

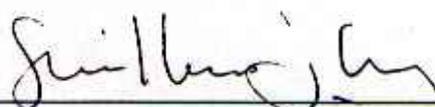
ANÁLISE NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE FRATURA  
ELÁSTICA E ELASTOPLÁSTICA

PAULO ROBERTO JORGE

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre  
outubro 1993

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



---

Prof. Guillermo Juan Creus  
Orientador



---

Prof. Ademar Gilberto Groehs  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Guillermo Juan Creus (Orientador)  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Eng. Marcelo Maia Rocha  
Dr. tech. pela UNIVERSITÄT INNSBRUCK/AUSTRIA
- Prof. Telmo Roberto Strohaecker  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Guillermo Juan Creus, pela dedicada orientação deste trabalho e contínuo estímulo à pesquisa.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo inestimável conhecimento compartilhado.

Aos funcionários André, Flávio e Paulo (LEME); Juliana (Biblioteca), Rita, Carmem e Liliana (Secretaria) e Luís Adolfo (Lab. de Computação) pela prestatividade em suas respectivas funções.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação, pelo convívio e amizade.

A Luci e minha família pelo carinho e apoio incondicionais.

Aos órgãos que proporcionaram o apoio financeiro.

A Universidade Federal do Rio Grande do Sul, na qual este trabalho foi desenvolvido.

## SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

1.	INTRODUÇÃO .....	1
2.	FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DE FRATURAS .....	5
2.1.	A Teoria de Griffith .....	6
2.2.	A Abordagem de Irwin - O Fator de Intensidade de Tensão .....	9
2.2.1.	Solução Analítica do Problema Elástico-Linear .....	11
2.3.	A Integral J de Rice .....	24
3.	FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESTADO PLANO - CAMPO ELÁSTICO LINEAR .....	29
3.1.	Representação Isoparamétrica de Elementos Finitos .....	29
3.1.1.	Equações Fundamentais .....	29
3.1.2.	Avaliação da Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas Consistentes .....	35
3.2.	O Uso de Elementos Finitos na Análise de Problemas de Fratura .....	37
3.2.1	A Modelagem da Singularidade do Extremo de Trinca .....	39
4.	AVALIAÇÃO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO .....	48
4.1.	Extrapolção de Deslocamentos .....	48
4.2.	Taxa de Liberação de Energia de Deformação .....	49
4.2.1.	Relação entre os Fatores de Intensidade de Tensão e a Taxa de Liberação de Energia de	

Deformação .....	50
4.3. A Técnica da Extensão Virtual da Trinca .....	52
4.4. O Método da Integral J - Processo Numérico .....	53
5. FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA - MECÂNICA DE FRATURAS	
NÃO LINEAR .....	57
5.1. Análise Elastoplástica Via Elementos Finitos ..	58
5.2. O Algoritmo para a Solução Não Linear .....	60
5.3. O Emprego da Integral J na Análise de Problemas de Fraturas no Campo Elastoplástico .....	62
5.4. Avaliação Numérica da Integral J .....	63
6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....	65
6.1. Exemplos em Análise Elástico-Linear .....	65
6.1.1. Placa sob tração uniforme contendo uma trinca perpendicular à direção do carregamento .....	65
6.1.2. Solda de penetração parcial em uma alça de suspensão .....	72
6.1.3. Trinca emanando de um orifício circular em uma placa retangular submetida a carregamento de tração .....	75
6.2. Exemplos em Análise Elastoplástica .....	79
6.2.1. Placa com entalhe "V" .....	79
6.2.2. Placa sob tração uniforme contendo uma trinca perpendicular à direção do carregamento .....	82
6.2.3. Análise de um corpo de prova de tração compacto .....	87
6.2.4. O corpo de prova de flexão em três pontos ....	99
6.2.5. Análise de trincas em corpos sujeitos a carregamentos biaxiais .....	105
7. CONCLUSÕES .....	119
8. SUGESTÕES .....	122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	123

## RESUMO

Este trabalho apresenta o método dos elementos finitos em conjunto com métodos numéricos específicos para a solução de problemas de fratura.

Esta é uma poderosa ferramenta para a análise de fraturas e soluções confiáveis são obtidas para problemas complexos de Engenharia tanto no campo linear como no não-linear.

O elemento finito implementado é do tipo isoparamétrico quadrático da família Serendipity. Com dois graus de liberdade por nó, permite discretizar em estado plano de tensão ou deformação estruturas com geometrias bastante variadas.

Para a análise linear são implementadas quatro técnicas consagradas para a avaliação do fator de intensidade de tensão no modo I de fratura: extrapolação de deslocamentos (usando malha somente com elementos convencionais e malha mesclada com elementos especiais), taxa de liberação de energia de deformação, extensão virtual da trinca e o método da integral  $J$ , descartando-se neste caso a hipótese de descarregamento.

A linguagem de programação adotada é o FORTRAN 77. A entrada de dados é feita por intermédio de arquivos previamente preparados.

Os resultados obtidos são confrontados com resultados experimentais e computacionais fornecidos por outros programas. Analisam-se placas, estruturas de uso na indústria e simulam-se ensaios como o corpo de prova de flexão em três pontos e o corpo de prova de tensão compacto.

## ABSTRACT

This dissertation presents the finite element method to solve fracture problems. This is a powerful tool for fracture analysis that provides solutions for complex engineering problems both in linear and non-linear ranges.

The finite element used is the isoparametric quadratic of the Serendipity family in plane stress and strain. With two degrees of freedom per node, it allows the discretization of structures with varied geometries.

For the linear analysis four approaches commonly used to evaluate the stress intensity factor in the opening mode I are implemented: displacement extrapolation (using a mesh with only conventional elements and using a mixed mesh with special elements), strain energy release rate, virtual crack extension technique and the J-integral method. For the elastic-plastic analysis the J-integral approach is implemented.

The programs are written in FORTRAN 77. The data input is done through data files previously prepared.

The results obtained are compared with experimental results and computational results provided for other programs. Plates and industrial structures are analysed as well as the behaviour of the compact tension specimen and the three points beam.

## 1. - INTRODUÇÃO

*Desenvolvimento histórico:* Desde os estágios mais primitivos de sua evolução o Homem tem convivido com o fenômeno da fratura frágil, o qual tem influenciado, em menor ou maior grau, a sua qualidade de vida. Nossos antepassados pré-históricos já a utilizavam na confecção de suas rústicas ferramentas de pedra, induzindo alguns antropólogos mais apaixonados a denominar tal período de Idade da Pedra Lascada. Em sua habitações, instrumentos de caça, na busca da sobrevivência e posteriormente na manifestação de sua religiosidade e sensibilidade, representados freqüentemente através de esculturas, tudo dependia da manipulação controlada da fratura.

A evolução seguiu seu caminho mas a presença da fratura, particularmente a de ocorrência súbita, continuou a ser um fator importante, positivo ou não, em muitos desenvolvimentos tecnológicos.

Uma investigação mais ampla e profunda do fenômeno somente teve início durante a última Grande Guerra, estimulada por um grande número de colapsos em navios construídos com chapas de aço soldadas que ocorreram no inverno de 1942-1943.

Os métodos usuais de projeto de grandes estruturas não estavam se mostrando eficientes. As rupturas freqüentemente surgiam de maneira súbita, caracterizando um comportamento frágil, antagônico ao do aço estrutural que normalmente era considerado um material dúctil. Tais fenômenos ocorriam com tensões nominais bem abaixo do ponto de escoamento do material. As circunstâncias envolvidas foram estudadas, programas de pesquisa tiveram início e o pensamento científico foi

estimulado através de todo o globo pela natureza desafiadora do problema. A atividade de pesquisa e o alto nível de interesse continuaram após o fim da Segunda Guerra Mundial e ainda permanecem nos dias de hoje.

Após a guerra entretanto, tornou-se mais aparente com a passagem dos anos que o problema de fratura frágil não era restrito aos navios de chapa soldada. Colapsos por fratura foram observados em estruturas tais como pontes, comportas, tanques de estocagem de petróleo e tubulações de transportes de gases. Além disso, um estudo de acidentes que ocorreram no final do século XIX e nas primeiras cinco décadas do século XX revela um grande número que não tinha sido associado com o fenômeno da fratura frágil.

Foi assim estabelecido que o problema era comum a todas estruturas, tanto rebitadas quanto soldadas, e que vinha nos acompanhando por mais de setenta anos, muito embora somente identificado adequadamente nos últimos quarenta anos. Entretanto, o conhecimento sobre o assunto estava disperso. Por isso a procura do engenheiro por elementos de pesquisa que seriam de auxílio na prevenção de futuros colapsos catastróficos poderia, em muitos casos, não ser satisfeita. Não porque trabalhos experimentais ou analíticos pertinentes não tivessem sido realizados, mas porque a interpretação dos resultados era difícil sem o marco de uma teoria adequada. Esta teoria foi obtida com pesquisas que Griffith, citado por Owen e Fawkes, realizou em 1923 sobre fratura em vidro e deu origem à Mecânica de Fraturas, que parte da hipótese de que toda fratura acontece pelo crescimento de trincas ou defeitos pré-existentes e tenta determinar a relação entre o tamanho das trincas e o estado de carga na situação crítica.

O fenômeno do colapso por propagação de trincas em materiais estruturais apresenta-se em projetos e análises em muitos campos da Engenharia. Uma importante área onde se deve considerar tais problemas é a indústria aero-espacial na qual a segurança é de suprema importância, onde também

superdimensionamentos levam a duras penalidades em termos de excesso de peso. As conseqüências de colapsos são também as principais considerações no projeto de usinas elétricas, particularmente quando são empregados processos nucleares.

As trincas estão presentes de alguma forma em todas estruturas. Elas podem ser classificadas como defeitos pré-existentes no material ou podem ser induzidas na construção ou durante sua vida útil. Por isso um requisito fundamental da Mecânica da Fratura é obter um meio de analisar a estabilidade de tais trincas. Com respeito a isto, o mais significativo avanço foi a introdução do Fator de Intensidade de Tensões ( F.I.T. ) por IRWIN como um parâmetro único para caracterizar o início da propagação da trinca. O uso do fator de intensidade de tensões no exame da estabilidade de trincas exige um acurado conhecimento do campo de tensões na vizinhança da extremidade da trinca através da geometria estrutural, carregamento e condições de contorno em questão. Infelizmente existem soluções analíticas somente para casos selecionados e relativamente simples e é na determinação dos campos de tensões e deslocamentos que técnicas numéricas tais como elementos finitos representam papel importante.

Nas duas últimas décadas e final da anterior a técnica de elementos finitos se estabeleceu firmemente como uma ferramenta versátil para a solução numérica de problemas de engenharia e parecia ser a primeira vista um método ideal de estudo do comportamento de fratura frágil nos materiais. Contudo, a menos que malhas extremamente finas fossem empregadas, surgiriam problemas de precisão no campo de tensões na vizinhança da extremidade da trinca (crack-tip). Por isso, visando tornar possível a aplicação do método dos elementos finitos para uma eficiente solução de problemas de fratura, certas adaptações ou desenvolvimentos adicionais tornaram-se necessários. Finalmente a introdução da integral J por RICE em 1968 permitiu estender os métodos da Mecânica de Fraturas ao caso de materiais com comportamento elastoplástico - Mecânica

de Fraturas Não Linear (MFNL). Atualmente os campos de maior interesse na área compreendem o estudo de fraturas em materiais elastoplásticos e viscoelásticos, em situações estáticas e dinâmicas.

Um outro tipo de análise, complementar à MF, compreende a denominada Mecânica do Dano Contínuo (MDC) que estuda a situação prévia à formação das trincas iniciais.

*Referências de antecedentes:* No Brasil a Mecânica de Fraturas é utilizada a nível tecnológico por empresas importantes como PETROBRÁS, EMBRAER, etc. Pesquisas sobre aplicações numéricas têm sido realizadas na COPPE e estudos relacionados a MDC têm sido iniciados no LNCC/CNPq, São Carlos SP e no CPGEC/UFRGS.

*Objetivos:* Os principais objetivos do presente trabalho resumem-se em dois grupos, a saber: 1) Iniciar uma linha de pesquisa na Mecânica de Fraturas e 2) Implementar um programa de elementos finitos capaz de analisar trincas em estado plano de tensão ou deformação para materiais elásticos ou elastoplásticos. Para cumprí-los tornou-se necessário estudar os problemas fundamentais indicados anteriormente, obter a determinação teórica dos campos de tensão e deformação na extremidade de uma trinca, rever os conceitos fundamentais de elementos finitos e sua extensão no caso de campos singulares de tensão, rever os conceitos de plasticidade computacional e a técnica da integral J.

## 2. - FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DE FRATURAS

A primeira tentativa de abordagem matemática da Mecânica de Fraturas foi através de Inglis em 1913, citado por OWEN e FAWKES.

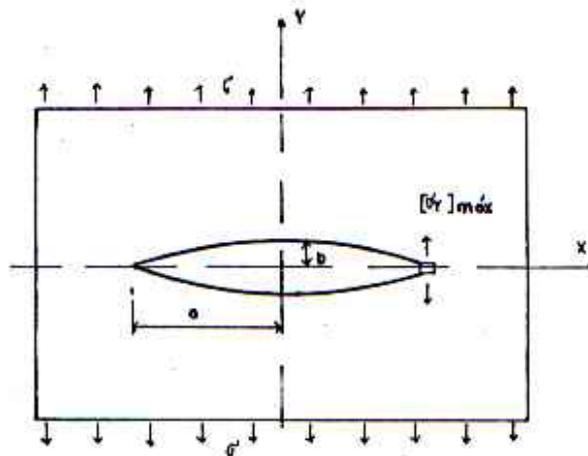


Fig. 2.1 - Trinca elíptica em um campo de tensão.

Analisando o caso de um furo elíptico em uma placa sob tensão uniforme  $\sigma$ , como mostrado na fig. 2.1, ele demonstrou que a máxima tensão ocorria no ápice do eixo maior, onde o raio de curvatura  $\rho = b^2/a$  é um mínimo e é dada por

$$\sigma_{y \text{ max}} = \sigma ( 1 + 2 a/b ). \quad (2.1)$$

No limite quando  $b$  tendesse a zero

$$\sigma_{y \text{ max}} = 2 \sigma \left[ \frac{a}{\rho} \right]^{1/2}. \quad (2.2)$$

Assim, para uma trinca verdadeira (  $b = 0$  ), a tensão na extremidade da trinca se tornaria infinitamente grande. Visto

que todos os materiais reais somente podem suportar tensões finitas, o resultado acima parecia indicar que um componente estrutural trincado não poderia suportar qualquer carregamento.

## 2.1 - A Teoria de Griffith

O resultado anterior está, naturalmente, em desacordo com as experiências práticas e foi racionalizado por Griffith, citado por OWEN e FAWKES, que aplicou princípios de conservação de energia para o caso da placa com trinca centralizada mostrada na fig. 2.2.

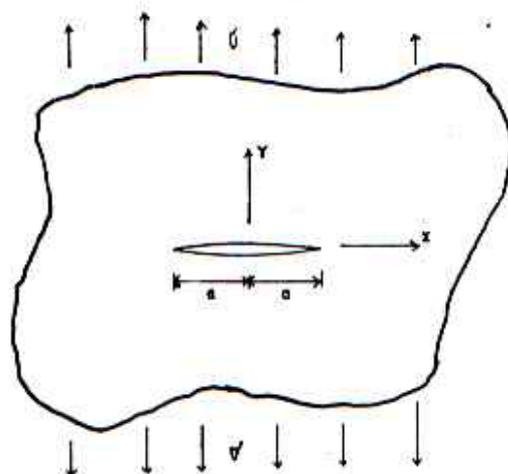


Fig. 2.2 - Propagação de trinca centralizada em uma placa.

Griffith postulou que uma trinca somente se tornaria instável quando a taxa de liberação de energia de deformação elástica, devido à extensão da trinca, excedesse ao acréscimo na energia superficial associada com a formação de novas superfícies de trinca.

$$\frac{d}{da} (F - U) \geq \frac{d}{da} W \quad (2.3)$$

onde  $F$  é o trabalho externo atuante sobre o corpo,  $U$  é sua

energia interna e  $U_s$  é a energia de superfície. Para uma trinca em uma placa de comprimento infinito e de espessura  $B$ , sujeita a uma carga de tração  $\sigma$  normal a trinca (o problema considerado por Griffith), unicamente a mudança na energia elástica  $U$  deve ser avaliada, e é dada por (2.4)

$$U = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{E} \pi a^2 B & \text{Tensão plana} \\ \frac{\sigma^2}{E} \pi a^2 (1 - \nu^2) B & \text{Deformação plana} \end{cases} \quad (2.4)$$

Nas quais  $E$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson respectivamente. A energia superficial é

$$W = 4 a \gamma B \quad (2.5)$$

onde  $\gamma$  é a densidade de energia superficial ou tração superficial, levando em conta a existência de duas superfícies, uma inferior e outra superior, e  $B$  é a espessura do corpo.

Estes termos de energia estão mostrados na fig. 2.1 em função do acréscimo no tamanho da trinca. É facilmente observável que a trinca se torna instável em um comprimento crítico  $a_c$  quando se verifica a (2.3).

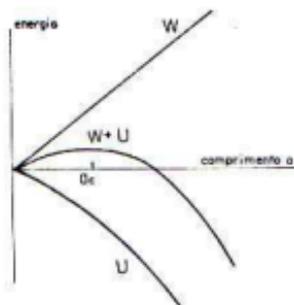


Fig. 2.3 - Variação na energia superficial e energia de deformação liberada com o crescimento da trinca.

Para uma trinca com  $0 \leq a \leq a_c$  requer-se introdução de energia, ao passo que quando  $a > a_c$  a propagação da trinca ocorre de uma maneira instável. Substituindo de (2.4) e (2.5) em (2.3) resulta para um estado de tensão plana em

$$\sigma = \sqrt{\frac{2 E \gamma}{\pi a}} \quad (2.6)$$

Esta dá a tensão na qual a propagação instável ocorre para um dado comprimento de trinca, ou, alternativamente, o comprimento crítico que pode existir na presença de uma tensão particular.

Deve-se notar que a abordagem de Griffith não envolve especificamente a distribuição de tensões nas vizinhanças da extremidade da trinca. Além disto, a abordagem original de Griffith foi proposta para materiais frágeis. Irwin, Orowan e Williams, citados por OWEN e FAWKES, propuseram extensões às expressões de Griffith que permitem sua aplicação a outros materiais. Em geral, pode-se escrever em lugar da (2.6)

$$\sigma_{cr} = K \sqrt{\frac{E}{a} \left[ \sum T_i \right]} \quad (2.7)$$

onde os  $T_i$  representam os processos de dissipação presentes. Temos  $T_1 = \gamma$  para materiais frágeis,  $T_2$  para materiais dúcteis,  $T_3$  para materiais visco-elásticos, etc.

Definindo a taxa de energia liberada

$$G = \frac{\partial}{\partial a} (F - U) \quad (2.8)$$

e a força de resistência à trinca

$$R = \frac{\partial W}{\partial a} \quad (2.9)$$

então (2.3) infere para o crescimento instável da trinca que

$$G = R. \quad (2.10)$$

## 2.2 - A abordagem de Irwin - O Fator de Intensidade de Tensão

Nesta seção é feito um breve resumo dos conceitos básicos e definições empregadas na teoria da Mecânica da Fratura. Uma trinca presente em um corpo carregado pode se deformar de diferentes maneiras. Irwin observou que existem três movimentos relativos independentes das superfícies superior e inferior, como mostrados na fig.2.4, e estes são classificados como:

*Modo de abertura I:* As duas superfícies da trinca são tracionadas separadamente na direção  $y$ , exceto onde as deformações são simétricas sobre os planos  $x-z$  e  $x-y$ .

*Modo de corte longitudinal II:* As duas superfícies da trinca deslizam relativamente uma sobre a outra na direção  $x$ , exceto onde as deformações são simétricas sobre o plano  $x-y$  e anti-simétricas sobre o plano  $x-z$ .

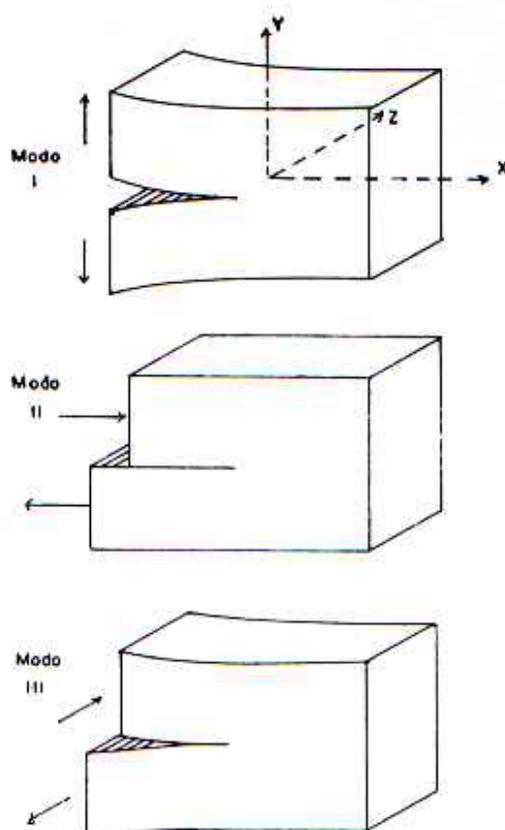


Fig. 2.4 - Modos fundamentais de fratura

*Modo de corte transversal ou rasgamento III:* As duas superfícies da trinca deslizam relativamente uma sobre a outra na direção z, exceto onde as deformações são anti-simétricas sobre os planos x-y e x-z.

Assim se pode ver que qualquer deformação da trinca pode ser representada pela apropriada superposição destes três casos. Percebe-se também que para cada um dos três movimentos da trinca da fig.2.4 existe um campo de tensão de extremidade de trinca associado. IRWIN, usando o método semi-inverso de Westergaard, citado por OWEN e FAWKES, demonstrou que as componentes de tensão primárias na região da extremidade da trinca correspondentes aos três modos de deslocamento poderiam ser expressas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f(\theta) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f(\theta) \\ \sigma_{xz} &= \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} f(\theta).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Nas expressões acima, r é a distância radial à extremidade da trinca e os termos f(θ) são funções somente do ângulo polar θ. Vê-se que o campo de tensão possui uma singularidade da forma 1/√r na extremidade da trinca. Os parâmetros K<sub>I</sub>, K<sub>II</sub> e K<sub>III</sub> são conhecidos como *Fatores de Intensidade de Tensão*, correspondem aos três modos de fratura e caracterizam a magnitude do campo de tensões da extremidade da trinca. O avanço de uma trinca pode ser monitorado pela obtenção de um valor crítico K<sub>c</sub>, do fator de intensidade de tensão. O valor K<sub>c</sub> é considerado uma propriedade do material e é denominado *tenacidade de fratura*.

Os fatores de intensidade de tensão variam com o comprimento da trinca, geometria da peça, tipo de carga e intensidade. Um considerável volume de trabalhos sobre a avaliação de fatores K para testes e problemas específicos têm

sido publicados.

Os fatores de intensidade de tensão estão relacionados à taxa de liberação de energia de deformação por expressões apropriadas. Por exemplo, para o Modo I,  $K_I$  é relacionado a  $G_I$ , definido por (2.12), como segue:

$$G_I = \frac{(k + 1)}{8\mu} K_I^2 \quad (2.12)$$

na qual  $\mu$  é o módulo cortante do material e

$$k = \begin{cases} (3 - 4\nu) & \text{Para E.P.T.} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{Para E.P.D.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Esta correspondência é obtida em detalhes na seção 4.2.1. De forma semelhante, as relações para os outros dois modos de deformação são:

$$G_{II} = \frac{(k + 1)}{8\mu} K_{II}^2 \quad (2.14)$$

e

$$G_{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (2.15)$$

### 2.2.1. - Solução Analítica do Problema Elástico-linear

Nesta seção expressões detalhadas serão obtidas para os campos de deslocamento e tensões que ocorrem nas vizinhanças de uma trinca plana sujeita ao Modo I ou Modo II de deformação. Estas soluções serão empregadas posteriormente na avaliação do fator de intensidade de tensões através de métodos numéricos.

Sneddon, citado por OWEN e FAWKES, foi o primeiro a derivar expansões para os dois casos de trinca de Griffith e para uma trinca circular. IRWIN e WILLIAMS estenderam o trabalho de Sneddon para representar o campo de tensões em

termos do fator de intensidade de tensões  $K_I$  e  $K_{II}$ . Mais tarde SIH e RICE, Rice e Sih, citados por OWEN e FAWKES e LOEBER e SIH estenderam este trabalho usando o método das funções complexas de MUSKHELISHVILI. Esta última formulação é a mais conveniente para aplicações numéricas, pois ela conduz a uma solução em série envolvendo valores incógnitos de  $K$ , que são facilmente formulados em termos de elementos finitos.

As equações de equilíbrio da elasticidade plana dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

são identicamente satisfeitas se as componentes de tensão forem expressas em termos de uma função de tensões de Airy  $A(x,y)$ , como segue

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

Para a formulação em tensões, a seguinte equação de compatibilidade também deve ser satisfeita:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.18)$$

na qual  $\nabla^2$  é o operador de Laplace ou harmônico. Substituindo a (2.17) na (2.18) resulta na equação bi-harmônica:

$$\nabla^4 A = \nabla^2(\nabla^2 A) = 0 \quad (2.19)$$

Assim, o problema se resume em determinar a função de tensões  $A$  que satisfaça (2.19) e também estabeleça tensões e deformações que satisfaçam as condições de contorno.

Muskhelishvili demonstrou que qualquer função bi-harmônica  $A(x,y)$  pode ser representada de uma maneira muito simples pelo uso de duas funções de variável complexa  $z = x + iy$ . Este fato é fundamental à teoria das equações bi-harmônicas e, em particular, para a teoria da elasticidade plana, visto que as propriedades de uma função de uma variável complexa são geralmente bem conhecidas. Muskhelishvili demonstrou que para duas funções analíticas  $\phi(z)$  e  $\kappa(z)$  de variável complexa  $z$ , a função de tensão, tensões e deslocamentos podem ser escritas respectivamente como

$$A = \operatorname{Re} \left[ \bar{z} \phi(z) + \kappa(z) \right] \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \phi'(z) = 2 \left[ \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \sigma_{xy} &= 2 \left[ \bar{z} \phi''(z) + \kappa'(z) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$2\mu(u + iv) = k \phi(z) - \overline{z \phi'(z)} - \overline{\kappa'(z)} \quad (2.22)$$

onde  $\phi'(z) = \frac{\partial \phi(z)}{\partial z}$  e  $\kappa'(z) = \frac{\partial \kappa(z)}{\partial z}$

e  $\operatorname{Re}$  indica a parte real da expressão

$\bar{z}$  o conjugado complexo, isto é,  $\bar{z} = x - iy$

$\nu$  o coeficiente de Poisson

$E$  o módulo de Young e

$\mu$  o módulo cortante  $E / 2(1 + \nu)$

Considerando as funções analíticas

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{\lambda_n} \quad , \quad \kappa(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{\lambda_{n+1}} \quad (2.23)$$

onde  $\lambda_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) são reais e  $A_n$  e  $B_n$  são constantes complexas da forma :

$$A_n = a_n^1 + ia_n^2 \quad e \quad B_n = b_n^1 + ib_n^2 \quad (2.24)$$

Considerando a fig. 2.5 observa-se que a superfície da trinca deve ser livre de tensões, portanto

$$\sigma_{xy} = \sigma_y = \sigma_x = 0 \quad \text{para} \quad \theta = +\pi \text{ rad} \quad e \quad \theta = -\pi \text{ rad.} \quad (2.25)$$

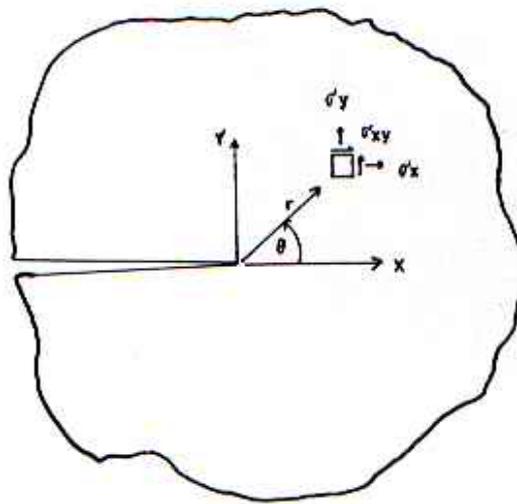


Fig. 2.5 - Eixos coordenados empregados na análise de tensões de uma trinca plana.

Somando as equações (2.21) obtemos

$$\sigma_y + i\sigma_{xy} = \phi'(z) + \overline{\phi'z} + \bar{z}\phi''(z) + \kappa''(z) \quad (2.26)$$

Substituindo  $\phi(z)$  e  $\kappa(z)$  de (2.23), levando em conta que  $z = re^{i\theta}$  e  $\bar{z} = re^{-i\theta}$  resulta

$$\sigma_y + i\sigma_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda_n r^{(\lambda_n-1)} \left[ A_n e^{i\theta(\lambda_n-1)} + \bar{A}_n e^{-i\theta(\lambda_n-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. A_n (\lambda_n-1) e^{i\theta(\lambda_n-2)} + B_n (\lambda_n+1) e^{i\theta(\lambda_n-1)} \right] \right\} \quad (2.27)$$

Aplicando as condições de contorno

( $\theta = +\pi$  rad)

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda_n \left[ A_n e^{\pi i(\lambda_n-1)} + \bar{A}_n e^{-\pi i(\lambda_n-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. A_n (\lambda_n-1) e^{\pi i(\lambda_n-2)} + B_n (\lambda_n+1) e^{\pi i(\lambda_n-1)} \right] \right\} \quad (2.28)$$

Dividindo por  $e^{\pi i(\lambda_n-1)}$  obtemos

$$0 = \lambda_n \left[ A_n + \bar{A}_n e^{-2\pi i(\lambda_n-1)} + A_n (\lambda_n-1) e^{-2\pi i} + B_n (\lambda_n+1) \right] \quad (2.29)$$

Lembrando-se de que  $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \\ e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

$$0 = \lambda_n \left\{ A_n + \bar{A}_n \left[ \cos 2\pi(\lambda_n-1) - i \operatorname{sen} 2\pi(\lambda_n-1) \right] \right. \\ \left. + A_n (\lambda_n-1) (\cos 2\pi - i \operatorname{sen} 2\pi) + B_n (\lambda_n+1) \right\} \quad (2.30)$$

$$0 = \lambda_n \left[ A_n + \bar{A}_n (\cos 2\pi\lambda_n - i \operatorname{sen} 2\pi\lambda_n) \right. \\ \left. + A_n (\lambda_n-1) (\cos 2\pi - i \operatorname{sen} 2\pi) + B_n (\lambda_n+1) \right]$$

$$0 = \lambda_n \left[ A_n + \bar{A}_n (\cos 2\pi\lambda_n - i \sin 2\pi\lambda_n) + A_n (\lambda_n - 1) + B_n (\lambda_n + 1) \right]. \quad (2.31)$$

Analogamente, tomando-se  $\theta = -\pi$  rad se obtém

$$0 = \lambda_n \left[ A_n + \bar{A}_n (\cos 2\pi\lambda_n + i \sin 2\pi\lambda_n) + A_n (\lambda_n - 1) + B_n (\lambda_n + 1) \right] \quad (2.32)$$

Fazendo-se a subtração entre estas duas expressões resulta:

$$\sin 2\pi\lambda_n = 0 \quad \text{Assim, } \lambda_n = \frac{n}{2} \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Substituindo na (2.32) e observando as condições de contorno:

$$0 = A_n \left[ \frac{n}{2} \right] + \bar{A}_n \left[ \cos 2\pi \left( \frac{n}{2} \right) + i \sin 2\pi \left( \frac{n}{2} \right) \right] + B_n \left[ \frac{n}{2} + 1 \right]$$

$$0 = A_n \left[ \frac{n}{2} \right] + \bar{A}_n (\cos \pi n + i \sin \pi n) + B_n \left[ \frac{n}{2} + 1 \right]$$

$$0 = A_n \left[ \frac{n}{2} \right] + \bar{A}_n (-1)^n + B_n \left[ \frac{n}{2} + 1 \right] \quad (2.34)$$

Substituindo  $A_n$  e  $B_n$ :

$$0 = \frac{n}{2} \left[ a_n^1 + i a_n^2 \right] + \left[ a_n^1 - i a_n^2 \right] (-1)^n \\ + \left[ b_n^1 + i b_n^2 \right] \left[ \frac{n}{2} + 1 \right]$$

Separando em parte real

$$\frac{n}{2} \left[ a_n^1 \right] + (-1)^n \left[ a_n^1 \right] + \left[ b_n^1 \right] \left[ \frac{n}{2} + 1 \right] = 0 \\ - b_n^1 = \frac{a_n^1 \left[ \frac{n}{2} + (-1)^n \right]}{\left[ \frac{n}{2} + 1 \right]} \quad (2.35)$$

Separando em parte imaginária

$$-\frac{n}{2} \left[ i a_n^2 \right] + (-1)^n \left[ -i a_n^2 \right] + \left[ i b_n^2 \right] \left[ \frac{n}{2} + 1 \right] = 0 \\ b_n^2 = \frac{a_n^2 \left[ \frac{n}{2} - (-1)^n \right]}{\left[ \frac{n}{2} + 1 \right]} \quad (2.36)$$

Da expressão (2.27), tomando  $\lambda_n = \frac{n}{2}$

$$\sigma_y + i\sigma_{xy} = \sum_{n=1}^{\alpha} \left\{ \frac{n}{2} r^{\left( \frac{n}{2}-1 \right)} \left[ A_n e^{i\theta \left( \frac{n}{2}-1 \right)} + \bar{A}_n e^{-i\theta \left( \frac{n}{2}-1 \right)} \right. \right. \\ \left. \left. + A_n \left[ \frac{n}{2} - 1 \right] e^{i\theta \left( \frac{n}{2}-3 \right)} + B_n \left[ \frac{n}{2} + 1 \right] e^{i\theta \left( \frac{n}{2}-1 \right)} \right] \right\} \quad (2.37)$$

Substituindo  $A_n$ ,  $\bar{A}_n$  e  $B_n$  pelas formas explícitas, resulta em:

$$\begin{aligned}
\sigma_y + i\sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^{\alpha} \left\{ \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left[ \left( a_n^1 + i a_n^2 \right) e^{i\theta\left(\frac{n}{2}-1\right)} \right. \right. \\
&+ \left. \left( a_n^1 - i a_n^2 \right) e^{-i\theta\left(\frac{n}{2}-1\right)} + \left( a_n^1 + i a_n^2 \right) \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e^{i\theta\left(\frac{n}{2}-3\right)} \right. \\
&+ \left. \left. \left( b_n^1 + i b_n^2 \right) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) e^{i\theta\left(\frac{n}{2}-1\right)} \right] \right\} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Substituindo na forma trigonométrica de números complexos, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sigma_y + i\sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^{\alpha} \left\{ \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left[ \left( a_n^1 + i a_n^2 \right) \left( \cos \left[ \frac{n}{2} - 1 \right] e \right) \right. \right. \\
&+ i \operatorname{sen} \left[ \frac{n}{2} - 1 \right] e \left. \right] + \left( a_n^1 - i a_n^2 \right) \left[ \cos \left[ \frac{n}{2} - 1 \right] e \right. \\
&- i \operatorname{sen} \left[ \frac{n}{2} - 1 \right] e \left. \right] + \left( a_n^1 + i a_n^2 \right) \left[ \frac{n}{2} - 1 \right] \\
&\left[ \cos \left[ \frac{n}{2} - 3 \right] e - i \operatorname{sen} \left[ \frac{n}{2} - 3 \right] e \right] \\
&+ \left. \left. \left( b_n^1 + i b_n^2 \right) \left[ \frac{n}{2} + 1 \right] \left[ \cos \left[ \frac{n}{2} - 1 \right] e \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. i \operatorname{sen} \left[ \frac{n}{2} - 1 \right] e \right] \right] \right\} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Fazendo o produto e substituindo os coeficientes  $b_n^1$  e  $b_n^2$  calculados anteriormente:

$$\begin{aligned}
\sigma_y + i \sigma_{xy} = & \sum_{n=1}^{\alpha} \left\{ \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left[ 2 a_n^1 \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right. \right. \\
& - 2 a_n^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \left. \right] + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left[ a_n^1 \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e \right. \\
& - a_n^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e + i a_n^1 \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e \\
& + i a_n^2 \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e \left. \right] - \left[ a_n^1 \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \right. \\
& \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e - a_n^2 \left( \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \\
& + i a_n^1 \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e + i a_n^2 \left( \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \\
& \left. \left. \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right] \right\} \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Separando em sua parte real:

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ 2 a_n^1 \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \right. \\
& a_n^1 \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e - a_n^1 \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \\
& - 2 a_n^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) a_n^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e \\
& \left. + a_n^2 \left( \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right\} \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Resulta:

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ a_n^1 \left[ \left( 2 - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right. \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e \right] \right. \\
& - a_n^2 \left[ \left( 2 - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e \right] \right\} \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Separando em sua parte imaginária :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) a_n^1 \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right. \\
& - \left. \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) a_n^1 \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \right. \\
& \left. a_n^2 \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e - \left( \frac{n}{2} - (-1)^n \right) a_n^2 \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right\} \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Resulta:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ a_n^1 \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right. \right. \\
& - \left. \left. \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) e \right] \right. \\
& - a_n^2 \left[ + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) e - \left( \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\cos \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta \right] \} \quad (2.44)$$

De maneira similar encontra-se a partir de (2.21) uma expressão para  $\sigma_x$ , resultando

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ a_n^1 \left[ \left( 2 + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta \right. \right. \\ & - \left. \left. \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta \right] - a_n^2 \left[ \left( 2 + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Agora para as componentes de deslocamento  $u$  e  $v$ , substituindo (2.23) em (2.22), resulta em

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k A_n r^{\left(\frac{n}{2}\right)} e^{i\theta\left(\frac{n}{2}\right)} - r e^{i\theta} \right. \\ & \left. \bar{A}_n \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-i\theta\left(\frac{n}{2}-1\right)} - \bar{B}_n \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \right. \\ & \left. r^{\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-i\theta\left(\frac{n}{2}\right)} \right] \quad \text{ou} \\ 2\mu(u + iv) + & \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2}\right)} \left\{ k \left[ a_n^1 + i a_n^2 \right] \left[ \cos \frac{n}{2} \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + i \sin \frac{n}{2} \theta \right] - \frac{n}{2} \left[ a_n^1 - i a_n^2 \right] \left[ \cos \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right. \right. \end{aligned}$$

$$- i \operatorname{sen} \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] \theta \Big] - \left[ \frac{n}{2} + 1 \right] \left( b_n^1 - i b_n^2 \right) \left[ \cos \frac{n}{2} \theta - i \operatorname{sen} \frac{n}{2} \theta \right] \Big\} .$$

Finalmente separando em componentes real e imaginária e ainda usando (2.35) e (2.36) obtém-se

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r \left( \frac{n}{2} \right)}{2^{\mu}} \left\{ a_n^1 \left[ \left( k + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \cos \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] \theta \right] - a_n^2 \left[ \left( k + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \operatorname{sen} \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] \theta \right] \right\} \quad (2.46)$$

e

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r \left( \frac{n}{2} \right)}{2^{\mu}} \left\{ a_n^1 \left[ \left( k - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \operatorname{sen} \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] \theta \right] + a_n^2 \left[ \left( k - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \cos \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] \theta \right] \right\} \quad (2.47)$$

Das equações (2.42), (2.44) e (2.45) pode-se perceber que o primeiro termo das séries de tensões dá a tensão como uma função da  $\sqrt{r}$ , fornecendo tensões infinitas na extremidade da trinca. Assim, o primeiro termo da expansão infinita predomina na região imediatamente próxima à extremidade da trinca. Aplicando o caso especial de  $n = 1$  às equações (2.42), (2.44), (2.45), (2.46), e (2.47), as seguintes expressões para as tensões e deslocamentos próximos à extremidade da trinca são

encontradas

$$\sigma_x = \frac{a_1^1}{\sqrt{r}} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2}$$

$$+ \frac{a_1^2}{\sqrt{r}} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{a_1^1}{\sqrt{r}} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2}$$

$$- \frac{a_1^2}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{a_1^1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$- \frac{a_1^2}{\sqrt{r}} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2}$$

$$u = \frac{a_1^1 \sqrt{r}}{4 \mu} \left\{ (2k - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right\}$$

$$- \frac{a_1^2 \sqrt{r}}{4 \mu} \left\{ (2k + 3) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right\}$$

$$v = \frac{a_1^1 \sqrt{r}}{4 \mu} \left\{ (2k + 1) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right\}$$

$$+ \frac{a_1^2 \sqrt{r}}{4 \mu} \left\{ (2k - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right\}.$$

(2.48)

Aplicando a condição  $\theta = 0$  para (2.48) resulta

$$\sigma_x = \frac{a_1^1}{\sqrt{x}} \quad \sigma_y = \frac{a_1^1}{\sqrt{x}} \quad \sigma_{xy} = \frac{a_1^2}{\sqrt{x}} \quad (2.49)$$

Agora comparando com as expressões de Irwin (2.11), notando que  $f(0) = 0$ , vê-se que

$$a_1^1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad a_1^2 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.50)$$

Uma solução em série infinita para uma trinca em um plano semi-infinito foi assim derivada e demonstrou-se que o primeiro termo desta série corresponde ao campo de tensões singular próximo à extremidade da trinca como dado por Irwin.

### 2.3 - A Integral J de Rice

A determinação de campos de tensões nas proximidades de entalhes ou trincas apresenta problemas matemáticos complexos, particularmente no caso de materiais não-lineares, onde análises como a indicada em 2.2.1 não são válidas.

O método da integral J proposto por RICE, permite evitar alguns destes inconvenientes, ignorando os detalhes do problema de valor de contorno. Isto porque se trata de uma integral de linha cujo valor é o mesmo para todos os caminhos de integração. Um caminho envolvendo a extremidade da trinca leva à consideração do campo de tensões concentradas ou singulares. Outros caminhos permitem avaliações mais simples, tanto no caso teórico quanto numérico.

Uma vantagem particular é que a formulação é válida para materiais elásticos não-lineares. Isto porque o comportamento de materiais elastoplásticos pode ser aproximadamente representado mediante uma teoria de

"deformação", que coincide com a elasticidade linear para estados de tensão dentro da superfície de escoamento e com elasticidade não-linear para estados de tensão sobre ela.

Considere-se um corpo homogêneo de material elástico linear ou não-linear livre de forças de massa e sujeito a um estado de deformação bidimensional ( EPT ou EPD ) de modo que todas as tensões  $\sigma_{ij}$  dependam unicamente das coordenadas cartesianas  $x_1 = x$  e  $x_2 = y$ . Suponha-se que o corpo contém uma trinca conforme indicado na fig. 2.6, com duas superfícies paralelas ao eixo  $x$  e uma ponta suave.

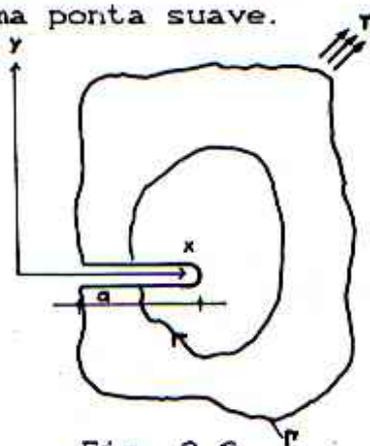


Fig. 2.6

Uma trinca reta é um caso limite.

Desejamos determinar a variação na energia potencial  $U_p = F - U$  do corpo quando a trinca passa de um comprimento  $a$  para um comprimento  $a + da$ . Defina-se

$$J = - \frac{d}{da} U_p \quad (2.51)$$

onde  $U_p$  é a energia elástica interna do corpo

$$U = \int_A W \, dx \, dy \quad W(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\epsilon_{ij} \quad (2.52)$$

e  $F$  é o trabalho das forças externas

$$F = \int_{\Gamma} T_i u_i \, ds. \quad (2.53)$$

Então substituindo (2.52) e (2.53) em (2.51) resulta

$$J = - \int_A \frac{\partial W}{\partial a} dx dy + \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds. \quad (2.54)$$

Colocando a origem do sistema coordenado na ponta da trinca temos

$$da = - dx, \quad \frac{d}{da} = - \frac{d}{dx} \quad (2.55)$$

$$- \frac{dU_p}{da} = \int_A \frac{\partial W}{\partial x} dx dy - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (2.56)$$

Aplicando o teorema de GREEN

$$J = - \frac{dU_p}{da} = \int_{\Gamma} W dy - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds. \quad (2.57)$$

Para provar a independência do caminho de integração, considere-se um caminho fechado  $\Gamma^*$  encerrado na área  $A^*$ . Aplicando o teorema de Green, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^*} \left[ W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right] \\ &= \int_{A^*} \left[ \frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] dx dy. \quad (2.58) \end{aligned}$$

Diferenciando a densidade de energia de deformação (2.52)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\
&= \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad \text{pois } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad \text{pois } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0
\end{aligned}
\tag{2.59}$$

sendo que a segunda integral em (2.58) é nula.

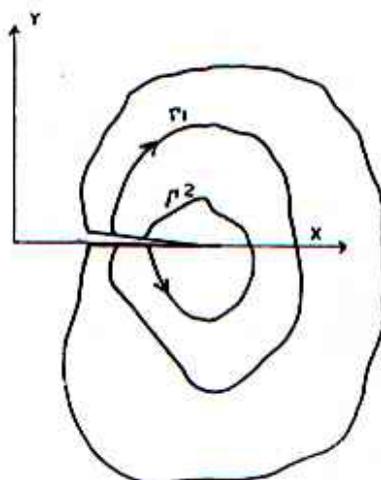


Fig. 2.7 - Contorno fechado para comprovar independência

Escolhendo-se como  $\Gamma^*$  o caminho  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  na fig. 2.7, de modo a percorrer  $\Gamma_1$  no sentido anti-horário, continuando ao longo da superfície da trinca, tomando  $\Gamma_2$  no sentido horário e continuando na superfície da trinca até atingir novamente o ponto de partida, obtém-se um caminho fechado. Sobre as porções do caminho ao longo da trinca  $T = 0$  e  $dy = 0$ , de modo que  $J$  tem o mesmo valor quando calculado sobre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  ou qualquer outro

caminho. Admite-se, naturalmente, que a área entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  está livre de singularidades.

### 3 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESTADO PLANO - CAMPO ELASTICO-LINEAR

#### 3.1 - Representação Isoparamétrica de Elementos Finitos

Nesta seção será apresentada uma formulação para aplicações na mecânica dos sólidos no campo elástico em termos de elementos finitos. Esta formulação se restringirá ao elemento isoparamétrico quadrilateral de 8 nós para o estado plano de tensões e deformações. Tais elementos servirão como base de geração de elementos especiais para a análise de problemas de fratura em uma etapa posterior, bem como fundamento para todos os códigos computacionais desenvolvidos, tanto para análise elástica quanto elastoplástica.

##### 3.1.1 - Equações Fundamentais

Em uma representação de elementos finitos, os deslocamentos e deformações e seus correspondentes virtuais podem ser expressos pelas relações

$$u = \sum_{i=1}^n N_i d_i \quad (3.1)$$

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n B_i d_i \quad (3.2)$$

onde para o nó  $i$ ,  $d_i$  é o vetor de variáveis nodais,  $N_i = IN_i$  é a matriz de funções de forma global e  $B_i$  é a matriz de deformações-deslocamentos globais. O número total de nós na

malha completa é  $n$ .

Se (3.1) e (3.2) são substituídas na expressão do trabalho virtual obtém-se

$$\sum_{i=1}^n [\delta d_i]^T \left\{ \int_{\Omega} [B_i]^T \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} [N_i]^T b \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} [N_i]^T t \, d\Gamma \right\} = 0 \quad (3.3)$$

e desde que (3.3) deva ser verdadeira para um conjunto de deslocamentos virtuais arbitrários  $\delta d_i$ , então tem-se para cada nó  $i$  uma equação da forma

$$\int_{\Omega} [B_i]^T \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} [N_i]^T b \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} [N_i]^T t \, d\Gamma = 0 \quad (3.4)$$

Os deslocamentos podem ser representados da maneira usual como

$$u^{(e)} = \sum_{i=1}^r N_i^{(e)} d_i^{(e)} \quad (3.5)$$

onde, para o nó local  $i$  do elemento  $e$ ,  $N_i^{(e)} = I N_i^{(e)}$  é a matriz das funções de forma e o vetor de variáveis é  $d_i^{(e)}$ . Existem  $r$  nós locais em cada elemento  $e$ .

Um típico elemento isoparamétrico de 8 nós é mostrado na fig. 3.1 com suas funções de forma.

Note-se que em uma formulação isoparamétrica pode-se usar a seguinte representação para as coordenadas  $x$  e  $y$  no elemento:

$$\begin{Bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^r \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^{(e)} \\ y_i^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

na qual  $N_i^{(e)}$  são as mesmas funções de forma usadas na representação dos deslocamentos.

Podemos avaliar a matriz jacobiana como:

$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} x_i^{(e)}, & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} y_i^{(e)} \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} x_i^{(e)}, & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A inversa de  $J^{(e)}$  é então avaliada usando a expressão

$$\left[ J^{(e)} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det } J^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

As relações deformação-deslocamento são expressas como

$$e^{(e)} = \sum_{i=1}^r B_i^{(e)} d_i^{(e)} \quad (3.9)$$

em que  $B_i^{(e)}$  é a matriz de deformações.

O volume elementar é dado por

$$d\Omega^{(e)} = h^{(e)} \text{Det } J^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.10)$$

onde  $h^{(e)}$  pode ser deduzido da tabela 3.1 onde expressões para  $d_i^{(e)}$ ,  $B_i^{(e)}$ , e  $d\Omega^{(e)}$  são resumidas para as duas aplicações.

Funções de forma

a) Nós de canto

$$N_i^{(*)} = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1)$$

$i = 1, 3, 5, 7$

b) Nós intermediários

$$N_i^{(*)} = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2)$$

$i = 2, 4, 6, 8$

Número do nó local	$\xi_i$	$\eta_i$
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	1	0
5	1	1
6	0	1
7	-1	1
8	-1	0

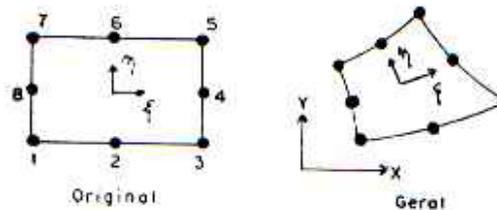


Fig. 3.1 - Elemento isoparamétrico de 8 nós

Tabela 3.1 - Deslocamentos nodais, matrizes de deformação e volumes ou áreas para aplicação em mecânica dos sólidos bi-dimensional.

Aplicação	$d_i^{(e)}$	$B_i^{(e)}$	$d\Omega^{(e)}$
Tensão plana	$\begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} \end{bmatrix}$	$t^{(e)} \text{Det } J^{(e)} d\xi d\eta$
Deformação plana	$\begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} \end{bmatrix}$	$\text{Det } J^{(e)} d\xi d\eta$

As derivadas cartesianas das funções de forma usadas nas matrizes de deformação-deslocamento na tabela 3.1 podem ser obtidas usando a regra de diferenciação da cadeia

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (3.12)$$

nas quais os termos  $\partial \xi / \partial x$ ,  $\partial \eta / \partial x$ ,  $\partial \eta / \partial y$  e  $\partial \xi / \partial y$  podem ser obtidos da inversa da matriz jacobiana dada em (3.8).

Se existe uma relação tensão-deformação linear para cada elemento da forma

$$\sigma^{(e)} = D^{(e)} \epsilon^{(e)} = D^{(e)} \sum_{j=1}^r B_j^{(e)} d_j^{(e)} \quad (3.13)$$

onde

$$D^{(e)} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ para E.P.T.} \quad (3.14)$$

ou

$$D^{(e)} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ para E.P.D.} \quad (3.15)$$

nas quais  $E$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade longitudinal e o módulo de Poisson respectivamente, então a contribuição do elemento  $e$  para o primeiro termo em (3.4) é dado por

$$\sum_{j=1}^r K_{ij}^{(e)} d_j^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left[ B_i^{(e)} \right]^T D^{(e)} \left( \sum_{j=1}^r B_j^{(e)} d_j^{(e)} \right) d\Omega \quad (3.16)$$

onde  $K_{ij}^{(e)}$  é a submatriz da matriz de rigidez do elemento  $K^{(e)}$ .

A contribuição do elemento  $e$  para o segundo termo em (3.4) é dado por

$$f_{Bi}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left[ N_i^{(e)} \right]^T b^{(e)} d\Omega \quad (3.17)$$

Para o terceiro termo, a contribuição do elemento  $e$  é

$$f_{Ti}^{(e)} = \int_{\Gamma_t^{(e)}} \left[ N_i^{(e)} \right]^T t^{(e)} d\Gamma \quad (3.18)$$

onde  $\Gamma_t^{(e)}$  é aquela parte de  $\Gamma_t$  que coincide com um contorno do elemento  $e$ . Naturalmente, para muitos elementos não existirá contribuição alguma para  $f_{Ti}^{(e)}$ .

### 3.1.2 - Avaliação da Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas Consistente

Consideremos a avaliação da matriz  $K$ .

A integração é realizada no sistema de coordenadas natural. Assim a submatriz da matriz de rigidez  $K^{(e)}$  ligando nós  $i$  e  $j$  tem a forma

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ B_i^{(e)} \right]^T D^{(e)} B_j^{(e)} h^{(e)} \text{Det } J^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.19)$$

Os elementos de  $K_{ij}^{(e)}$  são avaliados numericamente. Se o integrando em (3.19) for indicado como

$$\left[ B_i^{(e)} \right]^T D^{(e)} B_j^{(e)} h^{(e)} \text{Det } J^{(e)} = T_{ij}^{(e)} \quad (3.20)$$

então

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} T_{ij}^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.21)$$

A integração numérica para um elemento quadrilateral com  $n \times n$  pontos de integração conduz a

$$K_{ij} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n T \left[ \bar{\xi}_p, \bar{\eta}_q \right]_{ij}^{(e)} W_p W_q \quad (3.22)$$

onde  $W_p$  e  $W_q$  são os fatores de peso e  $(\bar{\xi}_p, \bar{\eta}_q)$  é uma posição de um ponto de integração.

As forças nodais consistentes no nó  $i$  causadas por forças de massa são

$$f_{Bi}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ N_i^{(e)} \right]^T b^{(e)} h^{(e)} \text{Det } J^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.23)$$

onde

$$b^{(e)} = \left[ b_x, b_y \right]^T \quad (3.24)$$

no qual  $b_x$  e  $b_y$  são as forças de massa por unidade de volume nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

As componentes de  $f^{(e)}$  são avaliadas numericamente. Se o integrando em (3.23) for indicado como

$$g_i^{(e)} = \left[ N_i^{(e)} \right]^T b^{(e)} h^{(e)} \text{Det } J^{(e)} \quad (3.25)$$

então

$$f_{Bi}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g_i^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.26)$$

A integração numérica para um quadrilátero com  $n \times n$  pontos de integração conduz a

$$f_{Bi}^{(\theta)} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n g \left( \bar{\xi}_p, \bar{\eta}_q \right)_i^{(\theta)} W_p W_q \quad (3.27)$$

onde  $W_p$  e  $W_q$  são os fatores de peso e  $(\bar{\xi}_p, \bar{\eta}_q)$  é uma posição de um ponto de integração.

### 3.2 - O Uso de Elementos Finitos na Análise de Problemas de Fratura

Pelas duas últimas décadas o método dos elementos finitos se firmou como um procedimento padrão para a solução numérica de problemas práticos de fraturas. Um bom número de técnicas tem sido proposto para avaliar o fator de intensidade de tensão de resultados de elementos finitos mas uma representação adequada da singularidade da extremidade da trinca é um problema comum para a maioria destes métodos. Diversas revisões dos desenvolvimentos fundamentais na aplicação de elementos finitos à Mecânica Elástico-Linear de Fraturas foram realizadas por vários pesquisadores. Nesta seção é feito um resumo dos desenvolvimentos pertinentes aos processos numéricos

considerados nos programas computacionais.

O uso de elementos finitos em prognósticos de fraturas requer duas distintas considerações:

1) *Modelagem da singularidade de extremo de trinca.* Estudos iniciais envolvendo o uso do método dos elementos finitos na mecânica de fraturas realizados por Chan, Tuba e Wilson, citados por OWEN e FAWKES, empregava elementos convencionais com tensão constante e malhas extremamente finas, necessárias na vizinhança da extremidade da trinca a fim de representar as singularidades dos campos de tensão e deformação. O desenvolvimento de elementos de alta ordem, tais como a família dos isoparamétricos, permitiu a mesma ordem de precisão obtida com o procedimento anterior. Contudo, para

uma eficiente solução numérica de problemas de fratura é vantajoso desenvolver elementos especiais que modelam diretamente a singularidade  $1/\sqrt{r}$  no campo de deformação elástico próximo da extremidade da trinca. Muitas versões têm sido desenvolvidas empregando formulações híbridas e em deslocamentos. Aqui a atenção estará restrita a elementos especiais baseados diretamente em elementos isoparamétricos quadráticos empregados por todo o trabalho.

#### 2) *Interpretação dos resultados de elementos finitos.*

Após os campos de tensão e deslocamento terem sido determinados por todo o sólido trincado (e, particularmente, na vizinhança da extremidade da trinca), um modo de se avaliar o fator de intensidade de tensão deve ser encontrado. A abordagem mais óbvia é relacionar as soluções analíticas para os campos de tensão e deslocamento próximos da extremidade da trinca com os valores obtidos da análise de elementos finitos. Isto exige claramente procedimentos de extrapolação para determinar o fator de intensidade de tensão. Para problemas elástico-lineares existem relações que ligam o fator de intensidade de tensão à taxa de energia de deformação associada com um avanço infinitesimal da trinca. Estas expressões formam a base dos chamados *método da taxa de liberação de energia de deformação* e *método da extensão virtual da trinca* nos quais uma análise de elementos finitos é realizada para dois comprimentos de trinca incrementalmente diferentes e a diferença de energia de deformação avaliada. Um método adicional é determinar os fatores de intensidade de tensão do valor de uma integral independente do caminho. A integral de linha usada mais freqüentemente é a *Integral J de Rice*.

O uso de métodos energéticos ou de uma integral de linha tem a nítida vantagem de que uma exata modelagem dos campos de tensão e deslocamento na extremidade da trinca não é necessária e resultados precisos podem ser obtidos pelo uso de

malhas relativamente grosseiras de elementos convencionais.

### 3.2.1 - Modelagem da singularidade do extremo de trinca

Uma das mais recentes tentativas na introdução de uma singularidade de tensão  $1/\sqrt{r}$  em um elemento finito foi apresentada por TRACEY. Esta abordagem, empregando um simples campo de deslocamento polinomial dentro de um elemento triangular, foi subseqüentemente generalizada para uma família de elementos por Tracey e Cook, citados por OWEN e FAWKES. Com referência à fig. 3.2 uma singularidade de ordem  $r^{-p}$  (onde  $r$  é a distância radial do nó 1) resulta se o campo de deslocamentos dentro do elemento for interpolado como

$$u = \left[ 1 - \xi^p \right] \delta_1 + \xi^p \left[ 1 - \eta \right] \delta_2 + \xi^p \eta \delta_3 \quad (3.28)$$

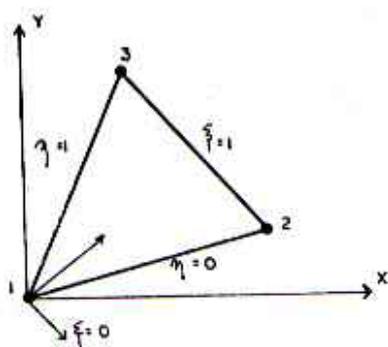


Fig. 3.2 - Elemento triangular com singularidade no nó 1

As coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  são definidas tais que  $\xi = 1$  ao longo do lado 2-3 do elemento e  $\xi = 0$  no nó 1. Os lados radiais 1-2 e 1-3 correspondem a  $\eta = 0$  e 1 respectivamente. O elemento resultante, contudo, não pode representar condições de deformação constantes como são necessários para problemas de tensão térmica.

Blackburn, citado por OWEN e FAWKES também apresenta um elemento triangular com um campo de deformação singular. Para um elemento de seis nós com um sistema de coordenadas como

definido na fig.3.2, a singularidade exigida é proporcionada pelo seguinte campo de deslocamento

$$u = b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta + \frac{b_4 \xi + b_5 \eta + b_6 \xi \eta}{\sqrt{\xi + \eta}} \quad (3.29)$$

onde as constantes  $b_i$  podem ser interpretadas em termos de deslocamentos nodais.

AKIN considera uma função de forma especial  $(1-N_1)^P$ , onde  $N_1$  é a função de forma para o nó 1 pela qual uma singularidade de ordem  $r^{-P}$  pode ser introduzida em elementos triangulares e quadrilaterais. Para  $p = \frac{1}{2}$  a função de forma resultante é idêntica à aquela dada por Blackburn. BENZLEY introduziu termos suplementares para o campo de deslocamentos de um elemento quadrilateral para modelar a singularidade necessária.

Uma discussão mais detalhada relacionada aos elementos isoparamétricos seguirá agora, já que estes são empregados exclusivamente neste texto. A maneira mais conveniente de se introduzir a singularidade de deformação  $1/\sqrt{r}$  em um elemento isoparamétrico quadrático é pela manipulação dos nós intermediários de seus lados. Elementos especiais baseados nesta abordagem foram formulados independentemente por BARSOUN e HENSHELL e SHAW.

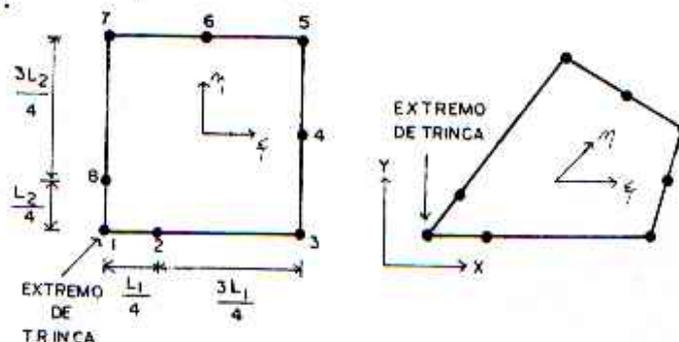


Fig. 3.3 - Elementos isoparamétricos quadráticos com nós intermediários na posição de um quarto

Considere-se o elemento isoparamétrico quadrático mostrado na fig. 3.3 no qual os pontos nodais estão numerados de 1 a 8. A singularidade de deformações desejada pode ser introduzida no nó 1 pela mudança dos nós intermediários 2 e 8 para as posições indicadas. Considerando o lado 1-3, definido por  $\eta = -1$ , as funções de forma para os nós ao longo do lado são dados da fig. 3.1 como

$$N_1 = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi)$$

$$N_2 = (1 - \xi^2) \quad (3.30)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi)$$

Então, de (3.6) tem-se:

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) x_1 + (1 - \xi^2) x_2 + \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) x_3 \quad (3.31)$$

com uma expressão semelhante para a coordenada  $y$ . Estabelecendo a origem no nó 1 e indicando o comprimento do lado 1-3 como  $L$ , então  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L/4$  e  $x_3 = L$ .

De (3.31) tem-se

$$x = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) L + (1 - \xi^2) \frac{L}{4} \quad (3.32)$$

ou

$$\xi = -1 + 2 \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (3.33)$$

Na matriz jacobiana dada por (3.7), o termo  $\partial x / \partial \xi$  é dado de (3.32) e (3.33) como

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2} (1 + \xi) = \sqrt{L x} \quad (3.34)$$

Portanto a matriz jacobiana é singular no nó 1, onde  $x = 0$ . A variação de deslocamentos ao longo de 1-3 é dado de (3.5) como

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) u_1 + (1 - \xi^2) u_2 + \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) u_3 \quad (3.35)$$

Substituindo por  $\xi$  de (3.33) resulta

$$u = -\frac{1}{2} \left[ -1 + 2 \sqrt{\frac{x}{L}} \right] \left[ 2 - 2 \sqrt{\frac{x}{L}} \right] u_1 \quad (3.36)$$

$$+ 4 \left[ \sqrt{\frac{x}{L}} - \frac{x}{L} \right] u_2 + \frac{1}{2} \left[ -1 + 2 \sqrt{\frac{x}{L}} \right] \left[ 2 \sqrt{\frac{x}{L}} \right] u_3$$

A deformação na direção  $x$  é então

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (3.37)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{3}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L} \right] u_1 + \left[ \frac{2}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L} \right] u_2$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{\sqrt{xL}} + \frac{4}{L} \right] u_3$$

A singularidade de deformação ao longo do lado 1-3 é portanto da ordem exigida  $1/\sqrt{r}$ . A mesma variação radial de deformação é também obtida ao longo do lado 1-7. Contudo, ao longo dos raios com origem no nó 1 a variação de deformação não é da forma  $1/\sqrt{r}$ . Uma condição semelhante pode ser imposta pela formação de um elemento triangular pela junção dos nós 1, 7 e 8 do elemento quadrilateral, dando a situação da fig. 3.4. Mais uma vez os nós intermediários são movidos para uma posição distante de um quarto do nó mais próximo da extremidade da

trinca, o qual é considerado o nó da junção, 1.

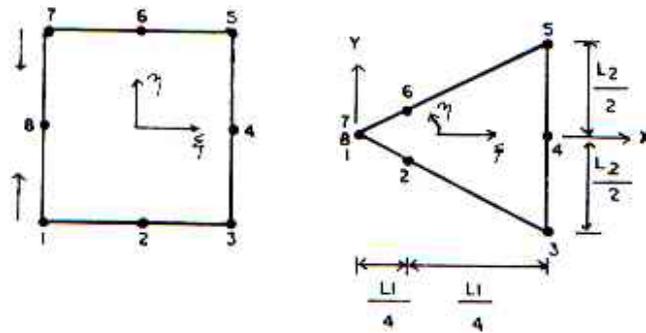


Fig. 3.4 - Elemento triangular com nós intermediários na posição de um quarto.

Pode ser visto que os parâmetros  $\xi$  e  $\eta$  se tornaram diretamente relacionados às coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  respectivamente. Ao longo do eixo  $\eta = 0$  tem-se

$$\begin{aligned} N_1 &= N_3 = N_5 = N_7 = -\frac{1}{4} (1 - \xi^2) \\ N_2 &= N_6 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \\ N_4 &= N_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Estabelecendo a origem no nó 1, como mostrado na fig. 3.4, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 &= x_7 = x_8 = 0 \\ x_2 &= x_6 = L_1/4 \\ x_3 &= x_4 = x_5 = L_1 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituindo (3.38) e (3.39) em (3.6) resulta

$$x = \frac{L_1}{4} (1 + \xi)^2 \quad (3.40)$$

ou

$$\xi = -1 + 2 \sqrt{\frac{x}{L_1}} \quad (3.41)$$

As equações (3.41) e (3.33) são idênticas e portanto o termo  $\partial x / \partial \xi$  torna-se singular quando  $x = 0$  como antes. A distribuição dos deslocamentos ao longo do eixo  $x$  é dada de (3.38) e (3.5) como

$$u = -\frac{1}{4} (1 - \xi^2) (u_1 + u_3 + u_5 + u_7) \quad (3.42)$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (u_2 + u_6) + \frac{1}{2} (1 - \xi) (u_4 + u_8)$$

e a distribuição de deformações é, notando que  $u_1 = u_7 = u_8$

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{L_1} (2u_1 + u_3 + u_5 - 2u_2 - 2u_6)$$

$$- \frac{1}{2 \sqrt{L_1 x}} (3u_1 + u_3 + u_4 + u_5 - 2u_2 - 2u_6) \quad (3.43)$$

Vê-se novamente que a componente de deformação  $\epsilon_x$  exibe a singularidade  $1/\sqrt{r}$ . Pode ser demonstrado que a componente de deformação radial  $\epsilon_r$  ao longo de todos os raios com origem no nó 1, possui a singularidade  $1/\sqrt{r}$ . Isto é antagônico à versão quadrilateral considerada anteriormente na qual a singularidade de deformação  $1/\sqrt{r}$  era obtida somente ao longo dos lados do elemento.

Tendo obtido a requerida singularidade de extremidade de trinca, permanece ainda a necessidade de avaliar-se os fatores de intensidade de tensão. Para o elemento quadrilateral da fig.3.3 os deslocamentos ao longo dos lados 1-3 são dados por

$$u = u_1 + \left[ 4 u_2 - u_3 - 3 u_4 \right] \sqrt{\frac{r}{L}} + \left[ 2 u_3 + 2 u_4 - 4 u_2 \right] \frac{r}{L} \quad (3.44)$$

na qual  $x$  é agora trocado pela distância radial da extremidade da trinca  $r$ . Têm-se expressão similar para os deslocamentos na direção vertical  $v$ . Para o elemento triangular da fig 3.4, a avaliação dos deslocamentos ao longo de um lado radial resultará novamente na expressão (3.44).

As expressões analíticas para a variação dos deslocamentos ao longo de raios com origem na extremidade da trinca na vizinhança da singularidade são dadas como

$$u = \frac{K_I}{4 \mu} \sqrt{\frac{r}{2 \pi}} \left[ (2k - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4 \mu} \sqrt{\frac{r}{2 \pi}} \left[ (2k + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_I}{4 \mu} \sqrt{\frac{r}{2 \pi}} \left[ (2k + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4 \mu} \sqrt{\frac{r}{2 \pi}} \left[ (2k - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.45)$$

nas quais  $K_I$  e  $K_{II}$  são os fatores de intensidade de tensão do Modo I e II respectivamente,  $\mu$  é o módulo cortante e  $k$  é um parâmetro que permite a consideração simultânea dos casos de tensão plana e deformação plana, com

$$k = (3 - \nu) / (1 + \nu) \quad \text{para tensão plana}$$

$$k = 3 - 4 \nu \quad \text{para deformação plana} \quad (3.46)$$

Os fatores de intensidade de tensão podem então ser avaliados

equacionando os coeficientes de  $\sqrt{r}$  em (3.44) e (3.45); com o valor de  $\theta$  em (3.45) sendo o ângulo polar do lado 1-3 do elemento. Assim

$$K_I \begin{Bmatrix} (2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \\ (2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = 4 \mu \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{Bmatrix} 4u_2 - u_3 - 3u_1 \\ 4v_2 - v_3 - 3v_1 \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

e

$$K_{II} \begin{Bmatrix} -(2k+3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \\ (2k-3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = 4 \mu \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{Bmatrix} 4u_2 - u_3 - 3u_1 \\ 4v_2 - v_3 - 3v_1 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Percebe-se que os fatores de intensidade de tensão podem ser avaliados dos componentes de deslocamento  $u$  ou  $v$ . Para  $\theta = 0^\circ$  ou  $180^\circ$  um ou outro dos denominadores em (3.47) e (3.48) torna-se zero e assim o fator de intensidade de tensão deve ser avaliado usando as componentes de deslocamento correspondentes a valores diferentes de zero.

Hellen e Blackburn, citados por OWEN e FAWKES, demonstraram que a função de deslocamento associada com o elemento isoparamétrico degenerado (3.42) e a função de forma especial dada por Blackburn em (3.29) são muito similares. Pode ser demonstrado que se  $\xi$  e  $\eta$  são definidos como na fig.3.2, a função de deslocamento para o elemento isoparamétrico degenerado pode ser escrita na forma

$$u = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + \frac{a_4 \xi + a_5 \eta}{\sqrt{\xi + \eta}} + \frac{\xi \eta}{\xi + \eta} a_6 \quad (3.49)$$

Comparando (3.49) com (3.29) vê-se que as duas funções de

deslocamento somente diferem no termo final. Ambas garantem a compatibilidade interelementar e contêm os estados relevantes de deformação constante e comportamento de corpo rígido.

HIBBITT empreendeu uma extensa pesquisa das propriedades de elementos isoparamétricos de singularidade, os quais eram baseados em polinômios de mais alta ordem e demonstrou que uma variedade de singularidades de deformação pode ser produzida, dependendo da ordem  $n$  do polinômio.

#### 4 - AVALIAÇÃO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO

Os métodos de avaliação do fator de intensidade de tensão considerados nesta seção serão *extrapolação de deslocamentos*, *taxa de liberação de energia de deformação*, *extensão virtual da trinca e a técnica da integral J*.

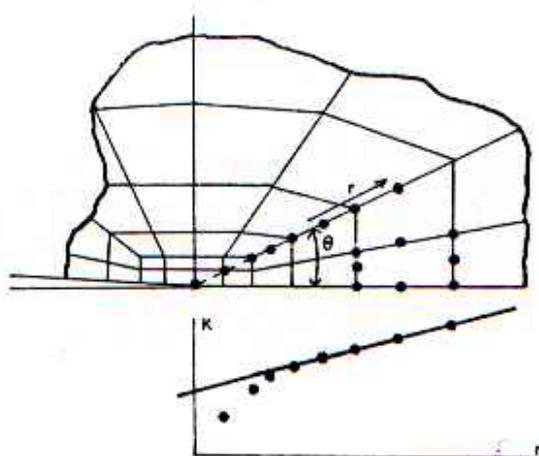


Fig. 4.1 - Avaliação do fator de intensidade de tensão por extrapolação.

##### 4.1 - Extrapolação de Deslocamentos

As expressões analíticas para as variações dos deslocamentos ao longo de linha radiais com origem na extremidade da trinca são dadas em (3.44). Resolvendo para os fatores de intensidade de tensões obtemos

$$K_I \left\{ \begin{array}{l} (2K - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \\ (2K + 1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \end{array} \right\} = 4 \mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

$$K_{II} \left\{ \begin{array}{l} - (2K + 3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \\ (2K - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \end{array} \right\} = 4 \mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\}. \quad (4.2)$$

A substituição dos valores de  $u$ ,  $v$  e  $r$  para os pontos nodais ao longo de uma linha radial com origem na extremidade da trinca como mostrado na fig. 4.1 possibilita traçar um gráfico de  $K_I$  e  $K_{II}$  versus a distância radial  $r$ . Então, descartando os resultados para pontos muito próximos da extremidade da trinca as soluções podem ser extrapoladas para  $r = 0$ . Esta abordagem pode ser empregada tanto quando usam-se elementos finitos convencionais quanto quando elementos especiais de singularidade, como os descritos na seção 3.2.1, são incluídos na zona da extremidade da trinca.

#### 4.2 - Taxa de Liberação de Energia de Deformação

Considere-se uma trinca de comprimento  $a$  que avança um incremento  $\delta a$ , causando assim uma liberação de energia de deformação  $\delta U$ . Define-se a taxa de energia de deformação,

$$G = \frac{\delta U}{\delta a}. \quad (4.3)$$

Será demonstrado na seção (4.2.1) que os fatores de intensidade de tensão estão diretamente relacionados ao valor de  $G$  causado pela extensão da trinca no modo apropriado. Em particular

$$K_I = \left[ \frac{8 \mu G_I}{1 + k} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad K_{II} = \left[ \frac{8 \mu G_{II}}{1 + k} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

nas quais  $G_I$  e  $G_{II}$  são as taxas de energia de deformação sob ação dos Modos I e II respectivamente. Assim, realizando duas análises de elementos finitos para dois comprimentos de trinca

que diferem por um incremento  $\delta a$  e avaliando a diferença de energia de deformação  $\delta U$ , a taxa de liberação de energia de deformação pode ser calculada de (4.3) e daí os fatores de intensidade de tensão por (4.4). A energia de deformação nas duas configurações pode também ser avaliada por

$$U = \left[ d \right]^T K d \quad (4.5)$$

na qual  $d$  e  $K$  são respectivamente o vetor de deslocamentos globais ea matriz de rigidez, ou de acordo com

$$U = \left[ d \right]^T b \quad (4.6)$$

em que  $b$  é o vetor de cargas globais aplicadas.

#### 4.2.1 - Relação entre os Fatores de Intensidade de Tensão e a Taxa de Liberação da Energia de Deformação.

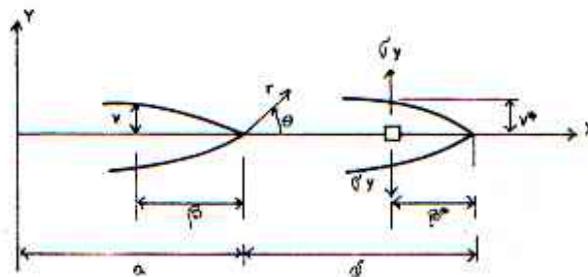


Fig. 4.2 - Tensões e deslocamentos no extremo durante o avanço de uma trinca plana por um incremento  $\delta$

Consideremos uma trinca que avança uma distância  $\delta$  em uma placa de espessura unitária (fig.4.2). A energia de deformação liberada é o trabalho feito pelas tensões  $\sigma_y(\delta-\beta^*, 0)$  atuando através dos deslocamentos  $v(\beta, \pi)$ . Suponha-se que  $\delta$

é infinitesimalmente pequeno, tanto que no limite quando  $\delta \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow v^*$  e  $\beta \rightarrow \beta^*$ . Assim a taxa de energia de deformação

pode ser escrita

$$G_I = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \frac{1}{2} \sigma(\delta - \beta, 0) v(\beta, \pi) d\beta \right\}. \quad (4.7)$$

Substituindo por  $\sigma_y$  e  $v$  de (2.48) e usando (2.50) resulta em

$$G_I = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta} K_I^2 \frac{(k+1)}{8 \mu \pi} \int_0^{\delta} \left[ \frac{\beta}{\delta - \beta} \right]^{\frac{1}{2}} d\beta \right\}. \quad (4.8)$$

Fazendo a substituição trigonométrica  $\beta = \delta \sin^2 \alpha$  resulta

$$G_I = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{K_I^2 (k+1)}{4 \mu \pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha \right\} \quad (4.9)$$

ou

$$G_I = \frac{K_I^2 (k+1)}{8 \mu} \quad (4.10)$$

que está de acordo com (2.12). O procedimento anterior pode ser repetido para o Modo II, resultando na relação (2.14). Se a fratura ocorre em um modo combinado então a taxa de liberação de energia de deformação é expressa como

$$G = G_I + G_{II} = (K_I^2 + K_{II}^2) \frac{(k+1)}{8 \mu}. \quad (4.11)$$

Percebe-se que a taxa total de energia de deformação liberada  $G$  é a soma dos termos correspondentes ao Modo I e Modo II e que a não ser que um destes campos seja zero, as componentes não podem ser separadas.

#### 4.3 - Técnica da Extensão Virtual da Trinca

Uma variante do método da taxa de liberação de energia de deformação descrita anteriormente foi proposta por PARKS e HELLEN. Nesta, uma análise de elementos finitos é realizada primeiro para a configuração original da trinca e a energia de deformação avaliada. A trinca é então estendida como mostrado na fig.(4.3) deslocando os pontos nodais dentro da região da malha da extremidade da trinca de uma distância incremental na direção do eixo da trinca. A energia de deformação é novamente calculada e os fatores de intensidade de tensão avaliados pelo uso de (4.3) e (4.4).

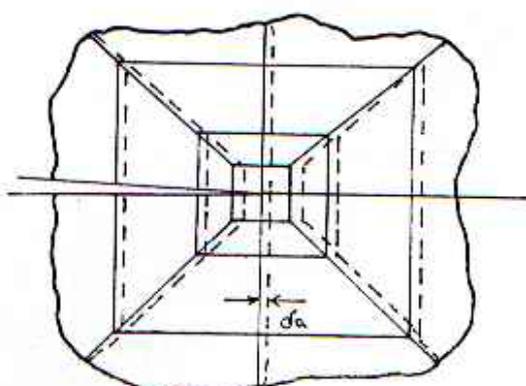


Fig. 4.3 - Extensão virtual da trinca na direção do seu avanço

HELLEN também mostrou que a mudança na energia de deformação pode ser convenientemente avaliada como

$$\delta U = U_1 - U_2 \quad (4.12)$$

na qual  $U_1$  e  $U_2$  são as energias de deformação associadas somente com os elementos especiais para os estados inicial e estendido. Além disso,  $U_1$  e  $U_2$  podem ser expressos como

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(b_i^*)^2}{k_{ii}^*}$$

(4.13)

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(b_i^* + \delta b_i^*)^2}{(k_{ii}^* + \delta k_{ii}^*)}$$

nas quais  $b_i^*$  e  $k_{ii}^*$  indicam o vetor de forças modificado e os coeficientes de rigidez modificados após a redução das equações pela eliminação gaussiana. Os termos  $b_i^* + \delta b_i^*$  e  $k_{ii}^* + \delta k_{ii}^*$  indicam as quantidades equivalentes no estado da trinca estendida e  $n$  é o número de graus de liberdade dos elementos na zona da extremidade da trinca.

#### 4.4 - O Método da Integral J - Processo Numérico

Para elementos isoparamétricos quadráticos considerados neste estudo técnicas de integração numérica devem ser empregadas. Desde que a integral é independente do caminho, este deve ser convenientemente escolhido para coincidir com a linha  $\xi = \xi_p = \text{constante}$ , mostrado na fig.4.4.

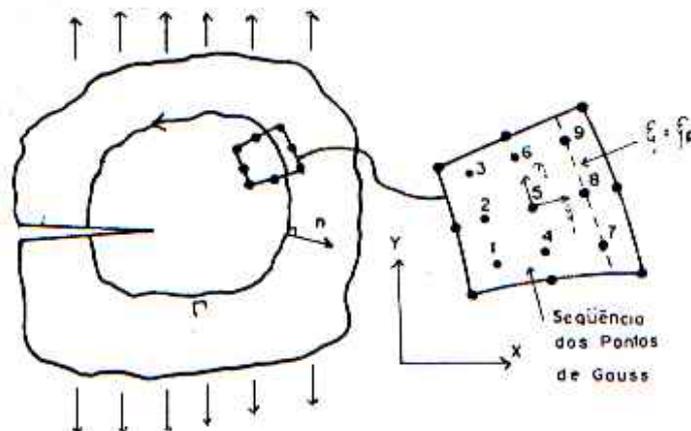


Fig. 4.4 - Contorno para a avaliação da Integral J

O primeiro requisito é definir o vetor normal unitário  $n$  para esta linha em qualquer ponto. Os vetores  $A$  e  $B$  que são respectivamente direcionados ao longo das linhas  $\xi = \text{constante}$  e  $\eta = \text{constante}$  são dados por

$$A^T = \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, 0 \right], \quad B^T = \left[ \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, 0 \right]. \quad (4.14)$$

O vetor  $C$  que é normal ao plano do elemento é dado pelo produto vetorial dos vetores  $A$  e  $B$ , e assim

$$C^T = \left[ 0, 0, \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] \right]. \quad (4.15)$$

Um vetor  $D$  normal à linha  $\xi = \xi_p$  pode ser construído de acordo com

$$D = C \times A = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial y}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (4.16)$$

Finalmente o vetor normal unitário é dado como

$$n^T = \left[ n_1, n_2, 0 \right] = \left[ \frac{D_1}{N}, \frac{D_2}{N}, 0 \right]; \quad N = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}. \quad (4.17)$$

O comprimento de arco elementar ao longo da linha  $\xi = \xi_p$  é dado por

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]^2} d\eta \quad (4.18)$$

e similarmente

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta. \quad (4.19)$$

Para problemas planos, a densidade de energia de deformação pode ser escrita como

$$U = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + 2 \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} \right]. \quad (4.20)$$

Igualmente o vetor de tração poder ser escrito como

$$t = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2 \\ \sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

e assim

$$t \frac{\partial d}{\partial x} = \left[ \sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2 \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \left[ \sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2 \right] \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.22)$$

Finalmente, substituindo de (4.18), (4.19), (4.20) e (4.21) em (4.22) e então o resultado em (2.57) obtém-se a contribuição de um elemento individual para a integral J como

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{\partial y}{\partial \eta} - \left[ \left[ \sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2 \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \left[ \sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2 \right] \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} \right\} d\eta = \int_{-1}^{+1} I d\eta \quad (4.23)$$

A integração em (4.23) deve ser efetuada numericamente.

Assim

$$J^{(e)} = \sum_{q=1}^n I(\xi_p, \eta_q) W_q \quad (4.24)$$

na qual o Integrand  $I$  é avaliado nos pontos de integração  $\xi_p$ ,  $\eta_q$  e  $W_q$  é o fator de peso correspondente a  $\eta_q$ . As derivadas cartesianas das componentes de deslocamento requeridas em (4.18) são dadas por

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \left[ u_i, v_i \right]; \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \left[ u_i, v_i \right]$$

nas quais  $u_i, v_i$  são os componentes de deslocamento dos  $n$  nós do elemento e as derivadas cartesianas das funções de forma do elemento são dadas por (3.11) e (3.12).

O valor total de  $J$  é dado pela soma da contribuição de todos elementos formando o caminho da integral e os fatores de intensidade de tensão são dados por (4.4), levando em conta que  $G = J$  para situações elástico-lineares.

## 5 - FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA - MECÂNICA DE FRATURAS NÃO LINEAR

Com o desenvolvimento de vários tipos de materiais de engenharia, surge frequentemente a necessidade de avaliar parâmetros de fratura fora dos limites da MFEL. Esta é uma situação comum em materiais dúcteis onde pode ocorrer amplo escoamento nas vizinhanças de uma extremidade de trinca.

Um dos mais recentes parâmetros de fratura para materiais dúcteis foi o deslocamento de abertura de extremidade de trinca (CTOD - do inglês, Crack-Tip Opening Displacement) introduzido por Wells, citado por OWEN e FAWKES. A tenacidade de fratura de tais materiais é relacionado a um CTOD crítico na fratura, denominado  $\delta_c$ . Um critério de fratura para problemas não-lineares foi proposto posteriormente por RICE através do conceito da integral de linha J. A integral J proporciona um modo de quantificar a severidade das condições na extremidade da trinca em termos de campos de tensão e deslocamento ao longo de um caminho afastado da zona da singularidade. Pode ser demonstrado para situações elásticas não-lineares que J define a taxa de mudança de energia potencial com o comprimento da trinca, que para problemas elástico-lineares é igual a taxa de liberação de energia de deformação, G. Coincidentemente, RICE e ROSENGREN e HUTCHINSON formularam a solução para os campos de tensão e deformação existentes em uma zona plástica de extremidade de trinca em termos de J e um expoente de endurecimento.

Ambas as abordagens do CTOD e da integral J não fazem distinção entre o início do crescimento estável da trinca e o início da instabilidade. A curva da resistência oferece uma possibilidade de prever o início da propagação instável. Nesta,

a taxa de liberação de energia com respeito à extensão da trinca  $G$  (força propulsora da trinca) é comparada com a força de resistência,  $R$ , que para um material dúctil pode ser interpretada em termos da energia contida dentro da zona plástica da extremidade da trinca. Para a propagação estável a igualdade  $G = R$  predomina e o início da instabilidade é determinado pela condição  $dG/da = dR/da$ . Outras abordagens para a fratura dúctil têm sido propostas, mas a técnica da integral  $J$  é atualmente a mais usual e largamente aceita.

A aplicação da técnica da integral  $J$  em problemas com deformações plásticas necessita, primeiramente, do conhecimento dos estados de tensão e deformação em tal situação. Portanto a avaliação da integral  $J$  deverá ser precedida de uma análise elastoplástica.

A análise elastoplástica de problemas bidimensionais é um assunto muito bem conhecido e tem sido objeto de inúmeras investigações.

### 5.1 - Análise Elastoplástica via Elementos Finitos

Nesta seção indicam-se de maneira bastante resumida as principais características da análise empregada.

Admite-se a decomposição das taxas de deformação  $\dot{\epsilon}$  em duas componentes. Uma elástica  $\dot{\epsilon}^e$  e outra plástica  $\dot{\epsilon}^p$  de tal forma que

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p. \quad (5.1)$$

As deformações elásticas estão ligadas às tensões mediante a relação constitutiva usual, que pode ser escrita na forma incremental

$$\dot{\sigma} = D \dot{\epsilon}. \quad (5.2)$$

As deformações plásticas aparecem quando é verificada a condição de escoamento

$$f(\sigma_{ij}) = K(k). \quad (5.3)$$

Neste trabalho, é empregado como condição de escoamento, o critério de von Mises

$$\sqrt{J_2} = K(k) \quad (5.4)$$

onde

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}.$$

A taxa de deformação plástica é dada pela relação

$$\dot{\epsilon}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.5)$$

A partir de (5.1), (5.2), (5.5) e a condição de consistência

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} = K(k) \quad (5.6)$$

pode-se obter a relação incremental elastoplástica

$$\dot{\sigma} = D_{ep} \dot{\epsilon} \quad (5.7)$$

onde

$$D_{ep} = D - \frac{D \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T D}{A + \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T D \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]} \quad (5.8)$$

e

$$A = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p}. \quad (5.9)$$

A solução de um problema elastoplástico é obtida mediante um programa de elementos finitos elástico, onde

basicamente a matriz  $D$  é substituída pela matriz  $D_{ep}$  e procede-se a uma análise incremental e/ou iterativa. Para uma revisão detalhada do tema recomendam-se CREUS, OWEN e HINTON e HINTON e OWEN. O programa resultante deste trabalho foi baseado na referência OWEN e FAWKES.

## 5.2 - Algoritmo para a Solução Não Linear

Durante o estágio geral da solução iterativa de um problema elastoplástico via elementos finitos as equações de equilíbrio não serão rigorosamente satisfeitas e existirá um sistema de forças residuais  $\psi$  tal que

$$\psi = \int_{\Omega} B^T \sigma \, d\Omega - \left( f + \int_{\Omega} N^T b \, d\Omega \right) \neq 0 \quad (5.10)$$

na qual  $f$  e  $b$  são respectivamente as forças externas aplicadas e o vetor de forças de massa. Para uma situação elastoplástica a rigidez do material está continuamente variando e instantaneamente a relação tensão/deformação incremental é dada por (5.7). Substituindo a (5.7) na forma incremental de (5.10) obtém-se, para um incremento de carga

$$\Delta\psi = K_T \Delta u - \left( \Delta f + \int_{\Omega} N^T \Delta b \, d\Omega \right) \neq 0 \quad (5.11)$$

onde

$$K_T = \int_{\Omega} B^T D_{ep} B \, d\Omega. \quad (5.12)$$

Empregando um algoritmo de rigidez tangencial para satisfazer (5.11) resulta em uma correção iterativa  $\delta u$  para o deslocamento incremental  $\Delta u$  de

$$\delta u^r = \left[ K_T^r \right]^{-1} \Delta\psi^r. \quad (5.13)$$

Desta forma no fim da  $r$ -ésima iteração o deslocamento corrigido estimado é

$$\Delta u^{r+1} = \Delta u^r + \delta u^r \quad (5.14)$$

Este valor de  $\Delta u$  é substituído em (5.11) para avaliar  $\Delta \psi^{r+1}$  e o processo de iteração repetido até a força residual ser considerada suficientemente próxima de zero.

Este algoritmo de rigidez tangencial é ilustrado esquematicamente para uma situação unidimensional na fig. 5.1(a) e nota-se que a montagem e inversão do sistema inteiro de equações é exigido para cada iteração.

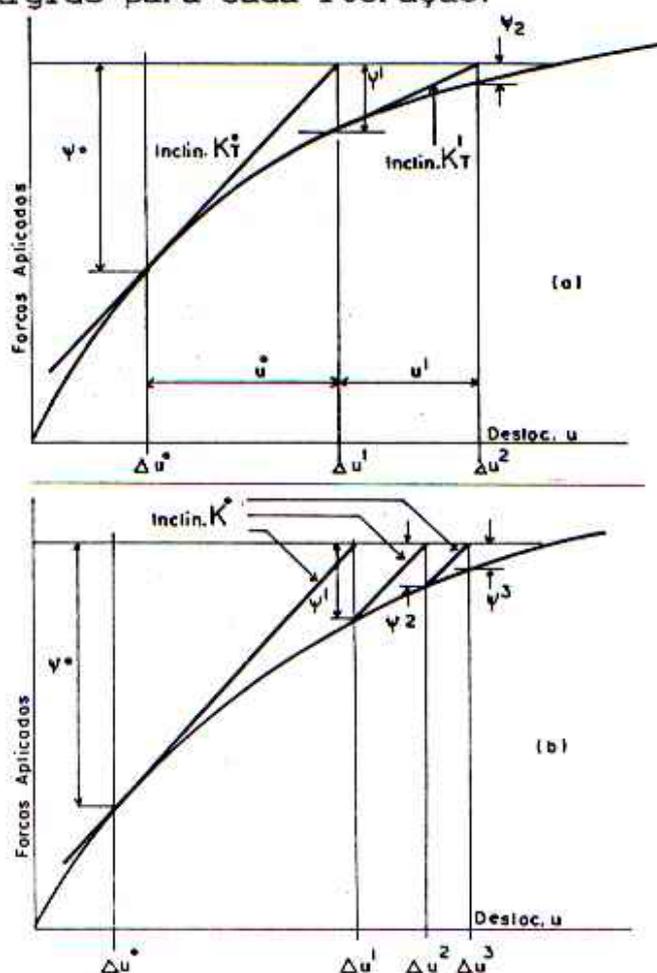


Fig. 5.1 - Representação geométrica do esquema de solução não linear da (a) rigidez tangencial e (b) rigidez inicial.

Uma variante do algoritmo acima é apresentado pelo esquema da rigidez inicial, ilustrado na fig. 5.1(b), no qual o

mesmo algoritmo anterior é seguido, porém a rigidez tangencial  $K_T^r$  é trocada pela rigidez elástica inicial  $K_0$  em cada estágio

do processo de iteração. Visto que a mesma matriz de rigidez é empregada em cada estágio, as equações montadas podem ser guardadas em sua forma reduzida e uma segunda solução meramente necessita a redução dos termos do segundo membro junto com a retrossubstituição.

Ambos os algoritmos podem ser combinados e a versão otimizada é propiciada geralmente pela atualização da rigidez somente nos intervalos de iteração selecionados.

### 5.3 - O Emprego da Integral J na Análise de Problemas de Fratura no Campo Elastoplástico.

A aplicação da integral J para fratura elastoplástica origina-se das soluções derivadas das referências RICE e ROSENGREN e HUTCHINSON. Estas soluções dão os campos de tensão e deformação plásticas em torno de uma extremidade de trinca obedecendo uma lei de deformação.

O uso da integral em aplicações elastoplásticas gerais somente pode ser justificado pelos seguintes argumentos:

- O conceito da integral J se verifica rigorosamente para situações elásticas não-lineares.
- Os materiais elásticos não-lineares se comportam identicamente aos materiais que seguem uma lei constitutiva de plasticidade de "deformação" durante o carregamento.
- Para carregamentos monotônicos a teoria da plasticidade incremental e a teoria da plasticidade de "deformação" fornecem resultados muito semelhantes.

Assim conclui-se que o método da integral J pode ser empregado para previsão de fraturas elastoplásticas, com a condição de que nenhum descarregamento tenha lugar. Dessa forma

J pode ser usada para monitorar o início do avanço da trinca sob carregamento monotônico, mas seu uso durante estágios posteriores de fratura instável é ainda discutível.

#### 5.4 - Avaliação Numérica da Integral J

Para problemas elástico-lineares a integral J definida na seção 2.3 é avaliada numericamente como indicado na seção 4.4. Para aplicações elastoplásticas a única mudança necessária é empregar a definição apropriada da densidade de energia de deformação, U. Separando U em suas componentes elástica e plástica

$$U = U_e + U_p \quad (5.15)$$

temos  $U_e$  dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left( \epsilon_{ij} \right)_e \quad (5.16)$$

onde  $\left( \epsilon_{ij} \right)_e$  indica as componentes elásticas de deformação. A contribuição do trabalho plástico é dada por

$$U_p = \int_0^{\bar{\epsilon}_p} \bar{\sigma} \, d\bar{\epsilon}_p \quad (5.17)$$

na qual  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\epsilon}_p$  são a tensão efetiva e a deformação plástica efetiva respectivamente. O valor de  $U_p$  é obtido pelo somatório das contribuições incrementais do trabalho  $\bar{\sigma} \, d\bar{\epsilon}_p$  sobre o caminho da deformação. Visto que a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  e a deformação plástica incremental  $d\bar{\epsilon}_p$  são avaliadas durante cada incremento de carga de acordo com o programa implementado, o cálculo da  $U_p$  torna-se uma operação trivial.

O processo numérico pelo qual J é avaliada é idêntico ao descrito na seção 4.4, resultando na seguinte contribuição

para um elemento individual

$$\begin{aligned}
 J^{(\bullet)} = & \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xx} \left( \epsilon_{xx} \right)_{\bullet} + \sigma_{xy} \left( \epsilon_{xy} \right)_{\bullet} + \sigma_{yy} \left( \epsilon_{yy} \right)_{\bullet} \right] \right. \\
 & \left. \frac{\partial y}{\partial \eta} + U_p \frac{\partial y}{\partial \eta} - \left[ \left( \sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \sigma_{xy} n_1 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \sigma_{yy} n_2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} \right\} d\eta. \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

As componentes elásticas de deformação podem ser facilmente avaliadas de acordo com expressões gerais

$$\begin{aligned}
 \left( \epsilon_{xx} \right)_{\bullet} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} - \nu \left( \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right) \right] \\
 \left( \epsilon_{yy} \right)_{\bullet} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{yy} - \nu \left( \sigma_{xx} + \sigma_{zz} \right) \right] \\
 \left( \epsilon_{xy} \right)_{\bullet} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy}
 \end{aligned} \quad (5.19)$$

A integração na (5.18) é realizada numericamente usando o processo de Gauss.

Visto que o contorno da integral é acumulado dos caminhos  $\xi = \xi_p$  (constante) através dos elementos vizinhos, as restrições com respeito à topologia e numeração nodal dos elementos devem ser consideradas, como no caso elástico-linear.

## 6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS.

### 6.1. Exemplos em Análise Elástico-Linear.

Esta seção ilustra como os métodos numéricos descritos nas seções anteriores podem ser aplicados a problemas práticos nos campos de pesquisa e projetos de engenharia. Os exemplos são, em geral, de natureza simples e servem para demonstrar a lógica aplicada à solução de problemas industriais de fratura. Espera-se que alguns destes exemplos venham a esclarecer tais problemas, os quais a primeira vista parecem requerer modelagem complexa, mas de fato podem ser adequadamente representados por idealizações bastante simples com a ajuda de suposições apropriadas.

Na análise de fratura uma consideração cuidadosa deveria ser sempre dada ao grau de precisão buscado na solução. Por exemplo, uma análise de elementos finitos em larga escala produzindo resultados de alta precisão é completamente desnecessária quando os fatores de intensidade de tensão são de uma ordem de magnitude menor que a tenacidade de fratura do material. Esta "armadilha" pode ser facilmente evitada com um pouco de reflexão e alguns cálculos manuais simples.

#### 6.1.1. Placa Sob Tração Uniforme Contendo Uma Trinca Perpendicular à Direção do Carregamento.

O programa computacional desenvolvido é agora demonstrado para um problema elástico linear padrão. O exemplo considerado é o de uma placa sob tração que possui uma trinca

de comprimento  $2a$  perpendicular à direção do carregamento. A largura da placa é  $2W$  e a espessura tomada como sendo unitária. Visto que a maioria das soluções disponíveis são para comprimentos infinitos, o comprimento da faixa foi tomado como  $5W$  para aproximar esta condição. Os resultados obtidos do presente estudo numéricos são comparados com os de HELLEN. O comprimento inicial da trinca foi escolhido como  $a = 0,4W$  e as propriedades do material tomadas nesta análise foram  $E = 10.000$  e  $\nu = 0,3$ , muito embora os valores dos fatores de intensidade de tensões independessem destas constantes. Para a largura  $2W$  da placa tomou-se o valor de 20 unidades e o carregamento de tração de 100 unidades por unidade de comprimento. Seguem-se comentários sobre os métodos empregados na avaliação dos F.I.T.

a) Extrapolação de deslocamentos:

Segundo estudos anteriores, para elementos isoparamétricos os resultados dados pela extrapolação de deslocamentos mais precisos são os obtidos ao longo da linha radial orientada por  $\theta = 180^\circ$ . Para o atual estudo foi utilizada a malha da figura 6.1 e todos elementos são inicialmente assumidos como elementos isoparamétricos quadráticos convencionais. Neste caso a extrapolação para a extremidade da trinca fornece  $K_I = 300,0$ ; figura 6.2, que difere do valor de  $K_I = 393,5$  dado por Hellen em 23,8 %. O problema foi então reanalisado com os elementos 4 e 5 substituídos por elementos isoparamétricos "quarter points". Os resultados correspondentes também são mostrados na figura 6.2, onde o valor extrapolado de  $K_I = 380,0$  diverge em 3,4 % do valor tomado como referência. Assim, para a avaliação de F.I.T. por extrapolação de deslocamentos o uso de elementos especiais em uma malha de elementos convencionais produz resultados bem mais satisfatórios.

b) Elementos isoparamétricos especiais triangulares:

Usando a malha da figura 6.1, com a região

correspondentes aos elementos 4 e 5 trocados por elementos triangulares 4, 5, 21 e 22, o F.I.T. foi avaliado para  $\theta = 180^\circ$  dando  $K_I = 379,1$ ; um erro de 3,7 %.

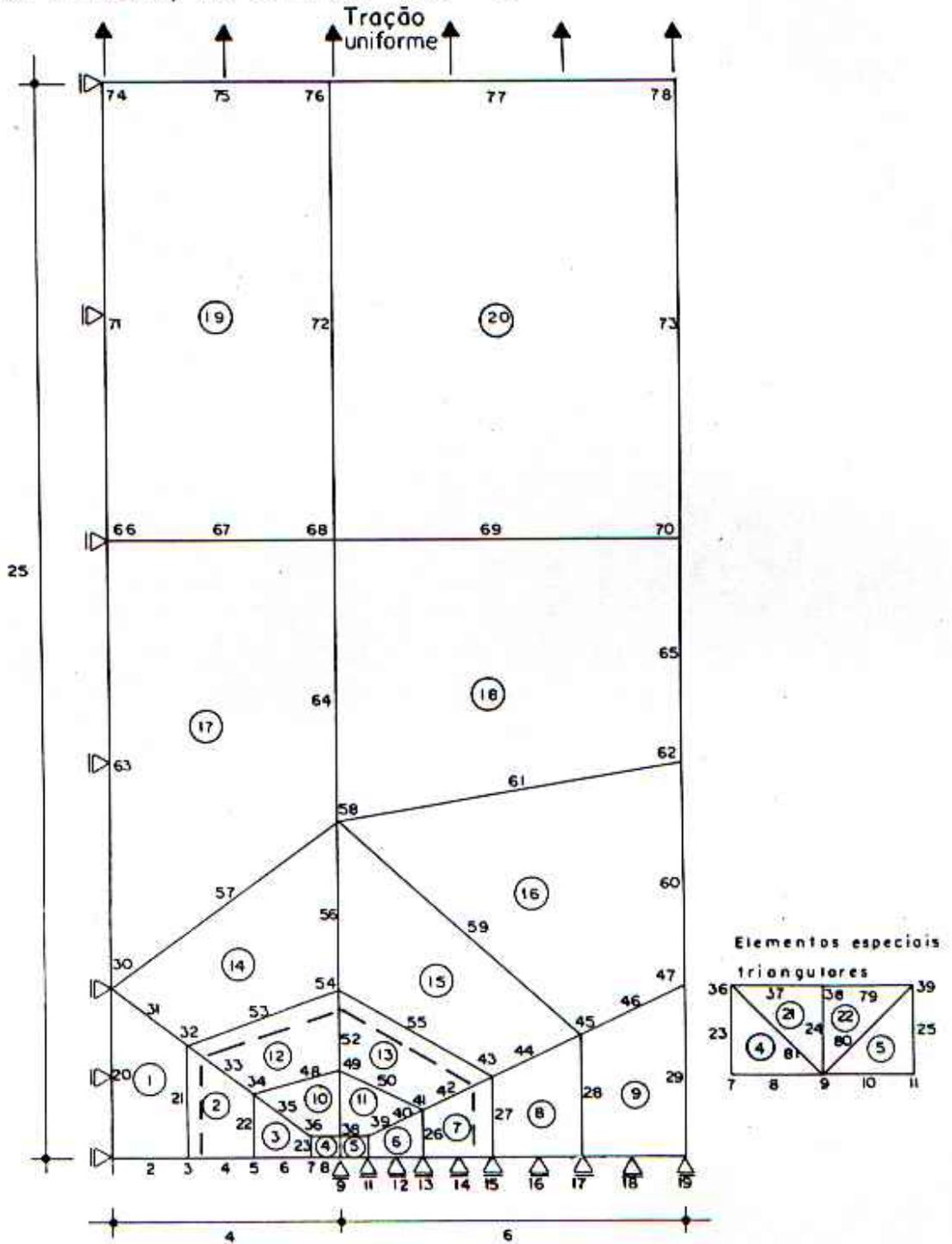


figura 6.1 - Placa sob tração uniforme contendo uma trinca perpendicular à direção do carregamento.

Podem surgir erros na avaliação dos F.I.T. por este método se o elemento especial for pequeno demais para abranger o comportamento de singularidade de deformação de  $1/\sqrt{r}$ .

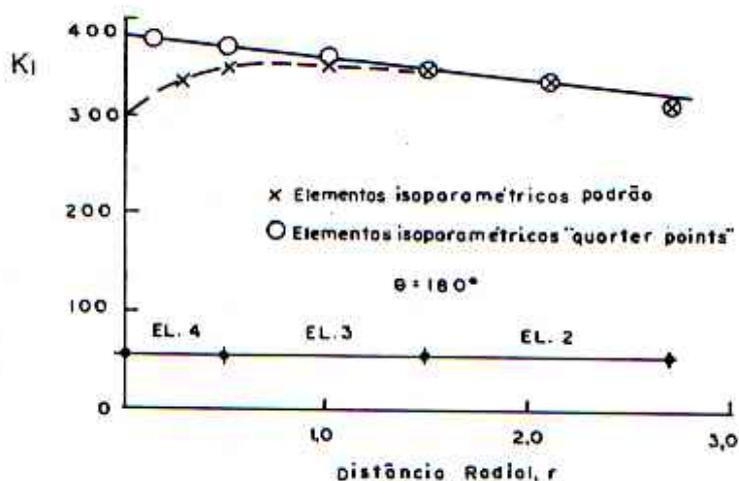


figura 6.2 - Resultados para o método da extrapolação de deslocamentos.

Assim, o problema foi novamente analisado usando a malha grosseira da figura 6.3 onde agora os elementos triangulares são cerca de 4 vezes maiores. Para esta situação o F.I.T obtido foi de  $K_I = 386,1$ ; um erro de 1,9 %. Assim conclui-se que adotando uma malha menos fina, o erro da solução é reduzido, o que contrasta diretamente com as características de convergência dos elementos finitos normais.

### c) Método da taxa de liberação da energia de deformação:

Para este método a trinca é estendida pela liberação nodal. Isto apresenta uma pequena dificuldade quando malhas grosseiras são empregadas, visto que alguns comprimentos médios de trinca devem ser associados com a energia de deformação liberada. Aqui adota-se a técnica de avançar a trinca por dois incrementos diferentes, avaliando  $K_I$  em cada caso e então

extrapolando  $K_I$  de volta para o comprimento da trinca original. Novamente usando a malha da figura 6.1, a trinca é avançada pela liberação dos nós 9 e 10. Isto dá um comprimento médio da trinca de 4,25.

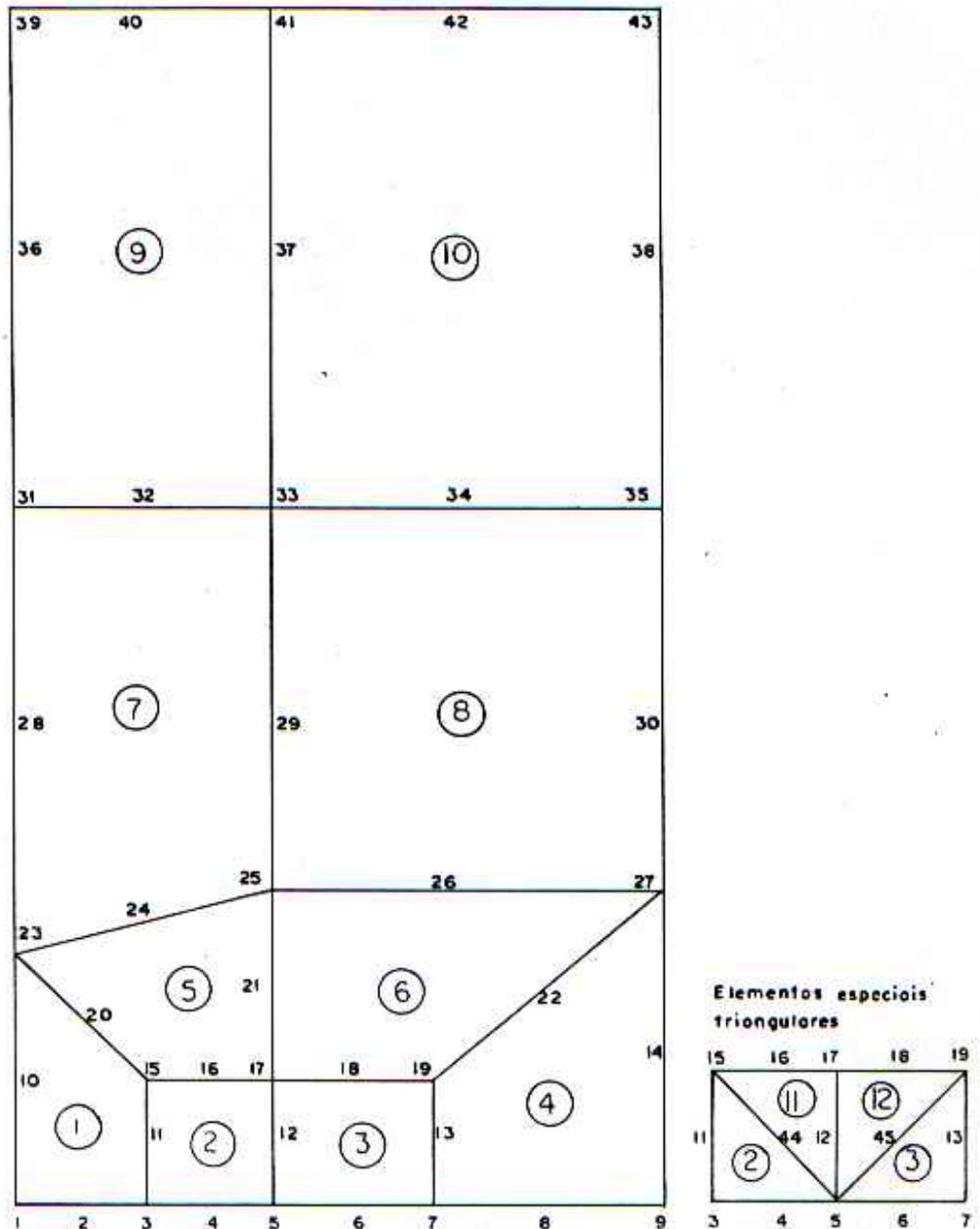


figura 6.3 - Malha empregada para a utilização com elementos triangulares buscando maior precisão.

A trinca é então estendida pela liberação dos nós 11 e 12, resultando em um comprimento médio de 4,75. Os F.I.T. obtidos nestas duas etapas estão graficados na figura 6.4. A extrapolação para  $a = 4,0$  fornece  $K_I = 388,0$ ; um erro de 1,4 %. Somente elementos isoparamétricos quadráticos convencionais foram empregados na solução.

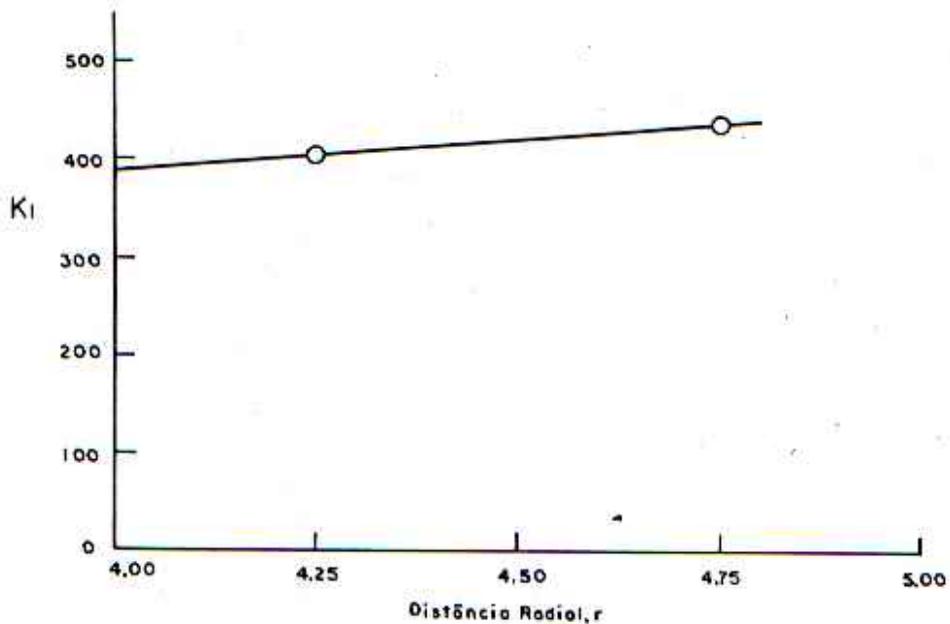


figura 6.4 - Resultados para o método da taxa de liberação de energia de deformação.

Os melhores resultados são obtidos avançando-se a trinca pelo lado inteiro do elemento de uma só vez. Não é aconselhável liberar somente um nó por vez devido ao comportamento das funções de forma dos elementos quadráticos.

#### d) Extensão virtual da trinca:

Neste método a trinca é estendida pela perturbação dos pontos nodais na zona da sua extremidade e na direção do seu avanço. Especificamente os nós 7, 9, 11, 36, 38 e 39 foram deslocados por 0.001 unidades na direção horizontal. O fator de intensidade de tensão  $K_I$  é obtido com o valor de 386,5; um erro de 1,8 %. Cada elemento na malha analisada foi do tipo

isoparamétrico quadrático convencional.

e) Método da integral J.

Neste método a integral J é avaliada ao longo de um caminho de contorno circundando a extremidade da trinca. O caminho empregado na solução passa através dos elementos 7, 13, 12 e 2 e é mostrado pela linha tracejada na figura 6.1. O F.I.T. é novamente obtido:  $K_I = 385,4$ ; um erro de 2,1%. Aqui também somente elementos isoparamétricos convencionais foram utilizados.

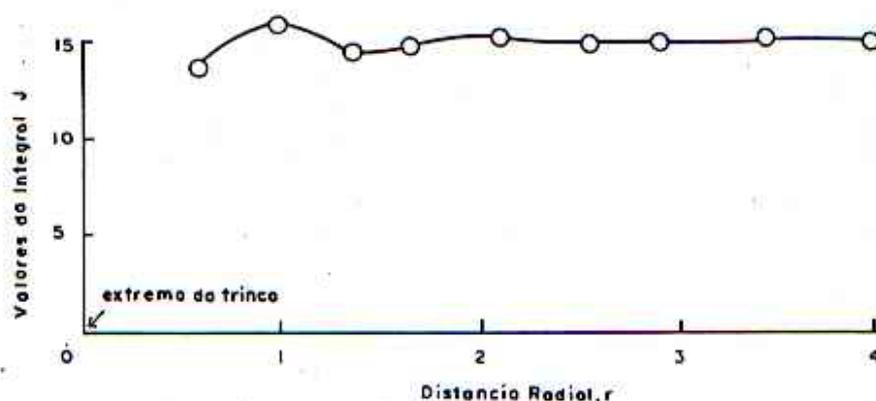


figura 6.5 - Variação dos valores da integral J x distância do contorno ao extremo da trinca.

As análises foram repetidas para vários contornos de integração diferentes através dos elementos 6, 11, 10, 3; 7, 13, 12, 2 e 8, 15, 14, 1 para  $\xi = \xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$ ; dando um total de 9 caminhos de contorno. A variação da integral J com a média da distância radial do caminho de contorno até a extremidade da trinca é mostrada na figura 6.5, onde a independência do caminho de contorno da integral é facilmente percebido. Entretanto existe uma ligeira variação no valor de J nas vizinhanças dos contornos mais próximos à extremidade da trinca, o qual é indubitavelmente devido a solução numérica ser incapaz de modelar o comportamento singular que começa a ser

dominante nesta região. Resultados mais precisos de  $J$  poderiam ser obtidos na zona da trinca pelo uso de uma integração numérica  $2 \times 2$ , visto que pode ser demonstrado que as posições da quadratura de 2 pontos são o local ótimo para a avaliação de tensões em elementos isoparamétricos de 8 nós, de acordo com HINTON e OWEN.

Assim, em conclusão, vemos que o uso de elementos especiais para fratura é vantajoso para a avaliação de F.I.T. por extrapolação de deslocamentos e que soluções mais precisas podem ser obtidas através de métodos energéticos e técnicas de linha integral, com o uso de malhas relativamente grosseiras de elementos convencionais.

#### 6.1.2. Solda de Penetração Parcial em Uma Alça de Suspensão.

A alça mostrada na figura 6.6 é comumente usada para suspender equipamentos de usinas de força e desta forma qualquer falha estrutural durante as operações poderia ser catastrófica.

Percebe-se que devido ao uso de soldas de penetração parcial na união da alça à viga de seção "I", efetivamente existe uma trinca centralizada entre ambas. A princípio o defeito parece ser uma simples trinca centralizada sob tração pura, porém é difícil obter valores exatos de  $K_I$  devido à rápida alteração da geometria na direção de propagação da trinca e à introdução de efeitos de flexão causados pela geometria não simétrica sob a trinca. Assim, este problema foi analisado utilizando-se a malha de elementos finitos bidimensional mostrada na figura 6.7 para vários comprimentos de trinca a fim de levar em conta a imprecisão na penetração da solda. Os resultados da análise são mostrados na figura 6.8.

Para a avaliação dos fatores de intensidade de tensões empregou-se a técnica da integral  $J$  descrita na seção 4.4, cujos contornos de integração são mostrados pelas linhas

tracejadas na figura 6.7.

Aqui houve a necessidade de que se introduzisse a trinca através de um artifício: na região onde esta deveria se localizar, forçou-se a existência de um afastamento extremamente pequeno manipulando-se adequadamente as coordenadas dos nós da região.

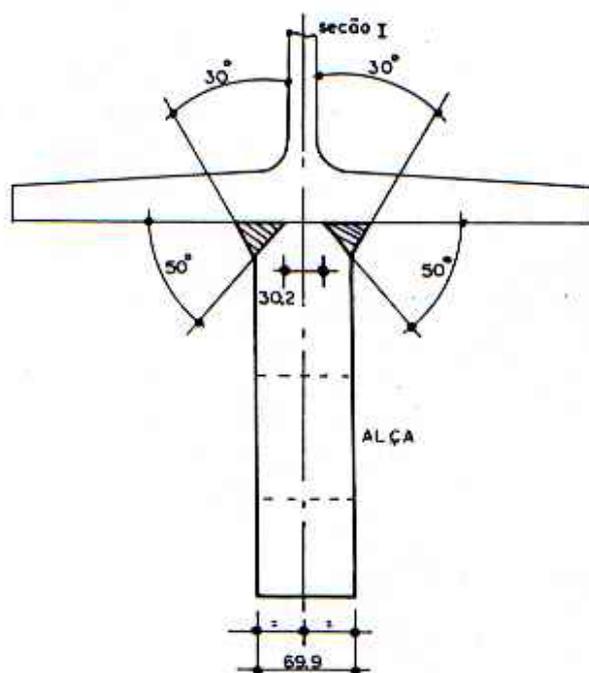
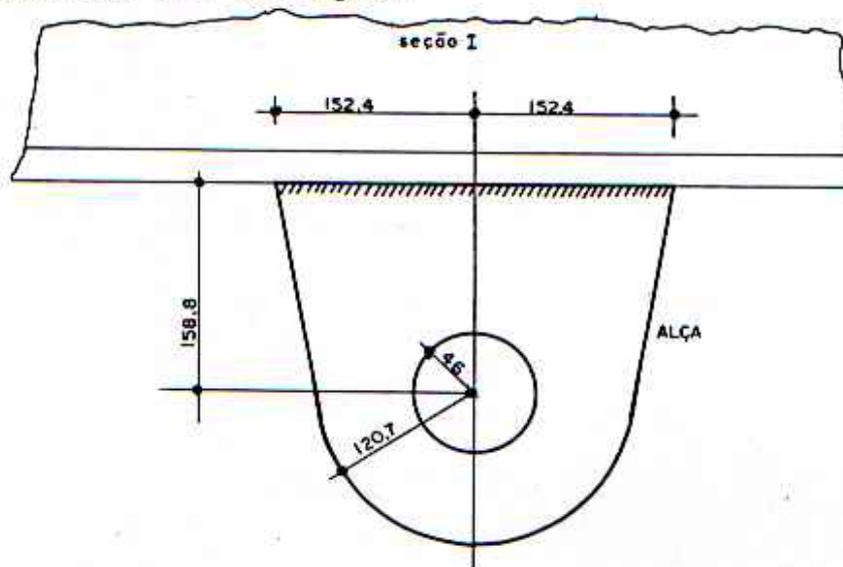


figura 6.6 - Alça de suspensão mostrando uma trinca centrada devido a solda de penetração parcial.

Neste exemplo o desempenho do programa é avaliado pela comparação com os resultados obtidos pelo emprego de um outro programa, o qual utiliza um elemento analítico capaz de proporcionar soluções econômicas e precisas mesmo para problemas com modos combinados de fratura; publicado por OWEN e FAWKES.

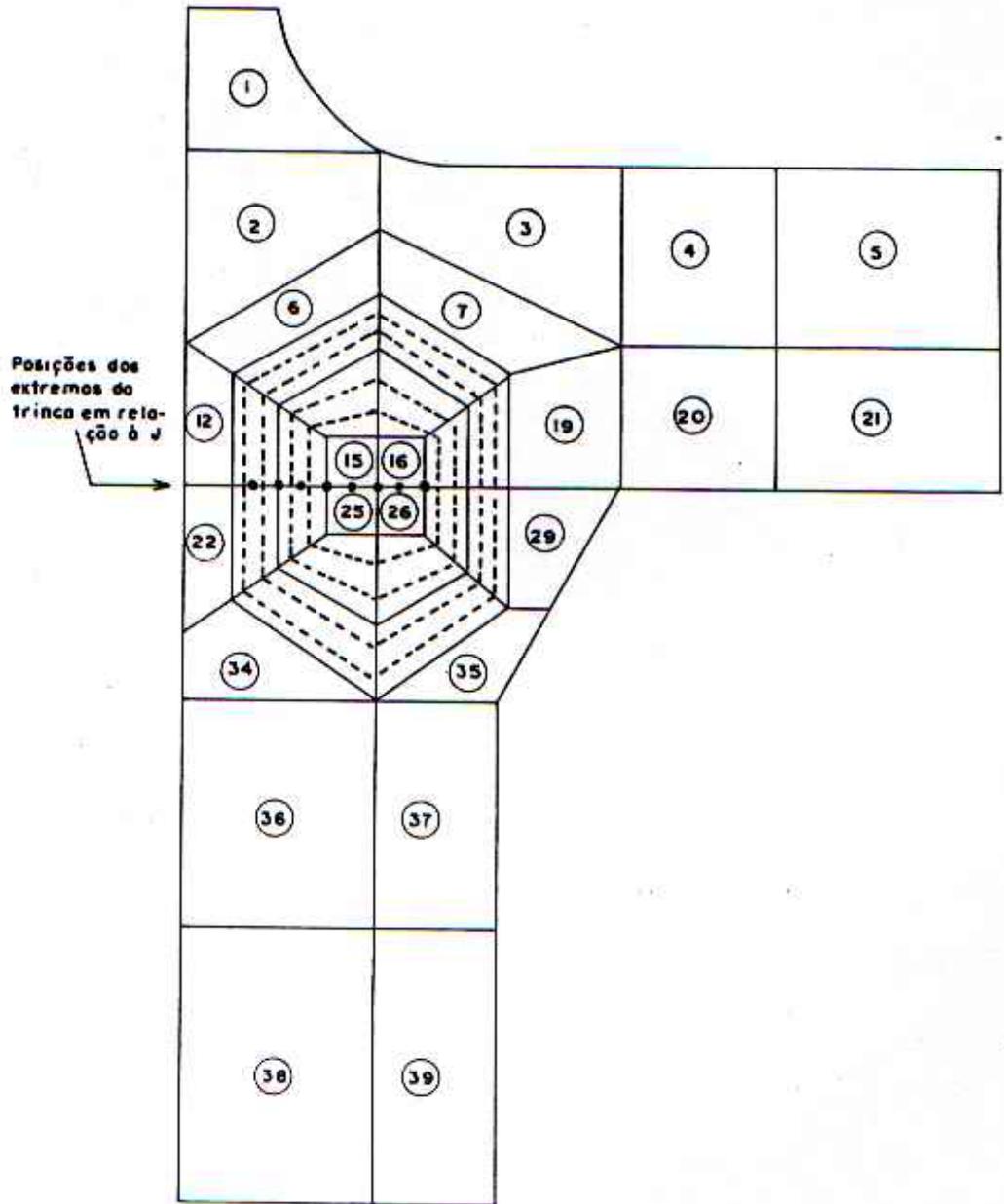


figura 6.7 - Malha empregada na avaliação dos fatores de intensidade de tensões para a alça da figura 6.6.

Além desta, é feita uma comparação com valores experimentais. Vê-se que os resultados obtidos pela análise de elementos finitos são muito próximos àqueles para uma trinca centralizada sob tração pura em um corpo de prova com largura igual a da alça obtidos por Brown e Swrawley, citados por OWEN e FAWKES.

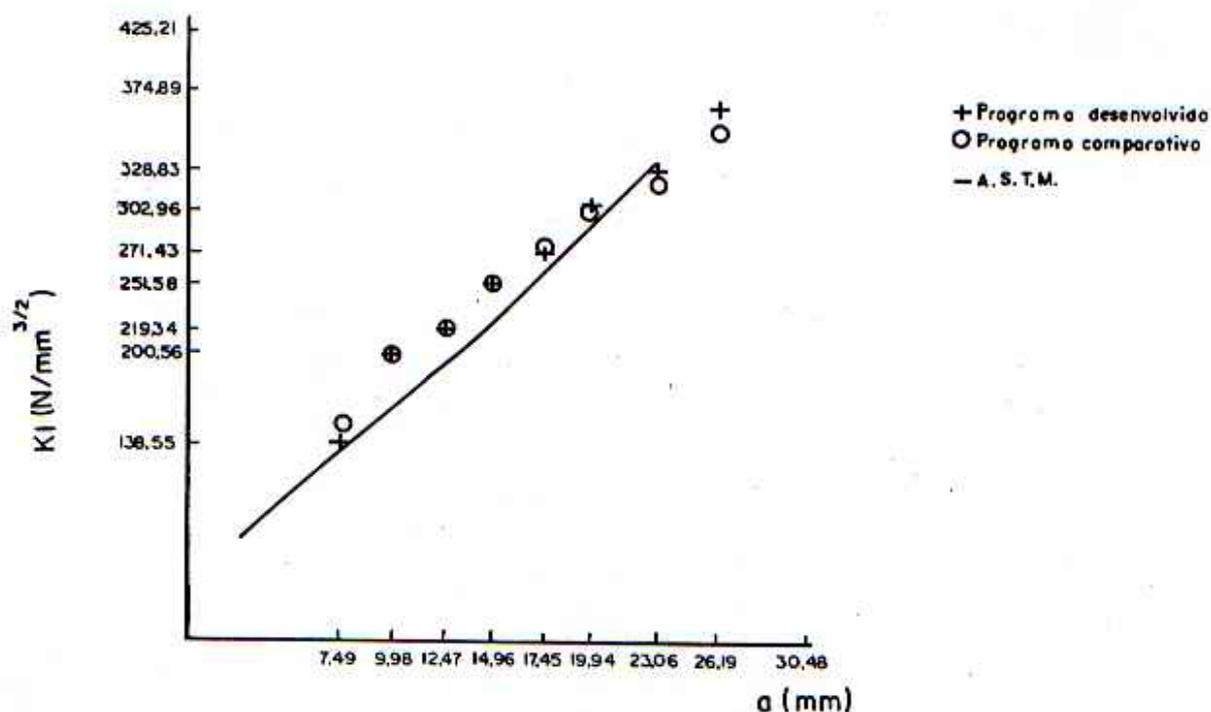


figura 6.8 - Variação do fator  $K_I$  com o comprimento da trinca para o problema da figura 6.6.

Quanto à comparação numérica, verifica-se de maneira clara que os valores obtidos pela presente análise praticamente coincidem com os provenientes do programa tomado para comparação.

### 6.1.3. Trinca Emanada de Um Orifício Circular em Uma Placa Retangular Submetida a Um Carregamento de Tração.

Na indústria aeroespacial furos destinados à aplicação de rebites são potenciais concentradores de tensão e

por conseguinte, fontes de trincas por fadiga. Uma avaliação rigorosa de qualquer trinca proveniente destes furos circulares é desta maneira de vital importância.

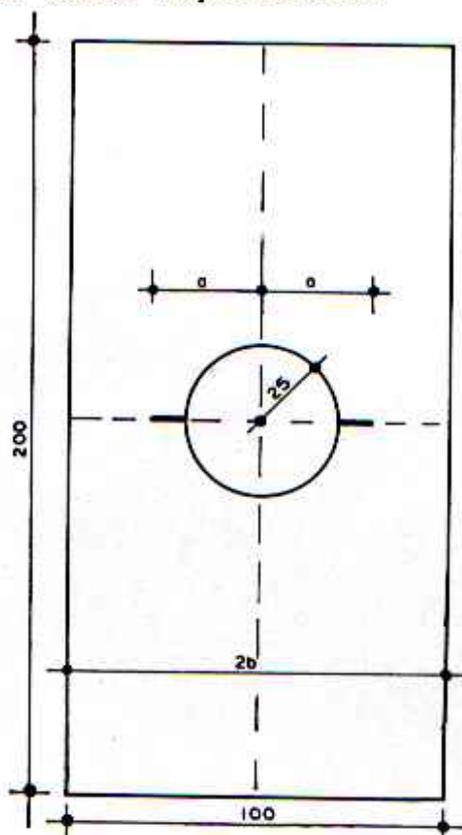


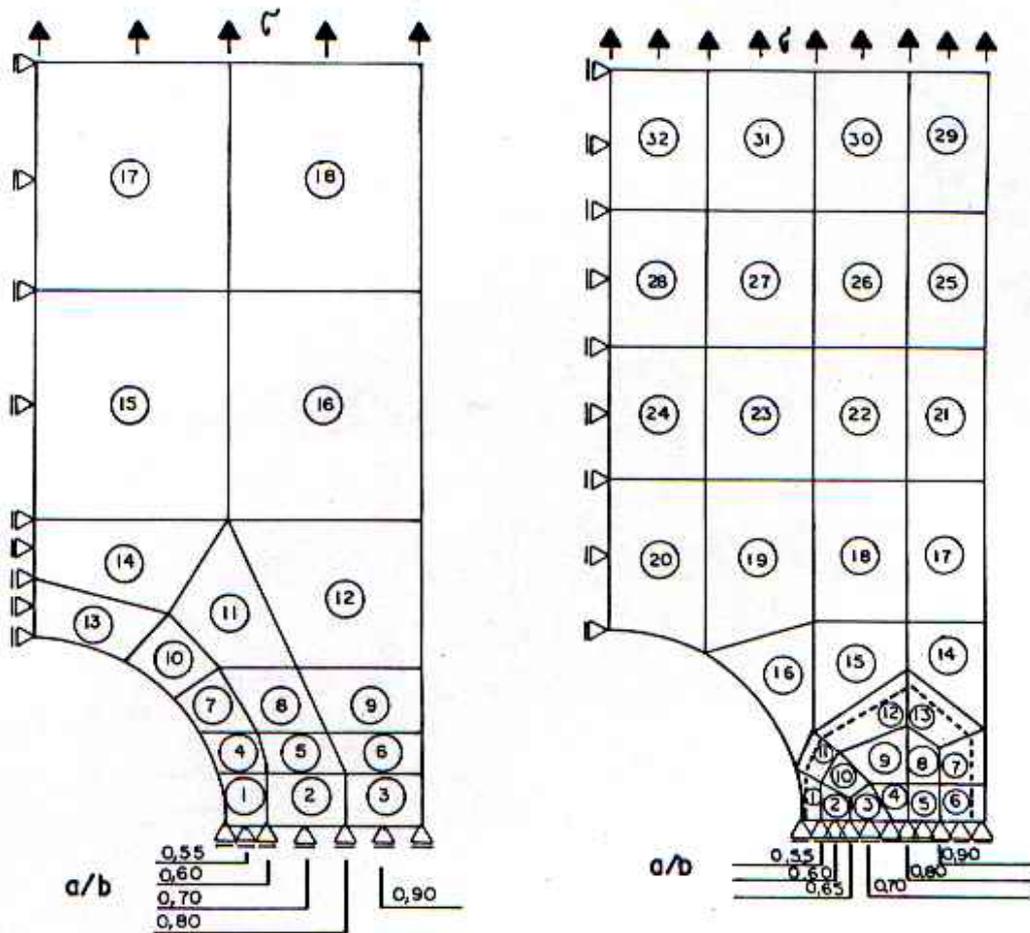
figura 6.9 - Placa retangular com trinca proveniente de um orifício circular.

Apesar de existirem soluções para placas com geometrias e carregamentos simples, é possível que se uma trinca avançar demais venha a interagir com outros componentes da estrutura; por exemplo, um enrijecedor. Neste caso uma solução através de elementos finitos se tornaria imprescindível.

A placa da figura 6.9 foi analisada segundo duas técnicas: a extensão virtual da trinca e a técnica da integral  $J$  de Rice, por serem estas de maior precisão e versatilidade.

Aproveitando a dupla simetria tomou-se uma quarta parte do problema. As malhas utilizadas estão representadas nas

figuras 6.10 e 6.11 e os resultados graficados na figura 6.12.



figuras 6.10 e 6.11 - Malhas empregadas na análise da placa da figura 6.9 pelos métodos da extensão virtual da trinca e da integral  $J$  respectivamente.

Em comparação com os resultados experimentais publicados por Newman, citado por OWEN e FAWKES, observa-se uma boa aproximação, apesar de terem sido empregadas malhas bastante grosseiras na solução de elementos finitos.

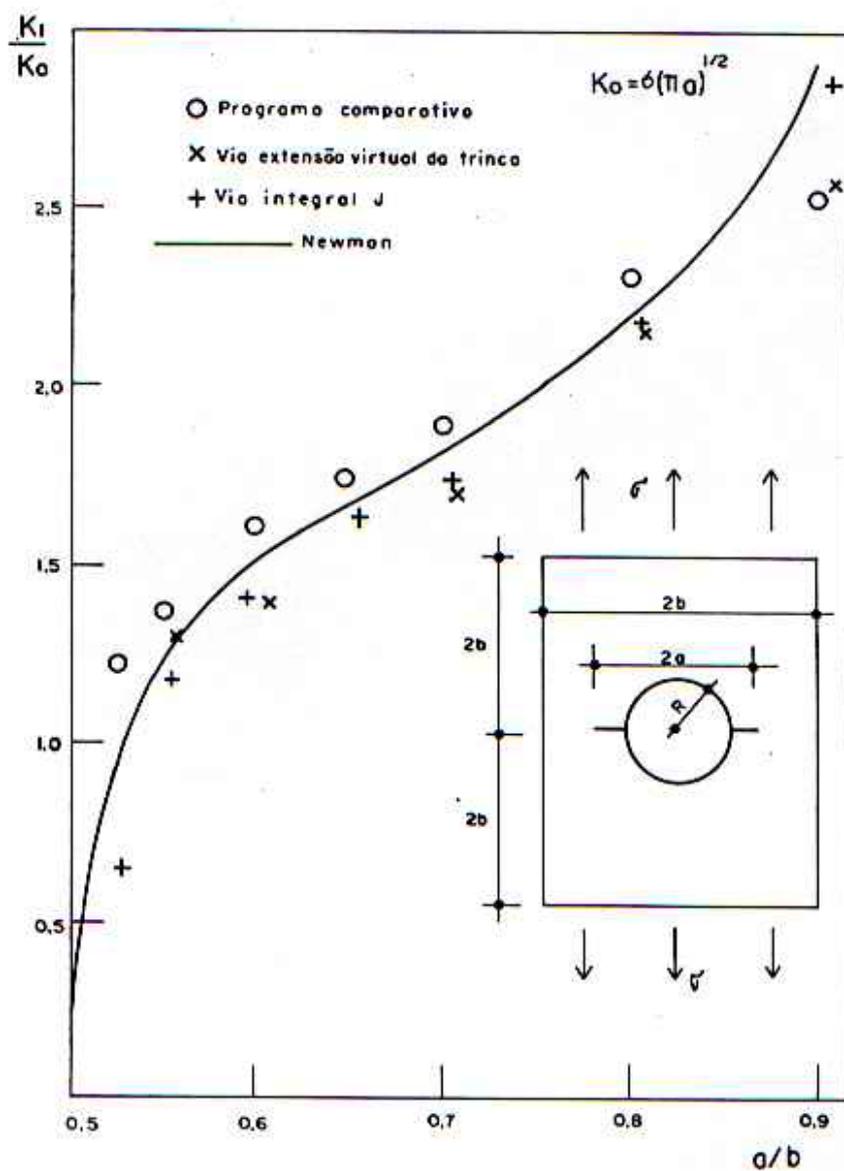


figura 6.12 - Resultados da análise da placa da figura 6.9.

## 6.2. Exemplos em Análise Elastoplástica.

Os métodos numéricos para análise de tensões são poderosas ferramentas que podem produzir soluções para deformações elastoplásticas em sólidos, desta maneira encontrando uso bastante difundido na Mecânica de Fraturas. Infelizmente, a ausência de soluções exatas cria dificuldades em determinar a precisão destes resultados.

Wilson e Osias, citados por BLEAKLEY e LUXMOORE, apresentaram em um artigo sérias discrepâncias que podem existir entre soluções para um problema idêntico, mesmo para programas baseados em formulações similares.

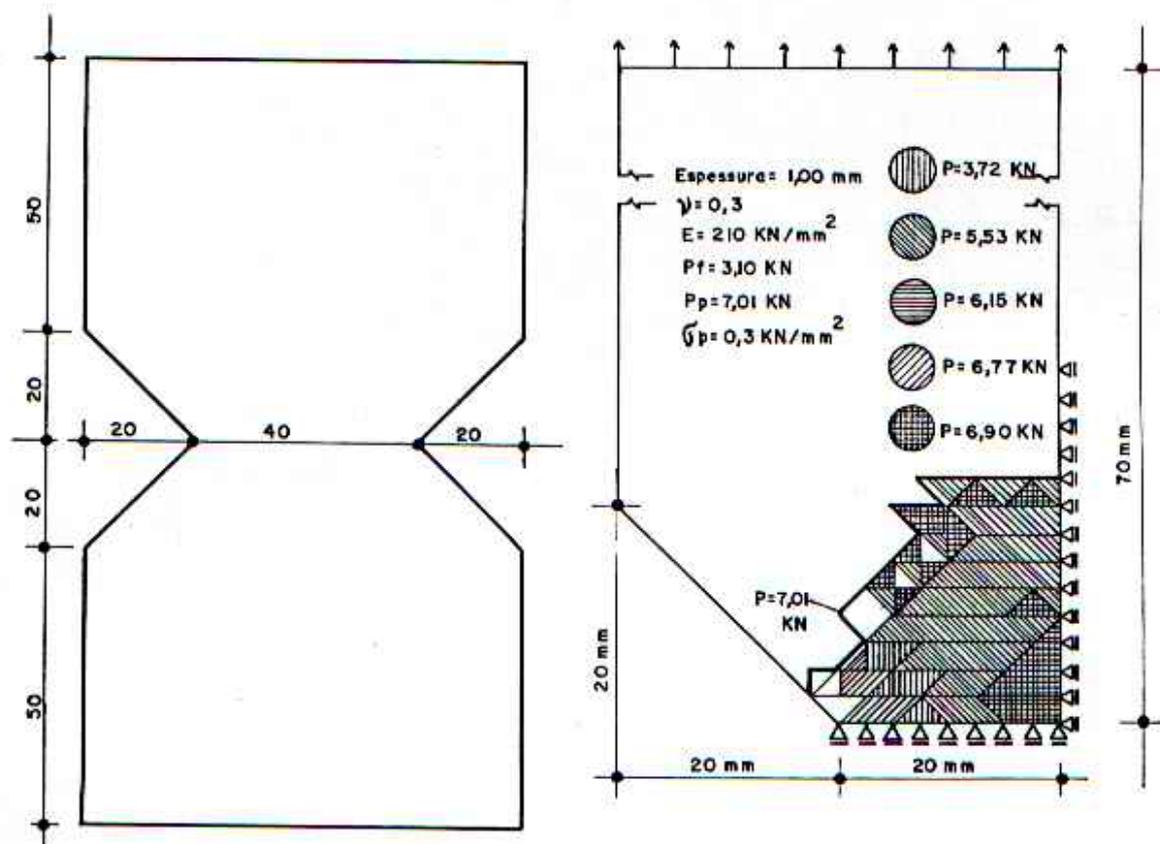
Assim como comparar resultados entre diferentes soluções de um mesmo problema, também é usual checar resultados numéricos com resultados experimentais. Dois dos problemas apresentados a seguir, o corpo de prova de tensão compacto e o corpo de prova de flexão em três pontos foram testados experimentalmente e portanto cargas e deslocamentos puderam ser comparados diretamente. Os dois problemas mencionados foram levados à segunda Conferência Internacional sobre Métodos Numéricos em Mecânica de Fraturas, realizada na University College Swansea, U.K., em julho de 1980.

### 6.2.1. Placa com Entalhe em "V".

Esta série de exemplos em análise elastoplástica é iniciada com um teste bastante simples, no qual não se examinou parâmetro algum relacionado à Mecânica de Fraturas, servindo porém de prestimosa avaliação do desempenho da parte básica da programação, ou seja, a análise não linear.

A figura 6.13 mostra uma placa de aço com entalhe em "V" cuja análise foi executada primeiramente em ZIENKIEWICZ e posteriormente reproduzida por GROEHS e CREUS. O valor da carga de escoamento para a primeira obra citada foi de 2,25 KN e para

a segunda 3,10 KN. A diferença segundo os autores da segunda análise era devido ao maior tamanho dos elementos utilizados.



figuras 6.13 e 6.14 - Placa com entalhes em "V" e regiões plastificadas para o problema apresentado por Zienkiewicz.

Na mesma seqüência proposta as cargas de ruptura obtidas foram 7,15 KN e 7,02 KN. Ambos utilizaram-se de elementos triangulares de três nós para estado plano de tensões.

Em virtude da dupla simetria somente a quarta parte da placa foi tomada para análise. Observa-se esquematicamente na figura 6.14 as zonas de plastificação obtidas por Creus e Groehs conforme o carregamento aplicado.

Para a análise do presente trabalho não se buscou com exatidão a carga com a qual inicia-se o fenômeno do escoamento.

Isto pode ser explicado pelo fato que a aplicação dos fatores de carga sendo pré-determinada, tornaria necessário um grande número de simulações e a pesquisa de tal valor não seria de tanto interesse. O que tentou-se fazer, e com sucesso, foi obter faixas de carregamento e dentro destas avaliar a extensão da plastificação. Tais resultados são expostos na figura 6.15.

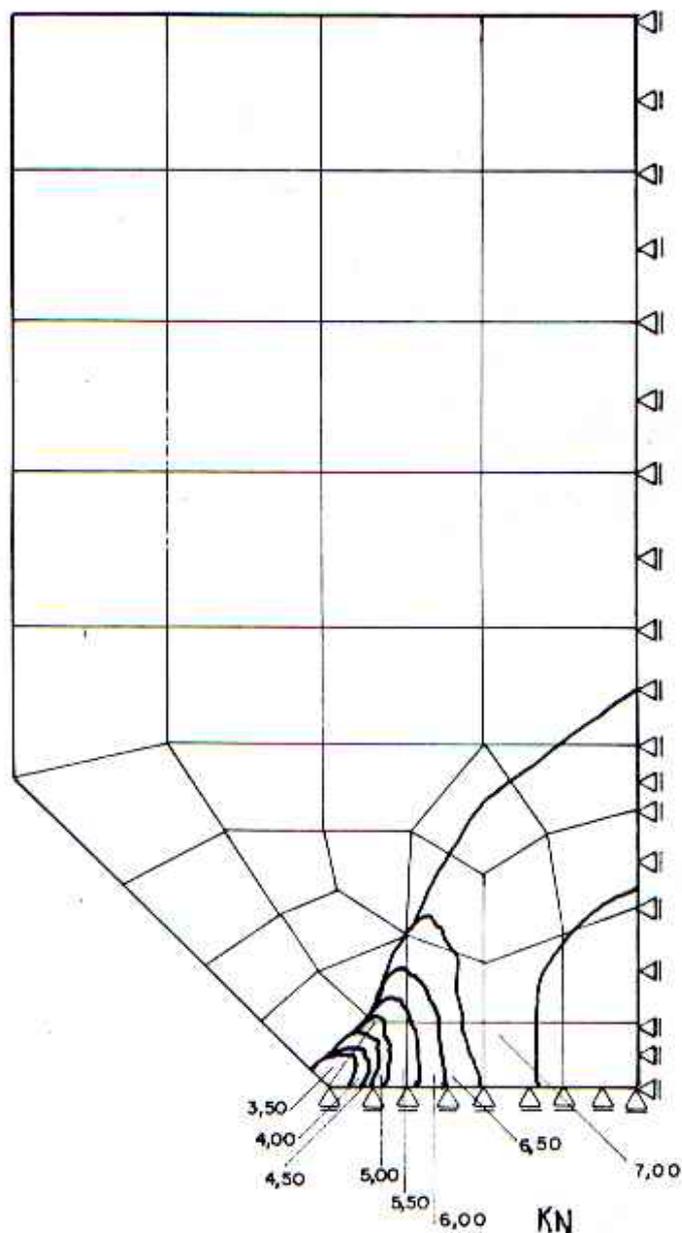


figura 6.15 - Malha empregada para a análise do problema da figura 6.13 pelo programa do presente trabalho.

Desta forma pode-se afirmar que a carga de plastificação inicial obtida está compreendida entre 3,25 KN e 3,375 KN e a de colapso entre 7,00 KN e 7,50 KN. O gráfico carga x deslocamento da figura 6.16 permite observar bastante bem esta afirmação.

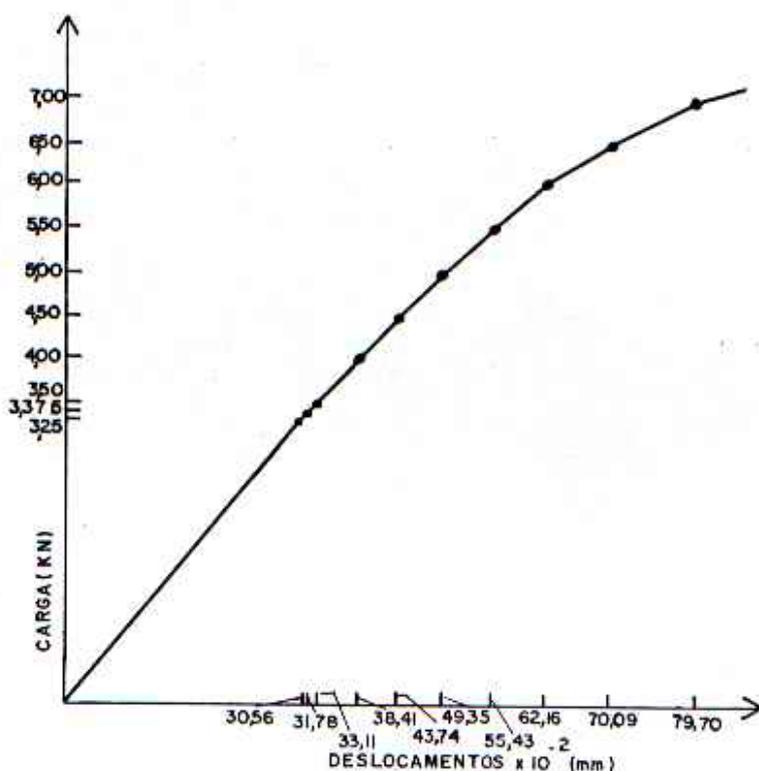


figura 6.16 - Gráfico carga x deslocamento para a placa da figura 6.13

#### 6.2.2. Placa sob Tração Uniforme Contendo Uma Trinca Perpendicular à Direção do Carregamento.

O uso do programa de análise elastoplástica para a avaliação da integral J será aqui ilustrado através da placa

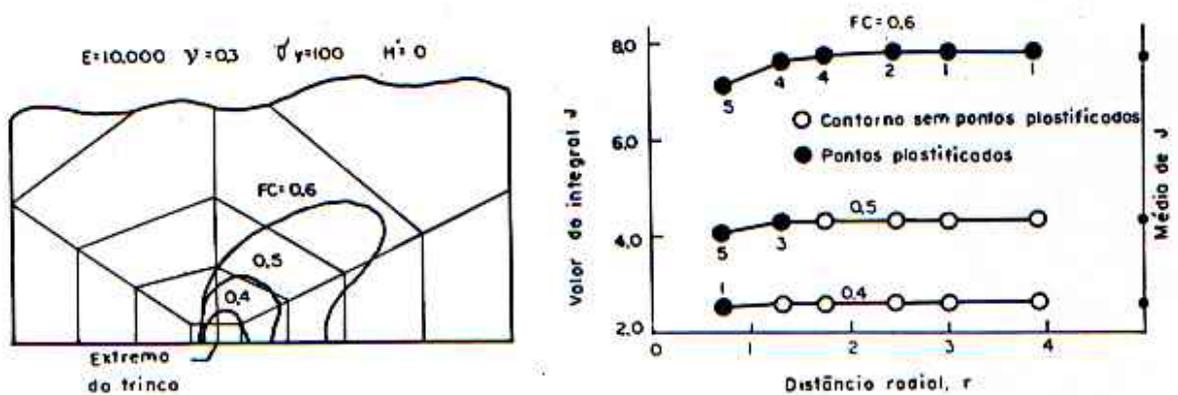
utilizada em seção anterior correspondente à análise elástico-linear, tomando-se a mesma malha da figura 6.1. Apenas para recordar, a trinca de comprimento  $2a$  existe em uma placa de largura  $2W$  cujo comprimento  $2L$  é igual  $5W$  e a relação  $a/W$  igual a  $0,4$ . As propriedades do material tomadas na solução são as seguintes:

Módulo de elasticidade longitudinal,  $E = 10.000$

Coefficiente de Poisson,  $\nu = 0,3$

Tensão de escoamento,  $\sigma_y = 100$

Uma carga final de referência de 100 unidades por unidade de comprimento foi aplicada sob a forma de tração através de incrementos de acordo com fatores de carga especificados. A figura 6.17 mostra o desenvolvimento de zonas de plastificação com o crescimento da carga aplicada para os fatores de carga  $0,4$ ,  $0,5$  e  $0,6$ .



figuras 6.17 e 6.18 - Região de plastificação da malha e gráfico integral  $J$  x distância do contorno à extremidade da trinca.

Os resultados numéricos indicam que o corpo de prova foi incapaz de suportar a carga correspondente ao fator de carga  $0,7$ . Quase todo o escoamento se verifica em frente da extremidade da trinca e as formas da zona plastificada encontradas são as esperadas "orelhas de coelho".

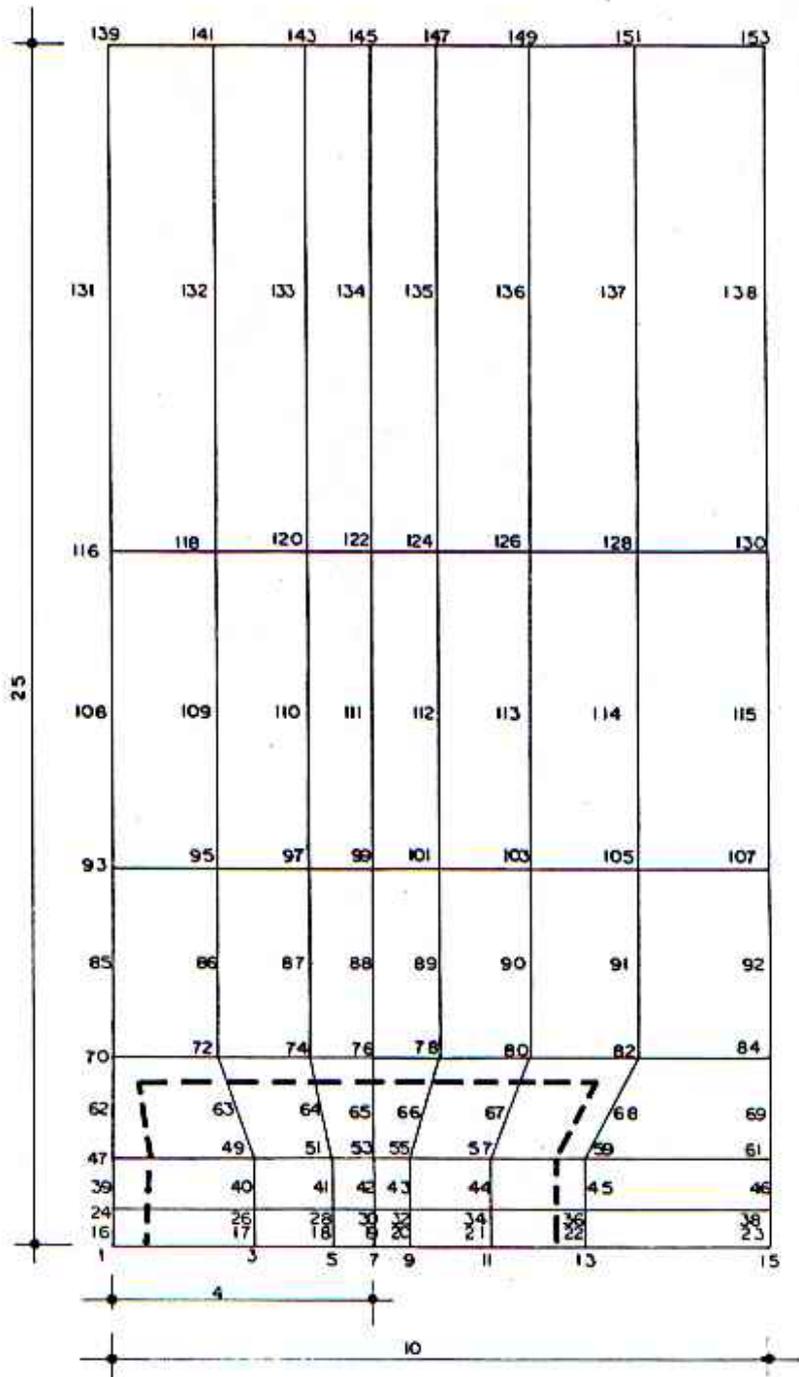


figura 6.19 - Malha com elementos regulares para a análise elasto-plástica da placa apresentada na figura 6.1.

A integral J foi avaliada ao longo de seis contornos

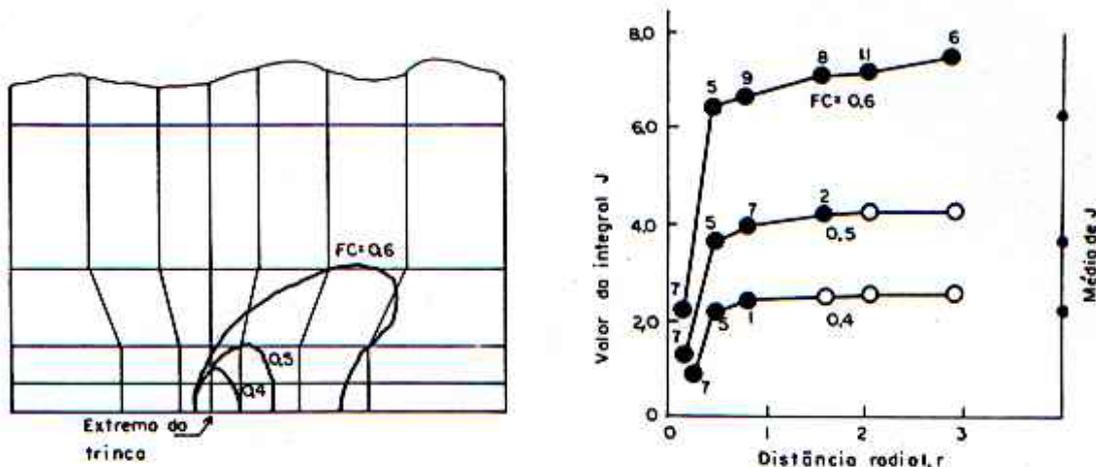
para cada incremento de carga. Em particular foram tomados os contornos através dos elementos 6, 11, 10, 3; 7, 13, 12, 2 e 8, 15, 14, 1 para  $\xi = \xi_1$  e  $\xi_2$  (empregando-se quadratura com  $2 \times 2$  pontos de Gauss). O valor da integral J em cada contorno está representado na figura 6.18 para três fatores de carga aplicados. O número de pontos de Gauss em que ocorre plastificação ao longo do contorno também é indicado. Nota-se que o valor de J é quase constante, exceto para contornos próximos à extremidade da trinca, onde o grau de deformação plástica é bastante elevado. Pode-se perceber também que a mudança destes valores quase constantes ocorre com o aumento do escoamento.

Este mesmo problema foi reanalisado usando a malha de elementos finitos mostrada na figura 6.19. O uso de tais malhas é com frequência conveniente, particularmente se programas de geração automática de malhas forem usados na discretização do problema. Na figura 6.19 vê-se que a malha tem 153 pontos nodais; aproximadamente o dobro de nós contidos na malha anterior. Entretanto a distribuição de elementos próximos à extremidade da trinca é mais grosseira que para o caso antes analisado, o que indica maiores desvantagens no emprego de malhas regulares - maior tempo de processamento, maior custo operacional e maior imprecisão.

A figura 6.20 mostra o desenvolvimento das zonas de plastificação para os fatores de carga 0,4; 0,5; 0,6 e suas distribuições conferem com aquelas apresentadas na figura 6.17.

Para o tipo de malha empregada, a avaliação da integral J deve ser feita pelo uso de uma técnica especial no que diz respeito aos contornos de integração. Um contorno típico é indicado na figura 6.19 por uma linha tracejada, passando pelos elementos 6, 13, 20, 19, 18, 17, 16, 15 e 1. Uma seção ampliada desta região da malha está na figura 6.21. O caminho de contorno pelo qual a integral J deve passar é orientado neste caso através de  $\xi$  e  $\eta$  constantes ou "elementos de canto" na mudança da direção. As conectividades dos elementos

devem ser numeradas para que os eixos locais  $\xi$  e  $\eta$  estejam orientados como na figura 6.21.



figuras 6.20 e 6.22 - Região de plastificação da malha e gráfico integral J x distância do contorno à extremidade da trinca.

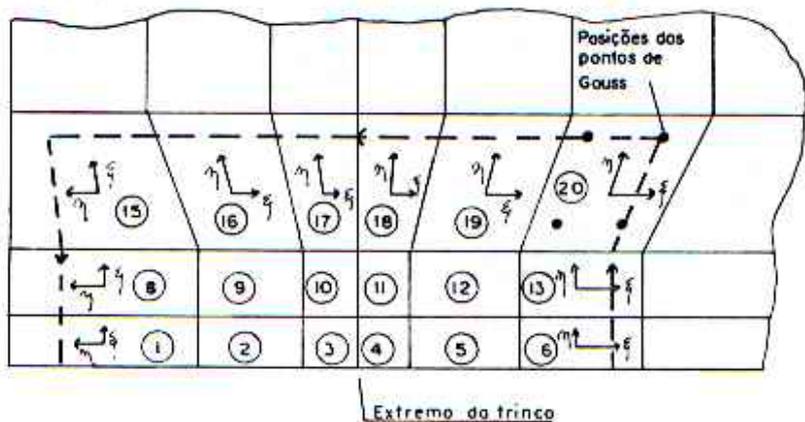


figura 6.21 - Ampliação da malha mostrando o caminho para a avaliação da integral J

Neste exemplo computam-se seis contornos de avaliação para  $J$  e a representação de seus valores estão graficados na figura 6.22. Vê-se que há uma considerável variação nos valores particulares de  $J$  para os contornos mais próximos da extremidade da trinca. Para os menores fatores de carga os resultados para contornos afastados da zona da extremidade da trinca aproximam-se de um valor constante e estão compatíveis com os valores dados na figura 6.18. Entretanto, para o maior valor da carga ( $F.C = 0,6$ ) o valor computado de  $J$  parece ser significativamente dependente do contorno, mas o valor para o contorno mais afastado é somente 5% diferente do resultado da figura 6.18.

### 6.2.3. Análise de Um Corpo de Prova de Tensão Compacto.

Em uma investigação experimental sobre os efeitos da espessura no Institut für Eisenhüttenkunde, em Aachen, Alemanha Ocidental e publicada por BLEACKLEY e LUXMOORE, testaram-se vários corpos de prova de tensão compacto de variadas espessuras. Para o menos espesso, 3 mm, ocorreu considerável plastificação antes da instabilidade da trinca. Escolheu-se então este corpo de prova como um modelo para a análise numérica. Durante o experimento foram monitorados carga versus deslocamento, com a medição dos deslocamentos tomada na direção do carregamento entre os pontos A e B, marcados na figura 6.23.

Para a presente análise numérica foram empregadas duas malhas diferentes de elementos finitos, tirando proveito da simetria do corpo de prova em relação ao seu eixo horizontal. A primeira, figura 6.24, modelando o furo do pino de aplicação de carga, contém 49 elementos e 179 pontos nodais. A segunda, figura 6.25, representando o corpo de prova cheio, possui 48 elementos e 171 pontos nodais. Em ambas as malhas uma discretização relativamente fina foi tomada ao redor da extremidade da trinca.

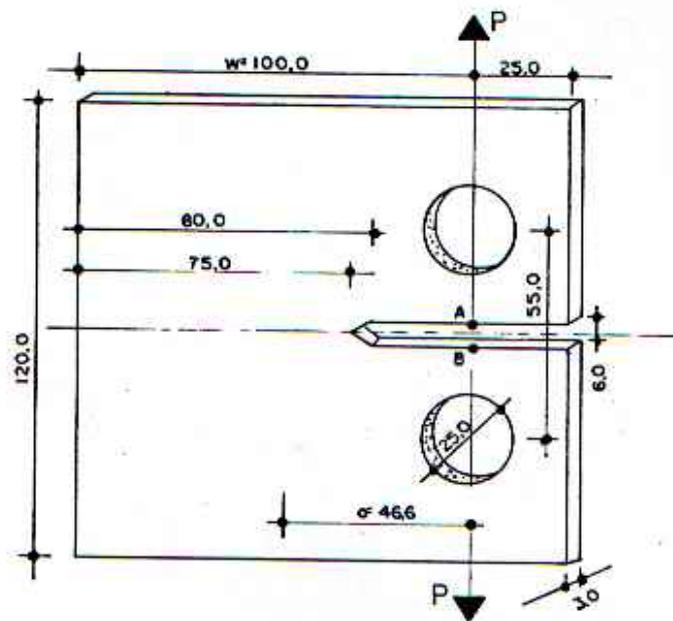


figura 6.23 - Corpo de prova de tensão compacto usado para simulação computacional.

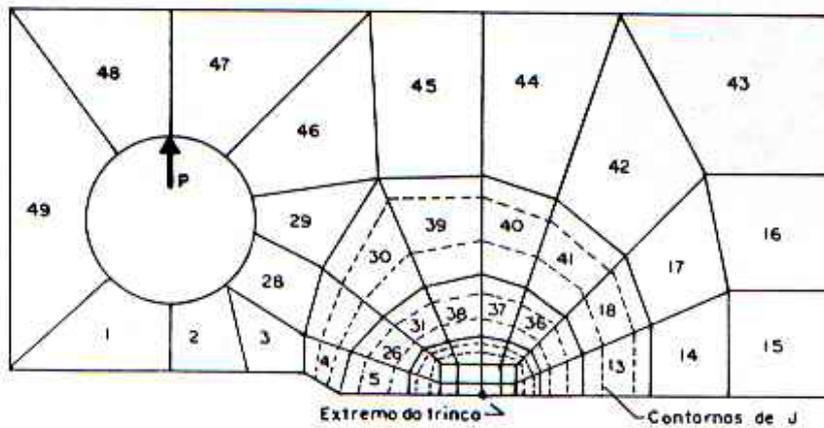


figura 6.24 - Malha utilizada na análise do corpo de prova da figura 6.23 com modelagem do furo do pino de aplicação de carga.

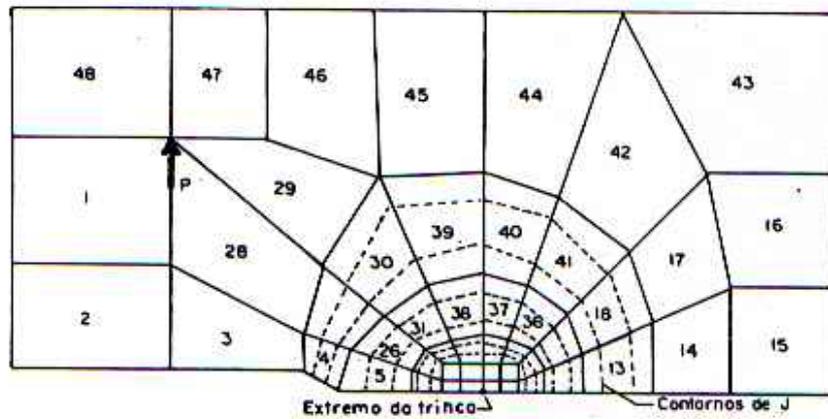


figura 6.25 - Malha utilizada na análise do corpo de prova da figura 6.23 sem modelagem do furo do pino de aplicação de carga.

As linhas tracejadas representam os contornos tomados para a avaliação da integral J e o carregamento aplicado é assumido como uma simples carga nodal concentrada.

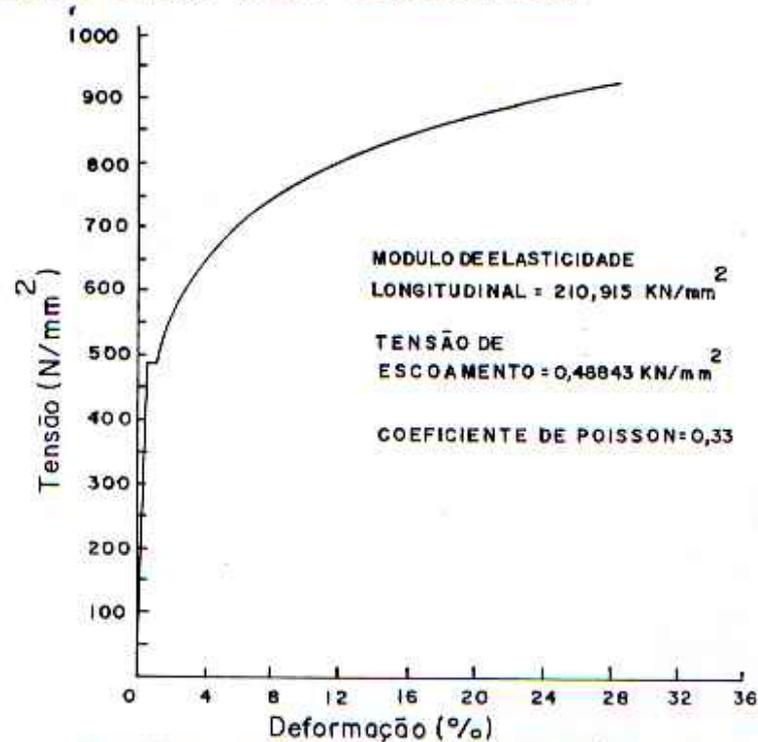


figura 6.26 - Gráfico tensão x deformação para o material do corpo de prova da figura 6.23

A carga de referência foi de 10 KN e a solução obtida para fatores de carga começando em 1,0 e crescendo em incrementos de 0,1. Também assumiu-se estado plano de tensões e as propriedades do material estão expressas na figura 6.26. A fim de representar as características elastoplásticas do material utilizou-se a linearização por segmentos, opção oferecida pelo programa. Os valores de tensão versus deformação específica estão tabulados na tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Valores obtidos da curva tensão x deformação para o material do corpo de prova da figura 6.23.

LINEARIZAÇÃO POR SEGMENTOS			
TENSÃO	DEFORMAÇÃO	TENSÃO	DEFORMAÇÃO
0,48843	0,01	0,856.....	0,18
0,550.....	0,02	0,873.....	0,20
0,600.....	0,03	0,888.....	0,22
0,644.....	0,04	0,902.....	0,24
0,700.....	0,06	0,916.....	0,26
0,739.....	0,08	0,929.....	0,28
0,769.....	0,10	0,941.....	0,30
0,797.....	0,12	0,952.....	0,32
0,818.....	0,14	0,962.....	0,34
0,838.....	0,16		

Cada malha foi analisada por dois algoritmos de solução, o da rigidez inicial e o da rigidez tangencial e os resultados são compostos por dois conjuntos: carga versus deslocamento e valor da integral J versus deslocamento.

As figuras 6.27 e 6.28 mostram a distribuição das zonas de plastificação a medida que a carga aplicada cresce. Vê-se que nos estágios iniciais o escoamento é restrito às proximidades da trinca mas que submetido a valores mais elevados de carga o corpo de prova começa a exibir uma plastificação global por efeito de flexão.

Os detalhes numéricos de nove análises de colaboradores participantes da Segunda Conferência Internacional sobre Métodos Numéricos em Mecânica de Fraturas realizada na University College Swansea UK, em julho de 1980, citada por Bleackey e Luxmoore e referentes a este corpo de prova, são listados na tabela 6.2..

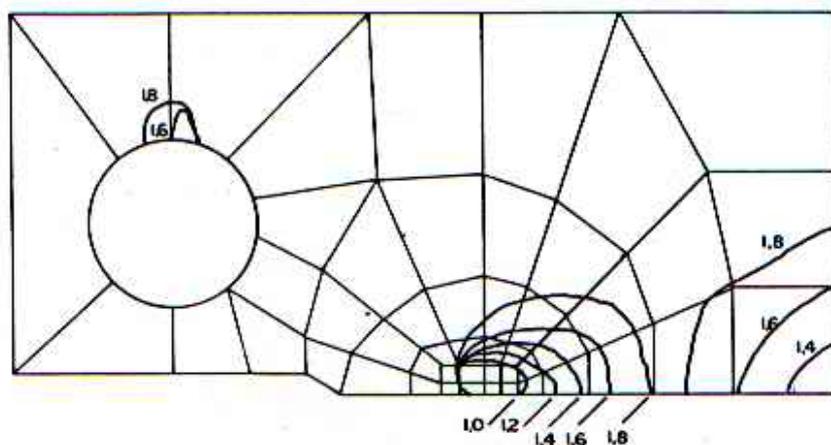


figura 6.27 - Região plastificada na malha com furo modelado.

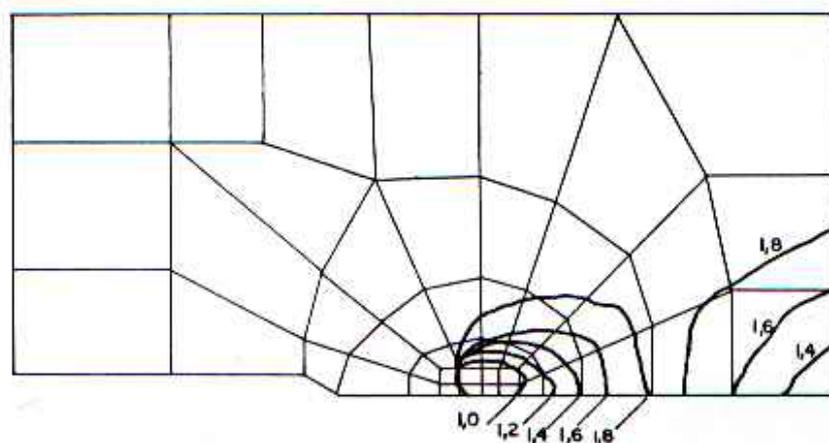


figura 6.28 - Região plastificada na malha com furo não modelado.

As quatro primeiras soluções (A, B, C e D) apresentadas na tabela 6.2 e também nos gráficos adiante dizem respeito às análises efetuadas no presente trabalho.

Tabela 6.2 - Características das malhas, elementos e análises efetuadas

SOLUÇÃO	ALGOR.	ELEM.	NÚM. DE ELEM.	GRAU LIB.	FURO MOD.
A	RIG.	ISO	48	326	NÃO
	TAN.	8			
B	RIG.	ISO	48	326	NÃO
	INI.	8			
C	RIG.	ISO	49	342	SIM
	TAN.	8			
D	RIG.	ISO	49	342	SIM
	INI.	8			
E	RIG.	ISO	52	400	SIM
	TAN.	8			
F	RIG.	ISO	71	522	SIM
	INI.	8			
G	RIG.	ISO	84	566	NÃO
	INI.	8			
H	RIG.	ISO	84	566	NÃO
	TAN.	8			
I	RIG.	ISO	62	316	SIM
	TAN.	4-8			
J	RIG.	TRI	607	698	SIM
	TAN.	3			
K	RIG.	TRI	392	458	SIM
	TAN.	3			
L	RIG.	ISO	339	572	SIM
	INI.	4-6			
M	RIG.	ISO	60	436	SIM
	INI.	6-8			

Quatro dos colaboradores preferiram o método da rigidez inicial e os restantes o da rigidez tangencial para solucionar as não linearidades físicas dos problemas. Todos empregaram a teoria da plasticidade incremental de pequenas deformações. Quatro utilizaram elementos isoparamétricos de oito nós, dois deles elementos triangulares de deformação constante e os restante uma mescla de elementos isoparamétricos.

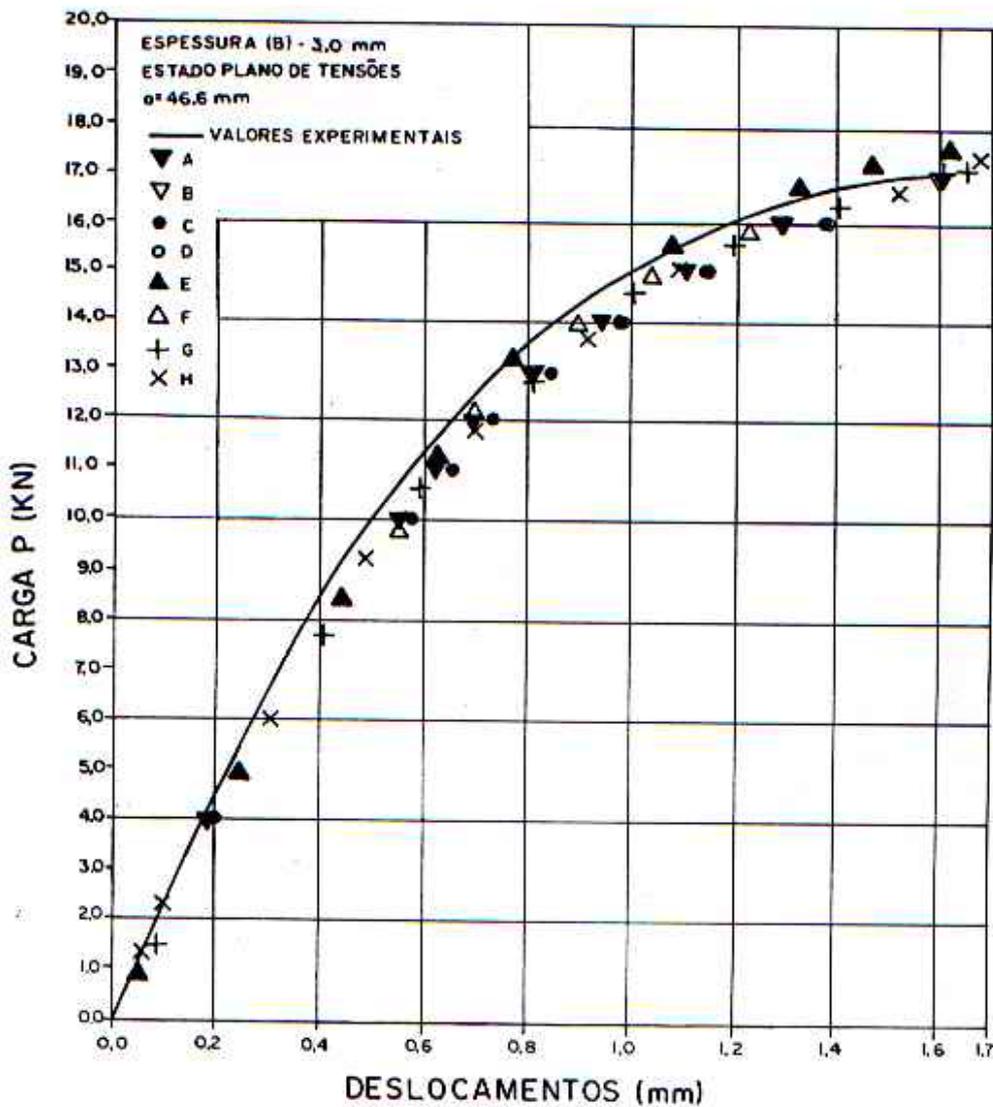


figura 6.29 - Cargas x deslocamentos para malhas exclusivamente com elementos isoparamétricos quadrilaterais e valores experimentais.

Dos três últimos citados, L e M utilizaram o triângulo de seis nós e elementos parabólicos e I usou diversas combinações de elementos de quatro e oito nós.

Os valores de  $J$  obtidos foram fornecidos pela média entre os valores calculados em cada contorno, exceto para as soluções L e M, para as quais um contorno típico foi escolhido e admitido como representante de um valor médio.

Para facilitar a representação, as análises obtidas por este trabalho são comparadas em duas etapas. A primeira com as contribuições que utilizam exclusivamente elementos isoparamétricos de oito nós e a segunda com o restante das contribuições.

Observa-se que existe uma boa aproximação entre as curvas carga/deslocamento experimental e numéricas e as presentes soluções nas figuras 6.29 e 6.30 apesar do tipo de elemento, modelo de malha e algoritmo de solução variarem. Em baixos níveis de carga os valores numérico e experimentais coincidem, mas em níveis mais altos os valores experimentais são intercalados entre os numéricos.

As curvas  $J$ /deslocamento da figura 6.31 e 6.32 estão com muito boa aproximação para todas as soluções, exceto para o caso L. Esta contribuição pobre pode ser atribuída ao fato de  $J$  ter sido obtida de um simples contorno e não de uma média.

A variação dos valores da integral  $J$  com os valores da distância média radial do contorno à extremidade da trinca é mostrado na figura 6.33 para os diversos valores do fator de carga. Obviamente não são contornos de raio constante, porém o raio médio dá uma idéia da distância do contorno de integração à região da extremidade da trinca intensamente plastificada. De imediato se vê que a integral  $J$  varia de acordo com a posição do contorno. Nos menores níveis de carga onde o comportamento é basicamente elástico, o valor de  $J$  permanece praticamente constante, mas na carga mais elevada, correspondente ao fator de carga de 1,8, os valores extremos desviam-se aproximadamente 7% da média.

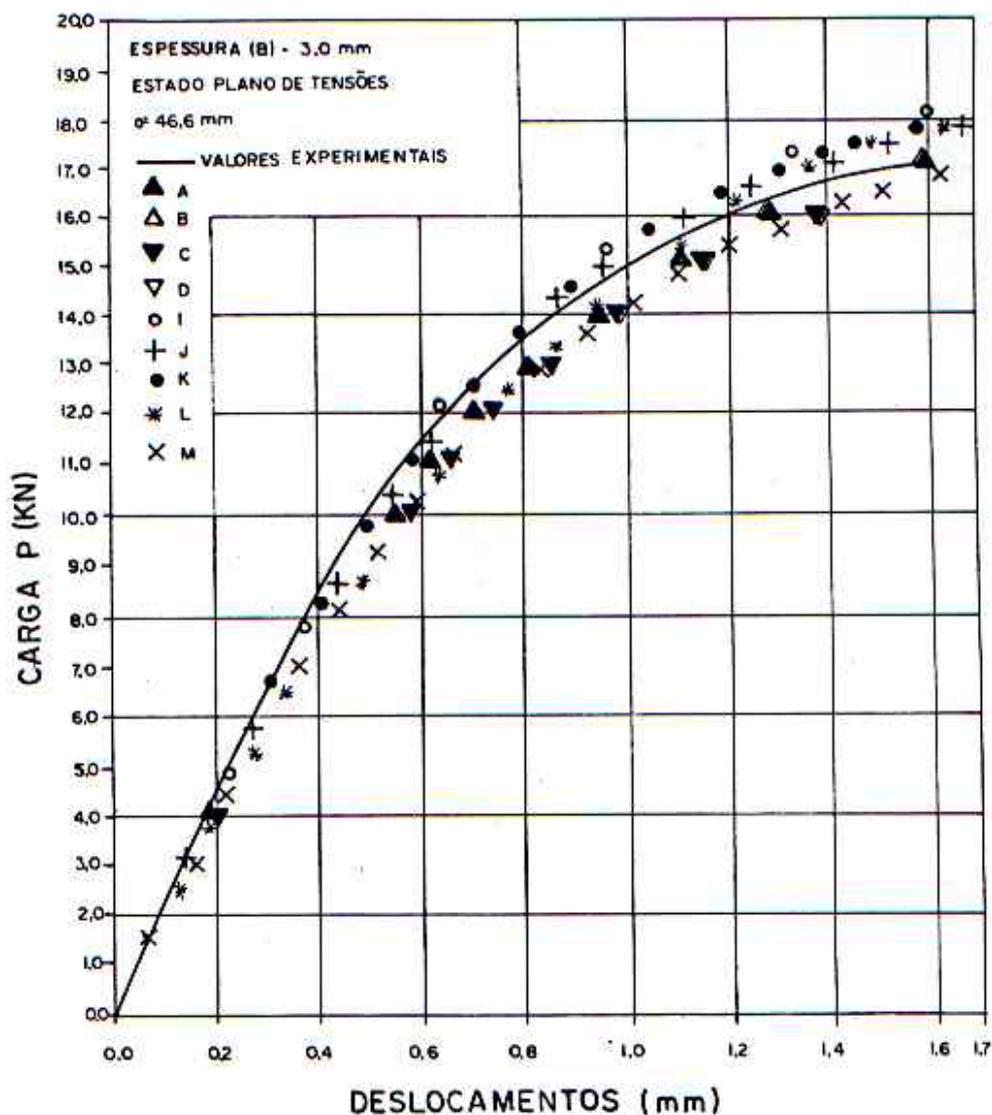


figura 6.30 - Cargas x deslocamentos para malhas com elementos diversos e valores experimentais.

Entretanto, para finalidades de engenharia, tal precisão é suficiente em vista das dificuldades experimentais associadas com a determinação de valores críticos de  $J$ . Deveria-se também chamar a atenção para o fato de que no fator de carga de 1,8, a deformação plástica é ampla e, como pode ser visto nas figuras 6.29 e 6.30 o corpo de prova está próximo ao colapso plástico.

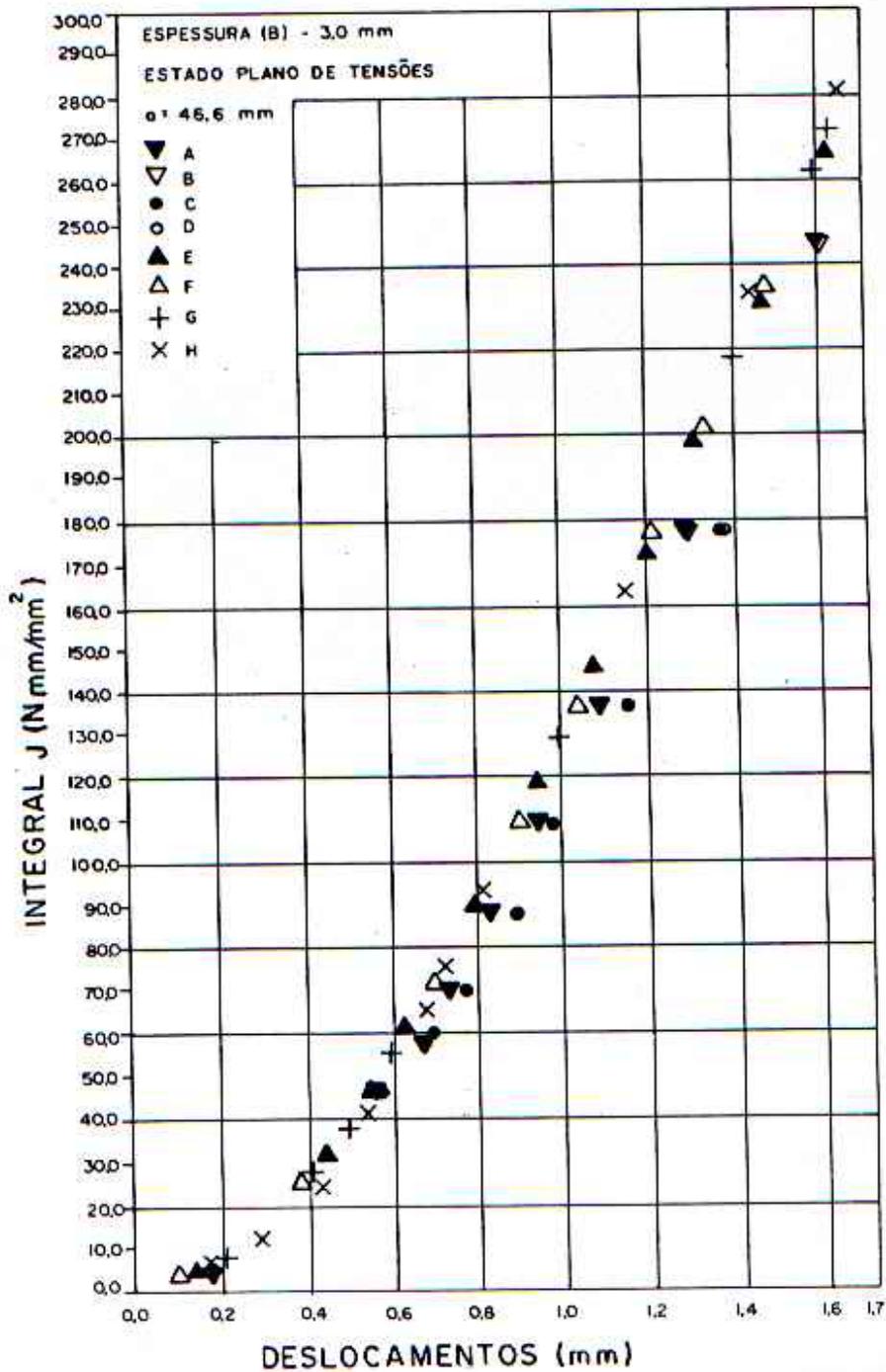


figura 5.31 - Valores da integral J x deslocamentos para malhas exclusivamente com elementos isoparametricos quadrilaterais.

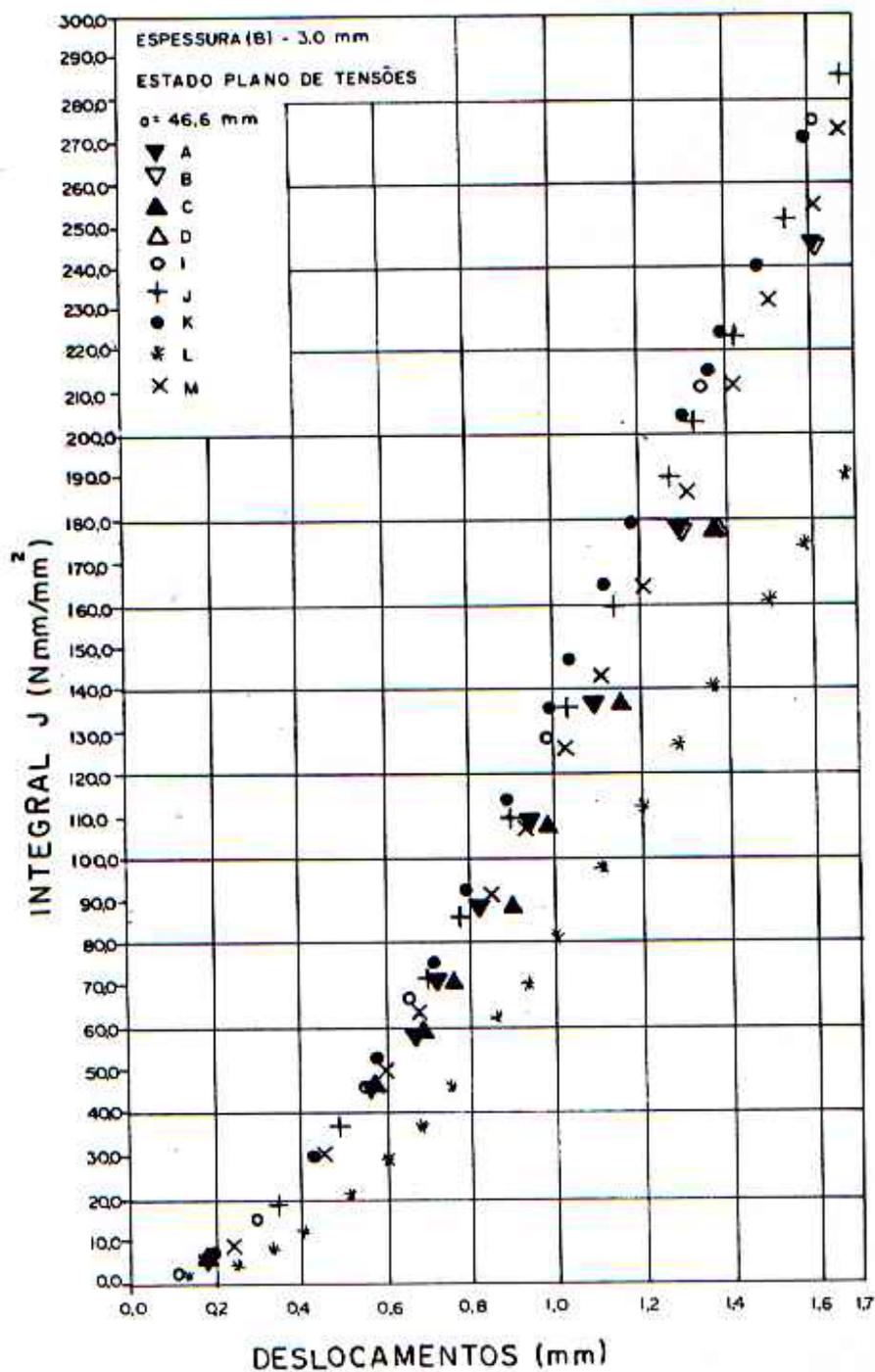


figura 6.32 - Valores da integral J x deslocamentos para malhas com elementos diversos.

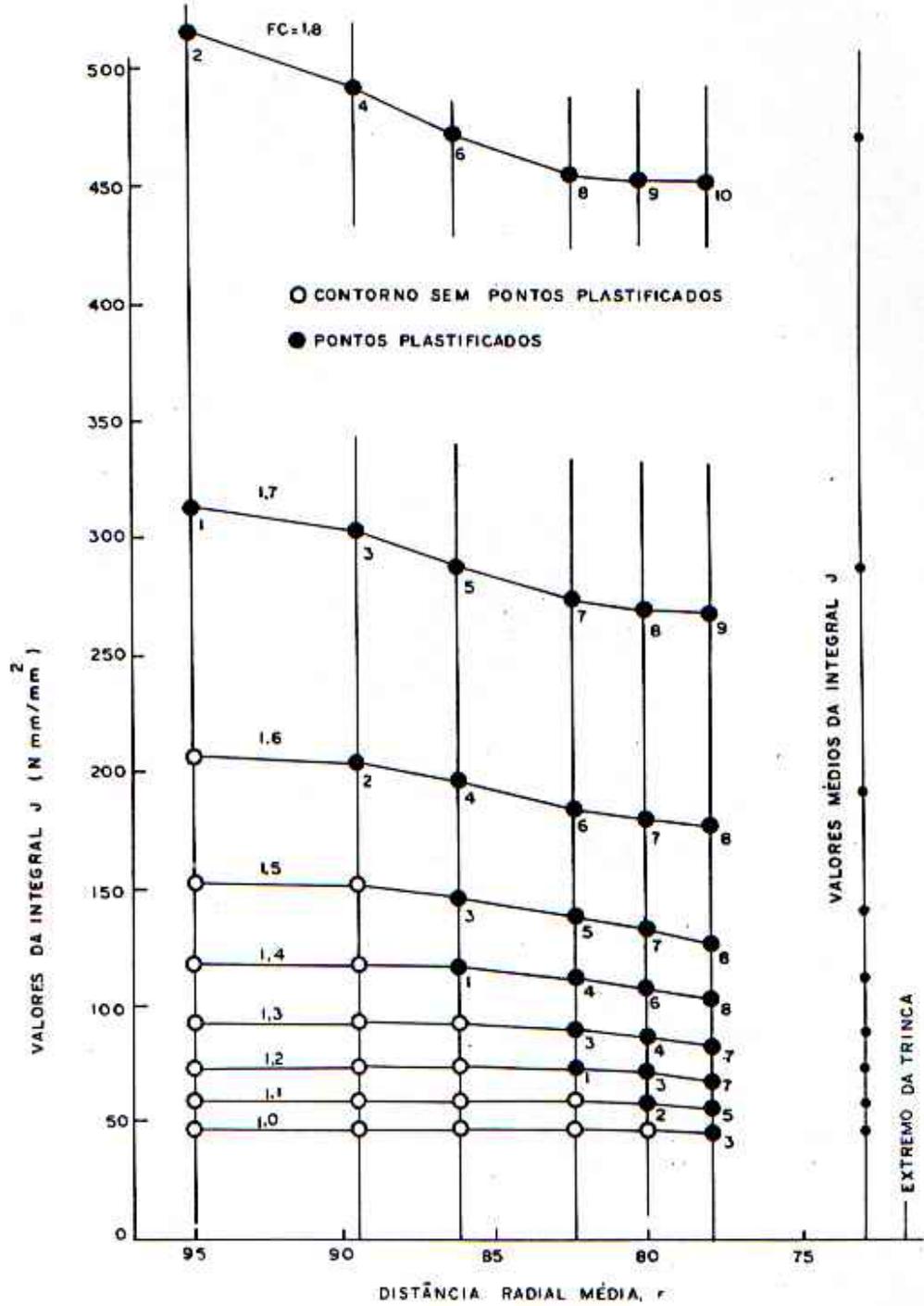


figura 5.33 - Valores da integral J x distância à extremidade da trinca para a malha com furo modelado e algoritmo da rigidez tangencial.



medidos em A na figura. A relação  $a/W$  adotada foi a padrão, cujo valor é 0,5. Este corpo de prova também foi apresentado na Segunda Conferência Internacional sobre Métodos Numéricos em Mecânica de Fraturas, através de várias análises numéricas efetuadas por seus participantes.

As propriedades dos materiais são mostradas na figura 6.35.

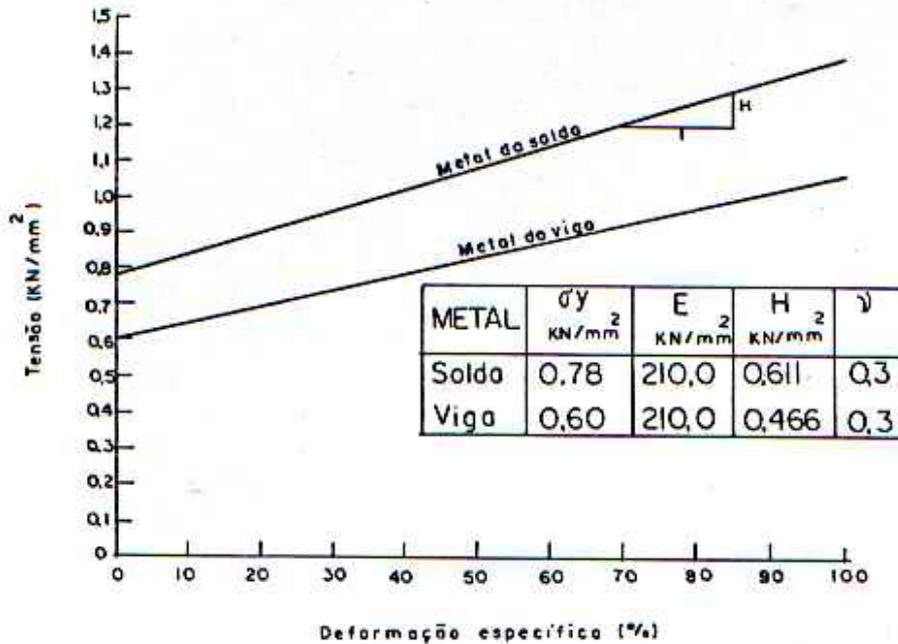


figura 6.35 - Gráfico tensão x deformação para os materiais do corpo de prova da figura 6.34.

Apesar das zonas plastificadas não terem sido observadas experimentalmente, é de considerável interesse comparar as diferentes avaliações numéricas, especialmente em um problema envolvendo uma fronteira entre materiais diferentes.

Os corpos de prova foram carregados experimentalmente por um controle de carga e da curva experimental carga versus deslocamento do ponto de carga foram obtidos os valores de  $J$ , através da equação de Merkle e Corten, citados por BLEACKLEY e

LUXMOORE.

A presente análise é comparada com seis contribuições apresentadas por Bleackley e Luxmoore. Destas, quatro foram obtidas usando o algoritmo da rigidez tangencial no processo de análise e as duas restantes o da rigidez inicial. A teoria das pequenas deformações incrementais foi empregada em todas as contribuições. Quatro delas empregaram elementos isoparamétricos de oito nós e as restantes triângulos de deformação constantes com três nós. Em todas as análises efetuadas foi assumido estado plano de deformações. Os detalhes numéricos das seis contribuições citadas estão listados na tabela 6.3. As duas primeiras soluções (A e B) apresentadas na tabela 6.3 e também nos gráficos adiante dizem respeito às análises efetuadas no presente trabalho.

*Tabela 6.3 - Características das malhas, elementos e análises efetuadas*

SOLUÇÃO	ALGOR.	ELEM	NÚM. DE ELEM.	GRAU LIB.
A	RIG.	ISO	40	287
	TAN.	8		
B	RIG.	ISO	40	287
	INI.	8		
C	RIG.	ISO	52	418
	TAN.	8		
D	RIG.	ISO	60	390
	INI.	8		
E	RIG.	ISO	52	366
	TAN.	8		
F	RIG.	ISO	56	394
	INI.	8		
G	RIG.	$\Delta$ 3 NÓS	320	364
	TAN.	D. CONS.		
H	RIG.	$\Delta$ 3 NÓS	300	354
	TAN.	D. CONS.		

Na presente avaliação numérica, devido a existência de simetria, somente a metade do corpo de prova foi analisada, com os elementos arranjados para se ajustarem à linha de

fusão. Realizou-se uma simulação com o algoritmo da rigidez inicial e outra com o da rigidez tangencial. A malha empregada é mostrada na figura 6.36; as linhas tracejadas indicam os contornos para o cômputo da integral J.

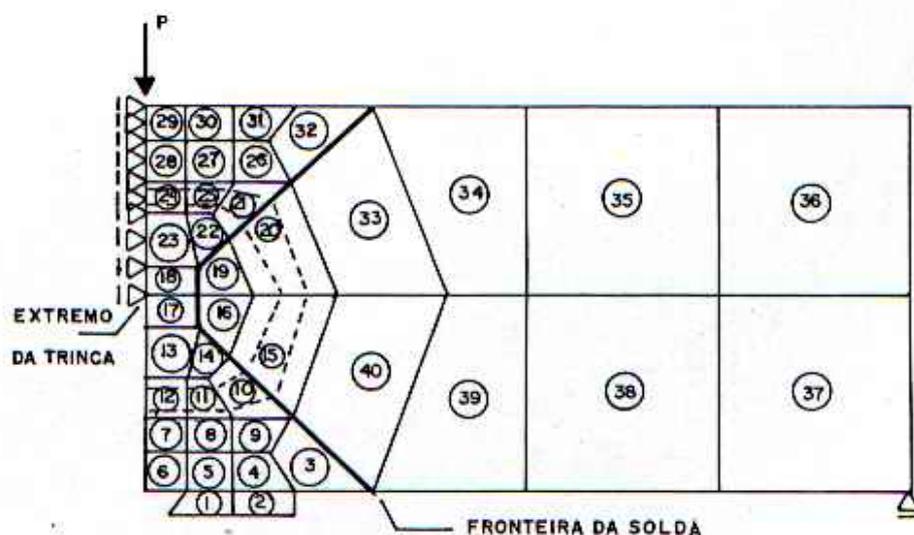


figura 6.36 - Malha empregada para a análise do corpo de prova da figura 6.34.

Nas curvas numéricas carga/deslocamento, figuras 6.37 e 6.38, os trechos lineares, embora em modesta concordância entre si, divergem dos resultados experimentais. Isto pode estar ocorrendo porque o corpo de prova não pode ser representado por uma restrição de deformação plana e deveria ser representado por um modelo tridimensional. A variação máxima entre os resultados numéricos está em aproximadamente 10%.

É interessante notar que as duas contribuições que usam o triângulo de deformação constante dão os resultados mais rígidos tanto na região linear como na não linear, mostrando as maiores discrepâncias em relação aos trechos lineares.

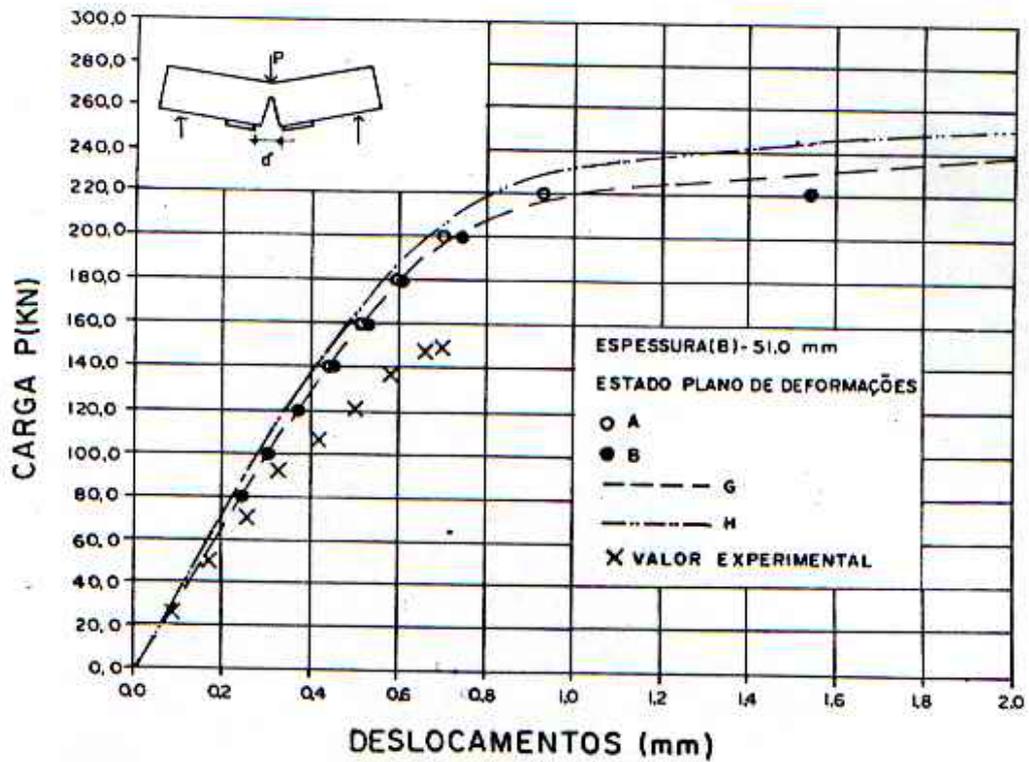


figura 6.37 - Carga x deslocamentos - isoparamétricos e experimental.

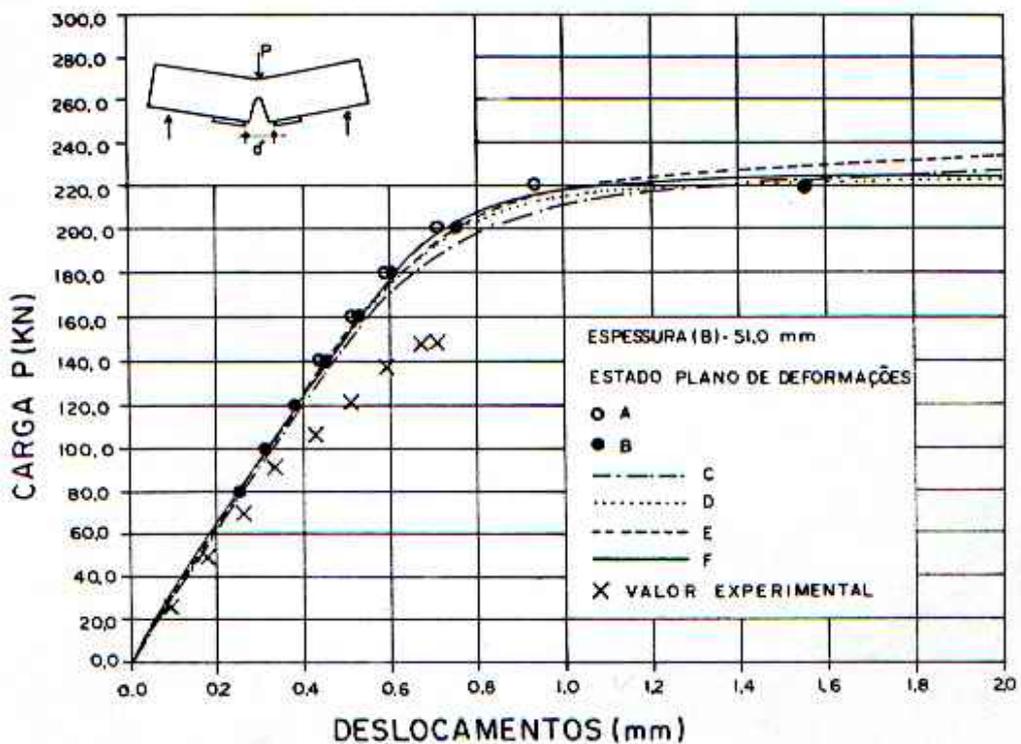


figura 6.38 - Cargas x deslocamentos - elementos diversos e experimental.

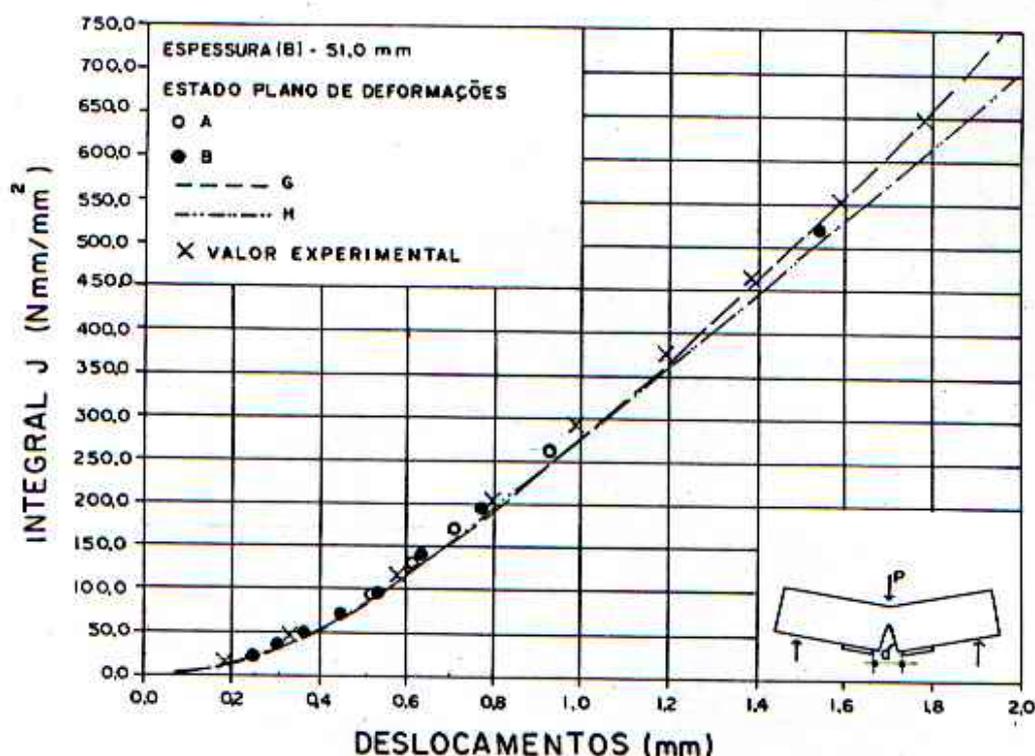


figura 6.39 - Valores da integral J x deslocamentos para malhas exclusivamente com elementos isoparamétricos quadrilaterais e valores experimentais.

Isto pode ser devido à tendência destes elementos triangulares apresentarem um comportamento super rígido em problemas de flexão. Contudo, a diferença entre estas duas soluções e os outros resultados numéricos é menor que a discrepância com os resultados experimentais.

As figuras 6.39 e 6.40 mostram os valores de J em função dos deslocamentos. Também é mostrada J obtida da curva carga/deslocamento experimental.

Infelizmente, durante os testes experimentais o corpo de prova rompeu, obtendo-se uns poucos valores para J. Contudo, com o que se obteve, existe uma boa correlação entre todos os resultados numéricos e o experimental. Na região plástica, as duas soluções usando os triângulos de deformação constante (G e

H) dão significativamente valores maiores de  $J$ , como já era esperado.

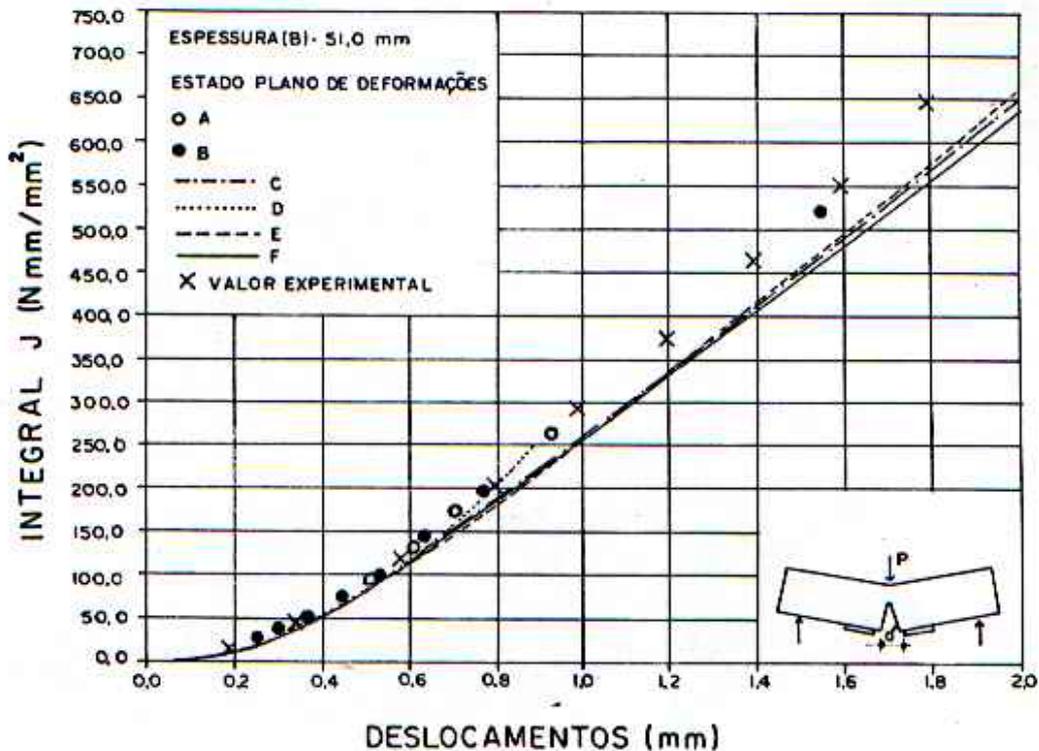


figura 6.40 - Valores da integral  $J$  x deslocamentos para malhas com elementos diversos e valores experimentais.

Entretanto, a solução E, a que mais se aproxima dos resultados obtidos no presente trabalho, se prolongada, pareceria indicar ainda maiores valores de  $J$ . Contudo a máxima diferença entre estas curvas é de 15%.

#### 6.2.5. Análise de Trincas em Corpos Sujeitos a Carregamentos Biaxiais.

Atualmente uma das principais correntes de estudos de fraturas envolve a determinação de um fator de intensidade de

tensão,  $K$ ; um parâmetro que auxilia a definir o campo de tensões em frente da extremidade de uma trinca. Esta abordagem tem sido de aceitação universal para trincas em corpos que se deformam elasticamente e parece ser particularmente útil no projeto de estruturas contendo descontinuidades geométricas.

Para situações pós-escoamento, além dos processos envolvendo integrais, tem sido usado o método do CTOD. Este é especialmente valioso no campo experimental, uma vez que o deslocamento é uma função do comportamento elástico, deformação plástica e trabalho de endurecimento; características do material em estudo.

Atualmente esta técnica tem sido também aplicada a pré-escoamento.

A maioria dos trabalhos publicados é concentrada no estudo de trincas em um sistema de tensão uniaxial onde o plano da trinca é perpendicular à direção da tensão de tração aplicada  $\sigma_p$ , figura 6.41.

É considerado que a força de tração aplicada na direção perpendicular à linha de avanço da trinca  $\sigma_p$  e  $\sigma_q$  não terão efeito algum sobre as tensões normais ao plano da trinca na zona da sua extremidade. Para um contínuo elástico isto estaria correto, mas para materiais reais um sistema de tensões biaxial induzirá um estado diferente na extremidade da trinca, comparado à força aplicada uniaxialmente. Infelizmente quase nenhum trabalho foi publicado a respeito do efeito de sistemas de tensões biaxial sobre os  $K_I$  e deslocamentos de abertura de trincas para um material elastoplástico.

Em componentes de Engenharia, trincas, entalhes, etc., são invariavelmente localizados em um campo de deformações multiaxiais e tais descontinuidades geométricas conduzem a rupturas por fadiga.

O presente estudo apoiado em pesquisas de MILLER e KFOURI é uma tentativa de entender o crescimento de trincas por fadiga em um campo de tensão-deformação biaxial de um material elastoplástico usando um programa de elementos finitos. O

programa de Elementos Finitos usado por Miller e Kfourri foi desenvolvido para o computador Atlas II (TITAN) da Universidade de Cambridge. Ele baseia-se nos elementos mais simples da família dos isoparamétricos quadrilaterais, os quais são capazes de admitir alguma variação linear de deformação no interior dos elementos. Para este programa foi adotado o critério de von Mises.

O sistema de tensões biaxial analisado neste exemplo é mostrado de maneira genérica na figura 6.41. Os três casos de carga considerados são:

- (A)  $\sigma_p$  positiva e  $\sigma_q = 0$
- (B)  $\sigma_p$  positiva e  $\sigma_q = \sigma_p$
- (C)  $\sigma_p$  positiva e  $\sigma_q = -\sigma_p$

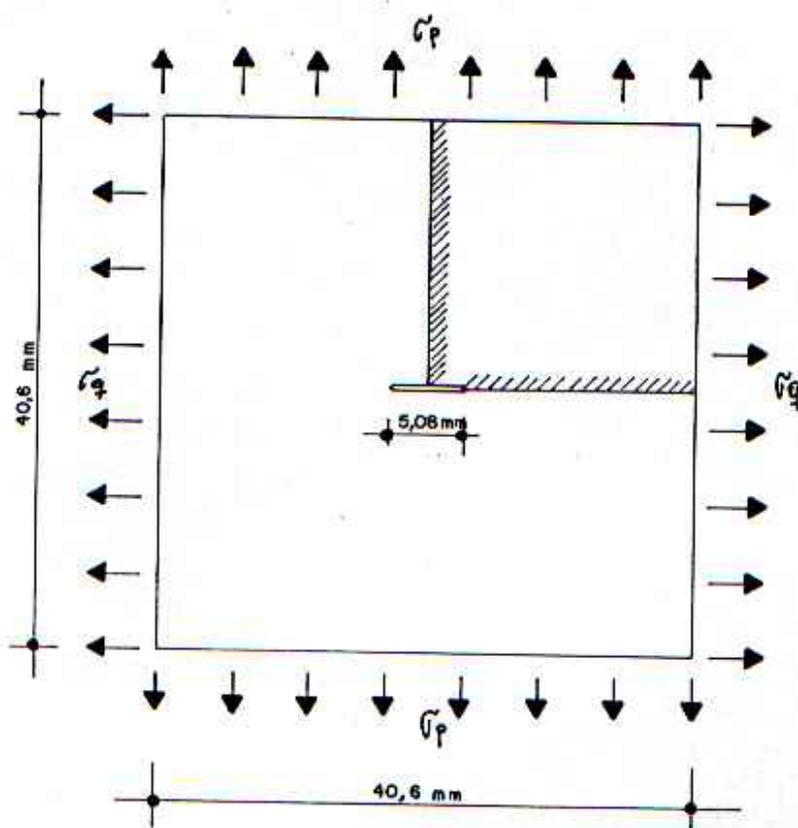


figura 6.41 - Placa sujeita a carregamento biaxial contendo uma trinca centrada.

Em virtude da simetria do sistema, somente um quadrante se torna necessário para a análise. Miller e Kfourri utilizaram a malha de 99 elementos e 121 nós mostrada na figura 6.42. A região de maior interesse é obviamente o segmento nas proximidades da trinca. Este se mostra ampliado na figura 6.43. Como se pode notar, esta idealização apresenta elementos muito pequenos se comparados com a malha da figura 6.44 utilizada na análise de comparação do presente trabalho. A seção ampliada correspondente encontra-se na figura 6.45.

A origem do sistema de coordenadas esta sobre o centro da trinca e assim a tensão normal à direção  $x$ ,  $\sigma_y$ , será calculada na região próxima a  $x = 2,54$  mm. O comportamento do material da placa é representado graficamente na figura 6.46. O módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , é tomado como  $206,85 \text{ KN/mm}^2$  e o módulo plástico,  $H$ , igual a  $965,30 \text{ N/mm}^2$ . O material escoou em  $306,26 \text{ N/mm}^2$ . As tensões são calculadas considerando-se a condição de estado plano de deformações e o coeficiente de Poisson é  $0,3$ .

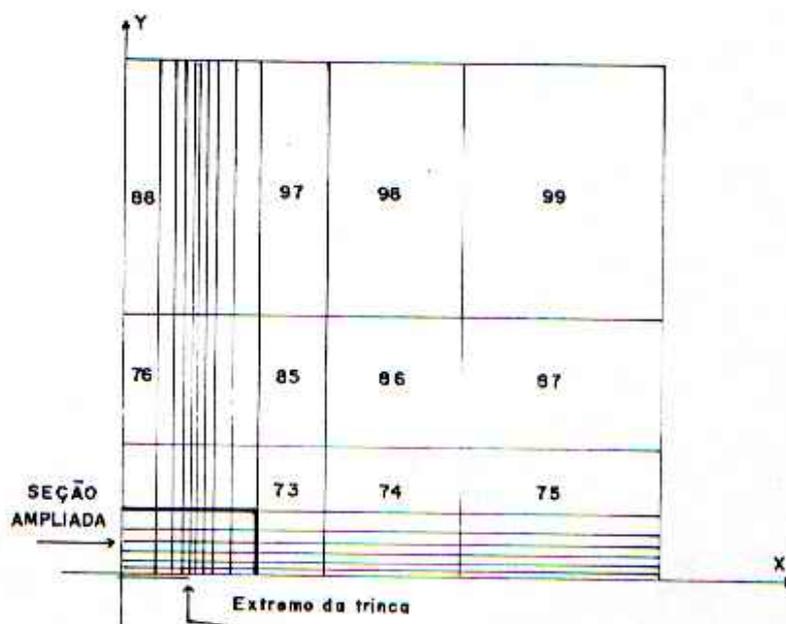


figura 6.42 - Malha de elementos de 4 nós utilizada por Miller e Kfourri para a análise.

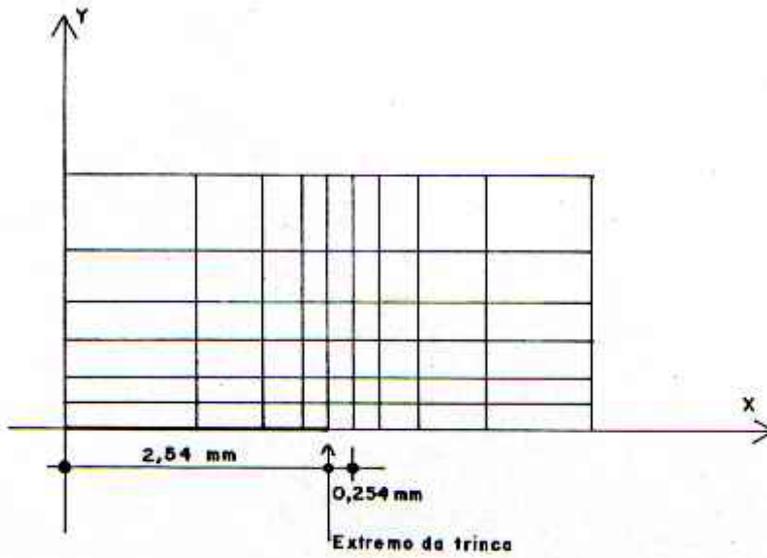


figura 6.43 - Seção ampliada da malha da figura anterior.

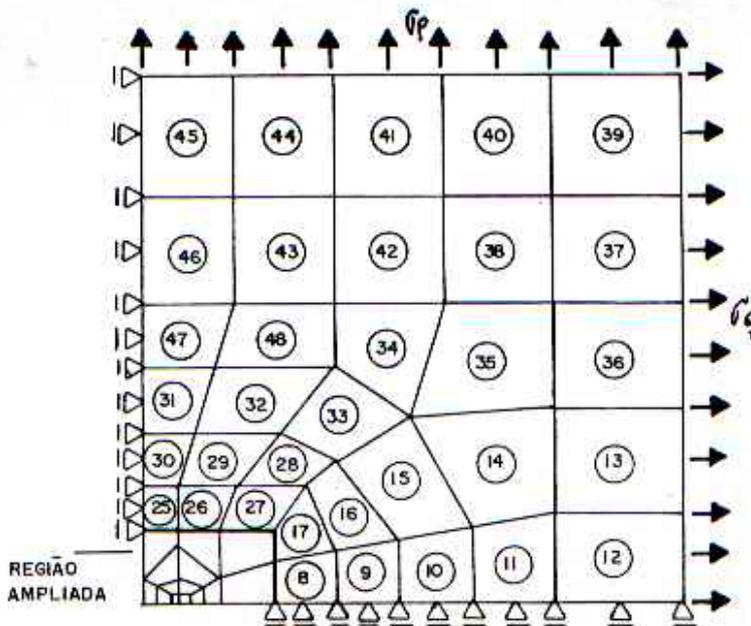


figura 6.44 - Malha empregada para as análises do presente trabalho.

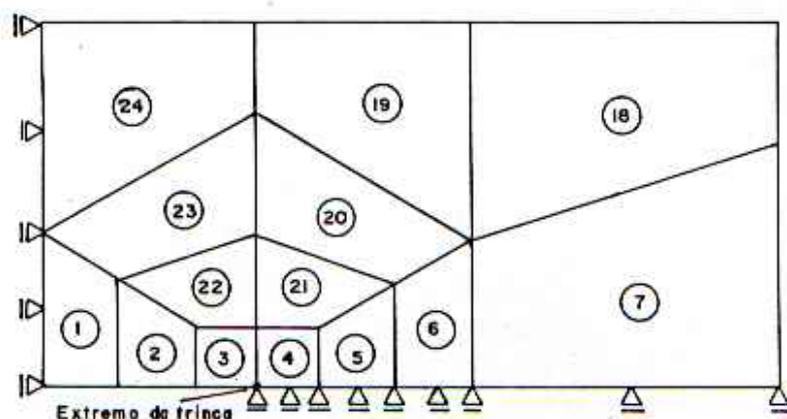


figura 6.45 - Seção ampliada da malha da figura anterior.

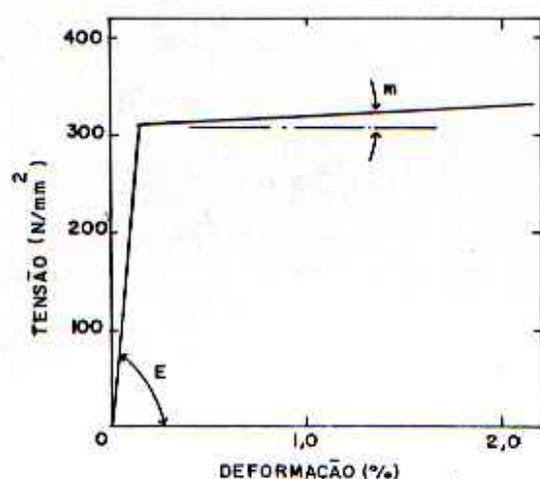


figura 6.46 - Curva tensão x deformação para o material da placa da figura 6.41

Os resultados são a seguir representados de maneira comparativa e em duas etapas. Primeiro a análise elástica e depois a elastoplástica. As tensões de principal interesse na zona da extremidade da trinca são  $\sigma_y$  e  $\sigma_x$  e têm direções paralelas a  $\sigma_p$  e  $\sigma_q$  respectivamente.

A Análise Elástica.

A relação entre tensões de tração  $\sigma_y/\sigma_p$  é representada na figura 6.47.

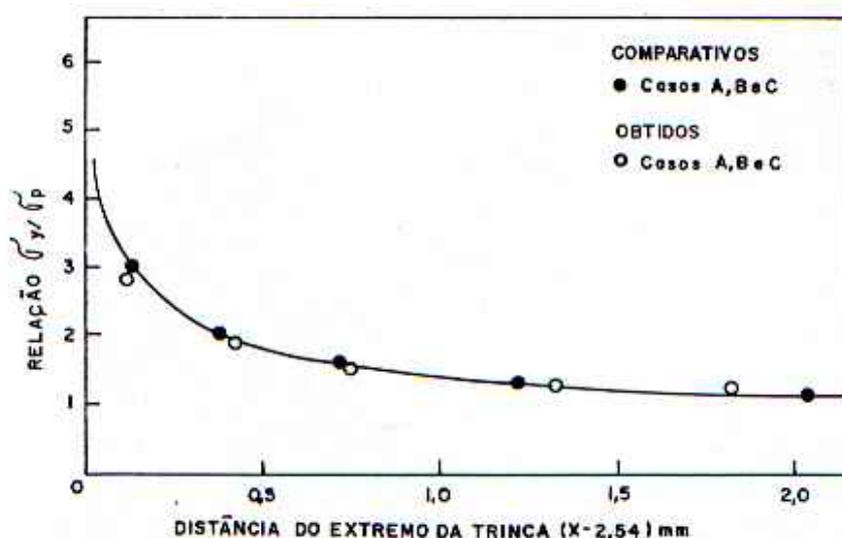


figura 6.47 - Gráfico da relação  $\sigma_y/\sigma_p$  x distância do extremo da trinca.

Uma vez que o centro da trinca tem coordenadas  $x = 0$  e  $y = 0$  e que meio comprimento da trinca mede 2,54 mm, é conveniente descrever a distância em frente à extremidade da trinca,  $l$ , em unidade de  $(x-2,54)$  mm.

Resultados idênticos são obtidos para todos os três casos quando na análise assume-se comportamento elástico. Obviamente a singularidade da extremidade da trinca não é uma situação real, visto que ocorrerá escoamento localizado em todos os níveis de tensão aplicada  $\sigma_p$ . RICE demonstrou que o máximo valor de  $\sigma_y$  para condições de estado plano de deformações será  $(2+\pi)\tau_y$ , que neste caso é  $920 \text{ N/mm}^2$ . Aqui  $\tau_y$  é a tensão de escoamento em corte do material. A tensão na extremidade da trinca é assim uma função de  $\sigma_p$ . É interessante notar que  $\sigma_x$  é diferente para diferentes valores de  $\sigma_p$ , mas não é um fator relevante na Mecânica Elástico-Linear de Fraturas.

O fator de intensidade de tensão adimensional sugerido,  $K_I^*$ , pode ser calculado dos dados mostrados na figura 6.47 como

$$K_I^* \sigma_p a^{1/2} = \sigma_y (2 \pi l)^{1/2}, \text{ onde } l = (x-2,54) \text{ mm.}$$

Os valores de  $K_I^*$  são mostrados na figura 6.48 e são idênticos para todos os três casos.

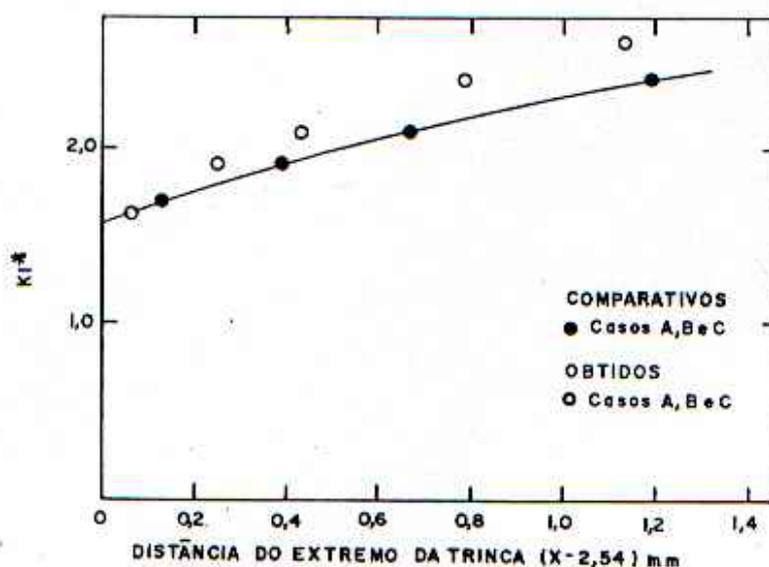


figura 6.48 - Gráfico  $K_I^*$  x distância da extremidade da trinca.

A determinação de deslocamentos de abertura da trinca novamente produz resultados idênticos para os três casos. Observa-se este fato através da figura 6.49, onde  $\Delta = v/\sigma_p$  e  $d$  é o afastamento à extremidade da trinca. Aqui convém salientar que  $v$  é o deslocamento vertical da face da trinca para os vários valores de  $d$ , onde  $d = (2,54 - x)$  mm para  $2,54 \geq d \geq 0$ .

Agora o valor de  $K_I^*$  pode ser também determinado considerando os dados de COD da figura 6.49 e a equação obtida por Chan, Tuba e Wilson, citados por MILLER e KFOURI

$$K_I^* \sigma_p a^{1/2} = \frac{E (2 \pi)^{1/2} v}{4 (1 - \nu^2) d^{1/2}}$$

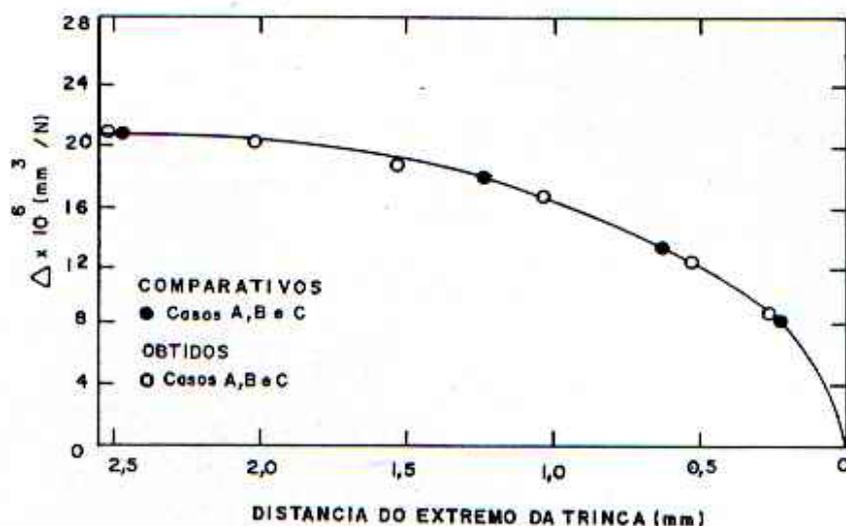


figura 6.49 - Gráfico  $\Delta \times$  distância do extremo da trinca.

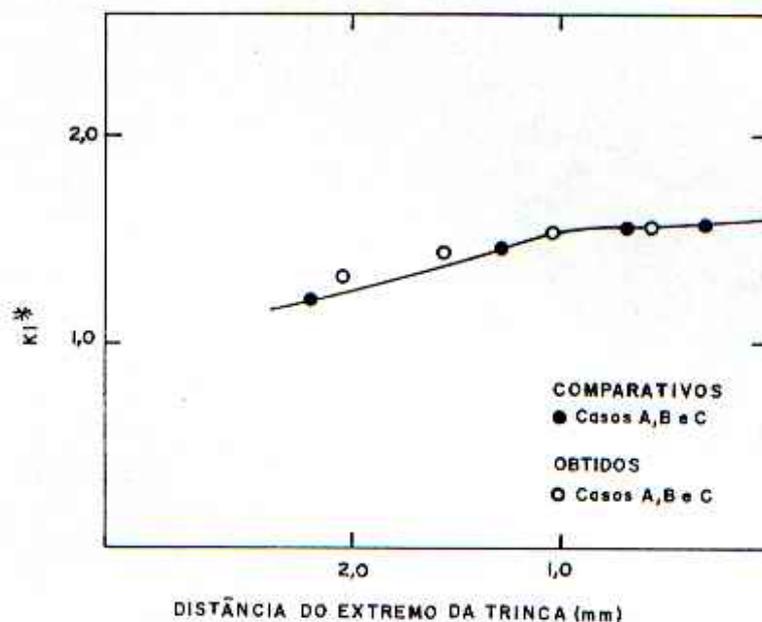


figura 6.50 - Gráfico  $K_I^*$  x distância da extremidade da trinca.

Os valores de  $K_I^*$  obtidos são assim representados na figura 6.50 e são idênticos para todos os casos abordados quando aceita-se o comportamento elástico.

### A Análise Elastoplástica

A figura 6.51 ilustra a máxima relação de deslocamento,  $\delta$ , da trinca para os três casos, isto é,  $v/a$  em  $x = 0$ . Soluções diferentes ocorrem em valores de tensão aplicadas  $\sigma_p > 100 \text{ N/mm}^2$ , com a separação máxima ocorrendo no caso de carregamento C.

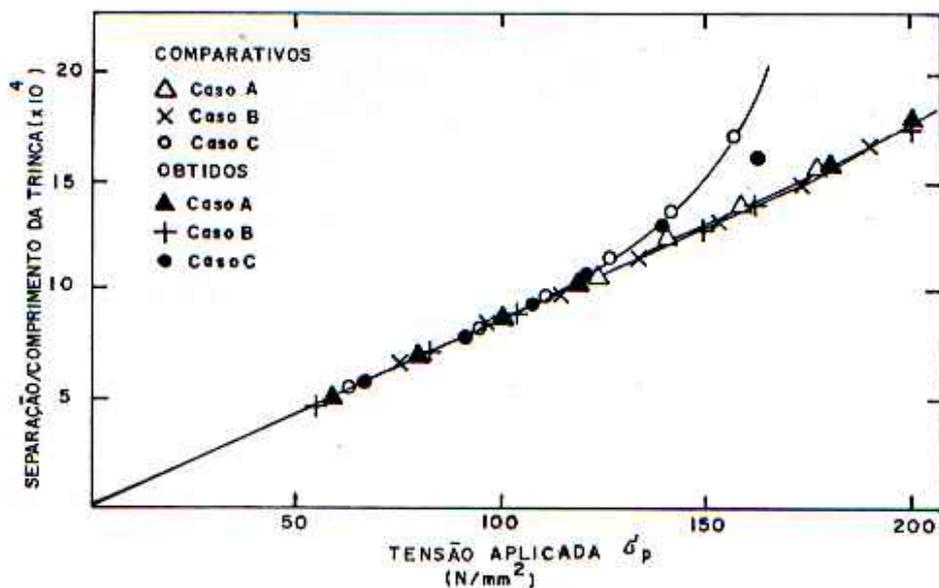


figura 6.51 - Gráfico separação/comprimento da trinca  $\times$  tensão aplicada  $\sigma_p$ .

O gráfico de  $\Delta$ , figura 6.52, demonstra que o modo de carregamento influencia os valores de COD e novamente percebe-se que o caso C é substancialmente diferente dos casos A e B. As curvas não parecem convergir para a origem, indicando uma singularidade de deformação na extremidade da trinca. Isto concorda com os trabalhos de RICE e de Rice e Johnson, citados por MILLER e KFOURI.

Se  $K_I^*$  for calculado dos dados da figura 6.52, os três diferentes casos produzem diferentes resultados. Estes resultados são mostrados na figura 6.53. Finalmente a figura 6.54 mostra a variação da tensão  $\sigma_y$  a frente da extremidade da trinca para os três casos de carga.

As análises mostram que no estado elástico a tensão de tração normal  $\sigma_y$  em frente e na vizinhança da extremidade da trinca é independente do modo de carregamento biaxial.

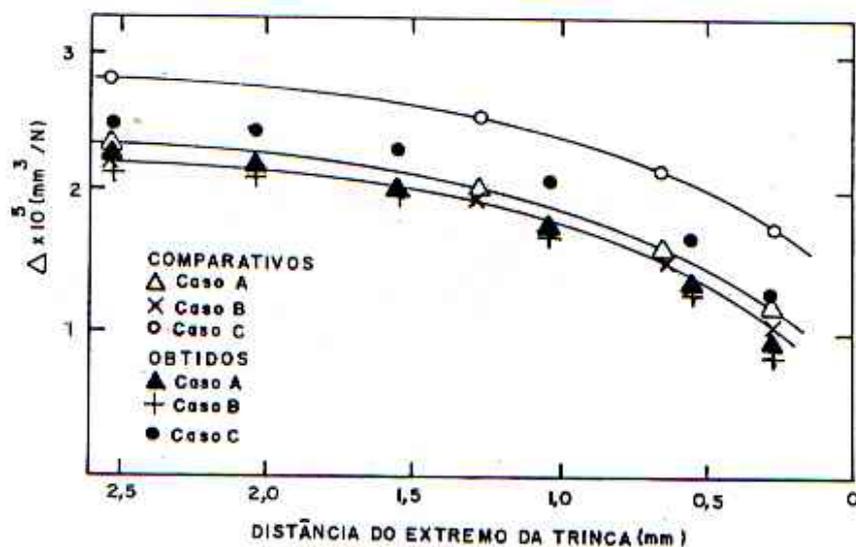


figura 6.52 - Gráfico  $\Delta \times$  distância do extremo da trinca.

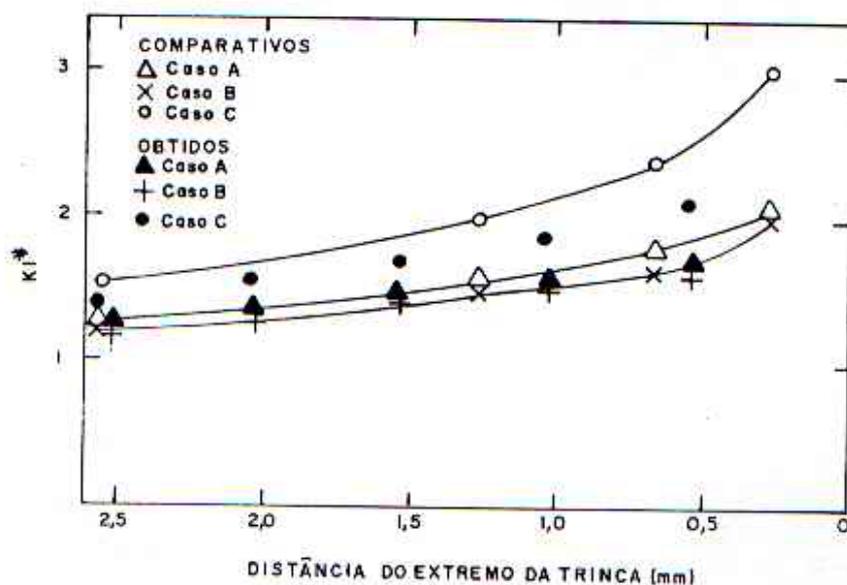


figura 6.53 - Gráfico  $K_I^*$  x distância da extremidade da trinca.

Uma afirmação similar pode ser aplicada aos deslocamentos de abertura da trinca. Tanto  $\sigma_y$  como COD são dependentes somente da tensão normal de tração aplicada  $\sigma_p$ . Para uma dada geometria, o COD e  $\sigma_y$  estão relacionados linearmente um com o outro e ao fator de intensidade de tensão de Irwin,  $K_I$ . Assim, estimativas de  $K_I$  podem ser convenientemente obtidas pelo Método dos Elementos Finitos usando as tensões ou deslocamentos de trinca. A convergência de  $K_I^*$ , isto é,  $(\sigma_p a^{1/2})^{-1} K_I$ , obtida pela análise de elementos finitos usando a tensão  $\sigma_y$  e métodos de COD foram aproximadamente 1,65, figura 6.48 e 1,68, figura 6.50 e parecem de acordo com o valor de  $\pi^{1/2}$ , isto é, 1,77, dado por Westergaard, citado por MILLER e KFOURI, para a configuração de Inglis em um plano infinito sob uma tensão de tração uniforme e afastada.

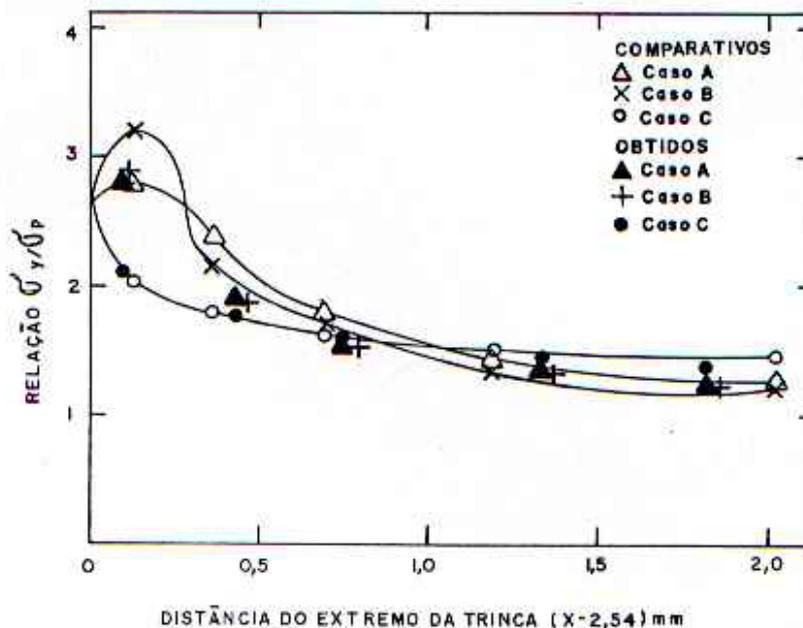


figura 6.54 - Gráfico da relação  $\sigma_y/\sigma_p$  x distância do extremo da trinca.

Quando  $\sigma_p$  é aumentada, a plastificação não é mais confinada a uma região muito pequena próxima à extremidade da trinca e são formadas as familiares "orelhas de coelho". Já foi

proposto que este fenômeno é acompanhado de um "arredondamento" na extremidade da trinca segundo RICE e Rice e Johnson, citados por MILLER e KFOURI. O valor da tensão de tração  $\sigma_x$  no plano da trinca diminui a zero na superfície da trinca e portanto, em condições de deformação plana e material seguindo o critério de von Mises, a tensão de separação,  $\sigma_y$ , na extremidade da trinca, é igual a  $353 \text{ N/mm}^2$ , ou seja,  $2/(3^{1/2})$  vezes a tensão de escoamento do material. Agora, para qualquer modo de carregamento biaxial, mas com geometria e  $\sigma_p$  constantes, não mais existe uma única relação entre  $\sigma_p$ , os CODs e  $\sigma_y$ . Não é possível descrever a situação adequadamente com um simples parâmetro sem especificar a relação do modo de carregamento biaxial  $r$ , isto é,  $\sigma_q/\sigma_p$ .

A razão para a perda da relação única reside em que o critério de escoamento mais comumente aplicado, von Mises ou Tresca, determina limites no tensor desviador de tensões que o material pode manter mas não limita as tensões diretas como tal. O componente hidrostático de tensões não exerce papel algum no processo de escoamento e desta maneira é permitido "flutuar", sendo seu valor determinado por outros fatores tais como condições de equilíbrio e contorno. Agora as tensões diretas devem ser afetadas pelo modo de carregamento, uma vez que elas são a soma dos componentes hidrostático e desviador de tensão. Assim, no estado elástico,  $\sigma_q$  afeta  $\sigma_x$  mas não tem efeito sobre  $\sigma_y$ , ao passo que na situação elastoplástica  $\sigma_q$ , por afetar  $\sigma_x$ , altera os componentes hidrostático e desviador de tensões a frente da trinca. Portanto, em situação elastoplástica, um sistema de tensões biaxial,  $\sigma_q$  afeta tanto a extensão do escoamento quanto a  $\sigma_y$ , com a extensão do efeito sendo dependente do modo de carregamento.

Os diferentes picos de tensão para os diferentes modos de carregamento biaxial também são explicados pelos diferentes componentes hidrostáticos de tensão na região da extremidade da trinca. O maior pico corresponde ao caso B, quando  $r = 1$ , dando o valor mais elevado de  $\sigma_y/\sigma_p$  e a menor

plastificação perto da extremidade da trinca. Isto não é de surpreender, uma vez que este modo de carregamento resulta no maior componente hidrostático e no menor desviador de tensões. O caso C, correspondendo a  $r = -1$ , resulta nos menores valores de  $\sigma_y/\sigma_p$  perto da extremidade da trinca, acompanhado de aparente ausência total de pico. Este modo representa o outro extremo, o qual minimiza o componente hidrostático e maximiza o desviador de tensões. O modo uniaxial ( $r = 0$ ) ocupa uma posição intermediária.

Os fatores que provavelmente afetam a propagação de trincas no estado elastoplástico são a tensão de separação, alguma distância a frente da extremidade da trinca, a intensidade da tensão de corte na extremidade da trinca e a extensão da região plástica. Os resultados das análises anteriores sugerem que ensaios deveriam ser realizados usando os casos B e C para determinar quais destes dois modos de carregamento é dominante na propagação de trincas.

## CONCLUSÕES

Iniciar uma nova linha de pesquisas no CPGEC/UFRGS e implementar e validar um programa de elementos finitos capaz de analisar trincas em materiais de comportamento elastoplástico foram as intenções apregoadas por ocasião do início deste trabalho. Quanto à primeira tem-se de imediato a consciência de cumprimento, uma vez que este e mais dois trabalhos na mesma área somam o que se poderia chamar de um consolidado início de linha de pesquisa. No que diz respeito ao segundo, este um tanto mais específico, seguem-se alguns comentários conclusivos bastante pertinentes.

O primeiro programa deste trabalho correspondente à análise elástica de estruturas planas, determina por vários métodos de cálculo o fator de intensidade de tensão em materiais no regime elástico usando para isto o método dos elementos finitos e as técnicas mais consagradas de análise numérica de problemas de fratura. Dentre estas, a abordagem que mostrou maior grau de precisão foi a que se vale de métodos energéticos (taxa de liberação de energia de deformação e extensão virtual da trinca), seguidas do processo da integral  $J$  de Rice e da extrapolação de deslocamentos (com uso de elementos especiais em malha apropriada) e da extrapolação de deslocamentos convencional; todas em ordem decrescente.

O segundo programa, abrangendo o campo elastoplástico e empregando a integral  $J$ , mostrou-se quando comparado a resultados de outros trabalhos bem conceituados, excelente aproximação tanto em relação a dados numéricos quanto experimentais, apresentando as maiores divergências em níveis de carregamentos tidos como elevados e próximos ao colapso plástico. Observações feitas em relação à posição do contorno

da integral envolvida permitem concluir que em níveis de carga acima do limite de elasticidade porém consideravelmente abaixo do colapso, o valor de  $J$  permanece praticamente constante e em níveis pré-colapso, isto é, numa situação limite, os valores extremos desviam-se entre 5-7% da média dos contornos aplicados. Apesar deste desvio, esta precisão pode ser considerada adequada em se tratando de engenharia, haja visto que a determinação de  $J$  crítica por métodos experimentais apresenta algumas dificuldades.

As análises via elementos finitos efetuadas na intenção de caracterizar o comportamento de fratura simulando ensaios clássicos como o corpo de prova de flexão em três pontos e o corpo de prova de tensão compacto demonstraram a validade e eficácia dos modelos desenvolvidos na caracterização deste comportamento. Assim, os programas computacionais implementados constituem ferramentas úteis na análise de estruturas com trincas pré-existentes nos domínios de projeto e verificação bem como em pesquisa.

Os algoritmos implementados para a solução do problema não-linear permitiram reproduzir a resposta das simulações sem grandes desvios dos resultados de comparação, tanto numéricos como experimentais. Os resultados para os algoritmos da rigidez tangente e da rigidez inicial são bastante parecidos e em alguns casos coincidentes. As duas outras versões de algoritmo de solução disponíveis (método da rigidez recalculada na primeira iteração de cada incremento de carga e método da rigidez recalculada na segunda iteração de cada incremento de carga) não foram empregadas, uma vez que na obtenção dos resultados de comparação os algoritmos utilizados foram os da rigidez tangencial e rigidez inicial. Além disso, trabalhos em análise não-linear anteriores a este já examinaram e testaram exaustivamente os quatro algoritmos. Para o presente trabalho o algoritmo da rigidez inicial apresentou um tempo total de processamento menor.

Cabe ainda mencionar algumas facilidades incluídas

nos programas implementados, tais como o tratamento de vários casos de carga isolada ou conjuntamente (carga de volume, carga de superfície e carga nodal), trabalhar com vários tipos de materiais (limitado ao número de elementos), opção de ordem de integração numérica (2 x 2 ou 3 x 3 pontos); para a análise elastoplástica além dos atributos mencionados, a escolha do algoritmo para a solução, número de incrementos de carga e iterações para cada incremento, parâmetros para a lei de endurecimento; se linear ou se representado por uma curva com n segmentos.

## SUGESTÕES

Para finalizar, algumas sugestões para próximos trabalhos. A forma de entrada de dados para os programas de análise é via editor de textos. A fim de facilitar e agilizar a utilização dos programas, sugere-se o desenvolvimento de um pequeno programa auxiliar que geraria arquivos com a organização adequada de dados, uma vez que a forma anterior obriga por vezes a consulta de um pequeno manual de utilização e alguma experiência por parte do usuário. Também seria interessante a implantação de uma rotina para a geração automática de malhas em geometrias de um mesmo problema. Poderia acontecer conforme descrito no decorrer do trabalho, como consequência direta da geração automática, a necessidade de empregar-se um número maior de elementos nas malhas. Neste caso, concomitantemente se faria necessária uma expansão nos programas a fim de suportarem mais de 50 elementos, valor a que os programas estão limitados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKIN, J.E. The generation of elements with singularities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.10, n.6, p.1249-1259, 1976.
- BARSOUM, R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.10, n.1, p.25-37, 1976.
- BENZLEY, S.E. Representation of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.8, n.3, p.537-545, 1974.
- BLEAKLEY, M.H., LUXMOORE, A.R. Comparison of finite element solution with analytical and experimental data for elastic-plastic cracked problems. *International Journal of Fracture*, v.22, p.15-39, 1983.
- CREUS, G.J. *Relações constitutivas elastoplásticas no caso multiaxial*. Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS. 1983. 33p. (Caderno Técnico, A-55)
- FAWKES, A.J., OWEN, D.R., LUXMOORE, A.R. An assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements. *Engineering Fracture Mechanics*, v.11, p.143-159, 1979.
- GREEN, A.E., ZERNA, W. *Theoretical elasticity*. 2.ed. Oxford: Clarendon Press, 1968. 454p.
- GROEHS, A.G., CREUS, G.J. Análise elastoplástica de estado plano de tensões utilizando elementos finitos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 4., 1977, Florianópolis. Anais... Florianópolis: ABCM, 1977. v.4, p.1479-1490.
- HELLEN, T.K. On the method of virtual crack extensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.9, n.1, p.187-207, 1975.
- HENSHELL, R.D., SHAW, K.G. Crack tip elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.9, n.3, p.495-507, 1975.

- HIBBITT, H.D. Some properties of singular isoparametric elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.11, n.1, p.180-184, 1987.
- HINTON, E. OWEN, D.R., *Finite element programming*. London: Academic Press, 1977. 305p.
- HUTCHINSON, J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.16, p.13-31, jan.1968.
- IRWIN, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, v.24, n.3, p.361-364, 1957.
- KANNINEN, M.F., POPELAR, C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. New York: Oxford University Press, 1985. 573p.
- LAWISCH, A. *Corrosão sob tensão do aço inoxidável em meios contendo cloretos*. Porto Alegre, 1990. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Materiais - UFRGS.
- LOEBER, J.F., SIH, G.C. Green's function for cracks in nonhomogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, v.34, p.240-243, 1967.
- MILLER, K.J., KFOURI, A.P. An elastic-plastic finite element analysis of crack tip fields under biaxial loading conditions. *International Journal of Fracture*, v.10, n.3, p.393-404, sept.1974.
- MUSKHELISHVILI, N.I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. 3.ed. rev. aum. Groningen-Holland: Nordhoff, 1953. 704p.
- OWEN, D.R.J., FAWKES, A.J. *Engineering fracture mechanics: numerical methods and applications*. Swansea: Peneridge Press, 1983. 305p.
- OWEN, D.R., HINTON, E. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea: Peneridge Press, 1980. 549p.
- PARKS, D.M. A stiffness derivative finite technique for determination of crack tip stress intensity factors. *International Journal of Fracture*, v.10, n.4, p.487-502, dec.1974.
- RICE, J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v.35, n.2, p.379-386, jun.1968.
- RICE, J.R., ROSENGREN, G.F. Plane strain deformation near a

- crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.16, p.1-12, jan.1968.
- SIH, G.C., RICE, J.R. The bending of plates of dissimilar materials with cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v.31, p477-482, 1964.
- TRACEY, D.M. Finite elements for determination of crack tips elastic stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics*, v.3, p.255-266, 1971.
- WILLIAMS, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, v.24, n.1, p.109-114, mar.1957.
- ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. 3.ed. London: McGraw-Hill, 1977. 787p.