour d'état, telle que la stabilité asymptotique locale du système saturé (6.3) dans une famille d'ellipsoïdes est garantie avec le coefficient de saturation minimale $\alpha_{(i)}$ pour chaque entrée de commande.

Proposition 6.1 : *S'il existe une matrice $W = W^T > 0$, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que :*

$$\begin{bmatrix} W & WA^T + Y^T D_j(\alpha) B^T \\ AW + B D_j(\alpha) Y & W \end{bmatrix} > 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^m \quad (6.14)$$

Alors, pour $F \triangleq YW^{-1}$, il existe un scalaire positif c_{max} , tel que les ellipsoïdes $\mathcal{E}(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T W^{-1} x \leq c\}$, avec $c \leq c_{max}$, sont des domaines dans lesquels la stabilité asymptotique du système (6.3) est garantie.

Démonstration :

D'après le complément de Schur, les inégalités (6.14) sont équivalentes à :

$$(WA^T + Y^T D_j(\alpha) B^T) W^{-1} (AW + B D_j(\alpha) Y) - W < 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^m \quad (6.15)$$

En multipliant l'inégalité (6.15) à gauche et à droite par W^{-1} on obtient :

$$(A^T + W^{-1} Y^T D_j(\alpha) B^T) W^{-1} (A + B D_j(\alpha) Y W^{-1}) - W^{-1} < 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^m \quad (6.16)$$

En définissant $F \triangleq Y W^{-1}$, nous savons que le domaine $S(F, \rho/\alpha)$ est le domaine maximal de validité du modèle (6.6). Il existe donc un ellipsoïde $\mathcal{E}(c_{max})$ tel que $\mathcal{E}(c_{max}) \subset S(F, \rho/\alpha)$. Alors, d'après la proposition 5.1, les ellipsoïdes $\mathcal{E}(c)$, avec $c \leq c_{max}$, sont des domaines de stabilité asymptotique pour le système saturé (6.3) avec $F \triangleq Y W^{-1}$.

□

Si la LMI (6.14) est vérifiée, $\forall j = 1, \dots, 2^m$, alors la matrice $F = Y W^{-1}$ est telle que le système polytopique (6.6) défini à partir du vecteur α admet $\mathcal{V}(x) = x^T P x$ comme fonction de Lyapunov et est donc asymptotiquement stable dans un sens global. Autrement dit, $\mathcal{E}(c)$ est contractif par rapport à (6.6). Comme le système polytopique représente le système saturé (6.3) seulement pour les états appartenant à $S(F, \rho/\alpha)$, $\mathcal{V}(x)$ est une fonction de Lyapunov localement valable dans $S(F, \rho/\alpha)$ pour ce système. Il existe ainsi un scalaire c_{max} tel que $\mathcal{E}(c_{max}) \subset S(F, \rho/\alpha)$ et, par conséquent, tous les ellipsoïdes $\mathcal{E}(c)$, avec $c \leq c_{max}$, sont des domaines contractifs pour le système saturé.

Puisque nous sommes attachés à la résolution du problème 6.1, nous nous intéressons à la détermination d'une matrice F garantissant la stabilité asymptotique pour un ensemble donné de conditions initiales admissibles \mathcal{X}_0 du type (6.13). Ainsi, parmi les matrices $F = Y W^{-1}$ avec W et Y vérifiant les inégalités matricielles (6.14) et les familles d'ellipsoïdes correspondantes, nous devons pouvoir déterminer celles qui garantissent $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E}(c_{max})$. La proposition suivante donne une condition dans ce sens.

Proposition 6.2 : *S'il existe une matrice $W = W^T > 0$, $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, une matrice $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et un scalaire $c > 0$ tels que*

$$(i) \left[\begin{array}{cc} W & WA^T + Y^T D_j(\alpha) B^T \\ AW + B D_j(\alpha) Y & W \end{array} \right] > 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^m$$

$$(ii) \begin{bmatrix} W & Y^T I_{m(i)}^T \\ I_{m(i)} Y & c^{-1}(\rho_{(i)}/\alpha_{(i)})^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

$$(iii) \begin{bmatrix} c & v_r^T \\ v_r & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall r = 1, \dots, n_v.$$

$$(iv) \begin{bmatrix} (P_s/c_s)c & I_n \\ I_n & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall s = 1, \dots, n_e$$

Alors la commande $u = \text{sat}(Fx(k))$, avec $F \triangleq YW^{-1}$ assure la convergence asymptotique des trajectoires du système (6.3) pour toute condition initiale $x(0) \in \mathcal{X}_0$.

Démonstration :

Si on définit $F \triangleq YW^{-1}$, alors, d'après le lemme 5.1, la condition (ii) implique que $\mathcal{E}(c) \subset S(F, \rho/\alpha)$. D'après la proposition 5.1, les conditions (i) et (ii) garantissent la stabilité asymptotique du système saturé dans $\mathcal{E}(c)$. D'après les lemmes 6.1 et 6.2, les inégalités matricielles de (iii) et (iv) impliquent que l'ensemble \mathcal{X}_0 , défini par (6.13), est contenu dans $\mathcal{E}(c)$. Par conséquent, toutes les trajectoires du système (6.3) avec $F \triangleq YW^{-1}$ qui sont initialisées dans \mathcal{X}_0 convergent asymptotiquement vers l'origine.

□

6.3.3 Performance temporelle autour de l'origine

D'après la formulation du problème 6.1, la matrice F que nous cherchons doit garantir un certain niveau de performance temporelle pour le système en boucle fermée autour de l'origine. En considérant que dans un voisinage de l'origine la commande ne sature pas, les spécifications sur la réponse temporelle du système peuvent, en général, être satisfaites si on place les pôles de la matrice $(A + BF)$ dans une région particulière du plan complexe contenue dans le cercle unité.

Le problème du placement de pôles dans une région spécifique du plan complexe a été initialement étudié par Gutman et Jury [48]. Dans ce travail, il est montré que le placement de pôles dans des régions de type polynômial est équivalent à la vérification d'une équation de Lyapunov généralisée. Plus récemment, Chiali et

Gahinet [27] ont donné une condition, assez générique, pour que les valeurs propres d'une matrice A soient contenues dans une région (ou une intersection de régions) décrite sous la forme d'une LMI. Cette condition est elle aussi exprimée comme une LMI, ce qui permet facilement son intégration à des problèmes convexes avec ce type des contraintes. Comme notre objectif est d'intégrer le problème du placement de pôles de $(A+BF)$ dans une région au résultat de la proposition 6.2 dans un problème convexe avec des contraintes LMIs, nous sommes particulièrement intéressés par l'approche développée dans [27].

Considérons tout d'abord la définition de la \mathcal{D} -stabilité.

Définition 6.1 : Soit \mathcal{D} une région du plan complexe. Un système dynamique

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (6.17)$$

est dit \mathcal{D} -stable si toutes les valeurs propres de A sont contenues dans \mathcal{D} .

Soient maintenant les matrices $H, Q \in \mathfrak{R}^{l \times l}$ et un nombre complexe z, \bar{z} étant son conjugué. Définissons la fonction suivante :

$$f_{\mathcal{D}}(z) \triangleq H + zQ + \bar{z}Q^T = [H_{(i,j)} + Q_{(i,j)}z + Q_{(i,j)}\bar{z}]_{1 \leq i,j \leq l} \quad (6.18)$$

Considérons une région du plan complexe définie de la façon suivante :

$$\mathcal{D} \triangleq \{z \in \mathcal{C} ; f_{\mathcal{D}}(z) < 0\} \quad (6.19)$$

Cette région est appelée génériquement *région LMI* [27].

Le théorème suivant donne une condition pour que les pôles du système (6.17) soient dans une région du type (6.19).

Théorème 6.1 : [27] Le système (6.17) est \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique et définie positive W telle que :

$$M_{\mathcal{D}}(A, W) = [H_{(i,j)}W + Q_{(i,j)}(AW) + Q_{(i,j)}(AW)^T]_{1 \leq i,j \leq l} < 0 \quad (6.20)$$

Le corollaire suivant donne une condition pour que les valeurs propres de A soient dans une région résultant de l'intersection de deux ou plusieurs régions du type (6.19).

Corollaire 6.1 : [27] *Etant données deux régions LMI, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , la matrice A est simultanément \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 -stable si et seulement s'il existe une matrice $W = W^T > 0$ telle que*

$$M_{\mathcal{D}_1}(A, W) < 0 \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{D}_2}(A, W) < 0$$

Le corollaire suivant donne une condition constructive dans le but de déterminer une matrice F qui place les pôles de $(A + BF)$ dans une région LMI \mathcal{D} .

Corollaire 6.2 : [27] *S'il existe des matrices $W = W^T > 0$ et Y telles que*

$$[H_{(i,j)}W + Q_{(i,j)}(AW + BY) + Q_{(i,j)}(AW + BY)^T]_{1 \leq i, j \leq l} < 0$$

alors $F = YW^{-1}$ place les pôles de $(A + BF)$ dans la région \mathcal{D} .

6.3.4 Synthèse de retour d'état saturé à partir de la solution de LMIs

D'après les résultats présentés dans les sections précédentes, nous proposons dans cette section une solution pour le problème 6.1 basée sur la satisfaction d'inégalités matricielles linéaires. Ces résultats sont analogues à ceux présentés dans [41] pour le cas des systèmes continus.

Nous nous intéressons donc à la détermination d'une matrice F qui garantisse la stabilité asymptotique locale du système (6.3) par rapport à un ensemble donné de conditions initiales admissibles. Cette matrice F doit aussi placer les pôles de $(A + BF)$ dans une région \mathcal{D} afin d'assurer une réponse temporelle satisfaisante pour les trajectoires initialisées dans un voisinage de l'origine, contenu dans la région de linéarité du système (6.3). Dans ce but nous supposons donnés :

- \mathcal{X}_0 : un ensemble de conditions initiales admissibles du type (6.13).
- \mathcal{D} : une région LMI du type (6.19).
- α : un vecteur de coefficients de saturations, représentant une spécification sur la "tolérance" à la saturation pour chaque composante du vecteur de commande.

La proposition suivante donne une solution au problème 6.1.

Proposition 6.3 : *S'il existe des matrices $W = W^T > 0$ et Y satisfaisant les inégalités matricielles linéaires suivantes :*

- (i) $[H_{(i,j)}W + Q_{(i,j)}(AW + BY) + Q_{(i,j)}(AW + BY)^T]_{1 \leq i,j \leq l} < 0$
- (ii) $\begin{bmatrix} W & WA^T + Y^T D_j(\alpha) B^T \\ AW + B D_j(\alpha) Y & W \end{bmatrix} > 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^m$
- (iii) $\begin{bmatrix} W & Y^T I_{m^{(i)}}^T \\ I_{m^{(i)}} Y & (\rho_{(i)}/\alpha_{(i)})^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m.$
- (iv) $\begin{bmatrix} 1 & v_r^T \\ v_r & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad \forall r = 1, \dots, n_v.$
- (v) $\begin{bmatrix} (P_s/c_s) & I_n \\ I_n & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad \forall s = 1, \dots, n_e$

alors $F = YW^{-1}$ résout le problème 6.1 et l'ellipsoïde $\mathcal{E}(1) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T W^{-1} x \leq 1\}$ est un domaine de stabilité asymptotique pour le système saturé (6.3).

Démonstration :

Elle est immédiate à partir des résultats de la proposition 6.2 et du corollaire 6.2.

□

Puisque les conditions sur les matrices W et Y sont sous la forme de LMIs, elles peuvent être directement considérées comme contraintes d'un problème d'optimisation convexe. Dans ce cas, comme nous l'avons mentionné précédemment, il existe des méthodes numériques et des logiciels qui permettent de résoudre ce type de problème d'une manière efficace (nous pouvons citer, par exemple, [36] et [33]). Ainsi, l'ensemble de LMIs (i)-(v) peut être considéré comme un "framework" basique pour la synthèse de lois de commande du type retour d'état saturant.

Remarque 6.1 : *La LMI (i) représente l'exigence de performance temporelle, que nous satisfaisons avec un placement de pôles dans une région \mathcal{D} convenable. Il est important de remarquer que cette spécification concerne seulement le comportement du système dans la région de linéarité. Lorsque l'état du système est en dehors de la région de linéarité, c'est-à-dire, quand la commande est saturée, notre seul objectif est de ramener l'état asymptotiquement à l'origine.*

6.3.5 Le compromis entre \mathcal{D} , \mathcal{X}_0 et α

Les choix de \mathcal{D} et α représentent un compromis entre performance et tolérance à la saturation. En général, plus stricte est la spécification sur la performance (traduite en termes de placement de pôles dans une région particulière), plus "élevé" est le gain de retour d'état pour la satisfaire et, par conséquent, plus petite est la région de linéarité. Autrement dit, la commande sature plus facilement. D'autre part, plus "petits" sont les coefficients de saturation (i.e., les composantes du vecteur α), plus "grande" est la région de comportement non-linéaire et, par conséquent, la performance générale du système saturé peut être dégradée. Ceci permet toutefois de considérer la stabilisation de domaines de conditions initiales admissibles plus grands.

Prenant en compte ce compromis, nous proposons maintenant un algorithme pour déterminer une matrice F solution du problème 6.1. Pour cela considérons α_{tol} un vecteur dont chaque composante est le coefficient de saturation minimal toléré pour l'entrée de commande correspondante.

Algorithme 6.1 :

- **Pas 0 :** Fixer \mathcal{D} , \mathcal{X}_0 et α_{tol} .
- **Pas 1 :** Faire $\alpha = 1_m$.
- **Pas 2 :** Résoudre un problème de faisabilité en W et Y en considérant les LMIs (i)-(v) de la proposition 6.3.
 - S'il n'existe pas une solution admissible pour ce problème alors diminuer les composantes du vecteur α .
 - Sinon déterminer $F = YW^{-1}$. **FIN**
- **Pas 3 :**
 - Si $\alpha \succ \alpha_{tol}$ aller au pas 2.
 - Sinon, il n'est pas possible de trouver une solution pour le problème 6.1 avec les données fournies en utilisant la méthode proposée.

Remarquons que l'on commence l'algorithme avec $\alpha = 1_m$. Cela veut dire que nous essayons, dans un premier temps, de résoudre le problème linéairement, c'est-à-dire, sans permettre la saturation. En effet, nous vérifions s'il existe une matrice

F et un ellipsoïde contractif \mathcal{E} associé qui soit contenu dans la région de linéarité du système (6.3). Dans ce cas, la matrice F garantit sans saturation la stabilité et la spécification de performance temporelle pour toute trajectoire initialisée dans \mathcal{X}_0 . Cependant, ce type de solution n'est pas toujours atteignable pour \mathcal{D} , \mathcal{X}_0 et α_{tol} donnés. Ainsi, on doit essayer de trouver une solution permettant la saturation. Dans ce cas, on diminue les $\alpha_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, et on vérifie s'il existe une solution. Lorsque pour le triplet de spécifications $(\mathcal{D}, \mathcal{X}_0, \alpha_{tol})$ on ne trouve pas de solution admissible, on peut relâcher soit la spécification de performance, c'est-à-dire, modifier \mathcal{D} , soit la tolérance à la saturation en considérant un α_{tol} plus petit. Néanmoins, il est important de tenir compte de deux choses :

1. La condition donnée par la proposition 6.3 est seulement suffisante. Autrement dit, si nous ne trouvons pas une solution à partir de cette méthode, on ne peut pas garantir qu'il n'existe pas une solution pour le problème.
2. L'ensemble \mathcal{X}_0 peut ne pas être dans la région commandable de l'espace d'état, car la commande est contrainte. Dans ce cas, il n'existe effectivement pas de lois de commande permettant de résoudre le problème 6.1.

Parfois, il est possible d'évaluer a priori si nous pouvons obtenir une solution pour le problème 6.1 en utilisant le résultat de la proposition 6.3. Nous illustrons cela avec deux cas particuliers.

Cas 1 : Considérons que la région \mathcal{D} dans laquelle nous voulons placer les pôles de la boucle fermée est un cercle centré à l'origine avec un rayon $\delta < 1$. Pour vérifier si cette spécification peut être satisfaite avec α et \mathcal{X}_0 donnés, nous pouvons considérer le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\delta, W, Y} \delta \\ \text{sous} \\ \left[\begin{array}{cc} \delta W & WA^T + Y^T B^T \\ AW + BY & \delta W \end{array} \right] > 0 \\ \text{LMIs (ii), (iii), (iv) et (v) de la proposition 6.3} \\ W = W^T > 0 \end{array} \right. \quad (6.21)$$

Ce problème est un problème de valeur propre généralisée (GEVP) [17]. Dans ce cas, il est important de remarquer qu'il existe des routines spécifiques pour résoudre ce type de problème (nous pouvons citer, par exemple, la fonction `gevp` du LMI Control Toolbox pour Matlab [36]).

La solution optimale δ^* de (6.21) représente ainsi le rayon minimal du cercle décrit par \mathcal{D} pour lequel les LMIs (i) – (v) de la proposition 6.3 sont satisfaites avec α et \mathcal{X}_0 donnés.

Cas 2 : Considérons que $\mathcal{X}_0 = \text{Co}\{v_1, \dots, v_{n_v}\}$. Etant donné la région LMI \mathcal{D} et le vecteur α , nous pouvons déterminer l'ensemble homothétique maximal de \mathcal{X}_0 pour lequel il est possible d'obtenir une solution admissible pour les LMIs (i) – (v) de la proposition 6.3. Pour cela considérons le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{cases} \max_{\beta, W, Y} \beta \\ \text{sous} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & \beta v_i^T \\ \beta v_i & W \end{array} \right] > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_v \\ \beta > 0 \\ \text{LMIs (i), (ii) et (iii) de la proposition 6.3} \\ W = W^T > 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

Ainsi, le coefficient d'homothétie maximal est donné par β^* , solution optimale de (6.22). Cela signifie que l'ensemble maximal des conditions initiales homothétique à \mathcal{X}_0 que l'on peut stabiliser en utilisant le résultat de la proposition 6.3 est $\beta^* \mathcal{X}_0$.

6.3.6 Exemple numérique

Nous prenons comme exemple le modèle simplifié de la dynamique d'un hélicoptère dans le plan vertical emprunté à [81]. En considérant une période d'échantillonnage de 0.001s les matrices A et B du système sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0.9964 & 0.0026 & -0.0004 & -0.0460 \\ 0.0045 & 0.9038 & -0.0188 & -0.3834 \\ 0.0097 & 0.0263 & 0.9379 & 0.1223 \\ 0.0005 & 0.0014 & 0.0968 & 1.0063 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.0444 & 0.0167 \\ 0.2935 & -0.7252 \\ -0.5298 & 0.4726 \\ -0.0268 & 0.0241 \end{bmatrix}$$

Notons que la matrice A est instable (ses valeurs propres sont $1.0284 \pm 0.0098i$, 0.9672, 0.8203).

Nous supposons que les commandes du système sont bornées de la façon suivante :

$$-\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \preceq u(k) \preceq \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire, $\rho = [3 \ 2]^T$.

L'ensemble des conditions initiales admissibles est considéré comme un hypercube dans \mathfrak{R}^4 :

$$\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathfrak{R}^4 ; -1 \leq x_{(i)} \leq 1, \forall i = 1, \dots, 4\}$$

Nous considérons la région \mathcal{D} , dans laquelle les pôles de $(A + BF)$ doivent être placés, définie par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{C} ; Re\{z\} \geq 0\} \cap \{z \in \mathcal{C} ; (Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2 \leq \sqrt{\delta}, \delta < 1\}$$

ce qui représente un demi-cercle de rayon δ centré à l'origine. Remarquons que δ représente le rayon spectral maximal désiré pour $(A + BF)$. Plus petit est δ , plus les pôles de $(A + BF)$ sont à l'intérieur du cercle unité et, par conséquent, la réponse temporelle du système tend à être plus rapide. Ainsi, la spécification de δ peut être vue comme une spécification de performance.

Avant d'analyser quelques résultats obtenus, considérons un ensemble homothétique à \mathcal{X}_0 , noté $\beta\mathcal{X}_0$ et un vecteur de coefficients de saturation défini par $\alpha = \alpha_s 1_m$, avec $\alpha_s \in \mathfrak{R}_+$, c'est-à-dire, nous considérons une saturation homogène.

En considérant plusieurs valeurs de α_s et de δ , le tableau 6.1 montre la valeur maximale du coefficient β pour lequel il est possible d'obtenir une solution pour le problème de synthèse à partir de l'application de la proposition 6.3. Ces valeurs sont obtenues à partir de la solution d'un problème d'optimisation convexe du type (6.22). Nous pouvons constater que, pour un δ fixe, les coefficients β obtenus sont plus grands à mesure que l'on diminue α_s . Cela montre qu'en permettant plus de saturation (i.e., α_s plus petit) nous arrivons à stabiliser des domaines de conditions initiales plus grands. D'autre part, la réduction de δ implique une réduction de β . Ce fait montre le compromis entre exigence de performance et taille du domaine de conditions initiales que l'on peut stabiliser en utilisant la méthode proposée. Le symbole * dans le tableau signifie qu'il n'existe pas de solution faisable pour le problème d'optimisation avec le α_s considéré.

Dans le tableau 6.2 sont montrées les valeurs minimales de δ pour lesquelles il est possible d'obtenir une solution pour le problème de synthèse à partir de l'application de la proposition 6.3, en considérant plusieurs valeurs de α_s et de β . Ces données sont obtenues à partir de la solution d'un problème d'optimisation convexe du type (6.21). Nous remarquons que pour β fixé, la valeur minimale de δ tend à diminuer avec la réduction de α_s . Cela illustre le fait que, pour un ensemble donné de conditions initiales, l'utilisation de la saturation permet de placer les pôles de $(A + BF)$

α_s	$\delta=0.7$	$\delta = 0.8$	$\delta = 0.9$	$\delta = 0.95$
1	0.0795	0.3287	0.9347	2.9766
0.9	0.0883	0.3653	1.0386	3.3073
0.8	0.0993	0.4109	1.1684	3.7207
0.7	0.1058	0.4673	1.3353	4.1211
0.6	0.1070	0.4869	1.4631	4.1708
0.5	0.1078	0.4996	1.5585	4.2373
0.4	*	0.5097	1.6634	4.3352
0.3	*	0.5195	1.7734	4.4870
0.2	*	*	1.8818	4.7466

TAB. 6.1 – *Compromis entre performance et taille de \mathcal{X}_0*

α_s	$\beta=0.25$	$\beta=0.5$	$\beta=1$
1	0.7829	0.8377	0.9051
0.9	0.7762	0.8213	0.8973
0.8	0.7685	0.8126	0.8881
0.7	0.7618	0.8043	0.8753
0.6	0.7605	0.8016	0.8649
0.5	0.7598	0.8001	0.8582
0.4	0.7596	0.7990	0.8521
0.3	0.7790	0.7982	0.8477
0.2	0.8577	0.8565	0.8608
0.1	0.9509	0.9523	0.9539

TAB. 6.2 – *Compromis entre tolérance à la saturation et performance*

plus à l'intérieur du cercle unité. Nous notons aussi qu'à partir d'une valeur de α_s (notamment $\alpha_s = 0.2$), la valeur de δ pour un β fixé commence à remonter. Cela s'explique probablement par le fait que les contraintes qui correspondent à la stabilisation du système polytopique deviennent très restrictives à partir d'une valeur de α assez petite.

Enfin, nous fixons $\beta = 1$ et nous comparons les réponses temporelles du système en considérant le retour d'état obtenu pour trois valeurs de α_s :

$$(a) \quad \alpha_s = 1 \Rightarrow F_a = \begin{bmatrix} -1.417 & -0.03592 & 0.252 & 0.9252 \\ -0.5095 & 0.01408 & -0.1483 & -0.2523 \end{bmatrix}$$

$$(b) \alpha_s = 0.6 \Rightarrow F_b = \begin{bmatrix} -4.344 & -0.2679 & 0.5643 & 3.077 \\ -0.3103 & 0.1504 & -0.4237 & -1.401 \end{bmatrix}$$

$$(c) \alpha_s = 0.3 \Rightarrow F_c = \begin{bmatrix} -2.507 & -0.1141 & 0.2699 & 1.497 \\ -1.107 & 0.04011 & -0.218 & -0.3811 \end{bmatrix}$$

La figure 6.1 dépeint la réponse temporelle des quatre états du système pour ces trois cas (F_a : trace cont.; F_b : - - -; F_c : \cdots). Nous remarquons que l'utilisation de la saturation permet d'obtenir des réponses plus rapides. Cependant, quand α est plus petit nous obtenons des amplitudes maximales plus grandes pour deux des états (x_2 et x_3). Cela peut représenter un nouveau compromis lorsque l'on a des contraintes sur l'amplitude des états. La figure 6.2 présente la réponse temporelle des commandes dans les trois cas.

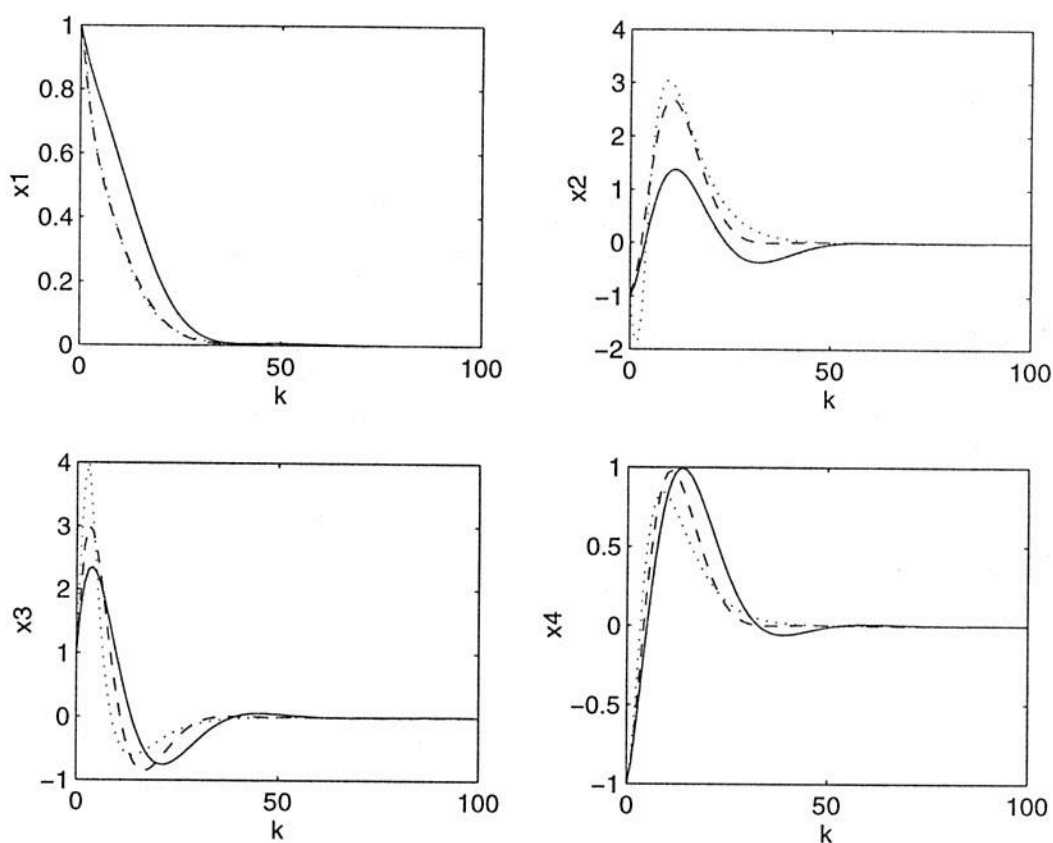


FIG. 6.1 – Réponse temporelle des états

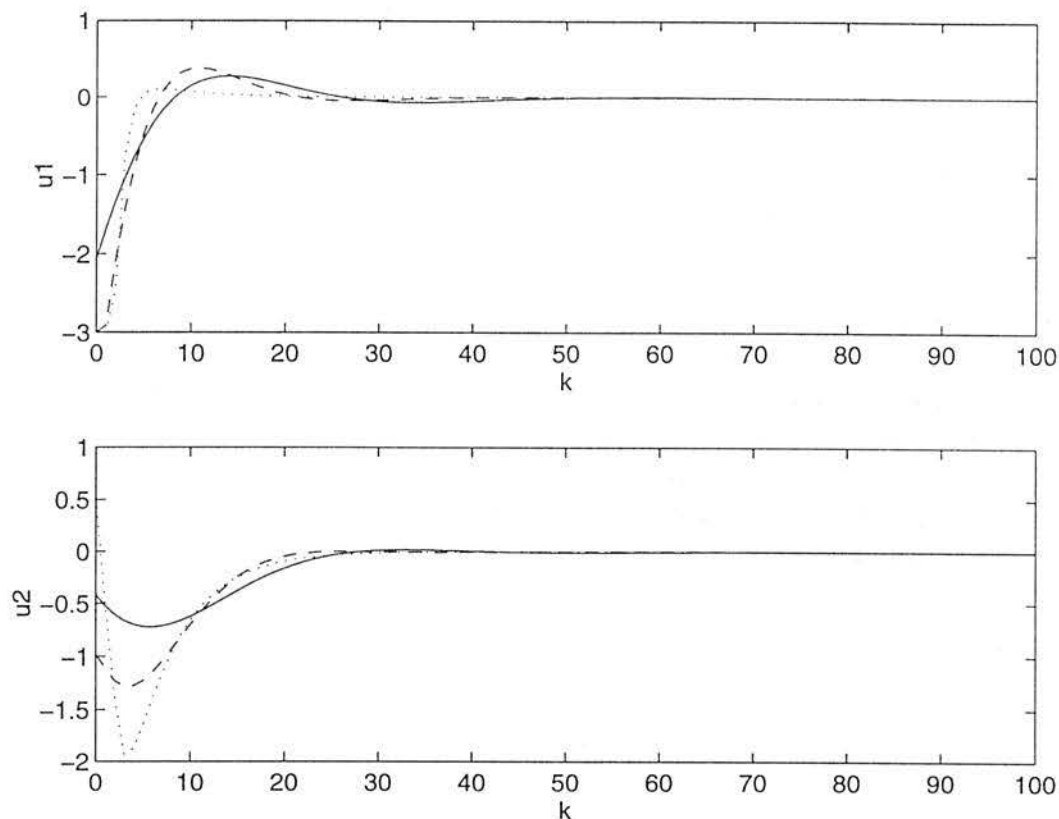


FIG. 6.2 – Réponse temporelle de la commande

6.4 Stabilisation semi-globale

6.5 Résultats de base

Dans cette section nous ajoutons aux hypothèses 6.1 et 6.2¹ l'hypothèse suivante sur le système en boucle ouverte (6.1) :

Hypothèse 6.4 : *Toutes les valeurs propres commandables de A sont à l'intérieur ou sur le cercle unité.*

Nous avons vu dans la section 2.5 que si le système (6.1) satisfait les hypothèses 6.1, 6.2 et 6.4, il est toujours possible de stabiliser le système semi-globalement.

1. Ici la commandabilité de la paire (A, B) peut être substituée par sa stabilisabilité.

Plus spécifiquement, étant donné un ensemble borné \mathcal{X}_0 de conditions initiales admissibles, aussi grand que l'on veut, on peut déterminer une loi de commande du type retour d'état ou retour de sortie dynamique telle que tous les états appartenant à \mathcal{X}_0 sont amenés asymptotiquement à l'origine sans saturation des commandes [64].

En particulier, dans [65], en considérant une équation de Riccati paramétrisée en ϵ , $\epsilon > 0$:

$$P(\epsilon) = A^T P(\epsilon) A + \epsilon I_n - A^T P(\epsilon) B (B^T P(\epsilon) B + I_m)^{-1} B^T P(\epsilon) A \quad (6.23)$$

le résultat suivant a été démontré.

Théorème 6.2 : [65] *Considérons que le système (6.1) vérifie les hypothèses 6.1, 6.2 et 6.4.*

Etant donné un ensemble borné de conditions initiales admissible \mathcal{X}_0 quelconque, il existe ϵ^ , tel que $\forall \epsilon \in (0, \epsilon^*]$, la loi de commande par retour d'état*

$$u(k) = -(B^T P(\epsilon) B + I_m)^{-1} B^T P(\epsilon) A x(k) \quad (6.24)$$

où $P(\epsilon)$ est la solution unique de l'équation (6.23) associée à ϵ , garantit la convergence asymptotique vers l'origine de tous les états qui appartiennent à \mathcal{X}_0 sans saturation des commandes.

En fait, d'après la démonstration de ce résultat, quel que soit le domaine \mathcal{X}_0 et le vecteur ρ (borne sur le vecteur de commandes définie en (6.2)) il existe toujours une matrice P solution de (6.23) et un scalaire positif c tels que l'ellipsoïde $\mathcal{E}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P x \leq c\}$ est contractif et positivement invariant pour le système en boucle fermée avec $u(k)$ donné par (6.24). De plus, les relations d'inclusion suivantes sont satisfaites :

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E}(c) \subset S(F, \rho) \quad (6.25)$$

avec $F = -(B^T P B + I_m)^{-1} B^T P A$.

A partir des résultats présentés dans la section 6.3 et le théorème 6.2, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 6.3 : *Considérons le système (6.1) satisfaisant les hypothèses 6.1, 6.2 et 6.4. Soit \mathcal{X}_0 un ensemble borné quelconque de conditions initiales admissibles du*

type (6.13). Alors :

(a) Il existe toujours une matrice $W = W^T > 0$ et une matrice Y qui vérifient les LMIs suivantes :

$$(i) \begin{bmatrix} W & WA^T + Y^T B^T \\ AW + BY & W \end{bmatrix} > 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} W & Y^T I_{m(i)}^T \\ I_{m(i)} Y & (\rho_{(i)})^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1 & v_r^T \\ v_r & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall r = 1, \dots, n_v.$$

$$(iv) \begin{bmatrix} (P_s/c_s) & I_n \\ I_n & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall s = 1, \dots, n_e$$

(b) Etant donnée une paire (W, Y) solution admissible pour les LMIs (i) – (iv), la loi de commande $u(k) \triangleq Fx(k) = YW^{-1}x(k)$ garantit la convergence asymptotique vers l'origine de toute trajectoire du système (6.1) initialisée dans \mathcal{X}_0 sans saturation des commandes.

Démonstration :

(a) - Si le système (6.1) satisfait les hypothèses 6.1, 6.2 et 6.4, d'après le théorème 6.2, il existe toujours un scalaire ϵ et une matrice $P(\epsilon)$ solution de l'équation (6.23) pour laquelle il existe un scalaire $c > 0$ tel que la relation d'inclusion (6.25) est satisfaite avec $\mathcal{E}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P(\epsilon)x \leq c\}$ et $F = -(B^T P(\epsilon)B + I_m)^{-1} B^T P(\epsilon)A$. Par conséquent, si l'on considère des matrices $W(\epsilon)$ et $Y(\epsilon)$ définies de la manière suivante

$$\begin{aligned} W(\epsilon) &\triangleq (P(\epsilon)/c)^{-1} \\ Y(\epsilon) &\triangleq -c(B^T P(\epsilon)B + I_m)^{-1} B^T P(\epsilon)A \end{aligned}$$

l'existence d'au moins une matrice W et une matrice Y vérifiant les LMIs (i) – (iv) est toujours garanti.

(b) - A partir de la condition (a) et de la proposition 6.3 la démonstration est directe.

□

Le théorème 6.3 peut être considéré comme une généralisation du résultat du théorème 6.2. En effet, toutes les solutions pour le problème de stabilisation semi-globale du système (6.1) obtenues à partir du théorème 6.2, vérifient les conditions du théorème 6.3, mais le contraire n'est pas vrai.

A notre avis, le principal avantage de l'utilisation des conditions *LMIs* du théorème 6.3 est qu'elles permettent d'explorer un ensemble de solutions pour le problème de stabilisation semi-globale plus grand que celui obtenu par l'approche par équation de Riccati. En outre, la formulation LMI admet la prise en compte immédiate de la saturation. Ce fait permet une utilisation plus effective des limites sur la commande afin d'obtenir une convergence plus rapide des trajectoires vers l'origine. Ceci est traité avec plus de détails dans la section suivante.

6.6 Stabilisation semi-globale avec saturation

Supposons donnés :

- \mathcal{X}_0 : un ensemble de conditions initiales admissibles du type (6.13).
- α : un vecteur de coefficients de saturation, représentant une spécification sur la tolérance à la saturation.

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{\delta, W, Y} \delta \\ \text{sous} \\ \left[\begin{array}{cc} \delta W & WA^T + Y^T B^T \\ AW + BY & \delta W \end{array} \right] > 0 \\ \text{LMIs (ii), (iii), (iv) et (v) de la proposition 6.3} \\ W = W^T > 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

Notons que ce problème est un GEVP identique au problème 6.21. La minimisation de δ implique la minimisation du rayon spectral de $(A + BF)$ avec $F = YW^{-1}$. En fait, la satisfaction de la première LMI du problème signifie un placement de pôles dans un cercle centré à l'origine et avec un rayon δ . A partir des LMIs (ii) et (iii) de la proposition 6.3, la saturation est autorisée avec le vecteur α spécifié.

L'idée dans ce cas est d'obtenir, en autorisant la saturation, un retour d'état plus performant dans le sens d'optimiser ou d'améliorer la vitesse de convergence des états vers l'origine.

6.6.1 Exemple Numérique

Considérons le système discret (6.1) avec les données suivantes [64] :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2\sqrt{(2)} & -4 & 2\sqrt{(2)} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec des contraintes sur la commande du type (6.2) avec $\rho = 4$.

Ce système satisfait les hypothèses 6.1, 6.2 et 6.4 et, par conséquent, peut être stabilisé semi-globalement.

Dans [64], en considérant un domaine de conditions initiales défini par un hypercube $\mathcal{X}_0 \triangleq \{x \in \mathbb{R}^4 ; |x_{(i)}| \leq 10, i = 1, 2, 3, 4\}$, les auteurs ont déterminé la matrice de retour d'état suivante :

$$F_{lin} = [0.0394 \quad -0.0840 \quad 0.0796 \quad -0.0283]$$

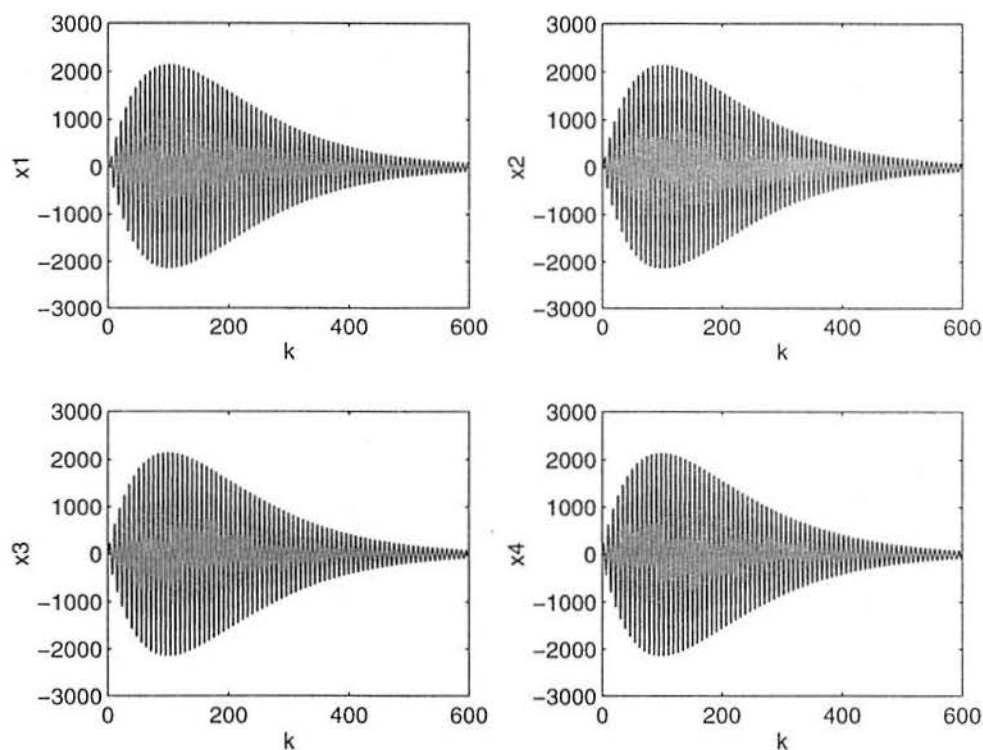
Avec $u(k) = F_{lin}x(k)$, la convergence asymptotique vers l'origine sans saturation de la commande de toutes les trajectoires initialisées \mathcal{X}_0 est garantie.

En utilisant le problème d'optimisation (6.26) avec $\alpha_{(i)} = 0.6, \forall i = 1, \dots, m$, nous obtenons la matrice F suivante :

$$F_{lmi} = [0.1534 \quad -0.3328 \quad 0.3207 \quad -0.1161]$$

D'après la proposition 6.3, la loi de commande $u(k) = sat(F_{lmi}x(k))$ garantit aussi la stabilité asymptotique du système en boucle fermée pour tout $x(0) \in \mathcal{X}_0$.

Les figures 6.3, 6.4, 6.5 illustrent respectivement la réponse temporelle des états avec $u(k) = F_{lin}x(k)$ et $u(k) = sat(F_{lmi}x(k))$, et la réponse temporelle des deux lois de commande. Nous pouvons remarquer que la loi de commande saturante permet d'obtenir des réponses qui convergent plus rapidement vers l'origine avec l'amplitude des oscillations plus petite. Cela est dû au fait que l'on utilise mieux la disponibilité de la commande.

FIG. 6.3 – Réponse temporelle des états avec $u(k) = F_{lin}x(k)$

6.7 Synthèse de commandes du type multi-modes

Dans la section 6.3.5 nous avons insisté sur le compromis entre la performance du système en boucle fermée et la taille du domaine des conditions initiales admissibles devant être stabilisé. En général, l'intuition physique se confirme : plus "grand" est l'ensemble des états à stabiliser, moins performante sera la commande. A partir de cette constatation pratique, on rencontre parfois dans l'industrie l'application de ce que l'on appelle la *commande par mode-dual*. Cette approche, assez intuitive, consiste à appliquer un gain "faible" F_1 si l'état est loin du point d'équilibre et un gain "fort" F_2 lorsque l'état est suffisamment proche du point d'équilibre. Le changement d'un gain à l'autre est fait sur une surface de commutation qui quantifie la notion de "proche" du point d'équilibre. Ainsi, étant donné un ensemble \mathcal{X}_0 de conditions initiales à stabiliser, si on considère une commande par retour d'état, le système en boucle fermée sera décrit par :

$$x(k+1) = Ax(k) + B \text{sat}(F_q x(k)) \quad (6.27)$$

$$\text{avec } F_q = \begin{cases} F_1 & \text{si } x(k) \in \mathcal{S}_1 \supset \mathcal{X}_0 \\ F_2 & \text{si } x(k) \in \mathcal{S}_2 \end{cases}$$

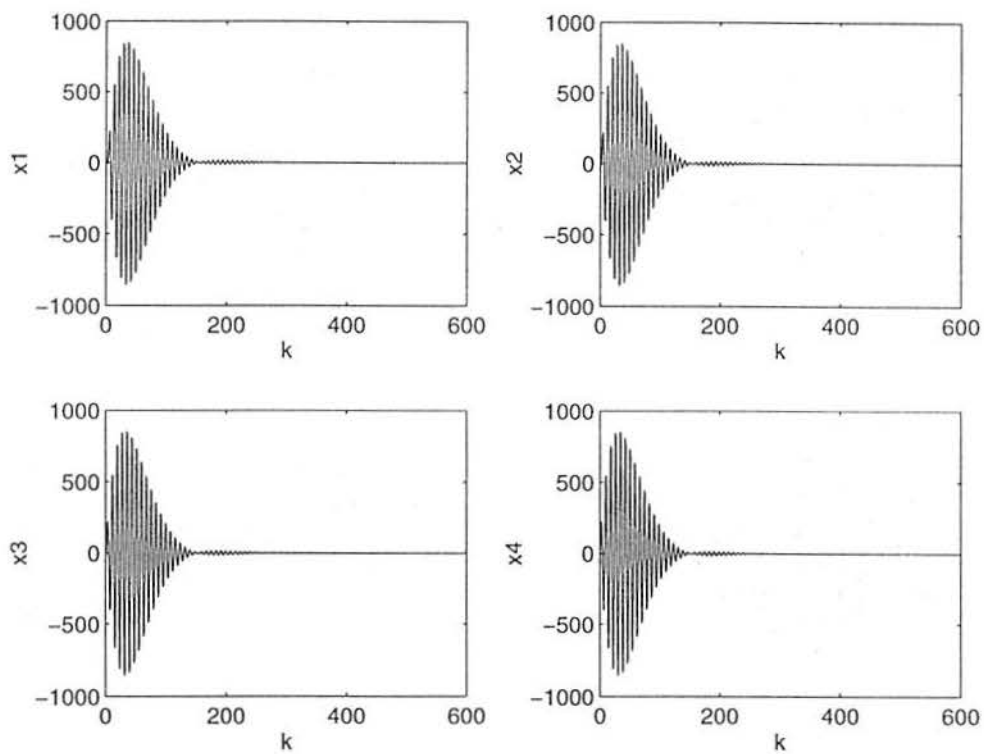


FIG. 6.4 – Réponse temporelle des états avec $u(k) = \text{sat}(F_{lmi}x(k))$

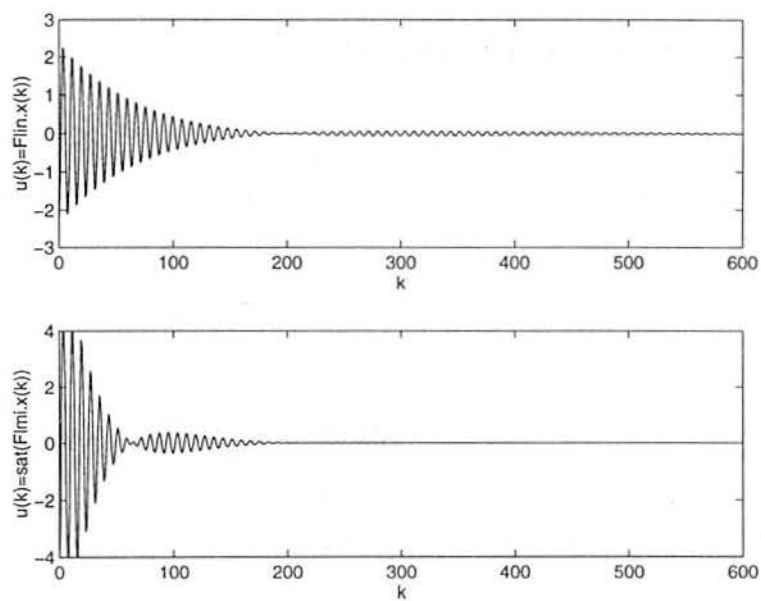


FIG. 6.5 – Comparaison entre les deux commandes

Le choix de la surface de commutation $\partial\mathcal{S}_2$ joue un rôle crucial dans cette approche. Si, par exemple, on choisit une surface qui n'est pas contenue dans la région d'attraction de l'origine associée à la commande plus "forte" F_2 , on peut provoquer l'apparition d'un cycle limite et/ou d'un point d'équilibre parasite [89]. C'est pourquoi, il est important de choisir une surface de commutation qui définisse une région de stabilité asymptotique pour le système en boucle fermée lorsque le gain F_2 est appliqué.

Ce type d'approche peut être généralisée en considérant plusieurs gains F_q et des surfaces de commutation associées $\partial\mathcal{S}_q$. Cette généralisation est appelée *commande multi-modes*. Un travail intéressant, qui utilise ce type d'approche dans le cas de systèmes continus, a été présenté dans [99]. Dans ce travail les gains F_q et les surfaces de commutation sont déterminés à partir de la solution d'équations de Riccati.

L'objectif principal de l'approche multi-modes est d'accélérer la convergence des trajectoires du système en boucle fermée en explorant, d'une façon optimale ou quasi-optimale, les limites de la commande. Dans ce but, nous proposons maintenant une méthode de conception de lois de commande multi-modes basée sur les formulations LMIs présentées dans les sections précédentes.

6.7.1 Méthode basée sur la solution de LMIs

Considérons donnés :

- \mathcal{X}_0 : un domaine de conditions initiales sous la forme (6.13).
- α_{tol} : un vecteur contenant les coefficients de saturation minimaux admissibles.
- N : le nombre de surfaces de commutations devant être utilisées.

La méthode que nous proposons pour construire une loi de commande du type retour d'état multi-modes est décrite par les pas suivants :

1. Considérons N ensembles homothétiques à \mathcal{X}_0 , tels que :

$$\mathcal{X}_q = \beta_q \mathcal{X}_0 \quad , \quad 0 < \beta_q < 1 \quad q = 1, \dots, N$$

$$\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}_{N-1} \subset \dots \subset \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_0$$

Pour chaque \mathcal{X}_q associons un vecteur $\alpha_q \preceq \alpha_{tol}$.

2. Résolvons les problèmes d'optimisation suivant, pour $q = 0, \dots, N$:

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{(W_q, Y_q, \delta_q) \\ \text{SOUS}}} \delta_q \\ \text{(i)} & \begin{bmatrix} \delta_q W_q & W_q A^T + Y_q^T B^T \\ AW_q + BY_q & \delta_q W_q \end{bmatrix} > 0 \\ \text{(ii)} & \begin{bmatrix} W_q & W_q A^T + Y_q^T D_j(\alpha_q) B^T \\ AW_q + BD_j(\alpha_q) Y_q & W_q \end{bmatrix} > 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^m \\ \text{(iii)} & \begin{bmatrix} W_q & Y_q^T I_{m(i)}^T \\ I_{m(i)} Y_q & (\rho(i)/\alpha_{q(i)})^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m. \\ \text{(iv)} & \begin{bmatrix} 1 & \beta_q v_r^T \\ \beta_q v_r & W_q \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall r = 1, \dots, n_v. \\ \text{(v)} & \begin{bmatrix} (P_s/c_s) & I_n \\ I_n & W_q \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall s = 1, \dots, n_e \\ \text{(vi)} & W_q = W_q^T > 0, \quad \delta_q > 0 \end{aligned}$$

3. Pour $q = 0$ définissons: $F_0 = Y_0 W_0^{-1}$

Pour $q = 1, \dots, N$ définissons:

- La matrice de retour d'état: $F_q = Y_q W_q^{-1}$
- La surface de commutation: $\partial \mathcal{S}_q = \{x \in \mathfrak{R}^n; x^T W_q^{-1} x = 1\}$

D'après la proposition 6.3, chaque surface de commutation $\partial \mathcal{S}_q$ correspond à une région de stabilité asymptotique $\mathcal{S}_q \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n; x^T W_q^{-1} x \leq 1\}$ pour le système

$$x(k+1) = Ax(k) + B \text{sat}(F_q x(k)) \quad (6.28)$$

Ainsi, en considérant qu'il est possible de trouver un gain initial F_0 à partir des données fournies, la convergence asymptotique vers l'origine de toutes les trajectoires du système (6.1) qui partent de \mathcal{X}_0 est garantie par l'application de la loi de commande définie de la façon suivante:

$$u(k) = \begin{cases} \text{sat}(F_0 x(k)) & \text{si } x(k) \in \mathcal{S}_0, \quad x(k) \notin \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_N\} \\ \text{sat}(F_1 x(k)) & \text{si } x(k) \in \mathcal{S}_1, \quad x(k) \notin \{\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \dots, \mathcal{S}_N\} \\ \vdots & \vdots \\ \text{sat}(F_N x(k)) & \text{si } x(k) \in \mathcal{S}_N \end{cases} \quad (6.29)$$

Nous avons utilisé comme critère d'optimisation la minimisation du rayon spectral de la matrice $(A + BF_q)$. Ainsi, à mesure que la trajectoire s'approche de l'origine

nous appliquons des gains F_q qui placent successivement les pôles de $(A + BF_q)$ plus à l'intérieur du cercle unité. Par conséquent, la vitesse de convergence vers l'origine tends à être améliorée. Cependant, d'autres critères peuvent être envisagés.

Remarque 6.2 : *Nous n'avons considéré aucune hypothèse sur la nécessité d'avoir*

$$\mathcal{S}_q \subset \mathcal{S}_{q-1} \quad (6.30)$$

En effet, dans le cas discret cela n'est pas nécessaire lorsque l'on est capable de mettre en oeuvre un schéma de priorité, c'est-à-dire, si à l'instant k , $x(k)$ appartient à plusieurs \mathcal{S}_q , la matrice F_q active doit être celle pour lequel β_q est plus petit.

Par contre, pour le cas des systèmes continus ce type de schéma est plus difficile, voire impossible, à mettre en oeuvre. Dans ce cas, nous pouvons imposer l'inclusion (6.30). Dans le problème d'optimisation, ce type de contrainte peut être facilement exprimé sous la forme d'une LMI en considérant le résultat du lemme 6.2.

Remarque 6.3 : *Pour la détermination de chaque paire (F_q, \mathcal{S}_q) nous avons considéré que la commande pouvait saturer. Si l'on désire éviter des solutions où la commande sature effectivement, il suffit de fixer $\alpha_q = 1_m$. Cependant, si la matrice A est instable, nous serons vraisemblablement obligés de considérer la saturation pour pouvoir obtenir le gain initial F_0 et une région de stabilité asymptotique \mathcal{S}_0 contenant \mathcal{X}_0 . Les autres surfaces de commutation et les gains associés peuvent alors être déterminés, de façon à éviter la saturation. Lorsque la matrice A est asymptotiquement ou critiqueusement stable ou encore critiqueusement instable, une solution sans saturation dès le gain F_0 peut être envisagée.*

6.7.2 Exemple numérique

Considérons le modèle linéaire d'un pendule étudié dans [99]. En considérant une période d'échantillonnage de 0.001s les matrices du système sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0.9995 & 0.0100 \\ -0.1000 & 0.9995 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0100 \end{bmatrix}$$

La commande est contrainte dans l'intervalle $[-5; 5]$, c'est-à-dire, $\rho = 5$.

L'ensemble d'états initiaux admissibles \mathcal{X}_0 , est un cercle de rayon égal à 1 centré à l'origine.

Nous voulons déterminer une loi de commande multi-modes qui stabilise le système asymptotiquement pour toute condition initiale appartenant à \mathcal{X}_0 . Pour cela nous appliquons la méthode proposée dans la section 6.7.1 à deux cas en considérant :

- 5 surfaces de commutation, c'est-à-dire, $N = 5$.
- $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.8, \beta_3 = 0.6, \beta_4 = 0.4, \beta_5 = 0.2$.

Dans un premier cas nous considérons $\alpha_q = 1, \forall q = 1, \dots, 5$, c'est-à-dire, le problème est résolu sans saturation. Dans ce cas nous obtenons les matrices de gain suivantes :

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0.0022 & -1.5214 \end{bmatrix} ; F_{12} = \begin{bmatrix} -0.0806 & -1.8688 \end{bmatrix} ; F_{13} = \begin{bmatrix} -0.4223 & -2.4065 \end{bmatrix}$$

$$F_{14} = \begin{bmatrix} -1.6125 & -3.3355 \end{bmatrix} ; F_{15} = \begin{bmatrix} -7.3920 & -5.3756 \end{bmatrix}$$

chaque matrice $F_{1q}, q = 1, \dots, 5$ est associée à une surface de commutation $\partial\mathcal{S}_q = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P_{1q} x = \beta_q\}$. Les matrices P_{1q} obtenues sont :

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.9926 & 0.0755 \\ 0.0755 & 0.0985 \end{bmatrix} ; P_{12} = \begin{bmatrix} 1.5478 & 0.1434 \\ 0.1434 & 0.1521 \end{bmatrix} ; P_{13} = \begin{bmatrix} 2.7369 & 0.3157 \\ 0.3157 & 0.2595 \end{bmatrix}$$

$$P_{14} = \begin{bmatrix} 6.1142 & 0.8760 \\ 0.8760 & 0.5178 \end{bmatrix} ; P_{15} = \begin{bmatrix} 24.3971 & 3.7447 \\ 3.7447 & 1.3653 \end{bmatrix}$$

Dans un deuxième cas nous considérons $\alpha_q = 0.6, \forall q = 1, \dots, 5$, c'est-à-dire, le problème est résolu en permettant la saturation dans toutes les régions les \mathcal{S}_q . les matrices de gain F_{2q} et les matrices P_{2q} qui définissent les surfaces de commutation obtenues dans ce cas sont :

$$F_{21} = \begin{bmatrix} -0.4062 & -2.4064 \end{bmatrix} ; F_{22} = \begin{bmatrix} -0.9649 & -2.8880 \end{bmatrix} ; F_{23} = \begin{bmatrix} -2.2507 & -3.6029 \end{bmatrix}$$

$$F_{24} = \begin{bmatrix} -5.2998 & -4.7812 \end{bmatrix} ; F_{25} = \begin{bmatrix} -16.1831 & -7.2972 \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 0.9852 & 0.1138 \\ 0.1138 & 0.0935 \end{bmatrix} ; P_{22} = \begin{bmatrix} 1.5290 & 0.2011 \\ 0.2011 & 0.1376 \end{bmatrix} ; P_{23} = \begin{bmatrix} 2.7083 & 0.3976 \\ 0.3976 & 0.2173 \end{bmatrix}$$

$$P_{24} = \begin{bmatrix} 6.0954 & 0.9473 \\ 0.9473 & 0.3890 \end{bmatrix} ; P_{25} = \begin{bmatrix} 24.5113 & 3.3788 \\ 3.3788 & 0.9030 \end{bmatrix}$$

La figure 6.6 montre la trajectoire de l'état pour la condition initiale $x(0) = [1 \ 0]^T$ en considérant : l'application de la loi $u(k) = F_{11}x(k)$ (\dots) qui permet de stabiliser l'ensemble des conditions initiales \mathcal{X}_0 sans saturation de la commande ; l'application de la loi de commande multi-modes sans saturation (matrices F_{1q}) définie dans le premier cas ci-dessus ($- - -$) ; l'application de la loi de commande avec saturation définie (matrices F_{2q}) dans le deuxième cas ci-dessus (tracé continu). Nous remarquons que la vitesse de convergence vers l'origine est nettement améliorée avec la loi de commande multi-modes saturante. La figure 6.7 montre la réponse temporelle de la commande dans les trois cas. La figure 6.8 illustre les surfaces de commutation pour le cas de la commande multi-modes saturante.

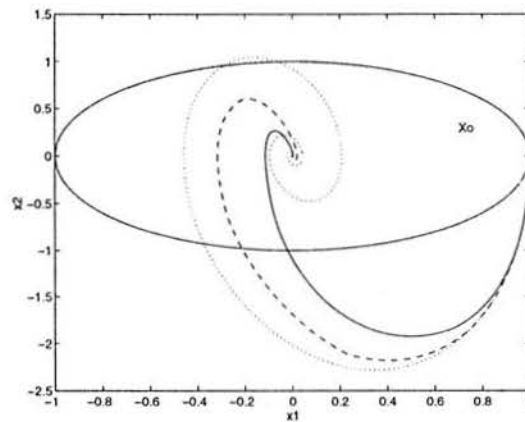


FIG. 6.6 – Trajectoire de l'état

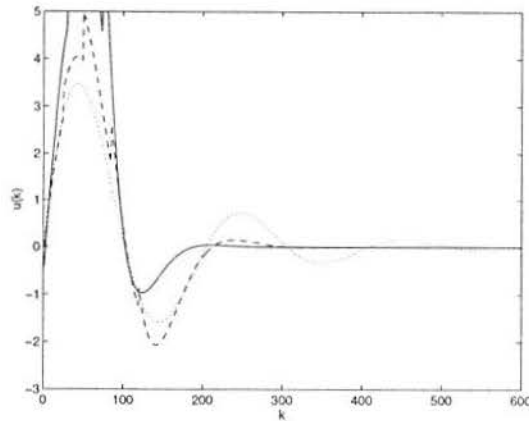


FIG. 6.7 – Réponse temporelle de la commande

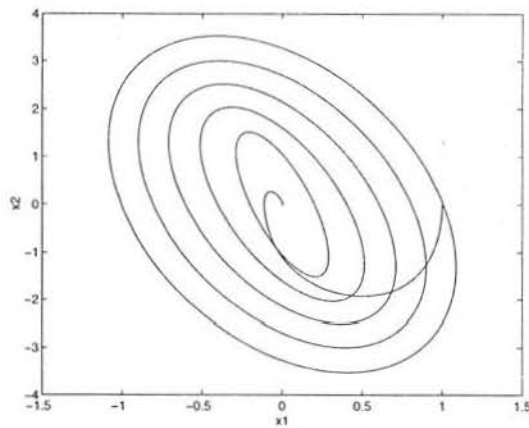


FIG. 6.8 – Surfaces de commutations

6.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de la synthèse de lois de commandes du type retour d'état linéaire pour des systèmes linéaires, en prenant en compte, a priori, la possibilité de saturation de la commande.

L'utilisation de la représentation polytopique du système avec saturation des commandes, nous a permis de formuler des conditions constructives pour la stabilisation locale du système en boucle fermée. À partir de ces conditions nous avons proposé un "framework" de conditions, sous la forme de LMIs, permettant la détermination d'une matrice F de retour d'état qui garantit :

- La stabilisation pour un ensemble donné de conditions initiales admissibles,

en considérant une certaine tolérance à la saturation des commandes.

- Le placement des valeurs propres de la matrice $(A + BF)$ dans une région LMI du plan complexe. Ce placement ayant pour but la satisfaction d'une certaine spécification de performance temporelle dans la région de linéarité du système saturé.

Le compromis entre la taille du domaine de conditions initiales, la tolérance à la saturation et l'exigence de performance en boucle fermée a été souligné. Dans ce sens, nous avons montré, à travers quelques exemples, que pour stabiliser un certain domaine de conditions initiales et/ou garantir une certaine performance pour la réponse temporelle, l'utilisation effective de la saturation est parfois nécessaire. La méthode proposée permet donc de gérer ce compromis d'une façon systématique.

Etant donné qu'il existe aujourd'hui des logiciels, basés sur des algorithmes numériques extrêmement efficaces, qui permettent de résoudre des problèmes d'optimisation convexes avec des contraintes sous la forme de LMIs, nous pensons que cette méthode représente une manière intéressante de considérer la saturation lors de l'étape de conception de la loi de commande.

Conclusion générale

La présence, dans la pratique, de contraintes d'ordre physique et/ou de sécurité empêche l'application de signaux de commandes d'amplitude illimitée. La négligence de ces bornes sur la commande et, par conséquent, la possible saturation de la commande peut être source d'instabilité ou provoquer des effets indésirables sur le système en boucle fermée. C'est pourquoi nous considérons comme majeurs, sur les plans théorique et pratique, les deux problèmes suivants :

- L'analyse du comportement du système en boucle fermée lorsque la commande sature, afin de valider la loi de commande.
- La synthèse de lois de commande prenant en compte explicitement la possibilité de saturation.

Dans ce sens, la contribution de notre thèse a porté sur l'étude de la stabilité et de la stabilisation locale des systèmes linéaires avec saturation des commandes. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés, d'une part, à la détermination de régions de comportement non-linéaire en boucle fermée où la stabilité asymptotique de l'origine est garantie, et, d'autre part, à la détermination de lois de commande prenant en compte, lors de l'étape de conception, la possibilité de saturation des commandes.

Notre travail étant basé sur la théorie de Lyapunov, nous avons proposé, dans un premier temps, un bref rappel des principaux concepts et résultats associés à cette théorie. Nous avons insisté sur le fait que, pour un système non-linéaire, la détermination analytique de la région d'attraction de l'origine est, en général, impossible. Cependant, il est toujours possible d'obtenir des régions de stabilité asymptotique locale à partir d'ensembles contractifs et invariants associés à des fonctions de Lyapunov.

Ensuite, nous avons donné un aperçu rapide des travaux traitant du problème de commande des systèmes linéaires avec saturation des commandes. Nous avons vu que

la stabilisation globale et semi-globale peuvent être envisagées seulement lorsque le système en boucle ouverte n'est pas strictement instable. Par ailleurs, les méthodes proposées dans la littérature concernant ces deux type d'approche ne permettent pas de grandes améliorations de la performance du systèmes en boucle fermée. Ainsi, la stabilisation locale nous semble plus pratique pour gérer le compromis entre la performance et la stabilité du système saturé.

Notre contribution correspond aux résultats présentés dans les parties II et III du mémoire.

Dans la deuxième partie nous avons considéré l'analyse de la stabilité du système saturé par une approche polyédrale. Les résultats que nous avons obtenus par cette approche sont basés sur deux types de modélisation du système saturé : par régions de saturation et par modèle polytopique. A partir de la modélisation par régions de saturation nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour l'invariance positive et la contractivité de domaines polyédraux par rapport au système saturé. Avec la modélisation par polytope de matrices nous avons pu proposer seulement des conditions suffisantes pour l'invariance et la contractivité. Cela s'explique par le fait que cette modélisation représente le comportement du système saturé d'une manière conservative. Les conditions de contractivité obtenues avec les deux approches nous ont permis de formuler des algorithmes d'expansion homothétique d'ensembles contractifs sur la région de comportement non-linéaire du système en boucle fermée. Ces algorithmes sont basés sur des schémas de programmation linéaire. En particulier, en utilisant l'approche polytopique nous avons formalisé théoriquement une procédure permettant l'obtention d'expansions non-homothétiques ; l'algorithme résultant est aussi basé sur des schémas de programmation linéaire. Nous avons montré que lorsque le polyèdre contractif est compact, nous pouvons associer à cet ensemble une fonction de Lyapunov polyédrale strictement décroissante et conclure sur la stabilité asymptotique locale du système saturé. Nous avons montré également que, sous des hypothèses complémentaires, il est possible de conclure sur la stabilité locale dans des polyèdres non-bornés. A la fin de la partie II nous avons indiqué comment combiner les résultats obtenus à partir des deux types de modélisation afin d'obtenir des régions de stabilité asymptotique plus grandes. Nous pouvons dire que l'inconvénient majeur de cette approche réside dans le fait que les régions de stabilité obtenues dépendent du domaine de départ utilisé. Cependant, en considérant le caractère nécessaire et suffisant des conditions obtenues avec la modélisation par régions de saturation, la possibilité d'obtenir des expansions non-homothétiques à partir du modèle polytopique et le fait que les algorithmes, basés sur des schémas de programmation linéaire, sont de faible complexité, nous pensons que cette approche polyédrale est assez intéressante pour l'analyse de systèmes avec saturation des commandes.

<i>Approche</i>	<i>Points Forts</i>	<i>Points Faibles</i>
Polyédrale - reg. saturation	<ul style="list-style-type: none"> • CNS • prog. linéaire 	<ul style="list-style-type: none"> • complexité algorithmique • fixe domaine de départ
Polyédrale - mod. polytopique	<ul style="list-style-type: none"> • expansion non-homothétique • prog. linéaire 	<ul style="list-style-type: none"> • CS • fixe domaine de départ
Ellipsoïdale	<ul style="list-style-type: none"> • pas de domaine de départ • LMI 	<ul style="list-style-type: none"> • CS

TAB. - *Comparaison entre les approches d'analyse*

Dans la troisième partie de la thèse nous avons proposé quelques résultats concernant l'analyse et la synthèse de lois de commande saturantes en utilisant des domaines contractifs de type ellipsoïdal et la représentation polytopique du système saturé. Cette approche est donc liée à la détermination de fonctions de Lyapunov quadratiques localement valables pour le système saturé.

Tout d'abord, dans le chapitre 5 nous avons proposé des conditions suffisantes sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs), pour la contractivité d'un ellipsoïde par rapport au système saturé. A partir de ces conditions nous avons présenté un algorithme, basé sur la solution itérative de deux problèmes d'optimisation convexes, dans le but de déterminer des régions ellipsoïdales de stabilité asymptotique pour le système avec les commandes saturantes. Le critère d'optimisation utilisé dans l'algorithme est lié à la maximisation d'une caractéristique géométrique de la région ellipsoïdale. Nous pouvons dire que le principal avantage de cette approche par rapport à l'approche polyédrale est que nous n'avons pas besoin d'un ensemble de départ. En effet, la région de stabilité obtenue tend à être maximale selon le critère géométrique choisi. Comme inconvénient majeur de cette approche nous pouvons citer la nature suffisante des conditions, ce qui peut amener à l'obtention de domaines de stabilité conservatifs. Dans le tableau ci-dessus nous résumons les points forts et les points faibles des trois approches d'analyse que nous avons proposées dans ce travail. Il est important de remarquer que nous pouvons toujours combiner ces trois approches afin d'obtenir des régions de stabilité plus grandes. Ainsi, par exemple, nous pouvons déterminer d'abord un ensemble ellipsoïdal maximal selon un certain critère géométrique, ensuite déterminer l'ensemble polyédral maximal contenu dans la région de validité du modèle polytopique et, enfin, utiliser la condition nécessaire et suffisante de contractivité polyédrale pour essayer de faire encore une expansion homothétique.

Enfin, dans le chapitre 6, nous avons considéré le problème de la synthèse de lois de commande saturantes. Nous avons proposé une méthode basée sur la solution d'un ensemble de LMIs. Cela permet de déterminer conjointement une matrice de retour d'état et un ellipsoïde contractif par rapport au système saturé. Cet ellipsoïde contient une région d'état initiaux donnée, \mathcal{X}_0 , et est contenu dans la région de validité du modèle polytopique associée à un vecteur de coefficients de saturation α , également donné. A notre avis, un des points forts de cette méthode réside dans le fait qu'elle permet facilement de combiner le problème de stabilisation sous saturation avec d'autres spécifications ou objectifs de commande. En particulier, nous avons considéré le problème de placement de pôles du système saturé lorsque il évolue dans la région de linéarité. En considérant que le placement de pôles dans une région spécifique du plan complexe représente une spécification de performance autour de l'origine, nous avons souligné le compromis entre l'exigence en performance, la taille du domaine \mathcal{X}_0 , et la tolérance à la saturation représentée par α . Nous avons montré, à travers des exemples, qu'il est possible de stabiliser des domaines d'états initiaux plus grands et d'obtenir des réponses temporelles plus rapides en permettant la saturation de la commande. Comme il existe aujourd'hui des algorithmes et des logiciels extrêmement efficaces pour la résolution des LMIs, nous pensons que la méthode proposée fournit une procédure systématique pour maîtriser les effets indésirables de la saturation et pour utiliser la saturation dans le but, d'une part, de stabiliser des régions d'états initiaux plus grandes et, d'autre part, d'améliorer la performance temporelle du système en boucle fermée. Néanmoins, nous devons reconnaître, d'une part, que les conditions établies sont seulement suffisantes et, d'autre part, que les résultats sont basés sur la détermination d'un retour d'état, limitant ainsi leur application pratique.

Ainsi, en considérant les résultats proposés dans cette thèse, nous pouvons citer quelques problèmes qui restent ouverts et méritent une étude plus approfondie tels que :

- L'obtention d'un algorithme d'expansion non-homothétique à partir de la représentation par régions de saturation.
- L'application des conditions de contractivité d'un polyèdre pour la synthèse des lois de commande.
- L'obtention d'une condition nécessaire et suffisante pour la contractivité ellipsoïdale.
- L'extension de la méthode de synthèse au cas du retour de sortie.

En conclusion, nous pensons que les résultats qui nous avons obtenus jusqu'à présent peuvent être appliqués, étendus ou encore servir de base, dans un futur proche, pour traiter les problèmes suivants :

- Commande des systèmes à retards avec saturation des commandes.
- Commande des systèmes bilinéaires avec saturation des commandes.
- Poursuite avec saturation des commandes.

Annexe A

Polyèdres et ellipsoïdes

Dans cette thèse nous nous intéressons à la détermination de régions de stabilité asymptotique pour des systèmes linéaires avec saturation des commandes. En particulier, nous considérons deux types de régions : polyédrales et ellipsoïdales. Ainsi, nous sommes concernés par l'étude des propriétés d'invariance et de contractivité d'ensembles polyédraux et ellipsoïdaux par rapport au système saturé. Il est donc utile de préciser quelques définitions et propriétés relatives à ces deux types d'ensembles.

A.1 Ensembles polyédraux

Un ensemble polyédral est défini par l'intersection d'une famille finie de demi-espaces dans \mathbb{R}^n . Ces demi-espaces sont définis à partir d'hyperplans du type $qx = r$ avec $q^T \in \mathbb{R}^g$ et $r \in \mathbb{R}$. Autrement dit, un domaine polyédral est un ensemble de points $x \triangleq [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ dans \mathbb{R}^n qui satisfont un système fini d'inégalités du type :

$$\begin{cases} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \dots + q_{1n}x_n \leq r_1 \\ \vdots \\ q_{g1}x_1 + q_{g2}x_2 + \dots + q_{gn}x_n \leq r_g \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons définir un ensemble polyédral générique de la façon suivante :

Définition A.1 : [82] *Considérons une matrix $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$ et un vecteur $r \in \mathbb{R}^g$. Un*

ensemble polyédral quelconque dans \mathfrak{R}^n est donc défini par :

$$S(Q, r) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; Qx \preceq r\}$$

À partir de cette définition, il est facile de démontrer les propriétés suivantes :

Propriété A.1 :

- (i) Les ensembles polyédraux sont toujours des ensembles convexes et fermés.
- (ii) L'intersection d'une famille finie d'ensembles polyédraux est aussi un ensemble polyédral.

Notons que l'intersection entre deux polyèdres peut être représentée de la façon suivante :

$$S(Q_1, r_1) \cap S(Q_2, r_2) \triangleq \left\{ x \in \mathfrak{R}^n ; \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} x \preceq \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\}$$

D'autre part, remarquons que si $r_{(i)} \geq 0, \forall i = 1, \dots, g$, alors le polyèdre $S(Q, r)$ contient l'origine. En particulier, si au moins une des composantes de r est nulle ($r_{(i)} = 0$) alors l'origine est sur la frontière de $S(Q, r)$.

La définition suivante donne la notion d'homothétie polyédrale.

Définition A.2 : La famille des ensembles homothétiques à $S(Q, r)$ est définie par des ensembles du type :

$$S(Q, \eta r) = \eta S(Q, r) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; Qx \preceq \eta r\}$$

où η est un scalaire positive.

Passons maintenant à la définition de quelques ensembles polyédraux particuliers.

A.1.1 Polyèdres non-bornés

Soit une demi-droite dans l'espace \mathfrak{R}^n définie par :

$$L^+ = \{x_0 + \lambda y ; \lambda \geq 0\} \tag{A.1}$$

où $x_0, y \in \mathbb{R}^n$ et $y \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

Définition A.3 : Un polyèdre $S(Q, r)$ est dit **non-borné** s'il contient des demi-droites du type (A.1).

L'identification d'un ensemble non-borné à partir de cette définition n'est pas évidente. Par contre, dans le cas particulier où $\text{rang}(Q) < n$, c'est-à-dire, $\text{Ker } Q \neq \{0\}$, le polyèdre est non-borné puisqu'il contient des droites du type :

$$L = \{x_0 + \lambda y\}$$

avec $x_0 \in S(Q, r)$ et $y \in \text{Ker } Q$. En effet, dans ce cas on a :

$$Q(x_0 + \lambda y) = Qx_0 + 0 \preceq r, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas le polyèdre contient un sous-espace, notamment égal à $\text{Ker } Q$.

La figure A.1 illustre deux types de polyèdres non-bornés. Notons que le polyèdre (a) ne contient pas un sous-espace alors qu'il existe un sous-espace contenu dans le polyèdre (b).

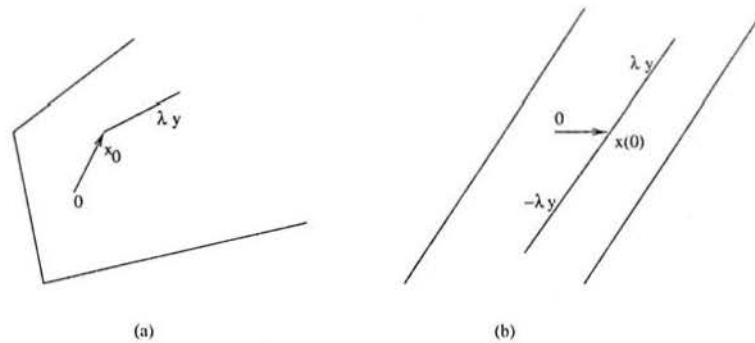


FIG. A.1 – Polyèdres non-bornés

A.1.2 Cônes polyédraux

Les cônes polyédraux constituent une classe particulière d'ensembles polyédraux non-bornés. Ils sont définis de la façon suivante :

Définition A.4 : Considérons une matrice $Q \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Un ensemble dans l'espace \mathbb{R}^n défini par :

$$K(Q) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; Qx \preceq 0\}$$

est appelé un cône polyédral.

Ainsi, un cône polyédral est défini à partir d'hyperplans contenant l'origine.

Par ailleurs, si on considère un ensemble de points $\{y_1, y_2, \dots, y_v\}$, un cône K peut être défini à partir d'une combinaison linéaire non-négative de ces points, c'est-à-dire, tout $x \in K$ peut être exprimé comme :

$$x = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_v y_v$$

où $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, v$. De cette manière, un cône K peut aussi être génériquement défini par :

$$K = Y \mathfrak{R}_+^v$$

où Y est une matrice ayant comme colonnes les vecteurs y_i et \mathfrak{R}_+^v est l'orthant positif de \mathfrak{R}^v . La matrice Y est ainsi appelée *générateur* du cône K et les y_i sont appelés les *vecteurs extrémaux* de K .

La définition suivante concerne un cône polyédral translaté.

Définition A.5 : *Etant donné un vecteur $b \in \mathfrak{R}^n$, la translation du cône $K(Q)$ selon b est définie par :*

$$K(Q) + b \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; x = y + b, \forall y \in K(Q)\}$$

ou de façon équivalente :

$$K(Q) + b \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; Qx \preceq Qb\}$$

A.1.3 Polyèdre à facettes parallèles

Un polyèdre défini par des paires d'hyperplans parallèles est décrit génériquement dans la définition suivante :

Définition A.6 : *Soient une matrice $Q \in \mathfrak{R}^{g \times n}$ et deux vecteurs $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}^g$. L'ensemble défini par :*

$$S(Q, r_1, r_2) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; r_1 \preceq Qx \preceq r_2\}$$

est un polyèdre à facettes parallèles.

Dans le cas où $r_1 = -r_2$, le polyèdre est *symétrique* et contient forcément l'origine. Remarquons que $S(Q, r_1, r_2)$ peut toujours être écrit sous la forme standard :

$$S(\bar{Q}, \bar{r}) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \bar{Q}x \preceq \bar{r}\}$$

avec $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix}$ et $\bar{r} = \begin{bmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{bmatrix}$

A.1.4 Polytopes

Définition A.7 : *Un polytope est un ensemble polyédral compact, c'est-à-dire, borné et fermé.*

Une condition nécessaire pour qu'un polyèdre $S(Q, r)$ soit un polytope est que $\text{rang}(Q) = n$. Dans le cas particulier où on a un polyèdre à facettes parallèles $S(Q, r_1, r_2)$ cette condition est aussi suffisante.

Par ailleurs, toute enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans l'espace d'état définit un polytope. Ainsi, nous pouvons toujours représenter un polytope S à partir de la connaissance de ses sommets notés v_1, v_2, \dots, v_p , c'est-à-dire :

$$S \triangleq \text{Co}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$$

autrement dit, un point quelconque $x \in S$, peut être déterminé comme une combinaison linéaire convexe des sommets de S .

A.2 Ensembles ellipsoïdaux

Nous donnons maintenant, comme dans [17], deux définitions pour un ensemble ellipsoïdal, ou tout simplement, un ellipsoïde dans l'espace \mathbb{R}^n .

Définition A.8 : *Soit $T(x)$ une fonction quadratique dans \mathbb{R}^n :*

$$T(x) = x^T A x + 2x^T b + c$$

où $A = A^T > 0$ et $(b^T A^{-1} b - c) > 0$ L'ensemble défini par :

$$\mathcal{E} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; T(x) \leq 0\} \tag{A.2}$$

est un ellipsoïde dans l'espace \mathbb{R}^n .

Définition A.9 : Soient P une matrice symétrique définie positive et un point $x_c \in \mathfrak{R}^n$. L'ensemble :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; (x - x_c)^T P^{-2} (x - x_c) \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{R}^n ; Px + x_c, \|x\| \leq 1\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

définit un ellipsoïde dans l'espace d'état.

Les deux définitions précédentes sont complètement équivalentes. La représentation (A.2) peut être réécrite sous la forme (A.3), à partir des relations suivantes :

$$P = \sqrt{b^T A^{-1} b - c} A^{-1/2} \quad ; \quad x_c = -A^{-1} b$$

D'autre part, pour passer de la représentation (A.3) à la représentation (A.2), il suffit de considérer :

$$A = P^{-2} \quad ; \quad b = -P^{-2} x_c \quad ; \quad c = x_c^T P^{-2} x_c - 1$$

A partir des paramètres A, b, c, P, x_c nous pouvons déterminer le volume et le diamètre de l'ellipsoïde \mathcal{E} :

- le volume de \mathcal{E} est donné par :

$$\text{vol}(\mathcal{E}) = \sqrt{\beta \det((b^T A^{-1} b - c) A^{-1})}$$

où β est un scalaire qui dépend de la dimension de x , c'est-à-dire, de n .

- le diamètre de \mathcal{E} , c'est-à-dire, deux fois la longueur du demi-axe majeur est calculé par :

$$\text{diam}(\mathcal{E}) = 2\sqrt{(b^T A^{-1} b - c) \lambda_{\max}(A^{-1})}$$

La figure A.2 montre un ensemble ellipsoïdal générique dans \mathfrak{R}^2 .

Nous présentons maintenant deux types particuliers d'ellipsoïdes.

A.2.1 Ellipsoïdes centrés à l'origine

Il est facile de remarquer que l'ensemble \mathcal{E} défini par (A.2) (ou (A.3)) est centré à l'origine si $b = 0$ (ou $x_c = 0$). D'une façon générique on a la définition suivante :

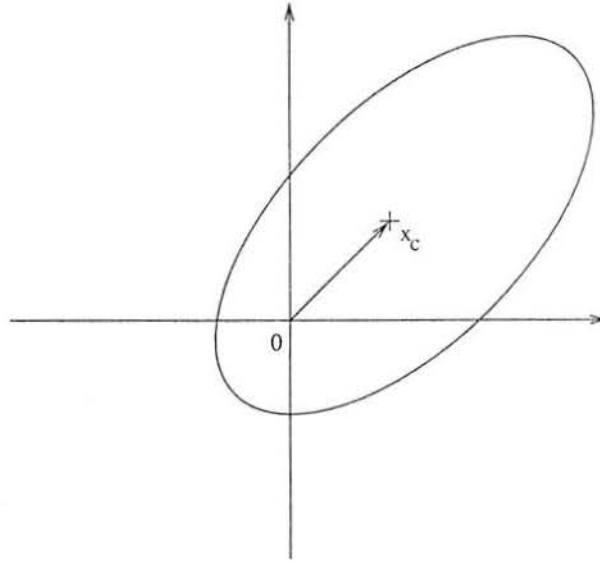


FIG. A.2 – Ensemble ellipsoïdal

Définition A.10 : Soient P une matrice symétrique définie positive et un scalaire $c \geq 0$. L'ensemble défini par

$$\mathcal{E}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P x \leq c\}$$

est un ellipsoïde dans \mathbb{R}^n centré à l'origine.

A.2.2 Cylindres de section ellipsoïdale centrés à l'origine

Lorsque la matrice $P = P^T \geq 0$, on a la définition suivante :

Définition A.11 : Soient P une matrice symétrique semi-définie positive et un scalaire $c \geq 0$. L'ensemble défini par

$$\mathcal{E}_{nb}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x^T P x \leq c\}$$

est un cylindre de section ellipsoïdale dans \mathbb{R}^n centré à l'origine.

Dans ce cas l'ensemble $\mathcal{E}_{nb}(c)$ est non-borné dans les directions associées à $\text{Ker } P$.

Bibliographie

- [1] J. Alvarez-Ramirez, R. Suarez, and J. Alvarez. Semiglobal stabilization of multi-input linear system with saturated linear state feedback. *Systems & Control Letters*, 23:247–254, 1994.
- [2] P. Apkarian, J.P. Chretien, P.Gahinet, and J.M. Biannic. μ -Synthesis by $\mathcal{D}-\mathcal{K}$ iterations with constant scaling. In *Proc. of 2nd European Control Conference (ECC'93)*, volume 4, pages 2075–2080, Groningen, Netherlands, 1993.
- [3] A. Benzaouia. The resolution of equation $XA + XBX = HX$ and the pole assignement problem. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39(10):2091–2095, 1994.
- [4] A. Benzaouia and C. Burgat. Regulator problem for linear discrete-time systems with nonsymmetrical constrained control. *Int. J. of Control.*, 48(6):2442–2451, 1988.
- [5] A. Benzaouia and C. Burgat. Existence of non-symmetrical Lyapunov functions for linear systems. *Int. J. of Sys. & Sci.*, 5:597–607, 1989.
- [6] D.S. Bernstein and A.N. Michel. A chronological bibliography on saturating actuators. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 5:375–380, 1995.
- [7] J. Bernussou, P.L.D. Peres, and J.C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13:65–72, 1989.
- [8] J.P. Béziat. *Sur la commande adaptative multivariable sous contraintes*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, avril 1989. Rapport LAAS No. 89093.
- [9] G. Bitsoris. On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems. *Systems & Control Letters*, 11(4):243–248, 1988.

- [10] G. Bitsoris. Existence of positively invariant polyhedral sets for continuous-time linear systems. *Control Theory and Advanced Technology*, 7(3):407–427, 1991.
- [11] G. Bitsoris and M. Vassilaki. Constrained regulation of linear systems. *Automatica*, 31(2):223–227, 1995.
- [12] F. Blanchini. Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35(11):1231–1234, 1990.
- [13] F. Blanchini. Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39(2):428–433, 1994.
- [14] F. Blanchini and S. Miani. Best transient estimate for linear discrete-time uncertain systems. In *Proc. of 3rd European Control Conference (ECC'95)*, pages 1010–1015, Rome, Italy, 1995.
- [15] F. Blanchini and S. Miani. Best transient estimate for linear discrete-time uncertain systems. In *Proc. of the 3rd European Control Conference (ECC'95)*, pages 1010–1015, Rome, Italy, 1995.
- [16] F. Blanchini and S. Miani. Constrained stabilization of continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 28:95–102, 1996.
- [17] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [18] C. Burgat and S. Tarbouriech. Global stability of a class of linear systems with saturated controls. *Int. J. of Sys. & Sci.*, 23(1):37–56, 1992.
- [19] C. Burgat and S. Tarbouriech. Stability and control of saturated linear systems. In A.J. Fossard and D. Normand-Cyrot, editors, *Non-Linear Systems*, volume 2, chapter 4. Chapman & Hall, 1996.
- [20] C. Burgat, S. Tarbouriech, and M. Klai. An algorithm for estimating the stability domain of linear discrete-time systems with saturations. In *Proc. of IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics (IEEE-SMC)*, volume 1, pages 319–324, Le Touquet, France, 1993.
- [21] E.B. Castelan. *Sur l'invariance positive et la commande sous contraintes de systèmes linéaires multivariables*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, avril 1992. Rapport LAAS No. 92223.

- [22] E.B. Castelan, J.M. Gomes da Silva Jr., and J.E.R. Cury. A reduced order framework applied to linear systems with constrained controls. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41(2):249–255, 1996.
- [23] E.B. Castelan and J.C. Hennet. Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous time systems. *Automatica*, 28(3):605–611, 1992.
- [24] E.B. Castelan and J.C. Hennet. Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 38(11):1680–1685, 1993.
- [25] E.B. Castelan and S. Tarbouriech. On positive invariance and output feedback stabilization of input constrained linear systems. In *Proc. of 1994 American Control Conference (ACC'94)*, volume 3, pages 2740–2744, Baltimore, U.S.A., 1994.
- [26] C.T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, Inc, New York, 1984.
- [27] M. Chiali and P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41(3), 1996.
- [28] J.B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1990.
- [29] R.M. Dolphus and W.E. Schmitendorf. Stability analysis for a class of linear controllers under control constraints. In *Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'91)*, pages 77–80, Brighton (U.K), 1991.
- [30] J.J. Dongarra, S. Hammarling, and J. Wilkinson. Numerical considerations in computing invariant subspaces. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13(1):145–161, 1992.
- [31] C.E.T. Dórea and J.C. Hennet. On (A,B)-invariance of polyhedral domains for discrete-time systems. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'96)*, pages 4319–4324, Kobe, Japan, 1996.
- [32] C.E.T. Dórea and B.E.A. Milani. Design of L-Q regulators for state constrained continuous-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40(3):544–548, 1995.
- [33] L. El Ghaoui, F. Delbecque, and R. Nikoukhah. LMITOOL: A user-friendly interface for LMI optimization user's guide - beta version. Technical report, february 1995. Available via anonymous ftp to ftp.ensta.fr under /pub/elghaoui/lmitool.

- [34] A. Fischman, J.M. Gomes da Silva Jr., L. Dugard, J.M. Dion, and S. Tarbouriech. Dynamic output feedback under state and control constraints. In *Proc. of 1997 European Control Conference (ECC'97)*, Brussels, Belgium, 1997.
- [35] A.T. Fuller. In the large stability of relay and saturated control systems with actuator saturation. *Systems & Control Letters*, 15:486–505, 1977.
- [36] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, and M. Chiali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., 1995.
- [37] E.G. Gilbert and K.T. Tan. Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36(9):1008–1020, 1991.
- [38] G.H. Golub and C. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, USA, 1988.
- [39] J.M. Gomes da Silva Jr. Aplicação do posicionamento parcial de autoestrutura ao problema de regulação sob restrições nas variáveis de controle. Master's thesis, UFSC, Florianópolis, Brazil, april 1994. In portuguese.
- [40] J.M. Gomes da Silva Jr., E.B. Castelan, and J.E.R. Cury. Sobre posicionamento parcial de autoestrutura. In *Anais do X CBA/VI CLACA*, volume 1, pages 64–69, Rio de Janeiro, Brazil, 1994. In portuguese.
- [41] J.M. Gomes da Silva Jr., A. Fischman, S. Tarbouriech, J.M. Dion, and L. Dugard. Synthesis of state feedback for linear systems subject to control saturation by an LMI-based approach. In *Proc of 2nd IFAC Symposium on Robust Control (ROCOND'97)*, pages 229–234, Budapest, Hungary, 1997.
- [42] J.M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. An algorithm to compute the maximal admissible set of initial conditions for linear systems subject to control constraints. Technical Report 96052, LAAS, Toulouse, France, february 1996.
- [43] J.M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Invariance and contractivity of polyhedra for continuous-time linear systems with saturated controls. Technical Report 96434, LAAS, Toulouse, France, november 1996. Submitted to *Systems and Control Letters*.
- [44] J.M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Analysis of local stability of linear systems with saturating controls: a polyhedral approach. In *Proc. of 4th IFAC Conference on Systems, Structure and Control (SSC'97)*, Bucharest, Romania, 1997. To appear.

- [45] J.M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Polyhedral regions of local asymptotic stability for discrete-time linear systems with saturating controls. In *Proc. of 36th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'97)*, San Diego, USA, 1997. To appear.
- [46] J.M. Gomes da Silva Jr., S. Tarbouriech, and E. Castelan. Stabilization of linear systems subject to control constraints via minimal-order-observers. In *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'95)*, volume 4, pages 4279–4284, New Orleans, USA, 1995.
- [47] P.O. Gutman and P. Hagander. A new design of constrained controllers for linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 30:22–33, 1985.
- [48] S. Gutman and I. Jury. A general theory for matrix root clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC(26):853–863, 1981.
- [49] J.C. Hennet. Une extension du lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contraintes. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série I*, 308:415–419, 1989.
- [50] J.C. Hennet. Discrete-time constrained linear systems. In *Control and Dynamic Systems*, volume 71, pages 549–554. Academic Press, 1995.
- [51] J.C. Hennet and J.P. Béziat. A class of invariant regulators for the discrete-time linear constrained regulation problem. *Automatica*, 27(3):549–554, 1991.
- [52] J.C. Hennet and E.B. Castelan. Robust invariant controllers for constrained linear systems. In *Proc. of 1992 American Control Conference (ACC'92)*, volume 2, pages 993–997, Chicago, USA, 1992.
- [53] J.C. Hennet and E.B. Castelan. Constrained control of unstable multivariable linear systems. In *Proc. of 2nd European Control Conference (ECC'93)*, pages 2039–2043, Groningen, The Netherlands, 1993.
- [54] J.C. Hennet and J.B. Lasserre. Construction of positively invariant polytopes for stable linear systems. In *Proc. of 12th IFAC-World Congress*, volume 9, pages 285–288, Sydney, Australia, 1993.
- [55] T.L. Johnson and M. Athans. On the design of optimal constrained dynamic compensators for linear constant systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, (december):658–659, 1970.

- [56] R.E. Kalman and J.E. Bertram. Control system analysis and design via the second method of Lyapunov (part ii). *J. of Basic Eng., Trans. of ASME*, pages 394–400, 1960.
- [57] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. MacMillan, 1992.
- [58] H. Kiendl, J. Adamy, and P. Stelzner. Vector norms as Lyapunov functions for linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 37(6):839–842, 1992.
- [59] J. Kim and Z. Bien. Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39(1):202–207, 1994.
- [60] M. Klai. *Stabilisation des Systèmes Linéaires Continus Contraints sur la Commande par Retour d'État et Sortie Saturés*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, septembre 1994. Rapport LAAS No. 94323.
- [61] I. Kolmanovsky and E.G. Gilbert. Maximal output admissible sets for discrete-time systems with disturbances inputs. In *Proc. of 1995 American Control Conference (ACC'95)*, pages 1995–1999, Seattle, USA, 1995.
- [62] J.P. Lasalle. *The stability and control of discrete processes*, volume 62 of *App. Math. Sci.* Springer Verlag, 1986.
- [63] Z. Lin and A. Saberi. Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedback. *Systems & Control Letters*, 21:225–239, 1993.
- [64] Z. Lin and A. Saberi. Semi-global exponential stabilization of linear discrete-time systems subject to input saturation via linear feedback. *Systems & Control Letters*, 24:125–132, 1995.
- [65] Z. Lin, A. Saberi, and A.A. Stoorvogel. Semiglobal satbilization of linear discrete-time systems subject to input saturation via linear feedback - an ARE-based approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41(8):1203–1207, 1996.
- [66] D. Liu and A.N. Michel. *Dynamical systems with saturation non-linearities: analysis and design*, volume 195 of *Lecture notes in control and information sciences*. Springer Verlag, 1994.
- [67] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison Wesley, 1984. 2nd edition.
- [68] C.C.H. Ma. Unstability of linear unstable system with inputs limits. *J. of Dynamic Syst., Measurement and Control*, (113):742–744, 1991.

- [69] T.H. Mattheiss. An algorithm for determining irrelevant constraints and all vertices in systems of linear inequalities. *Operations Research*, XXI:247–260, 1973.
- [70] T.H. Mattheiss and B.K. Schmidt. Computational results on an algorithm for finding all vertices of a polytope. *Mathematical Programming*, 18:308–329, 1980.
- [71] B.A.E. Milani and C.E.T. Dórea. On invariant polyhedra of continuous-time systems subject to additive disturbances. *Automatica*, 32(5):785–789, May 1996.
- [72] B.E.A. Milani and A.N. Carvalho. Robust optimal linear regulator design for discrete-time systems under polyhedral constraints. *Automatica*, 31(10):1489–1493, 1995.
- [73] A.P. Molchanov and E.S. Pyatnitskii. Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions of absolute stability of nonlinear non stationary control systems (part iii). *Automatika Telemekhanika*, (5):38–49, 1986.
- [74] A.P. Molchanov and E.S. Pyatnitskii. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems & Control Letters*, 13:59–64, 1989.
- [75] V.I. Opoitsev. Stability of nonautonomous systems. *Automatika telemekhanika*, (10):56–63, 1986.
- [76] R.V. Patel, A. Laub, and P.M. Van Dooren, editors. *Numerical Linear Algebra Techniques for Systems and Control*. IEEE Press, New York, 1994.
- [77] T.C.T. Rocha. Domínios positivamente invariantes de sistemas lineares com restrições na variáveis de controle. Master's thesis, UFSC, Florianópolis, Brazil, july 1994. In portuguese.
- [78] B.G. Romanchuk. Computing regions of attraction with polytopes: Planar case. *Automatica*, 32(12):1727–1732, 1996.
- [79] A. Saberi, Z. Lin, and A. Teel. Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41(3):368–377, 1996.
- [80] E. De Santis. On positively invariant sets for discrete-time linear systems with disturbance: an application of maximal disturbance sets. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39(1):245–249, 1994.

- [81] W.E. Schmitendorf. Designing stabilizing controllers for uncertain systems using the Riccati equation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 33(4):376–378, 1988.
- [82] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
- [83] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [84] E.D. Sontag and H.J. Sussmann. Nonlinear output feedback design for linear systems with saturating control. In *Proc. of 29th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'90)*, pages 3414–3416, Honolulu, U.S.A, 1990.
- [85] G. Stein and J. Doyle. Beyond singular values and loopshapes. *AIAA Journal of Guidance and Control*, 14(1):5–16, 1991.
- [86] R. Suarez, J. Alvarez-Ramirez, and J. Alvarez. Linear systems with single saturated input: stability analysis. In *Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'91)*, pages 223–228, Brighton, U.K., 1991.
- [87] H.J. Sussmann and Y. Yang. On the stability of multiple integrators by means of bounded controls. In *Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'91)*, pages 70–72, Brighton, U.K., 1991.
- [88] M. Sznaier. A set induced norm approach to the robust control of constrained systems. *SIAM J. Contr. and Optim.*, 31(3):733–746, 1993.
- [89] S. Tarbouriech. *Sur la stabilité des régulateurs à retour d'état saturé*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, février 1991. Rapport LAAS No. 91047.
- [90] S. Tarbouriech and C. Burgat. Positively invariant sets for constrained continuous-time systems with cone properties. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39(2):401–405, 1994.
- [91] S. Tarbouriech and C. Burgat. Invariance property for linear discrete-time systems with bounded inputs via observer. In *Proc. of 1995 American Control Conference (ACC'95)*, volume 5, pages 3914–3915, Seattle, USA, 1995.
- [92] S. Tarbouriech and J.M. Gomes da Silva Jr. Admissible polyhedra for discrete-time linear systems with saturating controls. In *Proc. of 1997 American Control Conference (ACC'97)*, volume 6, pages 3915–3919, Albuquerque, USA, 1997.

- [93] S. Tarbouriech, M. Klaï, and C. Burgat. Robust local stabilization conditions for linear systems with saturating controls. In *Proc. of 33th IEEE-CDC*, volume 2, pages 1006–1011, Orlando, USA, 1994.
- [94] A. R. Teel. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 18:165–171, 1992.
- [95] M. Vassilaki and G. Bitsoris. Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems. *Systems & Control Letters*, 13:247–253, 1989.
- [96] M. Vassilaki, J.C. Hennet, and G. Bitsoris. Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints. *Int. J. of Control.*, 47(6):1727–1735, 1988.
- [97] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, second edition, 1992.
- [98] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control - A Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [99] G.F Wredenhagen and P.R. Bélanger. Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints. *Automatica*, 30(3):403–416, 1994.
- [100] Y. Yang. *Global stabilization of linear systems with bounded controls*. PhD thesis, Rutgers University, février 1993.
- [101] Y. Yang, J. Sussmann, and E. Sontag. Stabilization of linear systems with bounded controls. In *Proc. of 1992 IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium (NOLCOS'92)*, pages 15–20, Bordeaux, France, 1992.

Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes

Cette thèse a pour but l'étude de la stabilité asymptotique locale des systèmes linéaires à temps discret dont les commandes sont soumises à des saturations. L'étude est développée à partir de deux représentations du système saturé en boucle fermée : par régions de saturation et par modèle polytopique. L'analyse de la stabilité du système saturé en boucle fermée ainsi que la synthèse de la loi de commande saturante avec l'objectif de garantir la stabilité d'un domaine d'états admissibles, sont basées sur le concept d'ensembles contractifs. Dans ce contexte, des résultats sont obtenus en considérant deux approches distinctes. La première approche considère des ensembles polyédraux. Des conditions pour la contractivité des trajectoires du système en boucle fermée dans un polyèdre sont étudiées : d'une part, des conditions nécessaires et suffisantes sont établies à partir de la représentation par régions de saturation et, d'autre part, des conditions suffisantes sont obtenues à partir de la représentation par modèle polytopique. Ces conditions permettent de formuler des algorithmes, basés sur des schémas de programmation linéaire, ayant pour objectif la détermination de régions polyédrales où la stabilité asymptotique locale du système en boucle fermée est garantie même si la commande sature. La deuxième approche considère des ensembles ellipsoïdaux et la représentation polytopique du système saturé. Des conditions suffisantes pour la contractivité d'ellipsoïdes par rapport au système saturé sont établies sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). A partir de ces conditions, un algorithme basé sur des schémas d'optimisation convexe est proposé pour la détermination d'approximations de la région d'attraction de l'origine à travers des ellipsoïdes contractifs. D'autre part, pour un ensemble donné de conditions initiales \mathcal{X}_0 , des conditions sont formulées, également sous la forme de LMIs, pour permettre la détermination d'une loi de commande saturante garantissant la stabilité asymptotique vers l'origine de toutes les trajectoires initialisées dans \mathcal{X}_0 .

Mots-clés : stabilité locale, systèmes linéaires, commande, saturation, fonctions de Lyapunov, programmation linéaire, inégalités matricielles linéaires.

On the local stability of linear systems subject to control saturation

The aim of this thesis is the study of the local asymptotic stability of discrete-time linear systems subject to control saturation. The work is developed by using two representations of the closed-loop saturated system, namely by regions of saturation and by polytopic model. The analysis of the stability of the closed-loop saturated system as well as the synthesis of saturating control laws are based on the concept of contractive sets. In this context, new results are proposed by considering two distinct approaches. The first one deals with polyhedral sets. The contractivity of the trajectories of the saturated system in polyhedral sets is studied. By considering the representation by regions of saturation, necessary and sufficient conditions are stated for the polyhedral contractivity with respect to the trajectories of the saturated system. From the representation by polytopic model only sufficient conditions are stated. The conditions obtained with both approaches lead to the formulation of algorithms to determine polyhedral domains of asymptotic stability and non-linear behavior for the closed-loop system. These algorithms are based on linear programming. The second approach deals with ellipsoidal sets and considers the polytopic representation of the saturated system. A sufficient condition for the contractivity of ellipsoids with respect to the trajectories of the closed-loop system are formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs). From this condition, an algorithm to compute approximations of the basin of attraction of the origin of the closed-loop system is proposed. This algorithm is based on the solution of convex optimization problems. On the other hand, given a set of initial admissible conditions \mathcal{X}_0 , an LMI-based framework is proposed to compute saturating control laws that ensure the asymptotic convergence to the origin of all the trajectories emanating from \mathcal{X}_0 .

Keywords: local stability, linear systems, control, saturation, Lyapunov functions, linear programming, linear matrix inequalities.