

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Ondas planas e modais em sistemas distribuídos elétricos e mecânicos

por

Daniela de Rosso Tolfo

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutora em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, 18 de setembro de 2017.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

de Rosso Tolfo, Daniela

Ondas planas e modais em sistemas distribuídos elétricos e mecânicos / Daniela de Rosso Tolfo.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2017.

216 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2017.

Orientador: Ruiz Claeysen, Julio César

Tese: Matemática Aplicada

Modelo de linhas de transmissão de multicondutores, modelo de Timoshenko, modelo não local de Eringen, ondas planas, ondas modais, resposta matricial fundamental, função escalar geradora de ondas, condições de contorno e de compatibilidade, matriz de reflexão e transmissão.

Ondas planas e modais em sistemas distribuídos elétricos e mecânicos

por

Daniela de Rosso Tolfo

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutora em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle, Sistemas e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Banca examinadora:

Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz
Departamento de Matemática/UFSC

Profa. Dra. Rosemaira Dalcin Copetti
Departamento de Matemática - PPGMat/UFSC

Prof. Dr. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky
PPGEP/UCS

Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho
PPGMAp/UFRGS

Tese apresentada e aprovada em
18 de setembro 2017.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Antônio e Adélia por terem me dado a vida, me dado limites e me ensinado valores. Pai agradeço pela doçura que trouxe a minha vida, pelo olhar amoroso sobre as coisas e pessoas, um olhar de quem acreditava no melhor de cada um, obrigada por ter caminhado ao meu lado até o momento que Deus permitiu. Mãe te agradeço por permanecer comigo diante de todas as dificuldades que se impuseram, por me dar exemplo de determinação e perseverança, obrigada por cada conselho e orientação, e acima de tudo obrigada por teu amor.

Ao Marcos por me apoiar e acompanhar, enfrentando as dificuldades ao meu lado e assumindo responsabilidades extras para nos auxiliar.

Aos meus amigos pelo apoio nas horas difíceis e nas alegres, obrigada por compreenderem minha ausência.

Ao Professor Julio Claeysen pela confiança, dedicação, paciência, ensinamentos e acesso aos seus trabalhos de pesquisa.

À UFRGS, PPGMap, CAPES, CNPq pela oportunidade e disponibilidade de recursos financeiros.

À Direção, Coordenação Acadêmica, Coordenação Administrativa e colegas da UNIPAMPA - Campus Caçapava pela compreensão e apoio.

Sumário

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
1 INTRODUÇÃO	1
2 ONDAS PLANAS	9
2.1 Ondas harmônicas	10
2.2 Ondas exponenciais	12
2.2.1 Equação de dispersão	13
3 TEORIA DE LINHAS DE TRANSMISSÃO	18
4 MODELO DISTRIBUÍDO PARA LINHAS DE TRANSMISSÃO COM DOIS CONDUTORES	25
4.1 Ondas planas em linhas de transmissão com dois condutores .	32
4.1.1 Linhas de transmissão regulares	33
4.1.1.1 Linhas de transmissão regulares com perdas	33
4.1.1.2 Linhas de transmissão regulares sem perdas	36
4.1.1.3 Formulação regular da equação do telégrafo	37
4.1.2 Linhas de transmissão singulares	37
4.1.2.1 Linhas de transmissão singulares dissipativas com perdas	37
4.1.2.2 Linhas de transmissão singulares conservativas sem perdas	38

4.2 Ondas planas exponenciais nas linhas de transmissão com dois condutores	40
4.2.1 Ondas exponenciais para linhas de transmissão regulares	41
4.2.2 Ondas exponenciais para linhas de transmissão singulares	42
4.2.2.1 Linhas de transmissão singulares com perdas	42
4.2.2.2 Linhas de transmissão singulares sem perdas	42
4.2.3 O problema de autovalor	43
4.2.4 Sistema defeituoso	45
4.3 Ondas em linhas de transmissão com fontes	46
4.3.1 Linhas de transmissão regulares forçadas	46
4.3.1.1 Equação do telégrafo forçada	48
4.3.1.2 Equação da onda forçada	49
4.3.2 Linhas de transmissão singulares forçadas	49
4.3.2.1 Linhas de transmissão com perdas	50
4.3.2.2 Linhas de transmissão sem perdas	51
4.4 Ondas modais em linhas de transmissão com dois condutores	51
4.4.1 Abordagem Matricial	52
4.4.2 Sistema de segunda ordem desacoplado	53
4.4.3 Matriz de transição de propagação	55
4.4.4 Decomposição espectral	56
4.4.5 Linhas de transmissão com fonte modal	57
4.4.5.1 Desacoplamento	58
4.4.5.2 Formulação matricial	59
4.5 Linhas de transmissão em estado estacionário senoidal	60
4.6 Ondas modais viajantes para frente e para trás	65
4.7 Descontinuidades em linhas de transmissão	68

4.7.1	Junção	69
4.7.2	Linha de transmissão com condições de contorno	72
4.7.2.1	Reflexão na extremidade do carregamento	74
5	MODELO DISTRIBUÍDO PARA LINHAS DE TRANSMISSÃO COM MULTICONDUTORES	77
5.1	Modelos em Nanotecnologia e extensões	80
5.2	Ondas planas em linhas de transmissão com multicondutores	81
5.2.1	Ondas planas exponenciais em linhas de transmissão com multicondutores	83
5.3	Ondas modais em linhas de transmissão com multicondutores	84
5.3.1	A formulação modal do telégrafo	87
5.3.2	Linha de transmissão com simetria cíclica	90
5.3.3	Sistemas de transmissão polifásicos com estrutura circulante	94
5.3.4	Ondas modais matriciais em multicondutores : viajantes para frente e para trás	97
5.4	Exemplos numéricos	100
5.4.1	Exemplo 1: Linha de transmissão com perdas, matrizes impedância e admitância simétricas de ordem 3×3	100
5.4.2	Exemplo 2: Linha de transmissão sem perdas, matrizes impedância e admitância simétricas e circulantes de ordem 4×4	105
5.4.3	Exemplo 3: Linha de transmissão com perdas, matrizes impedância e admitância simétricas circulantes de ordem 6×6	109
6	O MODELO DE TIMOSHENKO: FORMULAÇÕES E ONDAS HARMÔNICAS	114
6.1	Formulações do modelo de Timoshenko	114
6.1.1	Formulação evolutiva	114
6.1.2	Formulação desacoplada	116

6.1.3	Formulação de Estado	117
6.2	Condições de contorno	120
6.3	Propagação de ondas harmônicas	121
6.3.1	Modelo Euler-Bernoulli	122
6.3.2	Modelo de Timoshenko	124
6.3.3	Resposta de Green de valor inicial para equação de Euler-Bernoulli	126
6.3.4	Resposta de Green de valor inicial para o modelo de Timoshenko	133
7	ONDAS PLANAS E MODAIS NO MODELO DE TIMOSHENKO	137
7.1	Ondas planas no modelo de vigas de Timoshenko	137
7.1.1	Decomposição das ondas planas de Timoshenko	142
7.1.2	Ondas planas com componentes proporcionais	143
7.1.3	Ondas com perfil exponencial	145
7.1.3.1	Ondas exponenciais como ondas planas	147
7.2	Ondas modais no modelo de Timoshenko	148
7.2.1	Frequências naturais e raízes	152
7.2.2	Caso crítico: técnica de Liouville	154
7.2.3	Decomposição de ondas modais	156
7.3	As classes de ondas planas e ondas modais	158
7.4	Análise de ondas em uma viga de Timoshenko com uma fissura	160
7.5	Condições de contorno	165
8	MODELO NÃO LOCAL DE ERINGEN: FORMULAÇÕES, ON-	169
	DAS PLANAS E MODAIS	
8.1	Ondas planas no modelo não local de Eringen	173
8.2	Ondas planas do tipo exponencial no modelo não local de Eringen	175

8.2.1	Equação de frequência	176
8.3	Ondas modais no modelo não local de Eringen	181
8.4	Os espectros de frequência para uma viga não local bi-apoiada	186
8.4.1	Primeiro e segundo espectros da viga bi-apoiada não local	190
9	CONCLUSÕES	195
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	199
APÊNDICE A	RESPOSTA FUNDAMENTAL MATRICIAL	214
APÊNDICE B	INTEGRAIS DE FRESNEL	216

Lista de Figuras

Figura 2.1	Superposição de duas ondas harmônicas com frequências e número de ondas próximas.	16
Figura 2.2	Perfil inicial do pacote Gaussiano e sua transformada de Fourier. Figura adaptada de [102].	17
Figura 3.1	Espectro eletromagnético. Figura extraída de Wikipedia - http://pt.wikipedia.org/wiki/Espectro_visível	22
Figura 3.2	Alguns tipos de linhas de transmissão. Figura adaptada de [122].	23
Figura 4.1	Linha de transmissão de dois condutores paralelos com fontes distribuídas.	25
Figura 4.2	Decomposição de uma linha de transmissão em circuitos concentrados.	26
Figura 4.3	Circuito equivalente a um elemento infinitesimal da linha de transmissão com fontes distribuídas.	27
Figura 4.4	Descarga elétrica modelada como condição inicial. Figura adaptada de [55].	28
Figura 4.5	Linha de transmissão com condições de contorno composta por conexões de resistores, capacitores e indutores.	29
Figura 4.6	Regiões regulares e singulares para uma linha de transmissão. .	39
Figura 4.7	Para o caso $R = 0$ com $\gamma = \alpha + j\beta$, são graficadas $\frac{\alpha}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$ e $\frac{\beta}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$.	45
Figura 4.8	Linha de transmissão com duas portas.	55
Figura 4.9	Junção de linhas de transmissão com diferentes impedâncias características.	69
Figura 4.10	Linha de transmissão com fonte e carregamento.	72
Figura 5.1	Linha de transmissão de multicondutores. Figura adaptada de [95].	78
Figura 5.2	Gráficos de $Re(d(z))$ para diferentes intervalos de z	101
Figura 5.3	Gráficos das partes real e imaginária de $d(z)$ e componentes $d_+(z)$ e $d_-(z)$	101

Figura 5.4	Gráficos da parte real e imaginária de $e^{j\omega t}d(z)$ e componentes $e^{j\omega t}d_+(z)$ e $e^{j\omega t}d_-(z)$, $t=1$	103
Figura 5.5	Propagação de componente de onda atenuada $Re(u_1^+(t, z))$, $Re(u_1^-(t, z))$. 103	
Figura 5.6	Gráficos das partes real e imaginária da função par $\mathbf{h}_{11}(z)$. . .	104
Figura 5.7	Gráficos das partes real e imaginária das função ímpar $\mathbf{h}_{14}(z)$	105
Figura 5.8	Gráfico da função escalar geradora de onda modal $d(z)$	106
Figura 5.9	Gráficos das partes real e imaginária de $d_+(z)$ e $d_-(z)$	107
Figura 5.10	Parte real de $\phi_{22}e^{-j(\beta_2 z - \omega t)}$ e $\phi_{21}ze^{-j(\beta_2 z - \omega t)}$	108
Figura 5.11	Gráficos do elemento $\mathbf{h}_{11}(z)$ para diferentes intervalos de z : (a) $-0,4 < z < 0,4$, (b) $-800 < z < 800$	108
Figura 5.12	Gráficos do elemento $\mathbf{h}_{12}(z)$ para diferentes intervalos de z : (a) $-0,4 < z < 0,4$, (b) $-800 < z < 800$	109
Figura 5.13	Gráficos de $Re(d(z))$ e $Im(d(z))$	110
Figura 5.14	Gráficos de $Re(e^{j\omega t}d(z))$ e $Im(e^{j\omega t}d(z))$	111
Figura 5.15	Gráficos de $Re(e^{j\omega t}d_+(z))$ e $Re(e^{j\omega t}d_-(z))$	112
Figura 5.16	Gráficos de $Im(e^{j\omega t}d_+(z))$ e $Im(e^{j\omega t}d_-(z))$	112
Figura 5.17	Gráficos dos elementos diagonais de $\frac{\sinh\sqrt{\Lambda_{ZY}}}{\sqrt{\Lambda_{ZY}}}$	113
Figura 6.1	Viga com condição de contorno não clássica. Figura adaptada de [117].	121
Figura 6.2	Velocidade em termos do número de onda - Espectro de frequência. Figura adaptada de [51].	123
Figura 6.3	Soluções obtidas para barras e cordas com a condição inicial (6.65). Figura adaptada de [51].	129
Figura 6.4	Solução do PVI (6.70) para EBT, primero fixando $x = x_0$, e depois $t = t_0$. Figura adaptada de [51]	130
Figura 6.5	Gráficos de $A(t)$ e $\sin\left(\frac{x^2}{4kt} + \frac{\pi}{4}\right)$ para um $x = x_0$, respectivamente.	131
Figura 6.6	Solução (6.73) graficada para um intervalo pequeno de tempo.	132

Figura 6.7	Solução (6.80) primeiro fixando $t \ll 1$ e deixando x variar, e depois fixando x grande, com t variando.	133
Figura 7.1	Perfil de $d_P(s) = \frac{1}{ca\lambda^2} \left(s - \frac{\sinh(\alpha s)}{\alpha} \right)$, $s = \lambda t + \gamma x$, para (a) $\lambda = 0$, $\gamma = 1$ com $\alpha = 0$, (b) Perfis 2D e 3D para $\lambda = 1$, $\gamma = 1$, com $\alpha = 100i$	142
Figura 7.2	Função escalar geradora de onda modal $d(x) = \frac{\delta \text{sen}(\epsilon x) - \epsilon \text{sen}(\delta x)}{ab(\delta^2 - \epsilon^2)\epsilon\delta}$ onde (a) $\epsilon = 42735,46244$, $\delta = 6,649479825 \times 10^5$ para $\omega^2 < \omega_c^2$; (b) $\epsilon = 0$, $\delta = 6,707335165 \times 10^5$ for $\omega^2 = \omega_c^2$; (c) $\epsilon = 40931,10798i$, $\delta = 6,759469095 \times 10^5$ for $\omega^2 > \omega_c^2$	154
Figura 7.3	Viga com fissura aberta modelada como uma mola rotacional.	161
Figura 7.4	Norma matricial e módulo das componentes da matriz \mathbf{R}	164
Figura 7.5	Argumentos das coordenadas das matrizes \mathbf{R} e \mathbf{T}	165
Figura 7.6	Condições de contorno não clássicas em $x = L$	166
Figura 8.1	Graficos para c_{0N} , c_{2N} , c_{4N} - Carbono (utilizando fator de escala)	179
Figura 8.2	Relações entre ω_{b01} , ω_{b02} e ω_c para cada intervalo de $(e_0 a_0)^2$, para $E - \kappa G > 0$	180
Figura 8.3	Modelo local: (a) δ e (b) $\text{Re}(\epsilon)$ e $\text{Im}(\epsilon)$	184
Figura 8.4	Modelo não local: (a) $\text{Re}(\delta)$, (b) $\text{Im}(\delta)$, (c) $\text{Re}(\epsilon)$ e (d) $\text{Im}(\epsilon)$	185
Figura 8.5	Função geradora $d(x)$: (a) $\omega = \omega_1$ e (b) $\omega = \omega_2$	186
Figura 8.6	ω_{N1} e ω_{N2} para viga não local bi-apoiada de carbono com seção circular, frequências em (10^{12})	192
Figura 8.7	Relação entre ω_{N1} e ω_{N2} respectivamente com ω_{b01} e ω_{b02}	194
Figura B.1	Representação gráfica das integrais de Fresnel $S(x)$ e $C(x)$	217

Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Espectro de frequências para ondas em sistemas elétricos. Tabela adaptada de [93].	21
Tabela 8.1	Constantes físicas para nanotubos de carbono	177
Tabela 8.2	Dimensões para viga com seção transversal circular.	177

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Parâmetro κGA
A	Área da seção transversal
b	Parâmetro EI
c	Parâmetro ρA
C	Capacitância
$d(x)$	Função escalar geradora de onda modal
$d_P(s)$	Função escalar geradora de onda plana
e	Parâmetro ρI
$e_0 a_0$	Parâmetro não local
E	Módulo de Young
G	Módulo de cisalhamento - Condutância
$\mathbf{h}(x)$	Resposta matricial fundamental modal
$\mathbf{h}_P(s)$	Resposta matricial fundamental plana
I	Momento de inércia
$i(t, x)$	Corrente na linha de transmissão
L	Comprimento da viga - Indutância
$r^4(\gamma)$	Parâmetro $-c\gamma^2 \left(\frac{e\gamma^2 + a}{ab} \right)$
R	Resistência

$u(t, x)$	Deslocamento transversal da viga
$v(t, x)$	Tensão na linha de transmissão
$\text{adj}(L)$	Matriz adjugada da matriz L
γ	Autovalor - constante de propagação
δ	Raiz da equação característica
ϵ	Raiz da equação característica
κ	Coefficiente de cisalhamento
ν	Coefficiente de Poisson
ρ	Densidade
$\psi(t, x)$	Giro da seção transversal da viga
ω	Frequência natural
ω_c	Frequência crítica ($\omega_c^2 = \frac{a}{e}$)
ω_{b01}	Frequência singular
ω_{b02}	Frequência singular

RESUMO

Neste trabalho, são caracterizadas as soluções do tipo ondas planas e modais de modelos matemáticos referentes à teoria de linhas de transmissão, com e sem perdas, e à teoria de vigas, modelo de Timoshenko e modelo não local de Eringen. Os modelos são formulados matricialmente, e as ondas em questão são determinadas em termos da base gerada pela resposta matricial fundamental de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira, segunda e quarta ordem. A resposta matricial fundamental é utilizada numa forma fechada que envolve o acoplamento de um número finito de matrizes e uma função escalar geradora e suas derivadas. A função escalar geradora é bem comportada para mudanças em torno de frequências críticas e sua robustez é exibida através da técnica de Liouville. As ondas modais são decompostas em termos de uma parte que viaja para frente e uma parte que viaja para trás. Essa decomposição é utilizada para fornecer matrizes de reflexão e transmissão em descontinuidades e condições de contorno. No contexto das linhas de transmissão são consideradas uma junção de linhas com impedâncias características diferentes ou uma carga em uma extremidade da linha. Na teoria de Timoshenko são consideradas uma fissura ou condições de contorno em uma das extremidades. Exemplos numéricos com descontinuidade são considerados na viga. Na teoria de linhas de transmissão exemplos com multicondutores são considerados e observações são realizadas sobre a decomposição das ondas modais. No modelo não local de Eringen, para vigas bi-apoiadas é discutida a existência do segundo espectro de frequências.

Palavras-chave: Modelo de linhas de transmissão de multicondutores. Modelo de Timoshenko. Modelo não local de Eringen. Ondas planas. Ondas modais. Resposta matricial fundamental. Função escalar geradora de ondas. Condições de contorno e de compatibilidade. Matriz de reflexão e transmissão.

ABSTRACT

Plane type solutions and modal waves of mathematical models, which refer to transmission lines theory, both lossless and lossy, and to beam theory, using both Timoshenko and nonlocal Eringen models, are being characterized in this work. The models are formulated in matrix form, and the waves are determined in terms of matrix basis generated by fundamental matrix response of systems of ordinary differential equations of first, second and fourth order. The fundamental matrix response is used in the closed-form, which involve the coupling between a number finite of matrices of a generating scalar function and its derivatives. The generating scalar function is well behaved for changes around critical frequencies and its robustness is exhibited through the Liouville technique. Modal waves are decomposed in forward and backward parts. This decomposition is used for providing reflection and transmission matrices when dealing with discontinuities and boundary conditions. In the context of transmission lines junction of lines with different characteristic impedances or a load at one end of the line are being considered. In Timoshenko's theory the crack problem or boundary conditions at one end are also being considered. Numerical examples with discontinuities are considered in the context of beams. Numerical examples with discontinuities and boundary value problems were approached using modal wave decomposition. In transmission line theory examples with multiconductors are considered and observations are made about decomposition of the modal waves. In the nonlocal of Eringen model, for bi-supported beams, the existence of the second frequency spectrum is discussed.

Keywords: Multiconductor transmission lines. Timoshenko model. Eringen non-local model. Plane waves. Modal waves. Fundamental matrix solution. Scalar wave generator function. Boundary and compatibility conditions. Reflection and transmission matrix.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como tema central a caracterização de soluções do tipo ondas planas e modais em linhas de transmissão e de vibrações em vigas elásticas em macro e micro escala.

As ondas planas são soluções de equações diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes que assumem um mesmo valor em pontos de uma reta cujos coeficientes envolvem constantes relacionadas à variação temporal e à variação espacial. Essas constantes podem ser números reais ou complexos para incluir efeitos complicados como amortecimento, descontinuidades, materiais dispersivos e complexos, dispositivos ou obstáculos anexados, entre outros. No caso de ondas harmônicas, as constantes são associadas à frequência e ao número de onda, respectivamente, [25, 26, 31, 34, 50, 51, 53, 62, 63, 87, 108].

Propagação de ondas e análise espectral são diferentes métodos para análise de respostas dinâmicas em estruturas. Elas são usualmente aplicadas de acordo com a duração da variação temporal da carga, tamanho da estrutura, testes experimentais e descontinuidades. Na propagação de ondas, utiliza-se o princípio que uma onda incidente em certos pontos de interesse envolverão ondas refletidas e transmitidas como casos particulares de ondas planas. Na análise espectral, relaciona-se um comportamento exponencial no tempo com uma distribuição da amplitude espacial a ser determinada de acordo com as condições de compatibilidade ou contorno envolvidas, assim, conduzindo a ondas modais.

Na primeira parte deste trabalho, são caracterizadas todas as ondas planas e modais das linhas de transmissão com multicondutores uniformes com perdas, [53, 55, 65, 95]. As ondas modais são usadas em linhas de transmissão limitadas onde as condições de contorno são um gerador e uma carga nas extremidades da linha. A abordagem apresentada para as linhas de transmissão trabalha com sua

formulação física como sistema evolutivo de primeira ordem, bem como a equação do telégrafo espacial de segunda ordem desacoplada. Em ambas as formulações, utiliza-se a resposta matricial fundamental das equações diferenciais da matriz espacial que surge em relação à fase linear das ondas planas e para a amplitude espacial das ondas modais. Esta resposta matricial fundamental é dada na forma fechada em termos de uma função escalar geradora de onda de ordem superior e um número finito de termos de acoplamento [21].

As soluções do tipo ondas exponenciais são consideradas em detalhe e as ondas modais são descritas como uma superposição linear de ondas exponenciais. Os casos limite são tratados diretamente com a função escalar geradora de onda. São consideradas duas classes de sistemas: os regulares, para os quais os parâmetros da fase não estão em uma relação linear e aqueles para os quais eles se relacionam linearmente. Observa-se que a linha de transmissão sem perdas é um caso singular. Uma decomposição da função escalar geradora de onda modal é introduzida para o estudo de ondas refletidas e transmitidas em descontinuidades ou com uma carga na extremidade. Isso permite definir as matrizes de reflexão e transmissão ao identificar as funções escalares geradoras que viajam para frente e para trás.

As equações das linhas de transmissão de multicondutores são geralmente desacopladas por técnicas de diagonalização que impõem restrições às matrizes de indutância, resistência, capacitância e condutância [92]. Em [40], é mostrado que existem linhas de transmissão aéreas (*overhead lines*) que originam problemas não diagonalizáveis. A abordagem proposta neste trabalho, não utiliza técnicas de diagonalização sendo eficaz para qualquer tipo de linhas de transmissão uniformes.

O caso das linhas de transmissão cujas matrizes de impedância e admitância são simétricas e cíclicas (padrão circulante) é considerado em detalhe uma vez que relaciona-se as matrizes de Fourier com a metodologia da sequência de componentes de Fortescue's [43] e elas são usadas no estudo de sistemas multifásicos [4, 56, 66, 124]. O caso de uma linha de transmissão multifásica com o mesmo

valor para os parâmetros de auto-indutância e de indutância mútua, bem como para auto-admitância e de admitância mútua é estudado detalhadamente usando a teoria das matrizes circulantes [28]. É observado que tais sistemas são não-defeituosos e que uma constante de propagação depende da indutância, admitância e do número de condutores, enquanto as demais possuem o mesmo valor e são independentes do número de condutores.

Simulações numéricas são apresentadas para uma linha de transmissão trifásica com perdas, uma linha simétrica de quatro fases sem perdas e linha de seis fases sem perdas com simetria cíclica. A abordagem é robusta no sentido de que podemos usá-la com linhas de transmissão curtas, médias ou longas.

Na segunda parte do trabalho, são caracterizadas todas as ondas planas e modais em vigas elásticas descritas pelo modelo de Timoshenko e pelo modelo não local de Eringen para vigas de pequena escala [19]. A formulação original do modelo de Timoshenko, em termos de duas equações de segunda ordem, é mais adequada para a imposição do significado físico das condições de contorno e compatibilidade. No entanto, também é possível expressar as equações do movimento de Timoshenko para vigas uniformes na forma desacoplada com duas equações evolutivas de quarta ordem ou transformada em um sistema de primeira ordem. No estudo de vibrações livres, elas têm a mesma forma para a deflexão e para o giro devido à flexão [58], [78]. Porém, no estudo com vigas de comprimento finito, onde as condições de contorno são impostas, ou vigas segmentadas (*multispan*), existe um acoplamento implícito entre deflexão e giro [58], a menos que as condições sejam separadas como é o caso da viga simplesmente apoiada [48]. O estudo do modelo de Timoshenko como sistema de primeira ordem no tempo é semelhante ao estudo das linhas de transmissão. Porém, no estudo das ondas modais, observa-se que as condições de contorno clássicas em vigas finitas envolvem a determinação das frequências naturais e modos normais, enquanto nas linhas de transmissão limitadas pela presença de um

gerador é assumido uma frequência de entrada implicando condições de contorno não homogêneas.

As ondas planas do modelo de Timoshenko são obtidas resolvendo em forma fechada um sistema diferencial completo de segunda ordem em relação a uma variável de fase de onda plana. Seu comportamento pode ser determinado estudando uma função escalar associada que muda sua geometria de acordo com a natureza da frequência complexa e do número de onda. Esta função aparece quando se utiliza uma base de matriz fundamental para as soluções do sistema de segunda ordem [21]. É uma função de onda escalar bem comportada que reflete os casos estáticos e críticos quando ocorrem raízes repetidas do polinômio característico associado. Essa robustez é verificada usando o processo limite de Liouville que permite manter a mesma forma simbólica para qualquer número de frequência e onda. As ondas modais também são caracterizadas em forma fechada, resolvendo um sistema de segunda ordem em relação à variável espacial e dependendo de uma função de onda modal escalar. Este tipo de onda pode ser caracterizado como a superposição de quatro ondas planas exponenciais com amplitudes de vetor característico constantes ou com uma amplitude variável ao lidar com raízes repetidas da equação de dispersão. Na literatura, estes casos são considerados de maneira separada [17], porém com a metodologia desenvolvida neste trabalho, existe uma solução unificada que através de um processo de limite direto com a função de onda modal permite abordar facilmente situações defeituosas como o caso crítico (raízes duplas) e estático (raízes quádruplas).

Quando uma onda é incidente sobre alguma descontinuidade na viga, devido à mudança de propriedade geométrica/material, restrições cinéticas, tais como um suporte elástico ou carga concentrada, ou contornos, dá origem a ondas refletidas e transmitidas cuja caracterização relaciona as amplitudes de ondas entrando e saindo (*incoming and outgoing waves*) em uma descontinuidade e pode revelar características físicas locais associadas a vibrações estruturais de meios elás-

ticos [54]. Para uma classe de descontinuidades encontradas nas aplicações, pode-se assumir que elas são descritas por forças elásticas ou dissipativas ou inerciais que dependem linearmente com respeito às taxas espaciais ou temporais da deflexão e rotação. Condições de compatibilidade e de contorno podem ser formuladas em termos matriciais, de modo que, ao usar a propagação de onda, pode-se ter uma abordagem matemática sistemática. Isto é ilustrado com um problema de fissura onde as ondas refletidas e transmitidas são identificadas a partir da descrição da onda matricial modal e das condições de compatibilidade.

Simulações no caso de existência de fissuras da viga ilustram a influência de certos componentes antes e depois de valores críticos.

Quando as dimensões das estruturas são muito pequenas, teorias dependentes da escala têm sido estudadas. Por exemplo, em aplicações com nano e micro escalas tais como nanotubos de carbono, sistemas nano e microeletrônicos (MEMS e NEMS) e microscopia de força atômica (AFM). De acordo com a teoria da elasticidade não local de Eringen, a tensão em qualquer ponto de referência do corpo não depende somente da deformação deste ponto, mas também da deformação em todos os pontos do corpo e de um parâmetro não local e_0a_0 . Considerando a teoria de Eringen, em [74] é derivado o modelo não local que é abordado neste trabalho.

Na obtenção de ondas modais para a teoria não local Eringen, observou-se que o caso limite $e_0a_0 \rightarrow 0$ leva à resposta matricial fundamental que corresponde a resposta do modelo de Timoshenko, assim observa-se a continuidade da base modal gerada por essa solução. Tal comportamento não é observado no estudo de ondas planas, onde o limite $e_0a_0 \rightarrow 0$ traz singularidades às condições iniciais dos problemas de valor inicial associados, tanto à resposta matricial fundamental quanto à função escalar geradora de onda plana.

Traill-Nash e Collar [119] desenvolveram um estudo detalhado sobre o modelo de Timoshenko, e observaram a existência de dois espectros distintos

de frequência para as vibrações livres de vigas bi-apoiadas. Muitos autores têm discutido a existência e validade desse "novo"espectro, como em [8, 9, 71, 111, 112]. Ao tratar o modelo não local de Eringen com metodologia análoga à desenvolvida em [115, 116], também observa-se a existência do segundo espectro de frequências para a viga bi-apoiada.

Na teoria de linhas de transmissão, no modelo de Timoshenko ou na teoria não local de Eringen, as relações de dispersão ou as equações características podem levar a constantes associadas a números de onda e a frequências que são reais, imaginários ou complexos. Portanto, é conveniente para problemas gerais, do ponto de vista matemático, trabalhar com ondas planas ou ondas modais em vez de ondas progressivas harmônicas clássicas ou assumir que o comportamento temporal está oscilando devido a frequências naturais e ter a propriedade dos modos normais.

Considerando frequências naturais, a função escalar geradora de onda modal para o modelo de Timoshenko é oscilante acima de uma frequência crítica e evanescente abaixo dela. Enquanto a função geradora de onda modal para o modelo não clássico possui caráter oscilatório em um intervalo limitado de frequências.

O trabalho está estruturado na seguinte maneira:

No Capítulo 2, são apresentados conceitos e definições básicas de ondas planas. Caracterização de ondas harmônicas, exponenciais, definição de pacote de onda, velocidade de grupo e equação de dispersão.

No Capítulo 3, as linhas de transmissão são apresentadas, sendo discutidas suas aplicações, tipos mais comuns e classificação quanto as suas características de composição.

No Capítulo 4, o modelo matemático para descrever tensão e corrente em uma linha de transmissão com dois condutores é obtido utilizando as leis de Kirchhoff em elementos infinitesimais do comprimento da linha. São apresentadas

condições iniciais e de contorno para uma linha finita. As equações referentes ao modelo são escritas na forma matricial como uma equação diferencial matricial parcial de primeira ordem. O desacoplamento é obtido utilizando a identidade de Cramer, resultando em equações na forma telegráfica. A formulação matricial permite o desenvolvimento de uma nova metodologia em ondas. Assim, são completamente caracterizadas as ondas planas para a linha de transmissão livre e forçada, e ondas modais utilizando a base matricial gerada pela resposta matricial fundamental, sendo a resposta matricial dada em termos de uma função escalar geradora de onda plana e modal. As ondas modais são decompostas em duas partes, sendo uma onda modal para frente e outra para trás. Essa decomposição é utilizada na obtenção de matrizes de reflexão e transmissão de ondas em problemas com descontinuidade determinada pela junção de linhas com impedância característica distintas, e a matriz de reflexão é determinada no problema de valor de contorno dado por um carregamento em uma extremidade da linha.

No Capítulo 5, o modelo matemático para linhas de transmissão com multicondutores é apresentado, observando que as equações diferenciais originais do modelo diferem do capítulo anterior por seus coeficientes serem matriciais. A metodologia utilizada nas linhas com dois condutores é aplicada agora a multicondutores, para determinar as ondas planas e modais deste modelo. Linhas de transmissão multifásicas que apresentam simetria cíclica são discutidas em detalhe, em particular, para o caso em que os valores para auto-impedância, auto-admitância, impedância e admitância mútuas são iguais. Exemplos numéricos são apresentados para linhas com três, quatro, e seis fases, e realizadas observações a respeito da função escalar geradora de onda modal e resposta matricial fundamental.

No Capítulo 6, são apresentadas diferentes formulações do modelo de Timoshenko e condições de contorno.

No Capítulo 7, as ondas planas e modais do modelo de Timoshenko são caracterizadas utilizando metodologia desenvolvida nos Capítulos 4 e 5, observando

que as ordens das equações diferenciais matriciais e escalares diferem das apresentadas para a linha de transmissão. O caso das componentes proporcionais e onda plana do tipo exponencial são discutidos em detalhe. Ondas modais são decompostas como superposição de ondas planas, e são discutidas diferenças e relações entre as soluções planas e modais. A metodologia descrita é usada no problema de fissuras.

O Capítulo 8 é dedicado ao estudo do modelo não local de Eringen. Ondas planas e modais são caracterizadas. Comportamentos da função geradora de onda modal são analisados via simulações. A existência do segundo espectro de frequência para o modelo não local é investigada.

No Capítulo 9, são apresentadas as conclusões do trabalho.

No Apêndice A, a forma fechada para a obtenção da resposta matricial fundamental é apresentada para equações diferenciais matriciais de ordem m com matrizes coeficientes de ordem $N \times N$.

No Apêndice B, as integrais de Fresnel estão definidas.

2 ONDAS PLANAS

Do ponto de vista físico, uma onda progressiva ou viajante é considerada como sendo uma perturbação que se propaga transportando energia de um ponto a outro, enquanto uma onda estacionária armazena energia sem transportá-la. Hoje em dia, três grandes grupos básicos são considerados:

1. Ondas mecânicas;
2. Ondas eletromagnéticas;
3. Ondas de matéria ou quânticas;

As ondas mecânicas precisam de um meio para se propagar, ao contrário das ondas eletromagnéticas. As ondas de matéria tem seu conceito associado à dualidade onda-matéria da luz. Ondas sonoras, ondas na água e ondas em uma corda são exemplos de ondas mecânicas, enquanto ondas de celular, rádio, televisão e raio x são exemplos de ondas eletromagnéticas. Já as ondas de matéria são associadas a elétrons, prótons e outras partículas elementares, e mesmo com átomos e moléculas.

Considerando a direção de vibração dos elementos do meio em relação à direção de propagação da onda tem-se a classificação:

1. *Ondas longitudinais*: os elementos do meio oscilam na mesma direção de propagação da onda.
2. *Ondas transversais*: cada partícula do meio oscila perpendicularmente a direção de propagação da onda.

Neste trabalho, será abordado o estudo de ondas transversais em linhas de transmissão e vigas. Usualmente, as ondas são consideradas flutuações espaciais que evoluem com o tempo de maneira periódica ou não.

Uma onda plana ou progressiva é definida como uma função de variação temporal-espacial da forma

$$\phi(t, x) = \Phi(\lambda t + \gamma x), \quad (2.1)$$

onde o perfil $\Phi(s)$ é uma função que depende da fase $s = \lambda t + \gamma x$. Escrevendo

$$s = \gamma \xi, \quad \xi = x - ct, \quad c = -\frac{\lambda}{\gamma}, \quad (2.2)$$

as ondas planas podem ser escritas na forma equivalente

$$\phi(t, x) = F(x - ct), \quad (2.3)$$

onde $\Phi(s) = F(\xi)$, usualmente referidas como ondas viajantes.

Quando c é real, ou seja, γ e λ são reais ou puramente imaginários, para cada instante t fixo, o gráfico da onda ϕ é uma translação do perfil de onda $F(x)$ em $t = 0$. Assim, o perfil de onda em t é idêntico à $F(x)$ deslocada uma distância ct na direção positiva do eixo x quando $c > 0$, e na direção negativa quando $c < 0$. Assumindo $x = ct$ como uma nova origem, e denotando por X a distância entre um ponto no eixo espacial e a nova origem, tem-se $x = ct + X$. Assim, o perfil de onda definido nesta nova origem seria $\phi = f(X)$, [25]. Se o perfil $F(x)$ é uma função periódica de período l , então o perfil repete-se a cada intervalo espacial de comprimento l , chamado comprimento de onda. Considerando a onda $\phi = F(x - ct)$, tem-se que é periódica no tempo com período igual a $\tau = \frac{l}{c}$. Neste caso, c é chamada a velocidade de propagação ou de fase sendo dada por $c = \frac{l}{\tau}$.

2.1 Ondas harmônicas

O tipo de onda plana periódica mais simples é constituída pelas ondas harmônicas nas quais o perfil de onda são funções seno ou cosseno. Estas funções possuem período 2π , refletida por um ciclo, considerando rotação completa do raio

do círculo unitário ou, pelo comprimento do arco do ciclo completo (2π rad). Por exemplo, para o perfil harmônico, c e m reais, dado por

$$\phi = a \cos m(x - ct), \quad (2.4)$$

em [25], para $t = 0$ segue

$$F(x) = a \cos(mx). \quad (2.5)$$

O perfil de onda se repete em um intervalo definido como comprimento de onda e é dado por $l = \frac{2\pi}{m}$, o comprimento de onda é o período em relação à variável espacial. O período em relação ao tempo é $\tau = \frac{2\pi}{mC}$, e a é a amplitude da onda. Tem-se a frequência de onda cíclica $f = \frac{1}{\tau}$ e número de onda cíclica $k = \frac{1}{l}$. A dimensão de f é ciclos por unidade de tempo, enquanto a dimensão de k são ciclos por unidade de comprimento, e indicam quantos ciclos se repetem por unidade de tempo e espaço respectivamente. Pode-se ainda definir frequência angular $\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f$ e número de onda angular $\mu = \frac{2\pi}{l}$, com dimensões em radianos por unidade de tempo e distância, respectivamente.

Das definições acima, segue que a velocidade de fase pode ser escrita na forma cíclica como $c = \frac{f}{k}$ ou angular como $c = \frac{\omega}{\mu}$.

Da equação (2.5), segue que o comprimento de onda é

$$l = \frac{2\pi}{m}$$

e daí

$$\phi = a \cos \frac{2\pi}{l}(x - ct) = a \cos \left(\frac{2\pi}{l}x - \frac{2\pi c}{l}t \right), \quad (2.6)$$

combinando as relações $c = \frac{l}{\tau}$ e $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, segue que $\frac{2\pi}{l} = \omega$, assim

$$\phi = a \cos(\mu x - \omega t). \quad (2.7)$$

A onda harmônica dada em (2.7), pode ser escrita como

$$\phi(t, x) = a \cos(\mu x - \omega t) = a \cos(\mu x) \cos(\omega t) + a \sin(\mu x) \sin(\omega t), \quad (2.8)$$

onde cada parcela

$$\begin{aligned}\cos(\mu x) \cos(\omega t) &= \frac{1}{2} (\cos(\mu x + \omega t) + \cos(\mu x - \omega t)), \\ \sin(\mu x) \sin(\omega t) &= \frac{1}{2} (\cos(\mu x - \omega t) - \cos(\mu x + \omega t)),\end{aligned}\tag{2.9}$$

é a superposição de duas ondas planas harmônicas com mesma frequência, amplitude e comprimento de onda mas viajando em direções opostas [25]. Cada uma das parcelas de (2.8) é chamada onda estacionária, devido ao fato de que os perfis de onda $\phi_1(t, x) = \cos(\mu x) \cos(\omega t)$ e $\phi_2(t, x) = \sin(\mu x) \sin(\omega t)$ não avançam. As ondas estacionárias são caracterizadas pela existência de pontos ao longo do meio que não se deslocam chamados de nós, e pontos com deslocamento máximo chamados anti-nós. Em particular, para a onda estacionária $\phi_1(t, x) = \cos(\mu x) \cos(\omega t)$ os nós são os valores de x tais que $\cos(\mu x) = 0$ e os anti-nós os pontos nos quais $\cos(\mu x) = \pm 1$.

No caso de considerar a onda harmônica senoidal $\phi(t, x) = a \sin(\mu x - \omega t) = a \sin(\mu x) \cos(\omega t) - a \cos(\mu x) \sin(\omega t)$, cada parcela é superposição de ondas senoidais com mesma amplitude, frequência e viajando em direções opostas. Para a onda estacionária $\phi_1(t, x) = \sin(\mu x) \cos(\omega t)$, os nós são os valores de x tais que $\sin(\mu x) = 0$ e os anti-nós os pontos nos quais $\sin(\mu x) = \pm 1$.

2.2 Ondas exponenciais

Soluções do tipo exponencial

$$\phi(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x}\tag{2.10}$$

de equações diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes, onde

$$\lambda = \zeta + i\omega, \quad \gamma = \alpha + i\beta\tag{2.11}$$

são números complexos, podem ser escritas como produto de ondas exponenciais reais e puramente imaginárias

$$\phi(t, x) = e^{\zeta t + \alpha x} e^{i(\omega t + \beta x)}.\tag{2.12}$$

A onda exponencial real em (2.12) representa atenuação ou amplificação no tempo e no espaço, enquanto a onda exponencial imaginária

$$e^{i(\omega t + \beta x)} = \cos(\omega t + \beta x) + i \operatorname{sen}(\omega t + \beta x), \quad (2.13)$$

está associada a superposição de duas ondas harmônicas.

A notação complexa para descrever ondas harmônicas

$$\phi(t, x) = a e^{i(\omega t + \beta x)}, \quad (2.14)$$

embora seja de interesse apenas a parte real ou imaginária, $\phi = a \cos(\omega t + \beta x)$ ou $\phi = a \operatorname{sen}(\omega t + \beta x)$, permite muitas vezes simplificar os cálculos. Além disso, considerando-se uma amplitude complexa $a = |a|e^{i\theta}$ tem-se

$$\phi = a e^{i(\omega t + \beta x)} = |a| e^{i(\omega t + \beta x + \theta)}, \quad (2.15)$$

que envolve tanto seno como cosseno e o ângulo de fase θ .

2.2.1 Equação de dispersão

A substituição da solução exponencial $\phi(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x}$ na equação diferencial parcial em questão estabelece uma relação entre λ e γ

$$\Gamma(\lambda, \gamma) = 0, \quad (2.16)$$

que usualmente, com a aplicação de técnicas de Fourier para λ e γ puramente imaginários, é chamada equação de dispersão, ou frequência.

Supondo $\gamma = \gamma(\lambda)$ ou $\lambda = \lambda(\gamma)$ na resolução da relação (2.16), então $c = -\frac{\lambda}{\gamma}$ resulta uma função que depende somente de λ ou de γ . No caso em que c é uma constante, a onda é dita não dispersiva. Quando c é real, então a onda plana $F(x - ct)$ se propaga sem distorção.

A superposição de ondas harmônicas $e^{i(\omega t + \mu x)}$, que são solução de muitas equações diferenciais parciais lineares que governam movimentos oscilatórios, é denominada um pacote de onda. Cada parcela tem velocidade de propagação dada por

$c = -\frac{\omega}{\mu}$, a qual pode ser constante ou variável dependendo da natureza das soluções

$$\omega = \omega(\mu) \text{ ou } \mu = \mu(\omega),$$

da relação de dispersão $\Gamma(\omega, \mu) = 0$, que resulta de (2.16) sendo $\lambda = i\omega$ e $\gamma = i\mu$.

Define-se a velocidade de grupo como

$$c_g = \omega'(\mu). \quad (2.17)$$

Esta velocidade é constante para ondas não dispersivas, se a frequência angular depende linearmente do número de onda angular, e varia quando a frequência depende não linearmente do número de onda [102].

Fisicamente, em [51], para ilustrar os conceitos de pacote de onda e velocidade de grupo consideram-se duas ondas harmônicas com mesma amplitude e frequências ligeiramente diferentes, assim como número de onda. Assim, considera-se o pacote de onda sendo a superposição

$$\phi(t, x) = a \cos(\mu_1 x - \omega_1 t) + a \cos(\mu_2 x - \omega_2 t) = 2a \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\mu x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \cos(\mu x - \omega t), \quad (2.18)$$

que é reescrita como

$$\phi(t, x) = 2a \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\mu x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \cos(\mu x - \omega t), \quad (2.19)$$

onde $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ e $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$.

O primeiro fator cosseno de (2.19) tem baixa frequência angular, $\Delta\omega$, e pequeno número de onda angular, $\Delta\mu$, com velocidade $c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\mu}$. Este fator é portanto uma onda longa (comprimento de onda $\frac{1}{\Delta\mu}$ grande). Enquanto, com relação ao primeiro, o segundo fator de (2.19) tem alta frequência ω , e grande número de onda μ , com velocidade $c = \frac{\omega}{\mu}$, sendo classificada como onda curta (comprimento de onda $\frac{1}{\mu}$ pequeno).

O efeito do primeiro fator (termo de baixa frequência) age como uma modulação do segundo fator (termo portador de alta frequência). Também pode-se

interpretar o primeiro fator como um tipo de envelope das ondas curtas do pacote, que é o pacote como um todo, o qual portanto movimenta-se com a velocidade de grupo c_g , [102].

Diferentes relações entre a velocidade média $c = \frac{\omega}{\mu}$ e a velocidade de grupo $c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\mu}$ podem ocorrer. Se $c > c_g$ as ondas aparecem na parte de trás do pacote viajam para frente e desaparecem, se $c = c_g$ não ocorre movimento relativo entre o pacote e a onda portadora e o pacote de onda viaja sem distorção, e se $c < c_g$ as ondas aparecem na frente do grupo, viajam para trás e desaparecem.

Na Figura 2.1 são apresentados gráficos referentes a duas ondas harmônicas com mesma amplitude e frequências e números de onda ligeiramente diferentes. Na Figura 2.1(a) tem-se os gráficos das duas ondas harmônicas, em 2.1(b) é apresentado o pacote de onda dado pela superposição das duas ondas harmônicas, em 2.1(c) é graficado o pacote de onda juntamente com a onda de baixa frequência que é interpretada como o envelope. Na Figura 2.1(d) os gráficos de (c) são repetidos aumentando o intervalo em x de forma a permitir a observação da periodicidade, essa característica é devida à periodicidade do primeiro fator cosseno em (2.19).

Por outro lado, em [102], um pacote de onda $\phi(t, x)$ que é a superposição de ondas harmônicas com $\omega = \omega(\mu)$, pode ser representado pela integral de Fourier

$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu) e^{i(\mu x - \omega(\mu)t)} d\mu. \quad (2.20)$$

Supondo o pacote localizado em $\mu = \mu_0$, ou seja, $A(\mu)$ é desprezível fora da vizinhança de μ_0 e concentrado em $\mu = \mu_0$. E considerando $\omega(\mu) \approx \omega(\mu_0) + \omega'(\mu_0)(\mu - \mu_0) = \omega(\mu_0) + c_g(\mu - \mu_0)$, segue

$$\phi(t, x) \approx e^{i(\mu_0 x - \omega(\mu_0)t)} \int_{\mu_0 - \delta}^{\mu_0 + \delta} A(\mu) e^{i((\mu - \mu_0)(x - c_g t))} d\mu, \quad (2.21)$$

então $\phi(t, x)$ é aproximado pelo produto de duas ondas. Neste caso, o segundo fator de (2.21) é que pode ser interpretado como o envelope que envolve o pacote de ondas curtas.

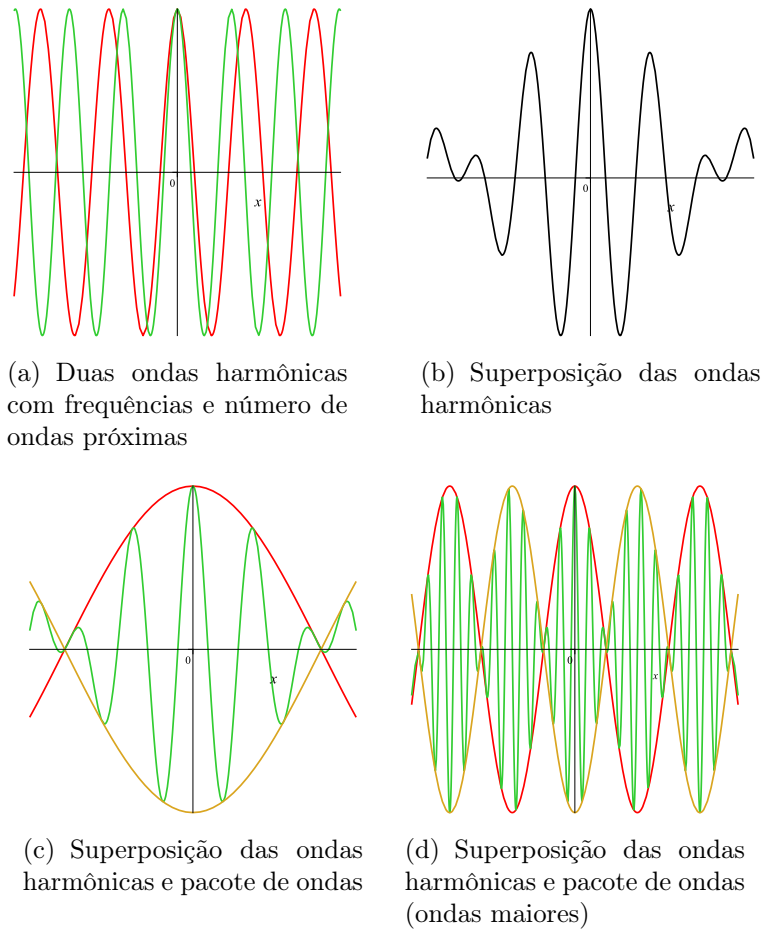


Figura 2.1: Superposição de duas ondas harmônicas com frequências e número de ondas próximas.

Assim, tanto pela superposição de duas ondas harmônicas proposta em [51] como pela superposição dada pela integral de Fourier, [102], as soluções dadas em (2.19) e (2.21), respectivamente, o pacote de onda $\phi(t, x)$ é dado pelo produto de duas ondas, onde um dos fatores é interpretado como um envelope que envolve as ondas curtas. Já o pacote de onda como um todo viaja com velocidade de grupo c_g .

Em particular, em [102] é apresentado como perfil inicial um pacote de onda Gaussiana

$$\operatorname{Re}(\phi(0, x)) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{32}} \cos(14x). \quad (2.22)$$

A transformada de Fourier será a translação de frequência da transformada do termo exponencial, ou seja,

$$A(\mu) = 6e^{-8(\mu-14)^2}, \text{ com } \mu_0 = 14$$

cujos gráficos são apresentados respectivamente nas Figuras 2.2(a) e 2.2(b). Cabe observar, neste exemplo, que o pacote de onda apresentado na Figura 2.2(a) não é periódico, pois o segundo fator de (2.21) não é periódico.

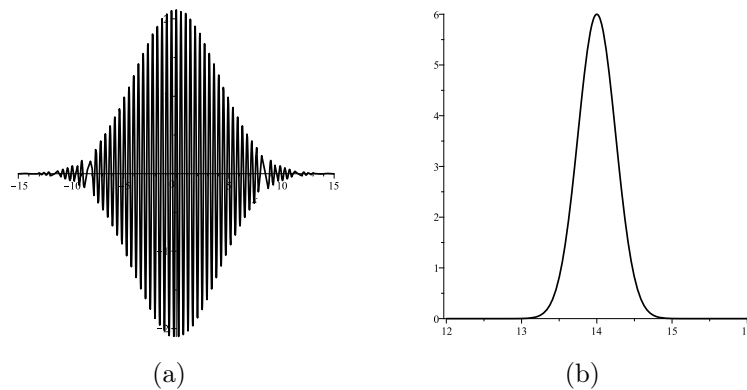


Figura 2.2: Perfil inicial do pacote Gaussiano e sua transformada de Fourier. Figura adaptada de [102].

Em relação as interações ondulatórias, quando uma onda incide na fronteira ou em uma descontinuidade do meio ocorrem variados fenômenos de interação [122], [51]. Neste trabalho, serão consideradas ondas incidentes num extremo finito do meio ou descontinuidades, causadas pela mudança de densidade ou dispositivos anexados. Fisicamente, a incidência produz ondas refletidas ou transmitidas a serem determinadas. A sua caracterização dependerá de condições de contorno ou compatibilidade.

3 TEORIA DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Linhas de transmissão (LT) são sistemas que conduzem energia eletromagnética de um ponto a outro, de tal modo que a energia não se espalhe conforme se propaga, ou seja, a energia é guiada da fonte geradora para a carga consumidora e não irradiada. Linhas de transmissão estão presentes no dia a dia, como exemplos pode-se citar linhas de telefone e cabos de TV.

Cabe observar que embora seja o objeto de estudo nesse trabalho, o termo linha de transmissão não está restrito às linhas usadas para guiar a energia eletromagnética. Em [122], o termo linha de transmissão abrange estruturas e meios que servem para transmitir energia ou informação entre dois pontos, são citados exemplos como ondas acústicas em fluídos e fibras nervosas no corpo humano.

As linhas de transmissão são foco deste e do próximo capítulos, no entanto, a transmissão é apenas uma parte do estudo que envolve energia eletromagnética, que de forma mais abrangente engloba sua geração, transmissão e recepção. Estas três etapas são focos do estudo da compatibilidade eletromagnética (EMC). Um sistema é eletromagneticamente compatível se não causa interferência em outros sistemas e nem nele próprio, e também não é suscetível à interferência de outros sistemas [23, 93, 94].

As emissões conduzidas de tensão (V) e corrente (A) e emissões irradiadas de campo elétrico (V/m) e campo magnético (A/m) são as quantidades primárias no estudo de problemas de compatibilidade eletromagnética, e potência (W) e densidade de potência (W/m) são as quantidades associadas às quantidades primárias [93].

O estudo das linhas de transmissão é importante em várias áreas da engenharia elétrica, se estendendo de sistemas de energia elétrica a telecomunicações, incluindo rede de computadores.

(A) **Sistemas de energia elétrica:** são os sistemas responsáveis pela geração de energia elétrica, sua transmissão, e distribuição [3], [49]. A transmissão de energia elétrica se dá em diferentes níveis de tensão e essa variável exige a utilização de linhas de transmissão adequadas, bem como geradores de carga e transformadores. Linhas de transmissão comuns em sistemas de energia elétrica são linhas aéreas (*overhead*) e cabos subterrâneos (*underground cables*). Estes dois tipos possuem características distintas, entre elas as comumente citadas são custo e segurança. Em [41] são fornecidos os seguintes dados para linhas de transmissão de energia: comprimento 1000 km, frequência 60 Hz, comprimento de onda 5000 km.

(B) **Telecomunicações:** As regiões do espaço em que sinais de frequência de rádio (RF) se propagam obtendo atenuação mínima de acordo com a região disponível são entendidas como linha de transmissão. A forma da linha de transmissão determina a faixa de frequências para as quais essa linha é mais adequada [31]. Em [41], são fornecidos os dados: para linhas telefônicas, comprimento 100 km, frequência 3 kHz, comprimento de onda 100 km (baixa frequência), e para ligações da linha transmissor-antena, comprimento 100 m, frequência 10 MHz; comprimento de onda 30 m.

(C) **Placas de circuitos - Rede de computadores:** As conexões existentes em ou entre dispositivos eletrônicos podem se comportar como linhas de transmissão quando sujeitas a altas velocidades. Linhas de transmissão do tipo *strips* e *microstrips* são utilizadas em filtros de microondas e no transporte de dados digitais em placas de circuitos [120], [79]. Os dados em [41] para placas de computadores são comprimento 20cm, frequência 1 GHz e comprimento de onda 30cm.

A modelagem e as técnicas de resolução de problemas electromagnéticos dependem do regime de operação, que são classificados como quase estático, regime de ressonância e regime óptico [88]. Essa classificação é caracterizada pelo valor do parâmetro comprimento elétrico, definido pelo quociente $\frac{L}{\lambda_0}$. O comprimento de onda $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ é o período espacial do sinal, sendo $c \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, f a frequência medida em Hertz e L o comprimento da linha de transmissão. Segundo a classificação apresentada em [88] tem-se:

- Para $\frac{L}{\lambda_0} \ll 1$ o regime é classificado como quase estático
- Para $\frac{L}{\lambda_0} \approx 1$ tem-se regime de ressonância;
- Para $\frac{L}{\lambda_0} \gg 1$ tem-se regime óptico.

O regime quase estático ocorre quando o comprimento é muito menor que o comprimento de onda do sinal utilizado para excitação, neste caso o sinal aplicado é sentido em qualquer parte do circuito quase que instantaneamente. Esta situação é típica de circuitos de parâmetros concentrados, e nestes casos o retardo (*delay*) é desconsiderado. Matematicamente em [88], o tempo que uma onda eletromagnética leva para ir de um ponto a outro de uma rede é

$$\tau = T \frac{L}{\lambda_0} = \frac{L}{c},$$

sendo $T = \frac{1}{f}$ o período de oscilação.

Neste trabalho, o interesse está direcionado ao regime de ressonância, caso em que o comprimento de onda do sinal é comparável ao comprimento do sistema, ou seja, a dimensão longitudinal do sistema é da ordem do comprimento de onda do sinal utilizado. Neste caso, os sinais necessitam de tempo para se propagar de um ponto ao outro, assim existe retardo na propagação do sinal. Esta situação é modelada por circuitos de parâmetros distribuídos, no caso das linhas de transmissão, tensão e corrente são dependentes do tempo e espaço.

Intervalo de frequência	Comprimento de onda	Aplicações
EHF (30-300 GHz)	1 cm - 1 mm	Radar, sensoriamento remoto
SHF (3-30 GHz)	10 cm - 1 cm	Radar, satélite de comunicação, sensoriamento remoto, circuitos eletrônicos de micro-ondas, navegação de aerovave, sistemas digitais
UHF (300-3000 MHz)	1 m - 10 cm	Radar, TV, forno micro-ondas, telefones celulares, sistemas digitais
VHF (30-300 MHz)	10 m - 1 m	TV, transmissão de FM, rádio de polícia
HF (3-30 MHz)	100 m - 10 m	Rádio de ondas curtas
MF (300-3000 kHz)	1 km - 100 m	Transmissão de AM, rádio marítimo
LF (30-300 kHz)	10 km - 1 km	Rádio-farol ADF
VLF (3-30 kHz)	100 km - 10 km	Navegação de longo alcance, sonar
ULF (300-3 kHz)	1 Mm - 100 km	Faixa de audio do telefone
SLF (30-300 Hz)	6214 mi - 621 mi	Potência comercial (60 Hz)
ELF (3-30 Hz)	62137 mi - 6214 mi	Detecção de objetos de metal enterrado

Tabela 3.1: Espectro de frequências para ondas em sistemas elétricos. Tabela adaptada de [93].

Assim, a relação entre comprimento e comprimento de onda é o que define e diferencia a teoria de circuitos discretos da teoria de parâmetros distribuídos.

As ondas eletromagnéticas são classificadas de acordo com sua frequência. Em [93], é fornecida a classificação apresentada na Tabela 3.1 com algumas das aplicações da referência. As siglas E, S, U, V, H, M, L significam extra, super, ultra, muito, alta, média, baixa e F significa frequência. É importante observar que essa tabela não contempla os comprimentos em escala nano e micro que serão discutidos posteriormente.

De acordo com a frequência de uma onda e da determinação do comprimento de onda, é possível determinar o comprimento da linha de transmissão a fim de manter o regime de ressonância.

Como já observado, a Tabela 3.1 não contempla comprimentos na escala nano e micro. No entanto, esses comprimentos têm despertado grande interesse

em dispositivos eletrônicos de alta frequência. Na Figura 3.1¹, são contemplados intervalos de frequência e comprimentos de onda na escala de micro e nano.

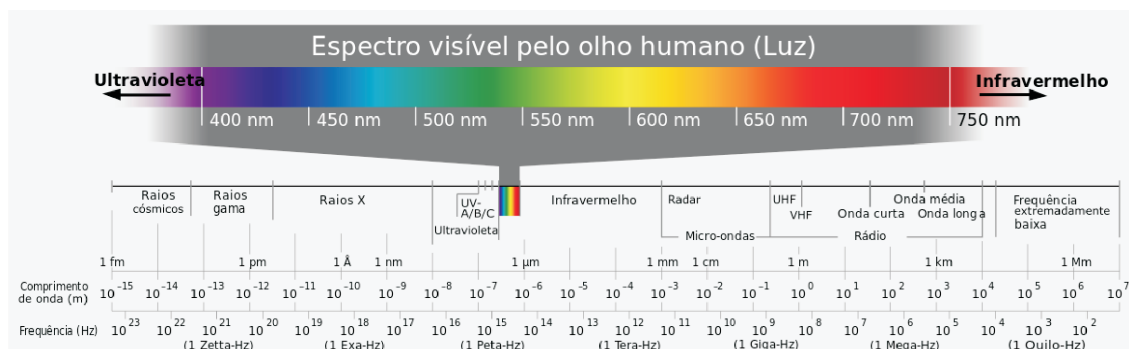


Figura 3.1: Espectro eletromagnético. Figura extraída de Wikipedia - http://pt.wikipedia.org/wiki/Espectro_visível

Nanotubos de carbono devido a suas excelentes propriedades térmicas, magnéticas e elétricas têm sido estudados como interconectores nos dispositivos eletrônicos de alta frequência (alta velocidade) como por exemplo *intra-chips*, *inter-chips* e em antenas [59, 60, 103, 113], onde são consideradas frequências em giga e terahertz. Em [37], redes de nanotubos de carbono são utilizados na construção de linhas de transmissão planares. Ainda no domínio micro e nano, em [57], a teoria de linhas de transmissão é estendida para o estudo do acoplamento de duas fibras micro/nano em paralelo, assim estende-se a teoria ao domínio óptico.

Tipos de linha de transmissão

As linhas de transmissão (LT) podem ser compostas por diferentes estruturas e possuir configurações distintas. Na Figura 3.2, são apresentadas alguns dos tipos mais comuns: linha coaxial, com dois fios condutores, com placas paralelas, com faixa (*stripline*), com micro faixa (*microstripline*). As aplicações determinam o tipo de linha de transmissão a ser utilizado, já que LT diferentes possuem características distintas em relação a intervalos de frequência.

¹Wikipedia - https://pt.wikipedia.org/wiki/Espectro_visível acessado em 01/07/2017 às 12:21.

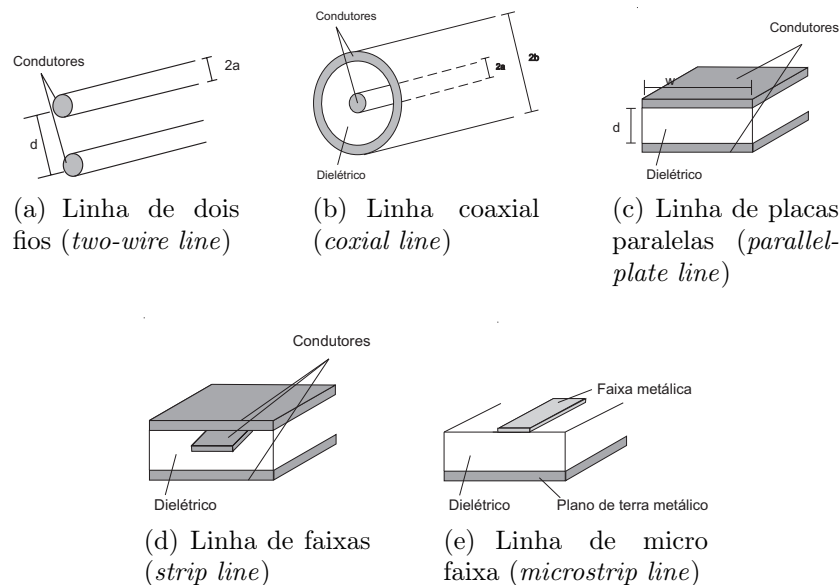


Figura 3.2: Alguns tipos de linhas de transmissão. Figura adaptada de [122].

Classificação de linhas de transmissão

As linhas de transmissão também são classificadas com relação a algumas características, entre estas:

- **Linhas de transmissão curtas, médias e longas:** Em sistemas de energia de potência, as linhas de transmissão são classificadas quanto a seu comprimento, como [30]:
 1. curtas: com comprimento menor que 80 km, neste caso os efeitos da capacitância da linha são desconsiderados;
 2. médias: com comprimento entre 80 km e 240 km, a capacitância da linha toda é considerada como uma constante concentrada;
 3. longas: com comprimento superior a 240km, os parâmetros são considerados distribuídos por unidade de comprimento.
- **Linhas de transmissão uniformes e não uniformes:** A linha de transmissão é classificada como não uniforme quando os parâmetros

por unidade de comprimento utilizados no equacionamento dependem da variável espacial, essa dependência ocorre pela variação da seção transversal dos condutores ou do meio não homogêneo circundante. O caso em que os parâmetros não dependem da variável espacial, ou seja, a seção transversal dos condutores e do meio não homogêneo circundante são constantes ao longo do eixo espacial, é dita uniforme [95].

- **Linhas de transmissão com perdas e sem perdas:** Em [68], são citadas fontes de perdas como acoplamento, perda por radiação, perda causada pelo condutor e pelo dielétrico. Os efeitos de interesse nesse trabalho são perdas causadas pelo condutor, caracterizadas pelo parâmetro resistência dos condutores imperfeitos, e pela perda causada pelo dielétrico, caracterizada pelo parâmetro condutância. Assim, a linha é classificada como com perdas quando pelo menos um dos parâmetros resistência ou condutância são não nulos. Na prática, no caso com perdas ocorrerá atenuação e perda de potência [99]. A linha é dita sem perdas se resistência e condutância são nulas.
- **Meio circundante homogêneo e não homogêneo:** Quando o dielétrico envolvendo os condutores tem permissividade, condutividade e permeabilidade que não dependem da variável espacial, o meio é dito homogêneo. Caso contrário, é classificado como não homogêneo [95].

Neste capítulo, foram introduzidos alguns conceitos importantes da teoria de linhas de transmissão. Nos próximos capítulos as equações são obtidas e soluções são discutidas para linha de transmissão com dois e múltiplos condutores.

4 MODELO DISTRIBUÍDO PARA LINHAS DE TRANSMISSÃO COM DOIS CONDUTORES

Neste capítulo, as linhas de transmissão com dois condutores¹ são abordadas, desde a formulação até a caracterização geral das soluções do tipo ondas planas e modais. No final do capítulo, descontinuidades, junções, e condições de contorno são estudadas a partir da solução de ondas modais utilizando a decomposição destas em ondas que se propagam para frente e para trás.

Para obter as equações da linha de transmissão, considera-se uma LT composta por dois condutores cuja seção transversal é constante ao longo do comprimento z , além disso o espaçamento e o dielétrico entre os condutores são os mesmos ao longo da linha de transmissão, tal linha, como anteriormente definida, é dita uniforme. Na literatura, a obtenção das equações, para propagação de ondas eletromagnéticas transversais (TEM), que determinam a tensão e a corrente em uma linha de transmissão com fontes distribuídas são representadas por uma LT com dois condutores paralelos apresentada na Figura 4.1, [53], [99]. Considerando que a linha de transmissão é composta por dois condutores, diz-se que o condutor 0 (zero) é o condutor de referência.

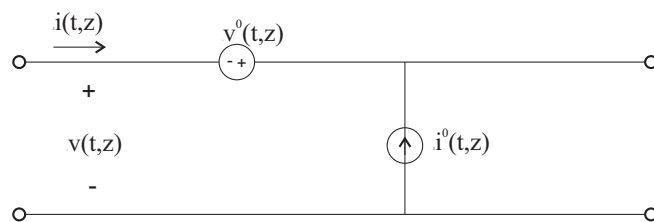


Figura 4.1: Linha de transmissão de dois condutores paralelos com fontes distribuídas.

¹Na literatura, o termo condutores é utilizado na composição das linhas de transmissão, mas linhas com outros materiais podem ser consideradas, como fibras ópticas, [53].

As funções $v(t, z)$ e $i(t, z)$ representam respectivamente a tensão entre os condutores e a corrente nos condutores, ambas dependentes do tempo t e da variável espacial z , $v^0(t, z)$ e $i^0(t, z)$ são fontes distribuídas. Para utilizar as Leis de Kirchhoff os condutores da linha de transmissão são considerados como elementos infinitesimais, Figura 4.2, e cada um desses elementos modelados como circuitos concentrados representados na Figura 4.3.

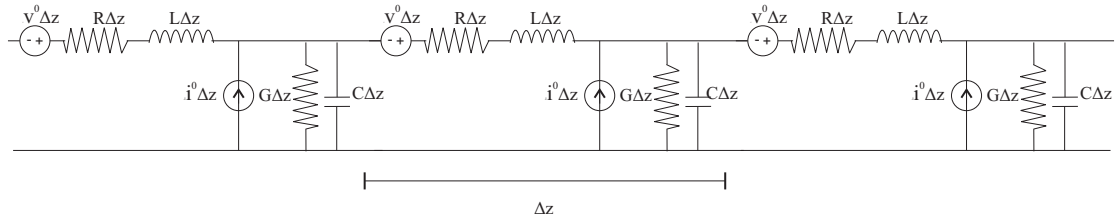


Figura 4.2: Decomposição de uma linha de transmissão em circuitos concentrados.

Os parâmetros utilizados no equacionamento e representados na Figura 4.2 são distribuídos uniformemente ao longo da linha e são considerados independentes da frequência sendo: a indutância L em ambos os condutores medida em H/m, a resistência R em ambos os condutores medida em Ω/m , a capacitância C entre os condutores medida em F/m, a condutância G do meio dielétrico medida em S/m, $i^0(t, z)$ uma fonte de corrente distribuída medida em A/m e $v^0(t, z)$ fonte de tensão em série distribuída V/m.

Os termos de fontes distribuídas ao longo da linha de transmissão são excitações como as geradas por campos eletromagnéticos próximos, como por exemplo, emissão de radares de alta potência, pulsos eletromagnéticos nucleares, curto circuitos, relâmpagos [79], [95].

Para aplicar as leis Kirchhoff para tensão e corrente considera-se o circuito concentrado equivalente a um elemento infinitesimal da linha de transmissão de comprimento Δz , dado na Figura 4.3.

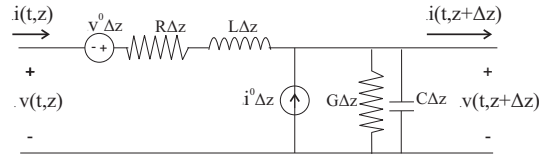


Figura 4.3: Circuito equivalente a um elemento infinitesimal da linha de transmissão com fontes distribuídas.

Aplicando ao circuito dado na Figura 4.3 a lei de Kirchhoff para tensão decorre

$$v(t, z) - v(t, z + \Delta z) = R\Delta z i(t, z) + L\Delta z \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) - v^0(t, z)\Delta z, \quad (4.1)$$

e aplicando a lei de Kirchhoff para corrente resulta

$$i(t, z) - i(t, z + \Delta z) = C\Delta z \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + G\Delta z v(t, z) - i^0(t, z)\Delta z. \quad (4.2)$$

Dividindo ambos os lados, das equações acima, por Δz e fazendo limite de $\Delta z \rightarrow 0$ resulta

$$\begin{aligned} L \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, z)}{\partial z} + R i(t, z) &= v^0(t, z), \\ C \frac{\partial v(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, z)}{\partial z} + G v(t, z) &= i^0(t, z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

que são as equações da teoria de linhas de transmissão uniformes com dois condutores e com fontes distribuídas.

As linhas de transmissão são guiadas por condições iniciais, condições de contorno e excitações externas. Estas condições e excitações são responsáveis por gerar corrente e tensão a serem transmitidas na linha.

Na resolução das equações para a linha de transmissão, consideram-se as condições iniciais para as distribuições de tensão e corrente ao longo da linha, cargas nos capacitores e fluxo nos indutores [79]. Na prática, estes estados iniciais caracterizam que a linha está inicialmente energizada, como por exemplo, descargas elétricas [55], representado na Figura 4.4, ou na análise de interconexões de portas

lógicas [125]. Matematicamente estas informações são dadas como condições iniciais na forma genérica

$$v(z, 0) = v_0(z), \quad i(z, 0) = i_0(z). \quad (4.4)$$

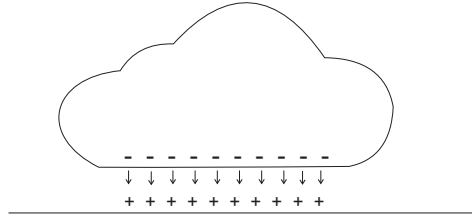


Figura 4.4: Descarga elétrica modelada como condição inicial. Figura adaptada de [55].

No caso de uma linha de transmissão finita, consideram-se nas extremidades da linha dispositivos, comumente uma fonte e um carregamento. Estes dispositivos são considerados matematicamente no problema como condições de contorno, no entanto a tensão e a corrente nas extremidades não são conhecidas em condições de contorno gerais [79].

Em particular, na Figura 4.5, é apresentada uma linha de transmissão com carregamento na extremidade $z = 0$ composto por uma conexão em série de um resistor R_F , um indutor L_F e um capacitor C_F juntamente com um gerador dado por uma função $V_F(t)$. Na extremidade $z = l$, é considerado um carregamento composto também por uma conexão em série de um resistor R_l , um indutor L_l e um capacitor C_l . A configuração desta linha com condições de contorno é apresentada na Figura 4.5. Matematicamente, esta fonte e carregamento são descritos como as condições de contorno em $z = 0$ dada por

$$\frac{d}{dt}V_F(t) = R_F \frac{d}{dt}i(t, 0) + L_F \frac{d^2}{dt^2}i(t, 0) + \frac{1}{C_F}i(t, 0) + \frac{d}{dt}v(t, 0), \quad (4.5)$$

e em $z = l$ dada por

$$\frac{d}{dt}v(t, l) = R_l \frac{d}{dt}i(t, l) + L_l \frac{d^2}{dt^2}i(t, l) + \frac{1}{C_l}i(t, l). \quad (4.6)$$

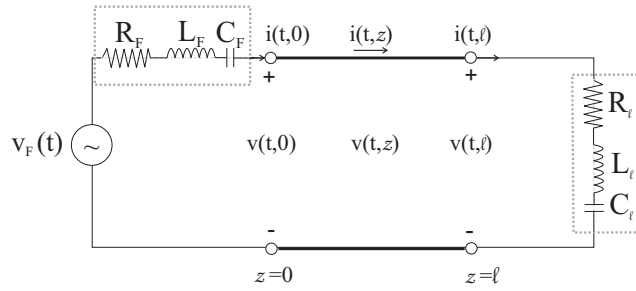


Figura 4.5: Linha de transmissão com condições de contorno composta por conexões de resistores, capacitores e indutores.

Observe que as condições de contorno tornam-se equações diferenciais pela presença dos elementos reativos representados pelo capacitor e pelo indutor [88].

Além das condições iniciais e de contorno, citadas acima, na sequência deste trabalho condições de compatibilidade serão apresentadas e utilizadas para tratar descontinuidades na linha de transmissão, como interconexão entre linhas uniformes, garantindo continuidade da tensão e voltagem no ponto de conexão das linhas.

Na literatura, as equações para as linhas de transmissão também podem ser obtidas usando as equações de Maxwell [95], [41].

O sistema de equações apresentado em (4.3) pode ser escrito na forma matricial como

$$\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(t, z) + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{U}(t, z) + \mathbf{D} \mathbf{U}(t, z) = \mathbf{F}(t, z), \quad (4.7)$$

sendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}(t, z) = \begin{pmatrix} v(t, z) \\ i(t, z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t, z) = \begin{pmatrix} v^0(t, z) \\ i^0(t, z) \end{pmatrix},$$

e as condições iniciais (4.4)

$$\mathbf{U}(0, z) = \mathbf{U}_0(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) \\ i_0(z) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

No caso de uma linha de transmissão finita de comprimento l , as condições de contorno apresentadas em (4.5) e (4.6) podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\mathbf{U}(t, 0) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{U}_t(t, 0) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{U}_{tt}(t, 0) &= F_{11}(t), \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{U}(t, l) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{U}_t(t, l) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{U}_{tt}(t, l) &= F_{21}(t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

para $t \geq 0$, sendo

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_F} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & R_F \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & L_F \end{pmatrix}, \quad F_{11}(t) = \frac{d}{dt}V_F(t) \quad (4.10)$$

e

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_l} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & R_l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & L_l \end{pmatrix}, \quad F_{21}(t) = 0. \quad (4.11)$$

De forma geral, a solução da equação matricial (4.7) sujeita às condições iniciais dadas em (4.8) e às condições de contorno (4.9) pode ser dada seguindo [47] na forma

$$\mathbf{U}(t, z) = \int_0^l h(t, z, \xi) \mathbf{A} \mathbf{U}_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l h(t - \tau, z, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi d\tau + \mathbf{J}(\mathbf{U}, h), \quad (4.12)$$

sendo $h(t, x, \xi)$ a função de Green associada ao problema [47], [76] e

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}, h) = \int_0^t h(t - \tau, x, 0) \mathbf{U}(\tau, 0) d\tau - \int_0^t h(t - \tau, x, l) \mathbf{U}(\tau, l) d\tau, \quad (4.13)$$

sendo $\mathbf{U}(\tau, 0)$ e $\mathbf{U}(\tau, l)$ determinadas pela equação (4.7), ou (4.3) e pelas condições de contorno (4.9).

Observe que devido ao padrão das matrizes coeficientes, não é possível diagonalizar simultaneamente (4.7) nem mesmo para o caso sem perdas ($R = 0, G = 0$).

O sistema (4.3) pode ser desacoplado em duas equações diferenciais de segunda ordem que são do tipo equação do telégrafo. A fim de obter esse desacoplamento, escreve-se (4.3) na forma algébrica

$$\mathbf{L}\mathbf{U}(t, z) = \mathbf{F}(t, z), \quad (4.14)$$

com

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & L\frac{\partial}{\partial t} + R \\ C\frac{\partial}{\partial t} + G & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

e utilizando a identidade de Cramer obtém-se

$$\text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{L}\mathbf{U}(t, z) = \det(\mathbf{L})\mathbf{I}\mathbf{U}(t, z) = \text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{F}(t, z) = \mathbf{f}(t, z) \quad (4.16)$$

simplificadamente

$$\det(\mathbf{L})\mathbf{U}(t, z) = \mathbf{f}(t, z),$$

onde $\text{adj}(\mathbf{L})$ é a matriz adjugada (ou adjunta) do operador \mathbf{L} dada por

$$\text{adj}(\mathbf{L}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & -L\frac{\partial}{\partial t} - R \\ -C\frac{\partial}{\partial t} - G & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

e \mathbf{I} a matriz identidade de ordem 2×2 , de onde resulta

$$LC\frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial y(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial z^2} + RGy(t, z) = f_k, \quad (4.17)$$

onde $y(t, z)$ representa $v(t, z)$ para $k = 1$ e $i(t, z)$ para $k = 2$. Aqui

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\partial v^0(t, z)}{\partial z} + L\frac{\partial i^0(t, z)}{\partial t} + Ri^0(t, z), \\ f_2 &= C\frac{\partial v^0(t, z)}{\partial t} + Gv^0(t, z) - \frac{\partial i^0(t, z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

No caso da linha de transmissão sem fontes, $\mathbf{F}(t, z) = \mathbf{0}$, obtém-se a mesma equação do telégrafo para corrente e tensão. No entanto, as condições de contorno podem torná-las acopladas. Para fenômenos dinâmicos, as equações em (4.17) tornam-se acopladas pelos termos fontes e podem introduzir ruído através da diferenciação.

Alguns casos especiais são obtidos desconsiderando determinados parâmetros, como por exemplo, para $\mathbf{F}(t, z) = \mathbf{0}$:

- Linha de transmissão sem perdas, ou seja, $R = 0$ e $G = 0$

$$LC \frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial z^2} = 0; \quad (4.19)$$

- Linha de transmissão com $L = 0$ e $G = 0$ resulta a equação de difusão

$$RC \frac{\partial y(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial z^2} = 0; \quad (4.20)$$

- Linha de transmissão do tipo Heaviside, considera-se $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$

$$LC \frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial t^2} + 2RC \frac{\partial y(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial z^2} + RGy(t, z) = 0. \quad (4.21)$$

Nas seções seguintes, serão caracterizadas todas as ondas planas e modais para as equações da teoria de linhas de transmissão com dois condutores. Inicia-se determinando as ondas planas, sua caracterização e resultados importantes.

4.1 Ondas planas em linhas de transmissão com dois condutores

Pelo princípio da decomposição linear, qualquer solução de (4.3) será superposição de uma solução arbitrária do sistema de linhas de transmissão sem fontes e uma solução particular para o sistema com fontes.

Neste momento, o interesse é caracterizar soluções do tipo ondas planas do sistema

$$\begin{aligned} L \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} v(t, z) + Ri(t, z) &= 0, \\ C \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} i(t, z) + Gv(t, z) &= 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

que são definidas como soluções do tipo

$$v(t, z) = V(\lambda t + \gamma z), \quad i(t, z) = I(\lambda t + \gamma z) \quad (4.23)$$

onde γ e λ correspondem ao número de onda e frequência, respectivamente, e $c = -\frac{\lambda}{\gamma}$ é a razão relacionada com a velocidade de propagação da onda. Introduce-se a definição da fase de onda plana

$$s = \lambda t + \gamma z, \quad (4.24)$$

e segue que (4.23) será solução do sistema (4.22) sempre que $v(t, z) = V(s)$ e $i(t, z) = I(s)$ satisfazem

$$\lambda LI'(s) + \gamma V'(s) + RI(s) = 0, \quad (4.25)$$

$$\lambda CV'(s) + \gamma I'(s) + GV(s) = 0.$$

O sistema (4.25) pode ser escrito na forma matricial como

$$\mathbf{A}_P \mathbf{U}'(s) + \mathbf{D}_P \mathbf{U}(s) = \mathbf{0}, \quad (4.26)$$

sendo

$$\mathbf{A}_P = \begin{pmatrix} \gamma & \lambda L \\ \lambda C & \gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}(s) = \begin{pmatrix} V(s) \\ I(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_P = \mathbf{D}. \quad (4.27)$$

Usando a equação homogênea do telégrafo (4.17), com $f_k = 0$, tem-se que $V(s)$, $I(s)$ são soluções da equação escalar de segunda ordem

$$(LC\lambda^2 - \gamma^2) \frac{d^2}{ds^2} W(s) + \lambda(RC + GL) \frac{d}{ds} W(s) + RGW(s) = 0. \quad (4.28)$$

Para obter as soluções do tipo ondas planas, serão utilizadas a seguir duas classificações. O sistema (4.26) será dito regular se $\det(\mathbf{A}_P) \neq 0$ e singular caso contrário.

4.1.1 Linhas de transmissão regulares

A seguir serão discutidas soluções do tipo ondas planas para o caso regular, seguindo a definição acima, $\det(\mathbf{A}_P) \neq 0$.

4.1.1.1 Linhas de transmissão regulares com perdas

Considerando que o sistema (4.26) é regular, ou seja,

$$\det(\mathbf{A}_P) = \gamma^2 - \lambda^2 LC \neq 0, \quad (4.29)$$

de onde resulta que $\gamma \neq \pm\sqrt{LC}\lambda$. A solução geral do tipo onda plana de (4.26) pode ser dada como

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

onde $\mathbf{h}_P(s)$ é a resposta matricial impulsiva ou fundamental que satisfaz o problema de valor inicial

$$\mathbf{A}_P \mathbf{h}'_P(s) + \mathbf{D}_P \mathbf{h}_P(s) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_P \mathbf{h}_P(0) = \mathbf{I}. \quad (4.31)$$

Aqui \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ são as matrizes identidade e nula de ordem 2×2 , respectivamente. Em termos simbólicos, $\mathbf{h}_P(s) = e^{-\mathbf{A}_P^{-1} \mathbf{D}_P s} \mathbf{A}_P^{-1}$ onde a matriz exponencial pode ser calculada por métodos numéricos, espectrais ou não espectrais [81]. Aqui, aplica-se a fórmula derivada para sistemas de ordem arbitrária [20], [21].

Para o sistema (4.26), com $m = 1$ e $N = 2$ em (A.1) e (A.2), resulta a resposta matricial fundamental plana

$$\mathbf{h}_P(s) = \begin{pmatrix} \gamma d'_P(s) & -\lambda L d'_P(s) - R d_P(s) \\ -\lambda C d'_P(s) - G d_P(s) & \gamma d'_P(s) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

A função escalar geradora de onda plana $d_P(s)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} b_0 d''_P(s) + b_1 d'_P(s) + b_2 d_P(s) &= 0 \\ d_P(0) = 0, b_0 d'_P(0) &= 1, \end{aligned} \quad (4.33)$$

com $b_0 = -(LC\lambda^2 - \gamma^2) \neq 0$, $b_1 = -(LG + RC)\lambda$ e $b_2 = -RG$, resultando $d_P(s)$ dada por

$$d_P(s) = \frac{1}{b_0} \frac{e^{\eta_1 s} - e^{\eta_2 s}}{\eta_1 - \eta_2} = \frac{e^{rs} \sinh(\rho s)}{b_0 \rho}, \quad (4.34)$$

onde $\eta_1 = r + \rho$ e $\eta_2 = r - \rho$ são as raízes do polinômio característico

$$P(\eta) = \det(\eta \mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P) = b_0 \eta^2 + b_1 \eta + b_2 = 0, \quad (4.35)$$

sendo $r = -\frac{b_1}{2b_0}$ e $\rho = \frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0}$.

A solução (4.34) obtida para raízes simples de $P(\eta) = 0$ pode ser estendida pelo processo de limite de Liouville para o caso das raízes duplas $\eta_{1,2} = r = -\frac{b_1}{2b_0}$, resultando

$$d_P(s) = \lim_{\eta_2 \rightarrow \eta_1} \left(\frac{1}{b_0} \frac{e^{\eta_1 s} - e^{\eta_2 s}}{\eta_1 - \eta_2} \right) = \frac{se^{rs}}{b_0}. \quad (4.36)$$

Considerando $\mathbf{h}_P(s)$ como uma base matricial, a solução geral de um sistema regular com perdas (4.26) pode ser escrita como

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{c} = \Gamma_P \mathbf{d}_P(s), \quad (4.37)$$

onde

$$\Gamma_P = \begin{pmatrix} -Rc_{21} & \gamma c_{11} - \lambda Lc_{21} \\ -Gc_{11} & -\lambda Cc_{11} + \gamma c_{21} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

e

$$\mathbf{d}_P(s) = \begin{pmatrix} d_P(s) \\ d'_P(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{b_0(\eta_1 - \eta_2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \eta_1 & -\eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\eta_1 s} \\ e^{\eta_2 s} \end{pmatrix}.$$

Utilizando (4.34) em (4.32), obtém-se

$$\mathbf{h}_P(s) = e^{\eta_1 s} \mathbf{A}_1 + e^{\eta_2 s} \mathbf{A}_2, \quad (4.39)$$

onde $\mathbf{A}_1 = \frac{A(\eta_1)}{b_0(\eta_1 - \eta_2)}$ e $\mathbf{A}_2 = -\frac{A(\eta_2)}{b_0(\eta_1 - \eta_2)}$ para

$$A(\eta) = \text{adj}(\eta \mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P) = \begin{pmatrix} \gamma \eta & -(\lambda L \eta + R) \\ -(\lambda C \eta + G) & \gamma \eta \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Assim todas as ondas planas para uma linha de transmissão são do tipo

$$\mathbf{U}(t, z) = (\mathbf{A}_1 e^{\eta_1(\lambda t + \gamma z)} + \mathbf{A}_2 e^{\eta_2(\lambda t + \gamma z)}) \mathbf{c}, \quad (4.41)$$

onde η_1, η_2 são as raízes de (4.35) com $b_0 = -(LC\lambda^2 - \gamma^2) \neq 0$.

A base matricial $\mathbf{h}_P(s)$ pode ser reescrita em termos de funções hiperbólicas usando (4.34) como

$$\mathbf{h}_P(s) = \frac{e^{rs}}{b_0} \left[\mathbf{B}_1 \frac{\sinh(\rho s)}{\rho} + \mathbf{B}_2 \cosh(\rho s) \right] \quad (4.42)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \text{adj}(r\mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P) = \begin{pmatrix} \gamma r & -(\lambda L r + R) \\ -(\lambda C r + G) & \gamma r \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_2 &= \text{adj}(\mathbf{A}_P) = \begin{pmatrix} \gamma & -\lambda L \\ -\lambda C & \gamma \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.43)$$

A decomposição da base matricial (4.39) para qualquer linha regular é matematicamente robusta. O caso das raízes duplas $\eta_1 = \eta_2 = r$ pode ser obtido levando limite de $\rho = 0$ em (4.42), que resulta

$$\mathbf{h}_P(s) = \frac{e^{rs}}{b_0} [s\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2]. \quad (4.44)$$

4.1.1.2 Linhas de transmissão regulares sem perdas

O conjunto de ondas planas para uma linha regular sem perdas, $R = 0$ e $G = 0$,

$$\begin{aligned}L \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} v(t, z) &= 0, \\ C \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} i(t, z) &= 0,\end{aligned}\quad (4.45)$$

não é atrativo, uma vez que se reduz a constantes, isso segue de uma linha com perdas ($R^2 + G^2 > 0$) por processo de limite. Para uma linha sem perdas, tem-se $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$, assim $\eta = 0$ é uma raiz dupla de (4.35), já que b_0 não é zero para uma linha regular. Finalmente, fazendo $r \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow 0$ em (4.39) ou $r = 0$ em (4.44), resulta

$$\mathbf{h}_P(s) = \frac{1}{b_0} \text{adj}(\mathbf{A}_P) = \frac{1}{b_0} \begin{pmatrix} \gamma & -\lambda L \\ -\lambda C & \gamma \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Portanto uma linha de transmissão regular sem perdas pode ter somente soluções constantes como ondas planas.

4.1.1.3 Formulação regular da equação do telégrafo

A equação do telégrafo (4.28), para $\gamma^2 - LC\lambda^2 \neq 0$, pode ter sua solução $W(s)$ dada pela superposição linear

$$W(s) = d_T(s)a_1 + d'_T(s)a_2 \quad (4.47)$$

onde $d_T(s) = -d_P(s)$, $d_P(s)$ definida em (4.34), assim, $d_P(s)$ e $d'_P(s)$ constituem uma base robusta de (4.33). Assim, a tensão e a corrente são do tipo

$$W(s) = \frac{1}{2b_0\rho} e^{rs} [a(\rho)e^{\rho s} - a(-\rho)e^{-\rho s}], \quad (4.48)$$

onde $a(\rho) = -(a_1 + (r + \rho)a_2)$, sendo a_1, a_2 constantes arbitrárias. Caso as constantes a_1 e a_2 sejam assumidas correspondendo à tensão, a corrente pode ser obtida por integração na segunda equação de (4.25).

4.1.2 Linhas de transmissão singulares

Conforme já definido anteriormente, uma linha de transmissão é classificada como singular em relação a ondas planas quando $\det(A_P) = b_0 = \gamma^2 - LC\lambda^2 = 0$. Isso implica que a frequência complexa λ e o número de onda complexo γ não são arbitrários, eles são linearmente relacionados $\gamma = \pm\sqrt{LC}\lambda$.

Neste caso, como $b_0 = 0$, o polinômio característico torna-se um polinômio de primeiro grau $P(\eta) = \det(\eta A_P + D_P) = -\lambda(LG + RC)\eta - RG$. Existem dois casos a considerar: o caso dissipativo e o caso conservativo.

4.1.2.1 Linhas de transmissão singulares dissipativas com perdas

Quando existe dissipação tem-se $R^2 + G^2 > 0$, logo $LG + RC > 0$ e $P(\eta)$ não é identicamente nulo. Do teorema de Chrystal, [35], o sistema (4.26) terá somente uma solução linearmente independente. Utilizando o método de Euler

procurando soluções exponenciais $e^{\eta s}\mathbf{v}$, obtém-se que

$$\mathbf{U}(s) = e^{\eta s}\mathbf{v}, \quad \eta = \frac{-RG}{\lambda(RC + GL)}, \quad (4.49)$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\eta\gamma}{\eta\lambda L + R} \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\eta\gamma}{\eta\lambda C + G} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Estas ondas terão o mesmo valor para todos os pontos para os quais a fase linear s é constante ou simplesmente através das linhas características $\lambda t + \gamma z = B$ com $\gamma = \pm\sqrt{LC}\lambda$. Em particular, para o caso senoidal $\lambda = j\omega, \omega > 0$, existirão somente duas ondas exponenciais viajantes

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\mp\sigma(z \pm ct)}\mathbf{v}, \quad \sigma = \frac{RG\sqrt{LC}}{RC + GL}, \quad (4.51)$$

se propagando sem distorção em ambas as direções, conforme (4.50), e com a mesma velocidade $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Quando usamos a equação do telégrafo (4.28), o caso singular se reduz à equação de primeira ordem

$$\lambda(RC + GL)\frac{dW(s)}{ds} + RGW(s) = 0. \quad (4.52)$$

Assim, para um sistema de linha de transmissão singular dissipativo, $b_1 = RC + GL > 0$, ondas planas serão múltiplas de um termo exponencial $\mathbf{U}(s) = d_T(s)\mathbf{c}$ onde $d_T(s)$ satisfaz a equação acima com a condição inicial $\lambda(RC + GL)d_P(0) = 1$, isto é, $d_T(s) = [\lambda(RC + GL)]^{-1} e^{\frac{-RG}{\lambda(RC + GL)}s}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ um vetor arbitrário na direção de acoplamento da tensão e corrente como em (4.50).

4.1.2.2 Linhas de transmissão singulares conservativas sem perdas

Para um sistema de linha de transmissão sem perdas (4.45) que é singular, ondas planas satisfazem $\mathbf{A}_P\mathbf{U}'(s) = 0$. Desde que o polinômio característico

$\det(\eta A_P) = (\gamma^2 - LC\lambda^2)\eta^2$ seja identicamente nulo para qualquer valor de η , não se pode utilizar o teorema de Crystal [35]. Entretanto multiplicando o sistema pela adjugada de A_P , obtém-se $(\gamma^2 - LC\lambda^2)U'(s) = 0$ e conclui-se que $U(s)$ deve ser arbitrário sempre que $\det(A_P) = b_0 = \gamma^2 - LC\lambda^2 = 0$. Assim, ondas planas são ondas viajantes arbitrárias se propagando

$$U(s) = \mathbf{U}(z \pm ct), \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.53)$$

Considerando a linha de transmissão singular, tem-se $\det(A_P) = 0$, ou seja, $\gamma^2 - \lambda^2 LC = 0$, as retas determinadas por essa equação permitem determinar onde o problema é singular, ou seja, é válida uma relação de dispersão. Na Figura 4.6 são determinadas as regiões onde o problema é regular e singular.

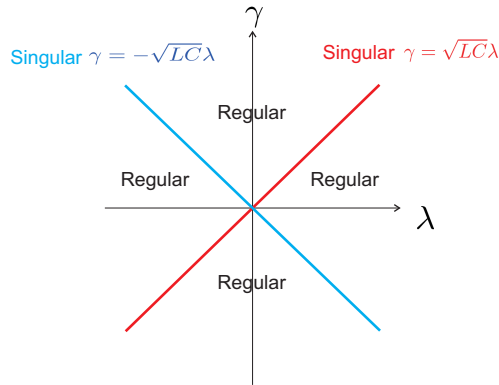


Figura 4.6: Regiões regulares e singulares para uma linha de transmissão.

Quando a linha é singular sem perdas, a equação do telégrafo se reduz à equação da onda

$$LC \frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(t, z)}{\partial z^2} = f_k, \quad (4.54)$$

que pode também ser obtida de (4.45) por diferenciação cruzada.

Soluções de ondas planas $v(t, z) = V(s)$, $i(t, z) = I(s)$, $s = \lambda t + \gamma x$ de (4.54) para uma linha de transmissão sem perdas e sem fontes são obtidas de (4.28) resolvendo

$$(LC\lambda^2 - \gamma^2)W''(s) = 0. \quad (4.55)$$

Tem-se que para uma linha sem perdas com $\gamma = \pm \frac{1}{c} \lambda$ que o perfil $W(s)$ será arbitrário. Como antes, a hipótese $LC\lambda^2 - \gamma^2 = 0$ levará a uma onda sem distorção uma vez que $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ é constante.

4.2 Ondas planas exponenciais nas linhas de transmissão com dois condutores

As equações (4.22) têm muitos tipos de formas de onda de excitação. É de particular importância considerar simples ondas planas exponenciais

$$\mathbf{U}(t, z) = \mathbf{h}_P(\lambda t + \gamma z) \mathbf{c} = e^{\lambda t + \gamma z} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (4.56)$$

onde, para os números complexos² $\lambda = \zeta + j\omega$, $\gamma = \alpha + j\beta$, a onda plana exponencial

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\zeta t + \alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{v} \quad (4.57)$$

tem fatores de atenuação e oscilatório em cada variável. Mais precisamente, ζ é a constante de atenuação no tempo e ω a frequência, enquanto α é a constante de atenuação espacial relacionada com a onda evanescente e β é o número de onda relacionada com a onda harmônica.

Ondas com perfil exponencial podem ser obtidas da representação dada em (4.41) pela determinação apropriada do vetor \mathbf{c} ou por resolver o problema de autovalor que surge da substituição de (4.56) em (4.22)

$$\begin{pmatrix} \gamma & \lambda L + R \\ \lambda C + G & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Quando usa-se a equação do telégrafo, o vetor \mathbf{v} tem que ser determinado por substituição em (4.25) ou (4.26).

²Nas aplicações de Engenharia Elétrica é usual denotar a unidade imaginária por $j = \sqrt{-1}$

4.2.1 Ondas exponenciais para linhas de transmissão regulares

Para uma linha de transmissão regular, pode-se encontrar uma única onda plana exponencial de (4.41) requerendo que (4.35) tenha uma raiz unitária $\eta_1 = 1$ e que $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ seja escolhido tal que $\mathbf{A}_2\mathbf{c} = \mathbf{0}$, \mathbf{A}_2 como em (4.39).

A condição da raiz $\eta_1 = 1$ implica que γ satisfaz

$$\gamma^2 - (\lambda L + R)(\lambda C + G) = 0. \quad (4.59)$$

e que existe \mathbf{c} não zero pois $\det(\mathbf{A}_2) = \frac{P(\eta_2)}{b_0(1-\eta_2)} = 0$, $P(\eta)$ em (4.35). Assim

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t + \gamma z} \mathbf{v} = \mathbf{h}_P(\lambda t + \gamma z) \mathbf{c}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}_1 \mathbf{c} \quad (4.60)$$

onde $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ satisfaz

$$\begin{pmatrix} \gamma\eta_2 & -\lambda L\eta_2 - R \\ -\lambda C\eta_2 - G & \gamma\eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

A abordagem acima foi realizada para η_1 sendo uma raiz simples. No caso de $\eta_1 = 1$ ser uma raiz dupla ($\eta_2 = 1$), utiliza-se (4.44) para obter uma solução exponencial generalizada

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{h}_P(s) \mathbf{c} = \frac{e^s}{b_0} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (4.62)$$

onde $\mathbf{a} = \text{adj}(\mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P) \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} = \text{adj}(\mathbf{A}_P) \mathbf{c}$.

Assim, tem-se ondas exponenciais cuja amplitude tem variação linear

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t + \gamma z} \mathbf{p}(\lambda t + \gamma z), \quad (4.63)$$

onde

$$\mathbf{p}(s) = \frac{1}{b_0} (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{a} - \text{adj}(\mathbf{D}_P) \mathbf{c} \quad (4.64)$$

com \mathbf{c} arbitrário.

4.2.2 Ondas exponenciais para linhas de transmissão singulares

Ondas planas do tipo exponencial $\mathbf{U}(s) = e^s \mathbf{v}$ existem para uma linha de transmissão singular sempre que

$$(\mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.65)$$

tem uma solução não nula \mathbf{v} e quando (4.59) torna-se independente de γ uma vez que $\gamma^2 - \lambda^2 LC = 0$. Isso implica a relação

$$\lambda(LG + RC) = -RG. \quad (4.66)$$

Na sequência, são considerados os casos com e sem perdas.

4.2.2.1 Linhas de transmissão singulares com perdas

Para linhas de transmissão com perdas e singulares, $R^2 + G^2 > 0$, tem-se apenas as ondas planas do tipo exponencial dadas em (4.49) com $-RG/\lambda(LG + RC) = 1$, isto é,

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t + \gamma z} \mathbf{v}, \quad \gamma^2 = \lambda^2 LC \quad (4.67)$$

onde \mathbf{v} é obtido de (4.50) com $\eta = 1$.

4.2.2.2 Linhas de transmissão singulares sem perdas

Para uma linha de transmissão sem perdas, $R = 0$, $G = 0$, tem-se que (4.66) é identicamente satisfeita para qualquer escalar λ . Assim, para $\gamma \neq 0$, tem-se que ondas exponenciais

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t + \gamma z} \mathbf{v}, \quad \gamma^2 = \lambda^2 LC, \quad (4.68)$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\lambda C} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda L}{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

O caso $\gamma = 0$ leva a soluções constantes.

4.2.3 O problema de autovalor

Substituindo

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t + \gamma z} \mathbf{v} = e^s \mathbf{v}, \quad s = \lambda t + \gamma z \quad (4.70)$$

em (4.22) ou (4.26), tem-se que ondas planas do tipo exponencial podem ser obtidas quando

$$\mathcal{L}(\lambda, \gamma) \mathbf{v} = (\lambda \mathbf{A} + \gamma \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{v} = (\mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.71)$$

tem uma solução não nula \mathbf{v} . Isto requer que λ e γ devem ser tais que

$$Q(\lambda, \gamma) = \det(\mathcal{L}(\lambda, \gamma)) = \gamma^2 - (\lambda L + R)(\lambda C + G) = 0. \quad (4.72)$$

Observe que $Q(\lambda, \gamma) = P(1) = \det(1\mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P) = 0$, conseqüentemente, $\eta = 1$ deve ser uma raiz do polinômio característico (4.35).

Para $\gamma^2 = u + jv$, com $\lambda = \zeta + j\omega$, ζ e ω reais, as raízes de (4.72), para manipulações analíticas, são $\pm\gamma$ sendo

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (4.73)$$

com

$$\alpha = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v}{|v|} \left(\sqrt{\frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} \right),$$

onde

$$u = (\zeta^2 - \omega^2)LC + (LG + RC)\zeta + RG, \quad v = 2\omega LC\zeta + \omega(LG + RC) \quad (4.74)$$

são as partes real e imaginária de γ^2 , respectivamente, para $v \neq 0$. Quando $v = 0$, as raízes são $\gamma = \pm\sqrt{u}$ para $u \geq 0$ e $\gamma = \pm j\sqrt{-u}$ para $u < 0$. Assume-se que todas as raízes quadradas de números positivos sejam tomadas com sinal positivo. Por convenção será assumido $\beta \geq 0$.

Resolvendo o sistema (4.71) dado por

$$\begin{pmatrix} \gamma & \lambda L + R \\ \lambda C + G & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Para $\gamma \neq 0$, obtém-se os autovetores

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

com $\xi = -\frac{\gamma}{\lambda C + G}$ ou $\xi = -\frac{\lambda L + R}{\gamma}$ e $\tilde{\zeta} = \frac{1}{\xi}$.

Para $\gamma = 0$ e $\lambda L + R = 0$ e $\lambda C + G = 0$, o sistema acima é identicamente nulo e tem duas soluções linearmente independentes

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

Assim, $\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t} \mathbf{c}$ para qualquer vetor constante arbitrário \mathbf{c} .

Para o caso particular, $R = 0$ com $\lambda = i\omega$ [55], $\omega > 0$, resulta

$$\gamma^2 = -\omega^2 LC + i\omega LG = u + iv, \quad (4.78)$$

utilizando (4.73) segue

$$\gamma = \alpha + i\beta, \quad (4.79)$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\omega^2 LC + \sqrt{\omega^2 L^2 C^2 + \omega^2 L^2 G^2}}, \\ \beta &= \frac{v}{|v|} \sqrt{\frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega^2 LC + \sqrt{\omega^2 L^2 C^2 + \omega^2 L^2 G^2}}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Fazendo a mudança de variável $w = \omega \frac{C}{G}$ e utilizando o fator $\frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$ em (4.80) resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-w^2 + \sqrt{w^4 + w^2}}, \\ \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{w^2 + \sqrt{w^4 + w^2}}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Na Figura 4.7 são apresentadas múltiplos positivos das partes real e imaginária de γ dados em (4.81), observe que $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2}$.

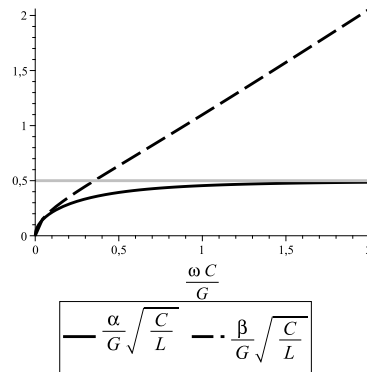


Figura 4.7: Para o caso $R = 0$ com $\gamma = \alpha + j\beta$, são graficadas $\frac{\alpha}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$ e $\frac{\beta}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

4.2.4 Sistema defeituoso

Quando $\gamma = 0$ e $(\lambda L + R)^2 + (\lambda C + G)^2 > 0$ o autosistema é defeituoso, no sentido que existe somente um autovetor linearmente independente para um autovalor duplo $\gamma = 0$. Poderia ser $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ quando $\lambda L + R \neq 0$ ou $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ quando $\lambda C + G \neq 0$. Um autovetor generalizado pode ser obtido buscando-se soluções exponenciais com amplitude variável linear $\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t + \beta z} \mathbf{p}(z)$ onde $\mathbf{p}(z) = z\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Substituindo em (4.71), tem-se

$$(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{D})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (4.82)$$

$$(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{D})\mathbf{w} = -\mathbf{v}, \quad (4.83)$$

Assim, \mathbf{v} é um autovetor e escolhe-se

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\lambda L + R} \end{pmatrix}$$

quando $\lambda L + R \neq 0$ ou

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda C + G} \\ 1 \end{pmatrix}$$

quando $\lambda C + G \neq 0$.

4.3 Ondas em linhas de transmissão com fontes

Quando a linha de transmissão tem termos fonte que são do tipo ondas planas, isto é,

$$\begin{aligned} L \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} v(t, z) + Ri(t, z) &= F_1(\lambda t + \gamma z), \\ C \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} i(t, z) + Gv(t, z) &= F_2(\lambda t + \gamma z) \end{aligned} \quad (4.84)$$

a solução é do mesmo tipo $v(t, z) = V(s)$ e $i(t, z) = I(s)$ onde $s = \lambda t + \gamma z$, e pode ser encontrada ao resolver

$$\lambda LI'(s) + \beta V'(s) + RI(s) = F_1(s), \quad (4.85)$$

$$\lambda CV'(s) + \beta I'(s) - GV(s) = F_2(s), \quad (4.86)$$

ou desacoplado na forma, a equação do telégrafo

$$(LC\lambda^2 - \gamma^2) \frac{d^2}{ds^2} W(s) + \lambda(RC + GL) \frac{d}{ds} W(s) + RGW(s) = f_k(s), \quad (4.87)$$

onde $f_1(s) = (-\gamma F_1(s) + \lambda L F_2(s))' + R F_2(s)$ para $W(s) = V(s)$ e $f_2 = (\lambda C F_1(s) - \gamma F_2(s))' + G F_1(s)$ para $W(s) = I(s)$.

4.3.1 Linhas de transmissão regulares forçadas

Para o sistema de uma linha de transmissão regular

$$\det(\mathbf{A}_P) = \gamma^2 - \lambda^2 LC \neq 0, \quad (4.88)$$

a solução geral do sistema

$$\mathbf{A}_P \mathbf{U}'(s) + \mathbf{D}_P \mathbf{U}(s) = \mathbf{F}(s), \quad (4.89)$$

onde $\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix}$, pode ser escrito como

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{U}_h(s) + \mathbf{U}_p(s),$$

onde $\mathbf{U}_h(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{a}$ sendo $\mathbf{h}_P(s)$ a base matricial de $\mathbf{A}_P\mathbf{U}'(s) + \mathbf{D}_P\mathbf{U}(s) = 0$ dada em (4.32) e $\mathbf{U}_p(s)$ uma solução da equação diferencial não homogênea (4.89). Em particular, podemos escolher a resposta da equação não homogênea com valores iniciais nulos que é dada pela convolução

$$\mathbf{U}_f(s) = \int_0^s \mathbf{h}_P(s - \xi)\mathbf{F}(\xi)d\xi$$

A solução integral acima pode também ser expressada como a superposição de uma resposta livre $\mathbf{U}_{hp}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{c}$ com uma solução particular $\mathbf{U}_p(s)$

$$\int_0^s \mathbf{h}_P(s - \xi)\mathbf{F}(\xi)d\xi = \mathbf{U}_{hp}(s) + \mathbf{U}_p(s).$$

Usando o valor nulo da solução integral em $s = 0$, obtém-se $0 = \mathbf{A}_P^{-1}\mathbf{c} + \mathbf{U}_p(0)$.

Assim,

$$\mathbf{U}_{hp}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{c} = -\mathbf{h}_P(s)\mathbf{A}_P\mathbf{U}_p(0).$$

e a solução integral pode ser escrita como

$$\int_0^s \mathbf{h}_P(s - \xi)\mathbf{F}(\xi)d\xi = -\mathbf{h}_P(s)\mathbf{A}_P\mathbf{U}_p(0) + \mathbf{U}_p(s) \quad (4.90)$$

Assim, na prática, a fórmula geral de variação de parâmetros de (4.89)

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{A}_P\mathbf{U}(0) + \int_0^s \mathbf{h}_P(s - \xi)\mathbf{F}(\xi)d\xi \quad (4.91)$$

pode ser utilizada na forma decomposta

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{A}_P [\mathbf{U}(0) - \mathbf{U}_p(0)] + \mathbf{U}_p(s) \quad (4.92)$$

quando seja possível determinar uma solução particular $\mathbf{U}_p(s)$ de (4.89).

A relação (4.92) é útil para fontes para as quais $\mathbf{U}_p(s)$ podem ser determinadas de outras maneiras. Este é o caso para fontes exponenciais $\mathbf{F}(s) = e^{\gamma s}\mathbf{v}$ para as quais, após a substituição em (4.89), obtém-se

$$\mathbf{U}_p(s) = e^{\gamma s}\mathbf{w} = e^{\gamma s}H(\gamma)\mathbf{v} \quad (4.93)$$

onde

$$H(\gamma) = (\gamma A_P + D_P)^{-1} \quad (4.94)$$

para γ que não é raiz do polinômio característico $P(\eta) = \det(\eta A_P + D_P) = 0$ dado em (4.35).

Observe que as linhas de transmissão regulares funcionam no estado estacionário quando elas são assintoticamente estáveis: $U(s) \approx U_p(s)$ com transientes $U_h(s)$ decaindo quando s fica grande o suficiente.

4.3.1.1 Equação do telégrafo forçada

Para uma equação do telégrafo forçada a solução de (4.87), pode ser escrita como

$$W(s) = W_h(s) + W_p(s),$$

onde $W_h(s) = c_1 d_T(s) + c_2 d'_T(s)$, sendo $d_T, d'_T(s)$ a base matricial de (4.28) e $W_p(s)$ uma solução da equação diferencial não homogênea (4.87). Em particular, como anteriormente, pode-se escolher a resposta da equação não homogênea com valores iniciais nulos que é dada pela convolução

$$W_f(s) = \int_0^s d_T(s - \xi) f_k(\xi) d\xi, \quad (4.95)$$

que pode ser dada como

$$\int_0^s d_T(s - \xi) f_k(\xi) d\xi = W_{hp}(s) + W_p(s) = d_T(s)a_1 + d'_T(s)a_2 + W_p(s),$$

sendo $W_{hp}(s)$ uma resposta livre e $W_p(s)$ uma solução particular. Usando o valor nulo da solução integral em $s = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} d_T(0)a_1 + d'_T(0)a_2 + W_p(0) &= 0, \\ d'_T(0)a_1 + d''_T(0)a_2 + W'_p(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.96)$$

que utilizando as condições iniciais de $d_T(s)$ resulta

$$a_1 = -\tilde{b}_0 W'_p(0) - \tilde{b}_1 W_p(0), \text{ e } a_2 = -\tilde{b}_0 W_p(0), \quad (4.97)$$

sendo $\tilde{b}_0 = -b_0 = LC\lambda^2 - \gamma^2$, $\tilde{b}_1 = -b_1 = (LG + RC)\lambda$ e $\tilde{b}_2 = -b_2 = RG$. Então a solução integral pode ser escrita como

$$\int_0^s d_T(s-\xi) f_k(\xi) d\xi = d_T(s) \left(-\tilde{b}_0 W_p'(0) - \tilde{b}_1 W_p(0) \right) - d_T'(s) \tilde{b}_0 W_p(0) + W_p(s). \quad (4.98)$$

Assim, na prática, a fórmula geral de variação de parâmetros de (4.87)

$$W(s) = \left(d_T'(s) \tilde{b}_0 + d_T(s) \tilde{b}_1 \right) W(0) + d_T \tilde{b}_0 W'(0) + \int_0^s d_T(s-\xi) f_k(\xi) d\xi \quad (4.99)$$

que na forma decomposta é dada por

$$\begin{aligned} W(s) &= d_T'(s) \tilde{b}_0 (W(0) - W_p(0)) + d_T \tilde{b}_1 (W(0) - W_p(0)) \\ &+ d_T \tilde{b}_0 (W'(0) - W_p'(0)) + W_p(s), \end{aligned}$$

quando é possível determinar uma solução particular $W_p(s)$ de (4.87).

4.3.1.2 Equação da onda forçada

A linha de transmissão forçada (4.87) e sem perdas, $R = 0 = G$, com a condição $\gamma^2 - \lambda^2 LC \neq 0$ é descrita pela equação da onda

$$(LC\lambda^2 - \gamma^2) \frac{d^2}{ds^2} W(s) = f_k(s) \quad (4.100)$$

onde $f_1(s) = (-\gamma F_1(s) + \lambda L F_2(s))'$ para $W(s) = V(s)$ e $f_2(s) = (\lambda C F_1(s) - \gamma F_2(s))'$ para $W(s) = I(s)$. Como $R = 0 = G$ segue que $\tilde{b}_1 = 0$ e $\tilde{b}_2 = 0$ assim de (4.99) segue

$$W(s) = d_T'(s) \tilde{b}_0 W(0) + d_T(s) \tilde{b}_0 W'(0) + \int_0^s d_T(s-\xi) \tilde{b}_0^{-1} f_k(\xi) d\xi, \quad (4.101)$$

onde $d_T(s) = \frac{s}{\tilde{b}_0}$, $\tilde{b}_0 = \lambda^2 LC - \gamma^2$ é a solução fundamental de $\tilde{b}_0 W''(s) = 0$.

4.3.2 Linhas de transmissão singulares forçadas

Para uma linha de transmissão singular forçada

$$\det(\mathbf{A}_P) = \gamma^2 - \lambda^2 LC = 0, \quad (4.102)$$

o sistema (4.89) não pode ser colocado na forma normal uma vez que $\det(\mathbf{A}_P) = \gamma^2 - \lambda^2 LC$ se anula para um conjunto contínuo de valores de γ e λ ou é identicamente nulo. O primeiro caso corresponde a linhas com perdas ($D_P \neq 0$) e o segundo sem perdas ($D_P = 0$). Em ambos os casos, a existência de soluções forçadas impõe restrições.

4.3.2.1 Linhas de transmissão com perdas

A equação diferencial matricial singular

$$\mathbf{A}_P \mathbf{U}'(s) + \mathbf{D}_P \mathbf{U}(s) = \mathbf{F}(s),$$

$\det(\mathbf{A}_P) = \gamma^2 - \lambda^2 LC = 0$, pode ser resolvida impondo restrições nos valores iniciais de tensão, corrente e fonte. Isso se segue ao resolver dois sub-sistemas de equações diferenciais que são obtidas transformando o feixe matricial (*matrix pencil*) $\lambda \mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P$ na forma canônica de Wierstrass-Kronecker.

Uma restrição aos valores iniciais e valores da força externa é obtida com o seguinte procedimento. Multiplicando o sistema (4.89) pela matrix $\text{adj}(\mathbf{A}_P)$ obtém-se

$$\text{adj}(\mathbf{A}_P) \mathbf{A}_P \mathbf{U}'(s) + \text{adj}(\mathbf{A}_P) \mathbf{D}_P \mathbf{U}(s) = \text{adj}(\mathbf{A}_P) \mathbf{F}(s), \quad (4.103)$$

sabendo que $\text{adj}(\mathbf{A}_P) \mathbf{A}_P = \det(\mathbf{A}_P) = 0$ decorre

$$\text{adj}(\mathbf{A}_P) \mathbf{D}_P \mathbf{U}(s) = \text{adj}(\mathbf{A}_P) \mathbf{F}(s), \quad (4.104)$$

que resulta

$$\begin{pmatrix} -\lambda LGV(s) + \gamma RI(s) \\ \gamma GV(s) - \lambda CRI(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma F_1(s) - \lambda LF_2(s) \\ -\lambda CF_1(s) + \gamma F_2(s) \end{pmatrix}. \quad (4.105)$$

Da eliminação de Gauss aplicada à (4.105) verifica-se que as suas linhas são múltiplas. Em particular, para $s = 0$, da segunda equação de (4.105) resulta

$$\gamma GV(0) - \lambda RCI(0) = -\lambda CF_1(0) + \gamma F_2(0). \quad (4.106)$$

4.3.2.2 Linhas de transmissão sem perdas

Para uma linha de transmissão singular forçada sem perdas, de (4.104) resulta

$$\mathbf{0} = \text{adj}(\mathbf{A}_P)\mathbf{F}(s),$$

assim para garantir a existência de solução impõe-se a restrição

$$\text{adj}(\mathbf{A}_P)\mathbf{F}(s) = \mathbf{0},$$

que resulta

$$\gamma F_1(s) - \lambda L F_2(s) = 0 \text{ e } -\lambda C F_1(s) + \gamma F_2(s) = 0, \quad (4.107)$$

assim o sistema possui solução arbitrária.

Analogamente, com as hipóteses de um sistema singular e sem perdas realizadas em (4.87), resulta

$$0 \frac{d^2}{ds^2} W(s) = f_k(s) \quad (4.108)$$

que terá solução arbitrária se $F_1(s)$ e $F_2(s)$ satisfazem $f_1(s) = (-\gamma F_1(s) + \lambda L F_2(s))' = 0$ para $W(s) = V(s)$ e $f_2 = (\lambda C F_1(s) - \gamma F_2(s))' = 0$ para $W(s) = I(s)$.

4.4 Ondas modais em linhas de transmissão com dois condutores

Para uma linha de transmissão limitada que é conectada a uma fonte e um carregamento, ou para sinais no estado estacionário senoidal (*steady state sinusoidal*), a procura de ondas nas quais a dependência no tempo é fixada, mas a amplitude varia espacialmente, leva ao estudo das ondas modais. Este tipo de ondas tem sido considerada no z -domínio ou domínio da frequência através do uso de fasores.

As ondas modais são definidas como soluções de (4.22) do tipo

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t} \mathbf{W}(z), \quad \mathbf{W}(z) = \begin{pmatrix} V(z) \\ I(z) \end{pmatrix}. \quad (4.109)$$

Substituindo em (4.22), obtém-se a equação diferencial matricial de primeira ordem

$$\mathbf{W}'(z) + \mathbf{C}(\lambda) \mathbf{W}(z) = \mathbf{0}, \quad (4.110)$$

onde

$$\mathbf{C}(\lambda) = \lambda \mathbf{A} + \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda L + R \\ \lambda C + G & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4.1 Abordagem Matricial

A solução geral de (4.110) pode ser dada em termos da resposta matricial fundamental

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}(z) \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad (4.111)$$

onde $\mathbf{h}(z) = e^{-\mathbf{C}(\lambda)z}$ é a resposta matricial fundamental modal que satisfaz o problema de valor inicial

$$\mathbf{h}'(z) + \mathbf{C} \mathbf{h}(z) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{I}. \quad (4.112)$$

Utilizando a fórmula fechada (A.1) e (A.2), com $m = 1$ e $N = 2$, obtém-se

$$\mathbf{h}(z) = \begin{pmatrix} d'(z) & -(\lambda L + R)d(z) \\ -(\lambda C + G)d(z) & d'(z) \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

onde $d(z)$ é a função escalar geradora de onda modal e satisfaz

$$\begin{aligned} c_0 d'''(z) + c_1 d''(z) + c_2 d(z) &= 0 \\ d(0) &= 0, \quad c_0 d'(0) = 1, \end{aligned} \quad (4.114)$$

com c_k sendo os coeficientes do polinômio característico $P(\gamma) = \det(\gamma \mathbf{I} + \mathbf{C}(\lambda)) = \gamma^2 - (\lambda L + R)(\lambda C + G)$, que são $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ e $c_2 = -(\lambda L + R)(\lambda C + G)$, resultando

$$d(z) = \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2\gamma} = \frac{\sinh(\gamma z)}{\gamma}. \quad (4.115)$$

Se $\lambda L + R = 0$ ou $\lambda C + G = 0$ a raiz $\gamma = 0$ é dupla e $d(z) = z$.

A solução de (4.111) pode ser escrita como

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{a} = \Gamma(\mathbf{a})\mathbf{d}_M(z), \quad (4.116)$$

onde

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -(\lambda L + R)a_{21} & a_{11} \\ -(\lambda C + G)a_{11} & a_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_M = \begin{pmatrix} d(z) \\ d'(z) \end{pmatrix}, \quad (4.117)$$

e

$$\mathbf{d}_M(z) = \begin{pmatrix} d(z) \\ d'(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & -\frac{1}{\gamma} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\gamma z} \\ e^{-\gamma z} \end{pmatrix}. \quad (4.118)$$

Observa-se que (4.118) é a mudança de base que é válida para raízes simples ou duplas $\gamma = 0$. Para o caso das raízes repetidas, fazendo-se limite, resulta

$$\mathbf{d}_M(z) = \begin{pmatrix} d(z) \\ d'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.119)$$

4.4.2 Sistema de segunda ordem desacoplado

O sistema (4.110) pode ser desacoplado utilizando a identidade de Cramer $\text{adj}(\text{Id}/dz + \mathbf{C}(\lambda))(\text{Id}/dz + \mathbf{C}(\lambda))\mathbf{W}(z) = \det((\text{Id}/dz + \mathbf{C}(\lambda)))\mathbf{W}(z) = 0$.

Assim

$$\frac{d^2\mathbf{W}(z)}{dz^2} - \gamma^2(\lambda)\mathbf{W}(z) = \mathbf{0}, \quad (4.120)$$

onde

$$\gamma^2(\lambda) = (\lambda L + R)(\lambda C + G). \quad (4.121)$$

Por definição, escolhe-se a raiz quadrada

$$\gamma = \sqrt{(\lambda L + R)(\lambda C + G)} = \alpha + j\beta \quad (4.122)$$

tal que a parte real α é não negativa, conforme definida em (4.73).

Se $w(z)$ denota qualquer componente de $W(z)$, então

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} - \gamma^2(\lambda)w(z) = 0 \quad (4.123)$$

tem solução geral

$$w(z) = c_1 d(z) + c_2 d'(z) \quad (4.124)$$

onde $d(z)$, $d'(z)$ formam uma base de soluções com $d(z)$ satisfazendo $d''(z) - \gamma^2 d(z) = 0$, $d(0) = 0$, $d'(0) = 1$ dada em (4.115).

Deve-se observar que para linhas de transmissão, a constante de propagação γ é complexa sempre que λ é um número complexo e é um número positivo para linhas de transmissão sem perdas quando $\lambda = j\omega$, $\omega > 0$. Quando $\gamma = -\gamma = 0$, pelo processo de limite

$$d(z) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2\gamma} \right) = z.$$

Quando (4.123) descreve a amplitude da tensão $V(z)$, então a amplitude da corrente $I(z)$ pode ser obtida da primeira equação de (4.110) como

$$(\lambda L + R)I(z) = -\frac{dV(z)}{dz} = -a_1 d'(z) - a_2 d''(z) = -a_1 d'(z) - \gamma^2 a_2 d(z).$$

Assim

$$\begin{pmatrix} V(z) \\ I(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(z) & d'(z) \\ -\frac{1}{(\lambda L + R)} d'(z) & -\frac{1}{(\lambda L + R)} \gamma^2 d(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

As constantes a_1 , a_2 são determinadas dos valores de $V(z)$ e $I(z)$ em qualquer ponto z_s . Tem-se

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(z_s) & d'(z_s) \\ -\frac{1}{(\lambda L + R)} d'(z_s) & -\frac{1}{(\lambda L + R)} \gamma^2 d(z_s) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V(z_s) \\ I(z_s) \end{pmatrix}.$$

Em particular, para $z_s = 0$, segue de seus valores de $d(z)$ que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\lambda L + R)^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V(0) \\ I(0) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} V(z) \\ I(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'(z) & -(\lambda L + R)d(z) \\ -(\lambda C + G)d(z) & d'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(0) \\ I(0) \end{pmatrix}.$$

como em (4.111), (4.113).

4.4.3 Matriz de transição de propagação

Quando a linha de transmissão é considerada como um modelo de duas portas³

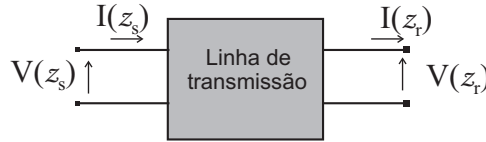


Figura 4.8: Linha de transmissão com duas portas.

que descreve a relação entre um par de terminais [3], [31], a resposta matricial fundamental modal $\mathbf{h}(z)$ dada em (4.113) corresponde à matriz de transição da linha de transmissão.

Dada na forma hiperbólica como

$$\mathbf{h}(z) = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma z) & -(\lambda L + R) \frac{\sinh(\gamma z)}{\gamma} \\ -(\lambda C + G) \frac{\sinh(\gamma z)}{\gamma} & \cosh(\gamma z) \end{pmatrix}. \quad (4.125)$$

Utilizando identidades hiperbólicas, verifica-se que $\mathbf{h}(z+z_o) = \mathbf{h}(z)\mathbf{h}(z_o)$.

Em particular, $\mathbf{h}(z)\mathbf{h}(-z) = \mathbf{I}$ uma vez que $\mathbf{h}(0) = \mathbf{I}$.

A seguir, pode-se ver que $\mathbf{h}(-z)$ aparece como uma matriz de propagação comparando o estado $\mathbf{W}_r = \mathbf{W}(z_r)$, em um ponto de recebimento z_r , com o estado $\mathbf{W}_s = \mathbf{W}(z_s)$, no ponto de envio z_s . Para $\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{c}$, tem-se $\mathbf{W}_s = \mathbf{h}(z_s)\mathbf{c}$ e

³Na literatura, a corrente $I(z_r)$ pode ser considerada no sentido oposto.

$W_r = \mathbf{h}(z_r)\mathbf{c}$. Assim, $W_r = \mathbf{h}(z_r)\mathbf{c} = \mathbf{h}(z_r)\mathbf{h}(-z_s)W_s = \mathbf{h}(z_r - z_s)W_s$. Em particular, quando z_s e z_r estão distantes z

$$W_r = \mathbf{h}(-z)W_s, \quad z = z_s - z_r. \quad (4.126)$$

A matriz

$$\mathbf{h}(-z) = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma z) & (\lambda L + R)\frac{\sinh(\gamma z)}{\gamma} \\ (\lambda C + G)\frac{\sinh(\gamma z)}{\gamma} & \cosh(\gamma z) \end{pmatrix}, \quad (4.127)$$

será referenciada como matriz de propagação entre as portas separadas por uma distância z .

O mesmo resultado como acima é obtido quando usamos a forma desacoplada.

4.4.4 Decomposição espectral

Utilizando a mudança de base (4.118), pode-se escrever qualquer amplitude de onda modal como

$$W(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{a} = B(\gamma)\mathbf{a}e^{\gamma z} + B(-\gamma)\mathbf{a}e^{-\gamma z}, \quad (4.128)$$

onde

$$B(\gamma) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda L + R}{\gamma} \\ -\frac{\lambda C + G}{\gamma} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(\gamma) & \alpha(\gamma)\mathbf{v}(\gamma) \end{pmatrix}, \quad \alpha(\gamma) = -\frac{\gamma}{\lambda C + G}.$$

Observe que a coluna $\mathbf{v}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda C + G}{\gamma} \end{pmatrix}$ é o autovetor (4.76) associado ao autovalor $\gamma \neq 0$ utilizando

$$\frac{\gamma}{\lambda C + G} = \frac{\lambda L + R}{\gamma}. \quad (4.129)$$

Assim,

$$W(z) = \frac{1}{2} [a_{11} + \alpha(\gamma)a_{21}] \mathbf{v}(\gamma)e^{\gamma z} + \frac{1}{2} [a_{11} + \alpha(-\gamma)a_{21}] \mathbf{v}(-\gamma)e^{-\gamma z},$$

e pode ser escrito como

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{a} = \mathbf{h}(z)\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{c}} = c_1^- e^{\gamma z} \mathbf{v}(\gamma) + c_1^+ e^{-\gamma z} \mathbf{v}(-\gamma), \quad (4.130)$$

onde $\tilde{\mathbf{c}} = \Lambda\mathbf{a}$ é um vetor constante arbitrário uma vez que

$$\Lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \alpha(\gamma) \\ 1 & \alpha(-\gamma) \end{pmatrix}$$

é não singular com $\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1^- \\ c_1^+ \end{pmatrix}$.

Conclui-se que ondas modais podem ser decompostas nas direções de propagação $\mathbf{v}(\pm\gamma)$ como

$$\mathbf{U}(t, z) = c_1^- e^{\lambda t + \gamma z} \mathbf{v}(\gamma) + c_1^+ e^{\lambda t - \gamma z} \mathbf{v}(-\gamma). \quad (4.131)$$

O caso $\gamma = 0$ fornece ondas exponenciais generalizadas obtidas tomando o limite $\gamma \rightarrow 0$ em (4.116) usando (4.117). Decorre que $\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t} \mathbf{W}(z)$ com

$$\mathbf{W}(z) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \lambda L + R \\ \lambda C + G & 0 \end{pmatrix} z \right] \mathbf{a} \quad (4.132)$$

para qualquer vetor constante arbitrário \mathbf{a} . Observe que quando $(\lambda L + R)^2 + (\lambda C + G)^2 = 0$, recupera-se o caso $\gamma = 0$ com ambos os fatores sendo zero como em (4.77).

4.4.5 Linhas de transmissão com fonte modal

O uso de fontes exponenciais é importante sob dois aspectos. Estas são simples de lidar e são muito práticas quando as linhas de transmissão estão sujeitas a variações senoidais no tempo. A corrente que flui em um circuito sem fontes internas como resultado da aplicação de uma tensão senoidal variável no tempo é governada em magnitude e fase por circuitos de parâmetros constantes e a velocidade angular ou a frequência da tensão aplicada.

Quando considera-se uma fonte modal do tipo $\mathbf{F}(t, z) = e^{\lambda t} \mathbf{f}(z)$ em (4.3), busca-se soluções modais do mesmo tipo $\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t} \mathbf{W}(z)$. Isso leva a considerar uma versão forçada de (4.110), isto é,

$$\mathbf{W}'(z) + \mathbf{C}(\lambda)\mathbf{W}(z) = \mathbf{f}(z) \quad (4.133)$$

$$\text{com } \mathbf{f}(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}.$$

4.4.5.1 Desacoplamento

Quando escreve-se (4.133) na forma desacoplada, tem-se

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} - \gamma^2(\lambda)w(z) = \mathbf{f}_k(z) \quad (4.134)$$

onde $\mathbf{f}_1 = f_1'(z) - (\lambda L + R)f_2(z)$ para $w(z) = V(z)$ e $\mathbf{f}_2 = f_2'(z) - (\lambda C + G)f_1(z)$ para $w(z) = I(z)$. Seja $w(z)$ denotando qualquer componente de $\mathbf{W}(z)$, então a solução de

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} - \gamma^2(\lambda)w(z) = \mathbf{f}_k \quad (4.135)$$

pode ser decomposta na forma

$$w(z) = w_h(z) + w_p(z) \quad (4.136)$$

onde $w_h(z)$ solução do problema homogêneo e $w_p(z)$ uma solução da equação diferencial não homogênea (4.134). Escolhendo a resposta da equação não homogênea com valores iniciais nulos dada por

$$w(z) = \int_0^z d(z - \xi) \mathbf{f}_k(\xi) d\xi. \quad (4.137)$$

A solução integral pode ser ainda decomposta como

$$\int_0^z d(z - \xi) \mathbf{f}_k(\xi) d\xi = w_{hp}(z) + w_p(z) = d(z)a_1 + d'(z)a_2 + w_p(z),$$

sendo $d(z)$, $d'(z)$ a base matricial de (4.114), sendo $w_{hp}(z)$ uma resposta livre e $w_p(z)$ uma solução particular. Dos valores nulos da solução integral em $z = 0$ decorre

$$\begin{aligned} d(0)a_1 + d'(0)a_2 + w_p(0) &= 0, \\ d'(0)a_1 + d''(0)a_2 + w'_p(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.138)$$

que resulta

$$a_1 = -w'_p(0), \text{ e } a_2 = -w_p(0), \quad (4.139)$$

e então a solução integral pode ser escrita como

$$\int_0^z d(z-\xi)f_k(\xi)d\xi = -d(z)w'_p(0) - d'(z)w_p(0) + w_p(z). \quad (4.140)$$

Assim, na prática, a fórmula geral de variação de parâmetros de (4.135)

$$w(z) = d'(z)w(0) + d(z)w'(0) + \int_0^s d(s-\xi)f_k(\xi)d\xi \quad (4.141)$$

que é dada por

$$w(z) = d'(z)[w(0) - w_p(0)] + d(z)[w'(0) - w'_p(0)] + w_p(z),$$

para o caso em que uma solução particular é conhecida.

4.4.5.2 Formulação matricial

A solução de (4.133) é dada novamente pela decomposição

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{W}_h(z) + \mathbf{W}_p(z), \quad (4.142)$$

sendo $\mathbf{W}_h(z)$ uma solução do problema homogêneo (4.110) e $\mathbf{W}_p(z)$ uma solução de (4.133). Conforme procedimentos anteriores, a escolha da solução não homogênea com condições iniciais nulas é dada por

$$\int_0^z \mathbf{h}(z-\xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi = \mathbf{W}_{hp}(z) + \mathbf{W}_p(z) \quad (4.143)$$

sendo $\mathbf{h}(z)$ dada em (4.113) é a resposta matricial fundamental de (4.110), $\mathbf{W}_{hp} = \mathbf{h}(z)\mathbf{a}_1$. O vetor constante é obtido da condição inicial nula em $z = 0$ da convolução acima, juntamente com as condições iniciais de $\mathbf{h}(z)$, resultando $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{W}_p(0)$. Pela fórmula de variação de parâmetros, tem-se

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{W}(0) + \int_0^z \mathbf{h}(z - \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \quad (4.144)$$

e segue a decomposição

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t}\mathbf{W}(z) = e^{\lambda t} [\mathbf{h}(z) (\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}_p(0)) + \mathbf{W}_p(z)]. \quad (4.145)$$

Em particular, para sinais planos exponenciais $\mathbf{F}(t, z) = e^{\lambda t + \beta z}\mathbf{v}$, pode-se ter o mesmo tipo de resposta com amplitude modificada, que é, $\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t}\mathbf{W}(z)$ com

$$\mathbf{W}_p(z) = e^{\beta z}\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = (\beta\mathbf{I} + \mathbf{C}(\lambda))^{-1}\mathbf{v} \quad (4.146)$$

desde que $\det(\beta\mathbf{I} + \mathbf{C}(\lambda)) = \beta^2 - (\lambda L + R)(\lambda C + G) \neq 0$.

4.5 Linhas de transmissão em estado estacionário senoidal

Quando considera-se as equações de uma linha de transmissão (4.3) com fontes distribuídas modais senoidais $\mathbf{F}(t, z) = e^{j\omega t}\mathbf{F}(z)$ com componentes $v(t, z) = e^{j\omega t}V(z)$ e $i(t, z) = e^{j\omega t}I(z)$, o interesse é em respostas permanentes

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{j\omega t}\mathbf{W}(z), \quad \mathbf{W}(z) = \begin{pmatrix} V(z) \\ I(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(z) = \begin{pmatrix} V_0(z) \\ I_0(z) \end{pmatrix}$$

do mesmo tipo que as fontes. Substituindo em (4.3)

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(j\omega L + R)I(z) + V_0(z), \quad (4.147)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(j\omega C + G)V(z) + I_0(z), \quad (4.148)$$

e escrevendo na forma matricial

$$\mathbf{W}'(z) + \mathbf{C}(j\omega)\mathbf{W}(z) = \mathbf{F}(z). \quad (4.149)$$

Este sistema consititui as equações da linha de transmissão no domínio frequência. De (4.135), obtém-se a equação desacoplada

$$\frac{d^2\mathbf{W}(z)}{dz^2} - \gamma^2(j\omega)\mathbf{W}(z) = \mathbf{f}(z), \quad (4.150)$$

onde $\mathbf{f}(z)$ tem os componentes $f_1 = V_0'(z) - (j\omega L + R)I_0(z)$ e $f_2 = -(j\omega C + G)V_0(z) + I_0'(z)$. Na teoria de estado estacionário senoidal, γ é chamada constante de propagação definida em (4.122)

$$\gamma(j\omega) = \sqrt{\omega^2 LC - j\omega(LG + RC) + RG} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega), \quad (4.151)$$

assumindo as partes real e imaginária não negativas, $\alpha(\omega)$ é a constante de atenuação e $\beta(\omega)$ é a constante de fase.

Considerando a linha de transmissão sem fontes internas, a tensão e a corrente distribuídas em qualquer ponto da linha são governadas pelo sistema

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(j\omega L + R)I(z), \quad (4.152)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(j\omega C + G)V(z), \quad (4.153)$$

ou descritas pela equação de segunda ordem desacoplada (4.135)

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2} - \gamma^2(j\omega)w(z) = 0 \quad (4.154)$$

onde $w(z) = V(z)$ ou $w(z) = I(z)$. Para esta última equação, a base de soluções gerada pela solução escalar fundamental (4.115) no domínio frequência é

$$d(z) = \frac{e^{\alpha z + j\beta z} - e^{-\alpha z - j\beta z}}{2(\alpha + j\beta)} = \frac{\sinh(\gamma(j\omega)z)}{\gamma(j\omega)}. \quad (4.155)$$

Observe que $d(z)$ pode ser considerada como a superposição de uma onda para frente (*forward wave*) na direção de z ($\beta > 0$) com amplitude que cai ($\alpha > 0$) na direção de propagação e uma onda para trás (*backward wave*) na direção oposta.

No caso sem perdas resulta $\alpha = 0$, e tem-se a superposição de duas ondas viajantes

$$e^{j\beta(z+ct)}, \quad e^{-j\beta(z-ct)}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.156)$$

A solução de (4.154) para $w(z) = V(z)$ com respeito a base exponencial é

$$V(z) = a_1 e^{\gamma z} + a_2 e^{-\gamma z}$$

e a amplitude modal para a corrente $I(z)$ pode ser encontrada de (4.153) como $I(z) = -\frac{1}{j\omega L + R} V'(z)$. Assim,

$$I(z) = \frac{-a_1 e^{\gamma z} + a_2 e^{-\gamma z}}{Z_0}$$

onde

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}} \quad (4.157)$$

é a impedância característica da linha e $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ é a admitância característica. Estes parâmetros não dependem de z e podem ser generalizados para qualquer escalar λ como

$$Z_0(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda L + R}{\lambda C + G}}, \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0}.$$

Os métodos de impedância não só simplificam os cálculos, pois a tensão e a corrente através de dispositivos passivos tornam-se relações de natureza algébrica no estado estacionário senoidal. Eles são convenientes em lidar com terminações complicadas ou junções internas.

Na literatura são apresentados alguns casos especiais para a linha de transmissão dependendo dos parâmetros C , G , L e R em [55, 61, 105].

Para linhas nas quais a perda dielétrica é bastante pequena faz-se $G = 0$, este caso pode ainda ser classificado como: sem perdas se $R = 0$ caracterizando o fenômeno de propagação, próximo sem perdas se $\omega L \gg R$, que é, indutância muito maior que resistência e o caso no qual a linha tem altas perdas que ocorrem para $\omega L \ll R$ resultando no fenômeno da difusão, na prática assume-se $L = 0$ fazendo a linha RC .

Relações da impedância característica com a constante de propagação aparecem naturalmente quando busca-se soluções do tipo exponenciais $y(t, z) =$

$e^{j\omega t + \gamma z}$ da equação do telégrafo (4.17) sem termos fonte, $f_k = 0$,

$$-\omega^2 LC + j\omega(RC + GL) - \gamma^2 + RG = 0, \quad (4.158)$$

que resulta na constante de propagação já definida

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(j\omega L + R)(j\omega C + G)}, \quad (4.159)$$

e da definição de impedância característica $Z_0^2 = \frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}$ resultam as relações

$$\gamma Z_0 = j\omega L + R, \quad \gamma = (j\omega C + G)Z_0. \quad (4.160)$$

Estas relações permitem obter a constante de propagação γ se Z_0 é conhecida e vice-versa.

As equações em (4.22) para caso sem perdas, caso $R = G = 0$, são

$$\begin{aligned} L \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} v(t, z) &= 0, \\ C \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} i(t, z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.161)$$

e de (4.17) resulta equações de onda forçadas para tensão e corrente dadas por

$$LC \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z^2} = 0, \quad LC \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial z^2} = 0,$$

neste caso, $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ e $\gamma = j\omega\sqrt{LC}$, a velocidade da onda é $c = \frac{\omega}{\text{Im}(\gamma)} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ que caracteriza velocidade constante, não dependente de ω assim temos uma linha não distorcional.

Se a linha de transmissão é caracterizada pelo fenômeno da difusão, $L = 0 = G$, representa um cabo submarino ideal as equações em (4.22) são

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} v(t, z) + Ri(t, z) &= 0, \\ C \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} i(t, z) &= 0, \end{aligned} \quad (4.162)$$

e de (4.17), com $f_k = 0$, resultam as equações de difusão para tensão e corrente dadas por

$$RC \frac{\partial v(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (4.163)$$

$$RC \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (4.164)$$

neste caso, $Z_0 = \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{R}{\omega C}} (1 - j)$ e $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega RC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\omega RC} (1 + j)$, neste caso a velocidade $c = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega}{RC}}$ depende de ω e assim o sinal sofre distorção.

Uma linha é não distorcional também para o caso $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$, na literatura aparece como Heaviside não distorcional [18], a equação em (4.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} v(t, z) + \frac{R}{L} i(t, z) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial z} i(t, z) + \frac{G}{C} v(t, z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.165)$$

da equação em (4.17) segue

$$LC \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{R}{L} \right)^2 v - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (4.166)$$

$$LC \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{R}{L} \right)^2 i - \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = 0, \quad (4.167)$$

com $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ e $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}$, assim $c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ o que caracteriza a não distorção.

O caso do condutor ohmico $R = 0$ tem equações

$$\begin{aligned} L \frac{\partial}{\partial t} i(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} v(t, z) &= 0, \\ C \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} i(t, z) + Gv(t, z) &= 0, \end{aligned} \quad (4.168)$$

de (4.17) para $f_k = 0$ resulta

$$LC \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial t^2} + GL \frac{\partial v(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (4.169)$$

a impedância característica é $Z_0 = \sqrt{\frac{\omega^2 LC + j\omega LG}{\omega^2 C^2 + G^2}}$ e $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2 LC + j\omega LG}$.

A razão entre a tensão modal $V(z)$ e a corrente $I(z)$ dada por

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{h}(z) \mathbf{a}}{\mathbf{e}_2^T \mathbf{h}(z) \mathbf{a}} \quad (4.170)$$

é definida como a impedância local $Z(z)$ da linha de transmissão no ponto z , sendo

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.6 Ondas modais viajantes para frente e para trás

Ondas exponenciais e modais são de particular interesse em linhas de transmissão limitadas, que são geralmente conectadas a uma fonte e a um carregamento que fornecem condições de contorno nas extremidades da linha. Ondas através de uma linha de transmissão infinita podem ser usadas para detectar falhas ou estudar transições devido à mudança de materiais na linha. Em tais processos, é conveniente observar a parte da onda que é refletida e transmitida. Matematicamente, isto significa caracterizar as partes da onda que se propagam para frente (*forward*) e para trás (*backward*).

A função escalar $d(z)$ em (4.115) pode ser dividida como

$$d(z) = d_+(z) + d_-(z), \quad (4.171)$$

onde

$$d_+(z) = -\frac{1}{2\gamma}e^{-\gamma z}, \quad d_-(z) = \frac{1}{2\gamma}e^{\gamma z}. \quad (4.172)$$

Assume-se que $\gamma \neq 0$, entretanto esse não é o caso para linhas de transmissão com multicondutores, onde as raízes repetidas não nulas podem ocorrer. Assim, para $\gamma \neq 0$, utilizando (4.171), (4.172) em (4.113), qualquer onda modal $\mathbf{W}(z)$ pode ser decomposta como

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{W}^+(z) + \mathbf{W}^-(z) = \mathbf{h}^+(z)\mathbf{a} + \mathbf{h}^-(z)\mathbf{a} \quad (4.173)$$

onde

$$\mathbf{h}^+(z) = A(\gamma)d_+(z), \quad \mathbf{h}^-(z) = A(-\gamma)d_-(z) \quad (4.174)$$

com

$$A(\gamma) = \begin{pmatrix} -\gamma & -(\lambda L + R) \\ -(\lambda C + G) & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (4.175)$$

A matriz $\mathbf{h}^+(z)$ é referida como matriz de onda modal para frente e $\mathbf{h}^-(z)$ como matriz de onda modal para trás.

Ainda da decomposição de $d(z)$, tem-se

$$\mathbf{W}(z) = \Gamma \mathbf{d}_M(z) = \Gamma(\mathbf{a}) \mathbf{d}_M^+(z) + \Gamma(\mathbf{a}) \mathbf{d}_M^-(z) \quad (4.176)$$

onde

$$\mathbf{d}_M^+(z) = \begin{pmatrix} d_+(z) \\ (d_+(z))' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_M^-(z) = \begin{pmatrix} d_-(z) \\ (d_-(z))' \end{pmatrix}. \quad (4.177)$$

Aqui $\mathbf{d}_M^+(z)$ será referida como a parte da onda para frente e $\mathbf{d}_M^-(z)$ como a parte da onda para trás de $\mathbf{d}_M(z)$.

As matrizes $\mathbf{h}^+(z)$ e $\mathbf{h}^-(z)$ em (4.174) podem ser dadas em termos da impedância característica Z_0 e admitância Y_0 como

$$\mathbf{h}^+(z) = \begin{pmatrix} 1 & Z_0 \\ Y_0 & 1 \end{pmatrix} d'_+(z), \quad \mathbf{h}^-(z) = \begin{pmatrix} 1 & -Z_0 \\ -Y_0 & 1 \end{pmatrix} d'_-(z), \quad (4.178)$$

observe que $\det(\mathbf{h}^+(z)) = 0 = \det(\mathbf{h}^-(z))$. As seguintes relações são obtidas de (4.174)

$$\mathbf{h}^+(z) + \mathbf{h}^-(-z) = \mathbf{I} e^{-\gamma z}, \quad (4.179)$$

$$\mathbf{h}^+(z) \mathbf{h}^-(z) = \mathbf{0} \quad (4.180)$$

A última propriedade reflete a singularidade das matrizes. Desde que $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}^+(0) + \mathbf{h}^-(0) = \mathbf{I}$.

Em algumas situações pode ser necessário expressar tensão e corrente separadamente, isto pode ser feito como

$$V^+(z) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{h}^+(z) \mathbf{a}, \quad I^+(z) = \mathbf{e}_2^T \mathbf{h}^+(z) \mathbf{a}, \quad (4.181)$$

$$V^-(z) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{h}^-(z) \mathbf{a}, \quad I^-(z) = \mathbf{e}_2^T \mathbf{h}^-(z) \mathbf{a},$$

onde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A decomposição em (4.130) pode ser relacionada a $W^+(z)$ e $W^-(z)$ como

$$\begin{aligned} W^+(z) &= \begin{pmatrix} V^+(z) \\ I^+(z) \end{pmatrix} = \mathbf{h}^+(z)\mathbf{a} = c_1^+ \mathbf{v}(-\gamma)e^{-\gamma z}, \\ W^-(z) &= \begin{pmatrix} V^-(z) \\ I^-(z) \end{pmatrix} = \mathbf{h}^-(z)\mathbf{a} = c_1^- \mathbf{v}(\gamma)e^{\gamma z}, \end{aligned} \quad (4.182)$$

com

$$\mathbf{v}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda C + G}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Para $\gamma = \alpha + j\beta$ e $\lambda = \zeta + i\omega$, define-se $\frac{2\pi}{\beta}$ o comprimento de onda e $\frac{\omega}{\beta}$ a velocidade de fase. Conforme já assumido $\beta > 0$, assim,

$$\mathbf{U}^+(t, z) = e^{\lambda t} W^+(z) = c_1^+ e^{\zeta t - \alpha z} (\cos(\omega t - \beta z) + j \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)) \mathbf{v}(-\gamma) \quad (4.183)$$

é a parte da onda para frente viajando na direção de crescimento de z e

$$\mathbf{U}^-(t, z) = e^{\lambda t} W^-(z) = c_1^- e^{\zeta t + \alpha z} (\cos(\omega t + \beta z) + j \operatorname{sen}(\omega t + \beta z)) \mathbf{v}(\gamma) \quad (4.184)$$

é a parte da onda para trás que viaja na direção decrescente de z . Estas ondas tem atenuação espacial ou ampliações de acordo com o valor de α . Se $\alpha > 0$ então a solução em (4.183) está indo para a direita e a solução em (4.184) está indo para a esquerda. Para o caso $\alpha = 0$ a solução (4.183) é uma onda viajante na direção positiva de z , enquanto a solução em (4.184) é uma onda viajante na direção negativa de z .

Para os casos especiais discutidos previamente é possível determinar o comportamento de $\mathbf{h}^\pm(z)$. Para o caso sem perdas tem-se

$$\mathbf{h}^\pm(z) = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{\frac{L}{C}} \\ \pm\sqrt{\frac{C}{L}} & 1 \end{pmatrix} \frac{e^{\mp j\omega\sqrt{LC}z}}{2},$$

assim $\mathbf{h}^\pm(z)$ são funções trigonométricas caracterizando a propagação de onda. O caso difusivo resulta

$$\mathbf{h}^\pm(z) = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{\frac{R}{j\omega C}} \\ \pm\sqrt{\frac{j\omega C}{R}} & 1 \end{pmatrix} \frac{e^{\mp(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega RC} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega RC})z}}{2},$$

e para o caso de Heaviside não distorcional, $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$, tem-se

$$\mathbf{h}^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{\frac{L}{C}} \\ \pm\sqrt{\frac{C}{L}} & 1 \end{pmatrix} \frac{e^{\mp(\sqrt{RG}+j\omega\sqrt{LC}z)}}{2},$$

assim $\mathbf{h}^{\pm}(z)$ se propaga com atenuação.

Usando (4.178) em $\mathbf{W}^+(z) = \mathbf{h}^+(z)\mathbf{a}$ e $\mathbf{W}^-(z) = \mathbf{h}^-(z)\mathbf{a}$ é possível determinar a razão entre a tensão e a corrente de uma onda viajante na mesma direção como

$$\begin{aligned} \frac{V^+(z)}{I^+(z)} &= \frac{a_{11}+Z_0a_{21}}{a_{11}Y_0+a_{21}} = Z_0, \\ \frac{V^-(z)}{I^-(z)} &= \frac{a_{11}-Z_0a_{21}}{-a_{11}Y_0+a_{21}} = -Z_0, \end{aligned} \tag{4.185}$$

assim a impedância característica Z_0 aparece como uma constante de proporcionalidade que não depende de z . Em outras palavras, a impedância característica é a razão entre as ondas para frente de tensão e corrente. A impedância local definida em (4.170) utilizando (4.185) é dada em termos da impedância característica como

$$Z(z) = Z_0 \left(\frac{V^+(z) + V^-(z)}{V^+(z) - V^-(z)} \right).$$

4.7 Descontinuidades em linhas de transmissão

Por trabalhar em domínio modal, métodos de impedância não somente simplificam os cálculos pois tensão e corrente através de dispositivos passivos tornam-se relações de natureza algébrica no estado estacionário senoidal. Eles são convenientes em lidar com junções internas complicadas ou terminações. Primeiro, obtém-se as matrizes relacionadas as ondas refletidas e transmitidas devidas a uma onda incidente na junção de duas linhas de transmissão de impedância características diferentes. Segundo, uma onda refletida em um carregamento passivo ou ativo na extremidade de uma linha de transmissão será determinada em termos da onda incidente.

4.7.1 Junção

Considerando uma junção em $z = z_0$ de duas linhas de transmissão com diferentes impedâncias características [65], [2], representada na Figura 4.9. A linha 1 tem impedância característica $Z_{01} = \sqrt{\frac{\lambda L_1 + R_1}{\lambda C_1 + G_1}}$, enquanto a linha 2 tem impedância característica $Z_{02} = \sqrt{\frac{\lambda L_2 + R_2}{\lambda C_2 + G_2}}$. Aqui $L_i, R_i, C_i, G_i, i = 1, 2$, denotam a indutância, resistência, capacitância e condutância em cada linha, respectivamente.

No que segue, assume-se que uma onda viajante chegando em uma junção gera uma onda refletida e uma onda transmitida como ilustrado na Figura 4.9.

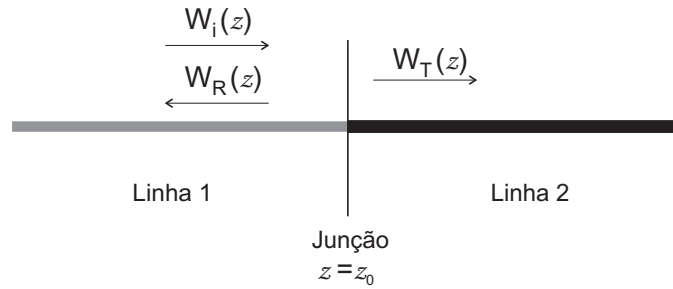


Figura 4.9: Junção de linhas de transmissão com diferentes impedâncias características.

Usando a decomposição da onda (4.173), tem-se que a onda incidente e refletida na linha 1 são $W_i(z) = W_1^+(z) = \mathbf{h}_1^+(z)\mathbf{a}$ e $W_R(z) = W^-(z) = \mathbf{h}_1^-(z)\mathbf{a}$, respectivamente. A onda transmitida na linha 2 é dada por $W_T(z) = \mathbf{h}_2^+(z)\mathbf{b}$. Aqui $\mathbf{h}_1(z)$ e $\mathbf{h}_2(z)$ são as respostas matriciais fundamentais modais na linha 1 e linha 2, respectivamente, como dada em (4.113).

De (4.178) tem-se

$$\mathbf{h}_1^\pm(z) = \frac{1}{2}e^{\mp\gamma_1 z} \begin{pmatrix} 1 & \pm Z_{01} \\ \pm Y_{01} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_2^+(z) = \frac{1}{2}e^{-\gamma_2 z} \begin{pmatrix} 1 & Z_{02} \\ Y_{02} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.186)$$

onde $\gamma_i = \sqrt{(\lambda L_i + R_i)(\lambda C_i + G_i)}$, $i = 1, 2$.

As ondas refletidas e transmitidas são consideradas proporcionais à onda incidente por um fator matricial, isto é,

$$\mathbf{W}_T(z_0) = \mathbf{h}_2^+(z_0)\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{W}_i(z_0), \quad (4.187)$$

$$\mathbf{W}_R(z_0) = \mathbf{h}_1^-(z_0)\mathbf{a} = \mathbf{R}\mathbf{W}_i(z_0), \quad (4.188)$$

onde \mathbf{T} e \mathbf{R} são as matrizes transmissão e reflexão a serem determinadas. A condição de compatibilidade para tensão e corrente no ponto de junção $z = z_0$, são [75]

$$\mathbf{W}_i(z_0) + \mathbf{W}_R(z_0) = \mathbf{W}_T(z_0) \quad (4.189)$$

e as impedâncias características (4.185) em cada linha são

$$V_R(z_0) + Z_{01}I_R(z_0) = 0, \quad V_T(z_0) - Z_{02}I_T(z_0) = 0. \quad (4.190)$$

De (4.181), as condições (4.189) e (4.190) podem ser dadas na forma

$$\mathbf{h}_2^+(z_0)\mathbf{b} - \mathbf{h}_1^-(z_0)\mathbf{a} = \mathbf{h}_1^+(z_0)\mathbf{a}, \quad (4.191)$$

$$\Theta\mathbf{h}_1^-(z_0)\mathbf{a} = 0, \quad \Lambda\mathbf{h}_2^+(z_0)\mathbf{b} = 0 \quad (4.192)$$

onde Θ e Λ são vetores 2×1 dados por

$$\Theta = (\mathbf{e}_1^T + Z_{01}\mathbf{e}_2^T) = (1 \quad Z_{01}),$$

$$\Lambda = (\mathbf{e}_1^T - Z_{02}\mathbf{e}_2^T) = (1 \quad -Z_{02}).$$

As condições (4.191) e (4.192) para determinar as ondas incidentes e transmitidas são

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\Theta \\ \Lambda & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_2^+(z_0)\mathbf{b} \\ \mathbf{h}_1^-(z_0)\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^+(z_0)\mathbf{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.193)$$

Resolvendo (4.193), as ondas incidentes e transmitidas são

$$\mathbf{W}_T(z_0) = \mathbf{h}_2^+(z_0)\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{h}_1^+(z_0)\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{W}_i(z_0), \quad (4.194)$$

$$\mathbf{W}_R(z_0) = \mathbf{h}_1^-(z_0)\mathbf{a} = \mathbf{R}\mathbf{h}_1^+(z_0)\mathbf{a} = \mathbf{R}\mathbf{W}_i(z_0),$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{1}{Z_{02}+Z_{01}} \begin{pmatrix} Z_{02} & Z_{02}Z_{01} \\ 1 & Z_{01} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R} &= \frac{1}{Z_{02}+Z_{01}} \begin{pmatrix} -Z_{01} & Z_{02}Z_{01} \\ 1 & -Z_{02} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.195}$$

são respectivamente as matrizes transmissão e reflexão.

Em (4.194) a tensão e corrente transmitidas são combinações lineares de tensão e corrente incidentes, mas é possível reescrever tensão transmitida como múltipla somente da tensão incidente e corrente transmitida como múltipla somente a corrente incidente usando as relações

$$\mathbf{h}^+(z)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ Y_0 \end{pmatrix} V^+(z), \quad \mathbf{h}^+(z)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} Z_0 \\ 1 \end{pmatrix} I^+(z).\tag{4.196}$$

De (4.194) e utilizando $\mathbf{h}^+(z_0)\mathbf{a}$ dada em (4.178) e (4.196) para impedância característica da linha 1 resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_2^+(z_0)\mathbf{b} &= \frac{1}{Z_{01} + Z_{02}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{02} & Z_{02}Z_{01} \end{pmatrix} \mathbf{h}_1^+(z_0)\mathbf{a} \\ \begin{pmatrix} 1 & Z_{01} \end{pmatrix} \mathbf{h}_1^+(z_0)\mathbf{a} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Z_{01} + Z_{02}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{02} & Z_{02}Z_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{01} \end{pmatrix} V^+(z_0) \\ \begin{pmatrix} 1 & Z_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{01} \\ 1 \end{pmatrix} I^+(z_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Z_{01} + Z_{02}} \begin{pmatrix} 2Z_{02} & 0 \\ 0 & 2Z_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^+(z_0) \\ I^+(z_0) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

assim

$$\mathbf{h}_2^+(z_0)\mathbf{b} = \mathbf{T}_J \mathbf{h}_1^+(z_0)\mathbf{a},\tag{4.197}$$

sendo

$$\mathbf{T}_J = \begin{pmatrix} T_V & 0 \\ 0 & T_I \end{pmatrix},\tag{4.198}$$

onde T_V , T_I os coeficiente transmissão para tensão e corrente

$$T_V = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}, \quad T_I = \frac{2Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}.$$

Procedimentos análogos permitem obter relações similares para onda refletida

$$\mathbf{h}_1^-(z_0)\mathbf{a} = \mathbf{R}_J\mathbf{h}_1^+(z_0)\mathbf{a}, \quad (4.199)$$

sendo

$$\mathbf{R}_J = \begin{pmatrix} R_V & 0 \\ 0 & R_I \end{pmatrix}, \quad (4.200)$$

onde R_V , R_I são os coeficientes de reflexão para tensão e corrente da forma

$$R_V = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}, \quad R_I = -R_V.$$

É signficante notar que $\mathbf{T}_J - \mathbf{R}_J = \mathbf{I}$ de acordo com (4.189).

4.7.2 Linha de transmissão com condições de contorno

Uma linha de transmissão que conecta um gerador a um carregamento como na Figura 4.10 pode estar sujeito a condições de fronteira algébricas ou condições de fronteira diferenciais quando a rede de carga contém elementos reativos [53, 88, 95]. Na Figura 4.10, Z_F e Z_L correspondem às impedâncias da fonte e carregamento, definidas por $Z_F = \frac{1}{\lambda C_F} + R_F + \lambda L_F$ e $Z_L = \frac{1}{\lambda C_L} + R_L + \lambda L_L$, sendo resistências, indutâncias, capacitâncias e condutâncias ilustradas na Figura 4.5.

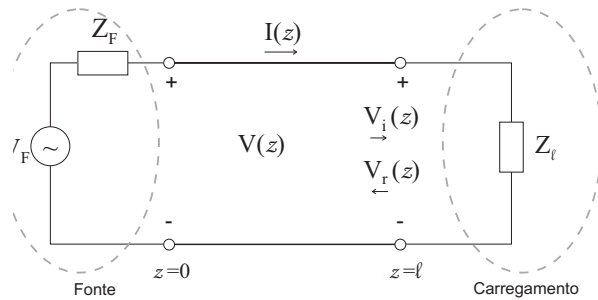


Figura 4.10: Linha de transmissão com fonte e carregamento.

As condições de contorno com elementos reativos em ambas as extremidades foi matricialmente dada em (4.9)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{11}U(t, 0) + \mathbf{B}_{11}U_t(t, 0) + \mathbf{D}_{11}U_{tt}(t, 0) &= F_{11}(t), \\ \mathbf{A}_{21}U(t, l) + \mathbf{B}_{21}U_t(t, l) + \mathbf{D}_{21}U_{tt}(t, l) &= F_{21}(t).\end{aligned}\tag{4.201}$$

Para um gerador modal constante $V_F(t) = e^{\lambda t}V_F$, busca-se uma solução da forma $\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t}\mathbf{W}(z)$ onde $\mathbf{W}(z)$ tendo que satisfazer

$$\mathbf{W}'(z) + \mathbf{C}\mathbf{W}(z) = 0$$

sujeita as condições de contorno

$$\mathbf{G}_{11}\mathbf{W}(0) = V_F, \quad \mathbf{G}_{21}\mathbf{W}(l) = 0,\tag{4.202}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{11} &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} + \lambda\mathbf{D}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & Z_F \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}_{21} &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} + \lambda\mathbf{D}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & Z_L \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.203}$$

A solução modal $\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{a}$ deve ser determinada satisfazendo as condições de contorno (4.202). Por substituição, resulta o sistema

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{b},\tag{4.204}$$

com

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11}\mathbf{h}(0) \\ \mathbf{G}_{21}\mathbf{h}(l) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} V_F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com o valor definido $\mathbf{h}(0) = \mathbf{I}$ e Z_0 dado em (4.185), obtém-se

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} [(Z_0 + Z_L)e^{\gamma l} - (Z_0 - Z_L)e^{-\gamma l}] V_F Z_0 \\ [(Z_0 + Z_L)e^{\gamma l} + (Z_0 - Z_L)e^{-\gamma l}] V_F \end{pmatrix}\tag{4.205}$$

com $\Delta = (Z_0 + Z_F)(Z_0 + Z_L)e^{\gamma l} + (Z_0 - Z_F)(Z_L - Z_0)e^{-\gamma l}$.

Em particular, quando $Z_L = Z_0$ segue que

$$\mathbf{W}(0) = \mathbf{h}(0)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{Z_0 V_F}{Z_0 + Z_F} \\ \frac{V_F}{Z_0 + Z_F} \end{pmatrix} \quad (4.206)$$

e

$$\mathbf{W}(l) = \mathbf{h}(l)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{Z_0 V_F}{Z_0 + Z_F} e^{-\gamma l} \\ \frac{V_F}{Z_0 + Z_F} e^{-\gamma l} \end{pmatrix}. \quad (4.207)$$

4.7.2.1 Reflexão na extremidade do carregamento

Na seção anterior, a solução modal $\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{a}$ foi determinada para uma linha de transmissão sujeita a uma fonte modal geradora e um carregamento nas extremidades.

Retomando o fato de que a onda modal pode ser decomposta (4.173) como $\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}^+(z)\mathbf{a} + \mathbf{h}^-(z)\mathbf{a}$ onde $\mathbf{W}_i(z) = \mathbf{h}^+(z)\mathbf{a}$ e $\mathbf{W}_R(z) = \mathbf{h}^-(z)\mathbf{a}$ caracterizam uma onda incidente e uma onda refletida, respectivamente. O interesse aqui é determinar o quanto da onda incidente é refletida no carregamento localizado na extremidade $z = l$. Em termos matemáticos, deseja-se determinar $\mathbf{h}^-(z)\mathbf{a} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{h}^+(z)\mathbf{a}$ onde o fator matricial corresponde a matriz de reflexão $\mathbf{\Gamma}$.

A matriz de reflexão pode ser determinada pelo uso da condição de contorno na extremidade do carregamento

$$V(l) - Z_L I(l) = 0, \quad (4.208)$$

e da impedância característica (4.185) em $z = l$

$$V^-(l) + Z_0 I^-(l) = 0. \quad (4.209)$$

Utilizando (4.173) e (4.181), as equações (4.209) e (4.208) podem ser escritas como

$$(\mathbf{e}_1^T + Z_0 \mathbf{e}_2^T)\mathbf{h}^-(l)\mathbf{a} = 0,$$

$$(\mathbf{e}_1^T - Z_L \mathbf{e}_2^T)\mathbf{h}^-(l)\mathbf{a} = -(\mathbf{e}_1^T - Z_L \mathbf{e}_2^T)\mathbf{h}^+(l)\mathbf{a},$$

assim $\mathbf{h}^-(l)\mathbf{a}$ é obtida resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & Z_0 \\ 1 & -Z_L \end{pmatrix} \mathbf{h}^-(l)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\mathbf{e}_1^T - Z_L \mathbf{e}_2^T)\mathbf{h}^+\mathbf{a}, \end{pmatrix} \quad (4.210)$$

que resulta

$$\mathbf{h}^-(l)\mathbf{a} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{h}^+(l)\mathbf{a} \quad (4.211)$$

onde

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{Z_0 + Z_L} \begin{pmatrix} -Z_0 & Z_0 Z_L \\ 1 & -Z_L \end{pmatrix} \quad (4.212)$$

é a matriz de reflexão.

Observe que em (4.211) a tensão e corrente refletidas são combinações lineares da tensão e corrente incidentes. Entretanto as relações dadas em (4.185) permitem expressar a tensão refletida como um múltiplo apenas da tensão incidente e a corrente refletida como um múltiplo da corrente incidente. Utilizando $\mathbf{h}^+(l)\mathbf{a}$ dado em (4.178) e (4.196), tem-se que (4.211) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^-(l)\mathbf{a} &= \frac{1}{Z_0 + Z_L} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -Z_0 & Z_0 Z_L \end{pmatrix} \mathbf{h}^+(l)\mathbf{a} \\ \begin{pmatrix} 1 & -Z_L \end{pmatrix} \mathbf{h}^+(l)\mathbf{a} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Z_0 + Z_L} \begin{pmatrix} -Z_0 + Z_L & 0 \\ 0 & Z_0 - Z_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^+(l) \\ I^+(l) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim

$$\mathbf{h}^-(l)\mathbf{a} = \mathbf{\Gamma}_L \mathbf{h}^+(l)\mathbf{a}, \quad (4.213)$$

onde

$$\mathbf{\Gamma}_L = \begin{pmatrix} \Gamma_L & 0 \\ 0 & -\Gamma_L \end{pmatrix}, \quad (4.214)$$

com $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ sendo o coeficiente de reflexão. É também possível escrever Z_L em termos de Γ_L como $Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$.

Quando $Z_0 = Z_L$ tem-se $\Gamma_L = \mathbf{0}$ e não existe onda refletida. Assim a energia incidente é absorvida pelo carregamento [95]. Para um circuito aberto, a impedância do carregamento é $Z_L = \infty$ e tem-se $\Gamma_L = 1$. No caso de um curto-circuito $Z_L = 0$, tem-se $\Gamma_L = -1$.

5 MODELO DISTRIBUÍDO PARA LINHAS DE TRANSMISSÃO COM MULTICONDUTORES

A metodologia desenvolvida para obter soluções do tipo ondas planas e modais em linhas de transmissão com dois condutores pode ser aplicada para linhas de transmissão com multicondutores, mais especificamente com $n + 1$ condutores sendo o condutor 0 o condutor de referência.

As equações para a linha de transmissão com multicondutores (LTM) [3, 95] são

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\frac{\partial \mathbf{I}(t,z)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}(t,z)}{\partial z} + \mathcal{R}\mathbf{I}(t,z) &= \mathbf{V}_o(t,z), \\ \mathcal{C}\frac{\partial \mathbf{V}(t,z)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{I}(t,z)}{\partial z} + \mathcal{G}\mathbf{V}(t,z) &= \mathbf{I}_o(t,z),\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde

$$\mathbf{V}(t,z) = \begin{pmatrix} v_1(t,z) \\ v_2(z,t) \\ \vdots \\ v_n(t,z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}(t,z) = \begin{pmatrix} i_1(t,z) \\ i_2(t,z) \\ \vdots \\ i_n(t,z) \end{pmatrix}\tag{5.2}$$

denotam as tensões e correntes em cada uma das n linhas e $\mathcal{L} = [L_{ij}]$, $\mathcal{R} = [R_{ij}]$, $\mathcal{G} = [G_{ij}]$ e $\mathcal{C} = [C_{ij}]$ são matrizes $n \times n$ que representam indutância, resistência, condutância e capacitância por unidade de comprimento, respectivamente. Aqui $\mathbf{V}_o(t,z)$, $\mathbf{I}_o(t,z)$ são vetores $n \times 1$ que incorporam o campo de excitações externas como fontes de voltagem e correntes externas, respectivamente.

A derivação das equações da LTM é dada em [95] para o circuito apresentado na Figura 5.1

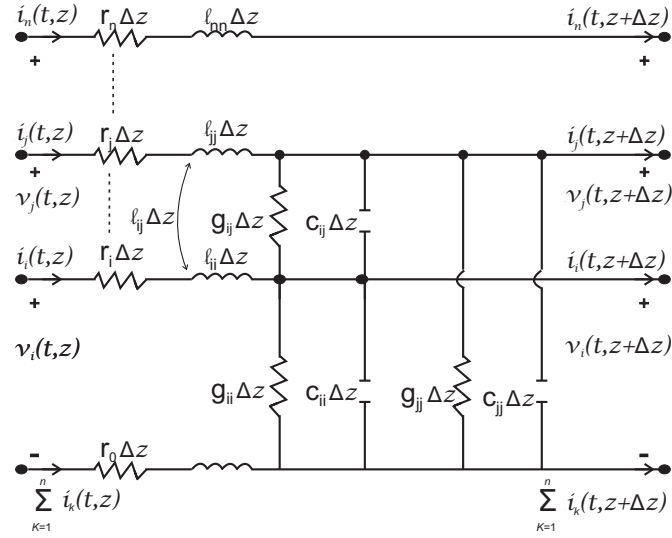


Figura 5.1: Linha de transmissão de multicondutores. Figura adaptada de [95].

que dá origem as matrizes

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n c_{1k} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{12} & \sum_{k=1}^n c_{2k} & \cdots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{1n} & -c_{2n} & \cdots & \sum_{k=1}^n c_{nk} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n g_{1k} & -g_{12} & \cdots & -g_{1n} \\ -g_{12} & \sum_{k=1}^n g_{2k} & \cdots & -g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_{1n} & -g_{2n} & \cdots & \sum_{k=1}^n g_{nk} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix},$$

(5.3)

e

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} r_1 + r_0 & r_0 & \cdots & r_0 \\ r_0 & r_2 + r_0 & \cdots & r_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_0 & r_0 & \cdots & r_n + r_0 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathcal{R} = \begin{pmatrix} r_1 + r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{12} & r_2 + r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & r_n + r_{nn} \end{pmatrix}.$$

(5.4)

A primeira matriz \mathcal{R} em (5.4) é restrita ao caso em que o condutor de referencia é de tamanho finito, como por exemplo fios. As componentes r_{ij} , na segunda matriz \mathcal{R} em (5.4), se referem à resistência do plano terra, e não são necessariamente iguais, [95]. Em [92, 95] as matrizes \mathcal{C} , \mathcal{L} , \mathcal{R} e \mathcal{G} são simétricas, e \mathcal{C} , \mathcal{L} , e \mathcal{G} são ainda positivas definidas.

O sistema de equações dado em (5.1) pode ser escrito matricialmente como

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t, z)}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}(t, z)}{\partial z} + \mathbf{D} \mathbf{U}(t, z) = \mathbf{F}(t, z), \quad (5.5)$$

onde os coeficientes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} são matrizes de ordem $2n \times 2n$ e $\mathbf{U}(t, z)$, $\mathbf{F}(t, z)$ são vetores de ordem $2n \times 1$. Mais precisamente, eles são matrizes blocos 2×2 com componentes $n \times n$ e vetores blocos 2×1 com componentes $n \times 1$, dados por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{L} \\ \mathcal{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{R} \\ \mathcal{G} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{U}(t, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(t, z) \\ \mathbf{I}(t, z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_o(t, z) \\ \mathbf{I}_o(t, z) \end{pmatrix}.$$

Aqui \mathbf{I} , $\mathbf{0}$ são as matrizes identidade e nulas de ordem $n \times n$, respectivamente.

O sistema (5.5) pode ser desacoplado por blocos em duas equações diferenciais matriciais de segunda ordem que têm a forma da equação do telégrafo. Essas equações são obtidas escrevendo as equações da linha de transmissão de multicondutores na forma algébrica

$$\mathbf{L} \mathbf{U}(t, z) = \mathbf{F}(t, z), \quad (5.7)$$

com

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial z} & \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{R} \\ \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{G} & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando ambos os lados de (5.7) pela matriz bloco adjugada

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial z} & -(\mathcal{L} \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{R}) \\ -(\mathcal{C} \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{G}) & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

obtem-se as equações diferenciais de segunda ordem desacopladas

$$\mathcal{L}\mathcal{C}\frac{\partial^2\mathbf{V}(t,z)}{\partial t^2} + (\mathcal{R}\mathcal{C} + \mathcal{L}\mathcal{G})\frac{\partial\mathbf{V}(t,z)}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathbf{V}(t,z)}{\partial z^2} + \mathcal{R}\mathcal{G}\mathbf{V}(t,z) = f_1, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{L}\frac{\partial^2\mathbf{I}(t,z)}{\partial t^2} + (\mathcal{C}\mathcal{R} + \mathcal{G}\mathcal{L})\frac{\partial\mathbf{I}(t,z)}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathbf{I}(t,z)}{\partial z^2} + \mathcal{G}\mathcal{R}\mathbf{I}(t,z) = f_2, \quad (5.9)$$

onde

$$f_1 = -\frac{\partial\mathbf{V}_o(t,z)}{\partial z} + \mathcal{L}\frac{\partial\mathbf{I}_o(t,z)}{\partial t} + \mathcal{R}\mathbf{I}_o(t,z),$$

$$f_2 = \mathcal{C}\frac{\partial\mathbf{V}_o(t,z)}{\partial t} + \mathcal{G}\mathbf{V}_o(t,z) - \frac{\partial\mathbf{I}_o(t,z)}{\partial z}.$$

Observe que os coeficientes das equações do telégrafo acima são coeficientes matriciais, logo não necessariamente comutam, portanto a propriedade de ordem dos fatores matriciais deve ser observada.

5.1 Modelos em Nanotecnologia e extensões

Conforme comentado anteriormente, a teoria de linhas de transmissão também desperta interesse em aplicações com comprimentos na escala de nano e micro metros [52, 103]. Para modelar nanotubos de carbono utilizando a teoria de linhas de transmissão considera-se de forma geral o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}\frac{\partial\mathbf{I}(t,z)}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{V}(t,z)}{\partial z} + \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{I}(t,z) &= \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{C}}\frac{\partial\mathbf{V}(t,z)}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{I}(t,z)}{\partial z} + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{V}(t,z) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde os parâmetros $\tilde{\mathbf{L}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ e $\tilde{\mathbf{G}}$ são modificados em relação à teoria clássica incluindo efeitos significativos. De forma genérica o sistema em (5.10) está representado na forma matricial, mas no caso de nanotubos de carbono modelados como dois condutores os coeficientes matriciais são reduzidos a escalares.

Em particular, em [60] são determinadas a resistência, a indutância e capacitância totais para um nanotubo de carbono de parede simples. A resistência

do nanotubo é composta da resistência quântica, resistência à dispersão e resistência de contato. A capacitância composta da capacitância eletrostática e quântica.

Em [113], considerando nanotubos de múltiplas camadas, os parâmetros são matriciais, e os efeitos quânticos são também considerados nos parâmetros do modelo. Considera-se $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ combinação da resistência difusiva e da resistência quântica, a capacitância $\tilde{\mathbf{C}}$ tem contribuição da capacitância eletrostática e da capacitância quântica e a indutância $\tilde{\mathbf{L}}$ leva em consideração a indutância cinética. Outras referências como [59, 103, 104], também tratam nanotubos a partir da teoria de linhas de transmissão.

Extensões do modelo com perdas (*lossy*) para linhas de transmissão são apresentados em [69, 76, 109].

5.2 Ondas planas em linhas de transmissão com multicondutores

O sistema de equações para uma linha de transmissão com multicondutores (5.5) sem fontes admite soluções de ondas planas

$$\mathbf{U}(t, z) = \mathbf{U}(\lambda t + \gamma z) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(\lambda t + \gamma z) \\ \mathbf{I}(\lambda t + \gamma z) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

quando $\mathbf{V}(t, z) = \mathbf{V}(s)$ e $\mathbf{I}(t, z) = \mathbf{I}(s)$, $s = \lambda t + \gamma z$, satisfazem os sistema matricial diferencial de primeira ordem

$$\mathbf{A}_P \mathbf{U}'(s) + \mathbf{D}_P \mathbf{U}(s) = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

com respeito a fase s . Aqui \mathbf{A}_P e \mathbf{D}_P são agora matrizes blocos de ordem 2×2 com componentes $n \times n$, isto é, são matrizes $2n \times 2n$, dadas por

$$\mathbf{A}_P = \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{I} & \lambda \mathcal{L} \\ \lambda \mathcal{C} & \gamma \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_P = \mathbf{D}, \quad \mathbf{U}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(s) \\ \mathbf{I}(s) \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

sendo \mathbf{D} definido em (5.6).

As funções planas $\mathbf{V}(s)$, $\mathbf{I}(s)$, $s = \lambda t + \gamma z$, também são soluções das equações homogêneas (5.8), (5.9), sendo

$$(\mathcal{L}\mathcal{C}\lambda^2 - \gamma^2\mathbf{I})\frac{d^2\mathbf{V}(s)}{ds^2} + \lambda(\mathcal{R}\mathcal{C} + \mathcal{L}\mathcal{G})\frac{d\mathbf{V}(s)}{ds} + \mathcal{R}\mathcal{G}\mathbf{V}(s) = \mathbf{0}, \quad (5.14)$$

$$(\mathcal{C}\mathcal{L}\lambda^2 - \gamma^2\mathbf{I})\frac{d^2\mathbf{I}(s)}{ds^2} + \lambda(\mathcal{C}\mathcal{R} + \mathcal{G}\mathcal{L})\frac{d\mathbf{I}(s)}{ds} + \mathcal{G}\mathcal{R}\mathbf{I}(s) = \mathbf{0},$$

onde os coeficientes são blocos matriciais 1×1 com componentes de ordem $n \times n$, ou seja, os coeficientes matriciais são de ordem $n \times n$.

De forma semelhante ao caso da linha de transmissão com dois condutores, define-se aqui que a equação matricial diferencial (5.12) é dita regular quando [106]

$$\det(\mathbf{A}_P) = \det(\gamma^2\mathbf{I} - \lambda^2\mathcal{L}\mathcal{C}) \neq 0. \quad (5.15)$$

A solução geral de ondas planas para uma linha de transmissão de multicondutores em (5.12) é dada por

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{c} = e^{-\mathbf{A}_P^{-1}\mathbf{D}_P s}\mathbf{A}_P^{-1}\mathbf{c}, \quad (5.16)$$

onde $\mathbf{h}_P(s)$ é agora a resposta matricial bloco fundamental plana 2×2 satisfazendo o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P\mathbf{h}'_P(s) + \mathbf{D}_P\mathbf{h}_P(s) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_P\mathbf{h}'_P(0) &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

e \mathbf{c} é um vetor bloco 2×1 . Considerando (A.1) com $m = 1$ e $N = 2n$, tem-se

$$\mathbf{h}_P(s) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d_P^{(j-i-1)}(s) \mathbf{h}_{2n-j}^P, \quad (5.18)$$

onde b_i , $i = 0, 1, \dots, 2n$ são os coeficientes do polinômio característico

$$P(\eta) = \det(\eta\mathbf{A}_P + \mathbf{D}_P), = \sum_{j=0}^{2n} b_j \eta^{2n-j} \quad (5.19)$$

e $d_P(s)$ é a função escalar geradora de ondas planas. Esta última função é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} b_0 d_P^{(2n)}(s) + b_1 d_P^{(2n-1)}(s) + \cdots + b_{2n} d_P(s) &= 0, \\ d_P(0) = 0, d'_P(0) = 0, \cdots, d_P^{(2n-2)}(0) = 0, b_0 d_P^{(2n-1)}(0) &= 1, \end{aligned}$$

e as matrizes $\mathbf{h}_i^P = \mathbf{h}_P^{(i)}(0)$ de ordem $2n \times 2n$ satisfazem a equação matricial em diferenças de primeira ordem sujeita aos valores iniciais

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P \mathbf{h}_{j+1}^P + \mathbf{D}_P \mathbf{h}_j^P &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_P \mathbf{h}_0^P &= \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.2.1 Ondas planas exponenciais em linhas de transmissão com multicondutores

Soluções de (5.5) com perfil exponencial

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t + \gamma z} U, \quad U \neq 0, U = \begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

podem ser encontradas por resolver o problema de autovalor $2n \times 2n$ que surge da substituição de (5.21) no sistema (5.5), para $\mathbf{F}(t, z) = \mathbf{0}$, que é, $(\lambda \mathbf{A} + \gamma \mathbf{B} + \mathbf{D})U = \mathbf{0}$, sendo V e I vetores de ordem $n \times 1$. Isto leva ao sistema linear algébrico homogêneo

$$\begin{pmatrix} \gamma \mathbf{I} & \lambda \mathcal{L} + \mathcal{R} \\ \lambda \mathcal{C} + \mathcal{G} & \gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Este sistema tem soluções não nulas sempre que seu determinante é nulo para os escalares γ, λ , isto é,

$$Q(\lambda, \gamma) = \det(\gamma^2 \mathbf{I} - (\lambda \mathcal{L} + \mathcal{R})(\lambda \mathcal{C} + \mathcal{G})) = 0. \tag{5.23}$$

Para tais valores, tem-se da primeira equação de (5.22)

$$V = -\frac{1}{\gamma}(\lambda \mathcal{L} + \mathcal{R})I.$$

Que substituindo a segunda equação de (5.22), o vetor corrente I é uma solução não nula do sistema

$$(\gamma^2 \mathbf{I} - (\lambda \mathcal{L} + \mathcal{G})(\lambda \mathcal{L} + \mathcal{R})) I = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

Assim,

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t + \gamma z} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma}(\lambda \mathcal{L} + \mathcal{R})I \\ I \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

onde I é solução do problema da autovalor (5.24). Com raciocínio análogo, pode-se obter soluções de ondas planas exponenciais envolvendo apenas o vetor de tensão.

O caso da linha de transmissão com multicondutores singular, $\det(\mathbf{A}_P) = 0$, e sistemas defeituosos podem ser discutidos de forma semelhante à que foi realizada para linhas de transmissão com dois condutores. Cabe observar que as soluções exponenciais para o caso das raízes repetidas γ_i de $Q(\lambda, \gamma) = 0$ requer a análise da multiplicidade algébrica e geométrica das raízes o que no momento não é possível devido ao tratamento geral dado. Essa análise é recomendada no momento em que o número de condutores é efetivamente determinado.

5.3 Ondas modais em linhas de transmissão com multicondutores

Um sistema de equações para uma linha de transmissão de multicondutores sem fonte tem soluções do tipo ondas modais

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} V(z) \\ I(z) \end{pmatrix}$$

quando os vetores amplitudes para tensão e corrente $V(z)$, $I(z)$, de ordem $n \times 1$, são soluções do sistema de primeira ordem

$$\frac{dV(z)}{dz} + (\lambda \mathcal{L} + \mathcal{R})I(z) = \mathbf{0}, \quad (5.26)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} + (\lambda \mathcal{C} + \mathcal{G})V(z) = \mathbf{0}, \quad (5.27)$$

ou

$$\mathbf{W}'(z) + \mathbf{C}(\lambda)\mathbf{W}(z) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}(z) = \begin{pmatrix} V(z) \\ I(z) \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

onde

$$\mathbf{C}(\lambda) = \lambda\mathbf{A} + \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \lambda\mathcal{L} + \mathcal{R} \\ \lambda\mathcal{C} + \mathcal{G} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

é uma matriz bloco 2×2 com componentes $n \times n$.

A solução geral de (5.28) é

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{a} \quad (5.30)$$

onde $\mathbf{h}(z)$ satisfaz o problema valor inicial

$$\mathbf{h}'(z) + \mathbf{C}(\lambda)\mathbf{h}(z) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{I}, \quad (5.31)$$

e \mathbf{a} é um vetor bloco 2×1 com componente $n \times 1$.

Considerando $m = 1$ e $N = 2n$ em (A.2), a resposta matricial fundamental modal é

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{l=0}^{2n-1} d^{(l)}(z)\mathbf{B}_l, \quad (5.32)$$

onde a função escalar geradora de onda modal $d(z)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$c_0 d^{(2n)}(z) + c_2 d^{(2n-2)}(z) + \dots + c_{2n} d(z) = 0, \quad (5.33)$$

$$d(0) = 0, d'(0) = 0, \dots, d^{(2n-2)}(0) = 0, c_0 d^{(2n-1)}(0) = 1, \quad (5.34)$$

com c_i , $i = 0, \dots, 2n$ sendo os coeficientes do polinômio característico de grau par

$$P(\gamma) = \det(\gamma\mathbf{I} + \mathbf{C}) = \det(\gamma^2\mathbf{I} - \mathcal{Z}\mathcal{Y}) \quad (5.35)$$

onde $\mathcal{Z} = \lambda\mathcal{L} + \mathcal{R}$, $\mathcal{Y} = \lambda\mathcal{C} + \mathcal{G}$ são as matrizes de impedância e admitância, respectivamente, e

$$\mathbf{B}_{2k+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_k & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathcal{G}_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2k} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathcal{Z}\mathcal{G}_k \\ \mathcal{Y}\mathcal{F}_k & \mathbf{O} \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

são

$$\mathcal{F}_k = \sum_{i=0}^{n-1-k} c_{2i}(\mathcal{Z}\mathcal{Y})^{n-i-1-k}, \quad \mathcal{G}_k = \sum_{i=0}^{n-1-k} c_{2i}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})^{n-i-1-k}.$$

Uma propriedade que deve ser observada é que o polinômio característico (5.35) possui somente potências pares, conseqüentemente, as raízes são $\pm\gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Desde que $P'(\gamma)$ é uma polinômio de ordem ímpar, a fórmula de Heaviside (A.5) para $d(z)$ com raízes simples, fornece

$$d(z) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\gamma_k z}}{P'(-\gamma_k)} + \sum_{k=1}^n \frac{e^{\gamma_k z}}{P'(\gamma_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{2\operatorname{senh}(\gamma_k z)}{P'(\gamma_k)}, \quad (5.37)$$

assim $d(z)$ é uma função ímpar.

Com a mudança de base

$$\mathbf{d}(z) = \mathbf{M}_{exp}^{d(z)} \mathbf{Exp}(\gamma) \quad (5.38)$$

onde

$$\mathbf{d}(z) = \begin{pmatrix} d(z) \\ d'(z) \\ \vdots \\ d^{2(n-2)}(z) \\ d^{2(n-1)}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Exp}(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 z} \\ e^{-\gamma_1 z} \\ \vdots \\ e^{\gamma_n z} \\ e^{-\gamma_n z} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

e

$$\mathbf{M}_{exp}^{d(z)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P'(\gamma_1)} & \frac{1}{P'(-\gamma_1)} & \cdots & \frac{1}{P'(\gamma_n)} & \frac{1}{P'(-\gamma_n)} \\ \frac{\gamma_1}{P'(\gamma_1)} & -\frac{\gamma_1}{P'(-\gamma_1)} & \cdots & \frac{\gamma_n}{P'(\gamma_n)} & -\frac{\gamma_n}{P'(-\gamma_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\gamma_1^{2n-2}}{P'(\gamma_1)} & \frac{\gamma_1^{2n-2}}{P'(-\gamma_1)} & \cdots & \frac{\gamma_n^{2n-2}}{P'(\gamma_n)} & \frac{\gamma_n^{2n-2}}{P'(-\gamma_n)} \\ \frac{\gamma_1^{2n-1}}{P'(\gamma_1)} & -\frac{\gamma_1^{2n-1}}{P'(-\gamma_1)} & \cdots & \frac{\gamma_n^{2n-1}}{P'(\gamma_n)} & -\frac{\gamma_n^{2n-1}}{P'(-\gamma_n)} \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

ainda pode-se escrever

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\gamma_i z}}{P'(-\gamma_i)} \mathbf{R}(-\gamma_i) + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\gamma_i z}}{P'(\gamma_i)} \mathbf{R}(\gamma_i), \quad (5.41)$$

onde

$$\mathbf{R}(\gamma) = \sum_{k=0}^{2n-1} \gamma^k \mathbf{B}_k.$$

Desde que $P'(-\gamma) = -P'(\gamma)$, a matriz $\mathbf{R}(\gamma)$ pode ser dividida em uma parte par e outra ímpar $\mathbf{R}(\gamma) = \mathbf{R}_E(\gamma) + \mathbf{R}_I(\gamma)$ onde

$$\mathbf{R}_E(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^{2k} \mathbf{B}_{2k}, \quad \mathbf{R}_I(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^{2k+1} \mathbf{B}_{2k+1}.$$

Assim,

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{2}{P'(\gamma_i)} (\sinh(\gamma_i z) \mathbf{R}_E(\gamma_i) + \cosh(\gamma_i z) \mathbf{R}_I(\gamma_i)). \quad (5.42)$$

5.3.1 A formulação modal do telégrafo

Retomando o sistema modal (5.26), (5.27) e diferenciando ambas as equações matriciais, ou por escrever (5.28) na forma $\mathbf{LW} = 0$, para o operador \mathbf{L} apropriado, e multiplicando pela matriz bloco adjugada de \mathbf{L} , obtém-se o conjunto de equações diferenciais matriciais desacopladas de segunda ordem sem fontes

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} - \mathcal{Z}\mathcal{Y}V(z) = \mathbf{0}, \quad (5.43)$$

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} - \mathcal{Y}\mathcal{Z}I(z) = \mathbf{0}. \quad (5.44)$$

A solução geral da equação distribuída da equação voltagem (5.43) é dada por

$$V(z) = \mathbf{h}'(z)\mathbf{a}_1 + \mathbf{h}(z)\mathbf{a}_2 \quad (5.45)$$

onde a resposta matricial fundamental $\mathbf{h}(z)$ satisfaz

$$\mathbf{h}''(z) - \mathcal{Z}\mathcal{Y}\mathbf{h}(z) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{0} \quad \mathbf{h}'(0) = \mathbf{I} \quad (5.46)$$

e \mathbf{a} is a vector $n \times 1$. Em forma simbólica, pode-se escrever

$$V(z) = \cosh(\Gamma z)\mathbf{a}_1 + \frac{\sinh(\Gamma z)}{\Gamma}\mathbf{a}_2, \quad \Gamma^2 = \mathcal{Z}\mathcal{Y} \quad (5.47)$$

onde a solução matricial fundamental $\mathbf{h}(z)$ é dada de forma fechada por

$$\mathbf{h}(z) = \frac{\sinh \Gamma z}{\Gamma}, = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i=0}^{k-1} c_i d^{(k-i-1)}(z) \mathbf{h}_{2n-k}. \quad (5.48)$$

Aqui os c_k são os coeficientes do polinômio característico (5.35), $d(z)$ a solução do problema de valor inicial escalar (5.33) e \mathbf{h}_k é a solução da equação de segunda ordem em diferenças

$$\mathbf{h}_{k+2} - \Gamma^2 \mathbf{h}_k = \mathbf{0}, \quad (5.49)$$

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{h}_1 = \mathbf{I}. \quad (5.50)$$

Que resulta para $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{h}_k = \begin{cases} \mathbf{0}, & k = 2p, \\ \Gamma^{2p}, & k = 2p + 1. \end{cases} \quad (5.51)$$

Desde que os coeficientes ímpares $c_{2i+1} = 0$ de (5.35) se anulam, a resposta matricial fundamental envolve apenas derivadas de $d(z)$ que são de ordem par. Mais precisamente,

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} c_{2i} d^{2(k-i-1)}(\mathcal{Z}\mathcal{Y})^{n-k} \quad (5.52)$$

ou

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d^{(2k)}(z) \mathbf{A}_{2k} \quad (5.53)$$

onde $\mathbf{A}_{2k} = \sum_{i=0}^{n-k-1} c_{2i} (\mathcal{Z}\mathcal{Y})^{n-i-k-1}$.

Observações:

1. A forma simbólica de $\mathbf{h}(z)$ em (5.48) é na verdade uma função matricial bem definida. É uma série de matricial de potência inteira com respeito a variável matricial $\mathcal{A} = \mathcal{Z}\mathcal{Y}$ desde que contenha somente as potência de ordem par de Γ . Assim, faz sentido mesmo para $\mathcal{Z}\mathcal{Y}$ sendo uma matriz singular.

2. Existem muitos trabalhos na literatura que discutem aspectos computacionais das funções hiperbólicas [11, 32].
3. Como antes, uma vez conhecida a tensão $V(z)$, a corrente $I(z)$ pode ser determinada de (5.26). Entretanto, usando a propriedade de mudança da resposta fundamental matricial $\mathbf{h}(z)$, [21], não é necessário diferenciar $V(z)$. Simplesmente aumenta-se por um a ordem das derivadas de $d(z)$ em (5.48). Mais precisamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}I(z) &= -\frac{dV}{dz} = -(\mathbf{h}''(z)\mathbf{a}_1 + \mathbf{h}'(z)\mathbf{a}_2) \\ &= -(\Gamma \sinh(\Gamma z)\mathbf{a}_1 + \cosh(\Gamma z)\mathbf{a}_2) \\ &= -\left(\sum_{k=0}^{n-1} d^{(2k+2)}(z)\mathbf{A}_{2k}\mathbf{a}_1 + \sum_{k=0}^{n-1} d^{(2k+1)}(z)\mathbf{A}_{2k}\mathbf{a}_2 \right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

É possível determinar $\mathbf{h}(z)$ para (5.44) com procedimento análogo realizado para a equação (5.43).

4. A matriz fundamental $\mathbf{h}(z)$ de ordem $2n \times 2n$ do sistema de primeira ordem original (5.28) pode ser dada em termos da solução matricial hiperbólica fundamental $\frac{\sinh(\Gamma_1 z)}{\Gamma_1}$, $\frac{\sinh(\Gamma_2 z)}{\Gamma_2}$ de ordem $n \times n$ do sistema diferencial matricial de segunda ordem (5.43), (5.44) onde $\Gamma_1 = \mathcal{Z}\mathcal{Y}$ e $\Gamma_2 = \mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Tem-se

$$\mathbf{h}(z) = \begin{pmatrix} \cosh(\Gamma_1 z) & -\mathcal{Z}\frac{\sinh(\Gamma_1 z)}{\Gamma_1} \\ -\mathcal{Y}\frac{\sinh(\Gamma_2 z)}{\Gamma_2} & \cosh(\Gamma_2 z) \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

5. O desacoplamento dos fasores de primeira ordem das equações da linha de transmissão $V'(z) + \mathcal{Z}I(z) = 0$, $I'(z) + \mathcal{Y}V(z) = 0$ ou as equações do telégrafo da linha de transmissão modais de segunda ordem $V''(z) - \mathcal{Z}\mathcal{Y}V(z) = 0$, $I''(z) - \mathcal{Y}\mathcal{Z}I(z) = 0$ requerem a diagonalização das matrizes \mathcal{Z} , \mathcal{Y} e $\mathcal{Z}\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}\mathcal{Z}$, respectivamente. Este processo não é sempre viável para estruturas de linhas de transmissão arbitrárias uma vez que

envolvem transformações de similaridade que podem não ser as mesmas ou os coeficientes matriciais são defeituosos [41, 95]. A metodologia apresentada neste trabalho não depende nem da computação dos autovetores e funciona para autovalores simples ou repetidos.

5.3.2 Linha de transmissão com simetria cíclica

Uma classe de linhas de transmissão que tem recebido atenção na literatura são sistemas que possuem uma configuração cíclica de condutores com fase de alta ordem, linhas de transmissão de interconexão longa e *microstrip*, [56, 121, 4], entre outros [13, 66, 85, 91, 98, 124].

Nesses sistemas, as matrizes de impedância e admitância são matrizes circulantes [28] cujo padrão tem uma simetria insensível a uma permutação circular em seus terminais. Esse tipo de estrutura de matriz é passível de discussão analítica, uma vez que circulantes $N \times N$ podem ser simultaneamente desacopladas usando a matriz de Fourier $N \times N$, elas comutam e os autovalores associados com circulantes podem ser simples ou repetidos e calculados de maneira direta.

As transformações modais envolvidas com a diagonalização das matrizes circulantes podem ser relacionadas ao método de componentes simétricos devido ao Fortescue.

A matriz dos coeficientes de tais transformações envolve as colunas da matriz de Fourier F e sua matriz conjugada transposta F^* que são empregadas em análise harmônica discreta (DFT) e síntese harmônica, respectivamente. Seja $w = e^{\frac{2\pi j}{N}}$ a N -ésima raiz da unidade ($w^N = 1$) ou o operador de rotação N -fase representando a mudança de fase complexa das quantidades N -fase em relação a outra, isto é, $2\pi/N$.

A matrix de Fourier F de ordem N é a matriz $N \times N$ para a qual F^* é dada por

$$F^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

A matriz de Fourier F tem a mesma forma F^* mas com \bar{w} em vez de w .

Usando o fato de que a sequência w^k , $k = 0, 1, \dots$ é periódica e que $w^{-1} = \bar{w}$, acontece que F^* é ortogonal e simétrica. Além disso, pode-se também escrever

$$F^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{(N-2)} & \cdots & w \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

O método de Fortescue, [10, 36] essencialmente decompõe o vetor coluna X cujos componentes são um conjunto de N fasores X_1, X_2, \dots, X_N cujas componentes são arbitrariamente não balanceados, cada um tendo dois graus de liberdade, na combinação linear de N vetores E_1, E_2, \dots, E_N de ordem $N \times 1$ que são balanceadas. Cada componente do fasor E_k tem igual magnitude e sua própria sequência de fase. Mais precisamente,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = F^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad (5.58)$$

isso é,

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ \vdots \\ w^{N-1} \end{pmatrix} + \cdots + x_N \begin{pmatrix} 1 \\ w^{(N-1)} \\ w^{2(N-1)} \\ \vdots \\ w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}, \quad (5.59)$$

ou usando (5.57)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ wx_2 \\ w^2x_2 \\ \vdots \\ w^{N-1}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ w^2x_3 \\ w^4x_3 \\ \vdots \\ w^{N-2}x_3 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} x_N \\ w^{N-1}x_N \\ w^{N-2}x_N \\ \vdots \\ wx_N \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Observa-se que cada E_k consiste de N fasores iguais em magnitude e deslocado de cada outro por uma fase de $j\frac{2\pi}{N}$.

No que segue assume-se que os os parâmetros matriciais da linha \mathcal{L} , \mathcal{R} , \mathcal{C} e \mathcal{G} são matrizes circulantes com o padrão

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_N \\ c_N & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_N & c_1 & \cdots & c_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdot & c_N & c_1 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Qualquer matriz circulante de ordem $N \times N$ definida por $\mathcal{C} = \text{circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_N)$ pode ser diagonalizada como $\mathcal{C} = F^* \Lambda_C F$, onde Λ_C é a matriz diagonal composta pelo autovalores λ_k da matriz circulante \mathcal{C} , isto é

$$\Lambda_C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_N \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

sendo

$$\lambda_k = c_1 + c_2 w^{k-1} + c_3 (w^{k-1})^2 + c_4 (w^{k-1})^3 + \cdots + c_N (w^{k-1})^{N-1}, \quad (5.63)$$

para $k = 1, 2, \dots, N$. A recíproca também é válida. Para uma matriz diagonal D de ordem $N \times N$, tem-se que $F^* D F$ é uma matriz circulante.

Para uma linha de transmissão com multicondutores e cujas matrizes \mathcal{L} , \mathcal{R} , \mathcal{C} , \mathcal{G} são circulantes, tem-se que as matrizes impedância e admitância também possuem tal característica. Assim,

$$\mathcal{Z} = \lambda \mathcal{L} + \mathcal{R} = \text{circ}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N) = F^* \Lambda_Z F, \quad (5.64)$$

$$\mathcal{Y} = \lambda \mathcal{C} + \mathcal{G} = \text{circ}(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) = F^* \Lambda_Y F, \quad (5.65)$$

onde

$$\Lambda_Z = \sum_{k=1}^N Z_k \Omega^{k-1}, \quad \Lambda_Y = \sum_{k=1}^N Y_k \Omega^{k-1}, \quad (5.66)$$

com Ω sendo a matriz diagonal $N \times N$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Desde que matrizes circulantes de mesma ordem comutam, a resposta matricial fundamental (5.55) torna-se

$$\mathbf{h}(z) = \begin{pmatrix} \cosh(\Gamma z) & -\mathcal{Z} \frac{\sinh(\Gamma z)}{\Gamma} \\ -\mathcal{Y} \frac{\sinh(\Gamma z)}{\Gamma} & \cosh(\Gamma z) \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

onde $\Gamma^2 = \mathcal{Z}\mathcal{Y} = \mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Aqui

$$\mathbf{h}(z) = \frac{\sinh \Gamma z}{\Gamma} \quad (5.69)$$

é a resposta matricial fundamental do sistema desacoplado (5.43)-(5.44)

$$\frac{d\phi(z)}{dz^2} - \Gamma^2 \phi(z) = 0, \quad (5.70)$$

para $\phi(z) = V(z), I(z)$, isto é $\mathbf{h}''(z) - \Gamma^2 \mathbf{h}(z) = 0$, $\mathbf{h}(0) = 0, \mathbf{h}'(0) = 1$. Esta determinação é como segue. Introduzindo a mudança de variável em (5.70) ou $\psi(z) = F\phi(z)$, e pre-multiplicando por F^* , obtém-se o sistema de segunda ordem desacoplado

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \Lambda_Z \Lambda_Y \psi(z) = 0, \quad (5.71)$$

uma vez que $\Gamma^2 = \mathcal{Z}\mathcal{Y} = (F^* \Lambda_Z F)(F^* \Lambda_Y F) = F^* \Lambda_Z \Lambda_Y F = F^* \Lambda_{ZY} F$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(z) &= \frac{\sinh \Gamma z}{\Gamma} = F^* \frac{\sinh \sqrt{\Lambda_{ZY}} z}{\sqrt{\Lambda_{ZY}}} F \\ &= F^* \begin{pmatrix} \frac{\sinh \sqrt{\Lambda_1} z}{\sqrt{\Lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sinh \sqrt{\Lambda_2} z}{\sqrt{\Lambda_2} z} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sinh \sqrt{\Lambda_n} z}{\sqrt{\Lambda_n}} \end{pmatrix} F, \end{aligned} \quad (5.72)$$

onde λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ são os autovalores de $\mathcal{Z}\mathcal{Y}$.

5.3.3 Sistemas de transmissão polifásicos com estrutura circulante

Nesta seção, discute-se a formulação do telégrafo modal (5.43)-(5.44) para o caso de uma rede polifásica com simetria cíclica, tais como cabos de alimentação de n núcleos (N -core cables) com tela metálica de aterramento comum. Os

elementos diagonais que correspondem às auto-impedâncias na matriz de impedância \mathcal{Z} são assumidos para ter valores iguais Z_s . Ao assumir simetria cíclica em relação à tela metálica de aterramento comum, os elementos fora da diagonal têm os mesmos valores de impedância mútua Z_m . Em [56, 98] é discutido o caso em que a impedância mútua está relacionada à distância entre os condutores. Para a matriz de admitância \mathcal{Y} , as mesmas considerações são assumidas.

Devido a importância prática o caso $N = 3$ é considerado primeiro e utiliza-se análise modal para desacoplar a matriz $\mathcal{Z}\mathcal{Y}$ onde

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} Z_s & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_s & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_s \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y_s & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_s & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_s \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

Desde que \mathcal{Z} e \mathcal{Y} são circulares, os produtos $\mathcal{Z}\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ são os mesmos uma vez que matrizes circulares comutam e seus autovalores $\lambda = \gamma^2$ são obtidas de (5.63) com $w = e^{\frac{2\pi j}{3}}$ ou como o produto dos autovalores de \mathcal{Z} e \mathcal{Y} como em (5.71). Resulta que existe um autovalor simples λ_1 que difere por um fator Δ de um autovalor duplo $\lambda_2 = \lambda_3$. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (Z_s + 2Z_m)(Y_s + 2Y_m) = (Z_s - Z_m)(Y_s - Y_m) + \Delta \\ \lambda_2 &= (Z_s + Z_m w + Z_m w^2)(Y_s + Y_m w + Y_m w^2) \\ &= (Z_s - Z_m)(Y_s - Y_m) \\ \lambda_3 &= (Z_s + Z_m w^2 + Z_m w^4)(Y_s + Y_m w^2 + Y_m w^4) \\ &= (Z_s - Z_m)(Y_s - Y_m) \\ \Delta &= 3Z_m Y_m + 3Z_s Y_m + 3Z_m Y_s \end{aligned}$$

A existência de um autovalor triplo só ocorre quando $\Delta = 0$.

Para o caso das matrizes impedância e admitância de ordem $N \times N$ com as mesmas características acima, circulantes e simétricas de ordem $N \times N$ tem-se

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} Z_s & Z_m & \cdots & Z_m \\ Z_m & Z_s & \cdots & Z_m \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Z_m & \cdots & Z_m & Z_s \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y_s & Y_m & \cdots & Y_m \\ Y_m & Y_s & \cdots & Y_m \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Y_m & \cdots & Y_m & Y_s \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

Desde que $\mathcal{Z}\mathcal{Y} = \mathcal{Y}\mathcal{Z}$, considerando apenas de (5.43)-(5.44) a equação diferencial matricial de segunda ordem

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} - \mathcal{Z}\mathcal{Y}\Phi(z) = \mathbf{0}, \quad (5.75)$$

cujo polinômio característico é

$$P(\gamma) = \det(\gamma^2\mathcal{I} - \mathcal{Z}\mathcal{Y}). \quad (5.76)$$

De (5.63) com $w = e^{\frac{2\pi j}{N}}$, os autovalores $\lambda = \gamma^2$ da circulante $\mathcal{Z}\mathcal{Y}$ são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (Z_s + Z_m + \dots + Z_m)(Y_s + Y_m + \dots + Y_m) \\ &= (Z_s - Z_m)(Y_s - Y_m) + \Delta, \\ \lambda_i &= \left(Z_s + Z_m \frac{(w^{i-1})^n - w^{i-1}}{w^{i-1} - 1} \right) \left(Y_s + Y_m \frac{(w^{i-1})^n - w^{i-1}}{w^{i-1} - 1} \right). \\ &= (Z_s - Z_m)(Y_s - Y_m), i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\Delta = N(Z_s Y_m + Z_m Y_s - 2Z_m Y_m) + N^2 Z_m Y_m$$

Assim para $\Delta \neq 0$, o polinômio característico $P(\gamma) = \det(\gamma^2\mathcal{I} - \mathcal{Z}\mathcal{Y})$ tem duas raízes simples, $\pm\gamma_1$, e duas raízes $\pm\gamma_2$ com multiplicidade algébrica $N-1$. Além disso, para uma frequência fixada λ , a raiz simples depende de N e dos parâmetros matriciais impedância e admitância enquanto as raízes repetidas independem do número de condutores.

O polinômio característico pode se escrito como

$$P(\gamma) = (\gamma^2 - \gamma_2^2)^{N-1}(\gamma^2 - \gamma_1^2), \quad (5.78)$$

a função escalar geradora $d(z)$ pode ser determinada da fórmula de Heaviside (A.5)

$$d(z) = \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\Psi_l(\gamma_2)}{(N-1-l)!} z^{N-1-l} (e^{\gamma_2 z} + (-1)^{N+l-2} e^{-\gamma_2 z}) + \frac{1}{P'(\gamma_1)} e^{\gamma_1 z} + \frac{1}{P'(-\gamma_1)} e^{-\gamma_1 z}, \quad (5.79)$$

onde os resíduos

$$\Psi_l(\gamma) = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{(l-1)}}{d\gamma^{(l-1)}} \left(\frac{1}{(\gamma + \gamma_2)^{n-1} (\gamma^2 - \gamma_1^2)} \right), \quad (5.80)$$

podem ser obtidos computacionalmente.

Observe que embora $d(z)$ dependa de um número finito de potências de z devido a multiplicidade dos autovalores, a resposta matricial fundamental é uma matriz circulante que depende somente das funções seno hiperbólicas (5.72). Esta última segue da matriz simétrica com algum acoplamento com a natureza das raízes dos autovalores. o caso $N = 3$ pode ser usado para ilustrar tal observação.

5.3.4 Ondas modais matriciais em multicondutores : viajantes para frente e para trás

A resposta matricial fundamental de onda modal $\mathbf{h}(z)$ pode ser convenientemente decomposta utilizando a decomposição da função escalar geradora de onda modal $d(z)$ (5.37), de forma semelhante a realizada para a linha de transmissão com dois condutores. Seja

$$d(z) = d_+(z) + d_-(z), \quad (5.81)$$

onde, para γ_k raízes simples,

$$d_+(z) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\gamma_k z}}{P'(-\gamma_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{\sinh(\gamma_k z)}{P'(\gamma_k)} - \sum_{k=1}^n \frac{\cosh(\gamma_k z)}{P'(\gamma_k)}, \quad (5.82)$$

$$d_-(z) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{\gamma_k z}}{P'(\gamma_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{\sinh(\gamma_k z)}{P'(\gamma_k)} + \sum_{k=1}^n \frac{\cosh(\gamma_k z)}{P'(\gamma_k)}, \quad (5.83)$$

são chamadas termos para frente (*forward*) e para trás (*backward*) da função escalar geradora de onda modal $d(z)$, respectivamente. Estes termos são relacionados por

$d_+(-z) = -d_-(z)$. Raízes repetidas podem ocorrer em linha de transmissão com multicondutores, neste caso a decomposição (5.81) é dada por

$$\begin{aligned} d_+(z) &= \sum_{l=1}^k p_l(z) e^{-\gamma_l z}, \\ d_-(z) &= \sum_{l=1}^k q_l(z) e^{\gamma_l z}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

onde $p_l(z)$ e $q_l(z)$ são polinômios de grau $m_l - 1$, sendo m_l a multiplicidade algébrica de γ_l , e k o número de raízes distintas de acordo com (A.5).

A decomposição de $d(z)$ permite decompor e identificar os termos para frente e para trás de $\mathbf{h}(z)$. De (5.32), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(z) &= \mathbf{h}^+(z) + \mathbf{h}^-(z), \\ \mathbf{h}^+(z) &= \sum_{l=0}^{2n-1} d_+^{(l)}(z) \mathbf{B}_l, \quad \mathbf{h}^-(z) = \sum_{l=0}^{2n-1} d_-^{(l)}(z) \mathbf{B}_l. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Quando utiliza-se a formulação matricial do telégrafo (5.52), resulta

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{h}^+(z) + \mathbf{h}^-(z), \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^+(z) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} c_{2i} d_+^{2(k-i-1)}(z) (\mathcal{ZY})^{n-k}, \\ \mathbf{h}^-(z) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} c_{2i} d_-^{2(k-i-1)}(z) (\mathcal{ZY})^{n-k}. \end{aligned}$$

Observe que nesta decomposição os termos para frente e para trás $\mathbf{h}^\pm(z)$ envolvem as derivadas de ordem par de $d^+(z)$ e $d^-(z)$ como dado em (5.82)-(5.83).

Os termos $d_+(z)$ e $d_-(z)$ da função escalar geradora de onda modal $d(z)$ que satisfaz (5.33) são também soluções da equação diferencial escalar

$$c_0 u^{(2n)}(z) + c_2 u^{(2n-2)}(z) + c_4 u^{(2n-4)}(z) + \cdots + c_{2n-2} u''(z) + c_{2n} u(z) = 0$$

e seus valores em $z = 0$ podem ser determinados a partir da função $d(z)$. As derivadas de $d(z)$ em $z = 0$ que denota-se por $d_k = d^{(k)}(0)$ pode ser obtida recursivamente da equação em diferenças

$$d_{2n+k} + \sum_{r=1}^n c_{2r} d_{2(n-r)+k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.87)$$

sujeita as condições iniciais

$$d_0 = 0, d_1 = 0, \dots, d_{2n-2} = 0, c_0 d_{2n-1} = 1. \quad (5.88)$$

Desde que $d(z)$ é uma função ímpar, tem-se que as derivadas de ordem par são funções ímpares e as derivadas de ordem ímpar são funções pares. De suas definições tem-se $d_+^{(k)}(z) = (-1)^{k+1} d_-^{(k)}(-z)$. Assim $d_+^{(k)}(0) = d_-^{(k)}(0)$ para k ímpar e $d_+^{(k)}(0) = -d_-^{(k)}(0)$ para k par. Dos valores iniciais de $d(z)$, obtém-se que

$$d_+^{(2k-1)}(0) = d_-^{(2k-1)}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{2k-1}}{P'(\gamma_i)} = 0, k = 1, \dots, n-1 \quad (5.89)$$

$$d_+^{2n-1}(0) = d_-^{(2n-1)}(0) = \frac{1}{2}. \quad (5.90)$$

As condições iniciais de ordem par de $d_+(z)$ e $d_-(z)$ podem ser determinadas usando (5.82), (5.83) e uma base apropriada de soluções. Por exemplo, a base fundamental $d(z), d'(z), \dots, d^{(2n-1)}(z)$ ou a base normalizada $d_o(z), d_1(z), \dots, d_{2n-1}(z)$ definidas a partir da relação matricial que envolve os coeficientes do polinômio característico (5.35) e a base fundamental

$$\begin{pmatrix} d_o \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{(2n-1)} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d(z) \\ d'(z) \\ d''(z) \\ \vdots \\ d^{(2n-1)}(z) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{2n-1} & c_{2n-2} & \cdots & c_0 \\ c_{2n-2} & c_{2n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_0 & \cdots & 0 \\ c_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.91)$$

Utilizando que os valores iniciais das derivada ímpares de $d_+(z), d_-(z)$ se anulam até $2n-2$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} d_-(z) &= \sum_{i=0}^{n-1} d_{2i}(z) d_-^{(2i)}(0) + \frac{1}{2} d(z), \\ d_+(z) &= \sum_{i=0}^{n-1} d_{2i}(z) d_+^{(2i)}(0) + \frac{1}{2} d(z), \end{aligned}$$

assim,

$$d_+^{(2k)}(0) = -d_-^{(2k)}(0) = -\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{2k}}{P'(\gamma_i)}, k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.92)$$

5.4 Exemplos numéricos

Nesta seção, são considerados exemplos de dois tipos, os obtidos na literatura e acadêmicos que ilustram a metodologia utilizada neste trabalho. O primeiro exemplo envolve matrizes de impedância e admitância simétricas 3×3 . O último exemplo envolve uma rede de alta ordem polifásica com padrão cíclico. Considera-se o comportamento, a natureza e decomposição da função escalar geradora de onda modal $d(z)$ solução de (5.33)-(5.34) e a resposta fundamental matricial $\mathbf{h}(z)$ em (5.32) e $\mathbf{h}(z)$ em (5.72) para diferentes configurações.

5.4.1 Exemplo 1: Linha de transmissão com perdas, matrizes impedância e admitância simétricas de ordem 3×3

A linha de transmissão com parâmetros dados em [84] tem as matrizes de impedância e admitância simétricas e de ordem 3×3

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} 18,3453 & 0 & 0 \\ 0 & 17,4558 & 0 \\ 0 & 0 & 18,3453 \end{pmatrix} \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}} + j\omega \begin{pmatrix} 313,9 & 67,5 & 22,2 \\ 67,5 & 319,3 & 67,5 \\ 22,2 & 67,5 & 313,9 \end{pmatrix} \frac{\text{nH}}{\text{m}} \quad (5.93)$$

e

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 251,1210 & -22,8909 & -0,3994 \\ -22,8909 & 256,109 & -22,8909 \\ -0,3994 & -22,8909 & 251,1210 \end{pmatrix} \frac{\text{nS}}{\text{m}} + j\omega \begin{pmatrix} 130,3 & -16,2 & -0,8 \\ -16,2 & 133,7 & -16,2 \\ -0,8 & -16,2 & 130,3 \end{pmatrix} \frac{\text{pF}}{\text{m}}, \quad (5.94)$$

com $f = 2$ GHz e comprimento entre 0 e 10m. Utilizando a formulação da linha de transmissão de primeira ordem para calcular $d(z)$ de (5.33)-(5.34) e (5.31) para a resposta fundamental matricial $\mathbf{h}(z)$.

Na Figura 5.2, observa-se o comportamento da parte real de $d(z)$ dado em (5.37). Para um intervalo espacial curto predomina o comportamento hiperbólico na Figura 5.2 (a), enquanto para intervalos grandes é observado o comportamento

oscilatório Figura 5.2 (b). As mesmas características podem ser observadas para a parte imaginária $Im(d(z))$.

A decomposição $d(z) = d_-(z) + d_+(z)$ é dada na Figura 5.3. Observe que $Re(d_+(z))$ e $Re(d_-(z))$ estão próximas, enquanto $Im(d_+(z))$ e $Im(d_-(z))$ têm valores absolutos próximos, mas com sinais opostos.

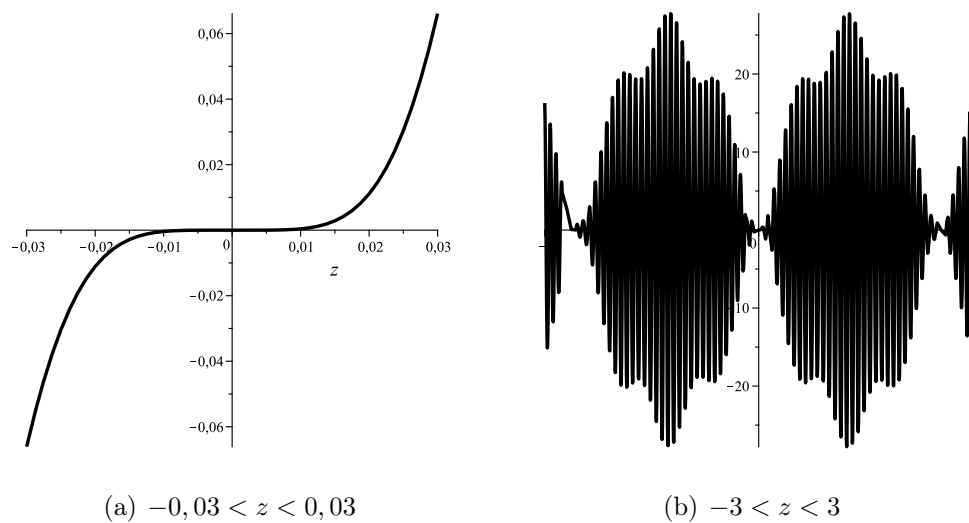


Figura 5.2: Gráficos de $Re(d(z))$ para diferentes intervalos de z .

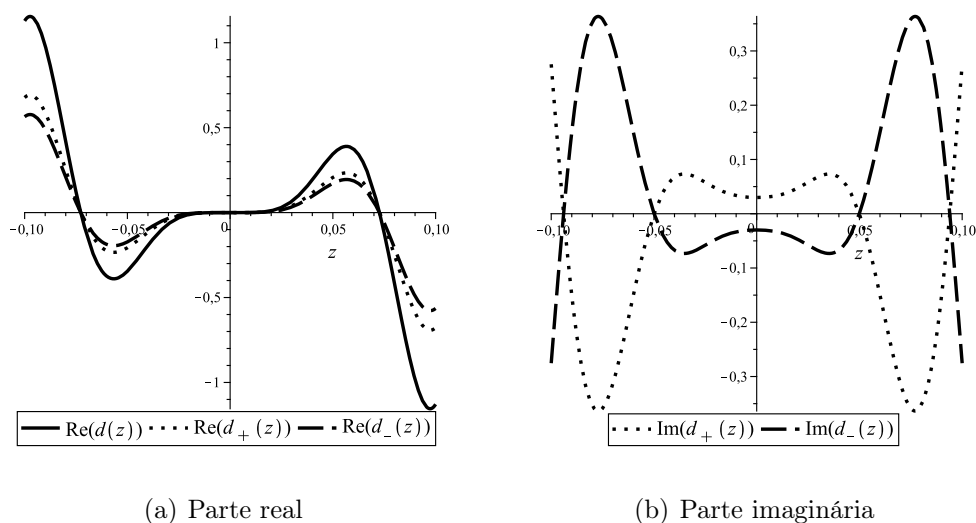


Figura 5.3: Gráficos das partes real e imaginária de $d(z)$ e componentes $d_+(z)$ e $d_-(z)$.

Para a constante de propagação $\gamma_k = \alpha_k + j\beta_k$, a função $e^{j\omega t}d(z)$ e sua decomposição são dadas na Figura 5.4. Em termos das constantes de propagação, tem-se $e^{j\omega t}d_+(z) = \sum_{k=1}^3 u_k^+(t, z)$ onde

$$\begin{aligned} u_k^+(t, z) &= e^{(-\alpha_k z)} \frac{e^{-j\beta_k(z-c_k t)}}{P'(-\gamma_k)} \\ &= \frac{e^{(-\alpha_k z)}}{P'(-\gamma_k)} (\cos(\beta_k(z - c_k t)) - j \sin(\beta_k(z - c_k t))), \end{aligned}$$

para $c_k = \frac{\omega}{\beta_k}$ com $k = 1, 2, 3$. Observa-se que $u_k^+(t, z)$ para $\alpha_k > 0$ e $\beta_k > 0$ são ondas harmônicas viajando para frente exponencialmente atenuadas na direção positiva de z . Neste caso, a atenuação aparece para linhas de transmissão longas, a parte imaginária tem o mesmo comportamento. De forma análoga a função $e^{j\omega t}d_-(z)$ pode ser decomposta nas componentes

$$\begin{aligned} u_k^-(t, z) &= e^{(\alpha_k z)} \frac{e^{j\beta_k(z+c_k t)}}{P'(\gamma_k)} \\ &= \frac{e^{(\alpha_k z)}}{P'(\gamma_k)} (\cos(\beta_k(z + c_k t)) + j \sin(\beta_k(z + c_k t))), \end{aligned}$$

sendo $u_k^-(t, z)$ uma onda harmônica viajando para trás que é exponencialmente amplificada na direção positiva de z . A característica viajante para a parte real com $k = 1$ pode ser observada na Figura 5.5, onde são apresentados os gráficos de $u_1^+(t, z)$ e $u_1^-(t, z)$ em três dimensões.

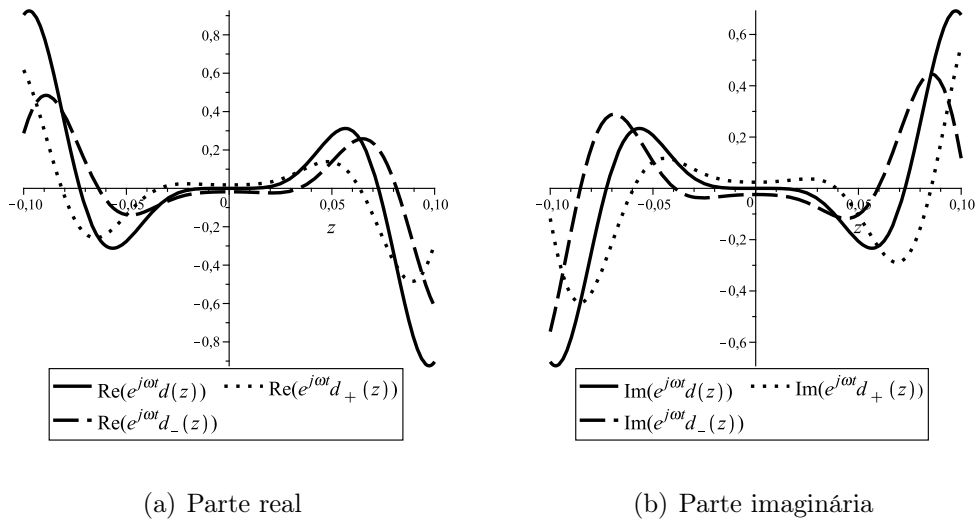


Figura 5.4: Gráficos da parte real e imaginária de $e^{j\omega t}d(z)$ e componentes $e^{j\omega t}d_+(z)$ e $e^{j\omega t}d_-(z)$, $t=1$.

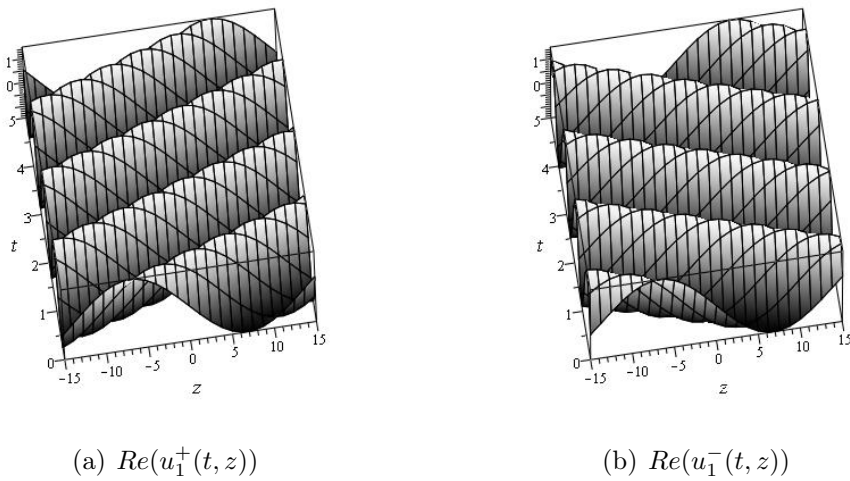


Figura 5.5: Propagação de componente de onda atenuada $Re(u_1^+(t, z))$, $Re(u_1^-(t, z))$.

Para este exemplo, usando (5.32) com (5.36) a resposta matricial fundamental $\mathbf{h}(z)$ solução de (5.31) é uma matriz de ordem 6×6 e pode ser escrita como

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{h}_1(z) + \mathbf{h}_2(z), \tag{5.95}$$

sendo

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{11}(z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_{22}(z) \end{pmatrix}, \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{h}_{12}(z) \\ \mathbf{h}_{21}(z) & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.96)$$

Observe que

$$\mathbf{h}_1(z) = \sum_{k=0}^2 d^{2k+1}(l)B_{2k+1}, \quad \mathbf{h}_2(z) = \sum_{k=0}^2 d^{2k}(l)B_{2k}.$$

Assim, $\mathbf{h}_1(z)$ é composta das derivadas ímpares de $d(z)$ enquanto $\mathbf{h}_2(z)$ é composta das derivadas de ordem par de $d(z)$. Considerando que $d^{(2k)}(z)$ e $d^{(2k+1)}(z)$ são funções ímpares e pares respectivamente, resulta que os blocos $\mathbf{h}_{ii}(z)$ na diagonal são compostos de funções pares, enquanto os blocos $\mathbf{h}_{ij}(z)$, $i \neq j$, fora da diagonal, são compostos de funções ímpares. Estas características podem ser observadas nas Figuras 5.6 e 5.7 onde são apresentados os gráficos das componentes $\mathbf{h}_{11}(z)$ e $\mathbf{h}_{14}(z)$ que são componentes de $\mathbf{h}_{11}(z)$ e $\mathbf{h}_{12}(z)$, respectivamente.

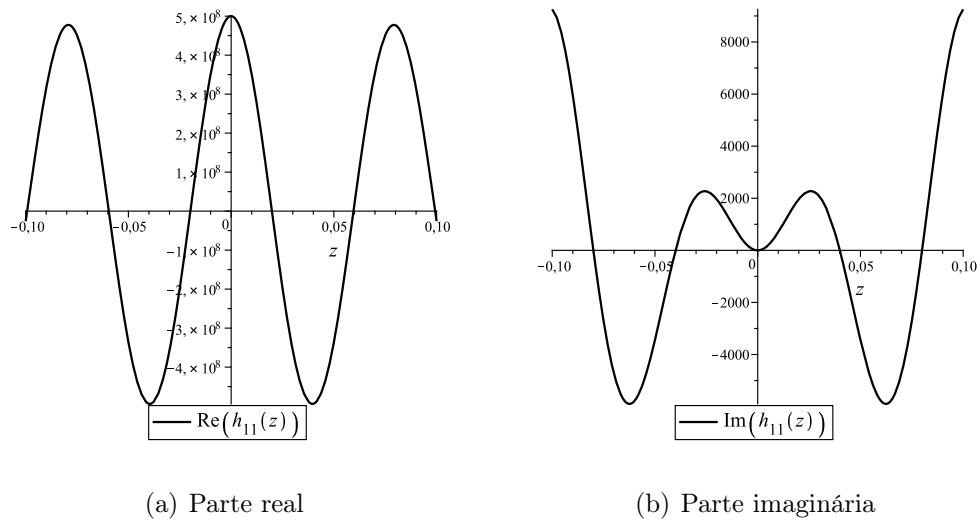


Figura 5.6: Gráficos das partes real e imaginária da função par $\mathbf{h}_{11}(z)$.

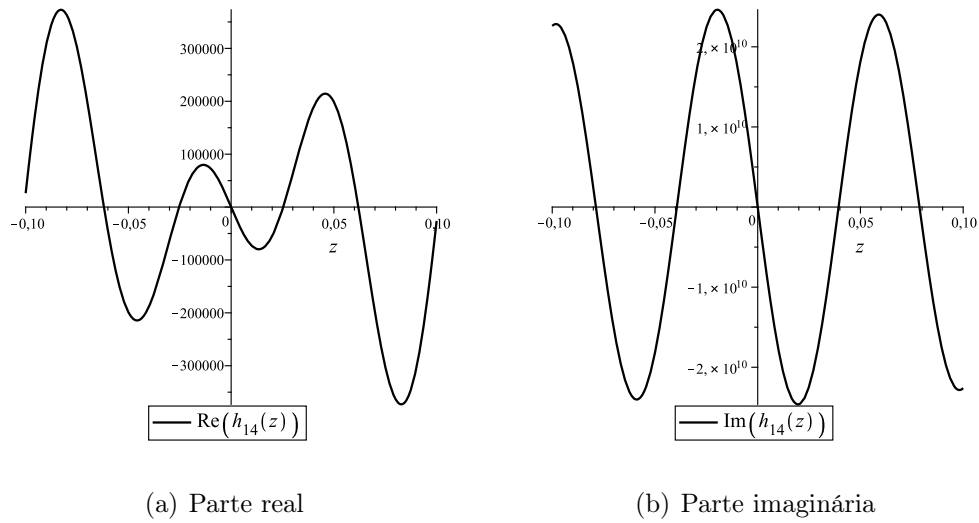


Figura 5.7: Gráficos das partes real e imaginária das função ímpar $\mathbf{h}_{14}(z)$.

A solução modal em (5.30) considerando (5.95) indica que os blocos $\mathbf{h}_{11}(z)$ e $\mathbf{h}_{12}(z)$ compõem o vetor tensão $V(z)$ enquanto $\mathbf{h}_{21}(z)$ e $\mathbf{h}_{22}(z)$ compõem o vetor corrente $I(z)$. Em relação à norma¹ das matrizes blocos, $|\mathbf{h}_{12}|$ tem o valor mais alto, enquanto $|\mathbf{h}_{21}|$ tem o valor mais baixo entre as matrizes blocos.

5.4.2 Exemplo 2: Linha de transmissão sem perdas, matrizes impedância e admitância simétricas e circulares de ordem 4×4

Em [5] é considerado uma linha de transmissão de faixa com simetria cíclica que é usado como um pacote de alta densidade e baixa interferência em interconectores de circuitos integrados de alta velocidade. As matrizes capacitância e indutância são

$$C = \begin{pmatrix} 77,11 & -9,55 & -1,1 & -9,55 \\ -9,55 & 77,11 & -9,55 & -1,1 \\ -1,1 & -9,55 & 77,11 & -9,55 \\ -9,55 & -1,1 & -9,55 & 77,11 \end{pmatrix} \text{ p } \frac{F}{m}, \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 378,6 & 49,77 & 17,73 & 49,77 \\ 49,77 & 378,6 & 49,77 & 17,73 \\ 17,73 & 49,77 & 378,6 & 49,77 \\ 49,77 & 17,73 & 49,77 & 378,6 \end{pmatrix} \text{ n } \frac{H}{m}.$$

¹Matriz \mathbf{M} de ordem $n \times n$ define-se $|\mathbf{M}| = \left(\int_{-z_0}^{z_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathbf{M}_{ij}|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$

Neste caso, usando as propriedades de matrizes circulantes tem-se $\gamma_k = \sqrt{\lambda_k}$, para $i = 1, 2, 3, 4$, sendo λ_k dado em (5.63). Em particular, como $\mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_{14}$ e $\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{14}$ as raízes $\lambda_2 = \lambda_4$, além disso as raízes λ_i , $i = 1, 2, 3$, estão bastante próximas. Para este exemplo, γ_i são puramente imaginárias assim as funções $\frac{\sinh(\gamma_i z)}{\gamma_i}$ presentes na matriz diagonal $\frac{\sinh\sqrt{\Lambda_{ZY}}}{\sqrt{\Lambda_{ZY}}}$ em (5.72) são convertidas em senos.

A função escalar geradora de onda modal $d(z)$ é real, dada por (A.5) e plotada na Figura 5.8. A sua decomposição em $d_-(x)$ e $d_+(x)$ de acordo com (5.84) é apresentada na Figura 5.9, onde estão graficadas as partes real e imaginária, observa-se que $Re(d_+(z)) = Re(d_-(z))$ e $Im(d_+(z)) = -Im(d_-(z))$.

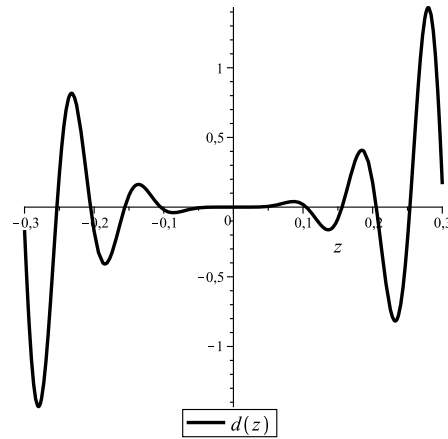


Figura 5.8: Gráfico da função escalar geradora de onda modal $d(z)$.

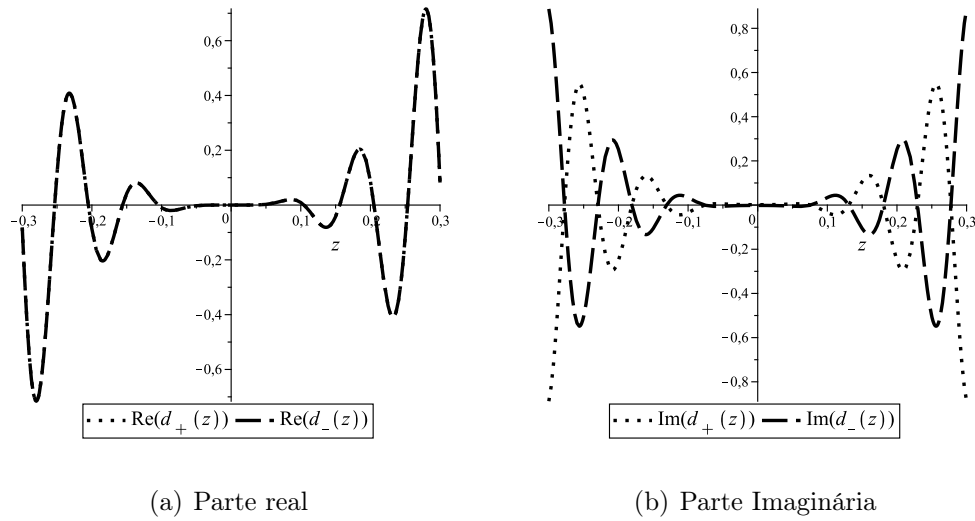


Figura 5.9: Gráficos das partes real e imaginária de $d_+(z)$ e $d_-(z)$.

O termo para frente $e^{j\omega t}d_+(z)$ por (A.5) e (5.84) é dado por

$$e^{j\omega t}d_+(z) = u_1^+(t, z) + u_2^+(t, z) + u_3^+(t, z),$$

onde $u_2^+(t, z) = (\phi_{21}z + \phi_{22})e^{-j(\beta_2 z - \omega t)}$, $u_{1,3}^+(t, z) = \frac{1}{P'(-\gamma_{1,3})}e^{-j(\beta_{1,3}z - \omega t)}$. Na Figura 5.10 são apresentadas as partes real de $\phi_{22}e^{-j(\beta_2 z - \omega t)}$ representada somente pela função harmônica e $\phi_{21}ze^{-j(\beta_2 z - \omega t)}$ onde é possível observar o fator linear modificando a amplitude da função harmônica, mas em ambas a característica de propagação para frente é observada. Análise similar pode ser realizada para $e^{j\omega t}d_-(z) = u_1^-(t, z) + u_2^-(t, z) + u_3^-(t, z)$.

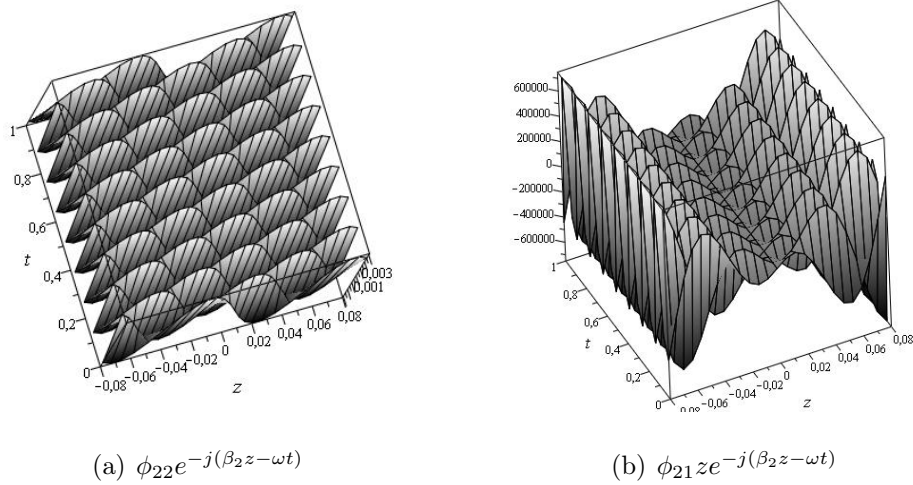


Figura 5.10: Parte real de $\phi_{22}e^{-j(\beta_2 z - \omega t)}$ e $\phi_{21}ze^{-j(\beta_2 z - \omega t)}$.

As componentes de $h(z)$ em (5.72) são combinação de funções seno com frequências γ_i , $i = 1, 2, 3$, as componentes $h_{11}(z)$ e $h_{12}(z)$ são apresentadas na Figura 5.11 e 5.12, para linha de transmissão longa é possível observar a superposição de senos.

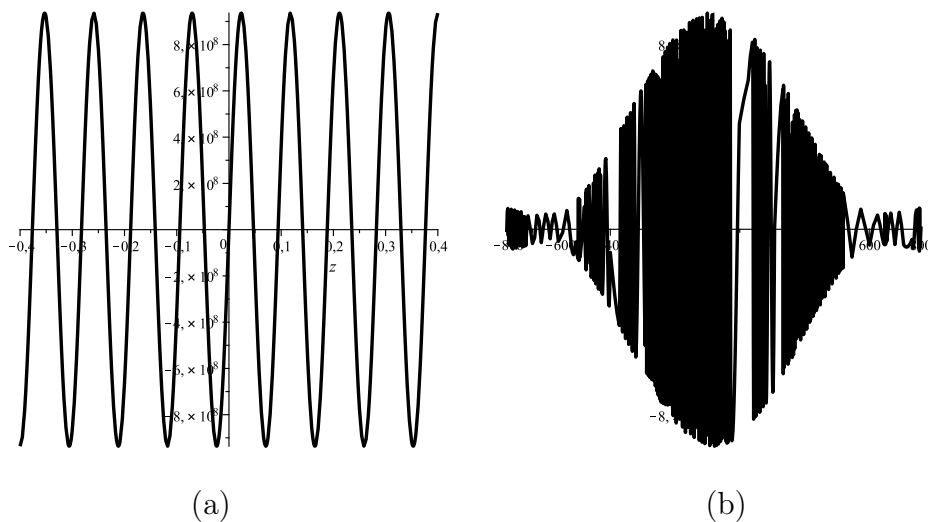


Figura 5.11: Gráficos do elemento $h_{11}(z)$ para diferentes intervalos de z : (a) $-0,4 < z < 0,4$, (b) $-800 < z < 800$.

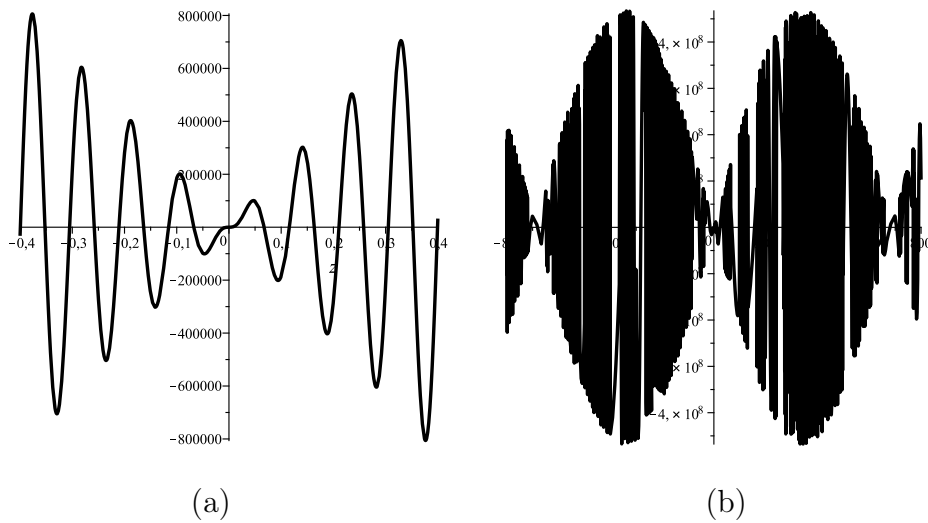


Figura 5.12: Gráficos do elemento $h_{12}(z)$ para diferentes intervalos de z : (a) $-0,4 < z < 0,4$, (b) $-800 < z < 800$.

5.4.3 Exemplo 3: Linha de transmissão com perdas, matrizes impedância e admitância simétricas circulantes de ordem 6×6

Linhas de transmissão cujas componentes de impedância e admitância mútua são as mesmas, bem como os termos de auto impedância e admitância, tem sido consideradas na análise de linhas de transmissão com multicondutores com cabos de potência com três núcleos com tela metálica de aterramento comum [124] e com redes equivalentes em sistemas de transmissão de alta fase [29, 90]. Aqui são consideradas linhas de transmissão com matrizes de impedância e admitância de ordem 6×6

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} Z_s & Z_m & Z_m & Z_m & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_s & Z_m & Z_m & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_s & Z_m & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_m & Z_s & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_m & Z_m & Z_s & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_m & Z_m & Z_m & Z_s \end{pmatrix}$$

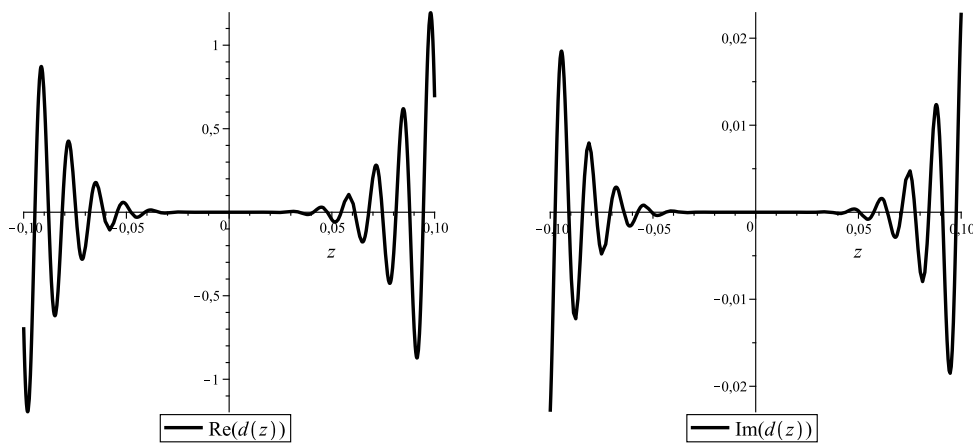
e

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y_s & Y_m & Y_m & Y_m & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_s & Y_m & Y_m & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_s & Y_m & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_m & Y_s & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_m & Y_m & Y_s & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_m & Y_m & Y_m & Y_s \end{pmatrix},$$

sendo $Z_s = 3,5 + j10^{-6}\omega$, $Z_m = 0,35 + j0,11 \times 10^{-6}\omega$ e $Y_s = 10 \times 10^{-3} + j1,5 \times 10^{-9}\omega$, $Y_m = -10^{-3} - j0,07 \times 10^{-9}\omega$.

As simulações abaixo foram obtidas para $f = 2$ GHz.

Neste caso, utilizando as propriedades de matrizes circulares tem-se $\gamma_k = \sqrt{\lambda_k}$, para $i = 1, 2, 3, 4$, sendo λ_k dado em (5.63). Como garantido anteriormente, neste caso, existem duas raízes quádruplas, a função escalar geradora $d(z)$ tem parte real e imaginária graficadas na Figura 5.13 e é composta pela combinação das funções z^4 , z^3 , z^2 , z e 1 multiplicando funções exponenciais.



(a) Parte real

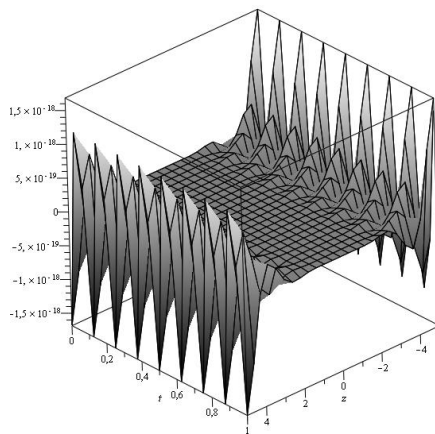
(b) Parte Imaginária

Figura 5.13: Gráficos de $Re(d(z))$ e $Im(d(z))$.

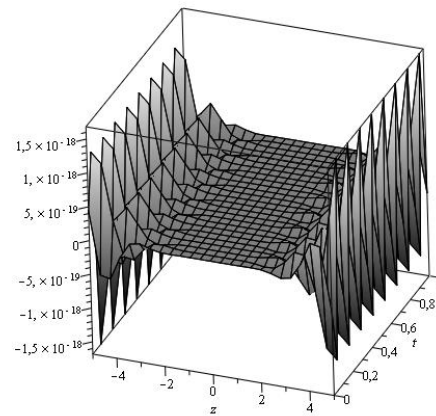
A função $e^{j\omega t}d(z)$ tem partes real e imaginária na Figura 5.14. Para a decomposição em (5.84) tem-se

$$e^{j\omega t}d_+(z) = u_1^+(t, z) + u_2^+(t, z)$$

onde $u_2^+(t, z) = \sum_{k=1}^5 \phi_{2k} z^{5-k} e^{-\alpha_2 z} e^{-j(\beta_2 z - \omega t)}$, $u_1^+(t, z) = \frac{1}{P'(-\gamma_1)} e^{-\alpha_1 z} e^{-j(\beta_1 z - \omega t)}$, sendo ϕ_{2k} determinada apropriadamente de (A.5). Decomposição análoga pode ser realizada com $e^{j\omega t}d_-(z) = u_1^-(t, z) + u_2^-(t, z)$. As partes real e imaginária da solução $e^{j\omega t}d_+(z)$ e $e^{j\omega t}d_-(z)$ são dadas na Figura 5.15 e Figura 5.16, onde é possível observar a oscilação da amplitude e atenuação na direção positiva de z para $e^{j\omega t}d_+(z)$ e negativa z para $e^{j\omega t}d_-(z)$.

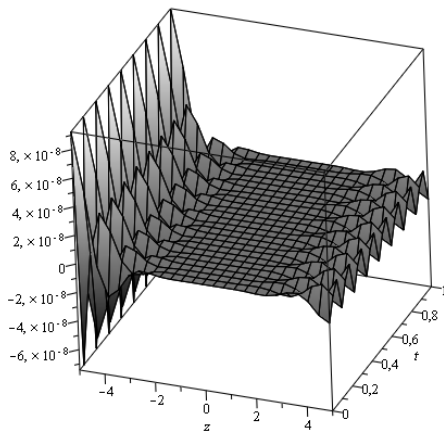
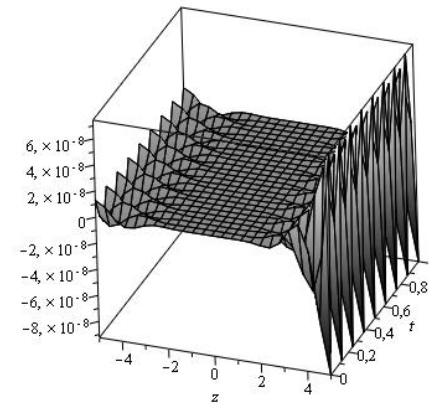
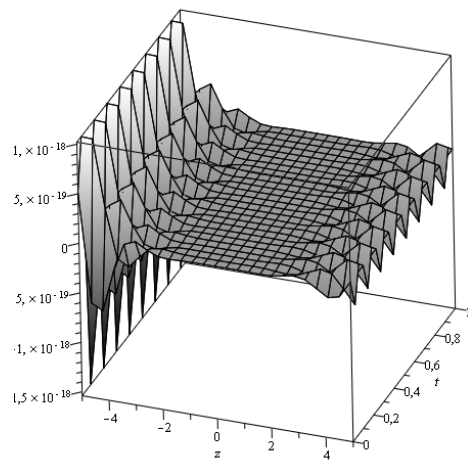
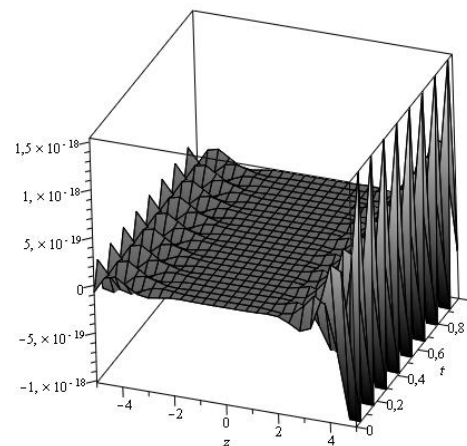


(a) Parte real



(b) Parte Imaginária

Figura 5.14: Gráficos de $Re(e^{j\omega t}d(z))$ e $Im(e^{j\omega t}d(z))$.

(a) $Re(e^{j\omega t} d_+(z))$ (b) $Re(e^{j\omega t} d_-(z))$ Figura 5.15: Gráficos de $Re(e^{j\omega t} d_+(z))$ e $Re(e^{j\omega t} d_-(z))$.(a) $Im(e^{j\omega t} d_+(z))$ (b) $Im(e^{j\omega t} d_-(z))$ Figura 5.16: Gráficos de $Im(e^{j\omega t} d_+(z))$ e $Im(e^{j\omega t} d_-(z))$.

Na Figura 5.17 são apresentados os gráficos das funções $\frac{\sinh(\gamma_i z)}{\gamma_i}$ presentes na matriz diagonal $\frac{\sinh\sqrt{\Lambda_{ZY}}}{\sqrt{\Lambda_{ZY}}}$ em (5.72).

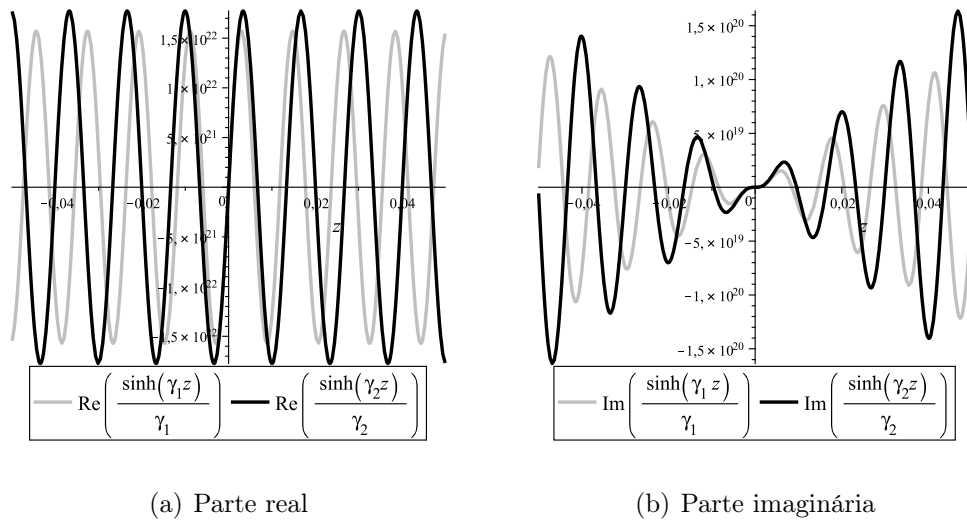


Figura 5.17: Gráficos dos elementos diagonais de $\frac{\sinh\sqrt{\Lambda_{ZY}}}{\sqrt{\Lambda_{ZY}}}$.

Simulações numéricas indicam que para linhas de transmissão simétricas e cíclicas $N \times N$ a amplitude e a fase das raízes não repetidas γ_1 oscilam em valor até $N = 12$. Depois disso, a amplitude aumenta indefinidamente enquanto a fase se torna negativa e se estabiliza à medida que N cresce.

6 O MODELO DE TIMOSHENKO: FORMULAÇÕES E ONDAS HARMÔNICAS

O modelo de Timoshenko governando vibrações transversais de pequena amplitude de uma viga uniforme com seção transversal constante, obtido pelo equilíbrio de forças e momentos ou abordagem hamiltoniana [48], [7], é dado pelo sistema de equações diferenciais acopladas

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = f(t, x), \quad (6.1)$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(t, x) - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = g(t, x), \quad (6.2)$$

no qual A , E , G , I , κ , ρ , $u(t, x)$ e $\psi(t, x)$ são a área da seção transversal da viga, o módulo de elasticidade, módulo de cisalhamento, momento de inércia da seção transversal, coeficiente de cisalhamento seccional, densidade do material da viga, deflexão da viga e giro da viga devido flexão, respectivamente. Os termos forçantes $f(t, x)$ and $g(t, x)$ são forças externas distribuídas relativas ao carregamento e ao momento, respectivamente.

6.1 Formulações do modelo de Timoshenko

Diferentes formulações do modelo de Timoshenko são apresentadas nesta seção.

6.1.1 Formulação evolutiva

O sistema (6.1)-(6.2) na formulação dinâmica

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{R} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}(t, x), \quad (6.3)$$

sendo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t, x) = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}.$$
(6.4)

Também pode ser escrito na forma newtoniana como uma equação evolutiva de segunda ordem numa forma que se assemelha a um sistema conservativo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}(t, x) \quad (6.5)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & -EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{pmatrix}.$$

A parte principal de (6.3), que desconsidera derivadas de ordem menor e forçante, é dada por

$$\begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{v} = 0, \quad (6.7)$$

que é um sistema desacoplado

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \frac{\kappa G}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(t, x) - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x) = 0 \quad (6.9)$$

que corresponde a equações da onda com velocidades $c_S = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}}$ e $c_R = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

6.1.2 Formulação desacoplada

A formulação original em termos de duas equações de segunda ordem, é mais adequado para a imposição do significado físico das condições de contorno e compatibilidade. No entanto, também é possível expressar as equações do movimento de Timoshenko para vigas uniformes na forma desacoplada como uma única equação diferencial de quarta ordem ou transformada em um sistema de primeira ordem

O desacoplamento das equações de Timoshenko com coeficientes constantes pode ser obtido quando escreve-se na forma algébrica ou estática envolvendo as matrizes lambda [46]. Segue

$$\mathbf{L}\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}(t, x) \quad (6.10)$$

com o operador diferencial matricial

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Aplicando a regra de Cramer $\det(\mathbf{L})\mathbf{Iv}(t, x) = \text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{Lv}(t, x) = \text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{F}(t, x)$ onde $\text{adj}(\mathbf{L})$ é a matriz adjugada de \mathbf{L} e $\det(\mathbf{L})$ o determinante de \mathbf{L} [83], obtém-se o sistema desacoplado

$$\begin{aligned} ce \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} + \left(ca - (cb + ae) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + ab \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} &= F_1, \\ ce \frac{\partial^4 \psi(t, x)}{\partial t^4} + \left(ca - (cb + ae) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} + ab \frac{\partial^4 \psi(t, x)}{\partial x^4} &= F_2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

com

$$F_1 = e \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a \frac{\partial g}{\partial x} + af, \quad F_2 = a \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \quad (6.13)$$

e

$$a = \kappa GA, \quad b = EI, \quad c = \rho A, \quad e = \rho I. \quad (6.14)$$

Para uma viga homogênea livre, tem-se $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$ e o sistema desacoplado leva ao estudo da mesma equação diferencial de quarta ordem para a deflexão e giro, isto é,

$$ce \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \left(ca - (cb + ae) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + ab \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (6.15)$$

Aqui w representa a deflexão $u(t, x)$ ou o giro $\psi(t, x)$. Este estudo é geralmente feito com vigas de comprimento infinito. Para vigas de comprimento finito, onde as condições de contorno são impostas ou vigas segmentadas, existe um acoplamento implícito entre deflexão e giro [58] a menos que as condições sejam separadas como é o caso da viga simplesmente apoiada [48].

A parte principal de (6.15), que desconsidera derivadas de ordem menor e forçante, é dada por

$$ce \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - (cb + ae) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + ab \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (6.16)$$

6.1.3 Formulação de Estado

As equações do movimento do modelo de Timoshenko também podem ser expressas como um sistema de primeira ordem em termos do vetor de quatro dimensões $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} M & Q & U & \Psi \end{pmatrix}^T$ envolvendo o momento $M = EI\psi_x$, o cisalhamento $Q = \kappa AG(\psi - u_x)$, a velocidade linear $U = u_t$ e a velocidade angular $\Psi = \psi_t$ [114, 42, 12, 33]. Segue o sistema

$$C \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + D \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + E \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (6.17)$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -EI \\ 0 & 0 & \kappa GA & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa GA \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

e $\mathbf{F} = (0 \ 0 \ f(t, x) \ g(t, x))^T$. A parte principal do sistema (6.17)

$$C \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + D \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

pode ser desacoplada com a transformação

$$\mathbf{V} = R\mathbf{W} = W_1\mathbf{r}_1 + W_2\mathbf{r}_2 + W_3\mathbf{r}_3 + W_4\mathbf{r}_4 \quad (6.20)$$

onde

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{\rho\kappa GA} & -\sqrt{\rho\kappa GA} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I\sqrt{\rho E}} & \frac{1}{I\sqrt{\rho E}} \end{pmatrix},$$

resultando o sistema de primeira ordem

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (6.21)$$

onde Λ é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{E}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{pmatrix}.$$

Cada equação $W_j' + \lambda_j \dot{W}_j = 0$ possui solução da forma $W_j(t, x) = \phi_j(s_j)$, com $s_j = x + c_j t$, onde $c_1 = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}}$, $c_2 = -\sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}}$, $c_3 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ e $c_4 = -\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Assim, a solução de (6.19) por (6.20) é a superposição das soluções desacopladas W_j que se propagam nas direções

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ A\sqrt{\kappa G \rho} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -A\sqrt{\kappa G \rho} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{I\sqrt{\rho E}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I\sqrt{\rho E}} \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

que são as colunas da matriz R .

Observa-se que quando o produto EI torna-se muito grande comparado com a quantidade κGA em (6.2), no limite uma equação de viga não forçada torna-se uma equação da onda $\rho\psi_{tt} - E\psi_{xx} = 0$ com velocidade $c_R = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Quando EI é muito grande, quando comparado com ambas as quantidades κGA e ρI , o limite da equação da onda não forçada $\rho Au_{tt} - \kappa GA u_{xx} = 0$ tem a velocidade de propagação associada $c_S = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}}$, [16].

Outra escolha do vetor \mathbf{V} leva a outro sistema de primeira ordem. Em [64, 107, 110, 127] é considerado $\mathbf{V} = \left(u(t, x) \quad u_t(t, x) \quad \psi(t, x) \quad \psi_t(t, x) \right)^T$ enquanto para a equação desacoplada (6.15), é considerada

$$\mathbf{V} = \left(w(t, x) \quad w_t(t, x) \quad w_{tt}(t, x) \quad w_{ttt}(t, x) \right)^T.$$

Observe que taxas espaciais ao invés de taxas no tempo têm sido consideradas em [42, 86] para o vetor \mathbf{V} .

Observação: Uma comparação dos modelos de Euler-Bernoulli (EBT) e Timoshenko (TBT) com relação à inércia rotacional e à deformação por cisalhamento é usualmente realizada na literatura com a equação desacoplada de quarta ordem [24]. Em [77], considera-se o modelo de Timoshenko adimensionalizado, e então

derivando uma das equações e combinando com a outra obtém-se a equação do modelo de Euler-Bernoulli tomando limites adequados.

6.2 Condições de contorno

No caso de uma viga finita, condições de contorno são impostas nos extremos da viga. As condições de contorno clássicas que devem ser combinadas nos dois extremos são:

- Extremidade Fixa:

$$u = 0, \quad \psi = 0.$$

- Extremidade Apoiada:

$$u = 0, \quad EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

- Extremidade Livre:

$$EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) = 0.$$

- Extremidade deslizante:

$$\psi = 0, \quad \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) = 0.$$

Um exemplo de condição de contorno não clássica é apresentado na Figura 6.1, sendo dado por uma viga fixa na extremidade $x = 0$, e a extremidade $x = L$ atarrachada a um sistema formado por uma bloco de massa m e lado de dimensão b , uma mola de rigidez k e um amortecedor com coeficiente de amortecimento c . Neste caso, as condições de contorno em $x = 0$ são $u(t, 0) = 0$ e $\psi(t, 0) = 0$ e em $x = L$ são dadas por [117]

$$\begin{aligned} \left[\kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) + k \left(u + \frac{b}{2} \psi \right) + c \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{b}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \right] (t, L) &= 0, \\ \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} - \kappa GA \frac{b}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) + \frac{1}{6} m b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] (t, L) &= 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

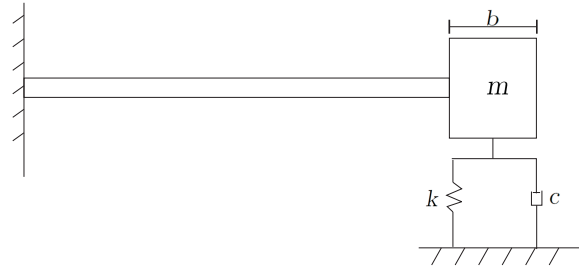


Figura 6.1: Viga com condição de contorno não clássica. Figura adaptada de [117].

Observa-se que dependendo da configuração do contorno, as equações que representam essas condições podem envolver derivadas em relação ao espaço e ao tempo. De forma mais geral, as condições de contorno acima podem ser escritas matricialmente na forma

$$\mathbb{A}_{11}\mathbf{v}(t, 0) + \mathbb{B}_{11}\mathbf{v}_t(t, 0) + \mathbb{D}_{11}\mathbf{v}_{tt}(t, 0) + \mathbb{J}_{11}\mathbf{v}_x(t, 0) = \mathbf{0}, \quad (6.24)$$

$$\mathbb{A}_{21}\mathbf{v}(t, l) + \mathbb{B}_{21}\mathbf{v}_t(t, l) + \mathbb{D}_{21}\mathbf{v}_{tt}(t, l) + \mathbb{J}_{21}\mathbf{v}_x(t, l) = \mathbf{0},$$

associadas a equação dada matricialmente em (6.3). Em particular, para (6.24) descrever as condições de contorno em (6.23) resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{11} = \mathbb{D}_{11} = \mathbb{J}_{11} = \mathbf{0}, \\ \mathbb{A}_{21} &= \begin{pmatrix} k & -\kappa GA + \frac{kb}{2} \\ 0 & \kappa GA \frac{b}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{21} = \begin{pmatrix} c & \frac{cb}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}_{21} = \begin{pmatrix} m & \frac{mb}{2} \\ 0 & \frac{1}{6}mb^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbb{J}_{21} &= \begin{pmatrix} \kappa GA & 0 \\ -\kappa GA \frac{b}{2} & EI \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.3 Propagação de ondas harmônicas

Nesta seção, estuda-se a propagação de ondas harmônicas nos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Assume-se que a viga é infinita e estuda-se a sua propagação espaço temporal.

6.3.1 Modelo Euler-Bernoulli

A equação para vibração transversal de uma viga segundo a Teoria de Euler-Bernoulli (EBT), por [51] é dada por

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \right) = f(t, x), \quad (6.25)$$

sendo E módulo de Young, I momento de inércia da área da seção transversal, ρ densidade de massa e A área da seção transversal da viga.

Para uma análise das vibrações livres de uma viga de Euler Bernoulli, considera-se EI e ρA constantes ao longo da viga e $f(t, x) = 0$, resultando

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, x) = 0, \quad (6.26)$$

Seguindo [51], as condições para a propagação de ondas harmônicas são estabelecidas assumindo de acordo com a equação (2.15)

$$u(t, x) = C e^{i(\beta x - \omega t)}. \quad (6.27)$$

Substituindo (6.27) em (6.26) segue a relação entre número de onda e frequência

$$\beta^4 - \frac{\rho A}{EI} \omega^2 = 0, \quad (6.28)$$

sendo

$$\beta = \pm \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} \omega^2}, \quad \pm i \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} \omega^2}. \quad (6.29)$$

Utilizando a relação $\omega = \beta c$, em (6.28) obtém-se a equação de dispersão

$$\beta^4 - \frac{\rho A}{EI} \beta^2 c^2 = 0, \quad (6.30)$$

de onde segue

$$c = \pm \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \beta. \quad (6.31)$$

Em (6.29) e (6.31) as raízes foram obtidas matematicamente. No entanto, estas devem ser analisadas quanto ao seu significado físico. Seja ω real e (6.27) escrita da forma

$$u(t, x) = C e^{\beta i(x - \frac{\omega}{\beta} t)} = C e^{\beta i(x - Ct)}, \quad (6.32)$$

observa-se que os valores positivos e negativos de β , em (6.29), dão origem a ondas harmônicas se propagando para esquerda e para a direita, enquanto os valores de número de onda imaginários dão origem a ondas evanescentes.

Da equação (6.31) segue que ondas com número de onda β diferentes se propagam com velocidades distintas, Figura 6.2, o que caracteriza que a superposição de ondas harmônicas no modelo de Euler-Bernoulli sofrerá distorção, caracterizando o fenômeno de dispersão.

Observa-se em (6.31) que para número de onda β muito grande, ou equivalentemente, comprimentos de onda $l = \frac{2\pi}{\beta}$ muito pequenos, a velocidade de fase c tende ao infinito. Fung [45] aponta este comportamento da velocidade como fisicamente irracional. E Graff [51] atribui este comportamento as restrições de inércia rotatória e efeitos de cisalhamento negligenciados no modelo EBT.

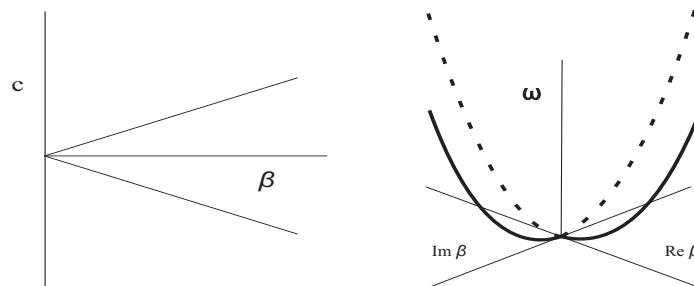


Figura 6.2: Velocidade em termos do número de onda - Espectro de frequência. Figura adaptada de [51].

6.3.2 Modelo de Timoshenko

Novamente, seguindo [51], analogamente ao modelo de Euler-Bernoulli, para o modelo de Timoshenko supõe-se soluções

$$u(t, x) = B_1 e^{i(\beta x - \omega t)} \quad \text{e} \quad \psi(t, x) = B_2 e^{i(\beta x - \omega t)}, \quad (6.33)$$

que substituindo em (6.1) e (6.2), com $f(t, x) = 0$ e $g(t, x) = 0$, leva ao seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \rho A + \beta^2 \kappa GA) B_1 + i\beta \kappa GA B_2 &= 0 \\ i\beta \kappa GA B_1 - (-\omega^2 \rho I + \beta^2 EI + \kappa GA) B_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

matricialmente escrito como

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \rho A + \beta^2 \kappa GA & i\beta \kappa GA \\ i\beta \kappa GA & -(-\omega^2 \rho I + \beta^2 EI + \kappa GA) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

assim para garantir uma solução não nula tem-se

$$(-\omega^2 \rho A + \kappa GA \beta^2) (-\omega^2 \rho I + \beta^2 EI + \kappa GA) - \beta^2 (\kappa GA)^2 = 0. \quad (6.36)$$

Expandindo (6.36) segue a equação de frequência

$$\frac{\rho I}{\kappa GA} \omega^4 - \left(\frac{EI}{\kappa GA} + \frac{I}{A} \right) \beta^2 \omega^2 - \omega^2 + \frac{EI}{\rho A} \beta^4 = 0. \quad (6.37)$$

Substituindo $\omega = \beta c$ em (6.37) segue a equação de dispersão

$$\frac{\rho I}{\kappa GA} \beta^4 c^4 - \left(\frac{EI}{\kappa GA} + \frac{I}{A} \right) \beta^4 c^2 - \beta^2 c^2 + \frac{EI}{\rho A} \beta^4 = 0, \quad (6.38)$$

ou ainda para $\beta \neq 0$

$$\beta^4 \left(\frac{\rho I}{\kappa GA} c^4 - \left(\frac{EI}{\kappa GA} + \frac{I}{A} \right) c^2 - \frac{c^2}{\beta^2} + \frac{EI}{\rho A} \right) = 0. \quad (6.39)$$

Analisando o comportamento da equação de frequência para o caso $\beta \rightarrow \infty$ segue

$$\frac{\rho I}{\kappa GA} c^4 - \left(\frac{EI}{\kappa GA} + \frac{I}{A} \right) c^2 + \frac{EI}{\rho A} = 0, \quad (6.40)$$

cujas raízes são

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad \text{e} \quad c^2 = \frac{\kappa G}{\rho}. \quad (6.41)$$

Tem-se então que a velocidade de fase da onda é limitada para o número de onda tendendo ao infinito, ou equivalentemente, para comprimento de onda tendendo a zero, comportamento não observado na teoria de Euler-Bernoulli, pois a velocidade (6.31) varia linearmente de acordo com o número de onda β .

As raízes de (6.37) são

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G}\right) \omega^2 + \sqrt{\Theta}}, \\ \beta_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G}\right) \omega^2 + \sqrt{\Theta}}, \\ \beta_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G}\right) \omega^2 - \sqrt{\Theta}}, \\ \beta_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G}\right) \omega^2 - \sqrt{\Theta}}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

onde

$$\Theta = \left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G}\right)^2 \omega^4 - 4 \frac{\rho^2}{\kappa G E} \omega^4 + 4 \frac{\rho A}{E I} \omega^2. \quad (6.43)$$

É essencial observar que a partir da desigualdade

$$\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G}\right)^2 \omega^4 > 4 \frac{\rho^2}{\kappa G E} \omega^4, \quad (6.44)$$

segue que para $\omega \neq 0$ real

$$\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G}\right)^2 \omega^4 + 4 \frac{\rho A}{E I} \omega^2 > 4 \frac{\rho^2}{\kappa G E} \omega^4, \quad (6.45)$$

resultando que

$$\Theta > 0. \quad (6.46)$$

No modelo de Euler-Bernoulli, foram desconsideradas os números de onda imaginários por não darem origem a ondas harmônicas progressivas. A mesma situação ocorre no modelo de Timoshenko, deve-se identificar β a fim de que caracterize a propagação de ondas. A natureza das raízes β_i , $i = 1, 2, 3, 4$, será discutida num contexto mais geral na seção 7.2.1.

Supondo $\beta \neq 0$ real, para $\omega^2 > \omega_c^2$, a velocidade c é dada por

$$c^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{E}{\rho} + \frac{\kappa G}{\rho} + \frac{\kappa G A}{\rho I} \frac{1}{\beta^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{E}{\rho} + \frac{\kappa G}{\rho} + \frac{\kappa G A}{\rho I} \frac{1}{\beta^2} \right)^2 - 4 \frac{\kappa G E}{\rho^2}} \right], \quad (6.47)$$

de onde observa-se que a velocidade não é constante, ou seja, depende do número de onda, caracterizando o fenômeno de dispersão.

6.3.3 Resposta de Green de valor inicial para equação de Euler-Bernoulli

A solução do problema de valor inicial com coeficientes constantes

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, x) &= f(t, x), \\ u(0, x) &= \phi_1(x), \quad u_t(0, x) = \phi_2(x), \end{aligned} \quad (6.48)$$

pode ser expressa em termos da função de Green de valor inicial $h(t, x)$ e dos dados iniciais e externos [47], como

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t, x - \eta) \phi_1(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t, x - \eta) \phi_2(\eta) d\eta \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau, x - \eta) f(\tau, \eta) d\eta d\tau, \end{aligned} \quad (6.49)$$

onde

$$h_0(t, x) = \rho A h_t(t, x), \quad h_1(t, x) = \rho A h(t, x). \quad (6.50)$$

Sendo $h(t, x)$ ¹ solução do problema de valor inicial

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(t, x) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} h(t, x) = 0, \quad (6.51)$$

$$h(0, x) = 0, \quad \rho A h_t(0, x) = \delta(x), \quad (6.52)$$

cujas soluções são obtidas, utilizando as transformadas de Fourier e Laplace, como segue.

Aplicando a transformada de Laplace a equação (6.51), obtém-se

$$\rho A s^2 H(s, x) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} H(s, x) = \delta(x), \quad (6.53)$$

¹Para coeficientes constantes $h(t, x, \xi) = h(t, x - \xi)$.

na sequência aplicando a transformada de Fourier, resulta

$$\rho A s^2 \hat{H}(s, \xi) + EI \xi^4 \hat{H}(s, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (6.54)$$

reescrevendo

$$\hat{H}(s, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\rho A (s^2 + k^2 \xi^4)}, \quad (6.55)$$

onde $k^2 = \frac{EI}{\rho A}$.

Agora, da transformada inversa de Laplace em (6.55), obtém-se

$$\hat{h}(t, \xi) = \frac{1}{\rho A \sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(kt\xi^2)}{k\xi^2}, \quad (6.56)$$

integrando ambos os lados da igualdade

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t, \xi) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho A \sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(kt\xi^2)}{k\xi^2} e^{-i\xi x} d\xi, \quad (6.57)$$

considerando a definição de transformada inversa de Fourier, segue

$$h(t, x) = \frac{1}{2\pi k \rho A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(kt\xi^2)}{\xi^2} e^{-i\xi x} d\xi. \quad (6.58)$$

Considerando a paridade da função $\frac{\text{sen}(kt\xi^2)}{\xi^2}$, a solução (6.58) pode ser reescrita como

$$h(t, x) = \frac{1}{\pi k \rho A} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(kt\xi^2)}{\xi^2} \cos(\xi x) d\xi, \quad (6.59)$$

ou ainda²

$$h(t, x) = \frac{1}{2k\rho A} x \left(S\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi kt}}\right) - C\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi kt}}\right) \right) + \frac{1}{\rho A} \sqrt{\frac{t}{\pi k}} \text{sen}\left(\frac{x^2}{4kt} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (6.60)$$

onde $S(z)$ e $C(z)$ são chamadas Integrais de Fresnel³

$$S(z) = \int_0^z \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt. \quad (6.61)$$

A função $h_0(t, x)$, definida em (6.50), pode ser obtida derivando (6.59) em relação a t ,

$$h_t(t, x) = \frac{1}{\rho A \pi} \int_0^{\infty} \cos(kt\xi^2) \cos(\xi x) d\xi, \quad (6.62)$$

²Utilizando tabela da página 23, referência [38]

³Apêndice B

que resulta ⁴

$$h_t(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi kt\rho A}} \left(\cos\left(\frac{x^2}{4kt}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{4kt}\right) \right). \quad (6.63)$$

Na referência [51], são apresentados três problemas de valor inicial a fim de ilustrar observações importantes acerca do modelo de Euler-Bernoulli. Estes problemas são apresentados a seguir:

1. A solução do problema de valor inicial

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, x) = 0, \quad (6.64)$$

$$u(x, 0) = f_0 e^{-\frac{x^2}{4b^2}}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (6.65)$$

é dada por

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t, x - \eta) f_0 e^{-\frac{\eta^2}{4b^2}} d\eta, \quad (6.66)$$

onde

$$h_0(t, x) = \rho A h_t(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi kt}} \left(\cos\left(\frac{x^2}{4kt}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{4kt}\right) \right). \quad (6.67)$$

Para propósitos teóricos, a fórmula dada por (6.49) sintetiza a solução do problema de valor inicial. No entanto, o cálculo de (6.49) pode tornar-se complicado, sendo necessário buscar outras alternativas de cálculo. Às vezes, pode ser mais conveniente calcular diretamente as inversas das transformadas de Laplace e Fourier com relação ao dado inicial específico. Seguindo esta idéia, obtém-se [51]

$$u(t, x) = \frac{f_0}{\left(1 + \frac{k^2 t^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2 b^2}{4(b^4 + k^2 t^2)}} \cos\left(\frac{ktx^2}{4(b^4 + k^2 t^2)} - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{kt}{b^2}\right)\right). \quad (6.68)$$

A forma da solução (6.68) é representada, por linhas sólidas, para instantes de tempo sucessivos na Figura 6.3. As linhas pontilhadas representam a solução do problema obtido com as condições iniciais (6.65)

⁴Tabela da página 24, referência [38]

para a equação da onda. Neste caso, observa-se que as ondas se movem sem mudar sua forma, pois a velocidade de fase é independente do número de onda [82]. A comparação entre as duas soluções permite perceber a dispersão sofrida pelo pulso ao longo do tempo para o caso de barras. Por esse motivo, a barra às vezes é dita um meio de dispersão para ondas flexurais.

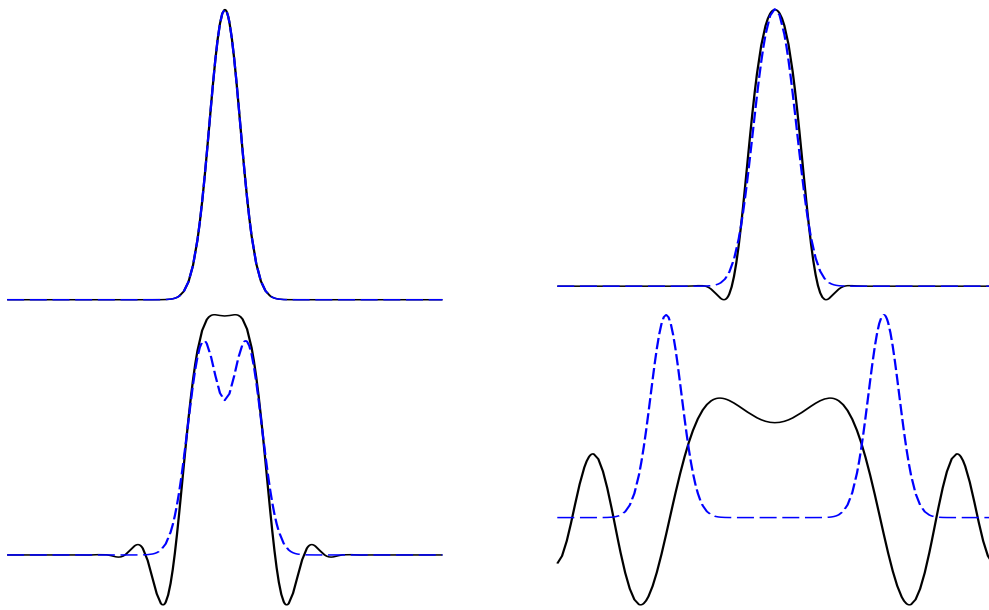


Figura 6.3: Soluções obtidas para barras e cordas com a condição inicial (6.65). Figura adaptada de [51].

2. A solução do problema de valor inicial

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, x) = 0, \quad (6.69)$$

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (6.70)$$

utilizando (6.49) pode ser dada por

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t, x - \eta) \delta(\eta) d\eta, \quad (6.71)$$

com

$$h_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi kt}} \left(\cos\left(\frac{x^2}{4kt}\right) + \text{sen}\left(\frac{x^2}{4kt}\right) \right). \quad (6.72)$$

Resolvendo (6.71), obtém-se

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{4kt} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (6.73)$$

Na Figura 6.4 são apresentados os gráficos obtidos para (6.73), primeiro fixando $x = x_0$ e deixando t variar e depois fazendo $t = t_0$ e x variando.

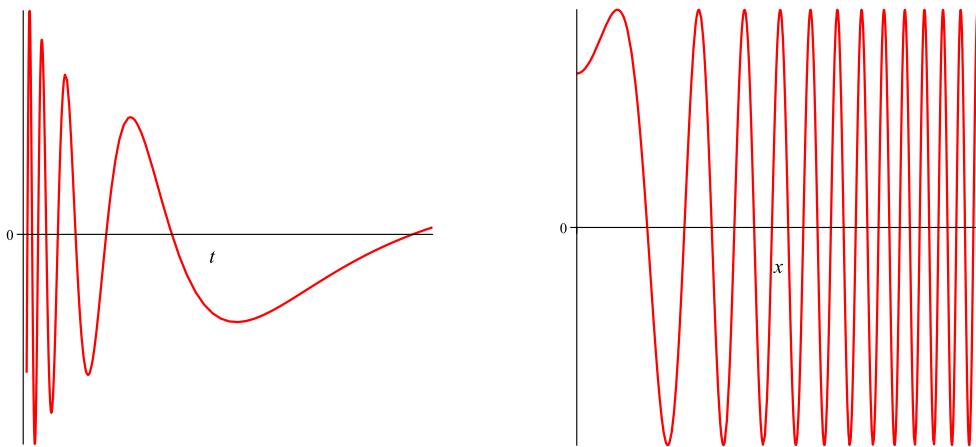


Figura 6.4: Solução do PVI (6.70) para EBT, primeiro fixando $x = x_0$, e depois $t = t_0$. Figura adaptada de [51]

Em [51], dois aspectos são observados neste PVI:

- (a) Componentes de alta frequência aparecem na solução (frente de onda). Na representação $x = x_0$, Fig.(6.4), o aumento da taxa de oscilação para t cada vez menor, indica alta frequência em relação à variável t . Enquanto na representação $t = t_0$, o fato das oscilações tornarem-se mais rápidas quando x aumenta, caracteriza aumento da frequência em relação à variável x , ou seja, aumento do número de onda β . Este comportamento é confirmado pela parte positiva da equação (6.31), onde valores altos para o número de onda estão associados a altas velocidades.

(b) Reescrevendo a solução (6.73) na forma

$$u(x, t) = A(t) \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{4kt} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (6.74)$$

sendo

$$A(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}. \quad (6.75)$$

Observa-se que à medida que t tende a zero, $A(t)$ tende ao infinito, e o termo $\operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{4kt} + \frac{\pi}{4} \right)$ oscila rapidamente Figura 6.5. Assim, para t tornando-se muito pequeno a solução oscila rapidamente com crescimento da amplitude.

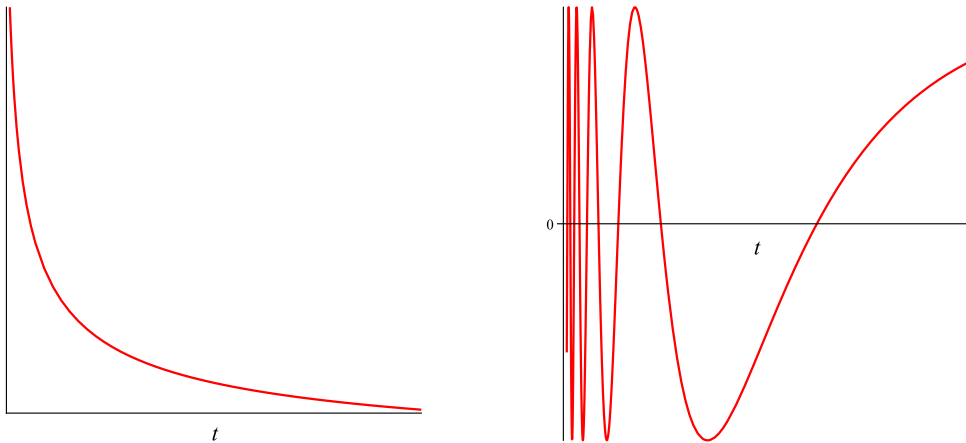


Figura 6.5: Gráficos de $A(t)$ e $\operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{4kt} + \frac{\pi}{4} \right)$ para um $x = x_0$, respectivamente.

Uma característica da solução pode ser observada pela Figura 6.5, para $t = \epsilon \ll 1$, uma perturbação de alta frequência é sentida instantaneamente em localizações remotas, esta é uma manifestação da velocidade de fase infinita.

Observa-se que a solução (6.73) apresenta anomalias, e segundo Graff [51], este comportamento é uma consequência do deslocamento inicial impulsivo ser inaceitável fisicamente.

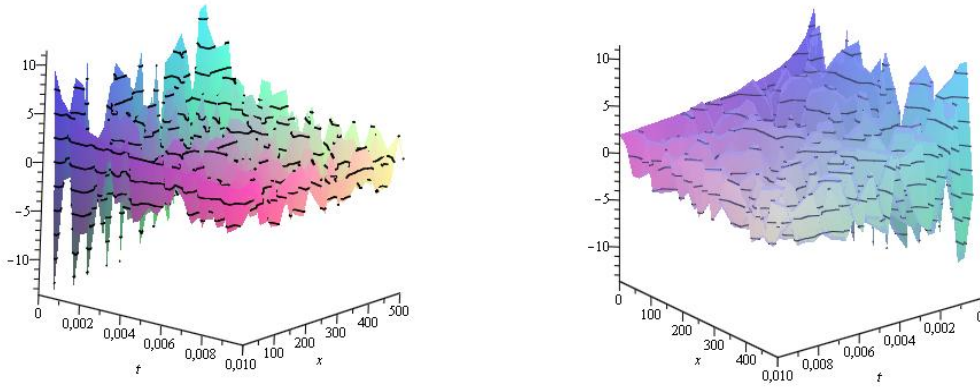


Figura 6.6: Solução (6.73) graficada para um intervalo pequeno de tempo.

3. O problema de valor inicial

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, x) = 0 \quad (6.76)$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = \delta(x), \quad (6.77)$$

tem como solução

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t, x - \eta) \delta(\eta) d\eta, \quad (6.78)$$

sendo

$$h_1(t, x) = \rho A h(t, x) = \frac{1}{2k} x \left(S \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi kt}} \right) - C \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi kt}} \right) \right) + \sqrt{\frac{t}{\pi k}} \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{4kt} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (6.79)$$

Resolvendo (6.78), resulta

$$u(t, x) = \frac{1}{2k} x \left(S \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi kt}} \right) - C \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi kt}} \right) \right) + \sqrt{\frac{t}{\pi k}} \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{4kt} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (6.80)$$

A solução (6.80) é graficada na Figura 6.7, primeiro fixando t pequeno, e na sequência fixando x grande. Observa-se, segundo [51], que o comportamento de alta frequência, observado no problema anterior, permanece

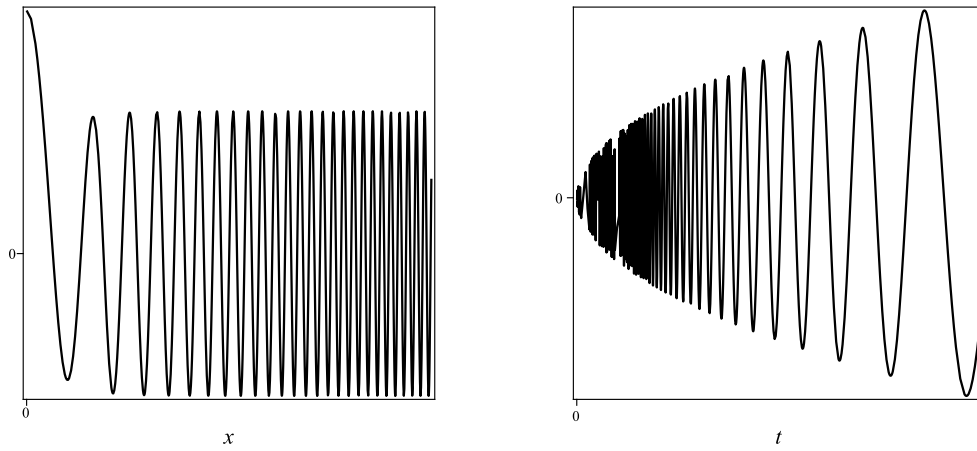


Figura 6.7: Solução (6.80) primeiro fixando $t \ll 1$ e deixando x variar, e depois fixando x grande, com t variando.

presente. No entanto, o coeficiente do termo senoidal permite observar que para t pequeno a amplitude da perturbação de alta frequência será muito pequena.

6.3.4 Resposta de Green de valor inicial para o modelo de Timoshenko

A solução do problema de valor inicial para o modelo de Timoshenko, escrito matricialmente como

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{R} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}(t, x),$$

$$\mathbf{v}(0, x) = \mathbf{\Phi}_1(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(0, x) = \mathbf{\Phi}_2(x),$$

sendo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(x) = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(x) = \begin{bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \end{bmatrix},$$

pode ser dada em termos da função de Green de valor inicial $\mathbf{h}(t, x)$ e dos iniciais e externos, na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) = & \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}_0(t, x - \eta) \Phi_1(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}_1(t, x - \eta) \Phi_2(\eta) d\eta \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t - \tau, x - \eta) \mathbf{F}(\tau, \eta) d\eta d\tau, \end{aligned} \quad (6.81)$$

com

$$\mathbf{h}_0(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}(t, x) \mathbf{M}, \quad \mathbf{h}_1(t, x) = \mathbf{h}(t, x) \mathbf{M}. \quad (6.82)$$

Sendo $\mathbf{h}(t, x)$ uma matriz 2×2 solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{h}(t, x) + \mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{h}(t, x) + \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{h}(t, x) + \mathbf{R} \mathbf{h}(t, x) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(0, x) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}(0, x) = \delta(x) \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Aplicando na sequência as transformadas de Laplace e Fourier à equação (6.83), resulta

$$\Delta(s, \xi) \hat{\mathbf{H}}(s, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{I}, \quad (6.84)$$

sendo

$$\Delta(s, \xi) = s^2 \mathbf{M} - \xi^2 \mathbf{E} - i\xi \mathbf{Q} + \mathbf{R}. \quad (6.85)$$

Multiplicando $\text{adj}(\Delta(s, \xi))$ em ambos os lados de (6.84), obtém-se

$$\hat{\mathbf{H}}(s, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \det(\Delta(s, \xi))} \text{adj}(\Delta(s, \xi)), \quad (6.86)$$

reescrita conveniente como

$$\hat{\mathbf{H}}(s, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\mathcal{M} s^2 \hat{G}(s, \xi) + \mathcal{E} (-\xi^2) \hat{G}(s, \xi) + \mathcal{Q} (-i\xi) \hat{G}(s, \xi) + \mathcal{R} \hat{G}(s, \xi) \right], \quad (6.87)$$

sendo

$$\mathcal{M} = \text{adj}(\mathbf{M}), \quad \mathcal{E} = \text{adj}(\mathbf{E}), \quad \mathcal{Q} = \text{adj}(\mathbf{Q}), \quad \mathcal{R} = \text{adj}(\mathbf{R}), \quad (6.88)$$

e definindo

$$\hat{G}(s, \xi) = \frac{1}{\det(\Delta(s, \xi))}. \quad (6.89)$$

com

$$\det(\Delta(s, \xi)) = ce \left(s^4 + \left[\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \xi^2 + \frac{a}{e} \right] s^2 + \frac{ab}{ce} \xi^4 \right). \quad (6.90)$$

As raízes de $\det(\Delta(s, \xi))$, dadas em função de ξ , são

$$\begin{aligned} s_1 = s_1(\xi) &= i\sqrt{\alpha}, & s_2 = s_2(\xi) &= -s_1, \\ s_3 = s_3(\xi) &= i\sqrt{\beta}, & s_4 = s_4(\xi) &= -s_3, \end{aligned} \quad (6.91)$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \xi^2 + \frac{a}{e} - \sqrt{\left[\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \xi^2 + \frac{a}{e} \right] - 4 \frac{ab}{ce} \xi^4} \right], \\ \beta &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \xi^2 + \frac{a}{e} + \sqrt{\left[\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \xi^2 + \frac{a}{e} \right] - 4 \frac{ab}{ce} \xi^4} \right]. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Supondo que todas as raízes de $\det(\Delta(s, \xi))$ sejam distintas, escreve-se

$$\hat{G}(s, \xi) = \frac{1}{ce((s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4))}, \quad (6.93)$$

cuja transformada de Laplace inversa é

$$\hat{g}(t, \xi) = \sum_{j=1}^4 \frac{e^{s_j t}}{\det(\Delta_s(s_j, \xi))}, \quad (6.94)$$

sendo $\det(\Delta_s(s, \xi)) = \frac{\partial}{\partial s} \det(\Delta(s, \xi))$. A análise de (6.92) permite concluir que as raízes s_j , $j = 1, \dots, 4$, são todas imaginárias puras, e validar as relações

$$\begin{aligned} \det(\Delta_s(s_2, \xi)) &= -\det(\Delta_s(s_1, \xi)), \\ \det(\Delta_s(s_4, \xi)) &= -\det(\Delta_s(s_3, \xi)), \end{aligned} \quad (6.95)$$

que permitem obter

$$\hat{g}(0, \xi) = 0, \quad \hat{g}_t(0, \xi) = 0. \quad (6.96)$$

Enfim a transformada de Laplace inversa de (6.87) é dada por

$$\hat{h}(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\mathcal{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \xi^2 \mathcal{E} - i\xi \mathcal{Q} + \mathcal{R} \right] \hat{g}(t, \xi), \quad (6.97)$$

e através da aplicação sa transformada de Fourier inversa, tem-se

$$h(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\mathcal{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathcal{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x} g(t, x) + \mathcal{R} \right] g(t, x), \quad (6.98)$$

sendo

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{e^{s_j t}}{\det(\Delta_s(s_j, \xi))} e^{-i\xi x} d\xi, \quad (6.99)$$

ou ainda, utilizando (6.95)

$$g(t, x) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\sqrt{\alpha}t)}{\det(\Delta_s(s_1, \xi))} e^{-i\xi x t} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\sqrt{\beta}t)}{\det(\Delta_s(s_3, \xi))} e^{-i\xi x t} d\xi \right]. \quad (6.100)$$

7 ONDAS PLANAS E MODAIS NO MODELO DE TIMOSHENKO

Neste capítulo são caracterizadas as soluções do tipo ondas planas e ondas modais para o modelo de vigas de Timosheko utilizando a base matricial robusta gerada pela resposta matricial fundamental associada. A resposta matricial fundamental, assim como nos capítulos anteriores, é utilizada em sua forma fechada dada em termos de uma função escalar geradora, que em casos classificados como críticos é obtida por processo de Liouville. É estabelecida a relação entre as classes de ondas modais e planas.

As ondas modais são decompostas em uma parte que se propaga para frente e uma parte que se propaga para trás. Esta decomposição é aplicada na determinação de ondas refletidas e transmitidas produzidas pela incidência de uma onda em uma fissura e em condições de contorno.

7.1 Ondas planas no modelo de vigas de Timoshenko

Ondas planas do sistema (6.1)-(6.2) com $f(t, x) = 0$, $g(t, x) = 0$ são soluções do tipo

$$u(t, x) = U(\lambda t + \gamma x), \quad \psi(t, x) = \Psi(\lambda t + \gamma x), \quad (7.1)$$

onde os escalares $\gamma = \mu + i\beta$, $\lambda = \zeta + i\omega$, $c = -\frac{\lambda}{\gamma}$ são relacionados ao número de onda, frequência e velocidade de onda respectivamente. Introduzindo a fase de onda plana

$$s = \lambda t + \gamma x,$$

tem-se que os perfis de onda $u(t, x) = \mathbf{U}(s)$ e $\psi(t, x) = \mathbf{\Psi}(s)$ são soluções do sistema de equações (6.1)-(6.2) sempre que satisfazem o sistema diferencial de segunda ordem

$$\begin{aligned} (\rho A \lambda^2 - \kappa G A \gamma^2) \mathbf{U}''(s) + \kappa G A \gamma \mathbf{\Psi}'(s) &= 0, \\ (\rho I \lambda^2 - E I \gamma^2) \mathbf{\Psi}''(s) - \kappa G A \gamma \mathbf{U}'(s) + \kappa G A \mathbf{\Psi}(s) &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

O sistema em (7.2) pode ser escrito como a equação diferencial de segunda ordem completa

$$\mathbf{M}_P \mathbf{V}''(s) + \mathbf{C}_P \mathbf{V}'(s) + \mathbf{K}_P \mathbf{V}(s) = \mathbf{0}, \quad (7.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_P &= \begin{pmatrix} \rho A \lambda^2 - \kappa G A \gamma^2 & 0 \\ 0 & \rho I \lambda^2 - E I \gamma^2 \end{pmatrix}, & \mathbf{C}_P &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa G A \gamma \\ -\kappa G A \gamma & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_P &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa G A \end{pmatrix}, & \mathbf{V}(s) &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{\Psi}(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A equação matricial (7.3) é classificada como regular quando \mathbf{M}_P é não singular. Os valores de λ que tornam \mathbf{M}_P singular são aqueles para os quais

$$\det(\mathbf{M}_P) = (c\lambda^2 - a\gamma^2)(e\lambda^2 - b\gamma^2) = 0,$$

isto é,

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{b}{e}} \gamma, \quad \pm \sqrt{\frac{a}{c}} \gamma, \quad (7.4)$$

com a , b , c e e em (6.14). Em unidades físicas, os valores críticos em (7.4) envolvem velocidades características $c_R = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $c_S = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}}$, [16]. Para tais valores, tem-se o caso estático degenerado $\lambda = 0$ e $\gamma = 0$ para o qual $u = u_o$, $\psi = 0$ é uma solução constante.

De agora em diante, considera-se o caso regular assumindo $\lambda \neq \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} \gamma$ e $\lambda \neq \pm \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} \gamma$. Assim, o caso estático espacial corresponde à $\lambda = 0$ e $\gamma \neq 0$ e o caso puramente dinâmico corresponde à $\lambda \neq 0$ e $\gamma = 0$.

A solução geral da equação (7.3) pode ser dada em termos da base matricial que é gerada pela resposta matricial fundamental [21]. Mais precisamente,

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'_P(s)\mathbf{c}_2, \quad (7.5)$$

onde $\mathbf{h}_P(s)$ é a solução matricial do problema de valor inicial

$$\mathbf{M}_P \mathbf{h}''_P(s) + \mathbf{C}_P \mathbf{h}'_P(s) + \mathbf{K}_P \mathbf{h}_P(s) = \mathbf{0} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{h}_P(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_P \mathbf{h}'_P(0) = \mathbf{I}.$$

Aqui \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ denotam as matrizes identidade e nula de ordem 2×2 , respectivamente, e $\mathbf{c}_1 = (c_{11} \ c_{21})^T$ e $\mathbf{c}_2 = (c_{12} \ c_{22})^T$ são vetores constantes. A solução matricial $\mathbf{h}_P(s)$ dada pela fórmula fechada (A.2), para $m = 2$ e $N = 2$ resulta

$$\mathbf{h}_P(s) = \begin{pmatrix} (e\lambda^2 - b\gamma^2)d''_P(s) + ad_P(s) & -a\gamma d'_P(s) \\ a\gamma d'_P(s) & (c\lambda^2 - a\gamma^2)d''_P(s) \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

onde a solução escalar geradora de ondas planas $d_P(s)$ é solução do problema de valor inicial escalar

$$\begin{aligned} b_0 d_P^{(iv)}(s) + b_2 d''_P(s) &= 0, \\ d_P(0) = 0, \quad d'_P(0) &= 0, \quad d''_P(0) = 0, \quad b_0 d_P'''(0) = 1, \end{aligned} \quad (7.8)$$

com b_0, b_2 sendo os coeficientes do polinômio

$$\begin{aligned} P(\eta) &= \det(\eta^2 \mathbf{M}_P + \eta \mathbf{C}_P + \mathbf{K}_P) = b_0 \eta^4 + b_2 \eta^2, \\ b_0 &= ce\lambda^4 - (cb + ae)\gamma^2 \lambda^2 + ab\gamma^4 = (c\lambda^2 - a\gamma^2)(e\lambda^2 - b\gamma^2), \\ b_2 &= ca\lambda^2, \end{aligned} \quad (7.9)$$

cujas raízes são

$$\eta = 0, 0, \alpha, -\alpha, \quad (7.10)$$

com

$$\alpha = \sqrt{-\frac{b_2}{b_0}} = \sqrt{\frac{-c\lambda^2 a}{(c\lambda^2 - a\gamma^2)(e\lambda^2 - b\gamma^2)}}. \quad (7.11)$$

Observa-se que as raízes α são sempre bem definidas para o caso regular, uma vez que $b_0 = (c\lambda^2 - a\gamma^2)(e\lambda^2 - b\gamma^2) \neq 0$. Também, $\alpha = 0$ somente quando $\lambda = 0$, com $\gamma \neq 0$ pois o caso é regular. Neste caso, as ondas planas tornam-se um perfil espacial permanente e as raízes $\eta = 0$ tornam-se quádruplas.

Utilizando a transformada de Laplace, resulta

$$d_P(s) = \frac{1}{ca\lambda^2} \left(s - \frac{\sinh(\alpha s)}{\alpha} \right) = \frac{1}{ca\lambda^2} \left(s - \frac{e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}}{2\alpha} \right). \quad (7.12)$$

Para $\lambda = 0$, $\gamma \neq 0$, tem-se $\alpha = 0$ e a onda plana tem perfil espacial permanente. Elas podem ser obtidas por processo de limite

$$d_P(s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{ca\lambda^2} \left(s - \frac{\sinh(\alpha s)}{\alpha} \right) = \frac{1}{6} \frac{s^3}{ab\gamma^4} \Big|_{\lambda=0} \quad (7.13)$$

Assim, conclui-se que todas as ondas planas do modelo clássico de Timoshenko são caracterizadas como

$$\mathbf{v}(t, x) = \Phi_P(\lambda t + \gamma x)\mathbf{c}, \quad (7.14)$$

onde

$$\begin{aligned} & \Phi_P(\lambda t + \gamma x) = [\mathbf{h}_P(\lambda t + \gamma x) \quad \mathbf{h}'_P(\lambda t + \gamma x)] \\ & = \begin{pmatrix} (e\lambda^2 - b\gamma^2)d''_P + ad_P & -a\gamma d'_P & (e\lambda^2 - b\gamma^2)d'''_P + ad'_P & -a\gamma d''_P \\ a\gamma d'_P & (c\lambda^2 - a\gamma^2)d''_P & a\gamma d''_P & (c\lambda^2 - a\gamma^2)d'''_P \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

é uma matriz bloco agindo em um vetor bloco

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

Também, com $d_P(s)$ definido em (7.12), $s = \lambda t + \gamma x$, pode-se escrever as ondas planas de Timoshenko como

$$\mathbf{v}(t, x) = \Gamma_P(\mathbf{c}, \lambda, \gamma)\mathbf{d}_P(\lambda t + \gamma x), \quad (7.16)$$

onde

$$\Gamma_P(\mathbf{c}, \lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} ac_{11} & ac_{12} - a\gamma c_{21} & (e\lambda^2 - b\gamma^2)c_{11} - a\gamma c_{22} & (e\lambda^2 - b\gamma^2)c_{12} \\ 0 & a\gamma c_{11} & a\gamma c_{12} + (c\lambda^2 - a\gamma^2)c_{21} & (c\lambda^2 - a\gamma^2)c_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d}_P(\lambda t + \gamma x) = \begin{pmatrix} d_P(\lambda t + \gamma x) \\ d'_P(\lambda t + \gamma x) \\ d''_P(\lambda t + \gamma x) \\ d'''_P(\lambda t + \gamma x) \end{pmatrix}.$$
(7.17)

O caso dinâmico puro $\gamma = 0$, $\lambda \neq 0$ determina que $\eta = 0$ é uma raiz dupla uma vez que

$$\alpha = \sqrt{-\frac{a}{e\lambda^2}} = \sqrt{\frac{-\kappa GA}{\rho I \lambda^2}}.$$
(7.18)

Para $\lambda = \lambda_c = i\omega_c$ onde

$$\omega_c = \sqrt{\frac{a}{e}} = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I}},$$
(7.19)

resulta $\alpha = 1$, onde ω_c é um valor crítico na análise espectral sendo relacionado a uma frequência crítica ou de corte [51]. Nas próximas seções, observa-se que $\alpha = 1$ é relacionada com a onda plana de perfil exponencial através da relação de dispersão para λ e γ .

Da caracterização das ondas planas de Timoshenko, tem-se que existem vários tipos de ondas planas $\mathbf{V}(\lambda t + \gamma x)$ com $\lambda = \zeta + i\omega$ e $\gamma = \mu + i\beta$ complexos. A natureza da onda plana depende do comportamento da função escalar geradora de onda plana $d_P(s) = d_P(\lambda t + \gamma x)$ com respeito aos parâmetros λ , γ e à raiz α .

Na Figura 7.1, a solução $d_P(s)$ é ilustrada para uma fase de onda plana com diferentes valores de λ e γ para uma viga de alumínio com seção transversal regular, altura $2h = 6 \times 10^{-6}\text{m}$, largura $b = 3 \times 10^{-6}\text{m}$ e parâmetros $E = 90\text{GPa}$, $\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 0.23$ e momento de inércia $I = \frac{2bh^3}{3}\text{m}^4$ dado em [73]. O caso (a)

com $\lambda = 0$, $\gamma = 1$ leva a raiz quádrupla $\eta = 0$ uma vez que $\alpha = 0$ é associada com deflexão cúbica clássica de uma viga (7.13). O caso (b) com $\lambda = 1$ e $\gamma = 1$ leva a raízes η puramente imaginárias, uma vez que α será puramente imaginária. Assim, $d_P(s)$ terá caráter oscilatório com uma tendência linear.

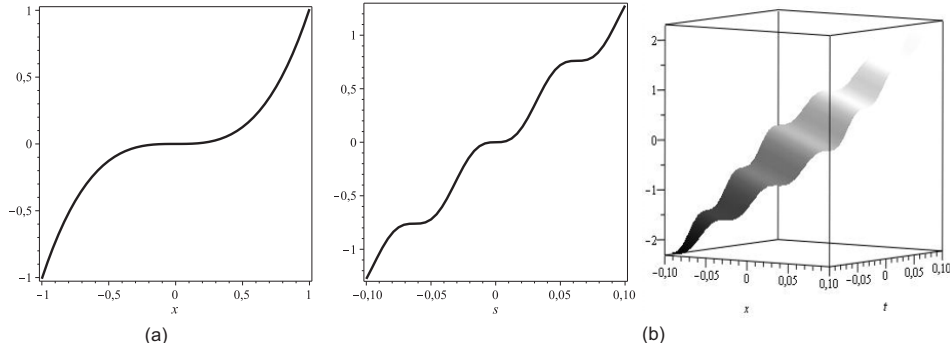


Figura 7.1: Perfil de $d_P(s) = \frac{1}{ca\lambda^2} \left(s - \frac{\sinh(\alpha s)}{\alpha} \right)$, $s = \lambda t + \gamma x$, para (a) $\lambda = 0$, $\gamma = 1$ com $\alpha = 0$, (b) Perfis 2D e 3D para $\lambda = 1$, $\gamma = 1$, com $\alpha = 100i$.

7.1.1 Decomposição das ondas planas de Timoshenko

Utilizando (7.12) em (7.7), as ondas planas de Timoshenko podem ser decompostas em ondas planas envolvendo funções hiperbólicas, ou exponenciais, e lineares. Com a formulação exponencial de $d_P(s)$ dada em (7.12), tem-se

$$\Phi_P(s) = e^{\alpha s} \mathbf{L}_1(\alpha) + e^{-\alpha s} \mathbf{L}_2(\alpha) + s \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_4, \quad (7.20)$$

onde \mathbf{L}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, são as matrizes blocos

$$\mathbf{L}_1(\alpha) = [A(\alpha) \ \alpha A(\alpha)], \quad \mathbf{L}_2(\alpha) = \mathbf{L}_1(-\alpha), \quad \mathbf{L}_3 = [B \ 0], \quad \mathbf{L}_4 = [C \ B] \quad (7.21)$$

com

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2(e\lambda^2 - b\gamma^2) + a}{ca\alpha\lambda^2} & \frac{1}{2} \frac{\gamma}{c\lambda^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{\gamma}{c\lambda^2} & \frac{1}{2} \frac{(-c\lambda^2 + a\gamma^2)\alpha}{ca\lambda^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{c\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma}{c\lambda^2} \\ \frac{\gamma}{c\lambda^2} & 0 \end{pmatrix},$$

onde a , b , c , e são dadas em (6.14). De (7.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(s) &= \Phi_P(s) \mathbf{c} \\ &= (A(\alpha)e^{\alpha s} + A(-\alpha)e^{-\alpha s} + sB + C) \mathbf{c}_1 + (\alpha A(\alpha)e^{\alpha s} - \alpha A(-\alpha)e^{-\alpha s} + B) \mathbf{c}_2 \end{aligned} \quad (7.22)$$

e segue a decomposição de ondas planas

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) = & \Phi_P(\lambda t + \gamma x)\mathbf{c} = e^{\alpha(\lambda t + \gamma x)}A(\alpha)(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \\ & + e^{-\alpha(\lambda t + \gamma x)}A(-\alpha)(\mathbf{c}_1 - \alpha\mathbf{c}_2) + (\lambda t + \gamma x)B\mathbf{c}_1 + (B\mathbf{c}_2 + C\mathbf{c}_1) \end{aligned} \quad (7.23)$$

para vetores constantes arbitrário \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 . Um procedimento similar segue quando utiliza-se funções hiperbólicas.

7.1.2 Ondas planas com componentes proporcionais

Ondas planas se propagando em uma direção fixada, isto é, suas componentes são múltiplas de uma função escalar $\phi(\lambda t + \gamma x)$, podem ser completamente caracterizadas como aquelas que têm uma variação exponencial ou linear em certas direções. De fato, se $\mathbf{v}(t, x)$ é uma solução do modelo de Timoshenko do tipo

$$\mathbf{v}(t, x) = \phi(\lambda t + \gamma x) \begin{pmatrix} U_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

suas componentes devem satisfazer a equação diferencial escalar de quarta ordem dada em (6.15). Assim,

$$b_0\phi^{(iv)}(s) + b_2\phi''(s) = 0, \quad (7.25)$$

onde $s = \lambda t + \gamma x$, $b_0 = ce\lambda^4 - (cb + ae)\gamma^2\lambda^2 + ab\gamma^4$, $b_2 = ca\lambda^2$ como em (7.9). Agora qualquer solução de (7.25) pode ser escrita em termos da base gerada pela solução $d_P(s)$ do problema de valor inicial (7.8) como $\phi(s) = A_1d_P(s) + A_2d'_P(s) + A_3d''_P(s) + A_4d'''_P(s)$. Então $u(t, x) = \phi(\lambda t + \gamma x)U_o$ e $\psi(t, x) = \phi(\lambda t + \gamma x)\Psi_o$ serão as componentes de uma solução das equações de Timoshenko (6.5), com $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, sempre que

$$\mathbf{M}_\phi\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (7.26)$$

onde \mathbf{M}_ϕ é a matriz

$$\mathbf{M}_\phi = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_P & \mathbf{B}_P \end{pmatrix},$$

sendo

$$\mathbf{A}_P = \begin{pmatrix} (-c\lambda^2 + a\gamma^2)\alpha U_o & -a\gamma\Psi_o\alpha \\ -a\gamma\Psi_o & (-c\lambda^2 + a\gamma^2)\alpha^2 U_o \\ \gamma\Psi_o & 0 \\ (e\alpha^2\lambda^2 - \alpha^2\gamma^2b + a)\Psi_o & -\gamma a\alpha^2 U_o \\ -\gamma a\alpha U_o & (e\alpha^2\lambda^2 - \alpha^2\gamma^2b + a)\alpha\Psi_o \\ \Psi_o & 0 \\ \gamma a\alpha U_o & -a\alpha\Psi_o \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_P = \begin{pmatrix} (-c\lambda^2 + a\gamma^2)\alpha^3 U_o & -a\gamma\Psi_o\alpha^3 \\ -a\gamma\Psi_o\alpha^2 & (-c\lambda^2 + a\gamma^2)\alpha^4 U_o \\ 0 & 0 \\ (e\alpha^2\lambda^2 - \alpha^2\gamma^2b + a)\alpha^2\Psi_o & -\gamma a\alpha^4 U_o \\ -\gamma a\alpha^3 U_o & (e\alpha^2\lambda^2 - \alpha^2\gamma^2b + a)\alpha^3\Psi_o \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e \mathbf{A} o vetor com componentes A_1, A_2, A_3, A_4 .

O sistema algébrico linear acima tem solução não nula somente quando Ψ_o se anula ou é convenientemente escolhido. O caso $U_o = 0$ tem somente a solução trivial.

Para $\Psi_o \neq 0$, é imediato que $A_1 = 0, A_2 = 0$. Assim, o sistema (7.26) reduz, depois de eliminação gaussiana, para

$$\begin{pmatrix} (-c\lambda^2 + a\gamma^2)\alpha^3 U_o & -a\gamma\Psi_o\alpha^3 \\ 0 & \frac{-\alpha^2(2a\alpha^2\gamma^2U_o^2c\lambda^2 - a^2\alpha^2\gamma^4U_o^2 - c^2\alpha^2\lambda^4U_o^2 + a^2\gamma^2\Psi_o^2)}{U_o(-c\lambda^2 + a\gamma^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escolhendo $\Psi_o = \pm \frac{\alpha U_o(-c\lambda^2 + a\gamma^2)}{a\gamma}$, tem-se $A_3 = \pm \alpha A_4$, respectivamente.

Portanto

$$\phi(s) = \pm \alpha A_4 d_P''(s) + A_4 d_P'''(s) = -A_4 \frac{\alpha^2}{ac\lambda^2} e^{\pm \alpha s},$$

onde A_4 é uma constante arbitrária.

Para $\Psi_o = 0$ com $\gamma = 0$ ou $\gamma \neq 0$, as restrições com as constantes A_i , $i = 1, \dots, 4$, no sistema (7.26) implicam que $\phi(s)$ é uma função linear em s para $\gamma = 0$ e constante quando $\gamma \neq 0$. Conclui-se que todos os possíveis casos de ter ondas planas com componentes proporcionais do tipo (7.24) são

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{ac\lambda^2} e^{\pm \alpha s}, & \Psi_o = \pm \frac{\alpha U_o(-c\lambda^2 + a\gamma^2)}{a\gamma} \neq 0 \\ -\frac{\alpha^2}{(c\lambda^2 a)} (A_3 s + A_4), & \Psi_o = 0, \gamma = 0 \\ 1, & \Psi_o = 0, \gamma \neq 0 \end{cases},$$

e as ondas se propagam nas direções

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm \alpha(-c\lambda^2 + a\gamma^2)}{a\gamma} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com variação exponencial e linear, respectivamente.

7.1.3 Ondas com perfil exponencial

Para ondas planas a relação entre os escalares complexos

$$\lambda = \zeta + i\omega, \quad \gamma = \mu + i\beta$$

é arbitrária. No entanto, a procura de ondas planas que têm um perfil exponencial

$$u(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x} U_0, \quad \psi(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x} \Psi_0, \quad (7.27)$$

relaciona λ e γ através de uma equação algébrica. Quando λ e γ são puramente imaginários, isto é, $\lambda = i\omega$ e $\gamma = i\beta$, a fase de onda $\theta = \omega t + \beta x$ é 2π periódica

no tempo e no espaço. O valor $\lambda = i\omega$ é associado com a frequência temporal ou simplesmente frequência e $\gamma = i\beta$ é associado com o número de onda β ou comprimento de onda $\frac{2\pi}{\beta}$, [54].

Ao aplicar ondas mecânicas à uma viga de comprimento L , entende-se que a viga é considerada ser repetida por unidade de distância para ter posição periódica no espaço ou ser considerada um viga de comprimento infinito.

Deve ser observado que para a viga apoiada-apoiada a periodicidade espacial pode ser considerada natural. Para outros tipos de condições de contorno clássicas, pode-se ainda ter frequências $\lambda = i\omega$, ω real, ou assumir o movimento da onda harmônica para aplicar o método espectral.

No entanto, este não é o caso quando se trata de condições de fronteira não clássicas ou com viga de materiais novos que são usados para melhorar e otimizar suas propriedades e sujeitos a amortecimento interno e externo [6, 22, 44].

Substituindo (7.27) no sistema de Timoshenko (6.5), deve-se determinar soluções não nulas do sistema algébrico

$$\begin{pmatrix} c\lambda^2 - a\gamma^2 & a\gamma \\ -a\gamma & e\lambda^2 - b\gamma^2 + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_o \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

onde $a = \kappa GA$, $b = EI$, $c = \rho A$, $e = \rho I$. Para garantir a existência de soluções não nulas o determinante do sistema deve ser zero. Assim, λ e γ devem satisfazer a equação

$$Q(\lambda, \gamma) = ce\lambda^4 - (cb + ae)\gamma^2\lambda^2 + ca\lambda^2 + ab\gamma^4 = 0 \quad (7.29)$$

que é referida na literatura como equação de dispersão. Quando $Q(\lambda, \gamma) = b_0 + b_2 = 0$, tem-se que $\eta = \alpha = \pm 1$ é uma raiz de $P(\eta)$. Esta equação é a mesma quando procura-se soluções planas escalares exponenciais em (6.15). Além disso, ao resolver

$\lambda = \lambda(\gamma)$ ou $\gamma = \gamma(\lambda)$ elas aparecerão aos pares, isto é,

$$\pm\gamma_1, \pm\gamma_2, \pm\lambda_1, \pm\lambda_2. \quad (7.30)$$

De (7.28) resulta

$$\begin{pmatrix} U_o \\ \Psi_o \end{pmatrix} = \Psi_o \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_o \xi \\ \Psi_o \end{pmatrix}, \xi = -\frac{a\gamma}{c\lambda^2 - a\gamma^2}. \quad (7.31)$$

O denominador de ξ é sempre não nulo pois não considera-se o caso singular (7.4).

Assim, a onda exponencial será um múltiplo da solução básica

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x} \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Quando $\gamma = 0$, tem-se a onda plana exponencial $u = e^{\lambda_c t} U_o, \psi = e^{\lambda_c t} \Psi_o$ com

$$\begin{pmatrix} U_o \\ \Psi_o \end{pmatrix} = \Psi_o \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.33)$$

O movimeto é referido como um movimento de cisalhamento ou caso dinâmico puro (7.18), (7.19) correspondendo ao valor crítico $\lambda_c = i\omega_c$.

7.1.3.1 Ondas exponenciais como ondas planas

A solução onda exponencial básica obtida de (7.27), (7.31)

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x} \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = -\frac{a\gamma}{c\lambda^2 - a\gamma^2} \quad (7.34)$$

pode ser escrita em termos da decomposição de ondas planas (7.23) como

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x} \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_P(\lambda t + \gamma x) \mathbf{c}(\lambda, \gamma), \quad \mathbf{c}(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ab_2}{b_0} \\ \frac{ab_2\gamma}{b_0} \\ \frac{b_2}{-c\lambda^2 + a\gamma^2} \end{pmatrix}, \quad (7.35)$$

onde b_0, b_2 são dados em (7.9) e $\alpha = 1$ uma vez que γ e λ satisfazem $Q(\lambda, \gamma) = 0$. Para $\gamma = 0$ um valor regular, tem-se $\lambda = i\omega_c$, $\omega_c = \frac{a}{e}$, e $\xi = 0$.

Para um λ fixado, uma solução do tipo onda exponencial geral será obtida pela superposição com todas as raízes γ da equação de dispersão (7.29), que é

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) = & p_1 \Phi_P(\lambda t + \gamma_1 x) \mathbf{c}(\lambda, \gamma_1) + p_2 \Phi_P(\lambda t - \gamma_1 x) \mathbf{c}(\lambda, -\gamma_1) \\ & + p_3 \Phi_P(\lambda t + \gamma_2 x) \mathbf{c}(\lambda, \gamma_2) + p_4 \Phi_P(\lambda t - \gamma_2 x) \mathbf{c}(\lambda, -\gamma_2), \end{aligned} \quad (7.36)$$

onde p_1, p_2, p_3, p_4 são escalares arbitrários.

7.2 Ondas modais no modelo de Timoshenko

Soluções exponenciais no tempo com amplitude variando com dependência espacial do modelo de Timoshenko são chamadas ondas modais. Em termos matriciais, estas ondas são soluções do modelo de Timoshenko homogêneo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

da forma

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{w}(x), \quad \mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} U(x) \\ \Psi(x) \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

onde λ é um escalar fixo mas arbitrário. Elas surgem na análise modal para problemas de vibração onde busca-se encontrar frequência naturais para a viga de comprimento finito sujeita a condições de contorno clássicas tais como os casos simplesmente apoiada, fixa apoiada, entre outros. Para tais condições, é conhecido que $\lambda = i\omega$ é sempre puramente imaginário e a amplitude espacial $\mathbf{w}(x)$ correspondente a diferentes valores de frequência natural ω são ortogonais [48]. Em física, elas são referidas como ondas estacionárias (*standing* ou *stationary*).

Ondas modais existirão para o modelo de Timoshenko não forçado (6.5), para fornecendo $\mathbf{w}(x)$ que satisfaz a equação diferencial matricial de segunda ordem

$$\mathbb{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}(\lambda)\mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \quad (7.38)$$

onde

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{pmatrix}, \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{K} = \begin{pmatrix} \rho A \lambda^2 & 0 \\ 0 & \rho I \lambda^2 + \kappa GA \end{pmatrix}.$$

As condições de contorno dadas em (6.24) supondo soluções do tipo ondas modais são dadas por

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_{11} + \lambda \mathbb{B}_{11} + \lambda^2 \mathbb{D}_{11}) \mathbf{w}(0) + \mathbb{J}_{11} \mathbf{w}'(0) &= \mathbf{0}, \\ (\mathbb{A}_{21} + \lambda \mathbb{B}_{21} + \lambda^2 \mathbb{D}_{21}) \mathbf{w}(L) + \mathbb{J}_{21} \mathbf{w}'(L) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

A solução $\mathbf{w}(x)$ é chamada autofunção ou modo de vibração correspondente ao autovalor λ , que no domínio frequência é denotado por $\mathbf{w}(\lambda, x)$.

A solução geral da equação (7.38) é dada por

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{a}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{a}_2 = \Phi_M(x)\mathbf{a}, \quad (7.40)$$

onde $\mathbf{h}(x)$ é a resposta matricial fundamental de ordem 2×2 satisfazendo o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\mathbf{h}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{h}'(x) + \mathbb{K}(\lambda)\mathbf{h}(x) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(0) &= \mathbf{0}, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (7.41)$$

com $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} as matrizes nula e identidade respectivamente, vetores

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.42)$$

e $\Phi_M(x)$ a matriz base de ordem 2×4

$$\Phi_M(x) = (\mathbf{h}(x) \mathbf{h}'(x)). \quad (7.43)$$

Para o sistema (7.38), considerando $m = 2$ e $N = 2$ em (A.1) e (A.2) resulta

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} -bd''(x) + (a + e\lambda^2)d(x) & -ad'(x) \\ ad'(x) & -ad''(x) + c\lambda^2d(x) \end{pmatrix}, \quad (7.44)$$

sendo $d(x)$ solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} c_0d^{(iv)}(x) + c_2d''(x) + c_4d(x) &= 0, \\ d(0) = 0, \quad d'(0) = 0, \quad d''(0) = 0, \quad c_0d'''(0) &= 1, \end{aligned} \quad (7.45)$$

onde $Q(\lambda, z) = \det(z^2\mathbb{M} + z\mathbb{C} + \mathbb{K}) = c_0z^4 + c_2z^2 + c_4$ com

$$c_0 = ab, \quad c_2 = -(ae + bc)\lambda^2, \quad c_4 = (e\lambda^2 + a)c\lambda^2. \quad (7.46)$$

Em termos matriciais, tem-se todas as ondas modais são do tipo

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t}\Phi_M(x)\mathbf{a} = e^{\lambda t}\Gamma_M(\mathbf{a}, \lambda)\mathbf{d}_M(x), \quad (7.47)$$

onde

$$\Phi_M(x) = \begin{pmatrix} -bd''(x) + (a + e\lambda^2)d(x) & -ad'(x) & -bd'''(x) + (a + e\lambda^2)d'(x) & -ad''(x) \\ ad'(x) & -ad''(x) + c\lambda^2d(x) & ad''(x) & -ad'''(x) + c\lambda^2d'(x) \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

é a matriz de base modal, e

$$\Gamma_M(\mathbf{a}, \lambda) = \begin{pmatrix} (a + e\lambda^2)a_{11} & -aa_{21} + (a + e\lambda^2)a_{12} & -ba_{11} - aa_{22} & -ba_{12} \\ \lambda^2ca_{21} & aa_{11} + \lambda^2ca_{22} & -aa_{21} + aa_{12} & -aa_{22} \end{pmatrix} \quad (7.49)$$

e

$$\mathbf{d}_M(x) = \begin{pmatrix} d(x) \\ d'(x) \\ d''(x) \\ d'''(x) \end{pmatrix}. \quad (7.50)$$

A solução $d(x)$ pode ser dada usando a transformada de Laplace em (7.45). Resulta que

$$d(x) = \mathcal{L}^{-1}(H(z)), \quad H(z) = \frac{1}{Q(\lambda, z)}, \quad (7.51)$$

onde

$$Q(\lambda, z) = \det(z^2\mathbb{M} + z\mathbb{C} + \mathbb{K}) = abz^4 - (ae + bc)\lambda^2 z^2 + (a + e\lambda^2)c\lambda^2 \quad (7.52)$$

e o valor polinomial $P(1) = b_0 + b_2$ dado em (7.9) com $\gamma = z$ e λ fixo mas arbitrário. As raízes γ de (7.52) são chamadas números modais.

Sejam $z = \pm\gamma_1(\lambda), \pm\gamma_2(\lambda)$ as raízes do polinômio característico (7.52).

Então para o caso das raízes simples, obtém-se

$$d(x) = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{e^{\pm\gamma_k x}}{P'(\pm\gamma_k)} \right] = \frac{\gamma_2 \sinh(\gamma_1 x) - \gamma_1 \sinh(\gamma_2 x)}{ab(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\gamma_1 \gamma_2}. \quad (7.53)$$

Raízes duplas do polinômio (7.52) ocorrem somente quando λ assume os valores $\lambda_c = \sqrt{-\frac{a}{e}}$ ($z_c = 0$) e $\lambda_a = \frac{2a\sqrt{bc}}{ae-bc}$ ($z_a^2 = \frac{(ae+bc)}{2ab}\lambda_a^2 \neq 0$). Tem-se que $z = 0$ é a única raiz quádrupla e ocorre quando $\lambda = 0$. Não existem outros tipos de raízes repetidas.

Para $\lambda = \lambda_c$, tem-se que $\gamma_1 = 0$ ou $\gamma_2 = 0$ mas não ambos podem ser raízes duplas. No que segue, denota-se $\gamma_1 = 0$ sendo a raiz dupla. Utilizando frações parciais para $\frac{1}{P(s)}$ ou fazendo limite quando $\gamma_1 \rightarrow 0$ obtém-se $d(x)$. Do processo de limite decorre

$$d(x) = \lim_{\gamma_1 \rightarrow 0} \frac{\gamma_2 \sinh(\gamma_1 x) - \gamma_1 \sinh(\gamma_2 x)}{ab(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\gamma_1 \gamma_2} = \frac{\sinh(\gamma_2 x) - \gamma_2 x}{\gamma_2^3 ab}. \quad (7.54)$$

Quando $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ tem-se uma raiz quádrupla, utilizando a regra de L'Hospital obtém-se

$$d(x) = \lim_{\gamma_2 \rightarrow 0, \gamma_1 \rightarrow 0} \frac{\gamma_2 \sinh(\gamma_1 x) - \gamma_1 \sinh(\gamma_2 x)}{ab(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\gamma_1 \gamma_2} = \frac{1}{6} \frac{x^3}{ab}.$$

Para $\lambda = \pm\lambda_a$, $\lambda_a = \frac{2a\sqrt{cb}}{ae-cb}$, tem-se duas raízes duplas $\pm\gamma_a$ onde $\gamma_a^2 = \frac{cb+ae}{2ab}\lambda_a^2$. Neste caso, o polinômio característico dado em (7.52) pode ser escrito como

$$Q = ab(z - \gamma_a)^2(z + \gamma_a)^2,$$

e pela transformada de Laplace tem-se

$$d(x) = \frac{\cosh(\gamma_a x)x\gamma_a - \sinh(\gamma_a x)}{ab\gamma_a^3}. \quad (7.55)$$

7.2.1 Frequências naturais e raízes

O polinômio $Q(\lambda, z)$ definido em (7.52), que surge em conexão com ondas modais para as equações de Timoshenko, pode ser convenientemente escrito como

$$z^4 + g^2(\lambda)z^2 - r^4(\lambda) = 0, \quad (7.56)$$

onde

$$g^2(\lambda) = -\left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right)\lambda^2, \quad r^4(\lambda) = -c\lambda^2\left(\frac{a + e\lambda^2}{ab}\right).$$

As raízes de (7.56) são $z = \pm\epsilon$ e $z = \pm i\delta$ onde

$$\epsilon = \frac{1}{2}\sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{\Omega}}, \quad \delta = \frac{1}{2}\sqrt{2g^2 + 2\sqrt{\Omega}}, \quad \Omega = g^4 + 4r^4. \quad (7.57)$$

As raízes $z = \pm\epsilon, \pm i\delta$ estão relacionadas pela equação

$$\delta^2 - \epsilon^2 = g^2. \quad (7.58)$$

Substituindo $\gamma_1 = \epsilon$ e $\gamma_2 = i\delta$ em (7.53), a função escalar geradora $d(x)$ pode ser escrita como

$$d(x) = \frac{\delta\sinh(\epsilon x) - \epsilon\sin(\delta x)}{ab(\delta^2 + \epsilon^2)\epsilon\delta}. \quad (7.59)$$

Quando λ é uma frequência natural, as raízes ϵ e $i\delta$ podem ser definidas em termos da frequência crítica ou de corte (*cutoff*) definida como $\omega_c = \sqrt{\frac{a}{e}}$ introduzida em (7.19). Substituindo $\lambda = i\omega$, $\omega^2 > 0$, em Ω (7.57), decorre que δ é sempre real e positivo para todo ω real e não nulo uma vez que

$$\Omega = \left(\frac{e}{b} - \frac{c}{a}\right)^2 \omega^4 + 4\omega^2 \frac{c}{b} > 0.$$

A natureza de ϵ depende do valor de ω se ele está abaixo ou acima da frequência ω_c . Para $\omega^2 < \omega_c^2$, o valor de ϵ é real e não nulo uma vez que $r^4 > 0$. Tem-se que $\epsilon = 0$ quando $\omega = \omega_c$ uma vez que para este valor tem-se $r^4 = 0$. Para $\omega^2 > \omega_c^2$, segue que $r^4 < 0$ e, conseqüentemente, $\epsilon^2 < 0$, resultando $\epsilon = i\varepsilon$ com $\varepsilon > 0$.

Portanto, acima da frequência crítica, temos a equação de dispersão para ondas harmônicas

$$Q(i\omega, i\beta) = ab\beta^4 - (ae + bc)\omega^2\beta^2 - ac\omega^2 + ce\omega^4 = 0, \quad (7.60)$$

com β sendo um número real e (7.59) sendo agora solução oscilatória

$$d(x) = \frac{\delta \sin(\varepsilon x) - \varepsilon \sin(\delta x)}{ab(\delta^2 - \varepsilon^2)\varepsilon\delta}. \quad (7.61)$$

Existem vários tipos de ondas modais $e^{\lambda t} \mathbf{w}(x)$ de acordo com a natureza da amplitude espacial $\mathbf{w}(x)$ e superposição linear. De (7.47) e (7.53), o comportamento dependerá da natureza das raízes $\pm\gamma_1(\lambda)$, $\pm\gamma_2(\lambda)$ do polinômio

$$abz^4 - (ae + bc)\lambda^2 z^2 + (a + e\lambda^2)c\lambda^2 = 0, \quad (7.62)$$

onde λ é um escalar fixo mas arbitrário (7.29).

Considerando os parâmetros para uma microviga de alumínio dada em [73], observa-se que o comportamento de $d(x)$ em (7.59) depende da frequência ω em relação a frequência crítica ω_c . Para $\omega^2 < \omega_c^2$, a equação característica (7.52) tem duas raízes reais simples $\pm\gamma_1 = \pm\epsilon$ e duas raízes simples puramente imaginárias conjugadas $\pm\gamma_2 = \pm i\delta$. Isto implica que $d(x)$ é composta por uma função

hiperbólica e uma função trigonométrica cujo comportamento é ilustrado na Figura 7.2 (a). Para $\omega = \omega_c$, as raízes reais de (7.52) sofrem um colapso e tornam-se raízes duplas $\pm\gamma_1 = 0$, enquanto as raízes $\pm\gamma_2 = \pm i\delta$ permanecem simples e imaginárias puras. A função $d(x)$ é agora composta por funções linear e trigonométrica e cujo comportamento oscilatório ilimitado é apresentado na Figura 7.2 (b). Quando acima da frequência crítica, $\omega^2 > \omega_c^2$, as quatro raízes de (7.52) são pares de raízes simples imaginárias puras conjugadas. Assim, $d(x)$ é composta de funções trigonométricas com comportamento oscilatório limitado como pode ser observado na Figura 7.2 (c) tendo ondulações de alta frequência.

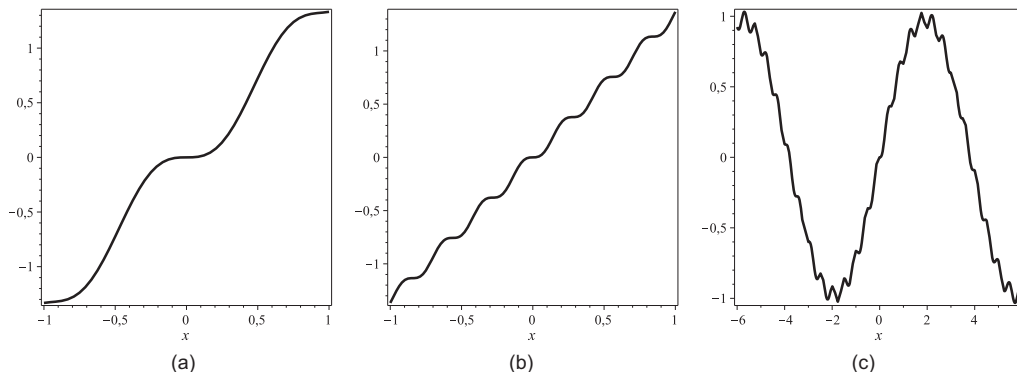


Figura 7.2: Função escalar geradora de onda modal $d(x) = \frac{\delta \text{sen}(\epsilon x) - \epsilon \text{sen}(\delta x)}{ab(\delta^2 - \epsilon^2)\epsilon\delta}$ onde (a) $\epsilon = 42735,46244$, $\delta = 6,649479825 \times 10^5$ para $\omega^2 < \omega_c^2$; (b) $\epsilon = 0$, $\delta = 6,707335165 \times 10^5$ for $\omega^2 = \omega_c^2$; (c) $\epsilon = 40931,10798i$, $\delta = 6,759469095 \times 10^5$ for $\omega^2 > \omega_c^2$.

7.2.2 Caso crítico: técnica de Liouville

O valor $\gamma = 0$ é defeituoso uma vez que o sistema (7.28) tem somente uma única solução independente. Para o valor crítico $\lambda = \sqrt{-\frac{a}{e}}$, que corresponde a $\gamma_1 = 0$ sendo uma raiz dupla do polinômio $Q(\lambda, \gamma)$ definido em (7.29), é necessário encontrar uma segunda solução linearmente independente associada com γ_1 . Nenhuma modificação é necessária para γ_2 pois é não nula, de outra forma $\gamma = 0$ será uma raiz quádrupla.

Na literatura, para encontrar outra solução independente, pode-se utilizar técnicas matemáticas para raízes repetidas ou argumentos físicos como em [17], uma vez que de (7.34) tem-se que $\xi \rightarrow 0$ quando $\gamma \rightarrow 0$. Aqui deve-se usar a técnica de Liouville para diferenciar uma onda plana em relação a um parâmetro que no limite, assume o mesmo valor de outro.

Assim diferenciando (7.16) com respeito a γ quando $\lambda_c = \sqrt{-\frac{a}{e}}$, obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{v}(t, x)}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Gamma_P}{\partial \gamma} \mathbf{d}_P(\lambda t + \gamma x) + \Gamma_P \frac{\partial \mathbf{d}_P(\lambda t + \gamma x)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \frac{e}{e} x + a_2 \end{pmatrix} \sinh(\lambda_c t),$$

onde a_1, a_2 são constantes arbitrárias. Assim,

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{e}{e} x \end{pmatrix} \sinh(\lambda_c t), \quad \lambda_c = \sqrt{-\frac{a}{e}}$$

é uma segunda solução linearmente independente. Observa-se também que por superposição de soluções de ondas planas (7.16) e constantes convenientes, tem-se

$$\mathbf{v}(t, x) = \left(A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{e}{e} x \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{\sqrt{-\frac{a}{e}} t}, \quad (7.63)$$

onde A_1 e A_2 são constantes arbitrárias.

O caso das raízes duplas $\gamma_1 = 0$ com $\lambda = \lambda_c$ foi tratado acima com ondas exponenciais. Quanto utiliza-se a formulação de onda modal, essa solução pode ser obtida usando a mesma técnica de Liouville que leva a $d(x)$ dada em (7.54). Assim para o caso crítico $\lambda = i\omega_c$, tem-se

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda_c t} \left(\begin{pmatrix} A_1 \cosh(\gamma_2 x) \\ A_2 \sinh(\gamma_2 x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 \sinh(\gamma_2 x) \\ A_4 \cosh(\gamma_2 x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_5 \\ A_6 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_7 \end{pmatrix} \right), \quad (7.64)$$

onde $A_i = A_i(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ pode ser escolhidas em termos das constantes arbitrárias $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, [123].

O mesmo argumento é aplicado no caso $\lambda = \lambda_a$ para o qual existem dois pares $\pm\gamma_a$ de raízes duplas uma vez que a técnica de Liouville usada com esses valores fornece uma solução da equação de Timoshenko. Nesta situação, utiliza-se $d(x)$ dada em (7.55).

A relação com a base exponencial

$$\begin{pmatrix} d(x) \\ d'(x) \\ d''(x) \\ d'''(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2ab(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & -\frac{1}{\gamma_1} & -\frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_1 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1^2 & \gamma_1^2 & -\gamma_2^2 & -\gamma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 x} \\ e^{-\gamma_1 x} \\ e^{\gamma_2 x} \\ e^{-\gamma_2 x} \end{pmatrix}, \quad (7.65)$$

pode ser escrita na forma compacta

$$\mathbf{d}_M(x) = \mathbf{M}_d^{exp} Exp(x), \quad (7.66)$$

onde

$$\mathbf{M}_d^{exp} = \frac{1}{2ab(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & -\frac{1}{\gamma_1} & -\frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_1 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1^2 & \gamma_1^2 & -\gamma_2^2 & -\gamma_2^2 \end{pmatrix}, \quad Exp(x) = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 x} \\ e^{-\gamma_1 x} \\ e^{\gamma_2 x} \\ e^{-\gamma_2 x} \end{pmatrix}. \quad (7.67)$$

O caso das raízes repetidas $\gamma_1 = 0$ é trabalhado por processo de limite.

7.2.3 Decomposição de ondas modais

Utilizando (7.53) em $\Phi_M(x)$ dada em (7.48), pode-se escrever

$$\Phi_M(x) = e^{\gamma_1 x} \Psi_1(\gamma_1) + e^{\gamma_2 x} \Psi_2(\gamma_2) + e^{-\gamma_1 x} \Psi_1(-\gamma_1) + e^{-\gamma_2 x} \Psi_2(-\gamma_2), \quad (7.68)$$

onde $\Psi_1(\gamma_1), \Psi_2(\gamma_2)$ são matrizes bloco

$$\Psi_1(\gamma) = \Psi(\gamma), \quad \Psi_2(\gamma) = -\Psi(\gamma) \quad (7.69)$$

com

$$\Psi(\gamma) = [A_M(\gamma) \quad \gamma A_M(\gamma)], \quad A_M(\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{e\lambda^2 - b\gamma^2 + a}{ab(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\gamma} & -\frac{1}{2b(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \\ \frac{1}{2b(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} & \frac{1}{2} \frac{c\lambda^2 - a\gamma^2}{ab(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\gamma} \end{pmatrix},$$

onde a, b, c, e são dadas em (6.14). Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) &= e^{\lambda t} \Phi_M(x) \mathbf{a} = e^{\lambda t + \gamma_1 x} \mathbf{v}(\gamma_1) - e^{\lambda t + \gamma_2 x} \mathbf{v}(\gamma_2) + e^{\lambda t - \gamma_1 x} \mathbf{v}(-\gamma_1) - e^{\lambda t - \gamma_2 x} \mathbf{v}(-\gamma_2) \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(\gamma_1) & \mathbf{v}(\gamma_2) & \mathbf{v}(-\gamma_1) & \mathbf{v}(-\gamma_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 x} \\ -e^{\gamma_2 x} \\ e^{-\gamma_1 x} \\ -e^{-\gamma_2 x} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.70)$$

onde

$$\mathbf{v}(\gamma) = A_M(\gamma) (\mathbf{a}_1 + \gamma \mathbf{a}_2). \quad (7.71)$$

A decomposição acima em ondas exponenciais é também válida para o valor crítico fazendo limite quando γ_1 se aproxima de 0, desde que não se cancelem os divisores zero.

A superposição espectral em [17] pode ser obtida de acima observando que os autovetores $V(\xi) = \begin{pmatrix} \xi(\gamma) \\ 1 \end{pmatrix}$ dados em (7.34), são múltiplos do vetor $\mathbf{v}(\gamma)$. Com o segundo componente de $\mathbf{v}(\gamma)$ e utilizando (7.36), (7.52), pode-se obter o sistema $\mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{c}$ para determinar os vetores constantes \mathbf{a} . Por exemplo, escolhendo em \mathbf{c} a primeira componente igual a 1 e zero as outras componentes, obtém-se o autovetor $V(\xi_1)$. Em geral, definindo

$$\mathbf{a}(\gamma, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{(c\lambda^2 - a\eta^2)b}{a} \\ -\frac{ab\gamma\eta^2}{c\lambda^2} \\ \frac{(c\lambda^2 - a\eta^2)b\gamma}{c\lambda^2} \\ -b \end{pmatrix}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} V(\pm\xi_1)e^{\pm\gamma_1 x} &= \begin{pmatrix} \pm\xi_1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm\gamma_1 x} = \Phi_M(x)\mathbf{a}(\pm\gamma_1, \gamma_2), \\ V(\pm\xi_2)e^{\pm\gamma_2 x} &= \begin{pmatrix} \pm\xi_2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm\gamma_2 x} = \Phi_M(x)\mathbf{a}(\pm\gamma_2, \gamma_1), \end{aligned} \quad (7.72)$$

onde $\xi = -\frac{a\gamma}{c\lambda^2 - a\gamma^2}$.

A caracterização das ondas modais como superposição de quatro ondas exponenciais (7.70), (7.72) pode ser escrita em termos da base matricial $\Phi_M(x)$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) &= e^{\lambda t} (c_1^- \Phi_M(x)\mathbf{a}(\gamma_1, \gamma_2) + c_2^- \Phi_M(x)\mathbf{a}(\gamma_2, \gamma_1) + \\ &\quad + c_1^+ \Phi_M(x)\mathbf{a}(-\gamma_1, \gamma_2) + c_2^+ \Phi_M(x)\mathbf{a}(-\gamma_2, \gamma_1)) \end{aligned} \quad (7.73)$$

com a vantagem de que esta representação, através de um procedimento de limite, não requer a alteração da base da solução como é feito na literatura quando $\gamma_1 = 0$. Isso é mais claro quando mantém-se a definição de $\Phi_M(x)$ em termos da base gerada por $d(x)$ ou usando (7.65), isto é,

$$\begin{aligned} e^{\pm\gamma_1 x} &= ab (\mp\gamma_1 \gamma_2^2 d(x) - \gamma_2^2 d'(x) + (\pm)\gamma_1 d''(x) + d'''(x)), \\ e^{\pm\gamma_2 x} &= ab (\mp\gamma_2 \gamma_1^2 d(x) - \gamma_1^2 d'(x) + (\pm)\gamma_2 d''(x) + d'''(x)). \end{aligned}$$

7.3 As classes de ondas planas e ondas modais

Ondas planas e modais não são a mesma classe de soluções. É possível exibir uma onda plana que não é uma onda modal. Por exemplo, substituindo em (7.5) os vetores constantes

$$c_1 = \begin{pmatrix} c\lambda^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c\lambda^2(a + e\lambda^2 - b\gamma^2)}{a\gamma} \end{pmatrix}$$

com $\alpha = 1$, λ e γ tais que $P(1) = 0$, tem-se a solução

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} \lambda t + \gamma x \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (7.74)$$

que é uma onda plana mas não é uma onda modal, uma vez que ondas modais como definidas em (7.37) não são lineares em t .

Ao considerar ondas planas $\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{V}(\lambda t + \gamma x)$, o argumento $s = \lambda t + \gamma x$ é dado com λ e γ satisfazendo a equação $P(\eta) = 0$ dado em (7.9). As raízes de (7.9) são $\eta = 0, 0, \alpha, -\alpha$ com $\eta = \alpha$ denotando as raízes definidas em (7.11). Em particular, ondas exponenciais são ondas planas para as quais λ e γ satisfazem a equação de dispersão $Q(\lambda, \gamma) = b_0 + b_2 = 0$ dada em (7.29). Isto implica que $\alpha = \pm 1$.

Para ondas modais $\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{w}(x)$, a obtenção da amplitude espacial $\mathbf{w}(x)$ envolve as raízes z da equação característica (7.52). Isso é apenas, $b_0(\lambda, z) + b_2(\lambda, z) = 0$ com b_0, b_2 sendo os coeficientes dados em (7.9). Portanto, para uma comparação de ondas modais com ondas planas, deve-se assumir que apenas considera-se ondas planas com $\alpha = 1$, isto é, $P(\eta) = 0$ tendo raízes duplas $\eta = 0$ e uma raiz simples $\eta = \pm 1$. Esta última condição significa que os valores λ, γ satisfazendo a equação de dispersão para ondas exponenciais são relacionadas com os valores $\lambda, z(\lambda)$ da onda modal onde $z(\lambda)$ é a raiz da equação característica $Q(\lambda, z) = 0$ dada em (7.52). Quando as raízes $z = \pm \gamma_1, \pm \gamma_2$ de (7.52) são simples, a decomposição da onda modal (7.70) como superposição de ondas exponenciais em (7.70) ou (7.73) mostra que uma onda modal envolverá quatro ondas planas que são do tipo exponencial com $\alpha = 1$.

As frequências críticas $\lambda = 0$ e $\lambda = \lambda_c$ ocorrem para ambas ondas planas e modais. O caso $\lambda = 0$ corresponde a um caso estático $\alpha = 0$ para ondas planas e $\epsilon = \delta = 0$ nas ondas modais. Para estes valores, a função escalar geradora de onda plana $d_P(s)$ e modal $d(x)$ se tornarão polinômios cúbicos em x . O caso $\lambda = \lambda_c$ implica que α é arbitrário para ondas planas e para $\alpha = 1$ deve-se ter quatro ondas planas que correspondem as raízes $\gamma = 0, 0, \pm i\delta$ do polinômio característico $Q(z) = 0$ das ondas modais. O caso $\gamma = 0$ sendo uma raiz dupla, é trabalhado com o processo de Liouville. Isso introduz ondas com variação linear em x .

A partir da discussão acima, pode-se considerar que a classe de soluções formada por superposição finita de ondas planas contém todas as ondas modais uma vez que cada onda modal é a superposição de quatro ondas planas exponenciais (7.70). Além disso, a classe de soluções ondas exponenciais pode ser incluída na classe de soluções de ondas planas ou modais. Quando as ondas evanescentes *outgoing* e *ingoing* se colapsam, isto é, tornam-se estacionárias, é uma indicação de que tem-se uma frequência crítica que pode ser tratada pela técnica de limite de Liouville.

7.4 Análise de ondas em uma viga de Timoshenko com uma fissura

Técnicas de ondas têm sido empregadas por vários autores em métodos teóricos e experimentais para detecção de danos, localização de fissuras e outras imperfeições em estruturas, [89], [72], entre outros. Quando uma onda encontra um defeito, estará sujeita a reflexão e transmissão. Estes fenômenos podem fornecer informações sobre a localização e o tamanho do dano, uma vez que a existência de fissuras pode reduzir a rigidez de uma estrutura e resultar em mudanças no comportamento dinâmico estrutural.

Aqui, a caracterização de ondas modais (7.73) será empregada para discutir o comportamento de uma viga de Timoshenko com uma fissura aberta transversal localizada no ponto $x = x_i$ como mostrado na Figura 7.3. O problema de fissuras tem sido modelado por vários autores como dois segmentos conectados por uma mola rotacional sem massa com flexibilidade seccional ou com restrições elásticas gerais [126], [70], [72].

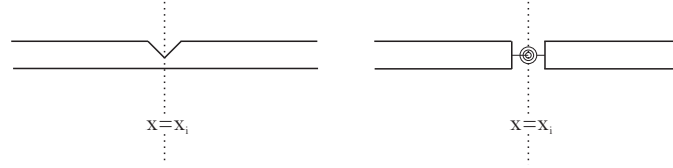


Figura 7.3: Viga com fissura aberta modelada como uma mola rotacional.

Para uma viga bi-segmentada com uma conexão elástica, condições de compatibilidade são impostas na localização antes e depois da fissura para o deslocamento, momento fletor e cisalhamento, isto é, [72]

$$u_i(t, x_i^-) = u_{i+1}(t, x_i^+), \quad b\psi'_i(t, x_i^-) = b\psi'_{i+1}(t, x_i^+) \quad (7.75)$$

e

$$a \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}(t, x_i^-) - \psi_i(t, x_i^-) \right) = a \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}(t, x_i^+) - \psi_{i+1}(t, x_i^+) \right) \quad (7.76)$$

$$\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}(t, x_i^+) - \frac{\partial u_i}{\partial x}(t, x_i^-) = \theta L \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial x}(t, x_i^+), \quad (7.77)$$

respectivamente, onde L é o comprimento da viga, θ é a flexibilidade seccional da fissura não dimensional [89],

$$\theta = 6\pi\bar{\gamma}^2 f_D(\bar{\gamma}) \left(\frac{H}{L} \right) \quad (7.78)$$

com

$$f_D(\bar{\gamma}) = 0.6384 - 1.035\bar{\gamma} + 3.7201\bar{\gamma}^2 - 5.1773\bar{\gamma}^3 + 7.553\bar{\gamma}^4 - 7.332\bar{\gamma}^5 + 2.4909\bar{\gamma}^6, \quad (7.79)$$

dependendo da razão fissura-profundidade (*crack-depth ratio*) não dimensional $\bar{\gamma} = \frac{\tilde{a}}{H}$, \tilde{a} sendo a profundidade da fissura e H a altura da viga. Aqui x_i^- e x_i^+ se referem as posições imediatamente a esquerda e a direitas de x_i , respectivamente.

De um ponto de vista físico, uma solução de onda que é incidente sobre uma fissura localizada em $x = x_i$ deve ser considerada refletida e transmitida. Assim,

tem-se a decomposição

$$\mathbf{v}_i(t, x) = \mathbf{v}_i^+(t, x) + \mathbf{v}_i^-(t, x), \quad (7.80)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^+ &= e^{\lambda t} [c_1^+ \Phi_M(x) \mathbf{a}(-\gamma_1, \gamma_2) + c_2^+ \Phi_M(x) \mathbf{a}(-\gamma_2, \gamma_1)], \\ \mathbf{v}_i^- &= e^{\lambda t} [c_1^- \Phi_M(x) \mathbf{a}(\gamma_1, \gamma_2) + c_2^- \Phi_M(x) \mathbf{a}(\gamma_2, \gamma_1)] \end{aligned}$$

são identificadas como ondas incidentes e refletidas, respectivamente. A onda modal transmitida em $x = x_i$ é $\mathbf{v}_{i+1}(t, x) = \mathbf{v}_{i+1}^+(t, x)$ onde

$$\mathbf{v}_{i+1}^+ = e^{\lambda t} [b_1^+ \Phi_M(x) \mathbf{a}(-\gamma_1, \gamma_2) + b_2^+ \Phi_M(x) \mathbf{a}(-\gamma_2, \gamma_1)]$$

tem amplitudes desconhecidas b_1^+ and b_2^+ .

Para dispositivos envolvendo taxas espaciais e excitações externas ou uma condição de contorno forçante no tempo, as condições de compatibilidade podem ser escritas na forma geral como

$$\mathcal{C}_{1,i} \mathcal{V}_i(t, x_i^-) = \mathcal{C}_{2,i} \mathcal{V}_{i+1}(t, x_i^+) + \mathcal{N}_i, \quad (7.81)$$

onde

$$\mathcal{C}_{1,i} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11}^i & \mathcal{C}_{12}^i \\ \mathcal{C}_{21}^i & \mathcal{C}_{22}^i \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{2,i} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{C}}_{11}^i & \tilde{\mathcal{C}}_{12}^i \\ \tilde{\mathcal{C}}_{21}^i & \tilde{\mathcal{C}}_{22}^i \end{pmatrix}$$

com $\mathcal{C}_{i,j}^i$ e $\tilde{\mathcal{C}}_{i,j}^i$ para $i, j = 1, 2$ são matrizes de ordem 2×2 e

$$\mathcal{V}_j(t, x) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_j \\ (\mathbf{v}_j)_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_j(t, x) \\ \psi_j(t, x) \\ u'_j(t, x) \\ \psi'_j(t, x) \end{pmatrix}. \quad (7.82)$$

Aqui considera-se que não existem entradas de tempo, como termos inerciais e define-se $\mathcal{N}_i = 0$.

Para uma fissura simulada como uma mola rotacional em $x = x_i$, as condições de compatibilidade (7.75), (7.76), (7.77) originam as matrizes

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{11}^i = \tilde{\mathcal{C}}_{11}^i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{12}^i = \tilde{\mathcal{C}}_{12}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{21}^i = \tilde{\mathcal{C}}_{21}^i = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C}_{22}^i &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{C}}_{22}^i = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & \theta L \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.83)$$

Substituindo em (7.81) as soluções antes e depois da fissura, resulta a sistema

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_4 & -\mathcal{A}_1 & -\mathcal{A}_2 \\ \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & -\mathcal{B}_5 & -\mathcal{B}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^- \\ c_2^- \\ b_1^+ \\ b_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{A}_1 c_1^+ - \mathcal{A}_2 c_2^+ \\ -\mathcal{B}_1 c_1^+ - \mathcal{B}_2 c_2^+ \end{pmatrix}, \quad (7.84)$$

para determinar as amplitudes desconhecidas c_1^- , c_2^- , b_1^+ and b_2^+ . Aqui, onde por simplicidade $x_i = 0$, tem-se os coeficientes matriciais

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(\gamma_1, \gamma_2), \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\gamma_2, \gamma_1), \quad \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(-\gamma_1, \gamma_2), \quad \mathcal{A}_4 = \mathcal{A}(-\gamma_2, \gamma_1),$$

e

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\gamma_2), \quad \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(\gamma_1), \quad \mathcal{B}_5 = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}(\gamma_1), \quad \mathcal{B}_6 = \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}(\gamma_2)$$

com

$$\mathcal{A}(\gamma, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{(c\lambda^2 - a\eta^2)\gamma b}{ca\lambda^2} \\ -\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{b(\gamma^2 a - c\lambda^2)}{a} \\ -\frac{ab\gamma^2 - bc\lambda^2 + a^2}{a^2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta L\gamma \end{pmatrix}. \quad (7.85)$$

Resolvendo o sistema (7.84) tem-se

$$\mathbf{c}^- = \mathbf{R}\mathbf{c}^+, \quad \mathbf{b}^+ = \mathbf{T}\mathbf{c}^+,$$

onde \mathbf{R} e \mathbf{T} são as matrizes de reflexão e transmissão dadas por

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -\gamma_1 c \lambda^2 + \gamma_1^3 a & \gamma_2 \gamma_1^2 a - \gamma_2 c \lambda^2 \\ -\gamma_1 \gamma_2^2 a + \gamma_1 c \lambda^2 & -\gamma_2^3 a + \gamma_2 c \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$\mu = \frac{L\theta}{-\theta L(\gamma_2(\gamma_2^2 a - c\lambda^2) + \gamma_1(-\gamma_1^2 a + c\lambda^2)) - 2a(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)}, \quad (7.86)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix}.$$

O mesmo procedimento matricial pode ser aplicado ao caso de encontrar frequências naturais com condições de contorno ou dispositivos intermediários [78].

Simulações foram realizadas utilizando os parâmetros $E = 2.07 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\rho = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, com $B = 10$ mm, altura $H = 10$ mm, $\nu = 0.3$, e $\bar{\gamma} = 0.35$ para uma fissura com uma única abertura (*single-sided crack*) com profundidade $\tilde{a} = 3.5$ mm dados em [72]. Os resultados com a norma matricial euclidiana $\|\mathbf{R}\|_2$ das matrizes de reflexão e o módulo de cada uma de suas componentes são apresentados na Figura 7.4. É observado que o valor da norma $\|\mathbf{R}\|_2$ é mais influenciado por $|\mathbf{R}_{12}|$, que por sua vez, a amplitude da componente da onda refletida com $e^{\gamma_1 x}$. O comportamento da norma euclidiana da matriz de transmissão $\|\mathbf{T}\|_2$ é mais influenciada pelos componentes da diagonal da matriz.

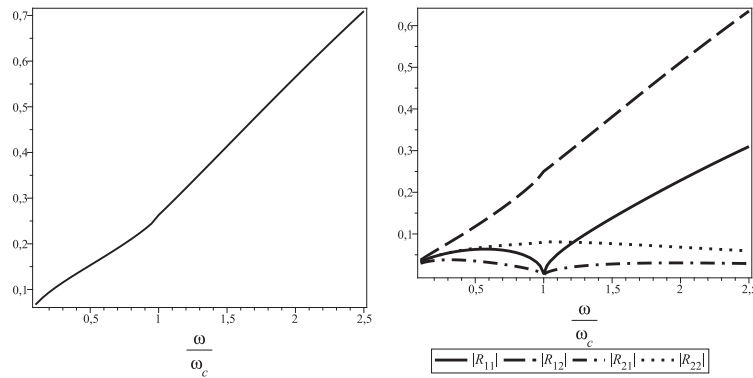


Figura 7.4: Norma matricial e módulo das componentes da matriz \mathbf{R} .

O argumento das componentes de \mathbf{R} e \mathbf{T} são apresentados na Figura 7.5. Para baixas frequências, os argumentos $\arg(\mathbf{R}_{12})$ e $\arg(\mathbf{T}_{21})$ são mais significantes e representam a fase de uma onda refletida e transmitida, respectivamente. Simulações mostram que para baixas frequências $\arg(R_{21})$ está próximo de $\arg(\mathbf{R}_{11})$ e $\arg(\mathbf{R}_{22})$ está próximo de $\arg(\mathbf{R}_{12})$. Para altas frequências $\arg(\mathbf{R}_{ij})$ e $\arg(\mathbf{T}_{ij}), i, j = 1, 2$, tendem a valores constantes.

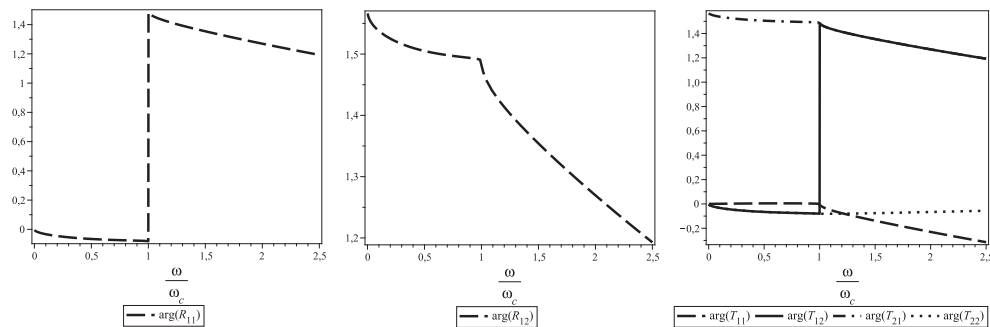


Figura 7.5: Argumentos das coordenadas das matrizes \mathbf{R} e \mathbf{T} .

7.5 Condições de contorno

Quando considera-se uma onda incidente na extremidade de uma viga finita, existe uma onda refletida a ser determinada a partir da onda incidente e das condições de contorno. Dispositivos elásticos translacionais e rotacionais na extremidade da viga são condições de contorno não clássicas que através de um processo de limite podem incluir condições de contorno clássicas tais como vigas apoiada, livre e fixa [48]. Em [78], tais casos foram discutidos utilizando ondas exponenciais longe das frequências críticas. Aqui, apresenta-se uma decomposição da base matricial modal $\Phi_M(x)$ em componentes com termos viajantes para trás e para frente (*ingoing* e *outgoing*) que pode ser usada também, nas frequências

críticas. Para as vigas, na Figura 7.6, as condições de contorno físicas são

$$\begin{aligned} -V &= -a \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) - \psi(t, L) \right) = K_T u(t, L) + K_{TR} \psi(t, L), \\ M &= -b \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, L) = K_R \psi(t, L) + K_{RT} u(t, L), \end{aligned} \quad (7.87)$$

onde $V(t, x)$ é o cisalhamento e $M(t, x)$ é o momento fletor, K_T e K_R são a rigidez translacional e rotacional, respectivamente, e K_{TR} , K_{RT} são acoplamentos das rigidezes translacionais e rotacionais, respectivamente.

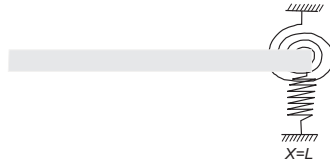


Figura 7.6: Condições de contorno não clássicas em $x = L$.

Estas condições de contorno podem ser escritas matricialmente como

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{v}(t, L) + \mathbf{A}_2 \mathbf{v}_x(t, L) = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(t, L) + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}_x(t, L) \quad (7.88)$$

onde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad (7.89)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} K_T & K_{TR} \\ K_{RT} & K_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seguindo o tratamento matricial dada para as condições de compatibilidade (7.81), as condições de contorno são escritas na forma compacta

$$\mathbf{A} \mathcal{V}(t, L) = \mathbf{B} \mathcal{V}(t, L) \quad (7.90)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} são dadas na forma de blocos como

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2), \quad \mathcal{V}(t, L) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t, L) \\ \mathbf{v}_x(t, L) \end{pmatrix}. \quad (7.91)$$

A decomposição de onda (7.80) de uma onda modal geral

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \Phi_M(x) \mathbf{a} = \mathbf{v}^+(t, x) + \mathbf{v}^-(t, x) \quad (7.92)$$

pode ser escrito adicionalmente em termos de uma decomposição da função escalar geradora de onda modal $d(x)$ dada em (7.53). Essa decomposição é dada por

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x) \quad (7.93)$$

onde

$$d^+(x) = \frac{1 - \gamma_2 e^{-\gamma_1 x} + \gamma_1 e^{-\gamma_2 x}}{2 ab(-\gamma_2^2 + \gamma_1^2) \gamma_1 \gamma_2}, \quad d^-(x) = \frac{1 - \gamma_2 e^{\gamma_1 x} - \gamma_1 e^{\gamma_2 x}}{2 ab(-\gamma_2^2 + \gamma_1^2) \gamma_1 \gamma_2}, \quad (7.94)$$

que permite escrever $\Phi_M(x) = \Phi_M^+(x) + \Phi_M^-(x)$ onde de acordo com (7.68)

$$\Phi_M^+(x) = e^{-\gamma_1 x} \Psi_1(-\gamma_1) + e^{-\gamma_2 x} \Psi_2(-\gamma_2), \quad \Phi_M^-(x) = e^{\gamma_1 x} \Psi_1(\gamma_1) + e^{\gamma_2 x} \Psi_2(\gamma_2), \quad (7.95)$$

sendo $\Psi_i(\gamma)$, $i = 1, 2$, dado em (7.69) resultando

$$\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}^+(t, x) + \mathbf{v}^-(t, x) = e^{\lambda t} (\Phi_M^+(x) \mathbf{a} + \Phi_M^-(x) \mathbf{a}), \quad (7.96)$$

onde $\mathbf{v}^+(t, x) = e^{\lambda t} \Phi_M^+(x) \mathbf{a}$ and $\mathbf{v}^-(t, x) = e^{\lambda t} \Phi_M^-(x) \mathbf{a}$.

Assumindo conhecida a onda incidente no contorno, então o valor de onda $\mathbf{b} = \Phi_M^+(L) \mathbf{a}$ de ordem 2×1 no contorno é conhecido e impõe restrições para obter o vetor \mathbf{a} de ordem 4×1 . Assim resolvendo o sistema $\Phi_M^+(L) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ permite escrever

$$\mathbf{a} = \Lambda \tilde{\mathbf{a}} + \Sigma \quad (7.97)$$

com

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad (7.98)$$

onde a_{11}, a_{21} dependem linearmente de a_{12} e a_{22} , isto é,

$$a_{11} = a_{11}(a_{12}, a_{22}) = \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \sigma_1,$$

$$a_{21} = a_{21}(a_{12}, a_{22}) = \alpha_3 a_{12} + \alpha_4 a_{22} + \sigma_2.$$

A substituição da decomposição matricial (7.96) em (7.90), resulta em

$$[(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1) (\Phi_M^+(L) + \Phi_M^-(L)) + (\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2) (\Phi_M^+(L)_x + \Phi_M^-(L)_x)] \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (7.99)$$

Utilizando (7.97), deve-se resolver o sistema linear 2×2

$$\mathbf{M}_a \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{G} \quad (7.100)$$

onde

$$\mathbf{M}_a = [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1) (\Phi_M^+(L) + \Phi_M^-(L)) + (\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2) (\Phi_M^+(L)_x + \Phi_M^-(L)_x)] \Lambda,$$

$$\mathbf{G} = - [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1) (\Phi_M^+(L) + \Phi_M^-(L)) + (\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2) (\Phi_M^+(L)_x + \Phi_M^-(L)_x)] \Sigma.$$

Assim, a onda refletida é dada por $\mathbf{v}^-(t, x) = e^{\lambda t} \Phi_M^-(x) \mathbf{a} = e^{\lambda t} \Phi_M^-(x) (\Lambda \tilde{\mathbf{a}} + \sigma)$.

O mesmo procedimento é seguido para o caso de condições de contorno na outra extremidade $x = 0$.

8 MODELO NÃO LOCAL DE ERINGEN: FORMULAÇÕES, ONDAS PLANAS E MODAIS

O estudo de estruturas com dimensões muito pequenas tem motivado a introdução da teoria da mecânica do contínuo dependente da escala [39, 80, 67, 74]. Em [74], Peddieson et. al. [96] é pontuado como o primeiro a aplicar a teoria do contínuo não local em nanoestruturas, e a teoria não local de Eringen e co-autores [39] tem sido aplicada a problemas como propagação de ondas, deslocamento e propagação de fissuras.

De acordo com a teoria da elasticidade não local de Eringen, a tensão em qualquer ponto de referência do corpo não depende somente da deformação deste ponto, mas também da deformação em todos os pontos do corpo.

A teoria de vigas de Timoshenko não local usando as relações constitutivas diferenciais e teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem de Eringen, de acordo com [74] considera o momento fletor M e força de cisalhamento S dados pelas expressões

$$\begin{aligned} M - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ S - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right), \end{aligned} \tag{8.1}$$

com $u(t, x)$ sendo a deflexão transversal do eixo da viga, $\psi(t, x)$ a rotação da seção da viga, ρ a densidade de massa da viga, A a área da seção transversal, I o segundo momento de área da seção da viga, E módulo de Young, G o módulo de cisalhamento, κ o coeficiente de cisalhamento de Timoshenko, a_0 um comprimento interno característico, e_0 é uma constante de ajuste experimental do modelo, p uma força transversal distribuída sobre o eixo x e momento q .

Enquanto, as equações do movimento são [74]

$$\begin{aligned}\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial S}{\partial x} + p, \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial M}{\partial x} + S + q.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Substituindo as equações do movimento (8.2) em (8.1) resultam as expressões para momento e cisalhamento

$$\begin{aligned}M &= EI \frac{\partial \psi}{\partial x} + (e_0 a_0)^2 \left(\rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p - \frac{\partial q}{\partial x} \right), \\ S &= \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) + (e_0 a_0)^2 \left(\rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{8.3}$$

Das equações (8.2) e das expressões para momento e cisalhamento (8.3) decorrem as equações do modelo não local de Timoshenko

$$\begin{aligned}\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u(t, x) - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right) - \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) \\ = \left(p - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right),\end{aligned}\tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\psi(t, x) - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \right) - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) \\ = \left(q - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right).\end{aligned}\tag{8.5}$$

O modelo clássico de Timoshenko (local) é obtido fazendo $e_0 a_0 = 0$ nas equações (8.4)-(8.5), que resulta nas equações

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = p(t, x),\tag{8.6}$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(t, x) - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = q(t, x).\tag{8.7}$$

Matricialmente o sistema de equações (8.4)-(8.5) é apresentado como

$$\mathbf{M}_N \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{R} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}_N(t, x)\tag{8.8}$$

sendo

$$\mathbf{M}_N = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \left(1 - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right), \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} p - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ q - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{bmatrix}.$$

Numa forma que lembra um sistema vibratório conservativo

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{K} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}_N \quad (8.10)$$

sendo $\mathbf{0}$ o vetor nulo de ordem 2×1 e

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix} \left(1 - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),$$

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & -EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \end{pmatrix}.$$

O modelo não local de Eringen pode ser apresentado na forma desacoplada como duas equações diferenciais evolutivas de quarta ordem escrevendo as equações (8.4)-(8.5) na forma $\mathbf{L} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}_N(t, x)$, com

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} c \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c(e_0 a_0)^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} & a \frac{\partial}{\partial x} \\ -a \frac{\partial}{\partial x} & e \frac{\partial^2}{\partial t^2} - e(e_0 a_0)^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} - b \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

$$\mathbf{F}_N(t, x) = \begin{pmatrix} p - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ q - (e_0 a_0)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

e as constantes já introduzidas em (6.14)

$$a = \kappa GA, \quad b = EI, \quad c = \rho A, \quad e = \rho I. \quad (8.13)$$

Utilizando a identidade de Cramer

$$\text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{L} = \mathbf{L}\text{adj}(\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L})\mathbf{I}, \quad (8.14)$$

sendo $\text{adj}(\mathbf{L})$ a matriz adjugada de \mathbf{L} , definida como a transposta da matriz dos cofatores de \mathbf{L} . Este processo resulta em

$$\begin{aligned} & \left(ce + (e_0a_0)^2 \left(-2ce + ce(e_0a_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} \\ & + \left(ca - (cb + ea) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (e_0a_0)^2 \left((ae + cb) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - ca \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \\ & \quad + ab \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = G_1, \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} & \left(ce + (e_0a_0)^2 \left(-2ce + ce(e_0a_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 \psi(t, x)}{\partial t^4} \\ & + \left(ca - (cb + ea) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (e_0a_0)^2 \left((ae + cb) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - ca \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} \\ & \quad + ab \frac{\partial^4 \psi(t, x)}{\partial x^4} = G_2 \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(e + (e_0a_0)^2 \left(-2e + e(e_0a_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ & - (b + a(e_0a_0)^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + ap - a \frac{\partial q}{\partial x} + (e_0a_0)^2 \left(b \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + a \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} \right), \end{aligned} \quad (8.16)$$

e

$$\begin{aligned} G_2 &= \left(c + (e_0a_0)^2 \left(-2c + c(e_0a_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \\ & + a \frac{\partial p}{\partial x} - a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + (e_0a_0)^2 \left(a \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} - a \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Devido a variedade de modelos apresentados na literatura e pesquisados com a inclusão de efeitos "não-clássicos" como escala, dispositivos, materiais viscoelásticos, etc, este trabalho visa estudar ondas planas, ou viajantes, e ondas modais, ou estacionárias, que decorrem da inclusão de condições de contorno nos extremos de vigas de extensão finita ou da inclusão de dispositivos intermediários [118].

Por exemplo, para uma viga apoiada em ambas as extremidades, tem-se as condições de contorno deslocamento u nulo e momento fletor não local M nulo em ambas as extremidades, isto é

$$\begin{aligned} u(t, 0) = 0, \quad EI\psi_x(t, 0) + (e_0a_0)^2 [\rho I\psi_{xtt}(t, 0) - \rho Au_{tt}(t, 0)] &= 0, \\ u(t, l) = 0, \quad EI\psi_x(t, l) + (e_0a_0)^2 [\rho I\psi_{xtt}(t, l) - \rho Au_{tt}(t, l)] &= 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

8.1 Ondas planas no modelo não local de Eringen

Como nos capítulos anteriores as soluções do tipo ondas planas são dadas por

$$u(t, x) = \mathbf{U}(\lambda t + \gamma x), \quad \psi(t, x) = \Psi(\lambda t + \gamma x).$$

Supondo que estas são soluções das equações em (8.4)-(8.5), para $p = 0$ e $q = 0$, utilizando a fase de onda plana já definida como $s = \lambda t + \gamma x$ e as constantes definidas em (6.14), resulta o sistema de equações diferenciais de quarta ordem

$$-c(e_0a_0)^2\lambda^2\gamma^2\mathbf{U}^{(iv)}(s) + (c\lambda^2 - a\gamma^2)\mathbf{U}''(s) + a\gamma\Psi'(s) = 0, \quad (8.19)$$

$$-e(e_0a_0)^2\lambda^2\gamma^2\Psi^{(iv)}(s) + (e\lambda^2 - b\gamma^2)\Psi''(s) - a\gamma\mathbf{U}'(s) + a\Psi(s) = 0, \quad (8.20)$$

que matricialmente pode ser escrito como

$$\mathbf{N}_P\mathbf{V}^{(iv)}(s) + \mathbf{M}_P\mathbf{V}''(s) + \mathbf{C}_P\mathbf{V}'(s) + \mathbf{K}_P\mathbf{V}(s) = 0, \quad (8.21)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_P &= \begin{pmatrix} -c(e_0a_0)^2\lambda^2\gamma^2 & 0 \\ 0 & -e(e_0a_0)^2\lambda^2\gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_P = \begin{pmatrix} c\lambda^2 - a\gamma^2 & 0 \\ 0 & e\lambda^2 - b\gamma^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_P &= \begin{pmatrix} 0 & a\gamma \\ -a\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(s) \\ \Psi(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

No modelo não local, tem-se o parâmetro $e_0a_0 \neq 0$, e portanto a solução geral da equação (8.21) pode ser dada por

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{h}_P(s)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'_P(s)\mathbf{c}_2 + \mathbf{h}''_P(s)\mathbf{c}_3 + \mathbf{h}'''_P(s)\mathbf{c}_4 = \Phi_P(s)\mathbf{c} \quad (8.22)$$

sendo $\mathbf{h}_P(s)$ a resposta matricial fundamental de ordem 2×2 , solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_P \mathbf{h}_P^{(iv)}(s) + \mathbf{M}_P \mathbf{h}_P''(s) + \mathbf{C}_P \mathbf{h}_P'(s) + \mathbf{K}_P \mathbf{h}_P(s) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_P(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}_P'(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}_P''(0) = \mathbf{0}, \mathbf{N}_P \mathbf{h}_P'''(0) &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

e $\Phi_P(s)$ a matriz base de ordem 2×8

$$\Phi_P(s) = (\mathbf{h}_P(s) \mathbf{h}_P'(s) \mathbf{h}_P''(s) \mathbf{h}_P'''(s)), \quad (8.24)$$

e \mathbf{c} um vetor constante.

Para o sistema (8.21), a resposta matricial fundamental $\mathbf{h}_P(s)$ é obtida da fórmula fechada (A.2) considerando $m = 4$ e $N = 2$, que resulta

$$\mathbf{h}_P(s) = \begin{pmatrix} ad_P(s) + (e\lambda^2 - b\gamma^2)d_P''(s) - (e_0a_0)^2\gamma^2\lambda^2 ed_P^{iv}(s) & -\gamma d_P'(s)a \\ \gamma d_P'(s)a & (c\lambda^2 - a\gamma^2)d_P''(s) - c(e_0a_0)^2\gamma^2\lambda^2 d_P^{(iv)}(s) \end{pmatrix}, \quad (8.25)$$

sendo $d_P(s)$ a função geradora de onda plana não local. Esta função satisfaz o problema de valor inicial escalar de oitava ordem

$$\begin{aligned} b_{0N}d_P^{(viii)}(s) + b_{2N}d_P^{(vi)}(s) + b_{4N}d_P^{(iv)}(s) + b_{6N}d_P''(s) &= 0 \\ b_{0N}d_P^{(8-k)}(0) &= \delta_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \end{aligned} \quad (8.26)$$

para δ_{1k} o delta de Kronecker, e b_i , $i = 0, \dots, 8$ os coeficientes do polinômio

$$P(\eta) = \det(\eta^4 \mathbf{N}_P + \eta^2 \mathbf{M}_P + \eta \mathbf{C}_P + \mathbf{K}_P) = \sum_{i=0}^8 b_{iN} \eta^{8-i}, \quad (8.27)$$

sendo

$$\begin{aligned} b_{0N} &= ce(e_0a_0)^4\gamma^4\lambda^4, \\ b_{2N} &= cb(e_0a_0)^2\gamma^4\lambda^2 + ae\gamma^4\lambda^2(e_0a_0)^2 - 2ce(e_0a_0)^2\gamma^2\lambda^4, \\ b_{4N} &= ce\lambda^4 - cb\lambda^2\gamma^2 - ca(e_0a_0)^2\gamma^2\lambda^2 - ae\gamma^2\lambda^2 + ab\gamma^4, \\ b_{6N} &= ca\lambda^2. \end{aligned} \quad (8.28)$$

No caso limite $e_0a_0 = 0$ no modelo não local obtém-se o sistema (8.6)-(8.7), similarmente (8.15) se reduz a equação de quarta ordem do caso local (6.12).

A solução $\mathbf{h}_P(s)$ em (8.25) possui a mesma forma que a $\mathbf{h}_P(s)$ para o caso local (7.7), porém cabe salientarmos que tem-se uma singularidade na condição inicial de (8.23). Por outro lado, o polinômio característico (8.27) se reduz ao polinômio de quarta ordem (7.9) do modelo local, mas deve-se observar que as condições iniciais de (8.26) não se reduzem as condições iniciais do caso local (7.8).

8.2 Ondas planas do tipo exponencial no modelo não local de Eringen

Por substituição no modelo não local de Eringen (8.4)-(8.5) para $p = 0$ e $q = 0$, a procura de soluções do tipo ondas planas exponenciais

$$u(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x} U_0, \quad \psi(t, x) = e^{\lambda t + \gamma x} \Psi_0, \quad (8.29)$$

leva a obtenção de soluções não nulas do sistema algébrico

$$\begin{pmatrix} c\lambda^2(1 - (e_0 a_0)^2 \gamma^2) - a\gamma^2 & a\gamma \\ -a\gamma & e\lambda^2(1 - (e_0 a_0)^2 \gamma^2) - b\gamma^2 + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.30)$$

com as constantes a , b , c e e dadas em (6.14), ou em forma compacta, tem-se

$$\mathcal{L}(\lambda, \gamma) \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}.$$

A fim de garantir a existência das soluções planas exponenciais não nulas, λ e γ devem satisfazer a equação polinomial $Q_N(\lambda, \gamma) = \det(\mathcal{L}(\lambda, \gamma)) = 0$

$$Q_N(\lambda, \gamma) = (ce + (e_0 a_0)^2 (-2ce + ce(e_0 a_0)^2 \gamma^2) \gamma^2) \lambda^4 - (cb + ae + ca(e_0 a_0)^2) \gamma^2 \lambda^2 + ca\lambda^2 + ab\gamma^4 + (e_0 a_0)^2 (cb + ae) \gamma^4 \lambda^2 = 0. \quad (8.31)$$

Para λ e γ tais que $Q_N(\lambda, \gamma) = 0$, de (8.30) obtém-se

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

onde $\xi = -\frac{a\gamma}{c\lambda^2(1-(e_0a_0)^2\gamma^2)-a\gamma^2}$, para $c\lambda^2(1-(e_0a_0)^2\gamma^2)-a\gamma^2 \neq 0$. Caso $c\lambda^2(1-(e_0a_0)^2\gamma^2)-a\gamma^2 = 0$, resulta $\gamma^2 = \sqrt{\frac{c\lambda^2}{c(e_0a_0)^2\lambda^2+a}}$ que substituindo em (8.31) determina $\lambda = 0$, assim o sistema (8.30) reduz-se a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.33)$$

e então $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Observe que considerando $e_0a_0 = 0$ em (8.32), o vetor \mathbf{v}_0 equivale ao vetor obtido em (7.31).

8.2.1 Equação de frequência

A equação polinomial (8.31) para o caso $\gamma = i\beta$ e $\lambda = i\omega$, para β e ω reais, é chamada equação de dispersão, ou equação de frequência e resulta

$$Q_N(\omega, \beta) = c_{0N}(\omega)\beta^4 + c_{2N}(\omega)\beta^2 + c_{4N}(\omega) = 0, \quad (8.34)$$

onde

$$\begin{aligned} c_{0N}(\omega) &= ab + ce(e_0a_0)^4\omega^4 - (ae + cb)(e_0a_0)^2\omega^2, \\ c_{2N}(\omega) &= ((ae + cb)\omega^2 + ca(e_0a_0)^2\omega^2) - 2ce(e_0a_0)^2\omega^4, \\ c_{4N}(\omega) &= -\omega^2ca + \omega^4ce, \end{aligned} \quad (8.35)$$

ou ainda

$$Q_N(\omega, \beta) = p_{0N}(\beta)\omega^4 - p_{2N}(\beta)\omega^2 + p_{4N}(\beta) = 0 \quad (8.36)$$

onde

$$\begin{aligned} p_{0N}(\beta) &= ce + 2ce(e_0a_0)^2\beta^2 + ce(e_0a_0)^4\beta^4, \\ p_{2N}(\beta) &= ca + (e_0a_0)^2(cb + ae)\beta^4 + (ae + cb + ca(e_0a_0)^2)\beta^2, \\ p_{4N}(\beta) &= ab\beta^4. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Utilizando [74], as raízes $\omega(\beta)$ de (8.36) podem ser escritas da forma

$$\begin{aligned}\omega_{N1}(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1+(e_0a_0)^2\beta^2}}\omega_{L1}(\beta), \\ \omega_{N2}(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1+(e_0a_0)^2\beta^2}}\omega_{L2}(\beta),\end{aligned}\tag{8.38}$$

sendo ω_{L1} e ω_{L2} respectivamente a menor e a maior raízes da equação obtida fazendo $e_0a_0 = 0$ em (8.36), modelo clássico de Timoshenko,

$$\begin{aligned}\omega_{L1}^2(\beta) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \beta^2 + \frac{a}{e} - \sqrt{\left(\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \beta^2 + \frac{a}{e} \right)^2 - 4\frac{ab}{ce}\beta^4} \right], \\ \omega_{L2}^2(\beta) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \beta^2 + \frac{a}{e} + \sqrt{\left(\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \beta^2 + \frac{a}{e} \right)^2 - 4\frac{ab}{ce}\beta^4} \right].\end{aligned}\tag{8.39}$$

Os coeficientes de (8.34) estão graficados em uma duas e três dimensões na Figura 8.1 para os valores de e_0a_0 escolhidos como

$$\begin{aligned}e_0a_{01} &= 2 \times 10^{-10}, \quad e_0a_{02} = 3 \times 10^{-10}, \\ e_0a_{03} &= 3,719318934 \times 10^{-10} \quad \text{e} \quad e_0a_{04} = 2 \times \sqrt{10^{-19}},\end{aligned}\tag{8.40}$$

e considerando nanotubos de carbono cujos parâmetros são dados em [100] e apresentados nas Tabelas 8.1 e 8.2.

Material	E (GPa)	ρ ($\frac{kg}{m^3}$)	ν
Nanotubo de carbono	1000	2300	0,19

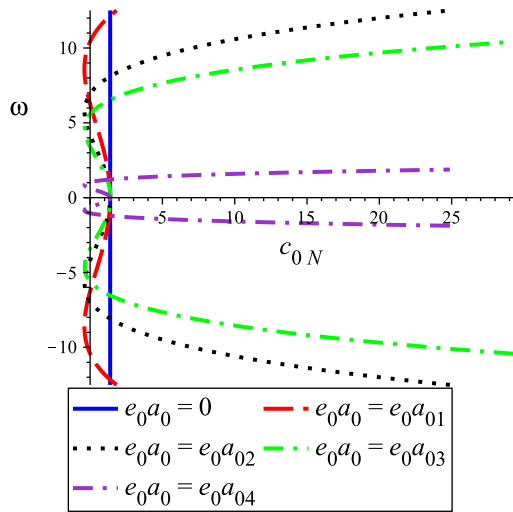
Tabela 8.1: Constantes físicas para nanotubos de carbono

Seção transversal circular	L	d
Nano escala	$120 \times 10^{-9}m$	$1 \times 10^{-9}m$

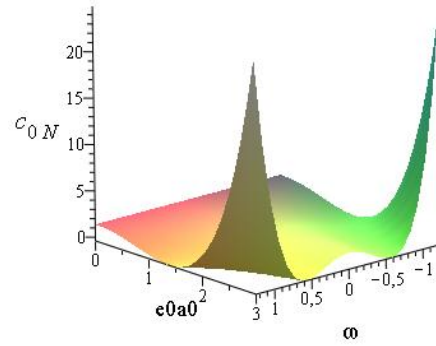
Tabela 8.2: Dimensões para viga com seção transversal circular.

Nas simulações, Figura 8.1, é possível observar que quando quando e_0a_0 decresce c_{0N} tende a constante, e c_{2N} tende a uma parábola, conforme previsto em

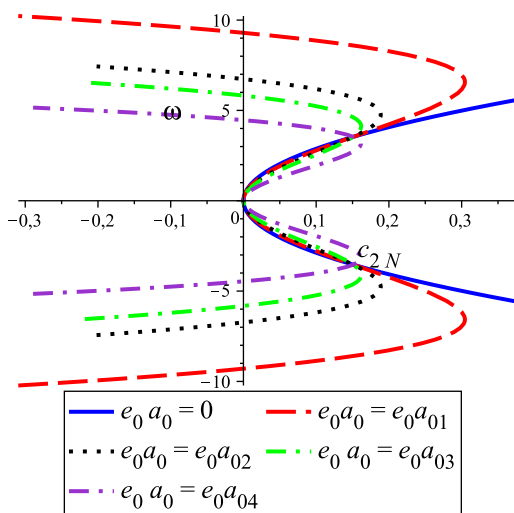
(7.46) para $\lambda = i\omega$. O coeficiente c_{4N} é apresentado apenas em duas dimensões, pois não depende de $e_0 a_0$.



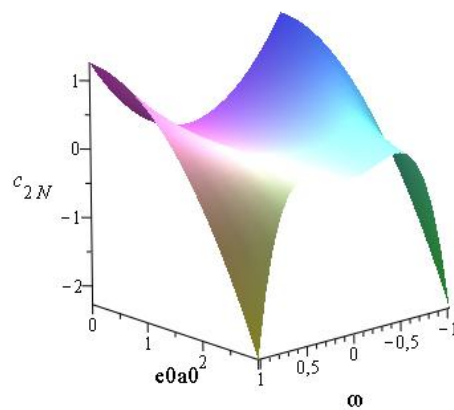
(a) Gráfico para c_{0N} em 2D



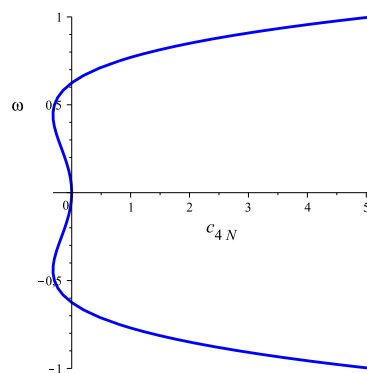
(b) Gráfico para c_{0N} em 3D



(c) Gráfico para c_{2N} em 2D



(d) Gráfico para c_{2N} em 3D



(e) Gráfico para c_{4N}

Figura 8.1: Gráficos para c_{0N} , c_{2N} , c_{4N} - Carbono (utilizando fator de escala)

Definem-se aqui duas frequências singulares $\omega_{b01} = \frac{1}{e_0 a_0} \sqrt{\frac{a}{c}}$ e $\omega_{b02} = \frac{1}{e_0 a_0} \sqrt{\frac{b}{e}}$ que são raízes de c_{0N} . Da definição das frequências singulares resulta

$$\omega_{b02}^2 - \omega_{b01}^2 = \frac{1}{(e_0 a_0)^2} \left(\frac{b}{e} - \frac{a}{c} \right) = \frac{1}{(e_0 a_0)^2 \rho} (E - \kappa G), \quad (8.41)$$

assim, se $E - \kappa G > 0$ tem-se $\omega_{b02}^2 > \omega_{b01}^2$ e se $E - \kappa G < 0$ tem-se $\omega_{b02}^2 < \omega_{b01}^2$.

Em particular, considerando $E = 2G(1 + \nu)$, ν coeficiente de Poisson, para $\nu > -\frac{7}{11}$ tem-se $E - \kappa G > 0$ para seções transversais circulares e retangulares cujos coeficientes de cisalhamento são $\kappa = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$ e $\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$, respectivamente [27]. Na sequência deste trabalho, considera-se o caso $E - \kappa G > 0$.

Para $E - \kappa G > 0$, observa-se que essas frequências singulares são limites das frequências $\omega_{N1}(\beta)$ e $\omega_{N2}(\beta)$, respectivamente, para β tendendo ao infinito, ou seja

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega_{N1} = \omega_{b01}, \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega_{N2} = \omega_{b02}. \quad (8.42)$$

A localização da raízes singulares ω_{b01} e ω_{b02} em relação a frequência crítica $\omega_c^2 = \frac{a}{e}$ depende diretamente do parâmetro não local $e_0 a_0$. Na figura 8.2, representa-se o eixo $(e_0 a_0)^2$ e neste eixo estão representadas as relações das frequências em cada intervalo, sendo que para $(e_0 a_0)^2 < \frac{e}{c}$ tem-se $\omega_c^2 < \omega_{b01}^2$, para $\frac{e}{c} < (e_0 a_0)^2 < \frac{b}{a}$ tem-se $\omega_{b01}^2 < \omega_c^2 < \omega_{b02}^2$ e finalmente para $(e_0 a_0)^2 > \frac{b}{a}$ tem-se $\omega_c^2 > \omega_{b02}^2$, considerando $E - \kappa G > 0$.

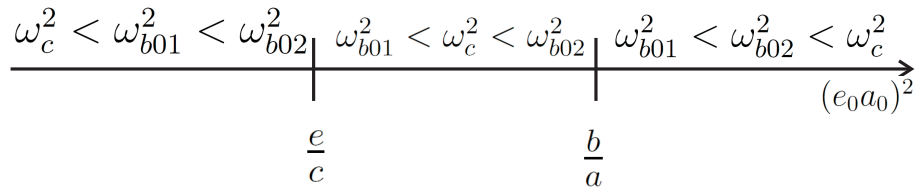


Figura 8.2: Relações entre ω_{b01} , ω_{b02} e ω_c para cada intervalo de $(e_0 a_0)^2$, para $E - \kappa G > 0$

8.3 Ondas modais no modelo não local de Eringen

Para problemas de valor de contorno é conveniente estudar soluções exponenciais no tempo do tipo ondas modais

$$u(t, x) = e^{\lambda t}U(x), \quad \psi(t, x) = e^{\lambda t}\Psi(x). \quad (8.43)$$

Substituindo (8.43) nas equações (8.4)-(8.5), para $p = 0$ e $q = 0$, resulta o sistema completo de equações diferenciais de segunda ordem

$$(-\kappa GA - \lambda^2(e_0 a_0)^2 \rho A)U''(x) + \kappa GA\Psi'(x) + \rho A\lambda^2 U(x) = 0, \quad (8.44)$$

$$(-EI - \lambda^2(e_0 a_0)^2 \rho I)\Psi''(x) - \kappa GAU'(x) + (\rho I\lambda^2 + \kappa GA)\Psi(x) = 0$$

para as amplitudes espaciais $U(x)$ e $\Psi(x)$.

O sistema de equações em (8.44) pode ser escrito em termos matriciais como a equação diferencial matricial de segunda ordem

$$\mathbb{M}_N \mathbf{w}''(x) + \mathbb{C} \mathbf{w}'(x) + \mathbb{K} \mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \quad (8.45)$$

com

$$\mathbb{M}_N = \mathbb{M} + \lambda^2 \mathbb{M}_{NL}, \quad \mathbb{K} = \lambda^2 \mathbb{E} + \mathbb{R}, \quad (8.46)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_{NL} = \begin{pmatrix} -c(e_0 a_0)^2 & 0 \\ 0 & -e(e_0 a_0)^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbb{C} &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} U(x) \\ \Psi(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Da equação (8.45), tem-se que a formulação não local pode levar a equação matricial diferencial singular para os valores $\lambda^2 = -\frac{\kappa G}{(e_0 a_0)^2 \rho}$ ou $\lambda^2 = -\frac{E}{(e_0 a_0)^2 \rho}$ que fazem o coeficiente não local matricial \mathbb{M}_N ser uma matriz singular¹. Em tal situação, ainda fazendo a suposição $\frac{b}{e} = \frac{a}{c}$ a matriz \mathbb{M}_N será nula, e

¹Considerando $\lambda = i\omega$ estes valores que tornam \mathbb{M}_N uma matriz singular são os valores que foram definidos como valores singulares ω_{b01} e ω_{b02} anteriormente.

o sistema diferencial de segunda ordem singular se tornará um sistema de primeira ordem.

A solução geral de (8.45) pode ser dada por

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{a}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{a}_2 = \Phi_N(x)\mathbf{a}, \quad (8.48)$$

onde

$$\Phi_N(x) = (\mathbf{h}(x) \quad \mathbf{h}'(x)), \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (8.49)$$

sendo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ são vetores constantes de ordem 2×1 e $\mathbf{h}(x)$ é a resposta matricial fundamental, solução do problema de valor inicial

$$\mathbb{M}_N \mathbf{h}''(x) + \mathbb{C}_N \mathbf{h}'(x) + \mathbb{K}_N(\lambda) \mathbf{h}(x) = \mathbf{0}, \quad (8.50)$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \mathbb{M} \mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}.$$

A resposta matricial fundamental $\mathbf{h}(x)$ pode ser obtida da fórmula fechada apresentada em (A.2), considerando $m = 2$ e $N = 2$, de onde resulta

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} -bd''(x) + (a + e\lambda^2)d(x) - e(e_0a_0)^2\lambda^2d''(x) & -ad'(x) \\ ad'(x) & -ad''(x) + c\lambda^2d(x) - c(e_0a_0)^2\lambda^2d''(x) \end{pmatrix}, \quad (8.51)$$

e $d(x)$ é a função escalar geradora de onda modal não local que satisfaz o problema de valor inicial

$$c_{0N}d^{(iv)}(x) + c_{2N}d''(x) + c_{4N}d(x) = 0, \quad (8.52)$$

$$d(0) = 0, d'(0) = 0, d''(0) = 0, c_{0N}d'''(0) = 1,$$

com $c_{0N}, c_{2N},$ e c_{4N} coeficientes $Q_N(\lambda, \gamma) = \det(\gamma^2\mathbb{M} + \gamma\mathbb{C} + \mathbb{K}) = c_{0N}\gamma^4 + c_{2N}\gamma^2 + c_{4N},$ sendo

$$\begin{aligned} c_{0N}(\lambda) &= ab + (e_0a_0)^2(ce\lambda^2(e_0a_0)^2 + (cb + ae))\lambda^2 \\ &= c_0 + (e_0a_0)^2(ce\lambda^2(e_0a_0)^2 + (cb + ae))\lambda^2, \end{aligned}$$

$$c_{2N}(\lambda) = -(ae + cb)\lambda^2 + (e_0a_0)^2(-ca - 2\lambda^2ce)\lambda^2 = c_2 + (e_0a_0)^2(-ca - 2\lambda^2ce)\lambda^2,$$

$$c_{4N}(\lambda) = \lambda^2ca + \lambda^4ce = c_4.$$

(8.53)

sendo c_0 , c_2 e c_4 os coeficientes do caso clássico dados em (7.46).

As raízes de $Q_N(\lambda, \gamma) = c_{0N}\gamma^4 + c_{2N}\gamma^2 + c_{4N} = 0$, são $\pm i\delta$, $\pm\epsilon$ e resulta

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{c_{0N} \delta \epsilon (\epsilon^2 + \delta^2)}. \quad (8.54)$$

sendo

$$\begin{aligned} \gamma = \epsilon &= \frac{1}{2} \sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{(g^2)^2 + 4r^4}}, \\ \gamma = i\delta, \delta &= \frac{1}{2} \sqrt{2g^2 + 2\sqrt{(g^2)^2 + 4r^4}}, \end{aligned} \quad (8.55)$$

onde

$$g^2 = \frac{c_{2N}(\lambda)}{c_{0N}(\lambda)}, \quad r^4 = -\frac{c_{4N}(\lambda)}{c_{0N}(\lambda)}. \quad (8.56)$$

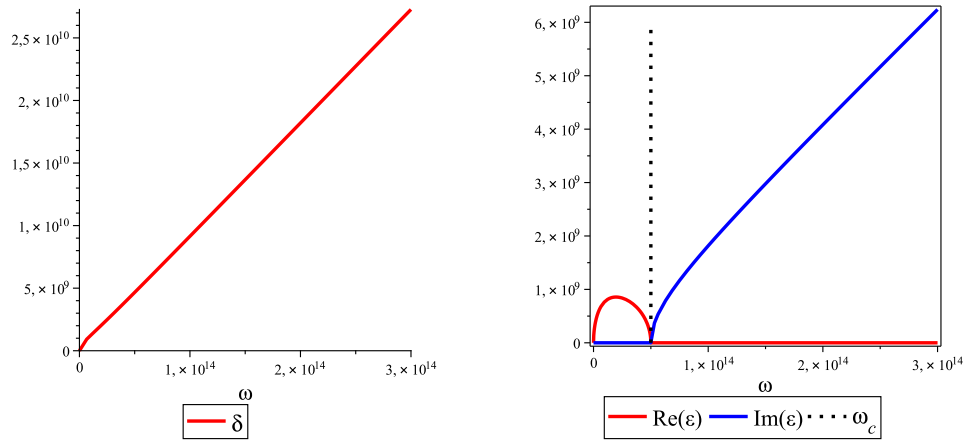
No caso limite $e_0 a_0 = 0$, o problema de valor inicial (8.50) corresponde ao problema de valor inicial do modelo local (7.41), ou seja, tem-se continuidade da base $\Phi_N(x)$ em (8.49) para a base $\Phi(x)$ local em (7.43).

As raízes ϵ e δ em (8.55) podem ser reais ou imaginárias, e a natureza depende dos valores de $e_0 a_0$, as análises a seguir são realizadas considerando $\lambda = i\omega$.

Nas Figuras 8.3 e 8.4 são apresentadas as partes reais e imaginárias de δ e ϵ para os parâmetros dados nas Tabelas 8.1 e 8.2. Na Figura 8.3 para o modelo local, e na Figura 8.4 para o modelo não local considerando $e_0 a_0 = e_0 a_{01}$. As simulações permitem observar a variação da natureza das raízes dependendo do valor de ω em relação as frequências ω_c , ω_{b01} e ω_{b02} . Para o caso local, os gráficos na Figura 8.3 determinam as características já conhecidas, δ real para todos os valores de ω reais, e ϵ real para $\omega < \omega_c$ e imaginário puro para $\omega_c < \omega$. Para o caso não local observa-se nas simulações, para $e_0 a_0 = e_0 a_{01}$, que

$$\delta = \begin{cases} \text{real se } \omega < \omega_{b02}, \\ \text{imaginária pura se } \omega_{b02} < \omega \end{cases}, \quad \epsilon = \begin{cases} \text{real se } \omega < \omega_c, \\ \text{imaginária pura se } \omega_c < \omega < \omega_{b01}, \\ \text{real se } \omega > \omega_{b01} \end{cases} \quad (8.57)$$

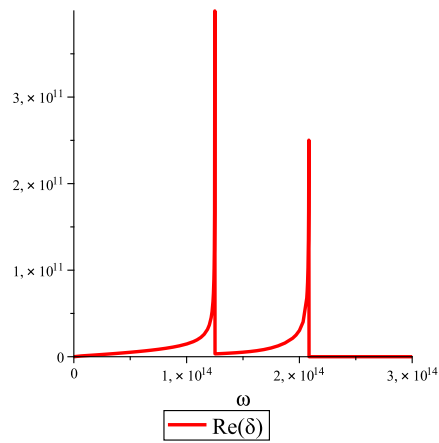
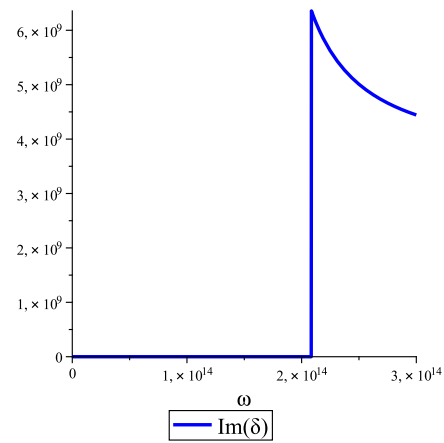
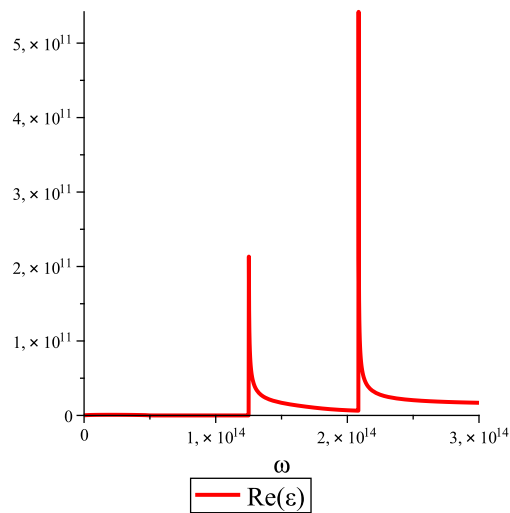
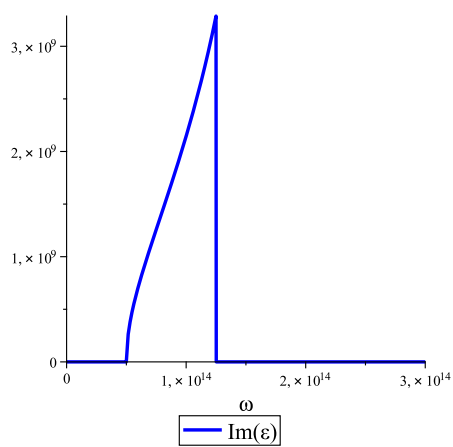
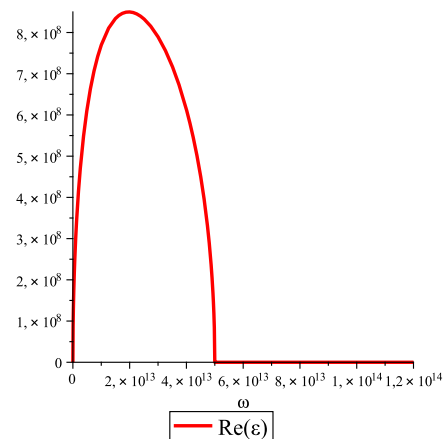
sendo $\omega_c = 4,999434583 \times 10^{13}$, $\omega_{b01} = 1,250336208 \times 10^{14}$ e $\omega_{b02} = 2,085144141 \times 10^{14}$.



(a) δ para o modelo local

(b) $\text{Re}(\delta)$ e $\text{Im}(\delta)$ para o modelo local

Figura 8.3: Modelo local: (a) δ e (b) $\text{Re}(\epsilon)$ e $\text{Im}(\epsilon)$

(a) $\text{Re}(\delta)$ para o modelo não local(b) $\text{Im}(\delta)$ para o modelo não local(c) $\text{Re}(\epsilon)$ para o modelo não local(d) $\text{Im}(\epsilon)$ para o modelo não localFigura 8.4: Modelo não local: (a) $\text{Re}(\delta)$, (b) $\text{Im}(\delta)$, (c) $\text{Re}(\epsilon)$ e (d) $\text{Im}(\epsilon)$

Para comparar os modelos local e não local restringe-se a frequência à $\omega < \omega_{b01}$. Pois para valores acima de ω_{b01} a natureza de ϵ não local não reflete característica do caso local. No caso limite, $e_0 a_0 \rightarrow 0$ tem-se que $\omega_{b01} \rightarrow \infty$ e $\omega_{b02} \rightarrow \infty$.

A natureza de δ e ϵ determina o comportamento da função escalar geradora de onda modal $d(x)$ dada em (8.54). Na Figura 8.5, a função $d(x)$ é graficada para os valores de frequência $\omega_1 = 4,9 \times 10^{13}$ e $\omega_2 = 1,2 \times 10^{14}$, tais que $\omega_1 < \omega_c < \omega_2 < \omega_{b01}$. As simulações permitem observar que para ω_1 a função $d(x)$ possui parcelas dadas por função seno e seno hiperbólico, enquanto para ω_2 a função $d(x)$ torna-se oscilatória.

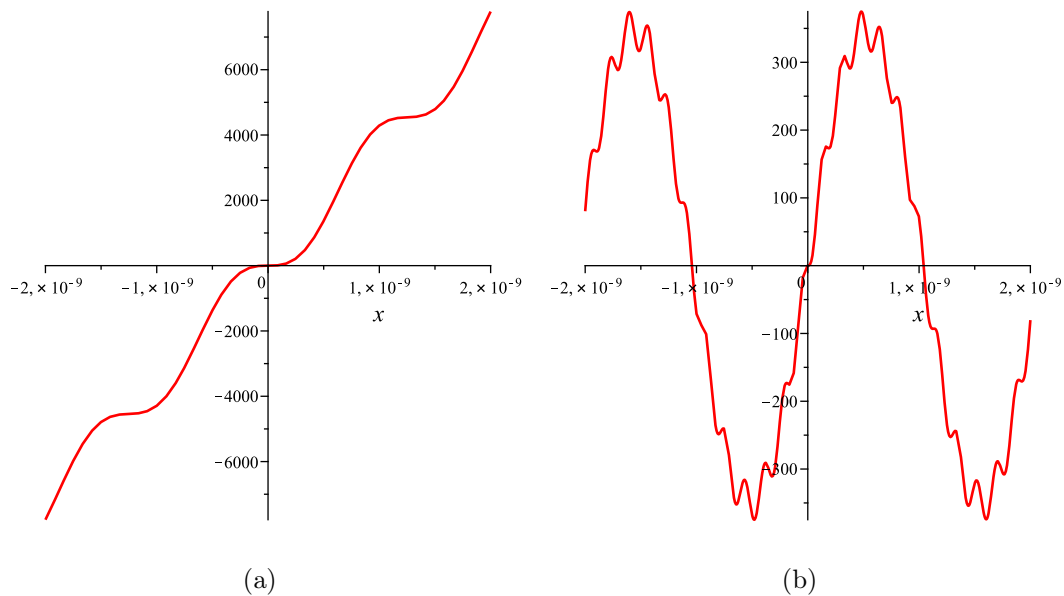


Figura 8.5: Função geradora $d(x)$: (a) $\omega = \omega_1$ e (b) $\omega = \omega_2$

8.4 Os espectros de frequência para uma viga não local bi-apoiada

Em 1953, foi observado por Traill-Nash and Collar [119] a existência de dois espectros distintos de frequência para as vibrações livres de vigas bi-apoiadas

descritas pela teoria de Timosheko. Esta observação será discutida a seguir para a equação de frequência $Q_N(\omega, \gamma) = 0$ do caso não local, seguindo [115], [116].

Supondo vibrações livres de (8.8) da forma de ondas modais $u(t, x) = e^{\lambda t}U(x)$, $\psi(t, x) = e^{\lambda t}\Psi(x)$, as amplitudes modais devem ser tais que verifiquem as condições de contorno dadas em (8.18), ou seja

$$\begin{aligned} U(0) &= 0, & EI\Psi'(0) + (e_0a_0)^2 (\rho I\lambda^2\Psi'(0) - \rho A\lambda^2U(0)) &= 0, \\ U(l) &= 0, & EI\Psi'(l) + (e_0a_0)^2 (\rho I\lambda^2\Psi'(l) - \rho A\lambda^2U(l)) &= 0. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Para as condições de contorno em (8.58) obtém-se que $\lambda = i\omega$. A fim de obter esse resultado, define-se para funções vetoriais contínuas em um intervalo $[0, l]$

$$\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} \quad (8.59)$$

o produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^L \mathbf{f}^*(x)\mathbf{g}(x)dx, \quad (8.60)$$

com $\mathbf{f}^* = \overline{\mathbf{f}}^T = \left(\overline{f_1(x)} \quad \overline{f_2(x)} \right)$. Fazendo produto interno da equação (8.45) por \mathbf{w} , resulta

$$\langle \mathbf{w}(x), \mathbb{M}_N \mathbf{w}''(x) \rangle + \langle \mathbf{w}(x), \mathbb{C} \mathbf{w}'(x) \rangle + \langle \mathbf{w}(x), \mathbb{K} \mathbf{w}(x) \rangle = 0, \quad (8.61)$$

que utilizando (8.46), pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (\langle \mathbf{w}(x), \mathbb{M}_{NL} \mathbf{w}''(x) \rangle + \langle \mathbf{w}(x), \mathbb{E} \mathbf{w}(x) \rangle) \\ &= - (\langle \mathbf{w}(x), \mathbb{M} \mathbf{w}''(x) \rangle + \langle \mathbf{w}(x), \mathbb{C} \mathbf{w}'(x) \rangle + \langle \mathbf{w}(x), \mathbb{R} \mathbf{w}(x) \rangle). \end{aligned} \quad (8.62)$$

Integrando por partes (8.62), resulta

$$\lambda^2 \int_0^l (\mathbf{w}^* \mathbb{E} \mathbf{w} - \mathbf{w}^* \mathbb{M}_{NL} \mathbf{w}') dx = \mathbf{B}[\mathbf{w}, \mathbf{w}] + \int_0^l (\mathbf{w}^* \mathbb{M} \mathbf{w}' + \mathbf{w}^* \mathbb{C} \mathbf{w} - \mathbf{w}^* \mathbb{R} \mathbf{w}) dx \quad (8.63)$$

sendo

$$\mathbf{B}[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = - \left(\lambda^2 \mathbf{w}^* \mathbb{M}_{NL} \mathbf{w}' \Big|_0^l + \mathbf{w}^* \mathbb{M} \mathbf{w}' \Big|_0^l + \mathbf{w}^* \mathbb{C} \mathbf{w} \Big|_0^l \right) \quad (8.64)$$

Das condições de contorno (8.58) resulta

$$\mathbf{B}[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = 0, \quad (8.65)$$

assim

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^l (\mathbf{w}^{*'} \mathbf{M} \mathbf{w}' + \mathbf{w}^{*'} \mathbf{C} \mathbf{w} - \mathbf{w}^{*'} \mathbf{R} \mathbf{w}) dx}{\int_0^l (\mathbf{w}^{*'} \mathbf{E} \mathbf{w} - \mathbf{w}^{*'} \mathbf{M}_{NL} \mathbf{w}') dx}. \quad (8.66)$$

Das definições de produto interno, considerando $|z|^2 = \bar{z}z$, tem-se

$$\lambda^2 = - \frac{\int_0^l a |U'(x) - \Psi(x)|^2 + b |\Psi'(x)|^2 dx}{\int_0^l c |U(x)|^2 + e |\Psi(x)|^2 dx + (e_0 a_0)^2 \int_0^l c |U'(x)|^2 + e |\Psi'(x)|^2 dx}, \quad (8.67)$$

assim λ^2 é o negativo do quociente de duas grandezas positivas e portanto $\lambda = i\omega$, ω real, ou seja, λ puramente imaginário.

As condições de contorno em (8.58) para $\lambda = i\omega$ são matricialmente escritas como

$$\begin{aligned} A(\omega) \mathbf{w}(0) + B(\omega) \mathbf{w}'(0) &= 0, \\ A(\omega) \mathbf{w}(l) + B(\omega) \mathbf{w}'(l) &= 0, \end{aligned} \quad (8.68)$$

sendo

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(e_0 a_0)^2 \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b - e(e_0 a_0)^2 \omega^2 \end{pmatrix}. \quad (8.69)$$

Substituindo a solução geral (8.48) nas condições de contorno (8.68) resulta

$$A(\omega) (\mathbf{h}(0) \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}'(0) \mathbf{a}_2) + B(\omega) (\mathbf{h}'(0) \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}''(0) \mathbf{a}_2) = 0, \quad (8.70)$$

$$A(\omega) (\mathbf{h}(l) \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}'(l) \mathbf{a}_2) + B(\omega) (\mathbf{h}'(l) \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}''(l) \mathbf{a}_2) = 0. \quad (8.71)$$

O qual devido as condições iniciais de $\mathbf{h}(x)$ se reduz para

$$\begin{aligned} A(\omega) \mathbf{M}_N^{-1} \mathbf{a}_1 + B(\omega) (\mathbf{M}_N^{-1} \mathbf{a}_1 - \mathbf{M}_N^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}_N \mathbf{a}_2) &= 0, \\ A(\omega) (\mathbf{h}(l) \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}'(l) \mathbf{a}_2) + B(\omega) (\mathbf{h}'(l) \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}''(l) \mathbf{a}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Substituindo as matrizes \mathbb{M}_N , \mathbb{C} , $A(\omega)$, $B(\omega)$ e $\mathbf{h}(x)$ dadas respectivamente em (8.47), (8.69), (8.51) segue o sistema

$$\mathcal{U}\mathbf{a} = 0, \quad (8.73)$$

sendo

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{a-c(e_0a_0)^2\omega^2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ \Delta_5 & \Delta_6 & \Delta_7 & \Delta_8 \end{pmatrix}, \quad (8.74)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (a - e\omega^2)d(l) - (b - e\omega^2(e_0a_0)^2)d''(l), \\ \Delta_2 &= -ad'(l), \\ \Delta_3 &= (a - e\omega^2)d'(l) - (b - e(e_0a_0)^2\omega^2)d'''(l), \\ \Delta_4 &= -ad''(l), \\ \Delta_5 &= c\omega^2(e_0a_0)^2(a - e\omega^2)d(l) + (ab - \omega^2(e_0a_0)^2(cb + ae - ce\omega^2(e_0a_0)^2))d''(l), \\ \Delta_6 &= (-bc\omega^2 - \omega^2(e_0a_0)^2(ca - ec\omega^2))d'(l) - (ab - \omega^2(e_0a_0)^2(cb + ae - ce(e_0a_0)^2\omega^2))d'''(l), \\ \Delta_7 &= \omega^2(e_0a_0)^2(ca - ec\omega^2)d'(l) + (ab - \omega^2(e_0a_0)^2(cb + ae - ce(e_0a_0)^2\omega^2))d'''(l), \\ \Delta_8 &= -\omega^2(ac - ce\omega^2)d(l) + \omega^2(ae - ce(e_0a_0)^2\omega^2)d''(l), \end{aligned} \quad (8.75)$$

e

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Decorre de (8.73) que $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \end{pmatrix}$, e o sistema se reduz a

$$\mathbf{D}(\lambda)\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{0}, \quad (8.76)$$

sendo

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_4 \\ \Delta_5 & \Delta_8 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix}. \quad (8.77)$$

A existência da solução não nula \tilde{a} ocorre sempre que

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{D}}(\omega) = \det(\mathbf{D}) &= (a - e\omega^2)c_{0N} (d''(l)^2 - d(l)d^{(iv)}(l)) \\ &= (a - e\omega^2)c_{0N} \frac{\sinh(\epsilon l)\text{sen}(\delta l)}{c_{0N}^2 \delta \epsilon} = 0,\end{aligned}\quad (8.78)$$

para $d(x)$ dada em (8.54). A equação obtida em (8.78) é da mesma forma que a obtida para a teoria clássica de Timoshenko [115].

Tem-se a amplitude espacial

$$\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} ((a - e\omega^2)d(x) - (b - e\omega^2(e_0a_0)^2)d''(x)) a_{11} - ad''(x)a_{22} \\ ad'(x)a_{11} + (-\omega^2cd'(x) + (\omega^2c(e_0a_0)^2 - a)d'''(x)) a_{22} \end{pmatrix}, \quad (8.79)$$

onde a_{11}, a_{22} são não simultaneamente zeros e satisfazem a relação

$$\Delta_1 a_{11} + \Delta_4 a_{22} = 0. \quad (8.80)$$

8.4.1 Primeiro e segundo espectros da viga bi-apoiada não local

Para a viga bi-apoiada obteve-se em (8.78) a equação característica

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{D}}(\omega) = \det(\mathbf{D}) &= (a - e\omega^2)c_{0N} (d''(l)^2 - d(l)d^{(iv)}(l)) \\ &= (a - e\omega^2)c_{0N} \frac{\sinh(\epsilon l)\text{sen}(\delta l)}{c_{0N}^2 \delta \epsilon} = 0.\end{aligned}\quad (8.81)$$

Tem-se que $c_{0N} = \det(\mathbb{M}_N) \neq 0$, e considerando $\omega^2 \neq \frac{a}{e}$, resulta que (8.81) é satisfeita para

$$\epsilon = i\frac{n\pi}{l} \text{ ou } \delta = \frac{n\pi}{l}, \quad (8.82)$$

e os autovalores $\lambda = i\omega$ são as raízes de

$$p_{0N}(\gamma)\omega^4 - p_{2N}(\gamma)\omega^2 + p_{4N}(\gamma) = 0 \quad (8.83)$$

para $\gamma = i\delta$ ou $\gamma = \epsilon$, onde

$$\begin{aligned}p_{0N}(\gamma) &= ce + (-2ce + ce(e_0a_0)^2\gamma^2)(e_0a_0)^2\gamma^2 \\ p_{2N}(\gamma) &= ca + (e_0a_0)^2(cb + ae)\gamma^4 - (ae + cb + ca(e_0a_0)^2)\gamma^2\end{aligned}\quad (8.84)$$

$$p_{4N}(\gamma) = ab\gamma^4.$$

Este polinômio é obtido de reescrever $Q_N(\omega, \gamma) = 0$ em potências de ω , aqui o interesse é em $\lambda = i\omega$, que correspondem a frequências naturais.

De (8.38), (8.39) pode-se escrever as raízes de (8.83) da forma

$$\begin{aligned}\omega_{N1}^2(n) &= \frac{1}{2(1+(e_0a_0)^2(\frac{n\pi}{l})^2)} \left(\Gamma - \sqrt{\Lambda} \right), \\ \omega_{N2}^2(n) &= \frac{1}{2(1+(e_0a_0)^2(\frac{n\pi}{l})^2)} \left(\Gamma + \sqrt{\Lambda} \right),\end{aligned}\tag{8.85}$$

sendo

$$\begin{aligned}\Gamma &= (\omega_{b01}^2 + \omega_{b02}^2)(e_0a_0)^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \omega_c^2, \\ \Lambda &= \left[(\omega_{b01}^2 + \omega_{b02}^2)(e_0a_0)^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \omega_c^2 \right]^2 - 4\omega_{b01}^2\omega_{b02}^2(e_0a_0)^4 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4,\end{aligned}\tag{8.86}$$

observa-se que Γ é independente de e_0a_0 . É importante observar que ω_{N1} e ω_{N2} são reais para todos os valores de e_0a_0 e n .

Da teoria local as frequências ω_{L1} surgem de assumir os valores $\delta = \frac{n\pi}{L}$ e são referidas como sendo o primeiro espectro de frequências, enquanto ω_{L2} surgem de $\epsilon = i\frac{m\pi}{L}$ e são referidas como o segundo espectro de frequências. O primeiro e segundo espectros de frequências, para o caso local (clássico) do modelo de Timoshenko, têm sido discutidos por diversos autores [119, 71, 111, 9]. No que segue, discute-se como o parâmetro não local e_0a_0 influencia tais espectros.

Em analogia ao caso local, define-se ω_{N1} e ω_{N2} respectivamente como primeiro e segundo espectros da teoria não local.

Considerando nanotubos de carbono com os parâmetros dados na Tabela 8.1, e dimensões dadas na Tabela 8.2, estão graficadas, na Figura 8.6, as frequências singulares ω_{b01} , ω_{b02} e a frequência crítica ω_c , juntamente com as frequências ω_{N1} , ω_{N2} para valores particulares e_0a_0 em (8.40), que satisfazem as seguintes relações²

$$(e_0a_{01})^2 < \frac{e}{c} < (e_0a_{02})^2 < \frac{b}{a} - \frac{e}{c} < (e_0a_{03})^2 < \frac{b}{a} < (e_0a_{04})^2.$$

²Para $E - \kappa G > 0$.

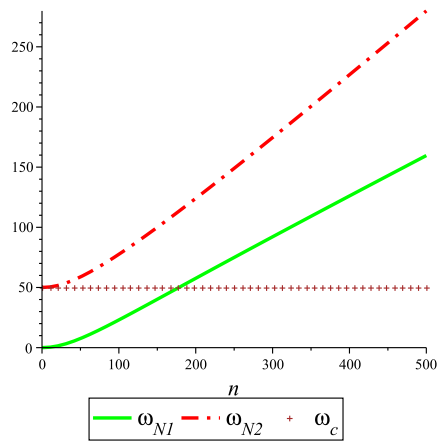
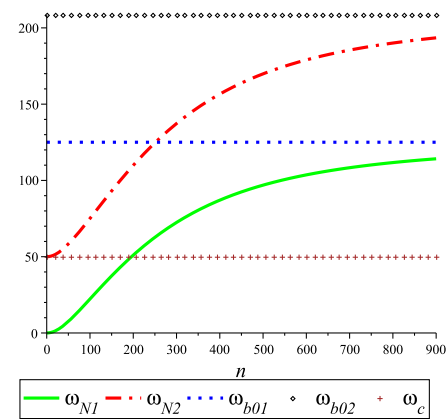
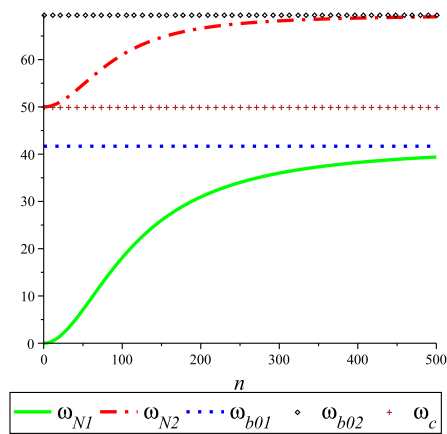
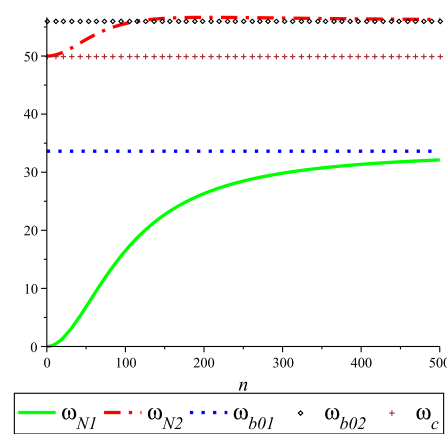
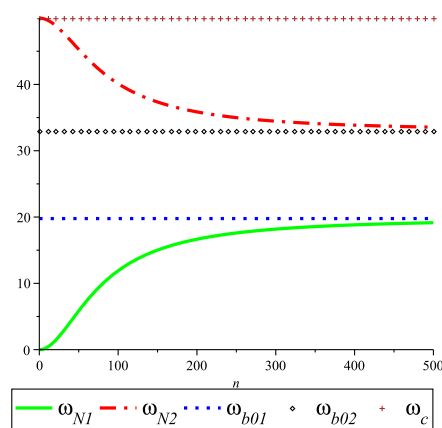
(a) $e_0 a_0 = 0$ (b) $e_0 a_0 = e_0 a_{01}$ (c) $e_0 a_0 = e_0 a_{02}$ (d) $e_0 a_0 = e_0 a_{03}$ (e) $e_0 a_0 = e_0 a_{04}$

Figura 8.6: ω_{N1} e ω_{N2} para viga não local bi-apoiada de carbono com seção circular, frequências em (10^{12}).

Nas simulações apresentadas na Figura 8.6 é possível observar que para ω_{N1} e ω_{N2} dados em (8.85) que

$$\omega_{N1} \rightarrow \omega_{b01} \text{ e } \omega_{N2} \rightarrow \omega_{b02} \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

esses limites são observados também algebricamente em (8.42). No entanto, esta aproximação ocorre por valores maiores ou menores do que ω_{b01} e ω_{b02} , e estes comportamentos são dependentes do valor do parâmetro $e_0 a_0$. As seguintes observações são realizadas a partir dos gráficos apresentados na Figura 8.6:

- Na teoria não local de Eringen, proposto por Eringen, os dois espectros tornam-se limitados quando $n \rightarrow \infty$, o que não ocorre no modelo clássico ($e_0 a_0 = 0$).
- Quando $e_0 a_0$ aumenta as frequências singulares ω_{b01} e ω_{b02} diminuem;
- Na Figura 8.6(b), observa-se que para $(e_0 a_0)^2 = (e_0 a_{01})^2 < \frac{e}{c}$ existe intersecção entre ω_{N1} e ω_c .
- Nas Figuras 8.6(b)-(c) pode-se observar que $\omega_{N1} \rightarrow \omega_{b01}$ por valores menores que ω_{b01} e $\omega_{N2} \rightarrow \omega_{b02}$ também por valores menores que ω_{b02} .
- Na Figura 8.6(d) pode-se observar que existe n real talque $\omega_{N2} = \omega_{b02}$, isto se deve ao fato de escolher $\frac{b}{a} - \frac{e}{c} < e_0 a_{03} < \frac{b}{a}$.
- Na Figura 8.6(e) tem-se $\omega_{N2} \rightarrow \omega_{b02}$ por valores maiores que ω_{b02} .

A partir das simulações, foi construída a Figura 8.7, onde está representado o eixo $(e_0 a_0)^2$ e para cada intervalo de $(e_0 a_0)^2$ as relações entre ω_{N1}^2 , e ω_{b01}^2 e ω_{N2}^2 e ω_{b02}^2 . Sendo $\omega_{N1}^2 < \omega_{b01}^2 \forall e_0 a_0$ real, enquanto $\omega_{N2}^2 < \omega_{b02}^2$ para $0 < (e_0 a_0)^2 < \frac{b}{a} - \frac{e}{c}$ e $\omega_{b02}^2 < \omega_{N2}^2$ para $\frac{b}{a} < (e_0 a_0)^2$. No intervalo $\frac{b}{a} - \frac{e}{c} < (e_0 a_0)^2 < \frac{b}{a}$ existe intersecção entre ω_{b02}^2 e ω_{N2}^2 , e a relação entre eles muda, a Figura 8.6(d) ilustra essa situação.

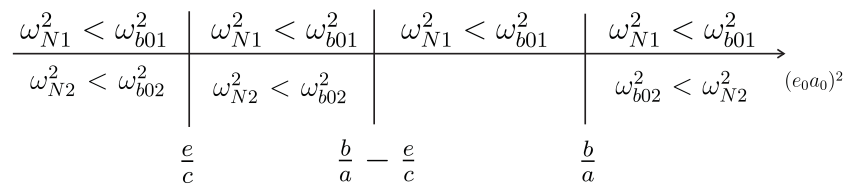


Figura 8.7: Relação entre ω_{N1} e ω_{N2} respectivamente com ω_{b01} e ω_{b02} .

Pode-se observar portanto, que o comportamento das frequências de ambos os espectros, ω_{N1} e ω_{N2} dependem do parâmetro $e_0 a_0$, bem como o comportamento destas frequências em relação a frequência crítica, ω_c , e singulares ω_{b01} e ω_{b02} .

9 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram determinadas soluções do tipo ondas planas e modais de modelos matemáticos referentes à teoria de linhas de transmissão, com e sem perdas, e à teoria de vigas, modelo de Timoshenko e modelo não local de Eringen.

Utilizando a formulação matricial dos modelos em questão, as ondas planas e modais foram caracterizadas em termos da base gerada pela resposta matricial fundamental de sistemas de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem para o modelo de linhas de transmissão, segunda ordem para modelo de Timoshenko e quarta ordem para o modelo não local de Eringen.

Uma forma fechada foi utilizada para determinar a resposta matricial fundamental, tal forma envolve o acoplamento de um número finito de matrizes e uma função escalar geradora e suas derivadas. A função escalar geradora é bem comportada para mudanças em torno de frequências críticas e sua robustez é exibida através da técnica de Liouville.

Na teoria de linhas de transmissão, o modelo é um sistema de primeira ordem usualmente desacoplado dando origem à formulação telegráfica descrita por um sistema de segunda ordem. Para a obtenção das ondas planas em linhas de transmissão, o sistema foi classificado como regular ou singular tanto para o caso livre como forçado. A determinação de ondas planas em linhas forçadas foram obtidas a partir da decomposição da solução em duas parcelas, sendo uma solução da equação diferencial homogênea e a outra solução da equação diferencial não homogênea.

A formulação modal, obtida ao buscar soluções de ondas modais no modelo de linhas de transmissão com multicondutores, envolve matrizes de impedância

e admitância. A metodologia proposta neste trabalho, ao utilizar a base gerada pela solução fundamental, não impõe restrições sobre as matrizes impedância e admitância, para a utilização de técnicas de diagonalização como ocorre em [92], [95].

O caso das linhas de transmissão cujas matrizes de impedância e admitância são simétricas e cíclicas (padrão circulante) é considerado em detalhe, uma vez que relaciona-se as matrizes de Fourier com a metodologia da sequência de componentes de Fortescue's [43], sendo elas usadas no estudo de sistemas multifásicos [66], [4], [56], [124]. O caso de uma linha de transmissão multifásica com o mesmo valor para os parâmetros de auto-indutância e de indutância mútua, bem como para auto-admitância e de admitância mútua é estudado detalhadamente usando a teoria circulante [28]. É observado que tais sistemas são não-defeituosos e que uma constante de propagação depende da indutância, admitância e do número de condutores, enquanto as demais possuem o mesmo valor e são independentes do número de condutores.

Simulações numéricas foram realizadas para linhas de três fases com perdas, quatro fases sem perdas e seis fases com simetria cíclica. As simulações permitiram fazer observações sobre as decomposições da função escalar geradora e onda modal, onde graficamente é possível observar este comportamento viajante para frente e para trás de componentes desta função. No caso da linha sem perdas, observou-se que a função escalar geradora de onda modal é real, e para a componente da resposta matricial fundamental observou-se comportamento do tipo batimento, devido à proximidade das raízes. No exemplo de seis fases, as simulações permitiram observar a amplificação e atenuação na direção positiva de z , para a parte viajante para trás e para frente, respectivamente.

Na teoria de Timosheko, foram determinadas ondas planas, utilizando a mesma metodologia de linhas de transmissão. Em particular, foram determinadas ondas planas com componentes proporcionais, obteve-se que estas se propagam em duas direções diferentes cujas amplitudes são exponenciais ou lineares. Evidenciou-

se que as ondas modais do modelo de Timoshenko podem ser escritas como superposição de quatro ondas planas. No entanto, foi apresentado uma onda plana que não é uma onda modal. Assim, a classe de ondas planas contém a classe de ondas modais.

As ondas modais foram decompostas em duas partes, uma onda que viaja para frente e outra parte que viaja para trás, tanto na teoria de linhas de transmissão quanto no modelo de Timoshenko. Essa decomposição foi utilizada para determinar as matrizes de reflexão e transmissão em descontinuidades e em problemas de valor de contorno. Na teoria de linhas de transmissão, a descontinuidade foi caracterizada pela junção de linhas com impedâncias características distintas, enquanto no modelo de Timoshenko a descontinuidade é causada por uma fissura na viga. No que se refere às condições de contorno, foram considerados carregamentos em uma extremidade da linha e molas rotacionais e translacionais em uma extremidade da viga.

No estudo das ondas modais, observa-se que as condições de contorno clássicas em vigas finitas envolvem a determinação das frequências naturais e modos normais, enquanto nas linhas de transmissão limitadas, na presença de um gerador, é assumido uma frequência de entrada implicando condições de contorno não homogêneas.

Simulações no caso de existência de fissuras da viga ilustram a influência de certos componentes antes e depois de valores críticos. O gráfico da norma euclidiana matricial da matriz de reflexão é apresentado, juntamente com o gráfico dos módulos de cada componente, permitindo concluir qual componente matricial que mais influencia a norma matricial, e conseqüentemente qual componente tem amplitude dada por esse módulo. Os argumentos de algumas componentes das matrizes de reflexão e transmissão também são graficados, permitindo observar quais componentes tem maior fase.

Na obtenção de ondas modais para a teoria não local de Eringen, observou-se que o caso limite $e_0a_0 = 0$ leva à resposta matricial fundamental que corresponde à resposta do modelo de Timoshenko. Assim, observa-se a continuidade da base modal gerada por essa solução. Tal comportamento não é observado no estudo de ondas planas, onde o limite e_0a_0 trouxe singularidades às condições iniciais dos problemas de autovalor associados, tanto à resposta matricial fundamental quanto à função escalar geradora de onda plana.

Tanto no modelo de Timoshenko como no modelo não local de Eringen, a função escalar geradora de onda modal é solução de um problema de valor inicial de quarta ordem. No modelo de Timoshenko, duas das raízes do polinômio característico associado são puramente imaginárias para qualquer valor de frequência escolhido, enquanto as outras duas são reais para valores de frequência abaixo de um valor de frequência crítica e tornam-se puramente imaginárias acima desse valor, determinando assim comportamento oscilatório da função escalar geradora de onda modal para frequências acima da frequência crítica. Esse comportamento das raízes não é observado no modelo não local de Eringen, onde as quatro raízes podem assumir valores reais ou puramente imaginários dependendo do valor de frequência escolhido. Para o modelo não local de Eringen, simulações realizadas permitiram observar que a função escalar apresentou comportamento oscilatório para um intervalo de frequência entre a frequência crítica ω_c e a frequência singular ω_{b02} .

A existência de um segundo espectro de frequência na teoria não local de Eringen foi observada para uma viga bi-apoiada, característica já observada no modelo de Timoshenko. Observa-se que as frequências dependem do parâmetro não local e_0a_0 , tornando-se limitadas, comportamento distinto da teoria de Timoshenko.

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications, Inc., 1964.
- [2] ADAM, S. F., AND PACKARD, H. *Microwave theory and applications*. Adam Microwave Consulting, Incorporated, 1992.
- [3] AMETANI, A., NAGAOKA, N., BABA, Y., AND OHNO, T. *Power System Transients Theory and Applications*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013.
- [4] AMIRHOSSEINI, M. K., AND CHELDAVI, A. Time domain analysis of circulant symmetric coupled transmission lines. *IEE Proc.-Microw. Antennas Propag.* 150, 5 (2003), 325–331.
- [5] AMIRHOSSEINI, M. K., AND CHELDAVI, A. Analysis of circular symmetric coupled strip and microstrip transmission lines. *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B* 28, B3 (2004).
- [6] BANKS, H. T., AND INMAN, D. J. On damping mechanisms in beams. *Journal of Applied Mechanics* 58, 3 (1991), 716–723.
- [7] BENAROYA, H., AND NAGURKA, M. L. *Mechanical Vibration: Analysis, Uncertainties, and Control*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [8] BHASHYAM, G. R., AND PRATHAP, G. The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 76, 3 (1981), 407–420.

- [9] BHASKAR, A. Elastic waves in Timoshenko beams: the 'lost and found' of an eigenmode. *Proceedings the Royal of Society A- Mathematical, Physical & Engineering Sciences 465* (2009), 239–255.
- [10] BHATT, N. B., VENKATA, S. S., GUYKER, W. C., AND BOOTH, W. H. Six-phase (multi-phase) power transmission systems: faults analysis. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 96*, 3 (1977), 758–767.
- [11] BHATTI, A. A. Transient and steady state solution of N-dimensional coupled networks and development of equivalent Pi and T matrix networks with distributed parameters. In *4th International Conference on Power Engineering, Energy and Electrical Drives, Istanbul, Turkey* (2013), pp. 1195–1199.
- [12] BILLGER, D. V. J., AND FOLKOW, P. D. Wave propagators for the Timoshenko beam. *Wave Motion 37* (2003), 313–332.
- [13] BOYD, J. N., AND RAYCHOWDHURY, P. N. A double chain of coupled circuits in analogy with mechanical lattices. *Internat. J. Math. & Math. Sci. 14*, 2 (1991), 403–406.
- [14] CARRIER, G. F., KROOK, M., AND PEARSON, C. E. *Functions of a Complex Variable: Theory and Thechnique*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [15] CARSLAW, H. S., AND JAEGER, J. C. *Operational Methods in Applied Mathematics*. Dover Publications, Inc., 1963.
- [16] CARVALHO, M. O. M., AND ZINDELUK, M. Active control of waves in a Timoshenko beam. *International Journal of Solids and Structures 38* (2001), 1749–1764.

- [17] CHAN, K. T., WANG, X. Q., SO, R. M. C., AND REID, S. R. Superposed standing waves in a Timoshenko beam. *Proc. R. Soc. Lond. A* 458 (2002), 83–108.
- [18] CHIPMAN, R. A. *Schaum's outline series of Theory and Problems of Transmission Lines*. McGraw-Hill, Icn., 1968.
- [19] CLAEYSSSEN, J. C. R., TOLFO, D. R., AND TONETTO, L. Matrix basis for plane and modal waves in a Timoshenko beam. *Royal Society Open Science* 3, 160825 (2016).
- [20] CLAEYSSSEN, J. R. The Integral-Averaging Bifurcation Method and the General One-Delay Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 78 (1980), 429–439.
- [21] CLAEYSSSEN, J. R., CANAHUALPA, G., AND JUNG, C. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics* 30 (1999), 65–78.
- [22] CLAEYSSSEN, J. R., TSUKAZAN, T., AND COPETTI, R. D. Non-local effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes. *Mechanical Systems and Signal Processing* 38 (2013), 299–311.
- [23] CLAYTON, R. E., AND STEWART, J. R. Transmission line electromagnetic compatibility. In *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, San Antonio, TX, USA* (1975).
- [24] COSTA, S. N. J. *O modelo de Timoshenko em vigas elásticas, estruturas Offshore e nanotubos de carbono através da resposta fundamental de valor inicial*. Doutorado, Programa de Pós - Graduação em Matemática Aplicada-UFRGS - Porto Alegre, 2006.
- [25] COULSON, C. A. *Waves - A mathematical account of the common types of wave motion*. Oliver and Boyd LTD, 1955.

- [26] COURANT, R., AND HILBERT, D. *Methods of mathematical physics Volume II*. John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [27] COWPER, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics* 33, 2 (1966), 335–340.
- [28] DAVIS, P. J. *Circulant Matrices*. John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [29] DENG, X. *Exploring six-phase transmission lines for increasing power transfer with limited right of way*. Thesis Master of Science, Arizona State University, 2012.
- [30] DESHPANDE, M. V. *Electrical Power Systems Design*. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1984.
- [31] DI PAOLO, F. *Networks and Devices Using Planar Transmission Lines*. CRC Press LLC, 2000.
- [32] DIKHAMINJIA, N., ROGAVA, J., TSIKLAURI, M., ZVONKIN, M., FAN, J., AND DREWNIK, J. L. Fast approximation of sine and cosine hyperbolic functions for the calculation of the transmission matrix of a multiconductor transmission line. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 57, 6 (2015), 1698–1704.
- [33] DOLPH, C. On the Timoshenko theory of tranverse beam vibrations. *Quarterly of Applied Mathematics* 12 (1954), 175–187.
- [34] DOYLE, J. F. *Wave Propagation in Structures*. Springer-Verlag New York, Inc., 1989.
- [35] DUFFIN, R. J. Chrystal's Theorem on Differential Equation Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 8 (1963), 325–331.
- [36] DZAFIC, I., NEISIUS, H., AND HENSELMEYER, S. Three phase current iteration power flow method using fortescue transformations. In

3rd IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT Europe), Berlin (2012).

- [37] EL SABBAGH, M. A., EL-GHAZALY, S. M., AND NASEEM, H. A. Carbon nanotube-based planar transmission lines. In *Microwave Symposium Digest (MTT '09. IEEE MTT-S International), Boston, USA (2009)*, pp. 353–356.
- [38] ERDÉLYI, A. *Tables of Integral Transforms - Vol.I.* MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC, 1954.
- [39] ERINGEN, A. C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics* 54, 9 (1983), 4703–4710.
- [40] FARIA, J. A. B. Overhead three-phase transmission lines - non-diagonalizable situations. *IEEE Transactions on Power Delivery* 3, 4 (1988), 1348–1355.
- [41] FARIA, J. A. B. *Electromagnetic Foundations of Electrical Engineering.* John Wiley and Sons, Ltd, 2008.
- [42] FOLKOW, P. D., OLSSON, P., AND KRISTENSSON, G. Time domain green functions for the homogeneous Timoshenko beam. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 51, 1 (1998), 125–142.
- [43] FORTESCUE, C. L. Method of symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks. In *34th Annual Convention of American Institute of Electrical Engineers, Atlantic City (1918)*, pp. 1027–1140.
- [44] FRISWELL, M. I., ADHIKARI, S., AND LEI, Y. Non-local finite element analysis of damped beams. *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), 7564–7576.

- [45] FUNG, Y. C. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall, Inc., 1965.
- [46] GANTMACHER, F. R. *The Theory of Matrices, V1, V2*. Chelsea Publishing Company, 1959.
- [47] GARIBOTTI, C. R. *Respostas dinâmicas em sistemas distribuídos e decomposição forçada da superfície livre para um modelo acoplado Oceano-Atmosfera*. Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS - Porto Alegre, 2004.
- [48] GINSBERG, J. H. *Mechanical and Structural Vibrations: Theory and applications*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [49] GLOVER, J. D., SARMA, M. S., AND OVERBYE, T. J. *Power Systems analysis and design*. Cengage Learning, 2012.
- [50] GOPALAKRISHNAN, S., AND NARENDAR, S. *Wave Propagation in Nanostructures: Nonlocal Continuum Mechanics Formulations*. Springer International Publishing Switzerland, 2013.
- [51] GRAFF, K. F. *Wave motion in elastic solids*. Dover Publications, Inc., 1991.
- [52] HAGHI, A. K., AND ZAIKOV, G. E. *Advanced nanotube and nanofiber materials*. Nova Science Publishers. Inc., 2012.
- [53] HANSON, G. W., AND YAKOVLEV, A. B. *Operator Theory for Electromagnetics: An Introduction*. Springer, 2002.
- [54] HARRIS, J. C. *Linear Elastic waves*. Cambridge University Press, 2001.
- [55] HAUSS, H. A. *6.013 Electromagnetism*. 1998, HTF, Disponível em http://web.mit.edu/6.013_book/www/book.html, acessado em 22/12/2016.

- [56] HEYDT, G. T., AND PIERRE, B. J. Sequence impedances for high phase order power transmission systems. In *Transmission and Distribution Conference and Exposition (T&D), 2016 IEEE PES. Dallas, TX, USA* (2016).
- [57] HONG, Z., LI, X., SHEN, J., SHEN, X., YU, X., ZHOU, M., AND CHEN, J. Transmission-line model for analyzing the coupling between two parallel micro/nano-fibers. In *Wireless and Optical Communications Conference (WOCC), 2010 19th Annual, Shanghai, China* (2010).
- [58] HUANG, T. C. The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams With Simple end Conditions. *Journal of Applied Mechanics* 28, 4 (1961), 579–584.
- [59] HUANG, Y., WU, L.-S., TANG, M., AND MAO, J.-F. High-performance resonator based on multiwalled carbon nanotube (MWCNT). *IEEE Transactions on Nanotechnology* 13, 6 (2014), 1240–1249.
- [60] ISLAM, M. S., MATIN, M. A., AND HOSSAIN, M. M. Electromagnetic wave propagation characteristics in single walled metallic carbon nanotube. In *8th International Conference on Electrical and Computer Engineering, Dhaka, Bangladesh* (2014), pp. 575–578.
- [61] JAEGER, J. C. *An Introduction to Applied Mathematics*. Oxford University Press, 1956.
- [62] JALILI, N. *Piezoelectric-Based Vibration Control: From Macro to Micro/Nano Scale Systems*. Springer, 2010.
- [63] JOHN, F. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, Inc., 1971.

- [64] KIM, J. U., AND RENARDY, Y. Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM J. Control and Optimization* 25, 6 (1987), 1417–1429.
- [65] KING, R. W. P. *Transmission-line theory*. New York: Dover Publications, Inc., 1965.
- [66] KNOCKAERT, J., PEUTEMAN, J., CATRYSSE, J., AND BELMANS, R. General equations for the characteristic impedance matrix and termination network of multiconductor transmission lines. In *IEEE International Conference on Industrial Technology, Gippsland, Australia* (2009).
- [67] KONG, S., ZHOU, S., NIE, Z., AND WANG, K. The size-dependent natural frequency of bernoulli-euler micro-beams. *International Journal of Engineering Science* 46, 5 (2008), 427–437.
- [68] LAMERES, B. J. *Lecture Notes - Module 7: Lossy Lines*. Disponível em <http://www.montana.edu/blameres/courses/eele461/index.html>, acessado em 02/08/2017.
- [69] LAURETIS, M., ANTONINI, G., AND EKMAN, J. A delay-rational model of lossy multiconductor transmission lines with frequency-independent per-unit-length parameters. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 57, 5 (2015), 1235–1245.
- [70] LELE, S. P., AND MAITI, S. K. Modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension. *Journal of Sound and Vibration* 257, 3 (2002), 559–583.
- [71] LEVINSON, M., AND COOKE, D. W. On the two frequency spectra of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 84, 3 (1982), 319–326.

- [72] LIN, H. P. Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack. *Engineering Structures* 26 (2004), 427–436.
- [73] LIU, C., AND RAJAPAKSE, R. K. N. D. Continuum models incorporating surface energy for static and dynamic response of nanoscale beams. *IEEE Transactions on Nanotechnology* 9, 4 (2010), 422–431.
- [74] LU, P., LEE, H. P., LU, C., AND ZHANG, P. Q. Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), 5289–5300.
- [75] LUCAS, J. R. *High Voltage Engineering. Chapter 4 - High Voltage Transient Analysis*. Disponível em <http://prof.rohan.lucas.lk/index.php/resources/course-notes>, acessado em 21/10/2016.
- [76] MAFFUCCI, A., MIANO, G., AND VILLONE, F. An enhanced transmission line model for conducting wires. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 46, 4 (2004).
- [77] MAGRAB, E. B. *Vibrations of Elastic Systems: With Applications to MEMS and NEMS*. Springer, 2012.
- [78] MEI, C., AND MACE, B. R. Wave reflection and transmission in Timoshenko beams and wave analysis of Timoshenko beam structures. *Journal of Vibration and Acoustics* 127, 4 (2004), 382–394.
- [79] MIANO, G., AND MAFFUCCI, A. *Transmission Lines and Lumped Circuits*. ACADEMIC PRESS, 2001.
- [80] MIDLIN, R. D. Theories of elastic continua and crystal lattice theories. In *E. Kroner (Ed.), Proceedings of the IUTAM symposium on mechanics of generalized continua*, Springer, Berlin (1968).

- [81] MOLER, C., AND VAN LOAN, C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Review* 45, 1 (2003), 3–49.
- [82] MORSE, P. M. *Vibration and Sound*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948.
- [83] NEWLAND, D. E. *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Dover Publications, Inc., 1989.
- [84] NICKEL, J. G. *Novel methodologies and measurement software for transistor amplifier synthesis in planar coupled-transmission lines*. Thesis, Doctor of Philosophy in Electrical Engineering, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2001.
- [85] NITSCH, J., BAUM, C. E., AND STURM, R. Analytical treatment of circulant nonuniform multiconductor transmission lines. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 34, 1 (1992), 28–38.
- [86] OLSSON, P., AND KRISTENSSON, G. Wave splitting of the Timoshenko beam equation in the time domain. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 45, 6 (1994), 866–881.
- [87] OLVER, P. J. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer International Publishing Switzerland, 2014.
- [88] ORTA, R. *Lectures Notes on Transmission Line Theory*. Department of electronics and telecommunications, Politecnico di Torino, 2012.
- [89] OSTACHOWICZ, W. M., AND KRAWCZUK, M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration* 150, 2 (1991), 191–201.

- [90] PANDYA, A. S. *Multi-phase power system: performance analysis & design*. Thesis, Doctor of Philosophy in Electrical Engineering, Department of Electrical Engineering, Faculty of Technology and Engineering Maharaja Sayajirao, University of Baroda, Baroda, 2008.
- [91] PAPALEONIDOPOULOS, I. C., THEODOROU, N. J., AND CAPSALIS, C. N. Travelling-wave modelling of uniform multi-conductor transmission line networks - Part I: Analytical derivation. *Progress In Electromagnetics Research B* 52 (2013), 253–293.
- [92] PAUL, C. R. Decoupling the multiconductor transmission line equations. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 44, 8 (1996), 1429–1440.
- [93] PAUL, C. R. *Introduction to Electromagnetic Compatibility*. John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [94] PAUL, C. R. A brief history of work in transmission lines for EMC applications. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 49, 2 (2007), 237–252.
- [95] PAUL, C. R. *Analysis of multiconductor Transmission lines*. John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- [96] PEDDIESON, J., BUCHANAN, G. R., AND MCNITT, R. P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science* 41, 3-5 (2003), 305–312.
- [97] PERESLAVTSEVA, O. N. Calculation of the characteristic polynomial of a matrix. *Discrete Math. Appl.* 21, 1 (2011), 109–128.
- [98] PIERRE, B. J. *Algorithm and Model Development for Innovative High Power AC Transmission*. Doctor of Philosophy, Arizona State University, 2015.

- [99] POZAR, D. M. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- [100] REDDY, J. N., AND PANG, S. D. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics* 103, 2 (2008), 023511–1–023511–16.
- [101] REHMAN, R., AND IPSEN, I. C. F. La budde’s method for computing characteristic polynomials. *ARXIV arXiv:1104.3769v1* (2010).
- [102] SALSA, S. *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*. Springer-Verlag Italia, 2008.
- [103] SARTO, M. S., AND TAMBURRANO, A. Single-conductor transmission-line model of multiwall carbon nanotubes. *IEEE Transactions on Nanotechnology* 9, 1 (2010), 82–92.
- [104] SARTO, M. S., TAMBURRANO, A., AND D’AMORE, M. New electron-waveguide-based modeling for carbon nanotube interconnects. *IEEE Transactions on Nanotechnology* 8, 2 (2009), 214–225.
- [105] SCHWARZ, R. J., AND FRIEDLAND, B. *Linear systems*. McGraw-Hill, 1965.
- [106] SILVESTER, J. R. Determinants of block matrices. *The Mathematical Gazette* 84, 501 (2000), 460–467.
- [107] SKLYAR, G. M., AND SZKIBIEL, G. Spectral properties of non-homogeneous Timoshenko beam and its rest to rest controllability. *J. Math. Anal. Appl.* 338 (2008), 1054–1069.
- [108] SNEDDON, I. N. *Elements of Partial Differential Equations*. Dover Publications, Inc., 2006.
- [109] SOFIANE, C., BESNIER, P., AND KLINGLER, M. A modified enhanced transmission line theory applied to multiconductor transmission

- lines. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 59, 2 (2017), 518–528.
- [110] SOUFYANE, A., AND WEHBE, A. Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping. *Electronic Journal of Differential Equations* 2003, 29 (2003), 1–14.
- [111] STEPHEN, N. G. The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 80, 4 (1982), 578–582.
- [112] STEPHEN, N. G. The second spectrum of Timoshenko beam theory - Further assessment. *Journal of Sound and Vibration* 292 (2006), 372–389.
- [113] TANG, H., DING, X., AND WU, Q. Transmission-line modeling characterization for multi-wall carbon nanotube antenna radiation. In *2012 5th Global Symposium on Millimeter Waves (GSMM 2012), Harbin, China* (2012), pp. 549–553.
- [114] TAYLOR, S. W., AND YAU, S. C. B. Boundary control of rotating Timoshenko beam. *Anziam J.* 44, E (2003), E143–E184.
- [115] TOLFO, D. R. *Sobre o espectro de frequências do modelo de Timoshenko para uma viga bi-apoiada*. Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS - Porto Alegre, 2013.
- [116] TOLFO, D. R., AND CLAEYSSSEN, J. C. R. Espectros de frequências do modelo de Timoshenko para uma viga bi-apoiada. In *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CMAC Nordeste 2012* (2012).
- [117] TONETTO, L. *Modelos elásticos para vigas segmentadas em microscopia de força atômica*. Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS - Porto Alegre, 2011.

- [118] TONETTO, L. *Modelos elásticos não clássicos para vibrações de micro e nanovigas*. Doutorado, Programa de Pós - Graduação em Matemática Aplicada-UFRGS - Porto Alegre, 2015.
- [119] TRAILL-NASH, R. W., AND COLLAR, A. R. The effect of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 6 (1953), 186–222.
- [120] TRIPATHI, V. K., AND STURDIVANT, R. Special issue on interconnects and packaging. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques* 45, 10 (1997), 1817–1818.
- [121] TRIVERIO, P., GRIVET-TALOCIA, S., AND CHINEA, A. Identification of highly efficient delay-rational macromodels of long interconnects from tabulated frequency data. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 58, 3 (2010), 566–577.
- [122] ULABY, F. T. *Fundamentals of Applied Electromagnetics*. Pearson Prentice Hall, 2006.
- [123] VAN RENSBURG, N. F., AND VAN DER MERWE, A. J. Natural frequencies and modes of a Timoshenko beam. *Wave Motion* 44 (2006), 58–69.
- [124] WAGENAARS, P., WOUTERS, P. A. A. F., VAN DER WIELEN, P. C. J. M., AND STEENNIS, E. F. Measurement of transmission line parameters of three-core power cables with common earth screen. *IET Science, Measurement & Technology* 4, 3 (2010), 146–155.
- [125] WU, T.-L. *Transmission-Line Essentials for Digital Electronics*. EMC Laboratory, Department of Electrical Engineering National Taiwan University, Disponível em

<http://ntuemc.tw/upload/file/20121015094037050bc.pdf>, acessado em 17/08/2016.

- [126] YANG, X., HUANG, J., AND OUYANG, Y. Bending of Timoshenko beam with effect of crack gap based on equivalent spring model. *Applied Mathematics and Mechanics* 37, 4 (2016), 513–528.
- [127] ZELIKIN, M., AND MANITA, L. A. Optimal control for a Timoshenko beam. *Comptes Rendus Mécanique* 334, 5 (2006), 292–297.

Apêndice A RESPOSTA FUNDAMENTAL MATRICIAL

Neste trabalho, frequentemente utiliza-se a fórmula fechada para a resposta fundamental matricial $\mathbf{h}(z)$ de um sistema matricial linear, isto motiva a apresentação desta para um sistema arbitrário. Para um sistema matricial arbitrário de ordem m com matrizes coeficientes de ordem $N \times N$ com condições iniciais impulsivas

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{h}^{(m)}(z) + \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^{(m-1)}(z) + \cdots + \mathbf{A}_m \mathbf{h}(z) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'(0) = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{h}^{(m-2)}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{A}_0 \mathbf{h}^{(m-1)}(0) = \mathbf{I}.$$

Na sequência é assumido $\det(\mathbf{A}_0) \neq 0$. Então de [21], [20], [15],

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{j=1}^{mN} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(z) \mathbf{h}_{mN-j}, \quad (\text{A.2})$$

onde b_i , $i = 0, 1, \dots, mN$ são os coeficientes do polinômio característico

$$P(\eta) = \det \left(\sum_{k=0}^m \mathbf{A}_k \eta^{m-k} \right) = \sum_{k=0}^{mN} b_k \eta^{mN-k}, \quad (\text{A.3})$$

$d(z)$ é a função geradora escalar que satisfaz o problema de valor inicial

$$b_0 d^{(mN)}(z) + b_1 d^{(mN-1)}(z) + \cdots + b_{mN} d(z) = 0,$$

$$d(0) = 0, d'(0) = 0, \dots, d^{(mN-2)}(0) = 0, b_0 d^{(mN-1)}(0) = 1,$$

e $\mathbf{h}_k = \mathbf{h}^{(k)}(0)$ são as matrizes de acoplamento de ordem $N \times N$ que satisfazem o sistema de valor inicial matricial em diferenças de ordem m

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{h}_{k+m} + \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_{k+m-1} + \cdots + \mathbf{A}_m \mathbf{h}_k = \mathbf{0}, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{h}_1 = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{h}_{m-2} = \mathbf{0}, \mathbf{A}_0 \mathbf{h}_{m-1} = \mathbf{I}.$$

Os coeficientes do polinômio característico $P(\eta)$ podem ser obtidos por vários métodos [97], [101].

A função escalar geradora pode ser obtida utilizando transformada de Laplace com expansão em frações parciais, segue para sua obtenção a fórmula de Heaviside [14],

$$d(z) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\psi_{kl}(\eta_k)}{(m_k - l)!(l - 1)!} z^{m_k - l} e^{\eta_k z} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\psi_{kl}(\eta) = \frac{d^{l-1}}{d\eta^{l-1}} \left[\frac{1}{P_k(\eta)} \right]$$

com $P_k(\eta) = \frac{P(\eta)}{(\eta - \eta_k)^{m_k}}$ para $P(\eta) = c_0(\eta - \eta_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\eta - \eta_r)^{m_r}$, $\eta_i \neq \eta_k$ para $k \neq i$, sendo $P(\eta)$ dado em (A.3).

Alguns aspectos computacionais de frações parciais são considerados no caso em que todas as raízes η_k são simples, neste situação a fórmula (A.5) reduz-se a

$$d(z) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{e^{\eta_k z}}{P'(\eta_k)}. \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B INTEGRAIS DE FRESNEL

As integrais de Fresnel seno e cosseno são definidas¹, respectivamente como

$$S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt. \quad (\text{B.1})$$

As seguintes funções também são definidas

$$S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt, \quad S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin \frac{t}{\sqrt{t}} dt, \quad (\text{B.2})$$

$$C_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt, \quad C_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos \frac{t}{\sqrt{t}} dt. \quad (\text{B.3})$$

As funções definidas possuem as seguintes interrelações

$$S(x) = S_1 \left(x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) = S_2 \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$C(x) = C_1 \left(x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) = C_2 \left(\frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{B.5})$$

As relações de simetria das integrais de Fresnel são

$$C(-z) = -C(z), \quad S(-z) = -S(z), \quad (\text{B.6})$$

$$C(iz) = iC(z), \quad S(iz) = -iS(z), \quad (\text{B.7})$$

$$C(\bar{z}) = C(\bar{z}), \quad S(\bar{z}) = S(\bar{z}). \quad (\text{B.8})$$

No que se refere ao processo de limite tem-se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.9})$$

Graficamente as integrais de Fresnel são representadas na Fig.(B.1)

¹Referência [1].

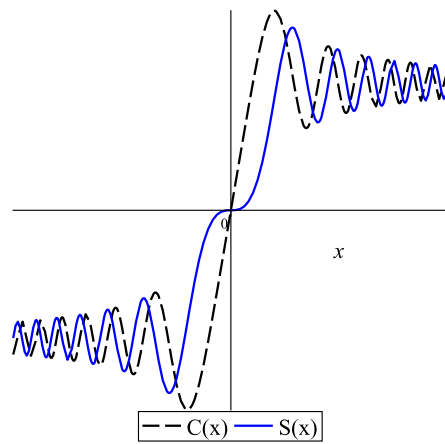


Figura B.1: Representação gráfica das integrais de Fresnel $S(x)$ e $C(x)$.