

RUPTURA E EFEITO DE ESCALA EM MATERIAIS  
NÃO-HOMOGÊNEOS DE COMPORTAMENTO FRÁGIL

MARCELO MAIA ROCHA

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

Setembro de 1989

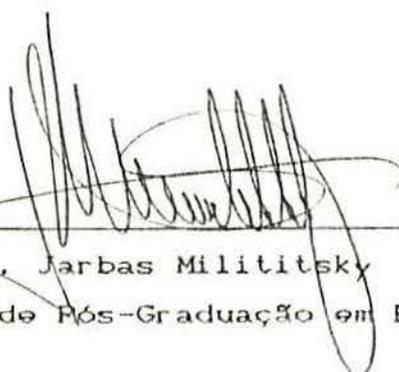
ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



---

Prof. Jorge Daniel Riera  
Orientador



---

Prof. Jarbas Milititsky  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Banca Examinadora

- Prof. Jorge Daniel Riera (Orientador)  
Ph.D. pela Princeton University
- Prof. Guillermo Juan Creus  
Dr.Sc. pela COPPE/RJ
- Prof. Ademar Gilberto Groehs  
Dr.Sc. pela COPPE/RJ
- Prof. Américo Campos Filho  
Dr.Sc. pela USP/SP

## AGRADECIMENTOS

Agradece-se a todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram com a realização deste trabalho.

Agradece-se especialmente:

Ao Professor Jorge Daniel Riera, pela sábia orientação e apoio irrestrito, técnico e pessoal, além da transmissão de valiosos princípios de conduta científica e humana.

Ao Professor Alberto Tamagna, pela orientação acadêmica na fase de créditos, e também por proporcionar acesso irrestrito a equipamentos computacionais que viabilizaram as simulações numéricas realizadas.

A todos os colegas, pela agradável convivência diária e pelo exemplar espírito de união.

A todos os Professores do CPGEC, pela formação acadêmica e também pelo apoio técnico sempre que se fez necessário.

A todos os Funcionários do CPGEC, pela boa vontade e prestatividade.

Agradece-se também ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e a CAPES - Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais

## ÍNDICE

LISTA DE SIMBOLOS.....	vii
RESUMO.....	ix
ABSTRACT.....	x
1 - INTRODUÇÃO.....	1
2 - FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ELÁSTICA LINEAR DAS FRATURAS..	5
2.1 - Origens e aplicações da Mecânica das Fraturas...	5
2.2 - Solução elástica no bordo de uma fissura.....	8
2.3 - Situações típicas e respectivos fatores de intensidade de tensões.....	12
2.4 - Balanço de energia de Griffith e energia específica de fratura.....	15
2.5 - Aspectos dinâmicos da MELF.....	18
2.6 - Considerações a respeito do efeito de escala....	19
3 - O MODELO DINÂMICO EM TRELIÇA PARA ESTUDOS DE MELF.....	21
3.1 - Formulação básica e características gerais.....	21
3.2 - Definição de um critério de ruptura e da Relação Constitutiva Elementar.....	24
3.3 - Ajustes na RCE em função das dimensões da barra.....	29
3.4 - Observações gerais a respeito do programa FRACTUR.....	31
4 - APLICAÇÃO DO MODELO NA REPRESENTAÇÃO DE PROBLEMAS BÁSICOS DA MELF.....	37
4.1 - Considerações gerais.....	37
4.2 - Resultados obtidos.....	41
4.3 - Análise do desempenho do modelo na MELF.....	50
4.4 - Análise dinâmica e energética.....	54

5 - INCLUSÃO DO CARÁTER ALEATÓRIO.....	62
5.1 - Consideração das propriedades aleatórias de materiais não-homogêneos.....	62
5.2 - Análises preliminares.....	66
5.3 - Influência da aleatoriedade no ajuste da RCE....	72
5.4 - Influência dos diversos parâmetros envolvidos...	76
5.5 - Análise estatística do efeito de escala.....	84
6 - APLICAÇÕES AO CONCRETO.....	89
6.1 - A teoria de BAŽANT.....	89
6.2 - Simulações em torno da Mecânica Não-Linear das Fraturas, como proposta por BAZANT.....	94
6.3 - Ajuste a um ensaio experimental.....	99
7 - CONCLUSÃO.....	104
BIBLIOGRAFIA.....	107
ANEXO - Ajuste do efeito de escala em microconcreto à compressão.....	111

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $K_I$  : Fator de intensidade de tensões.  
 $K_{Ic}$  : Fator de intensidade de tensões crítico.  
 $a$  : Dimensão característica de um fissura pré-existente.  
 $A$  : Área de fratura formada.  
 $h$  : Largura de uma placa.  
 $b$  : Espessura de uma placa.  
 $\sigma$  : Tensão.  
 $\epsilon$  : Deformação.  
 $\dot{\epsilon}$  : Velocidade de de deformação.  
 $\dot{\sigma}$  : Velocidade de tensão.  
 $u$  : Deslocamento.  
 $W$  : Trabalho externo realizado em um corpo.  
 $U$  : Energia potencial elástica.  
 $E$  : Módulo de Young.  
 $\nu$  : Coeficiente de Poisson.  
 $\rho$  : Massa específica.  
 $G$  : Energia específica de fratura.  
 $G_f$  : Energia específica crítica de fratura.  
 $L$  : Dimensão do elemento de discretização.  
 $L_c$  : Dimensão característica para modelo aleatório.  
 $L_{cr}$  : Dimensão característica crítica (máxima possível).  
 $\alpha, \delta$  : Parâmetros mecânicos do modelo em treliça, funções de  $\nu$ .  
 $R_f$  : Fator de falha, relaciona  $\epsilon_p$  e  $G_f$ .  
 $k_r$  : Dutilidade.  
 $E_A$  : Rigidez das barras do modelo em treliça.  
 $E_n$  : Rigidez das barras normais.  
 $E_d$  : Rigidez das barras diagonais.  
 $A_f$  : Área de influência das barras do modelo em treliça.  
 $c_A$  : Constante geométrica que relaciona  $A_f$  e  $L_c^2$ .  
 $F$  : Força transmitida pelas barras do modelo em treliça.

$P_{cr}$  : Força Máxima transmitida pelas barras.  
 $\Delta$  : Abertura de uma fissura (distância entre suas faces).  
 $\Delta_{cr}$  : Abertura crítica de uma fissura.  
 $D_f$  : Constante de amortecimento proporcional a massa.  
 $t$  : Tempo.  
 $\sigma'$  : Tensão global.  
 $\epsilon'$  : Deformação global.  
 $f_l$  : Tensão crítica de ruptura.  
 $\epsilon_p$  : Deformação associada a tensão crítica de ruptura.  
 $f'_l$  : Tensão crítica de ruptura global.  
 $\epsilon'_p$  : Deformação associada a  $f'_l$ .  
 $\bar{f}'_l$  : Tensão crítica de ruptura global, média.  
 $\bar{\epsilon}'_p$  : Deformação associada a  $\bar{f}'_l$ .

$\mu$  : Média.  
 $s$  : Desvio Padrão.  
 $\gamma, \beta$  : Parâmetros da função de Weibull.  
 $\varphi$  : Função de aleatorização.  
 $CV$  : Coeficiente de variação ( $CV = s/\mu$ ).

$MF$  : Sigla para Mecânica das Fraturas.  
 $MELF$  : Sigla para Mecânica Elástica Linear das Fraturas.  
 $RCE$  : Sigla para Relação Constitutiva Elementar.  
 $RCG$  : Sigla para Relação Constitutiva Global.

## RESUMO

Um modelo discreto dinâmico em treliça, com caráter probabilístico, é desenvolvido e empregado na representação do fenômeno de ruptura de materiais não-homogêneos.

Para os elementos é adotada uma relação constitutiva bilinear com "strain-softening", sendo que este efeito é ajustado de modo a se ter uma invariância, como o nível de discretização, do consumo de energia durante a ruptura. Os resultados são obtidos através de uma integração numérica explícita das equações de equilíbrio, pelo método de diferenças finitas centrais. Esta técnica permite análises onde ocorram movimentos de corpo rígido, típicos da fase pós-ruptura.

O modelo mostra-se capaz de permitir simulações através das quais se obtêm informações como velocidade e geometria da propagação de fraturas, tensões críticas de ruptura e influência da velocidade de aplicação dos carregamentos.

Enfoque especial é dado ao efeito de escala, devido a possibilidade de obtê-lo tanto em problemas básicos da Mecânica Elástica Linear das Fraturas, onde existe uma fissura inicial definida, como em situações nas quais se tem um corpo suposto intacto, mas cujas propriedades mecânicas variam através de seu volume.

## ABSTRACT

A truss-like discrete dynamic model, with random properties, is developed and employed to represent the rupture phenomena of non-homogeneous materials.

A bilinear constitutive relation is adopted for the elements, the strain-softening effect being adjusted according to the discretization level, so that the energy dissipated along the rupture process remains invariant. The analysis is performed by means of explicit numeric integration of the equilibrium equations, using the central finite differences method. This technique allows analysis with rigid-body motions, typical of the post-rupture phase.

The model allows solutions by simulation providing the velocity and geometry of crack propagation, critical stresses at rupture and the influence of the strain rate.

The size-effect is specially focused, as can be detected in basic problems of MELF, where an initial crack is specified, and also in situations where the body is assumed uncracked, but with mechanical properties varying throughout the volume.

## 1 - INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de modelos teóricos para representar o fenômeno de ruptura frágil tem, recentemente, atraído os esforços de muitos pesquisadores da área de mecânica estrutural. Isto se deve parte à complexidade do problema, que ainda não permitiu um consenso entre as diversas possibilidades de enfoque, e parte à sua importância, tanto para o estudo de materiais tradicionais como o concreto e a rocha, como para o dos modernos materiais cerâmicos.

Vários modelos têm sido apresentados, porém sempre com aplicações restritas a problemas específicos, o que demonstra ainda a ausência de uma teoria geral da ruptura, assim como existem teorias gerais da elasticidade e plasticidade (note-se que esta última não representa o fenômeno de ruptura completo, mas sim uma etapa que precede o mesmo para certos tipos de materiais, ditos plásticos).

Como o fenômeno compreende aspectos bastante diversificados, desde estatísticos até dinâmicos, qualquer simplificação imposta a um modelo resulta inevitavelmente em severas limitações no seu poder explicativo. Certamente a maior dificuldade decorre da perda de continuidade do material ao longo do processo de ruptura, a qual joga por terra toda a formulação desenvolvida na mecânica do contínuo. Tratamentos analíticos tornam-se tão complexos, que a melhor alternativa passa a ser o emprego de modelos de discretização, nem sempre modestos quanto a capacidade computacional requerida. Por outro lado, singularidades geométricas decorrentes do surgimento de descontinuidades não podem ser fielmente reproduzidas por modelos discretos, a menos que se conheça a priori onde ocorrerão, ou seja desenvolvido um complexo esquema de reformulação da discretização (remeshing).

Até o presente, a Mecânica das Fraturas tem se constituído em uma importante ferramenta, capaz de fornecer soluções analíticas fechadas para configurações específicas. Tais soluções são comumente dadas em termos de uma carga crítica, após a qual o processo de ruptura entraria em uma fase final irreversível. Entretanto, a necessidade de se definir uma descontinuidade geométrica inicial, a partir da qual a ruptura se desenvolveria, cria certas dificuldades quando a mesma não se apresenta de forma suficientemente explícita. Tal impasse resultou no desenvolvimento de uma outra disciplina, a Mecânica do Dano, que permite avaliar o surgimento natural de descontinuidades, a partir de características micro-estruturais do material. No entanto, esta também esbarra em dificuldades, quando se vê incapaz de definir o momento de instabilização destas descontinuidades.

Aparentemente, uma promissora abordagem vem sendo feita através da tentativa de definição de relações constitutivas não-locais. Tal tratamento tem como principal objetivo diluir ficticiamente as descontinuidades surgidas em uma certa região do material, obtendo campos de deformações homogêneas, representadas por seu valor médio em um dado volume de controle (considerado uma propriedade do material). Entretanto, também aqui se depara com limitações devidas a impossibilidade de definir-se quando a ruptura se instabilizaria.

Mais recentemente, a incorporação de um caráter não-determinístico à Mecânica das Fraturas, resultando na chamada Mecânica Probabilística das Fraturas, mostrou ser uma alternativa adicional, entre tantas outras disponíveis. Neste enfoque, a descontinuidade geométrica inicial seria caracterizada por uma dimensão aleatória, função do tipo de material, condições ambientais, etc.

Dentro deste contexto, o presente trabalho representa uma tentativa de se incorporar, em um único modelo, o maior número possível de aspectos qualitativos envolvidos no problema. Entre estes, pode-se citar:

\* Invariância, com o nível de discretização, do consumo de energia no processo de ruptura. Tal consumo é definido através de uma relação constitutiva bilinear para os elementos, que incorpora um efeito denominado "strain-softening" deduzido a partir de um teoria não-local.

\* Possibilidade de formação de mecanismos internos (movimentos de corpo rígido), devido ao emprego de equações dinâmicas de equilíbrio, solucionadas no tempo de forma explícita através da técnica de diferenças finitas centrais.

\* Resultados não-determinísticos, em consequência de uma distribuição aleatória, através do volume, de propriedades mecânicas do material. Este procedimento visa simular uma não-homogeneidade, própria de materiais compostos como o concreto.

Embora o objetivo inicial fosse fundamentalmente obter um bom desempenho qualitativo, o modelo apresentou também aptidões quantitativas, verificadas pela comparação com outros modelos teóricos e alguns resultados experimentais.

Ressalta-se que a abrangência do modelo, em termos dos tipos de análises possíveis, deve-se principalmente ao seu caráter dinâmico. Isto porque a ruptura é essencialmente um fenômeno que ocorre no tempo, como por exemplo a fratura de materiais frágeis, que se desenvolve com velocidades assintóticas finitas. Além disso, para solicitações impostas rapidamente a um corpo, efeitos inerciais podem alterar significativamente a forma de ruptura, tanto em seu aspecto geométrico como em termos de tensões máximas suportadas.

A maior parte deste trabalho é dedicada a simulações de situações ideais, de modo a permitir uma análise da influência individual dos diversos parâmetros envolvidos. Tal estratégia visa desenvolver uma experiência que será útil quando se buscar aferições em cima de situações reais, como a apresentada a título de exemplo no último capítulo.

Dos diversos aspectos decorrentes do comportamento do modelo, focalizou-se especialmente o efeito de escala. Este efeito diz respeito a variação das tensões críticas de ruptura para estruturas geometricamente proporcionais, mas com diferentes dimensões absolutas. O interesse neste fenômeno se deve à necessidade de transladar resultados experimentais, obtidos através de pequenos corpos de prova, para estruturas em escala real. O modelo mostrou-se apto a representar efeitos de escala estudados por duas diferentes disciplinas, quais sejam, a Mecânica das Fraturas e a Teoria Probabilística da Resistência dos Materiais. Mais do que isto, o modelo reforça as evidências de que os dois tipos de efeito de escala estão intimamente relacionados.

Este trabalho pode ser essencialmente dividido em três partes, conforme abaixo apresentado:

I - (Capítulos 2 a 4): Introdução à MELF e desenvolvimento de um modelo capaz de representar o fenômeno de ruptura em materiais homogêneos.

II - (Capítulo 5): Desenvolvimento de critérios para distribuir aleatoriamente as propriedades mecânicas em um modelo de discretização.

III - (Capítulo 6): Emprego de um modelo com propriedades não-determinísticas para representar o fenômeno de ruptura em materiais não-homogêneos.

Finalmente, cabe observar que o esforço computacional requerido pelo modelo foi um fator limitante, que impôs severas restrições às dimensões dos sistemas estruturais analisados. Assim, os 3000 graus de liberdade comportados pelo programa FRACTUR ditaram os limites para as simulações aqui apresentadas. Além disso, o expressivo tempo necessário ao processo de integração numérica tornou praticamente inviável a realização de testes com velocidades de carregamento próximas à uma situação idealmente estática.

Pensa-se que a disponibilidade futura de equipamentos mais poderosos possibilitará sucessivos aperfeiçoamentos no trabalho que ora se inicia.

## 2 - FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ELÁSTICA LINEAR DAS FRATURAS\*

### 2.1 - Origens e aplicações da Mecânica das Fraturas

O estabelecimento dos conceitos básicos da Mecânica das Fraturas (MF), geralmente atribuído a A. A. Griffith em 1922, resultou em uma disciplina de engenharia através dos trabalhos de G. Irwin, publicados a partir de 1948. Griffith enfocou o problema de um ponto de vista energético, o que deu origem à noção de "energia específica de fratura" como fator determinante da resistência à ruptura. No entanto, a aplicabilidade deste conceito a situações reais resultou matematicamente pouco prática, e permaneceu como mera curiosidade teórica até que Irwin veio a propor uma "teoria modificada de Griffith". A partir daí, a medida de resistência à propagação da fratura passou a ser definida pela tensão de superfície existente nos bordos da mesma, permitindo assim uma conexão mais direta com campos de tensões obtidos da Teoria Linear da Elasticidade. Embora aparentemente distintos, os dois enfoques são perfeitamente equivalentes, como demonstrou o próprio Irwin.

Griffith estava inicialmente interessado em explicar a divergência observada entre a resistência obtida experimentalmente para sólidos cristalinos, e os valores esperados com base em uma reologia de cunho molecular. Outro fenômeno que atraiu a sua atenção foi o sensível aumento na tensão de ruptura de fibras de vidro à medida em que estas tinham sua espessura reduzida, conforme apresentado na fig. 2.1.1.

---

\* Este capítulo inicial está integralmente baseado nas referências 1 e 2.

Para Griffith, uma solução comum a ambos os problemas poderia ser encontrada se fosse levada em conta a presença de descontinuidades internas nos materiais. Assim, as concentrações de tensões produzidas por estas descontinuidades seriam responsáveis pela redução de resistência. Note-se que esta explicação não é a única a justificar o efeito de escala observado em materiais de ruptura frágil. Há também uma abordagem estatística, que considera a existência de um número maior de descontinuidades, ou a maior probabilidade de ocorrência de uma descontinuidade mais desfavorável, à medida em que um volume maior de material está envolvido no processo de carga. Esta abordagem foi estudada por Weibull em 1938, dando origem às Teorias Estatísticas da Resistência dos Materiais.



Fig.2.1.1- Resultados obtidos por Griffith em ensaios de tração de fibras de vidro.

A partir da hipótese de Griffith, tornou-se necessária uma teoria que relacionasse a resistência de um material às descontinuidades presentes em seu interior. Por outro lado, esta necessidade esbarrava nas limitações da Teoria da Elasticidade, que prevê tensões infinitas em pontos de singularidade geométrica, problema que pode ser exemplificado através da placa tracionada contendo um orifício elíptico em seu interior, como demonstrado na fig.2.1.2.

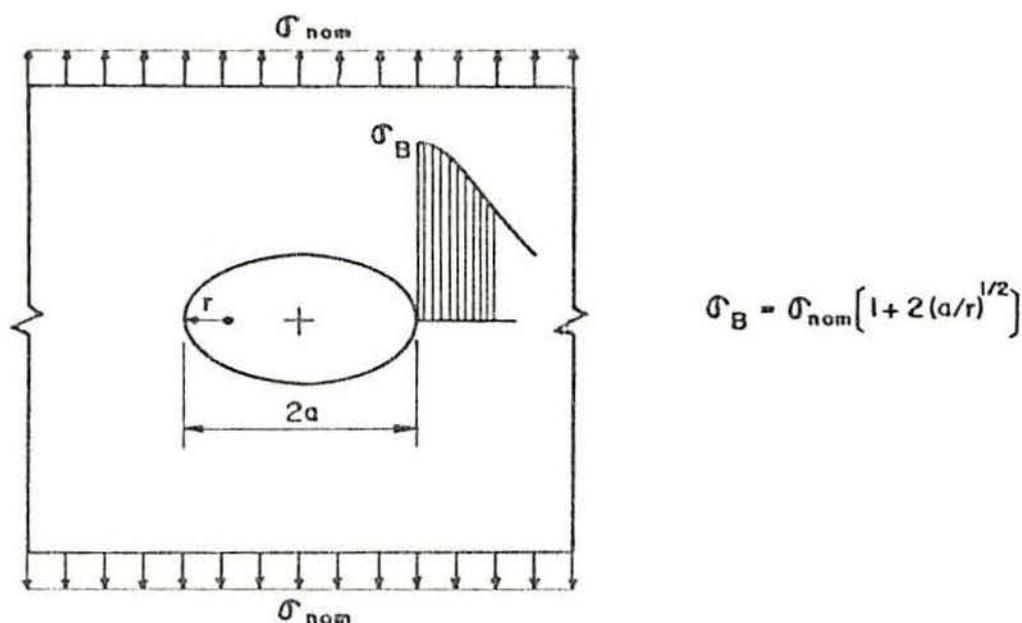


Fig.2.1.2- Problema elástico em que, para  $r$  (raio de curvatura) tendendo a zero, ocorre uma singularidade geométrica que resulta em tensões infinitas.

Assim, com base num critério de tensões limite, se a previsão de tensões infinitas da Teoria da Elasticidade fosse real, a placa não poderia suportar quaisquer tensões de tração que lhe fossem impostas. Obviamente isto não está de acordo com o observado na prática. Pode-se supor que este local no qual ocorrem tensões infinitas, representa na verdade uma região de transição de um meio contínuo para descontínuo, que se faz através de uma plastificação local seguida da perda de coesão entre as duas partes em que o material se divide.

A partir daí, a Mecânica das Fraturas desenvolveu-se como uma disciplina voltada ao estudo dos problemas de concentração de tensões em torno de singularidades, criando para isto seus próprios critérios de ruptura. O objetivo passou a ser a determinação das condições sob as quais tais singularidades se instabilizariam, dando origem a fraturas que se propagariam de forma espontânea, causando assim o colapso do material.

É importante lembrar ainda que, tendo nascido de uma observação do efeito de escala, a MF resultou ser capaz de incorporá-lo aos seus critérios de ruptura. Por outro lado, tal efeito tem sido alvo de considerável atenção, visto a necessidade de se transladar resultados experimentais, obtidos através de pequenos corpos de prova, para estruturas em sua escala real. Assim, vislumbra-se na MF uma possível fonte de esclarecimento para se realizar esta tarefa de forma confiável.

## 2.2 - Solução elástica no bordo de uma fissura

O campo de tensões existente nas proximidades do bordo de uma fissura pode ser definido pela combinação de três modos distintos, conforme apresentados na fig.2.2.1. Recentemente sugeriu-se que o modo I (tração normal ao plano da fissura) constitui na verdade um modo fundamental, do qual derivam os outros dois (o que poderia ser inferido pelo suposto processo de ruptura a nível molecular, qual seja, o aumento da distância absoluta entre duas moléculas adjacentes).

Como nos desenvolvimentos que se seguirão o modo I terá portanto maior importância que os demais, será aqui utilizado a título de exemplo para uma análise elástica. A abordagem mais conveniente à Mecânica Elástica Linear das Fraturas (MELF) consiste em se isolar o bordo da fissura\* do restante da estrutura, obtendo-se assim uma solução baseada exclusivamente nas características locais. Este procedimento apresenta a vantagem de conduzir a expressões completamente gerais, independentes das características (geometria e cargas)

---

\* Convencionou-se chamar de "fissura" a descontinuidade pré-existente no material, enquanto o termo "fratura" refere-se a uma fissura instabilizada por certas condições externas impostas ao corpo. Assim, enquanto uma fissura é considerada uma característica geométrica intrínseca, a fratura é o resultado de um processo de ruptura.

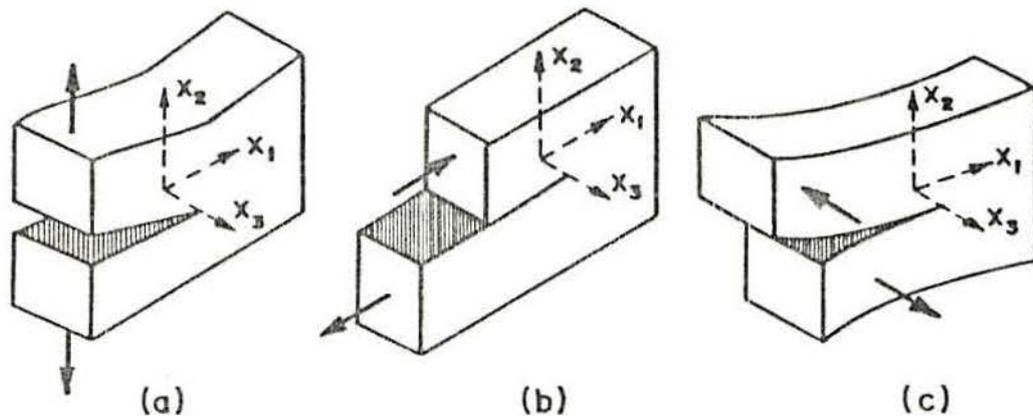


Fig.2.2.1- Os três modos de solicitação no bordo de uma fissura. a) Modo I: tração normal; b) Modo II: corte longitudinal; c) Modo III: corte transversal.

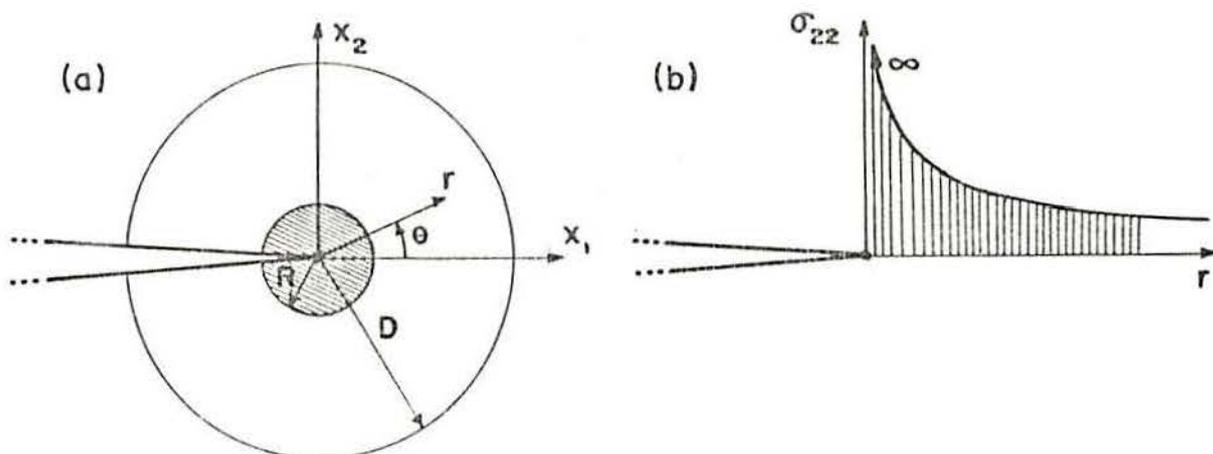


Fig. 2.2.2. - a) Bordo da fissura isolado do restante do corpo e sistema local de coordenadas; b) Aspecto do campo de tensões nas proximidades do mesmo.

do restante do corpo. Assim, torna-se lógico adotar um sistema de coordenadas com a origem locada no bordo da fissura (fig.2.2.2a).

Para um estudo em estado plano (tensões ou deformações), torna-se muito conveniente o emprego do Método das Variáveis Complexas, o qual baseia-se no fato de que as partes real e imaginária de uma função complexa analítica (infinitamente derivável) são soluções da equação de Laplace.

A função analítica adequada ao problema em questão tem a forma (Ref.2, Cap.3):

$$f(z) = (A + iB) z^{\lambda+1} \quad (2.2.1)$$

Onde A, B e  $\lambda$  são constantes a serem determinadas, e z é a variável complexa definida por  $(x_1 + ix_2)$ .

Não se pretende aqui apresentar a dedução completa das expressões para o campo de tensões. O fato de citar-se a função analítica empregada tem como único objetivo mostrar que há três constantes a serem determinadas, cada qual com um significado próprio. É suficiente mencionar que o desenvolvimento do problema conduz a um sistema de autovalores, cuja solução não trivial implica na condição:

$$\text{sen } 2\lambda\pi = 0 \Rightarrow \lambda = n/2, n = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.2)$$

A solução elástica completa é dada, portanto, pela combinação linear de infinitos autovetores, dos quais apenas aquele em que  $\lambda = -1/2$  resulta em tensões infinitas no bordo da fissura, sendo portanto predominante nesta região. Aplicando-se ainda a condição de contorno local  $\sigma_{22} = 0$  para  $\theta = \pm\pi$ , elimina-se a constante A, que resulta nula.

Finalmente chega-se às seguintes expressões para o campo de tensões nas proximidades do bordo da fissura:

$$\sigma_{11} = (B/r^{1/2}) \cos(\theta/2) [1 - \text{sen}(\theta/2) \text{sen}(3\theta/2)] \quad (2.2.3)$$

$$\sigma_{22} = (B/r^{1/2}) \cos(\theta/2) [1 + \text{sen}(\theta/2) \text{sen}(3\theta/2)] \quad (2.2.4)$$

$$\sigma_{12} = (B/r^{1/2}) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \text{sen}(\theta/2) \quad (2.2.5)$$

Fazendo-se  $\theta = 0$  têm-se o campo de tensões na linha da fissura (fig.2.2.2b):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = B/r^{1/2} \quad (2.2.6)$$

$$\sigma_{12} = 0 \quad (2.2.7)$$

Para valores muito grandes de  $r$ , observa-se que  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  tendem a zero. Isto se deve ao fato que, em regiões distantes do bordo o primeiro autovetor passa a ter influência desprezível, enquanto os demais autovetores da solução se tornam predominantes. Assim, reitera-se que a solução elástica apresentada é válida apenas nas imediações da origem do sistema de coordenadas, ilustrada pelo círculo de raio  $D$  na fig. 2.2.2a. Esta região é comumente denominada  $K$ -dominante, por razões que serão apresentadas a seguir.

Neste ponto, torna-se importante observar que a determinação do campo de tensões depende agora de uma única constante  $B$ , definida pela relação:

$$B = \lim_{r \rightarrow 0} (r^{1/2} \sigma_{22} |_{\theta=0}) \quad (2.2.8)$$

Como no desenvolvimento das expressões (2.2.3-5) não foram levadas em conta as condições de contorno do corpo no qual a fissura está contida, conclui-se que estas devem influir no campo de tensões apenas através da constante  $B$ . Para compatibilizar a solução obtida da teoria da elasticidade com a que resulta do balanço de energia proposto por Griffith, apresentado no item 2.4, a constante  $B$  passa a ser definida pela seguinte relação:

$$B = K_I / (2\pi)^{1/2} \quad (2.2.9)$$

O parâmetro  $K_I$  é denominado "fator de intensidade de tensões" para o modo I, pois resulta ser o único fator a influir na magnitude do campo de tensões na região  $K$ -dominante (justificando-se assim sua denominação). Por esta razão, torna-se natural que o critério de ruptura adotado pela MELF diga respeito ao valor de  $K_I$ , que não deve portanto ultrapassar um certo valor crítico  $K_{Ic}$ , considerado uma

propriedade do material. De forma geral, este critério de ruptura pode ser expresso da seguinte maneira:

$$K_I(\text{cargas, geometria}) = K_{Ic}(\text{material}) \quad (2.2.10)$$

Obviamente fatores como temperatura, efeitos dinâmicos, etc., terão influência neste critério, mas no momento fogem ao escopo do trabalho.

É importante lembrar que a idéia de tensões infinitas no bordo da fissura (fig. 2.2.2b) não é verificada na prática, pois supõe-se existir uma região de plastificação que restringe seus valores a uma tensão de escoamento hipotética  $\sigma_y$ . Esta região de plastificação pode ser avaliada por seu raio R (fig. 2.2.2a), igualando-se a expressão para  $\sigma_{zz}$  a  $\sigma_y$ :

$$R = (K_I / \sigma_y)^2 / (2\pi) \quad (2.2.11)$$

A condição de que a região de plastificação definida por R seja muito menor que a região K-dominante (definida por D) denomina-se "escoamento em pequena escala", e representa uma restrição à aplicação da versão elástica da MF. Caso R se torne relevante com relação a D, torna-se necessário adentrar-se à Mecânica não-linear das Fraturas. Lembra-se que materiais com escoamento em pequena escala são comumente denominados "frágeis", aos quais este trabalho procura se restringir.

### 2.3 - Situações típicas e respectivos fatores de intensidade de tensões

Pode-se notar que apesar de haver sido criada a possibilidade de definição de um critério de ruptura, o problema elástico não foi completamente resolvido. Há ainda a necessidade de se conectar o parâmetro  $K_I$  com as demais características da estrutura na qual a fissura se faz presente. Aqui, como para outras aplicações tradicionais da Teoria da Elasticidade, apenas um limitado número de casos

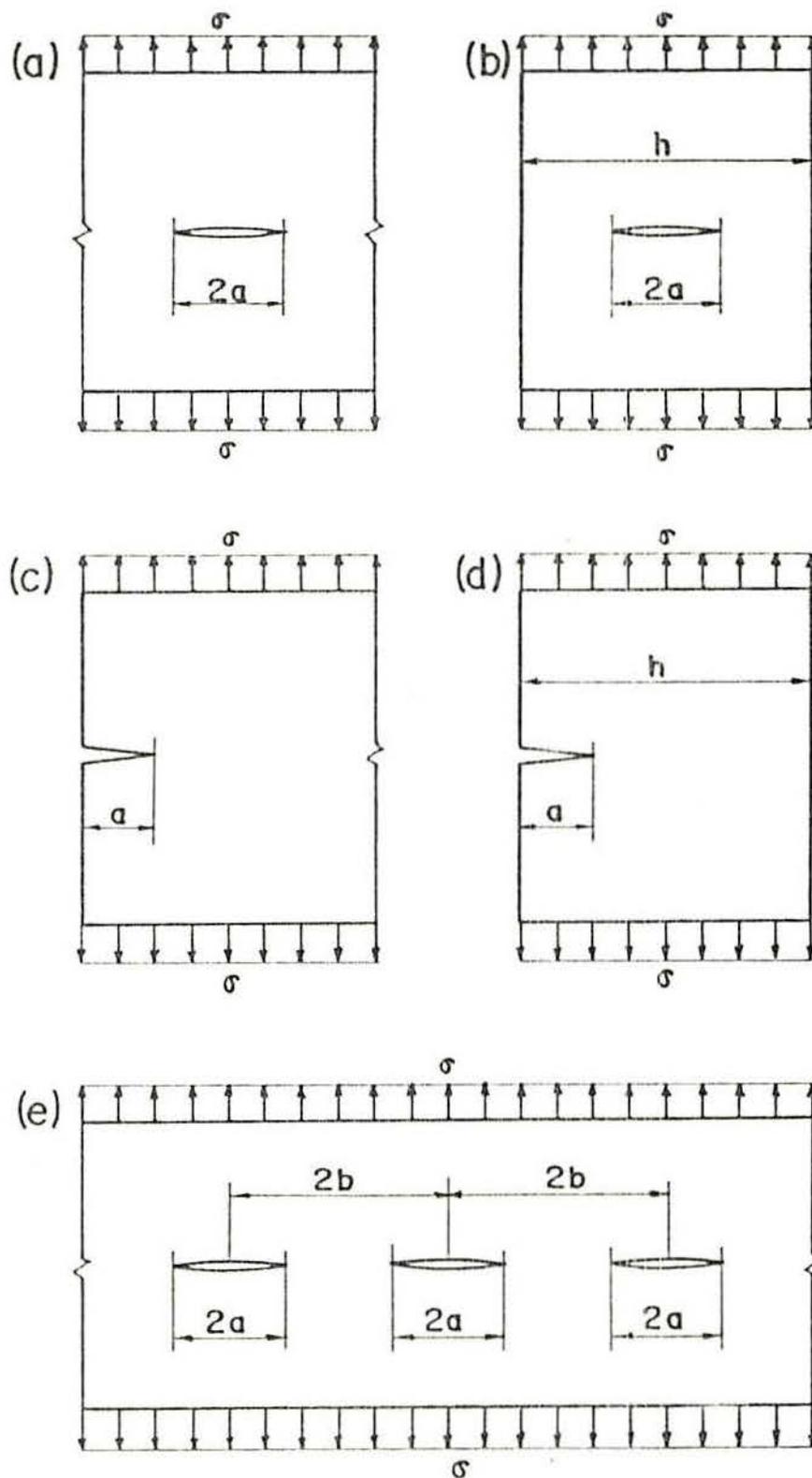


Fig.2.3.1-Algumas configurações com solução fechada para o fator de intensidade de tensões; as ilustrações de (a) a (e) correspondem sucessivamente às fórmulas (2.3.1-5).

possui uma solução analítica fechada (ou pelo menos aproximada). Situações mais complexas requerem o emprego de processos numéricos, e têm sido objeto de estudo de vários pesquisadores.

A título de ilustração, e também porque serão necessárias ao subsequente desenvolvimento do trabalho, apresentam-se a seguir algumas configurações típicas e suas respectivas expressões para avaliação de  $K_I$ :

a) Placa de dimensões infinitas com uma fissura interna de dimensão  $2a$ , submetida a tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = \sigma (\pi a)^{1/2} \quad (2.3.1)$$

b) Tira de comprimento infinito e largura  $2h$  com uma fissura interna centrada de dimensão  $2a$ , submetida a tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = \sigma (\pi a)^{1/2} \sec^{1/2} [\pi a / (2h)] \quad (2.3.2)$$

c) Placa de dimensões infinitas com uma fissura lateral de dimensão  $a$ , submetida a tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = 1.12 \sigma (\pi a)^{1/2} \quad (2.3.3)$$

d) Tira de comprimento infinito e largura  $h$  com uma fissura lateral de dimensão  $a$ , submetida a tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = \sigma a^{1/2} [1.99 - 0.41(a/h) + 18.70(a/h)^2 - 38.48(a/h)^3 + 53.85(a/h)^4] \quad (2.3.4)$$

e) Placa de dimensões infinitas com fissuras colineares de dimensão  $2a$  e distância entre centros igual a  $2b$ , submetida a tração normal ao plano das fissuras:

$$K_I = \sigma (\pi a)^{1/2} \left[ \frac{2b}{\pi a} \tan \left( \frac{\pi a}{2b} \right) \right]^{1/2} \quad (2.3.5)$$

A configuração (e) tem grande importância para o problema de interação de fissuras em um mesmo corpo. A hipótese de que as fissuras estão a uma distância suficientemente grande para que possam ser tratadas isoladamente, proporciona uma grande simplificação nos campos de tensões a serem considerados. Como ilustrado na fig. 2.3.2, pode-se concluir da expressão (2.3.5) que para valores de  $b$  da ordem de  $4a$ , a consideração de que as fissuras estariam isoladas representaria um erro de menos de 3%.

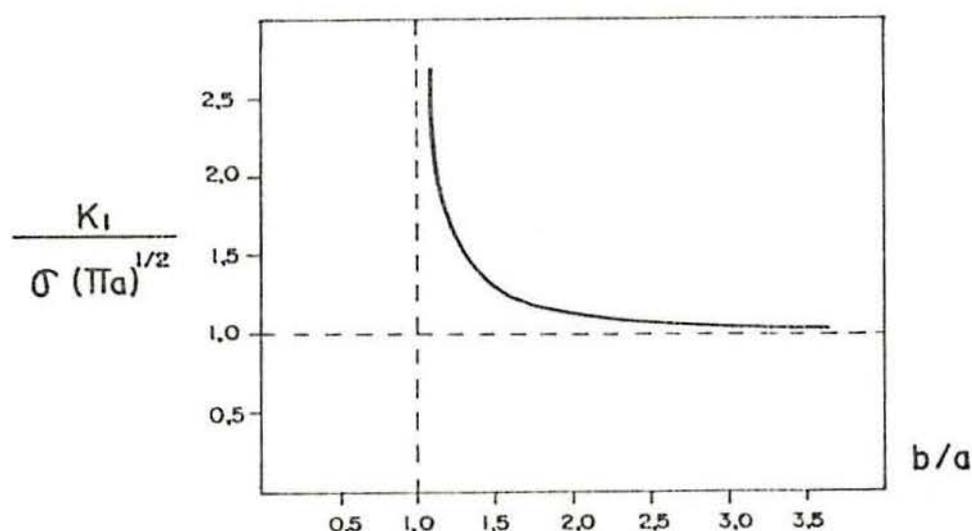


Fig.2.3.2.-Fator de intensidade de tensões para a configuração (e), à medida em que as fissuras colineares são afastadas.

#### 2.4 - O balanço de energia de Griffith e a energia específica de fratura

Na versão original da teoria de Griffith, o critério de ruptura não era dado em termos do fator de intensidade de tensões. Sua abordagem energética dizia que uma fissura se instabilizaria e se propagaria espontaneamente quando a razão de liberação da energia elástica se tornasse maior que a razão de crescimento da energia superficial de fratura. Assim, pode-se escrever o balanço energético da seguinte forma:

$$\frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} = G \quad (2.4.1)$$

Onde  $W$  é o trabalho externo,  $U$  é a energia elástica interna,  $G$  é a energia superficial de fratura\*, e  $A$  é a área de fratura formada. O critério de ruptura resulta ser então:

$$\frac{d}{dA} \left( \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} \right) \geq \frac{dG}{dA} \quad (2.4.2)$$

Note-se que a equação (2.4.1) refere-se a uma condição observada já no início do processo de fratura, enquanto a inequação (2.4.2) refere-se a uma condição necessária para propagação instável. Também é importante observar que  $G$  não é uma constante, mas sim um parâmetro dependente da geometria e cargas aplicadas. Como será visto mais adiante, pode-se estabelecer uma correspondência entre  $G$  e  $K_{Ic}$ . Em materiais do tipo frágil não ocorre propagação estável significativa, o que significa que a equação (2.4.1) pode ser usada como critério de ruptura.

Para ilustrar-se a aplicação do balanço de energia para um material de ruptura frágil, pode-se tomar como exemplo a configuração (a) apresentada no item anterior (placa de dimensões infinitas com uma fissura interna de dimensão  $2a$ , submetida a uma tensão de tração normal ao plano da fissura). A distância entre as faces da fissura neste caso é dada pela expressão:

$$u_z = (2\sigma/E) (a^2 - x^2)^{1/2} ; \quad (x < a) \quad (2.4.3)$$

---

\* O termo "energia superficial de fratura" foi empregado inicialmente por Griffith e adotado na maioria dos tratamentos subsequentes. Porém, trata-se, em princípio, de energia não recuperável mecanicamente, razão pela qual parece mais correta sua interpretação como "trabalho necessário para afastar até o infinito as faces de uma fratura em formação".

Onde a origem das coordenadas é tomada no centro da fissura. A partir da expressão acima, pode-se calcular o trabalho realizado para abrir a fissura:

$$W - U = 2B \int_0^a \frac{1}{2} \sigma u_z(x) dx = \frac{\pi a^2 \sigma^2 B}{2E} \quad (2.4.4)$$

Aplicando-se o resultado (2.4.4) na equação (2.4.1) obtém-se a relação entre a tensão aplicada na placa e o parâmetro G:

$$\sigma = \left( \frac{E G}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (2.4.5)$$

O maior problema com a abordagem proposta por Griffith consiste na dificuldade de se realizar o balanço energético para situações mais complexas, problema este que não ocorre quando se utiliza o parâmetro  $K_I$ , que pode ser relacionado com campos de tensões com relativa facilidade. Por outro lado, é possível estabelecer uma relação entre G e  $K_I$  a partir da análise de tensões apresentada no item (2.2). Tal façanha foi realizada por Irwin, que imaginou o "fechamento matemático" de um comprimento de fissura  $\Delta a$ . A tensão normal e o deslocamento transversal no bordo da fissura podem ser escritos em termos de  $K_I$  através das expressões:

$$\sigma_{zz} = K_I [2\pi(x - a)]^{-1/2}; \quad (x > a) \quad (2.4.6)$$

$$u_z = \frac{(1 + \nu)(\kappa + 1)}{E} K_I \left( \frac{a - x}{2\pi} \right); \quad (x < a) \quad (2.4.7)$$

Onde  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  para estado plano de tensões e  $\kappa = (3 - 4\nu)$  para estado plano de deformações. O "fechamento" da fissura requer um trabalho que deve ser igual ao produto da energia específica de fratura pelo comprimento fechado:

$$G \Delta a = 2 \int_a^{a+\Delta a} \frac{1}{2} \sigma_{zz}(x) u_z(x-\Delta a) dx \quad (2.4.8)$$

Da integral acima obtém-se finalmente a relação:

$$G = K_I^2 / E' \quad (2.4.9)$$

Onde  $E' = E$  no caso de estado plano de tensões e  $E' = E/(1-\nu^2)$  no caso de estado plano de deformações. Note-se que esta mesma relação poderia ser obtida substituindo-se  $K_I = \sigma (\pi a)^{1/2}$  na expressão (2.4.5)!

Assim como o critério de ruptura em termos do fator de intensidade de tensões é dado pela comparação de  $K_I$  com um valor crítico, também na abordagem energética pode-se estabelecer uma energia específica crítica  $G_c$  (propriedade do material) que implica no colapso do corpo que contém a fissura.

## 2.5 - Aspectos dinâmicos da MELF

Embora seja mais usual o tratamento estático do fenômeno de propagação de fraturas, não se deve esquecer que seu caráter dinâmico implica em aspectos que podem vir a se tornar importantes, conforme o tipo de análise realizada.

Como exemplo, pode-se citar o estudo do efeito de impacto, onde para altas velocidades de deformação passa a ser importante a velocidade com que uma fratura se propaga. Tal velocidade pode ser aproximada pela seguinte expressão, que resulta do aperfeiçoamento sucessivo do trabalho de diversos pesquisadores (conhecida como fórmula de Mott modificada):

$$V = 0.38 C_0 (1 - a_0/a) \quad (2.5.1)$$

Onde  $C_0 = (E / \rho)^{1/2}$  é a velocidade de propagação da onda dilatacional elástica,  $E$  é o Módulo de Young,  $\rho$  é a massa específica,  $a_0$  é o comprimento da fissura inicial e  $a = a(t)$  é o comprimento instantâneo da fratura.

É possível reformular-se o balanço de energia de Griffith para uma versão dinâmica, considerando-se também a variação da energia cinética (T). Assim a equação (2.4.1)

passaria a ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dT}{dA} = G \quad (2.5.2)$$

Deste balanço surgiria portanto um critério de ruptura que consideraria os efeitos inerciais.

Outro aspecto dinâmico importante, diz respeito a influência da velocidade de aplicação da carga. Em tais casos, não apenas o fator de intensidade de tensões é alterado, mas também o seu valor crítico (propriedade do material). A este respeito, algumas observações serão feitas no item 4.4.

## 2.6 - Considerações a respeito do efeito de escala

Ao observar-se as expressões (2.3.1-5), nota-se que, fixando-se as proporções entre as diversas dimensões envolvidas em cada configuração, a tensão crítica em cada caso pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_t = \frac{K_{Ic}}{\chi a^{1/2}} \quad (2.6.1)$$

Onde  $\chi$  é uma constante geométrica adimensional, diferente para cada configuração.

Traçando-se um gráfico  $f_t$  Vs.  $a$  em escala logarítmica, obtém-se uma reta de inclinação  $-1/2$ , conforme apresentado na fig.2.6.1. Tal fato indica que, aumentando-se o valor absoluto das dimensões de um corpo com uma fissura inicial (cuja dimensão é aumentada proporcionalmente), ocorre uma redução na resistência global. Este é o efeito de escala implícito na MELF. Note-se que quando  $a$  tende ao infinito a resistência global tende a se anular.

Por outro lado, cabe lembrar que em algumas situações práticas a fissura inicial é considerada um defeito intrínseco do material, e tem sua dimensão associada a descontinuidades internas, a nível micro-estrutural. Nestes

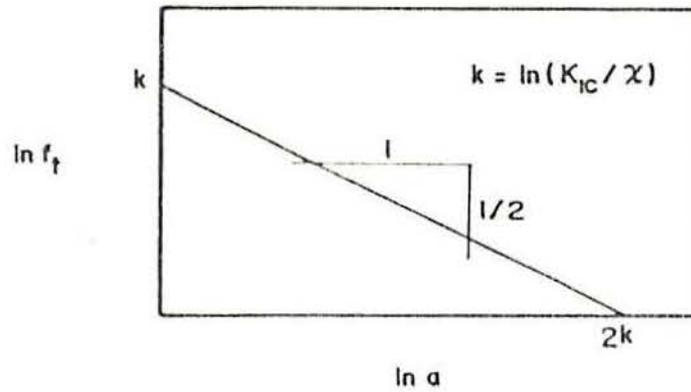


Fig.2.6.1. - Efeito de escala da MELF.

casos, não faz sentido considerar a dimensão  $a$  como proporcional às demais dimensões da estrutura. Entra então em cena a necessidade de abordagens estatísticas, visando determinar a maior fissura interna esperada, que definirá a resistência global.

### 3 - O MODELO DINÂMICO EM TRELIÇA PARA ESTUDOS DE MF

#### 3.1 - Formulação básica e características gerais

O modelo de discretização empregado neste trabalho, foi desenvolvido e testado na dissertação de mestrado de HAYASHI<sup>4</sup>, no que diz respeito à sua capacidade de representar um meio contínuo elástico linear. Sua formulação original, no entanto, provém de um trabalho de NAYFEH&HEFZI<sup>3</sup>, cujo interesse se dava no sentido oposto, qual seja, representar treliças espaciais moduladas, largamente empregadas na indústria aeronáutica, através de meios contínuos equivalentes. Isto possibilitaria uma nova discretização, com um número menor de graus de liberdade, reduzindo assim o esforço computacional.

Lembra-se que modelos em treliça também têm sido empregados por diversos outros autores, como REINIUS(1955), BAKER(1959), ROY(1963), ANSON(1964), ZORNC(1983), SZABÓ(1986), SCHOLZ(1988), e também por KANNINEN<sup>2</sup>. Este último utilizou um modelo em treliça plano para simular o fenômeno de fratura em nível molecular.

Foram desenvolvidas diversas formulações para as propriedades elásticas equivalentes a serem atribuídas às barras, cada uma correspondendo a um módulo básico de constituição da treliça. Neste trabalho, assim como no de HAYASHI, empregou-se o módulo cúbico, cuja geometria está apresentada na fig. 3.1.1, juntamente com algumas construções básicas. Adotando-se um sistema de eixos coordenados paralelos às arestas dos cubos, distinguem-se dois tipos de barras, denominadas "normals" e "diagonals" (referidas por sub-índices "n" e "d", respectivamente). As rigidezes equivalentes atribuídas a cada barra, visando a representação de um meio

contínuo elástico com Módulo de Young E e Coeficiente de Poisson  $\nu$ , são calculadas através das seguintes expressões:

a) Barras Normais (comprimento L):

$$E_n = \alpha E L^2 \quad (3.1.1)$$

b) Barras Diagonais (comprimento  $\sqrt{3} L / 2$ ):

$$E_d = 2 \delta \alpha E L^2 / \sqrt{3} \quad (3.1.2)$$

Onde:

$$\alpha = (9 + 8\nu) / (18 + 24\nu) \quad (3.1.3)$$

$$\delta = 9\nu / (4 - 8\nu) \quad (3.1.4)$$

O modelo em treliça apresenta a vantagem de permitir a definição de um diagrama constitutivo em sua forma mais simples, qual seja, a uniaxial. Lembra-se que as consequências tridimensionais deste diagrama não devem ser negligenciadas, visto que no caso da plasticidade, por exemplo, a forma da treliça irá influir no tipo de superfície de escoamento obtida. Entretanto, como será visto mais adiante, para materiais frágeis na fase pós-ruptura torna-se mais importante impor corretamente um consumo de energia do que uma relação tensão Vs. deformação. O modelo em treliça tem, por outro lado, a desvantagem de dificultar a representação de geometrias diferentes da prismática (cujas arestas devem ter dimensões múltiplas do comprimento elementar L). Além disso, é praticamente impossível refinar a "malha" apenas nos pontos de interesse (a menos que se empregue uma sofisticada técnica de subestruturação).

Neste trabalho realiza-se uma análise dinâmica (concentrando-se as massas nos nós da treliça) através de um método explícito, com integração numérica por diferenças finitas centrais. Tal escolha se baseia na necessidade de se incorporar um critério de ruptura ao modelo elástico, o que

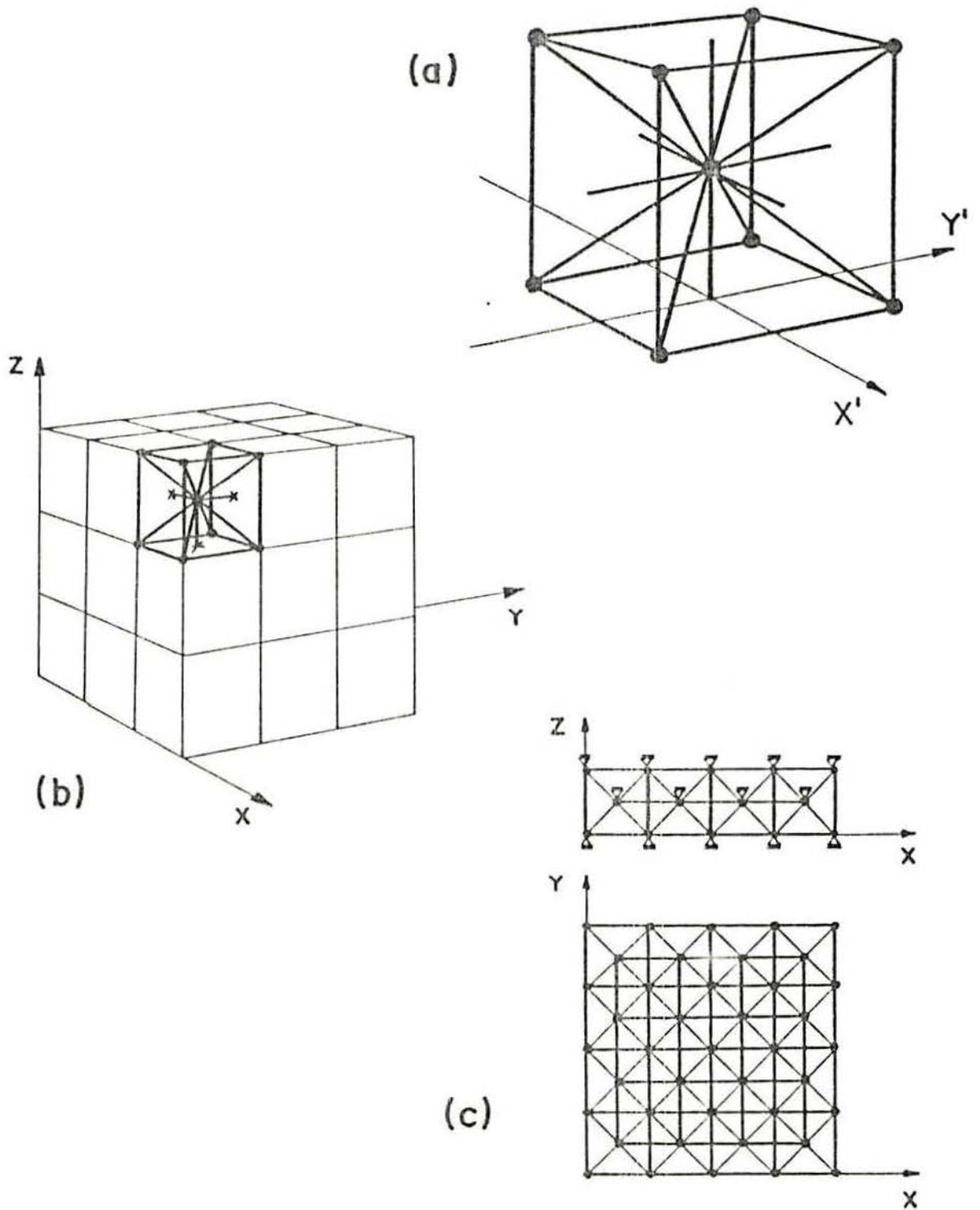


Fig. 3.1.1. - a) Módulo cúbico para o construção do modelo em treliça; b) Composição de um prisma; c) Composição de uma placa para estado plano de deformações (deslocamentos na direção  $z$  restritos).

poderia resultar em singularidade da matriz de rigidez do sistema, caso fosse utilizada, devido a formação de mecanismos internos. A análise dinâmica se justifica pela possibilidade de acompanhamento do processo de ruptura no tempo, o que é muito importante no estudo de propagação de fraturas. Note-se que o intervalo de tempo para a integração ( $\Delta t$ ) é severamente restringido por condições de estabilidade numérica. Isto pode resultar em um tempo computacional elevado para análises onde se deseje simular fenômenos de duração relativamente longa (modos de vibração de baixa frequência, aplicação lenta dos carregamentos, etc.). Entretanto, as limitações impostas pelo tempo computacional deixam de ser relevantes quando se restringe o estudo a fenômenos de curta duração, como é o caso de instabilização e propagação de fraturas.

### 3.2 - Definição de um critério de ruptura e da Relação Constitutiva Elementar (RCE)

Este trabalho está restrito a materiais de ruptura frágil, ou seja, que não apresentam comportamento plástico em sua escala macroscópica. Lembra-se que para tais materiais são válidos os princípios da Mecânica Elástica Linear das Fraturas. Assim, quando o fator de intensidade de tensões crítico ( $K_{Ic}$ ) é atingido em algum ponto do material (nas proximidades de algum defeito inerente a sua constituição), ocorre a propagação instável de uma fratura, causando a ruptura do mesmo. Durante o processo de propagação é consumida uma certa quantidade de energia, função da área de fratura formada. Tal consumo deve estar representado em uma relação constitutiva que descreva o comportamento do material na fase pós-ruptura.

Pode-se estabelecer uma relação entre o fator crítico de intensidade de tensões e uma certa deformação crítica (média em uma região de controle), se for feita a hipótese de uma microfissura inerente ao material<sup>35</sup>. Caracterizando esta microfissura por uma dimensão  $a$ , pode-se escrever  $K_{Ic}$  através de sua forma típica (vide expressão 2.6.1):

$$K_{Ic} = \chi f_t a^{1/2} \quad (3.2.1)$$

Onde  $f_t$  é uma tensão de controle crítica e  $\chi$  é um parâmetro que depende da geometria do problema (forma da microfissura, inclinação com relação à direção de controle, etc.).

Empregando-se a relação (2.4.9) e fazendo-se  $f_t = \epsilon_p E$  (segundo a hipótese de comportamento linear até a ruptura), chega-se a uma expressão para a deformação crítica, para um estado plano de deformações:

$$\epsilon_p = R_f \left[ \frac{G_f}{E(1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad (3.2.2)$$

Onde  $R_f$  é um "fator de falha" definido como:

$$R_f = 1 / (\chi a^{1/2}) \quad (3.2.3)$$

No próximo item tornar-se-á evidente a vantagem de se escrever  $\epsilon_p$  como uma função de  $G_f$ , pois ambos são parâmetros que irão definir o diagrama constitutivo para as barras do modelo.

Quanto à definição do fator de falha, pode-se notar que ele incorpora todas as características da microfissura hipotética que dá origem ao processo de ruptura no elemento. Seu uso permitirá guardar uma certa distância de algumas propriedades do material, sobre as quais pouco se pode afirmar. Assim,  $R_f$  atua como um agente intermediário, sendo que esta estratégia se mostrará bastante conveniente no capítulo 4, quando será introduzido o aspecto estatístico do problema. Além disso, como será visto no item 4.3, um estudo da influência do fator de falha revela que o modelo é praticamente insensível ao mesmo, desde que mantido dentro de uma certa faixa de valores que garantam o caráter frágil do material. Esta observação corrobora o critério da MELF para definir a resistência de um material, exclusivamente através do parâmetro  $G_f$  (ou  $K_{Ic}$  pela expressão (2.4.9)).

A partir destas definições, pode-se adotar um diagrama bilinear para a Relação Constitutiva Elementar (RCE), conforme ilustrado na fig. 3.2.1. Note-se que para a compressão o material é considerado elástico linear perfeito, sendo que a ruptura do modelo global, quando comprimido, deverá ocorrer por tração indireta (efeito de Poisson). A adoção de formas lineares do comportamento do material para as fases pré e pós-ruptura são arbitrárias, e visam propiciar simplificações adicionais. Vários autores tem sugerido outras formas para o diagrama<sup>19,20</sup>, de modo a ajustar as curvas experimentais obtidas para materiais reais. No entanto, procurar-se-á demonstrar que tais sofisticacões não constituem o ponto mais importante para um funcionamento coerente dos modelos de discretização.

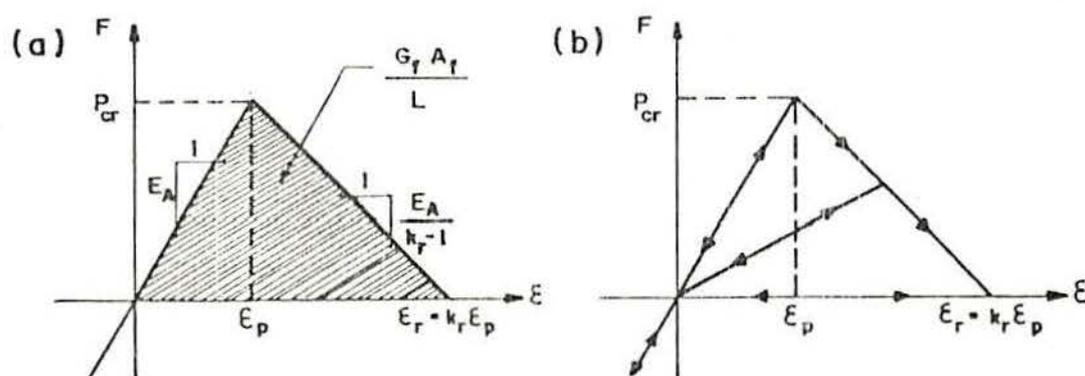


Fig. 3.2.1. -a) Diagrama constitutivo adotado e respectivos parâmetros; b) Esquema de carga e descarga.

Neste ponto, é essencial observar que a forma como se modela o efeito de "strain-softening" é de importância capital para uma correta representação do fenômeno de ruptura de um material frágil. Inúmeros modelos criados para este tipo de análise, como o Modelo da Banda de Fissuração, de Bazant e Oh (1983)<sup>10</sup>, o Modelo de Fratura Composta, de Willan et al. (1984)<sup>19</sup>, o Modelo da Fissura Fictícia, de Hillerborg et al. (1976)<sup>32</sup>, bem como modelos derivados propostos por Wittmann et al., Reinhardt et al., etc., têm se constituído essencialmente em explicações hipotéticas do mecanismo que dá origem ao

"strain-softening", cada um resultando em uma forma particular de modelá-lo. Há, porém, um consenso quanto a atribuir a este efeito um caráter não-local, visto que, quando constatado experimentalmente, está associado ao volume de controle investigado; dentro deste volume, nota-se claramente que o surgimento de descontinuidades, resultantes do processo de ruptura, tende a se dar de forma mais ou menos localizada, e conseqüentemente o comportamento quantificado refere-se portanto a valores médios.

Assim, pode-se generalizar as justificativas do "strain-softening", dizendo que ele representa uma conseqüência do surgimento de descontinuidades locais influenciando sobre uma relação constitutiva não-local, que por sua vez supõe um material contínuo!

Lembre-se que, do ponto de vista molecular, há uma distância (e não uma deformação) de afastamento crítica, após a qual a força de interação começa a decair.

Por outro lado, o efeito de "strain-softening" tem implicações energéticas cruciais, que se desconsideradas levam inevitavelmente a uma não-objetividade dos modelos de discretização, com consumo nulo de energia para a ruptura de modelos com malhas infinitamente refinadas.

Quanto ao processo de descarga convergente à origem (dano elástico), a escolha fundamenta-se em um trabalho experimental de Gran&Seaman<sup>37</sup>, onde o mesmo resultou ser muito mais eficiente do que o processo paralelo ao tramo elástico (dano plástico, usual nos modelos elastoplásticos perfeitos), para justificar matematicamente as curvas experimentais.

Assim, o tramo de enfraquecimento ("strain-softening") presente no diagrama adotado, tem como principal objetivo condicionar a quantidade de energia a ser consumida na ruptura da barra. Cabe lembrar que do ponto de vista dinâmico ele é incompleto, pois não considera que a tensão suportada pelo material, após atingir a tensão crítica, é também função do tempo transcorrido desde o início da ruptura, devido a velocidade finita de propagação da falha.

Os símbolos empregados no diagrama têm o seguinte significado:

$F$  : Força axial resultante da barra, função da deformação  $\epsilon$ , sendo  $P_{cr}$  o valor associado a  $\epsilon_p$ .

$E_A$  : Rigidez axial,  $E_n$  ou  $E_d$  conforme o tipo da barra;

$\epsilon_p$  : Deformação crítica de ruptura, que é a deformação para a qual uma microfissura se instabiliza e se propaga;

$k_r$  : Dutilidade; trata-se de um parâmetro que permite calcular a deformação para a qual a barra não transmite mais esforços de tração  $\epsilon_r = k_r \epsilon_p$ ;

$L$  : Comprimento da barra, ou comprimento de controle, ao qual o diagrama constitutivo se refere;

$A_f$  : Área de influência da barra, ou seja, área de fratura formada com a sua ruptura; pode ser expressa na forma  $A_f = c_A L^2$ , onde  $c_A$  é um coeficiente geométrico próprio do modelo, com valor aferido em 0.1385 (com base na simulação 1.5, Tab. 4.2.2).

$G_f$  : Energia consumida por área de fratura formada após a instabilização (definida no item 2.4 como energia específica crítica de fratura).

É importante observar que  $\epsilon_p$ ,  $E$ ,  $P_{cr}$ ,  $R_f$  e  $G_f$  são considerados propriedades exclusivas do material;  $A_f$  e  $L$  são propriedades exclusivas do modelo; finalmente os parâmetros  $k_r$  e  $E_A$  dependem tanto do modelo como do material.

A deformação  $\epsilon_r = k_r \epsilon_p$  pode ser interpretada como abertura axial crítica de uma fissura ( $\Delta_{cr}$ ) diluída no comprimento da barra ( $L$ ), conforme representado na fig.3.2.2. Esta abordagem, conhecida como Modelo da Fissura Fictícia, de Hillerborg, permite uma conexão entre a fase contínua e a fase descontínua do material, que têm constituído uma dificuldade na representação geométrica de propagação de fraturas.

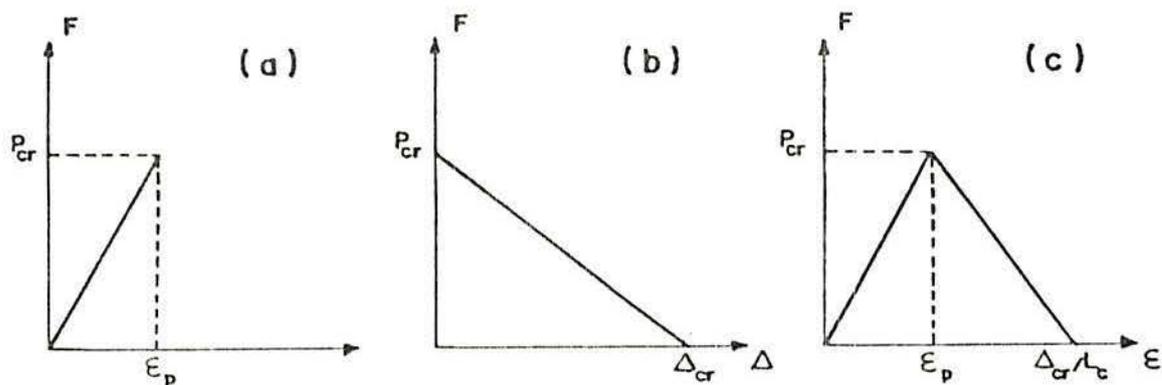


Fig.3.2.2. -a) Diagrama constitutivo elástico linear; b) Relação entre a força de tração transmitida e a abertura da fissura; c) Diagrama constitutivo composto, onde L é um comprimento de controle.

### 3.3 - Ajustes na RCE em função das dimensões da barra

A necessidade de realizar ajustes na RCE surge quando se verifica que, em análise não-linear com "strain-softening", os resultados globais são fortemente dependentes da malha de discretização<sup>10</sup>. Pensa-se que tal problema resulta do fato de que não é levada em conta a forma de ruptura, nem do processo de dissipação de energia a ela associado. Consequentemente, quando altera-se o nível de discretização preservando-se a RCE, o consumo de energia durante a ruptura varia, resultando em relações constitutivas globais inconsistentes.

Empregando-se o diagrama apresentado na fig.3.2.1 e supondo-se que a ruptura segue a um processo de propagação de fratura, que consome energia proporcionalmente a área fraturada, pode-se definir uma lei de ajuste em função do comprimento da barra L.

Conforme as considerações assinaladas acima, pode-se estabelecer o seguinte critério energético: "Enquanto o volume da região de influência da barra aumenta com o cubo de L, a energia total gasta com a ruptura aumenta com o quadrado".

Assim, pode-se escolher o parâmetro  $k_r$  para que a área sob o diagrama indique um consumo de energia proporcional à área de influência da barra, e não ao seu volume\*. Para as barras normais o balanço é feito da seguinte forma:

$$\int_0^{\epsilon_r} F(\epsilon) d\epsilon = \frac{G_f A_f}{L} = \frac{k_{rn} \epsilon_p^2 E_n}{2} \quad (3.3.1)$$

Substituindo-se  $A_f$  e  $\epsilon_p$  chega-se a expressão de ajuste:

$$k_{rn} = L_{cr} / L \quad (3.3.2)$$

Onde  $L_{cr}$  é dado por:

$$L_{cr} = \frac{2c_A (1 - \nu^2)}{\alpha R_f^2} \quad (3.3.3)$$

A expressão (3.3.2) mostra que  $k_{rn}$  é inversamente proporcional a  $L$ . É importante notar que quando um elemento rompe, nem toda a energia elástica é consumida no processo de fratura, sendo que parte desta preserva-se sob formas de energia cinética (vibrações induzidas) e energia elástica, nas duas partes em que o elemento se divide. Como não é possível levar em conta esta subdivisão para um elemento isolado (pois as massas estão concentradas nos nós, e não ao longo do seu comprimento), resulta uma restrição em termos de um valor máximo para o comprimento  $L$ . Tal restrição reflete o fato de que toda a energia elástica deve ser consumida pela fratura, ou seja,  $k_{rn}$  deve ser maior do que 1. Assim, o comprimento elementar crítico  $L_{cr}$  representa um limite para o nível de discretização, para que o modelo computacional funcione corretamente.

---

\* Observe-se que, se fosse aplicado o método dos elementos finitos, juntamente com o conceito de fissuração distribuída ("smeared cracking"), ter-se-ia uma situação idêntica.

Há um outro caminho para se proceder ao ajuste de  $k_{rn}$ , que pode ser chamado de critério geométrico, conforme a ilustração 3.2.2. Este poderia ser enunciado da seguinte forma: "quando a barra do modelo atinge o estado de deformação  $\epsilon_p$ , este valor corresponde a diluição em  $L$  da abertura crítica  $\Delta_{cr}$ ".

A abertura  $\Delta_{cr}$ , para a qual esforços de tração deixam de ser transmitidos entre as duas partes em que o material se divide, deve ser respeitada no modelo global, independentemente do nível de discretização. Assim,  $\Delta_{cr}$  deve ser um parâmetro independente de  $L$ . Tal critério de ajuste resulta na expressão:

$$k_{rn} = \frac{\Delta_{cr}}{\epsilon_p L} \quad (3.3.4)$$

Coerentemente com a expressão (3.3.2), aqui também  $k_{rn}$  é inversamente proporcional a  $L$ . Igualando-se as expressões (3.3.2) e (3.3.4) pode-se chegar a um valor para  $\Delta_{cr}$  que é obviamente independente de  $L$ . Tal consideração permite o cálculo de  $k_r$  para as barras diagonais:

$$k_{rd} = 2 k_{rn} / \sqrt{3} \quad (3.3.5)$$

Definido o critério de ruptura a nível elementar, parte-se agora para a análise do comportamento global do modelo, que deverá corroborar as diversas suposições feitas até aqui. Com base na breve teoria apresentada, desenvolveu-se um programa computacional denominado "FRACTUR", dotado de lançamento automático de coordenadas e condições de contorno, o qual foi utilizado em todo o subsequente desenvolvimento deste trabalho.

#### 3.4 - Observações gerais a respeito do programa FRACTUR

Basicamente este programa possui a mesma estrutura do que foi utilizado na dissertação de mestrado de HAYASHI,

diferindo apenas pela incorporação da teoria apresentada no item 3.3 e em facilidades adicionais para geração automática de configurações específicas. O funcionamento do programa pode ser descrito de forma sucinta, como se segue:

## I - ENTRADA DE DADOS

São fornecidos ao programa basicamente os seguintes dados para cada simulação:

- \* Dimensões do prisma a ser gerado automaticamente ( $M \times N \times L$  módulos), bem como a profundidade da fissura de bordo inicial, caso existente.

- \* Código do tipo de teste a ser realizado:

- (1) - Deformação uniaxial com velocidade controlada.
- (2) - Flexão por três pontos.
- (3) - Ensaio tipo Compact-tension.
- (4) - Tensão uniaxial com velocidade controlada.

- \* Tempo total de simulação e velocidade de aplicação do carregamento (tensão ou deformação imposta).

- \* Propriedades do material.

## II - PROCESSAMENTO PRELIMINAR

Antes do início da integração numérica são cumpridas as seguintes etapas:

- \* Cálculo das propriedades equivalentes para as barras da treliça.

- \* Geração automática das coordenadas nodais e aplicação das condições de contorno conforme o tipo de teste selecionado.

- \* Atribuição de massas nodais conforme volume de influência.

- \* Estabelecimento das conectividades das barras e atribuição de suas propriedades mecânicas equivalentes (caso

$CV_{\sigma} > 0$  tom-se o parâmetro  $G_f$  sorteado conforme a distribuição de probabilidades de Weibull). Abaixo estão as propriedades atribuídas as barras, em função das propriedades especificadas para o material:

$$\varepsilon_p = R_f \left[ \frac{G_f}{E (1 - \nu^2)} \right]^{1/2}$$

$$L_{cr} = \frac{2 c_A (1 - \nu^2)}{R_f^2}$$

$$k_{rn} = L_{cr} / L \quad (\text{dutilidade das barras normais})$$

$$k_{rd} = 2 k_{rn} / \sqrt{3} \quad (\text{dutilidade das barras diagonais})$$

(Com os parâmetros  $\varepsilon_p$  e  $k_r$  ficam portanto definidos os diagramas constitutivos de cada barra).

\* Liberação de nós e pré-ruptura de barras no plano yz, de forma a compor a fissura de bordo inicial, com profundidade igual ao número de módulos especificado.

\* Saída de dados de controle para documentar a simulação (opcional).

### III - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NO TEMPO

Uma vez cumpridas as etapas preliminares, o programa passa a realizar uma integração numérica pelo método explícito, através da técnica de diferenças finitas centrais. O procedimento correspondente a cada passo de integração é apresentado a seguir:

\* Cálculo da velocidade instantânea de aplicação do carregamento (forças ou deslocamentos nodais).

\* Cálculo do valor instantâneo do carregamento, por integração numérica da velocidade (regra dos trapézios).

\* Aplicação das forças nodais prescritas, caso seja esta a forma de carregamento.

\* Cálculo das forças nas barras (F) em função de seu estado de deformação ( $\epsilon$ ), conforme o seguinte esquema:

$$F(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon E_{A1} & \text{para } (\epsilon < 0) \\ \epsilon E_{A2} & \text{para } (\epsilon > 0) \end{cases}$$

Onde  $E_A = E_n$  para barras normais, e  $E_A = E_d$  para barras diagonais. Os sub-índices 1 e 2 referem-se as rigidezes a compressão e tração, respectivamente. Assim, quando  $\epsilon$  ultrapassa o valor  $\epsilon_p$ , a máxima deformação de tração imposta à barra passa a ser registrada como  $\epsilon_m$ . Da mesma forma, a rigidez a tração deve ser corrigida (devido ao "strain-softening") pela expressão:

$$E_{A2} = E_{A1} \left( \frac{k_r \epsilon_p - \epsilon_p}{k_r \epsilon - \epsilon} \right)$$

Quando  $\epsilon_m$  finalmente ultrapassar o valor  $\epsilon_r = k_r \epsilon_p$ , é atribuído definitivamente  $E_{A2} = 0$ .

\* Decomposição da força de cada barra segundo os três eixos globais, e aplicação das componentes nos nós conectores.

\* Redefinição da geometria segundo as expressões de diferenças finitas centrais para as equações de equilíbrio:

$$u_{t+1} = [ (f_x \Delta t^2) / m + 2u_t - D_{f1} u_{t-1} ] / D_{f2}$$

$$v_{t+1} = [ (f_y \Delta t^2) / m + 2v_t - D_{f1} v_{t-1} ] / D_{f2}$$

$$w_{t+1} = [ (f_z \Delta t^2) / m + 2w_t - D_{f1} w_{t-1} ] / D_{f2}$$

Onde  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  são as componentes da força resultante no nó,  $m$  é a massa nodal e  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamentos que devem ser armazenados em três instantes diferentes. Os parâmetros de amortecimento são obtidos do parâmetro de amortecimento proporcional a massa pelas seguintes expressões:

$$D_{f1} = 1 - \frac{D_f \Delta t}{2}$$

$$D_{f2} = 1 + \frac{D_f \Delta t}{2}$$

(Caso o carregamento seja da forma de deslocamentos prescritos, ao invés de se calcular as novas posições nodais, pelas expressões acima, impõe-se aqui o valor desejado).

\* Avaliação dos resultados em termos de tensões (forças) ou deformações (deslocamentos) médios, conforme o tipo de teste especificado, compondo assim um par de valores que é gravado para formar a curva Solicitação Vs. Resposta.

\* Avaliação do estado energético do sistema e saída dos valores da energia consumida (ruptura, amortecimento) ou armazenada (elástica, cinética), cuja soma deve igualar a energia externa aplicada ao sistema (usualmente, trabalhando com dupla precisão, o erro é da ordem de 1%). Se a diferença for significativa pode haver um erro de avaliação ou outros problemas internos que precisam ser investigados. O controle energético é um excelente avaliador da estabilidade numérica, que pode ser camuflada pela forte não-linearidade da análise (tal problema decorre geralmente de um valor muito alto para  $\Delta t$ ).

#### IV - FINAL

Após o passo III ser realizado tantas vezes quando o tempo total de integração especificado requeira, os arquivos de saída são fechados e o programa é encerrado. É possível todavia, pela atual versão do programa, especificar-se um número de até 20 simulações a serem realizadas consecutivamente, através de um arquivo gerenciador.

A constante de amortecimento proporcional a massa não tem aqui uma conotação física clara. Entretanto, seu emprego se justifica pela necessidade de amenizar as vibrações que surgem durante as simulações. O valor usualmente adotado para  $D_f$  é  $2000s^{-1}$ . A razão de escolha de tal número baseia-se no fato de que ele é suficientemente baixo para evitar um consumo expressivo de energia nas simulações que serão realizadas.

A avaliação da energia contida e dissipada no sistema é feita nó a nó para a energia cinética e a energia de amortecimento, e barra a barra para a energia elástica e a energia de ruptura.

#### 4 - APLICAÇÃO DO MODELO NA REPRESENTAÇÃO DE PROBLEMAS BÁSICOS DA MELF

##### 4.1 - Considerações gerais

Para verificar a aplicabilidade do modelo em problemas de concentração de tensões abordados pela MELF, foi empregada uma das quatro configurações apresentadas no item 2.3, representada através dos módulos cúbicos. Por razões de simplicidade escolheu-se a configuração (d), ou seja, tira de comprimento infinito e largura  $h$  com fissura lateral de comprimento  $a$ . Também foi conveniente a especificação de um estado plano de deformações. Na figura 4.1.1 está ilustrada a forma de discretização e condições de contorno; abaixo estão indicados os valores adotados para os parâmetros do material:

$E = 3.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$	: Módulo de Young.
$\nu = 0.2 \ (\alpha = 5/12)$	: Coeficiente de Poisson.
$\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$	: Massa específica.
$D_f = 2000 \text{ s}^{-1}$	: Amortecimento proporcional.

Para verificar a validade da teoria proposta no capítulo anterior, faz-se  $h = n L$ , de modo que a tensão crítica global  $f_t$  deve manter-se estável para um mesmo valor de  $h$ , à medida em que varia-se  $n$  (diferentes níveis de discretização). Na fig. 4.1.1 está representado um nível de discretização  $n = 12$ . Observa-se que a configuração (d) do item 3.3 refere-se a uma tira infinita, enquanto aqui tem-se uma placa quadrada ( $h \times h$ ). Tal fato, decorrente de limitações computacionais, não terá influência significativa nos resultados, como será visto.

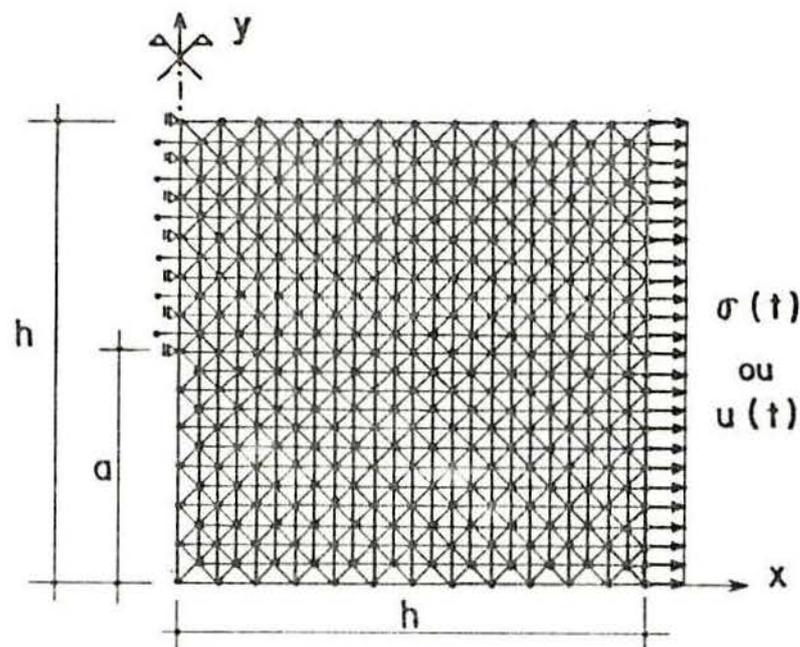


Fig.4.1.1.-Representação de um problema da MELF através do modelo em treliça. A solicitação pode ser feita através de um campo uniforme de tensões ou deslocamentos.

Dois casos distintos foram estudados: aplicação de campos uniformes de tensões  $\sigma(t)$ , e deslocamentos  $u(t)$ . A tensão global ( $\sigma'$ ) é calculada dividindo-se a soma das resultantes dos nós da face solicitada pela área da seção transversal (plano  $yz$ ). A deformação global ( $\epsilon'$ ), por sua vez, é definida como o deslocamento médio dos nós da face carregada em relação ao plano de simetria, dividido pelo comprimento  $h$ . Tensões e deslocamentos globais, definem a relação constitutiva global (RCG), que descreve o processo de ruptura. A RCG representa uma relação constitutiva não-local, ou seja, a média sobre uma certa região de controle. A condição de bordo (tensão ou deslocamento), é imposta conforme uma função de velocidade, apresentada abaixo:

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\sigma}_f [1 - e^{-(t/t_0)}] \quad (4.1.1)$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_f [1 - e^{-(t/t_0)}] \quad (4.1.2)$$

Onde foram adotadas as seguintes velocidades finais:

$$\dot{\sigma}_f = 1.0 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{) s}^{-1} \qquad \dot{u}_f = (0.1 \text{ h}) \bar{s}^{-1}$$

O tempo  $t_0$  representa o instante em que a velocidade atinge cerca de 63% de seu valor assintótico máximo (nas simulações que se seguem é adotado  $t_0 = 0.00012\text{s}$ ). A função (4.1.1) pretende evitar o efeito de impacto decorrente da imposição súbita da tensão de bordo final  $\sigma_f$ . A função (4.1.2), por sua vez, visa aproximar o movimento do bordo do corpo de prova em uma máquina de ensaios, em testes com velocidades de deformação constantes, pois na prática não poderiam ocorrer as acelerações infinitas que resultariam de uma aplicação súbita da velocidade de deslocamento final  $\dot{u}_f$ .

Note-se que a configuração (d), definida no item 2.3, refere-se a aplicação de uma tensão uniforme de bordo, e neste caso dispõe-se da expressão (2.3.4) para avaliar  $K_{Ic}$ . Por outro lado, para se observar o enfraquecimento do modelo ("strain-softening"), torna-se mais conveniente o emprego de um deslocamento controlado. No entanto, sabe-se que neste caso a expressão para  $K_{Ic}$  deverá ser diferente, uma vez que o campo de tensões ocasionado pela solicitação não será mais o mesmo. Desta forma, procurar-se-á utilizar os resultados fornecidos pelo próprio modelo, de modo a se obter uma fórmula aproximada para o fator de intensidade de tensões, o que permitirá ao menos uma avaliação de coerência interna.

O estudo do desempenho do modelo foi feito através de uma série de 40 simulações (20 para cada tipo de solicitação), de modo que a influência dos diversos parâmetros pudesse ser analisada. As simulações foram divididas em 5 grupos, conforme apresentado na tab.4.1.1. Os resultados dos grupos 2 a 5 são complementados pela simulação 1.3.

- Grupo 1 : Ajuste da RCE (Objetividade).
- Grupo 2 : Energia específica de fratura  $G_f$ .
- Grupo 3 : Relação  $a/h$ .
- Grupo 4 : Efeito de escala.
- Grupo 5 : Fator de falha  $R_f$ .

Tabela 4.1.1. - Dados das simulações.

(Unidades MPa e metros)

SIM	a	a/h	h	n	$L_c$	$G_f$	$K_{I_0}$	$k_r$	$R_f$	$\epsilon_{P-5}$ ( $10^{-5}$ )
1.1	0.06	1/2	0.12	8	.0150	12	.612	2.03	4.58	9.35
1.2	0.06	1/2	0.12	10	.0120	12	.612	2.53	4.58	9.35
1.3	0.06	1/2	0.12	12	.0100	12	.612	3.04	4.58	9.35
1.4	0.06	1/2	0.12	14	.0086	12	.612	3.55	4.58	9.35
1.5	0.06	1/2	0.12	16	.0075	12	.612	4.05	4.58	9.35
2.1	0.06	1/2	0.12	12	.0100	6	.433	3.04	4.58	6.61
2.2	0.06	1/2	0.12	12	.0100	18	.750	3.04	4.58	11.46
2.3	0.06	1/2	0.12	12	.0100	24	.866	3.04	4.58	13.23
3.1	0.05	5/12	0.12	12	.0100	12	.612	3.04	4.58	9.35
3.2	0.04	1/3	0.12	12	.0100	12	.612	3.04	4.58	9.35
3.3	0.03	1/4	0.12	12	.0100	12	.612	3.04	4.58	9.35
3.4	0.02	1/6	0.12	12	.0100	12	.612	3.04	4.58	9.35
4.1	0.05	1/2	0.10	12	.0100	12	.612	3.04	4.58	9.35
4.2	0.07	1/2	0.14	12	.0100	12	.612	3.04	4.58	9.35
4.3	0.08	1/2	0.16	12	.0100	12	.612	3.04	4.58	9.35
5.1	0.06	1/2	0.12	12	.0100	12	.612	10.2	2.50	5.10
5.2	0.06	1/2	0.12	12	.0100	12	.612	5.00	3.57	7.29
5.3	0.06	1/2	0.12	12	.0100	12	.612	2.00	5.65	11.53
5.4	0.06	1/2	0.12	12	.0100	12	.612	1.50	6.52	13.31
5.5	0.06	1/2	0.12	12	.0100	12	.612	1.13	7.50	15.31

## 4.2 - Resultados obtidos

Inicialmente foi estudado o desempenho do modelo para a solicitação por tensão controlada. Os resultados em termos de tensões críticas e deformações associadas, estão apresentados na tab.4.2.1.

Visto que a tensão é imposta independentemente do fenômeno de ruptura, faz-se necessário definir um critério para determinar o momento em que o modelo atingiu a sua tensão crítica. Conforme será visto adiante, para a série com deslocamento controlado, a deformação associada a tensão crítica é praticamente coincidente com a deformação associada ao pico da energia elástica (com diferenças em torno de 5%). Tal critério de avaliação está ilustrado na fig.4.2.1. Assim, a coluna denominada  $f'_t$ , na tab.4.2.1, foi determinada exatamente desta forma. Já a coluna denominada  $\epsilon'_p$ , refere-se portanto a deformação para qual a energia elástica atinge o seu valor máximo.

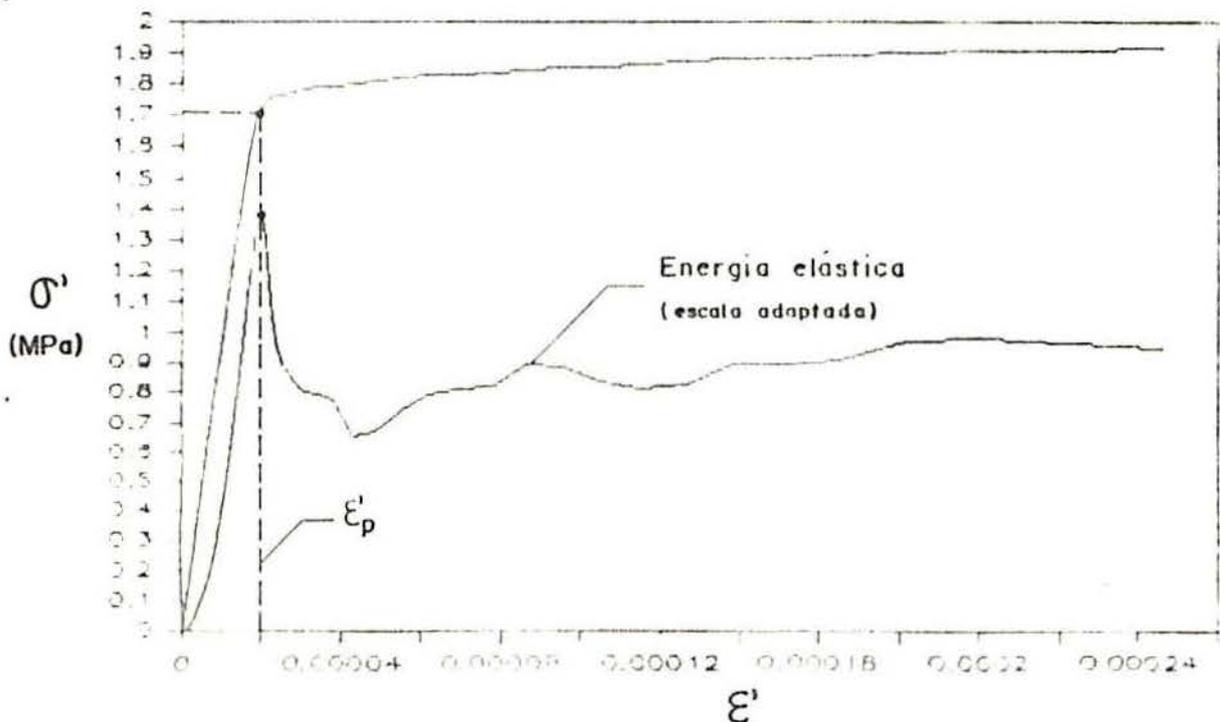


Fig.4.2.1.- Definição da tensão crítica através do pico da energia elástica (com escala ajustada). As curvas referem-se a simulação 3.4.

Tabela 4.2.1.- Resultados para tensão controlada.  
(Unidades MPa e metros)

SIM.	$\epsilon'_p$ ( $10^{-5}$ )	$f'_l$	$f_l$	$\Delta_1$ (%)	$K'_{I_0}$	$G'_f$	$\Delta_2$ (%)
1.1	1.56	0.566	0.498	13.7	0.695	15.46	28.8
1.2	1.38	0.532	0.498	6.8	0.654	13.69	14.1
1.3	1.30	0.512	0.498	2.8	0.629	12.66	5.5
1.4	0.71	0.539	0.498	8.2	0.662	14.02	16.8
1.5	0.69	0.532	0.498	6.8	0.654	13.69	14.1
2.1	0.93	0.355	0.352	0.7	0.436	6.08	1.3
2.2	1.60	0.648	0.611	6.1	0.796	20.28	12.7
2.3	1.85	0.736	0.705	4.4	0.904	26.15	9.0
3.1	1.25	0.689	0.701	-1.7	0.602	11.60	-3.3
3.2	1.48	0.961	0.965	-0.4	0.609	11.87	-1.1
3.3	1.61	1.280	1.326	-3.4	0.591	11.18	-6.8
3.4	1.99	1.720	1.878	-8.4	0.561	10.07	-16.1
4.1	1.49	0.573	0.546	5.0	0.643	13.23	10.3
4.2	1.17	0.457	0.461	-0.9	0.606	11.75	-2.1
4.3	1.11	0.451	0.431	4.5	0.640	13.11	9.3
5.1	2.06	0.532	0.498	6.8	0.654	13.67	13.9
5.2	1.51	0.525	0.498	5.4	0.645	13.31	10.9
5.3	1.44	0.573	0.498	15.1	0.704	15.86	32.2
5.4	1.26	0.525	0.498	5.4	0.645	13.31	10.9
5.5	1.43	0.614	0.498	23.3	0.754	18.20	51.7

A tensão crítica teórica  $f_l$  é calculada pela expressão (2.3.4) com  $K_I = 0.612 \text{ MNm}^{-1/2}$ . O erro percentual  $\Delta_1$  é calculado entre  $f'_l$  e  $f_l$ . O parâmetro  $K'_{I_0}$  é calculado a partir de  $f'_l$  também pela expressão (2.3.4), e permite o cálculo de  $G'_f$  através da expressão (2.4.9). O erro  $\Delta_2$  é calculado entre o valor de  $G_f$  na tab.4.1.1 (teórico) e  $G'_f$  na tab.4.2.1 (verificado).

Apesar da conhecida influência dos aspectos dinâmicos da simulação, enquanto se compara a solução com uma teoria estática, e da representação imperfeita da geometria teórica (inviabilidade de se representar uma tira infinita), o modelo apresenta bons resultados. Nas simulações 1.1-5, pode-se notar que a técnica de ajuste proposta faz com que o modelo se torne pouco sensível ao nível de discretização (obviamente dentro de certos limites). A influência dos diversos parâmetros foi corretamente representada, de modo que a expressão (2.3.4) é aparentemente confirmada pelos resultados obtidos.

Na tab.4.2.2 encontram-se os resultados obtidos para a aplicação de um deslocamento controlado, conforme ilustrado na fig.4.1.1. Tal análise permite a avaliação da energia de fratura de duas outras formas: pela medição direta da soma da energia dissipada em cada barra, dividida pela área do ligamento ( $G'_f$ ), e pela integração da área sob o RCG, também dividida pela área do ligamento ( $G''_f$ ). Observa-se que esta última técnica não conduz nem a valores próximos ao teórico, nem a valores coerentes entre si; por outro lado, cabe lembrar que na maioria da literatura consultada verificou-se ser desta forma que o parâmetro  $G_f$  é avaliado a partir de experimentos<sup>29</sup>. Tal discrepância decorre da existência de energia sob outras formas, de difícil avaliação, como a cinética, que vem a se dissipar pelo amortecimento interno do material.

A coluna denominada  $\Delta$  refere-se à diferença existente entre as deformação associadas ao pico do RCG ( $\epsilon'_p$ ), e ao pico da energia elástica acumulada ( $\epsilon'_0$ ). Justifica-se aqui, face aos pequenos valores encontrados para  $\Delta$ , o critério de avaliação da tensão crítica utilizado na tab.4.2.1.

Tabela 4.2.2. - Resultados para deslocamento controlado. (Unidades MPa e metros)

SIM.	$f'_t$	$\epsilon'_p$ ( $10^{-3}$ )	$\epsilon'_\sigma$ ( $10^{-3}$ )	$\Delta$ (%)	$K'_{Ic}$	$G'_f$	$G''_f$	$G'''_f$
1.1	1.16	6.14	6.27	-2.1	0.613	12.03	13.03	23.08
1.2	1.19	6.41	6.41	0.0	0.629	12.66	13.00	23.56
1.3	1.16	6.21	6.34	-2.1	0.612	12.00	12.43	22.04
1.4	1.12	5.94	6.28	-5.4	0.592	11.21	12.16	21.61
1.5	1.14	6.41	6.27	2.2	0.603	11.64	12.01	21.74
2.1	0.83	4.44	4.57	-2.8	0.440	6.20	6.22	11.89
2.2	1.41	7.50	7.43	0.9	0.746	17.81	18.63	31.85
2.3	1.61	8.59	8.52	0.8	0.851	23.17	24.83	41.47
3.1	1.34	6.21	6.41	-3.1	0.612	12.00	12.19	21.79
3.2	1.54	6.41	6.55	-2.1	0.612	12.00	12.02	22.21
3.3	1.79	6.82	6.95	-1.9	0.612	12.00	11.99	24.11
3.4	2.17	7.70	7.94	-1.8	0.612	12.00	12.93	29.38
4.1	1.25	6.71	6.71	0.0	0.603	11.64	12.84	21.73
4.2	1.08	5.73	5.90	-2.9	0.617	12.18	12.16	22.38
4.3	1.02	5.42	5.52	-1.8	0.623	12.42	11.97	22.65
5.1	0.88	6.21	8.18	-24.1	0.464	6.89	24.65	28.18
5.2	1.09	6.48	6.27	3.3	0.575	10.58	13.26	22.47
5.3	1.20	6.55	6.27	4.5	0.633	12.83	12.80	23.27
5.4	1.34	6.89	6.95	-0.9	0.707	16.00	12.25	27.17
5.5	1.52	7.97	7.77	2.6	0.602	20.59	12.25	32.83

Como não foi encontrada na literatura disponível uma expressão para  $K_I$ , relativa a aplicação de um deslocamento de bordo, utilizou-se os próprios resultados das simulações para obtê-la. Para tal, empregaram-se os testes 1.3 e 3.1-4. Buscou-se uma expressão análoga a (2.3.4), que possui 5 coeficientes passíveis de ajuste. Desta forma montou-se um sistema linear de 5 equações:

$$\sum_{i=0}^4 c_i (a/h)^i = \frac{K_{I\sigma}}{f'_t a^{1/2}} \quad (4.2.1)$$

Onde  $K_{I\sigma}$ ,  $a$  e  $h$  são obtidos da tab.4.1.1,  $f'_t$  é o resultado da simulação e  $c_i$  são as incógnitas procuradas.

Resolvido o sistema obteve-se a seguinte expressão:

$$K_I = \sigma a^{1/2} [ 2.12 - 1.04(a/h) + 1.97(a/h)^2 - 1.10(a/h)^3 + 3.26(a/h)^4 ] \quad (4.2.2)$$

A tensão  $\sigma$  refere-se a um valor médio no bordo em que se aplica o deslocamento controlado.

Assim, a coluna  $K'_{I\sigma}$  foi obtida através da expressão (4.2.2), enquanto a coluna  $G'_f$  resultou de  $K'_{I\sigma}$  através de (2.4.9). A coerência do ajuste pode ser testada através das simulações 2.1-3 e 4.1-3, onde se observa uma excelente aproximação dos valores teóricos. Obviamente a expressão proposta não é precisa como as que estão apresentadas no item 2.3 (obtidas por técnicas numéricas mais específicas), mas observando-se os resultados obtidos para tensão controlada, pode-se ter uma idéia de sua razoável eficiência.

Nas páginas seguintes estão apresentados os RCGs relativos as simulações da tab.4.2.2. Estão superpostos os diagramas pertencentes a um mesmo grupo, ilustrando de forma mais clara a influência de cada parâmetro estudado.

As oscilações remanescentes resultam da massa livre após a ruptura, comprimindo e descomprimindo a face deslocada com velocidade constante.

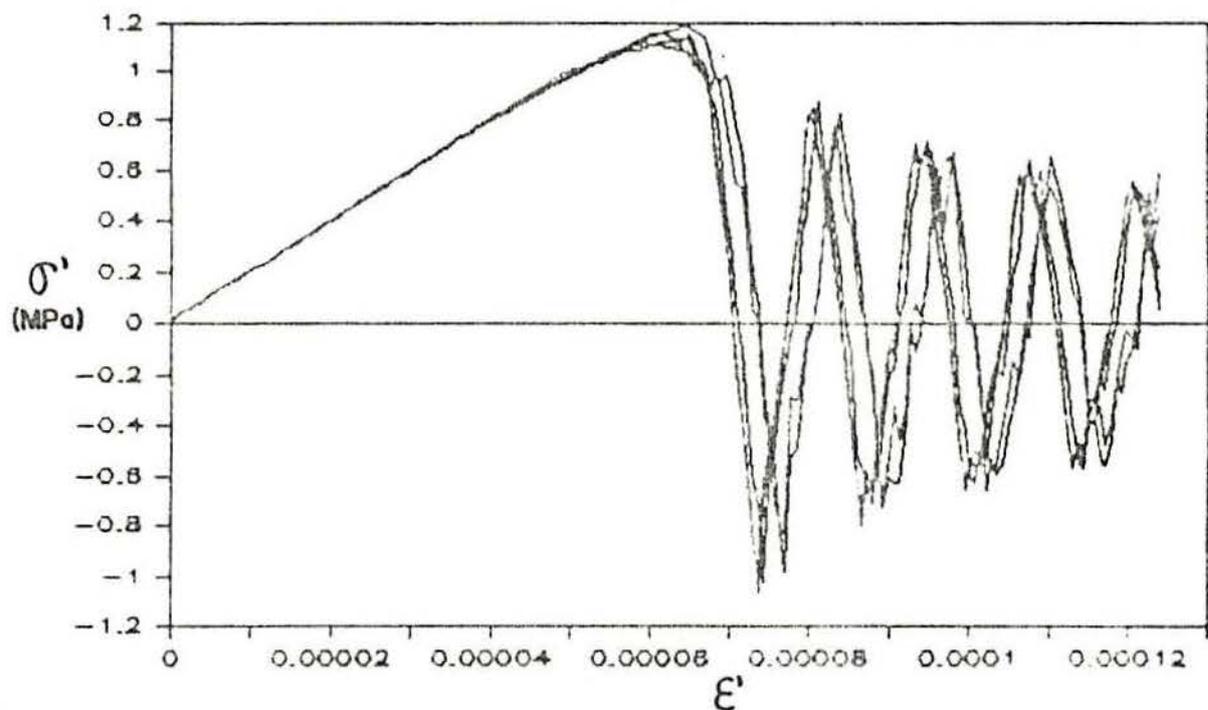


Fig.4.2.2.- Relações constitutivas globais dos testes de 1.1-5, mostrando o resultado do ajuste proposto (deform. controlada).

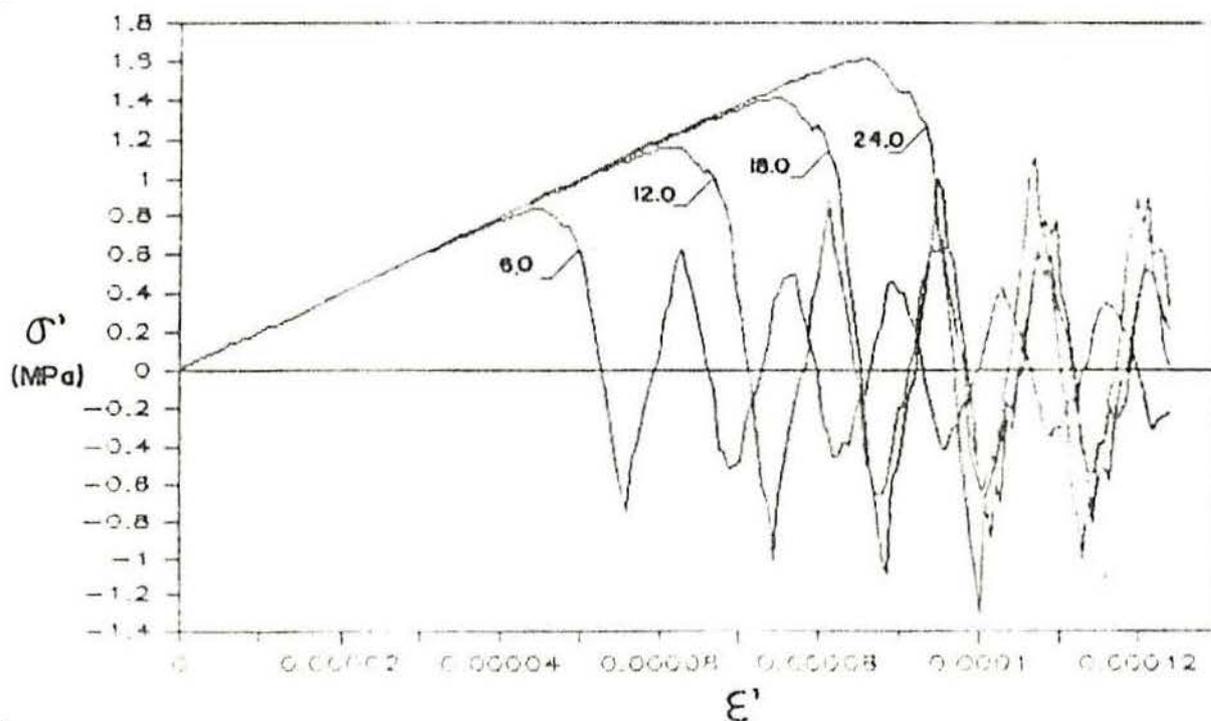


Fig.4.2.3.- Relações constitutivas globais dos testes 2.1-3 e 1.3, mostrando a influência do parâmetro  $G_f$  (indicado em N/m, deform. controlada).

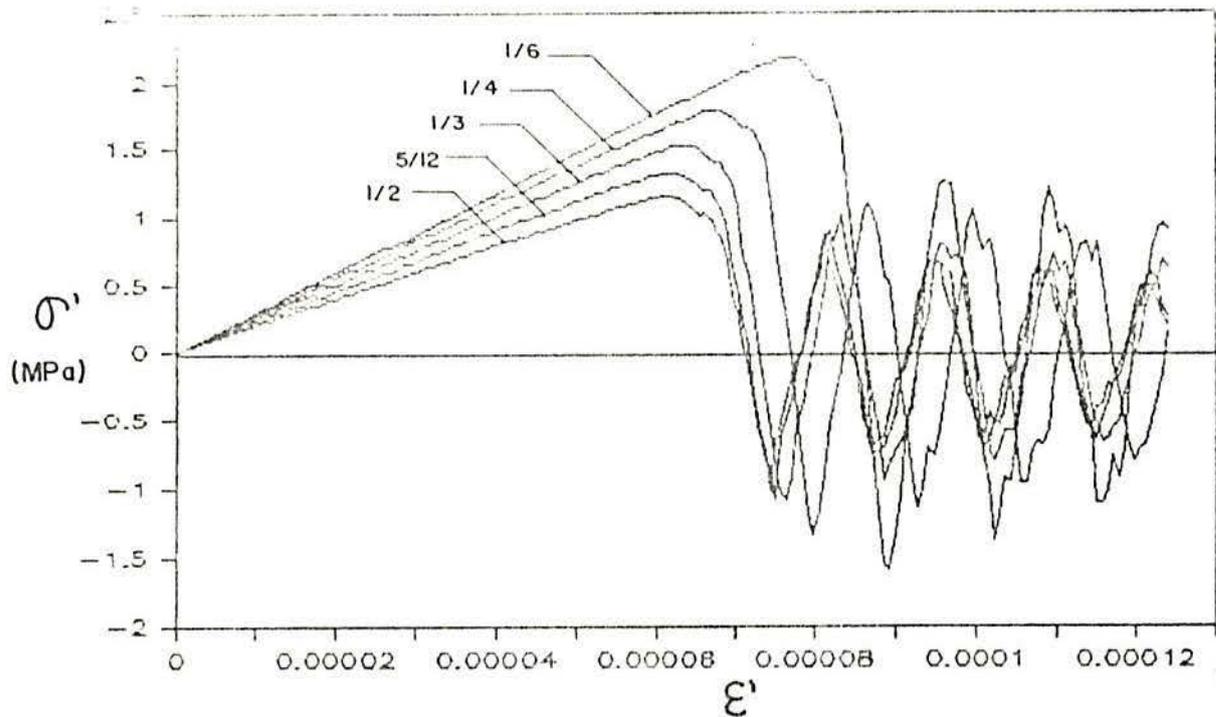


Fig. 4.2.4. - Relações constitutivas globais dos testes de 3.1-4 e 1.3, mostrando a influência da relação  $a/h$  (deform. controlada).

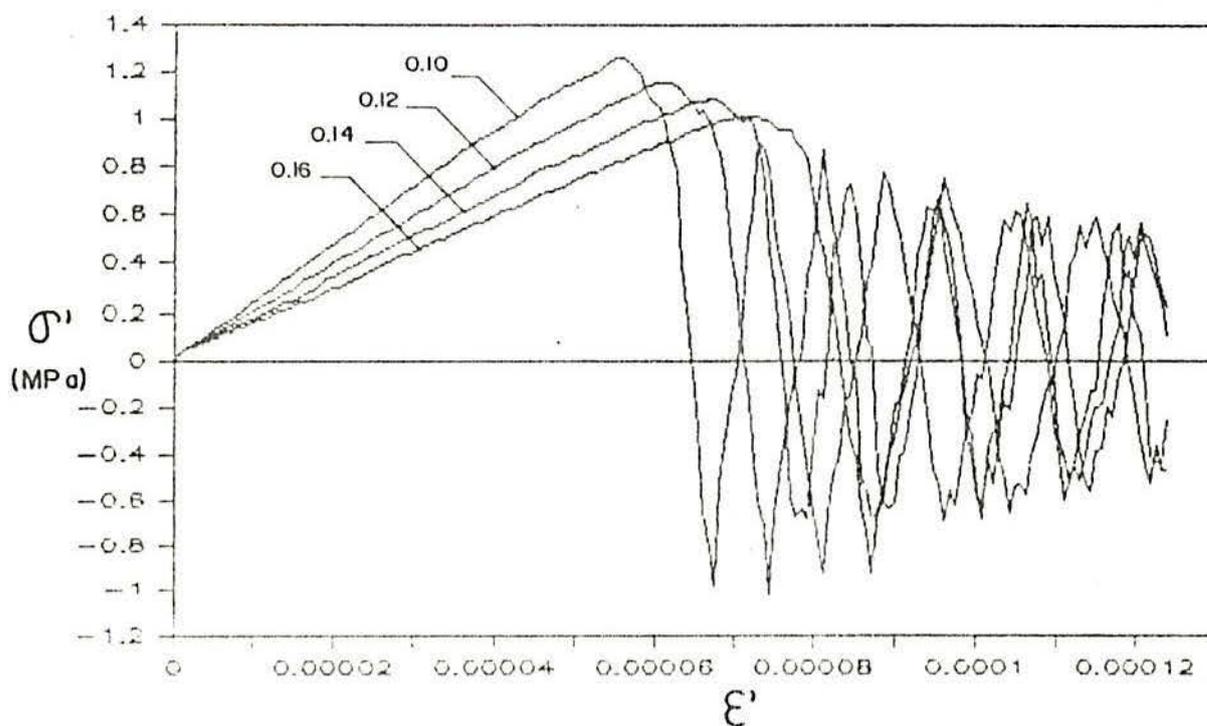


Fig. 4.2.5. - Relações constitutivas globais dos testes de 4.1-3 e 1.3, mostrando o efeito de escala da MELF ( $h$  em metros, deform. controlada).

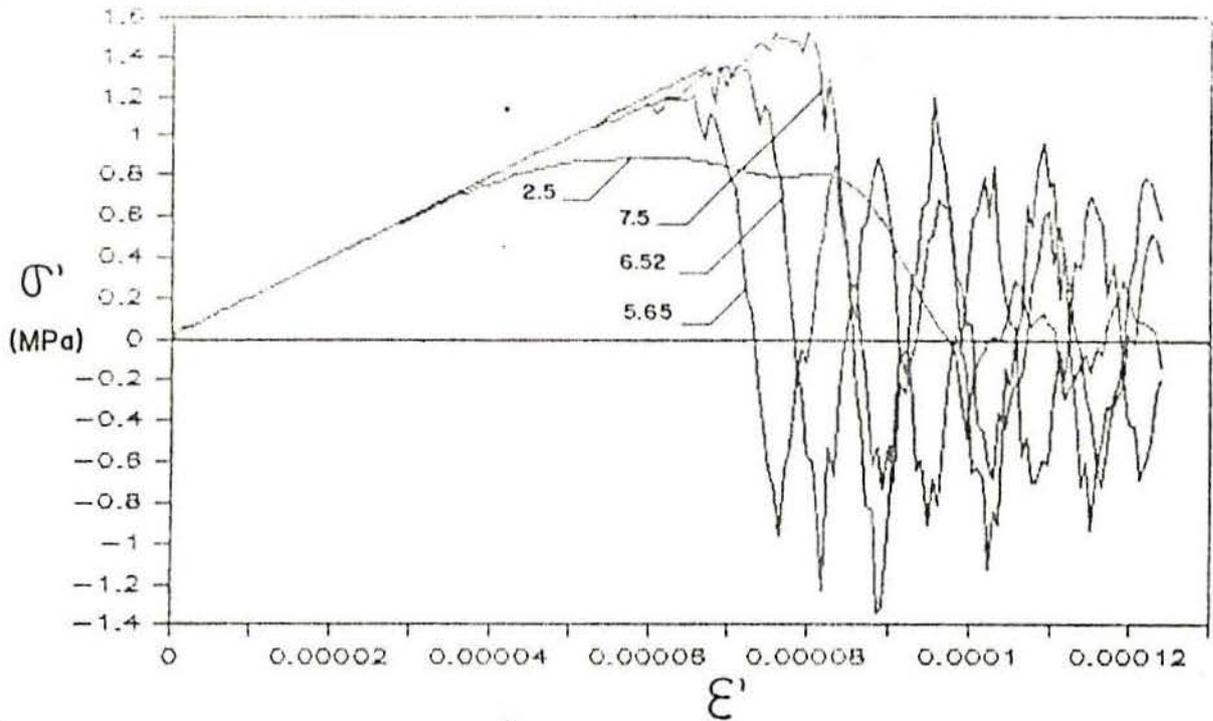


Fig. 4.2.6. - Relações constitutivas globais dos testes 5.1, 5.3, 5.4 e 5.5, mostrando a influência do fator de falha  $R_f$  (indicado em  $m^{-1/2}$ , deform. controlada).

A influência do parâmetro  $R_f$ , apresentada no gráfico acima, merece algumas considerações especiais visto ter sido o mesmo introduzido originalmente neste trabalho. Pelas equações (3.2.2), (3.3.2) e (3.3.3) pode-se notar que  $R_f$  influi na RCE definindo a inclinação do tramo descendente, sem entretanto alterar a área sob a mesma (consequentemente o fator de falha influi também na deformação crítica). Como  $k_r > 1$ , têm-se um valor máximo que  $R_f$  pode assumir, dado por:

$$R_f \leq \left[ \frac{2c_A (1 - \nu^2)}{\alpha L} \right]^{1/2} \quad (4.2.3)$$

Tal inequação é obtida por um simples modificação da expressão (3.3.3). Por outro lado,  $R_f$  também não pode assumir valores muito baixos, tendo em vista que a medida em que a ductilidade aumenta, o material perde o seu caráter frágil.

Na fig. 4.2.6 estão presentes curvas representativas desta faixa permitida de variação do fator de falha. Note-se que para  $R_f = 2.5 \text{ m}^{-1/2}$  a RCG passa a ter um comportamento diferenciado. Não se pode afirmar que o material esteja tendendo a um comportamento plástico por duas razões: primeiro porque independentemente dos valores de parâmetros foi especificado um processo de descarga convergente na origem (que na plasticidade não é verificado); segundo porque não se tem uma idéia clara das consequências tridimensionais da RCE axial (superfície de escoamento resultante).

A observação mais importante diz respeito a relativa insensibilidade do modelo ao fator de falha, dentro da faixa de valores permitida (para as simulações com tensão controlada, conforme Tab. 4.2.1, a sensibilidade praticamente não existe). Teoricamente, pelos critérios da MELF a tensão crítica de ruptura deve depender de um único parâmetro:  $G_f$  (ou opcionalmente  $K_{Ic}$ , pela relação (2.4.9)). Assim, dada a arbitrariedade do diagrama bilinear, era de se esperar que apenas duas de suas propriedades tivessem importância real: a inclinação na origem e a área a definir o consumo de energia na ruptura. Pensa-se que estas observações são suficientes para justificar o bom comportamento tridimensional de uma RCE unidimensional, enquanto respeita a característica de fragilidade. Em poucas palavras, o mais importante não é o estabelecimento de uma correta relação Tensão VS. Deformação na fase pós ruptura, mas sim a imposição um consumo de energia coerente com o parâmetro  $G_f$ .

A inclinação do tramo descendente do diagrama constitutivo global não tem o significado que foi atribuído ao mesmo na relação constitutiva elementar. Para o RCG, a queda de tensão após a ruptura é um fenômeno dinâmico, e sua velocidade de registro dependerá tanto da velocidade de propagação da fratura como da velocidade de deslocamento imposto.

A energia específica de fratura  $G_f''''$ , apresentada na tab. 4.2.2., é referente à área sob o RCG até a deformação para a qual a tensão se anula pela primeira vez, após atingido o pico. Nota-se que, no caso de uma rigidez infinita para o

agente que impõe o deslocamento (facilmente representado pelo modelo, mas impossível de se obter na prática), resultam vibrações remanescentes que indicam ainda a presença de energia no material (tanto cinética como elástica). Isto invalida a hipótese de que  $G_f'''$  represente a energia consumida no processo de fratura, pois na verdade seu valor será sempre superior ao correto. Tal fato é claramente observado pelas discrepâncias entre as duas últimas colunas da tab. 4.2.2.

#### 4.3 - Análise do desempenho do modelo na MELF

Para maior clareza, nas figuras 4.3.1-5 está ilustrada a influência de cada parâmetro estudado na tensão crítica  $f_t$ . Os pontos marcados são provenientes das tabelas 4.2.1 e 4.2.2, sendo que os escuros referem-se às simulações com deslocamento controlado, e os claros àquelas em que se aplicou uma tensão controlada.

Para atestar o bom desempenho do modelo estão também presentes em cada gráfico as curvas teóricas adaptadas ao estudo de cada parâmetro. Tais curvas resultam de simples modificações das expressões (2.3.4) e (4.2.2). Para a fig. 4.3.3, a linha cheia resulta do ajuste dos próprios pontos apresentados, constituindo portanto um resultado forçado. No entanto, para as demais figuras, o bom ajuste que ela apresenta atesta a coerência deste resultado.

Por outro lado, a linha tracejada é obtida de uma solução teórica fechada da MELF, e constitui portanto uma demonstração do bom desempenho do modelo.

Da fig. 4.3.1. pode-se concluir que o critério de ajuste proposto para a RCE, de modo a compensar as dimensões do elemento de discretização, permite uma satisfatória invariância dos resultados. Embora a técnica permita obter resultados igualmente corretos para discretizações mais grosseiras, convém lembrar da limitação que a teoria impõe, em termos de um valor máximo para  $L$ .

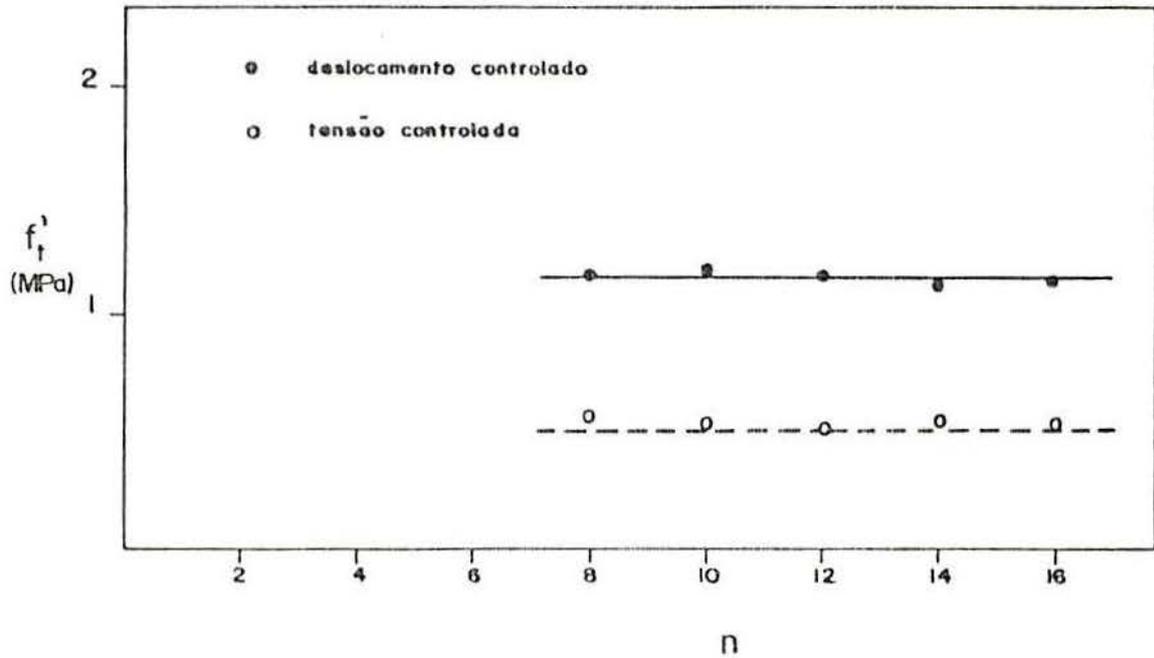


Fig. 4.3.1.- Influência do grau de discretização ( $n$ ) em  $f'_t$ . A linha cheia resulta da expressão (4.2.2) e a tracejada da (2.3.4).

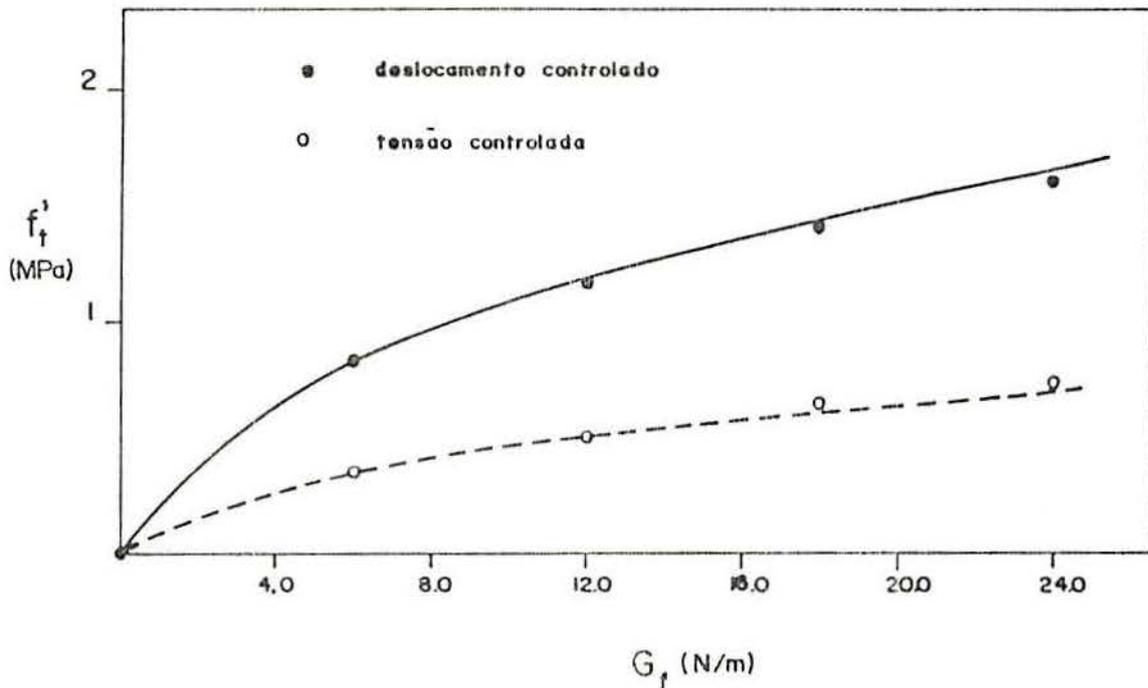


Fig. 4.3.2.- Influência da energia específica de fratura em  $f'_t$ . A linha cheia resulta da expressão (4.2.2) e a tracejada de (2.3.4).

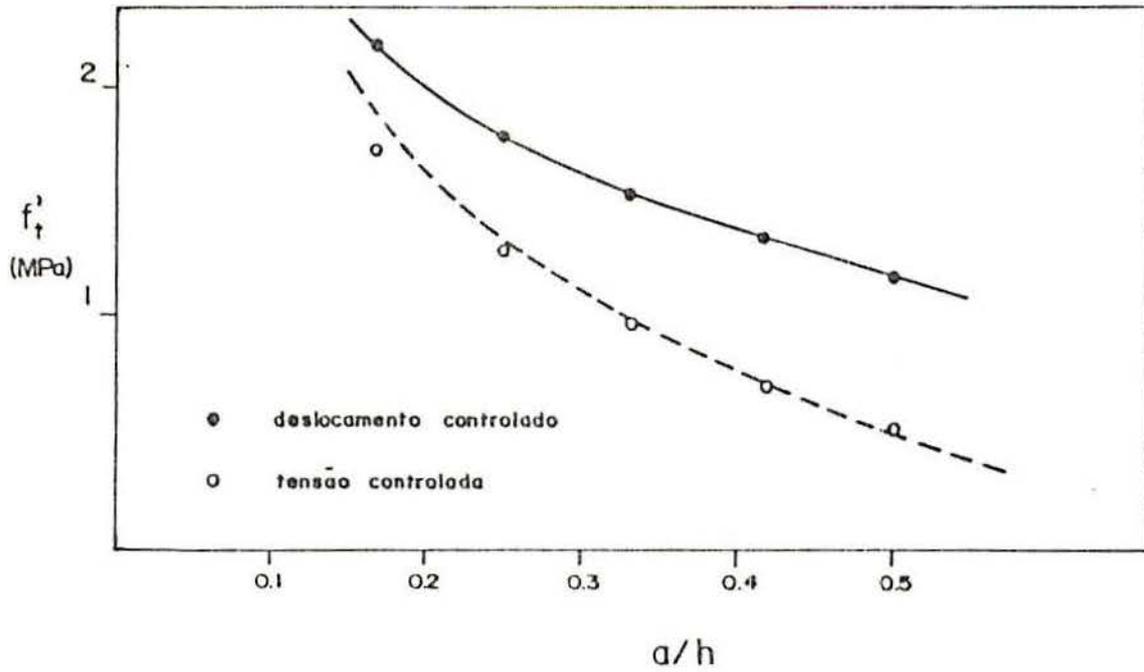


Fig. 4.3.3. - Influência da relação  $a/h$  em  $f'_t$ . A linha cheia resulta do ajuste exato dos pontos escuros, enquanto a linha tracejada resulta de (2.3.4).

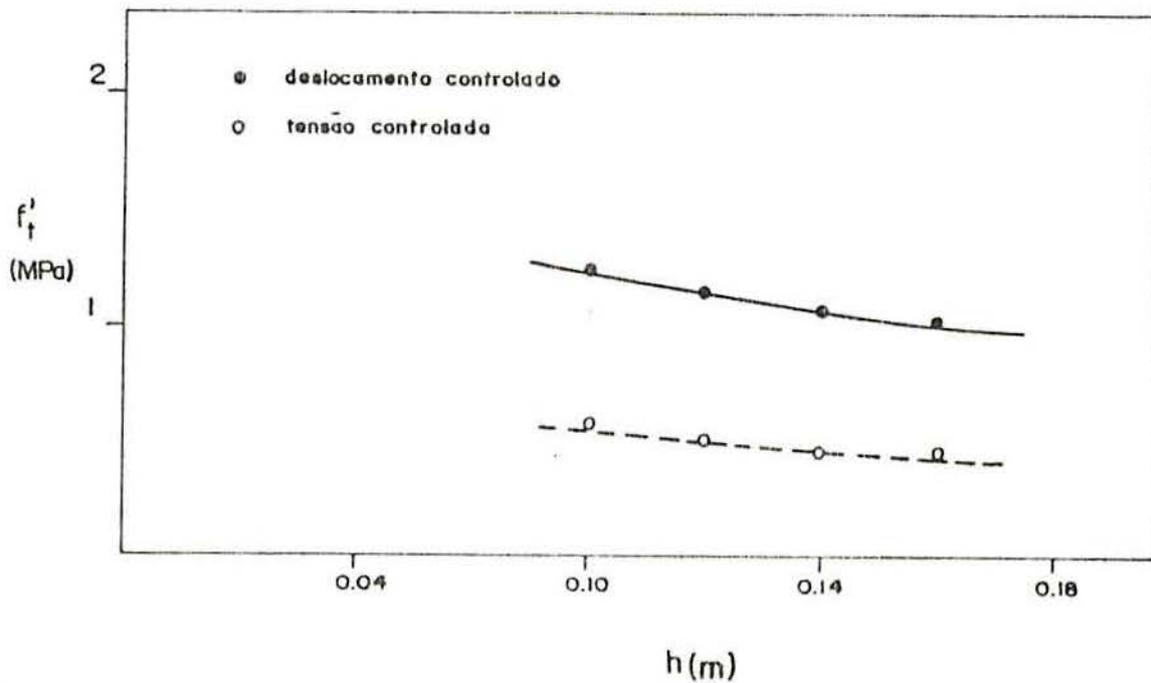


Fig. 4.3.4. - Influência do tamanho ( $h$ ) em  $f'_t$ . A linha cheia resulta da expressão (4.2.2) e a tracejada de (2.3.4) (A relação  $a/h$  é mantida constante).

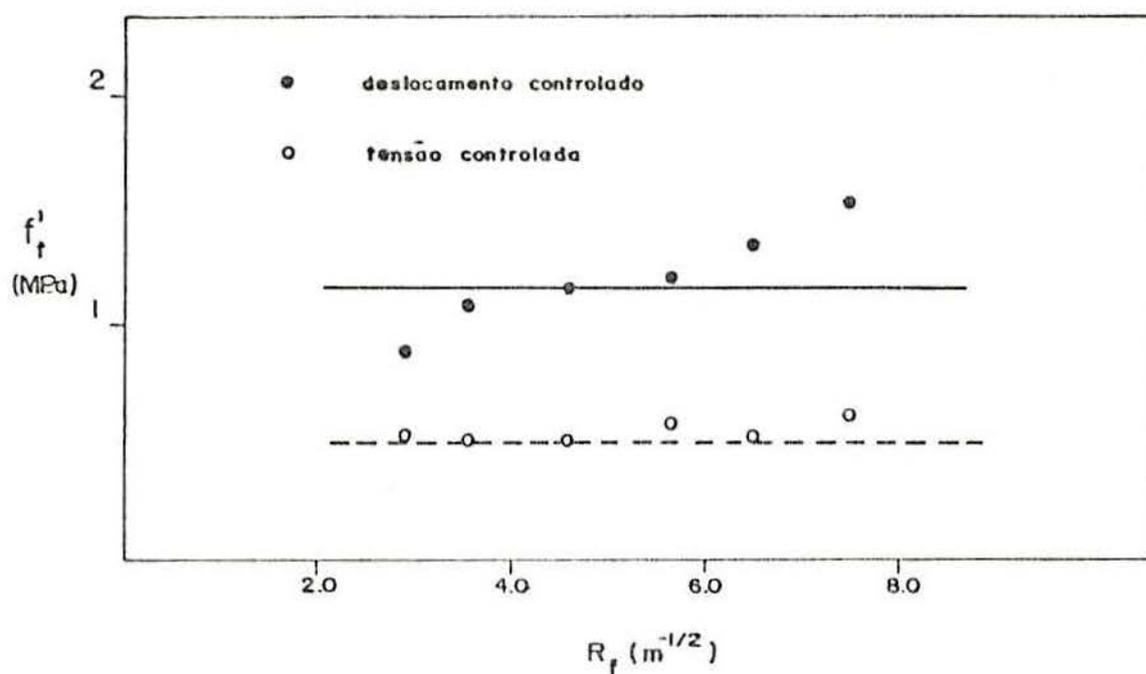


Fig. 4.3.5. - Influência do fator de falha ( $R_f$ ) em  $f'_t$ .  
 A linhas horizontais representam o valor constante previsto para a simulação 1.5.

Os resultados apresentados para o estudo da influência da energia específica de fratura ( $G_f$ ), corroboram a própria teoria que dá origem a formulação adotada (vide expressão (3.2.2)). Pode-se afirmar de forma generalizada, que a deformação associada a tensão crítica é proporcional à raiz quadrada de  $G_f$  (obviamente isto é válido para a teoria linear).

Quanto a influência da dimensão relativa da fissura ( $a/h$ ), nota-se também uma boa representação, atestada pela curva tracejada na fig. 4.3.3. No entanto, aparece aqui o indício de uma limitação do modelo. Nota-se que para valores pequenos de ( $a/h$ ) os pontos obtidos das simulações começam a cair fora da curva teórica. Isto pode ser explicado pelo fato de que, devido ao emprego de um modelo de discreto, fissuras iniciais de dimensões próximas às da elementar não produzem uma concentração de tensões equivalente à que haveria em um modelo contínuo.

Devido a limitações computacionais, não foi possível estudar a influência do tamanho absoluto para uma gama de valores mais ampla do que a apresentada. De qualquer forma, também neste aspecto o modelo forneceu bons resultados.

Finalmente, na fig.4.3.5 pode-se observar que para a série com tensão controlada praticamente não há influência do fator de falha, conforme explicado no item anterior. A série submetida a uma deformação controlada, todavia, apresenta uma influência mais significativa. Pensa-se que neste caso, o baixo gradiente de tensões no plano da fissura (como consequência da forma de solicitação) produz certas condições que dificultam o bom desempenho do modelo (notou-se, por exemplo, que neste caso a fratura tem uma forte tendência a sair do plano de simetria).

#### 4.4 - Análise dinâmica e energética

O programa FRACTUR permite um controle energético rigoroso durante toda a simulação. Na fig.4.4.1 pode-se observar o que ocorre com as diferentes formas de energia envolvidas no processo de ruptura. A energia cinética e a energia de amortecimento também são avaliadas, mas foram omitidas para obter-se maior clareza.

Nota-se que a energia de fratura (somatório das energias dissipadas em todas as barras que se romperam) cresce suavemente até atingir um patamar, que indica o término do processo de propagação. Como o comprimento total de fratura formada é conhecido, e considerando-se que a energia consumida dividida pela área fraturada é uma constante, pode-se avaliar o comprimento instantâneo da fratura através da relação (válida para as séries 1, 2 e 5, ver fig.4.1.1):

$$a(\varepsilon') = a_0 + (h - a_0) [ U(\varepsilon') / U_t ] \quad (4.4.1)$$

Onde  $a_0 = 0.06m$ ,  $h = 0.12m$ ,  $U(\varepsilon')$  é a energia de fratura obtida da respectiva curva na fig.4.4.1, e  $U_t$  o valor final associado ao patamar.

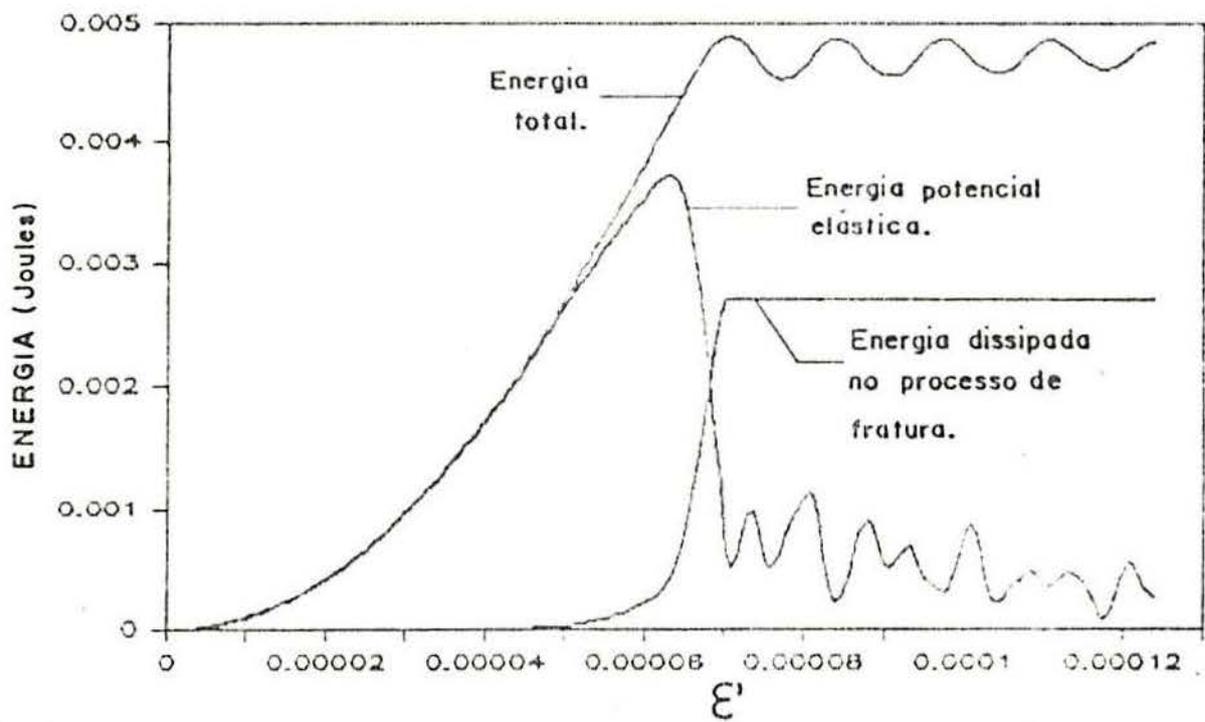


Fig. 4.4.1. - Desempenho energético (sim. 1.5).

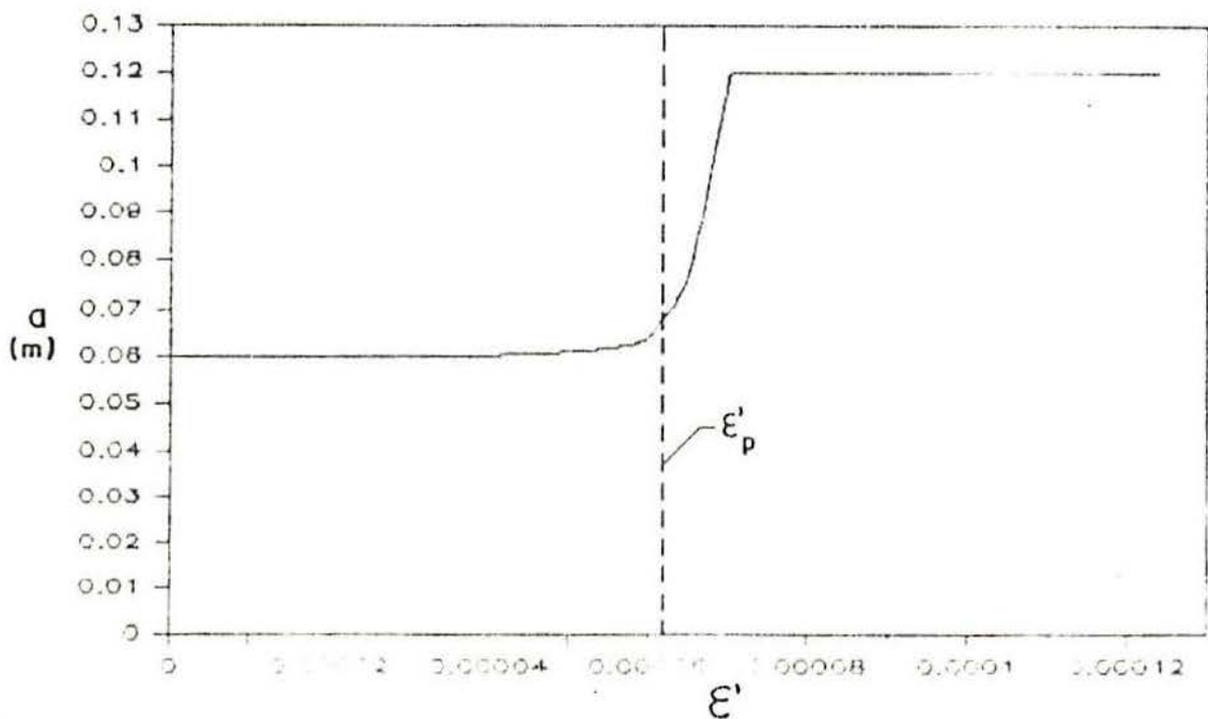


Fig. 4.4.2. - Processo de abertura da fissura ao longo da simulação. (Simulação 1.5)

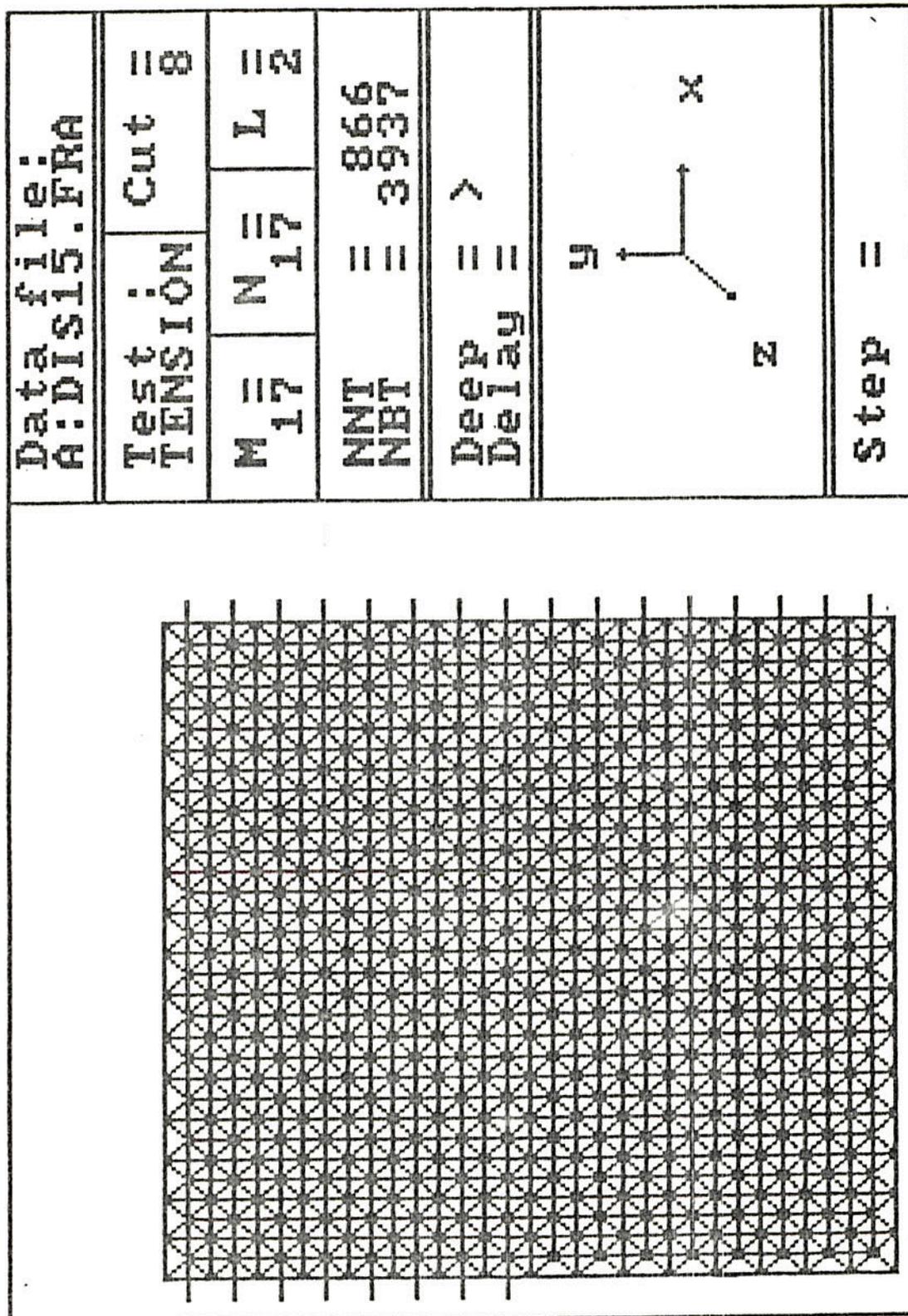


Fig. 4.4.3.a- Analisador gráfico para verificação do caminho percorrido pela fratura, antes da ruptura. (Simulação 1.5).

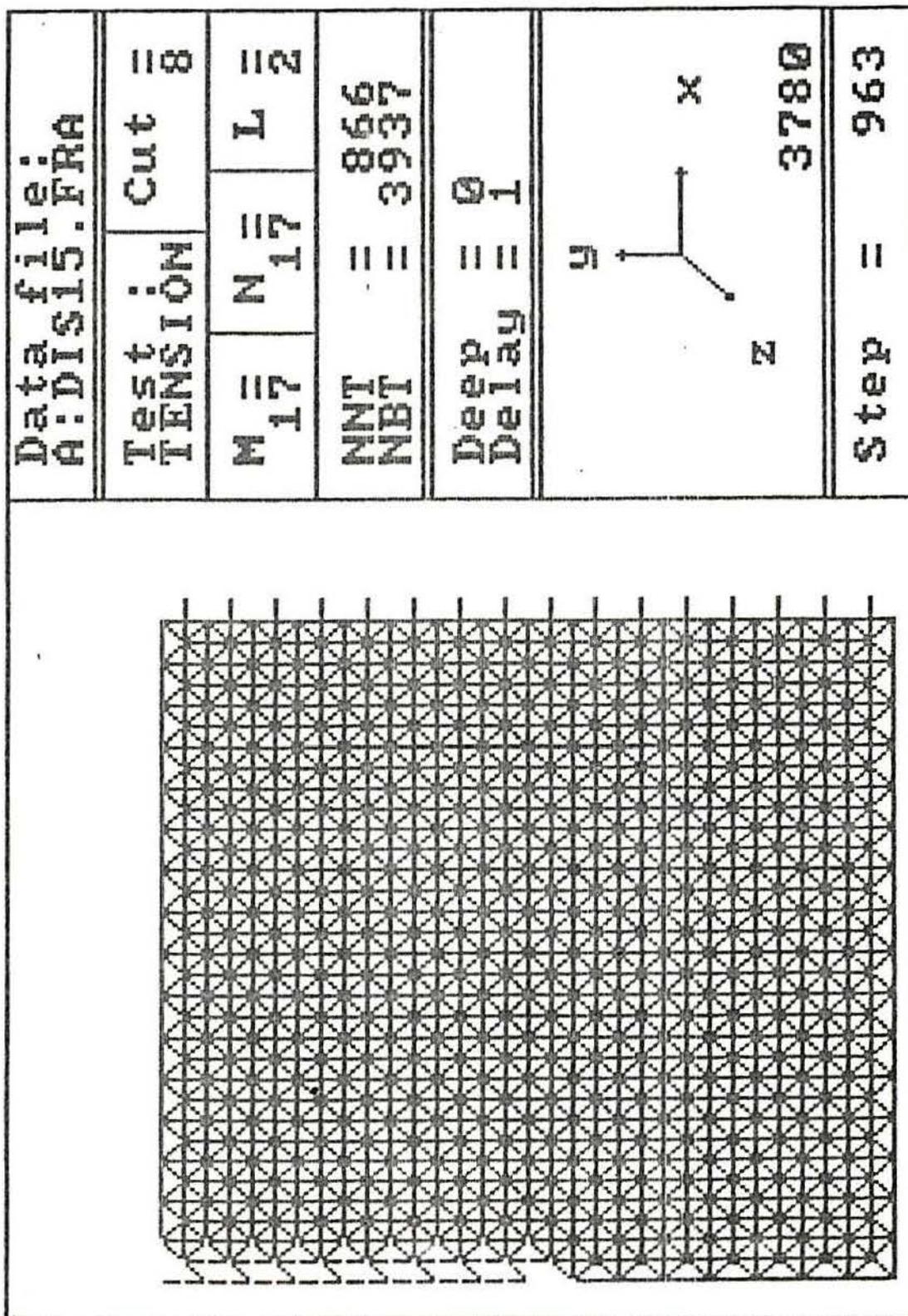


Fig. 4.4.3.b- Analisador gráfico para verificação do caminho percorrido pela fratura, depois da ruptura. (Simulação 1.5).

Para que a expressão (4.4.1) possa ser utilizada é necessário certificar-se que a fratura realmente seguiu uma linha reta ao longo do plano de simetria (o que em alguns casos pode não ocorrer, como por exemplo para valores pequenos de  $R_f$ ). Para isto utiliza-se um analisador gráfico, cuja saída está demonstrada na fig. 4.4.3a-b (relativa à simulação 1.5).

Assim, assumidas todas as condições necessárias, pode-se avaliar com razoável precisão o comprimento instantâneo da fissura ao longo da simulação, conforme apresentado na fig. 4.4.2.

Observa-se que a deformação associada a tensão crítica ocorre após a fratura ter iniciado o seu processo de propagação. Este aspecto é coerente com a teoria dinâmica da MF (vide expressão 2.5.2), e aponta uma deficiência das análises estáticas.

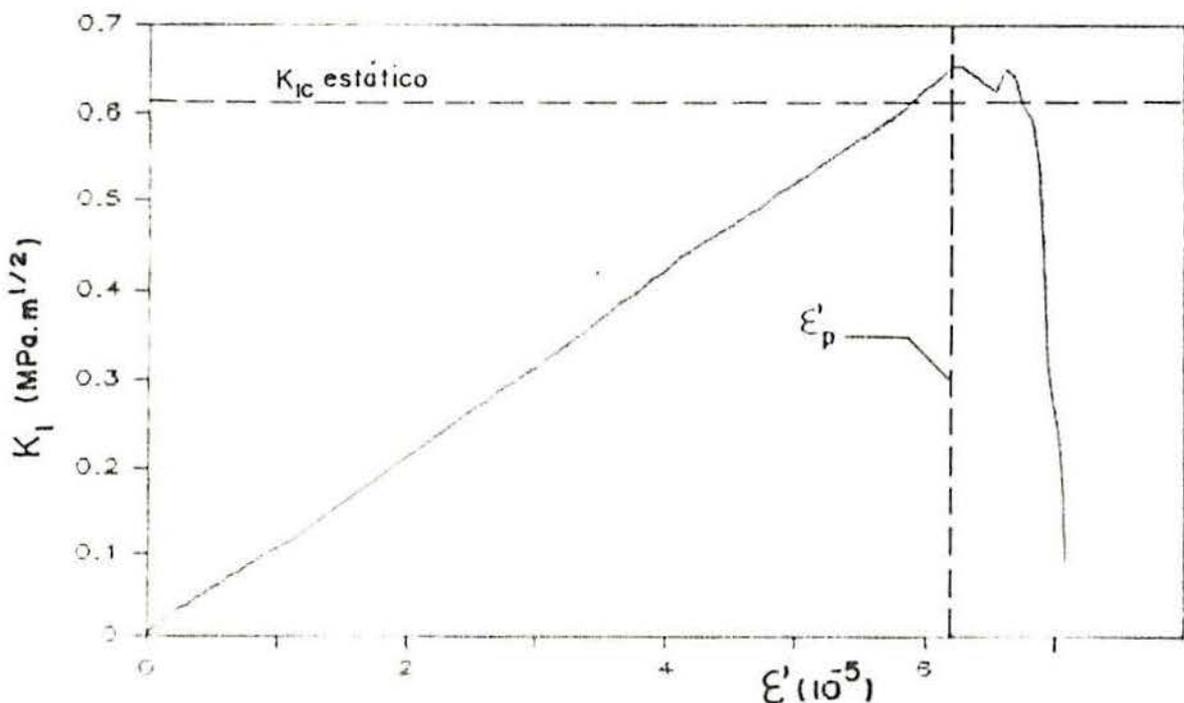


Fig. 4.4.4. - Fator de Intensidade de tensões ao longo da simulação (teste 1.5).

De posse da função  $a(\epsilon')$ , e já conhecida a função  $\sigma'(\epsilon')$ , pode-se construir a função  $K_I(\epsilon')$  através da expressão (4.2.2), apresentada na fig. 4.4.4. Aqui é possível constatar

que há uma diferença entre o valor máximo da teoria estática da MELF (linha tracejada), e o que ocorre no processo dinâmico. Isto pode ser explicado pelo fato de não se empregar o balanço de energia apresentado na equação (2.5.2), bem como pela existência de uma breve propagação estável da fratura. Coerentemente, a deformação associada a tensão crítica, ocorre exatamente para o máximo valor de  $K_I$ , e não para o valor esperado da teoria estática.

Dois aspectos dinâmicos foram estudados para verificação do desempenho do modelo: velocidade de propagação da fratura e efeito da velocidade de deformação.

Para o estudo da velocidade de propagação da fratura, uma vez de posse da função  $a(\epsilon')$ , pode-se proceder a uma simples derivação com relação ao tempo (visto que  $d\epsilon'/dt$  é uma constante durante a ruptura), e obter-se a função  $V_a(\epsilon')$ , ou seja, velocidade da fratura ao longo da simulação. Na fig. 4.4.5 estão apresentadas estas funções para os testes 2.1-3, de modo a mostrar o efeito produzido por variações da energia específica de fratura. A linha horizontal é o valor teórico obtido da fórmula (2.5.1) com  $a_0/a = 1/2$ .

Uma vez que a derivação não é muito acurada, procurou-se traçar visualmente uma curva unindo os picos das quatro curvas (linha tracejada), de modo a demonstrar-se a influência da energia específica de fratura, não prevista pela fórmula de Mott. Nota-se que a medida que  $G_f$  aumenta, a curva de valores máximos parece tender ao valor teórico dado pela expressão (2.5.1), mostrando com isto a aptidão do modelo em representar o fenômeno.

Para se avaliar o efeito da velocidade de deformação na tensão crítica  $f'_t$ , repetiu-se o ensaio 1.3 para diversos valores de  $\dot{\epsilon}'$ . A curva obtida está apresentada na fig. 4.4.6.

Qualitativamente, o modelo também apresenta coerência com a evidencia experimental disponível, que sugere maior resistência para velocidades de deformação mais elevadas<sup>9, 30, 34</sup>.

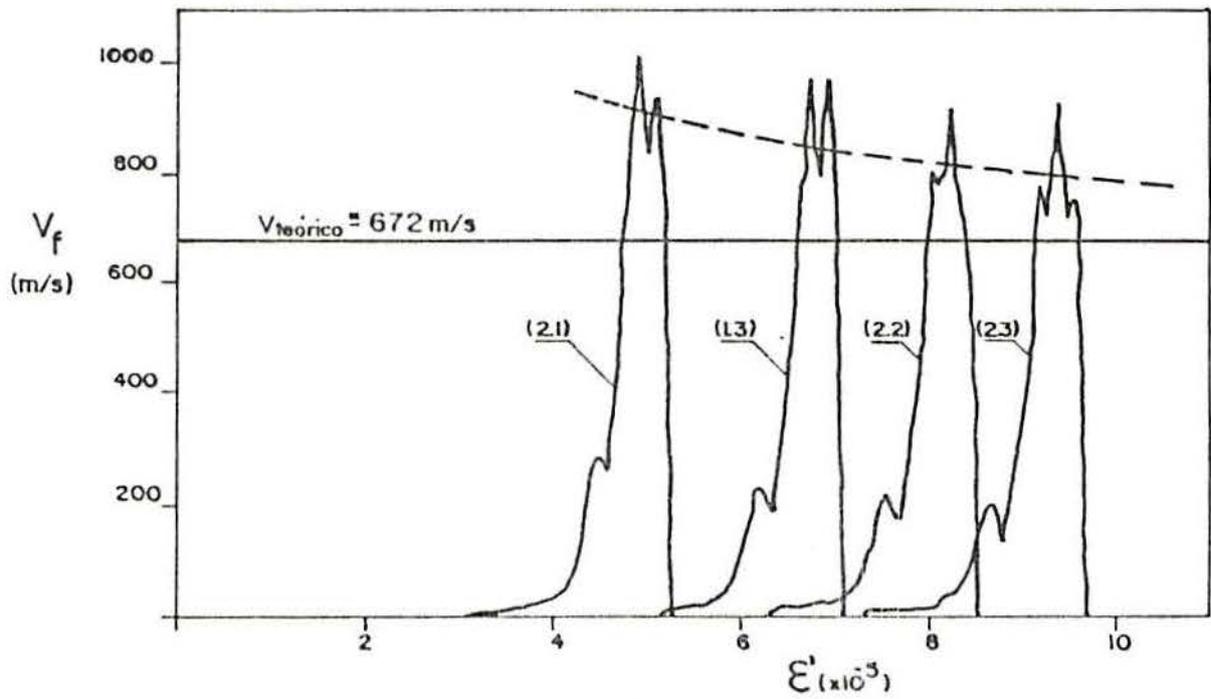


Fig. 4.4.5. - Velocidade de propagação da fratura ao longo da simulação para diferentes valores de  $G_f$ .

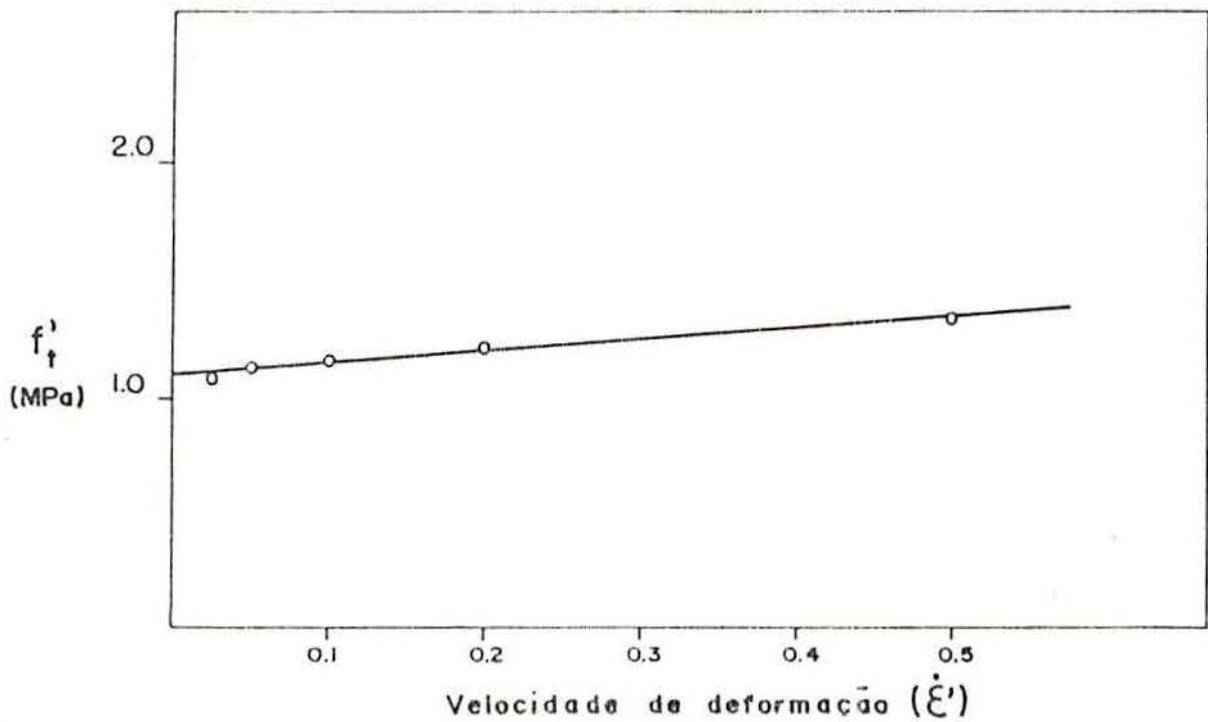


Fig. 4.4.6. - Influência da velocidade de deformação na tensão crítica  $f'_t$ .

Fica evidente portanto, a versatilidade do modelo em representar fenômenos de ruptura para materiais homogêneos. Este potencial será explorado nos capítulos de aplicação, no final deste trabalho, após a introdução de uma lei de aleatorização de propriedades mecânicas. A inclusão do aspecto não determinístico ampliará ainda mais a gama de possibilidades proporcionadas pelo modelo.

## 5. INCLUSÃO DO CARÁTER ALEATÓRIO

### 5.1 - Consideração das propriedades aleatórias de materiais não-homogêneos com comportamento frágil

A teoria proposta no capítulo 3, que tinha como principal objetivo justificar um critério de ruptura em termos de uma deformação limite, mostrou-se adequada à representação do fenômeno de fratura em materiais homogêneos, ou seja, com propriedades constantes através de seu volume.

Por outro lado, faz-se necessário um aperfeiçoamento do modelo que permita a representação da heterogeneidade das propriedades mecânicas, potencialmente necessária para o estudo de materiais como concreto e rocha, entre outros. Desta forma, os resultados globais fornecidos pelo modelo deixariam de ser determinísticos, da mesma forma como não o são os respectivos resultados experimentais.

O ponto principal é definir através de que parâmetros deve ser introduzida a aleatoriedade. A título de simplicidade e clareza, optou-se pelo parâmetro  $G_f$ , pois pela teoria da MELF ele seria, em última análise, o parâmetro empregado no próprio critério de ruptura (ou opcionalmente  $K_{Ic}$ , pela relação 2.4.9). Assim, sendo  $G_f$  um parâmetro que definiria a resistência local à propagação da fratura, sua aleatorização implica naturalmente em uma resistência variável através do volume, que é exatamente a característica que se deseja conferir ao modelo. Isto fica evidente pelo fato de ser a deformação crítica  $\epsilon_p$  uma função da energia específica de fratura (conforme expressão 3.2.2).

Neste ponto, fica nítida a vantagem proveniente da definição do fator de falha  $R_f$ . Note-se que ele permite a dedução de uma expressão para a ductilidade ( $k_f$ ) que independe

de  $G_f$ . Assim, admitida a aleatoriedade exclusiva de  $G_f$ , o parâmetro  $k_r$  permanece determinístico, o que resulta em uma maior simplicidade no processo numérico, além de ficar preservada a característica de fragilidade ou plasticidade do material.

Baseando-se nas suposições acima, pode-se introduzir o aspecto aleatório na teoria através da definição de uma função de distribuição de probabilidade para  $G_f$ . Obviamente esta função será uma propriedade do material, e, mais importante do que isto, deverá estar de alguma forma associada a um comprimento de correlação  $L_c$ . Este comprimento representa a textura do material, ou ainda uma dimensão característica dentro da qual as propriedades mecânicas poderiam ser consideradas uniformes. No próximo capítulo, outras interpretações serão dadas a  $L_c^*$ , mostrando que sua definição é tão importante quanto as demais propriedades mecânicas do material.

Como não se tem ainda uma metodologia definida para chegar a função de distribuição de probabilidade correta para cada material, e como não se pretende restringir o estudo a um material específico, torna-se indiferente qual o tipo de função a ser escolhida. Assim, por questão de conveniência, optou-se pela função de Weibull de 2 parâmetros<sup>\*\*, 3</sup>:

$$F(G_f) = 1 - \exp[-(G_f/\beta)^\gamma] \quad (5.1.1)$$

Onde  $\beta$  e  $\gamma$  são respectivamente os parâmetros de escala e de forma, para os quais verificam-se as seguintes expressões para média ( $\mu$ ) e desvio padrão ( $s$ ):

---

\* O símbolo  $L_c$  passa a substituir  $L$  quando se empregar materiais com propriedades não determinísticas.

\*\* A função de Weibull com dois parâmetros possui cauda para a direita, coerentemente com o fato de não ser possível a especificação de valores negativos para a energia específica de fratura. Além disso, esta função tem sido tradicionalmente utilizada nas teorias estatísticas da Resistência dos Materiais<sup>3</sup>.

$$\mu = \beta [ \Gamma(1 + 1/\gamma) ] \quad (5.1.2)$$

$$s = \beta [ \Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma^2(1 + 1/\gamma) ]^{1/2} \quad (5.1.3)$$

Onde  $\Gamma(x)$  é a função Gama.

Para gerar valores de  $G_f$  conforme a função escolhida, faz-se uso da seguinte expressão:

$$G_f = \beta [ -\ln(1 - u) ]^{1/\gamma} \quad (5.1.4)$$

Onde  $u$  é um número aleatório com densidade de probabilidade uniforme entre 0 e 1.

Por outro lado, é conveniente representar o parâmetro  $G_f$  como uma função de sua média ( $\bar{G}_f$ ), e um parâmetro de aleatorização  $\varphi$  :

$$G_f = \varphi \bar{G}_f \quad (5.1.5)$$

$$\varphi = \frac{[ -\ln(1 - u) ]^{1/\gamma}}{\Gamma(1 + 1/\gamma)} \quad (5.1.6)$$

Nota-se que  $\varphi$  é um número aleatório com uma distribuição Weibull 2 parâmetros e média 1. O parâmetro de forma  $\gamma$  define portanto o coeficiente de variação. Assim, a deformação crítica  $\epsilon_p$  passa a ser dada por:

$$\epsilon_p = R_f \left[ \frac{\varphi \bar{G}_f}{E (1 - \nu^2)} \right]^{1/2} = \varphi^{1/2} \bar{\epsilon}_p \quad (5.1.7)$$

Ou seja, a deformação crítica também terá uma função de distribuição de probabilidade Weibull-2, porém com um coeficiente de variação diferente, que pode ser determinado como apresentado a seguir.

A partir da expressão (3.2.2) pode-se escrever  $G_f$  como uma função de  $\epsilon_p$  :

$$G_f = c \varepsilon_p^2 ; \quad c = E (1 - \nu^2) / R_f^2 \quad (5.1.8)$$

A função de densidade de probabilidade de  $G_f$ , por sua vez, é dada pela derivada de (5.1.1) com relação ao próprio  $G_f$ , que resulta:

$$f_G(G_f) = \gamma \beta^{-\gamma} G_f^{\gamma-1} \exp[-(G_f/\beta)^\gamma] \quad (5.1.9)$$

A função de densidade de probabilidade de  $\varepsilon_p$  é dada então pela seguinte expressão geral:

$$f_\varepsilon(\varepsilon_p) = f_G[G_f(\varepsilon_p)] \frac{d}{d\varepsilon_p} [G_f(\varepsilon_p)] \quad (5.1.10)$$

Substituindo (5.1.8) em (5.1.10) chega-se a:

$$f_\varepsilon(\varepsilon_p) = \gamma' \beta'^{-\gamma'} \varepsilon_p^{\gamma'-1} \exp[-(\varepsilon_p/\beta')^{\gamma'}] \quad (5.1.11)$$

Onde:

$$\beta' = (\beta/c)^{1/2} \quad (5.1.12)$$

$$\gamma' = 2\gamma \quad (5.1.13)$$

Conhecida a relação entre os parâmetros de forma das duas funções de densidade, pode-se avaliar a relação entre os respectivos coeficientes de variação implícitos:

$$\frac{CV_\varepsilon}{CV_G} = \frac{\Gamma(1+1/\gamma) [\Gamma(1+2/\gamma') - \Gamma^2(1+1/\gamma')]^{1/2}}{\Gamma(1+1/\gamma') [\Gamma(1+2/\gamma) - \Gamma^2(1+1/\gamma)]^{1/2}} \quad (5.1.14)$$

Substituindo  $\gamma'$  e calculando o lado direito para diferentes valores de  $\gamma$ , conclui-se que a relação é aproximadamente uma constante, com valor em torno de 0.53.

Lembra-se finalmente que a função Weibull-2 é arbitrária, e o desenvolvimento acima tem apenas a finalidade de mostrar o procedimento a ser seguido caso a função de distribuição correta seja conhecida.

Assim, com base na teoria acima, incorporou-se ao programa FRACTUR uma subrotina de geração de números aleatórios, que foi usada na determinação das propriedades dos elementos. A partir daí, foi realizada uma série de simulações para se avaliar o comportamento do modelo quando dotado de não-homogeneidade.

## 5.2 - Análises preliminares

Uma vez que o resultado de uma simulação não seja definido como determinístico (especificando-se  $CV_{\sigma} > 0$ ), a relação constitutiva global deixa de ser único; neste caso torna-se necessário realizar diversas simulações para cada caso estudado, de modo a se conhecer um resultado médio.

Na fig. 5.2.1a encontram-se superpostos os resultados de uma série de simulações para um teste de tração uniaxial por deformação controlada, com um cubo de 5x5x5 módulos. Os parâmetros especificados são (os valores seguintes são intencionalmente próximos àqueles relativos ao concreto):

$$\begin{array}{lll}
 E = 3.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2; & G_f = 40 \text{ N/m}; & L_c = 0.03 \text{ m}; \\
 \nu = 0.2 \ (\alpha = 5/12); & CV_{\sigma} = 50\%; & D_f = 2000 \text{ s}^{-1}; \\
 \rho = 2400 \text{ kg/m}^3; & R_f = 3.25 \text{ m}^{-1/2}; & \dot{\epsilon}' = 0.2 \text{ s}^{-1}.
 \end{array}$$

Implícitos nos dados acima estão:

$$\begin{array}{l}
 L_{cr} = 0.0604 \text{ m} \\
 \epsilon_p = 1.211 \times 10^{-4} \\
 k_{rn} = 2.014
 \end{array}$$

Definiu-se como relação constitutiva média, aquela que resulta de uma média ponto a ponto das diversas simulações realizadas. A RCG média referente as curvas da fig. 5.2.1a está apresentado na fig. 5.2.1b.

O pico da RCG médio define a resistência média ( $\bar{f}'_t$ ) para o caso analisado, à qual está associada uma deformação de pico ( $\bar{\epsilon}'_p$ ) e um coeficiente de variação ( $CV_f$ ). Para a fig. 5.2.1b encontrou-se:

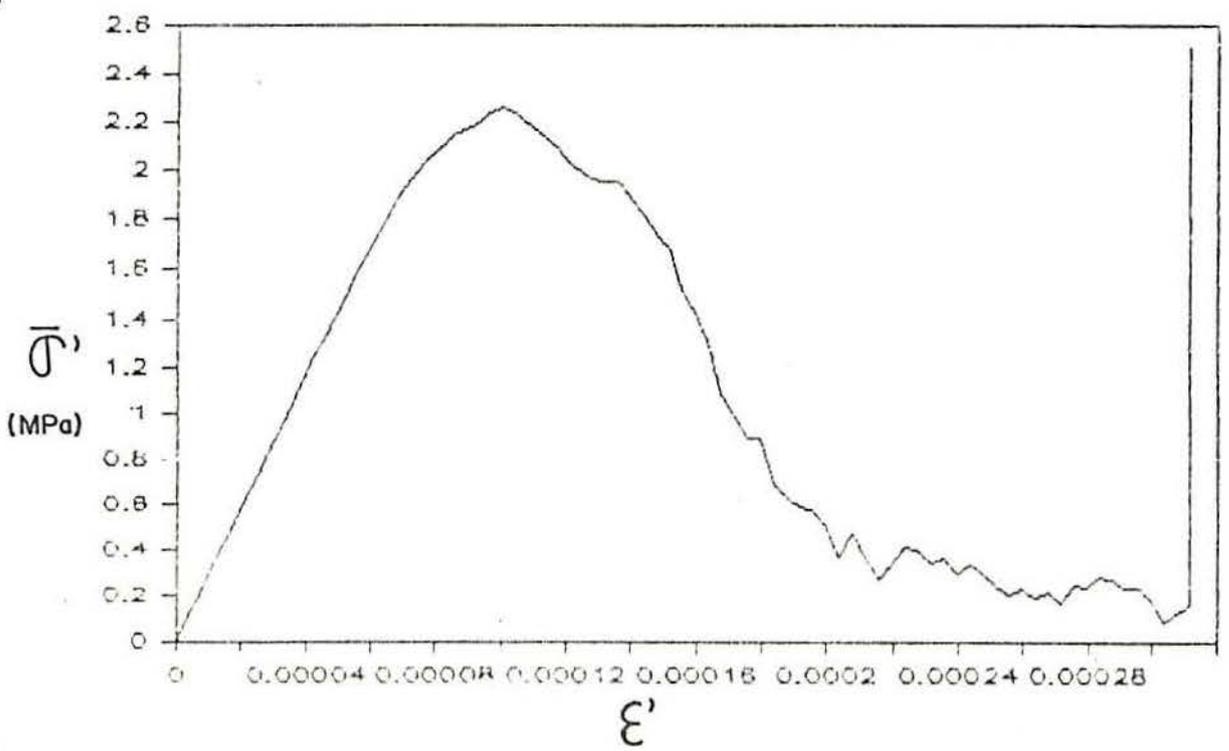
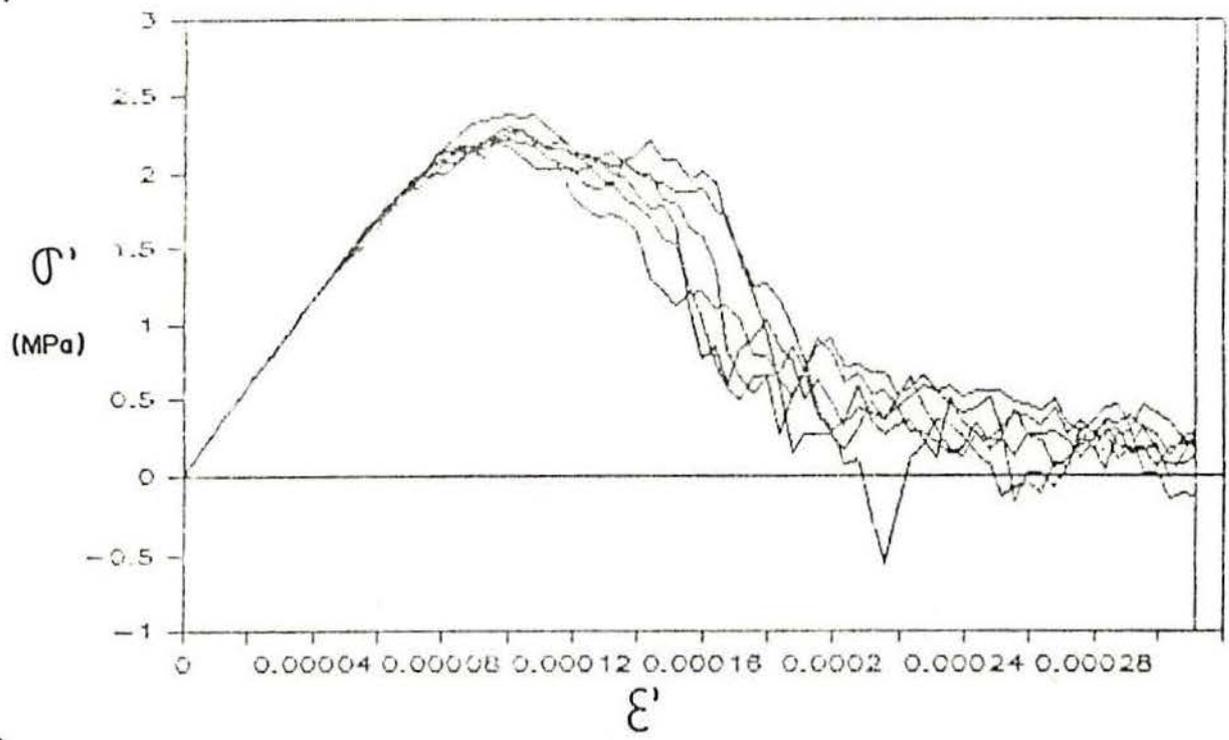


Fig.5.2.1.- a) Superposição de relações constitutivas globais obtidas para 6 simulações com um cubo 5x5x5 módulos, em tração por deformação controlada. b) Relação constitutiva global média.

$$\bar{f}'_l = 2.21 \text{ MPa}; \quad \bar{\epsilon}'_p = 0.962 \times 10^{-4}; \quad CV_f = 3.3\%.$$

Outra possibilidade de definição dos valores médios procurados, seria a consideração isolada dos valores associados ao pico de cada curva. Neste caso, os valores seriam:

$$\bar{f}'_l = 2.24 \text{ MPa}; \quad \bar{\epsilon}'_p = 0.995 \times 10^{-4}; \quad CV_f = 2.5\%.$$

Embora a diferença nas duas abordagens não seja expressiva, o conceito de RCG média será empregado apenas quando se desejar uma análise do aspecto qualitativo da ruptura, enquanto para avaliações estatísticas serão utilizados os picos individuais de cada simulação.

Os resultados obtidos da simulação apresentada na fig.5.2.1, serão empregados como ponto central no estudo sobre influência de parâmetros, apresentado no item 5.4.

Observe-se que, apesar da forma bilinear para a relação constitutiva elementar, a relação constitutiva global resulta não-linear mesmo antes de atingida a tensão máxima. Obviamente esta não-linearidade resulta exclusivamente da aleatorização das propriedades mecânicas do material ao longo do seu volume, mostrando que o emprego de RCEs mais complexas pode ser substituído simplesmente pela correta escolha da função de densidade de probabilidade do parâmetro  $G_f$ .

Na fig.5.2.2 está ilustrada a influência da mesma na forma da curva obtida, através de uma comparação entre o emprego da função Weibull-2 e o da função Uniforme. Em ambos os casos todos os demais parâmetros foram mantidos fixos, inclusive a média e o coeficiente de variação da geração de  $G_f$ , a nível de elemento (que para a função uniforme é  $\approx 57.7\%$ ).

Do ponto de vista energético, a inclusão da aleatoriedade não alterou qualitativamente o processo de ruptura em relação ao observado para material homogêneo. No

entanto, como se pode observar na fig.5.2.3, conforme as dimensões do corpo analisado pode ocorrer falta de energia elástica para completar o processo de ruptura, e chega-se a um ponto em que o trabalho externo passa a ser totalmente investido no mesmo (note-se o paralelismo entre as curvas correspondentes à energia total e à energia dissipada na ruptura). Isto ocorre porque, não existindo uma macro-fissura inicial, a mesma se formaria gradativamente a partir de danificações locais, como ilustrado na fig.5.2.4. Assim, até que uma fissura preferencial se instabilizasse, rompendo definitivamente o corpo, pouca energia elástica estaria disponível para alimentar a propagação instável.

Esta observação é corroborada pela escassez de vibrações no trecho final da curva apresentada na fig.5.2.1a (compare-se, por exemplo, com as figuras 4.2.2-6). Teoricamente, para corpos de maior tamanho tal fenômeno deixaria de ser observado, pois a capacidade de armazenar energia elástica aumenta com o cubo de uma dimensão de referência, enquanto a energia dissipada na ruptura aumenta aproximadamente com o quadrado.

Infelizmente a capacidade computacional disponível não permitiu simulações envolvendo cubos maiores que  $7 \times 7 \times 7$  módulos. No entanto, é possível constatar uma tendência pela observação da fig.5.2.5. Nesta figura encontram-se as RCGs médias para três diferentes dimensões de cubos, mas preservando-se o comprimento de correlação  $L_c$ . Nota-se nitidamente que a área sob a curva tende a se tornar menor para cubos maiores, atestando com isto uma menor energia específica dissipada na ruptura (o que mostra portanto que a mesma não é proporcional ao volume).

Espera-se que, para cubos ainda maiores, seja possível atingir um ponto em que, não havendo mais como aumentar a declividade do tramo descendente da curva, passe a ocorrer um rebaixamento de seu pico, acompanhado de vibrações mais intensas em torno do eixo  $\sigma' = 0$  (indicando com isto uma maior quantidade de energia remanescente).

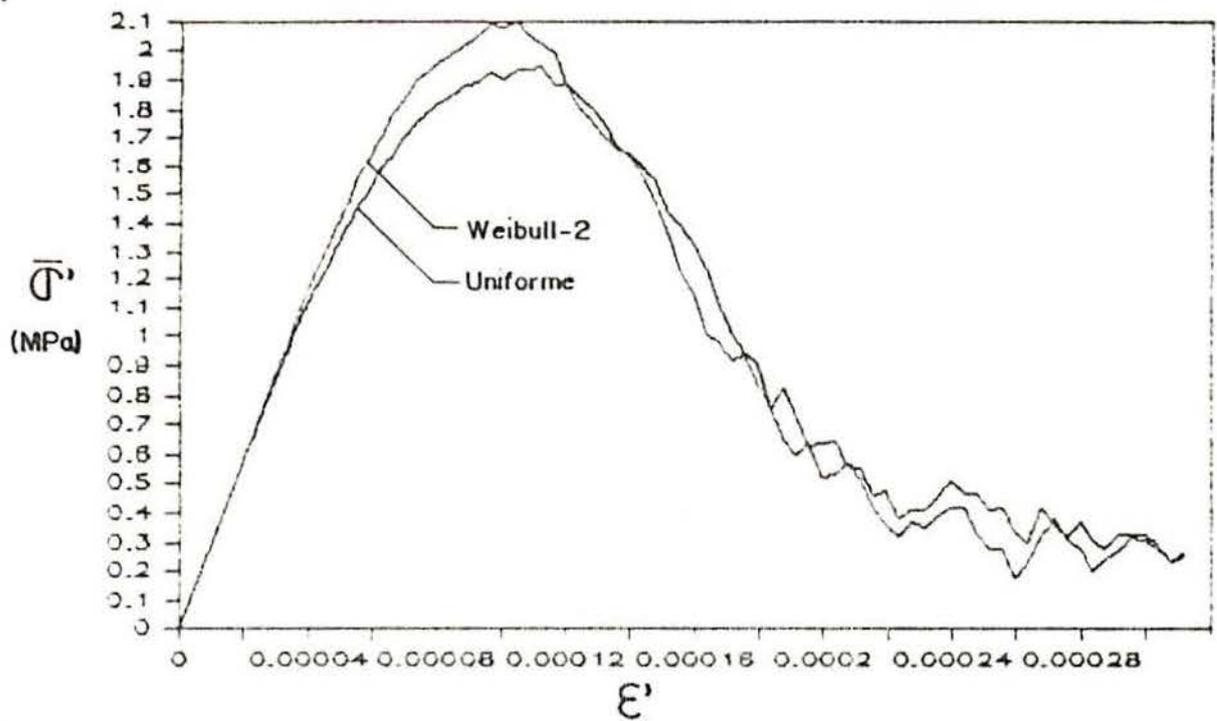


Fig. 5.2.2. - Comparação da forma de relações constitutivas globais, obtidas para diferentes funções de distribuição de probabilidade.

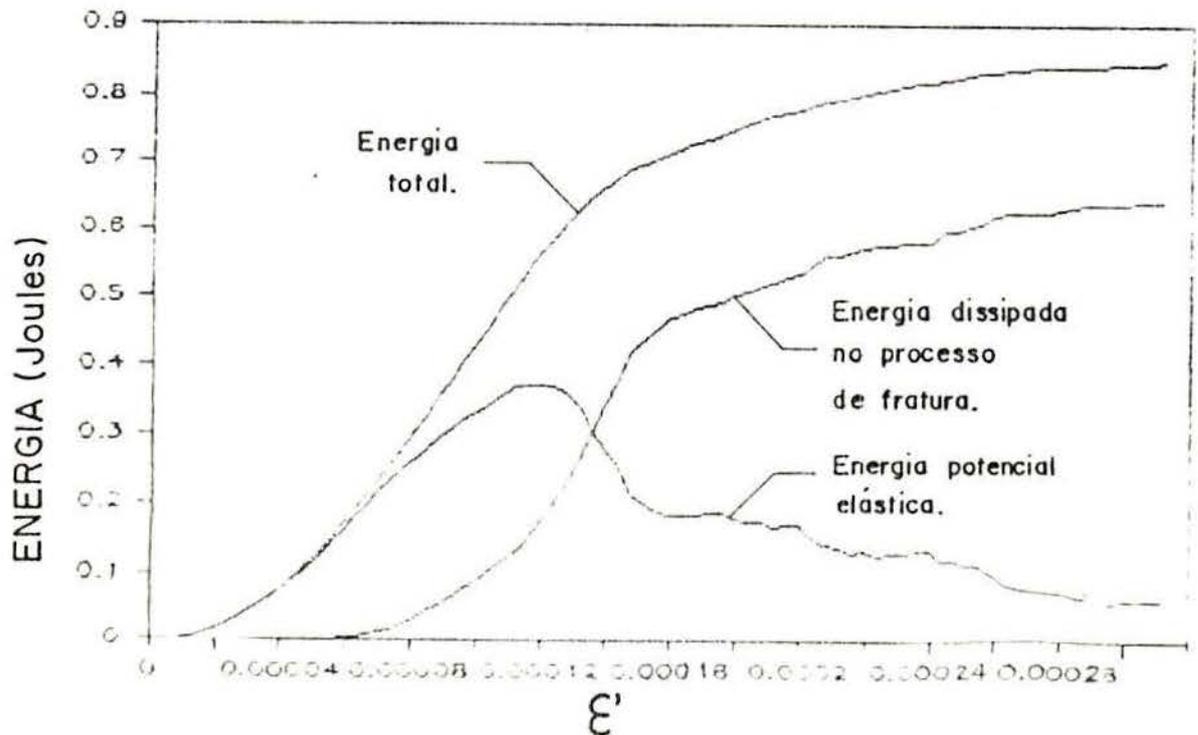


Fig. 5.3.3. - Desempenho energético ao longo do processo de ruptura, em um cubo 5x5x5 módulos com propriedades mecânicas aleatorizadas.

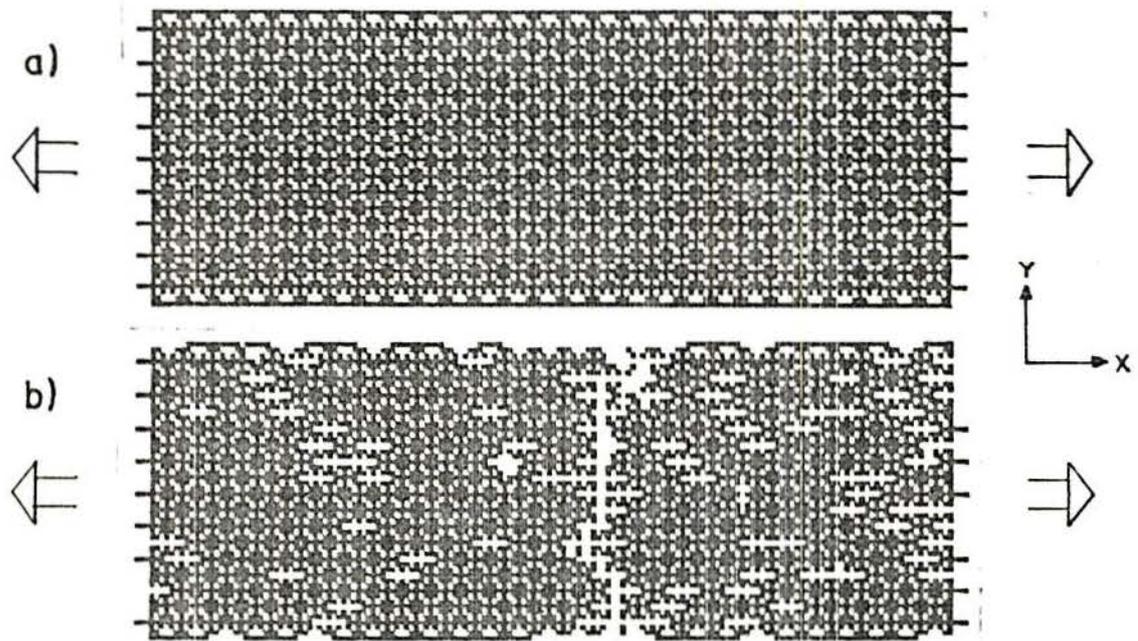


Fig.5.2.4.- Processo de ruptura em uma placa 9x27 módulos, estado plano de deformações. a) antes da ruptura; b) depois da ruptura.

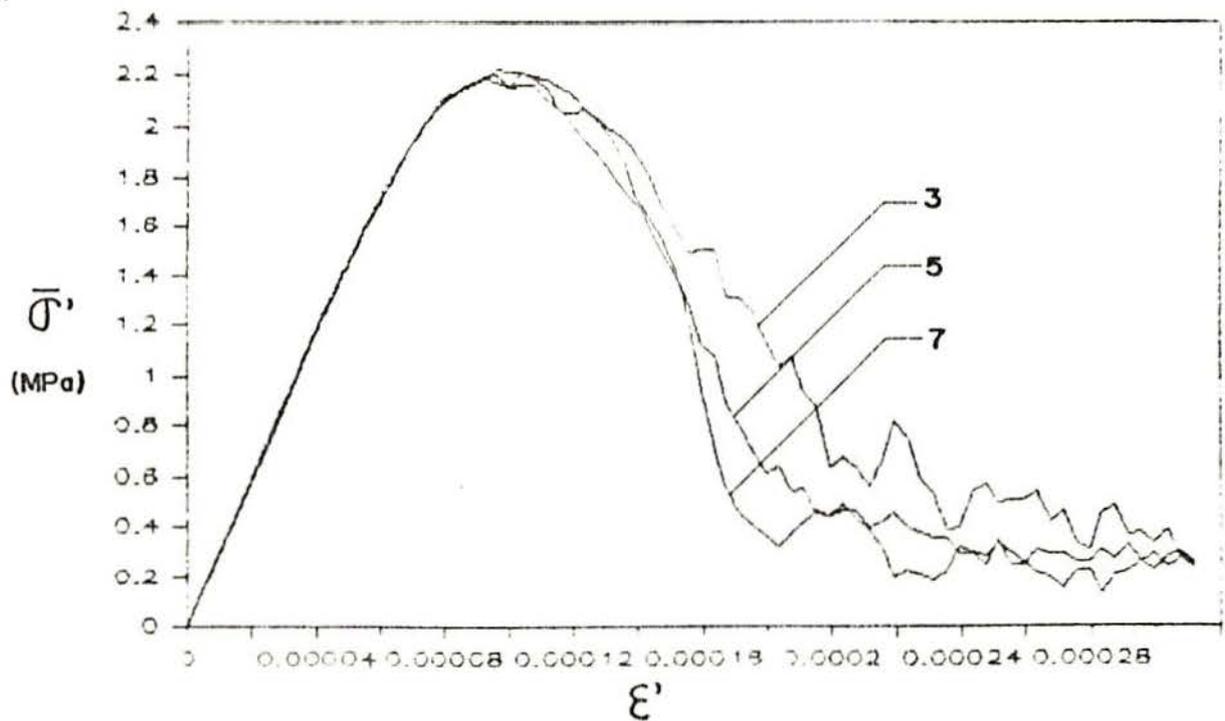


Fig.5.2.5.- Influência das dimensões do cubo no efeito de "strain-softening". Os números 3, 5 e 7 indicam a dimensão da aresta em número de módulos de comprimento  $L_0$ .

### 5.3 - Influência da aleatoriedade no ajuste da relação constitutiva elementar

No capítulo 3 apresentou-se um critério de ajuste da RCE que permitiria obter-se resultados praticamente invariantes com o nível de discretização adotado. Entretanto, ao introduzir-se no modelo o caráter aleatório, a dimensão do elemento deixou de ser um simples parâmetro arbitrário, passando a ser uma propriedade do material.

Desta forma, o critério de ajuste proposto deixa de ser válido, pois se inadvertidamente utilizado conduziria a resultados espúrios, como se constata na análise apresentada a seguir.

Para estudar este aspecto, empregaram-se três cubos de arestas com dimensão de 0.15m. Cada cubo foi discretizado de forma diferente, conforme a tabela 5.3.1.

Tabela 5.3.1 - Dados para estudo da influência do nível de discretização em modelos aleatorizados.

Cubo	Módulos	$L_c$ (m)	$k_r$
3	3x3x3	0.05000	1.21
5	5x5x5	0.03000	2.01
7	7x7x7	0.02143	2.82

O parâmetro  $k_r$  foi calculado com a expressão (3.3.2); os demais parâmetros são aqueles apresentados no item 5.2, excetuando-se o coeficiente de variação  $CV_\sigma$ , ao qual atribuíram-se os valores 5, 30 e 80%, de modo a verificar-se também a sua influência nos resultados.

Como se pode observar nas figuras 5.3.1-3, fica evidente que, à medida em que a heterogeneidade aumenta (maior  $CV_\sigma$ ), cresce a diferença entre as curvas médias obtidas para os três níveis de discretização. Por outro lado, para  $CV_\sigma = 5\%$  os três picos são praticamente coincidentes.

Na tabela 5.3.2 estão os resultados em termos dos valores referentes ao pico da RCG média. Conclui-se que o ajuste proposto deixa de ser válido para materiais não-homogêneos. Qualquer ajuste que venha a ser proposto futuramente deverá incluir o  $CV_{\sigma}$  entre os parâmetros dependentes de  $L_c$ . Para tanto, poderia-se proceder a uma análise empírica, utilizando-se os resultados do próprio modelo.

Finalmente, na fig. 5.3.4 estão apresentados de forma resumida os resultados obtidos neste item; pode-se concluir de forma generalizada, que materiais com mesmas propriedades mecânicas, porém textura mais fina ( $L_c$  menor) tem maior resistência.

Tabela 5.3.2 - Resultados de simulações para diferentes valores de  $CV_{\sigma}$ .

Cubo	$CV_{\sigma}$ (%)	$\bar{f}'_l$ (MPa)	$\bar{\epsilon}'_p$ ( $\times 10^{-4}$ )	$CV_f$ (%)
3	5	3.348	1.157	0.85
5	5	3.432	1.197	0.55
7	5	3.499	1.197	0.21
3	30	2.459	0.962	5.13
5	30	2.615	1.040	1.50
7	30	2.871	1.118	0.76
3	60	1.772	0.772	8.37
5	60	2.022	1.040	2.56
7	60	2.349	1.079	1.71

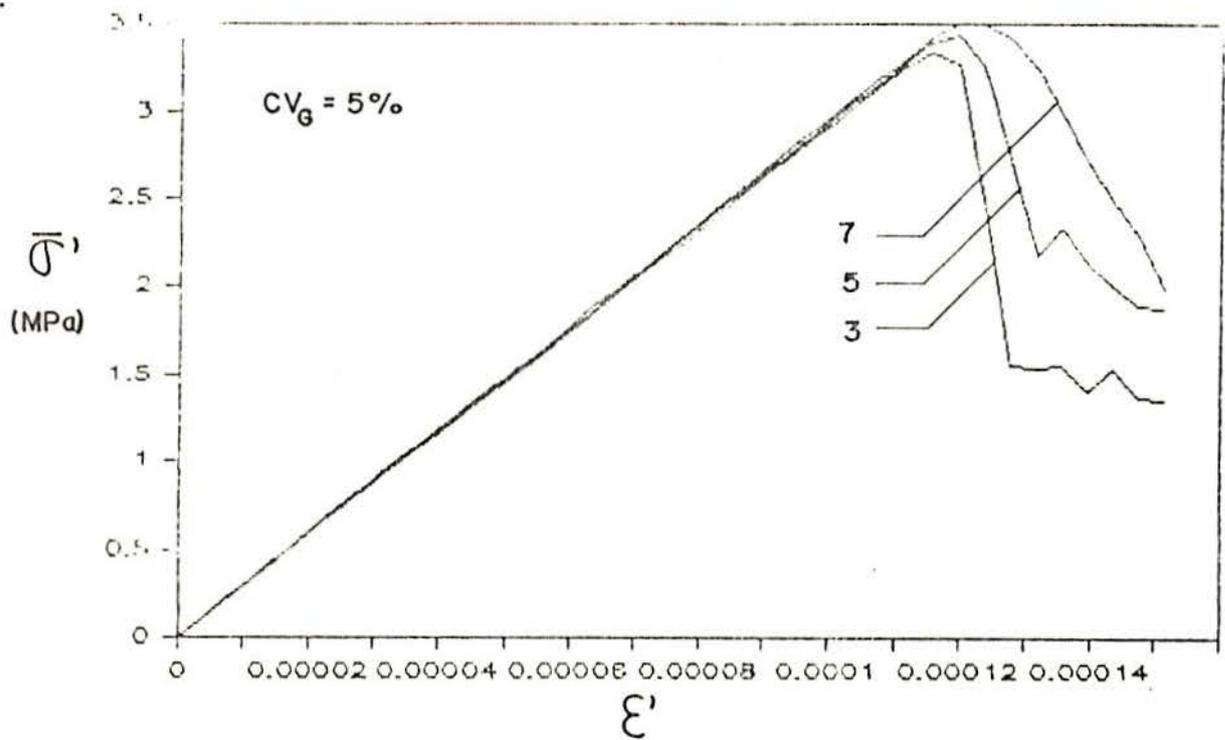


Fig.5.3.1 - Relações constitutivas globais médias para os cubos 3, 5 e 7, com  $CV_g = 5\%$ .

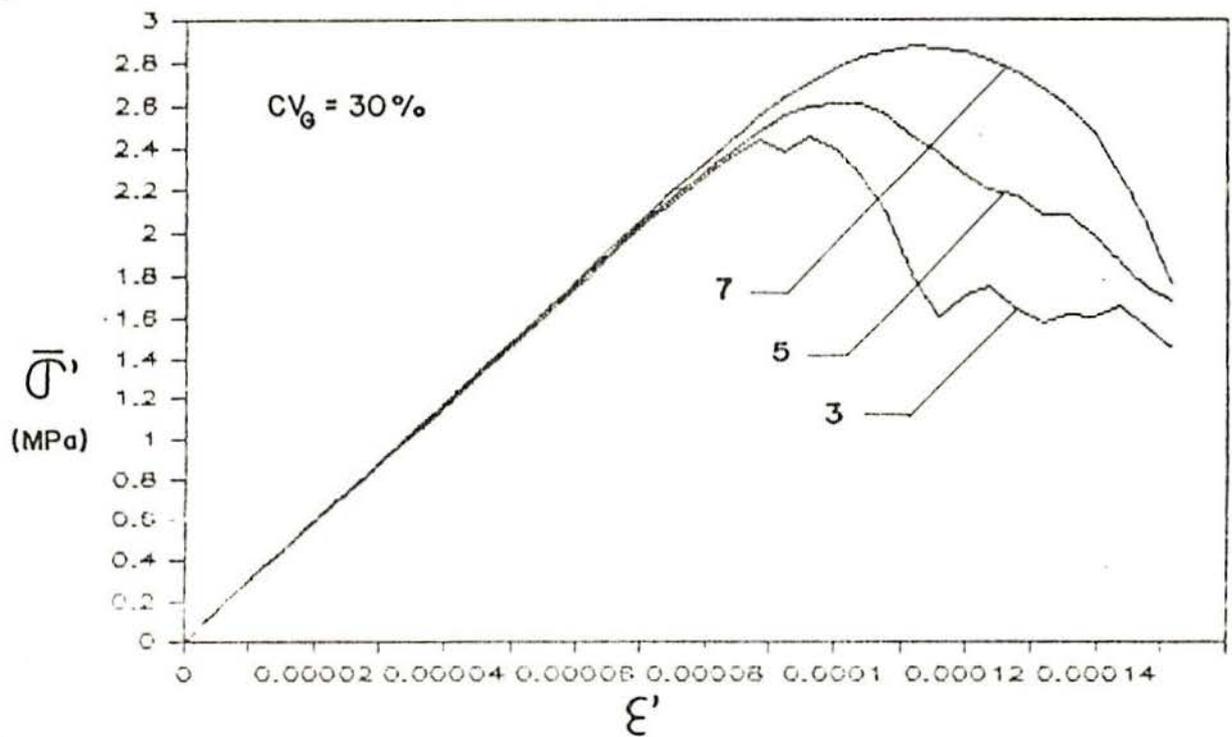


Fig.5.3.2 - Relações constitutivas globais médias para os cubos 3, 5 e 7, com  $CV_g = 30\%$ .

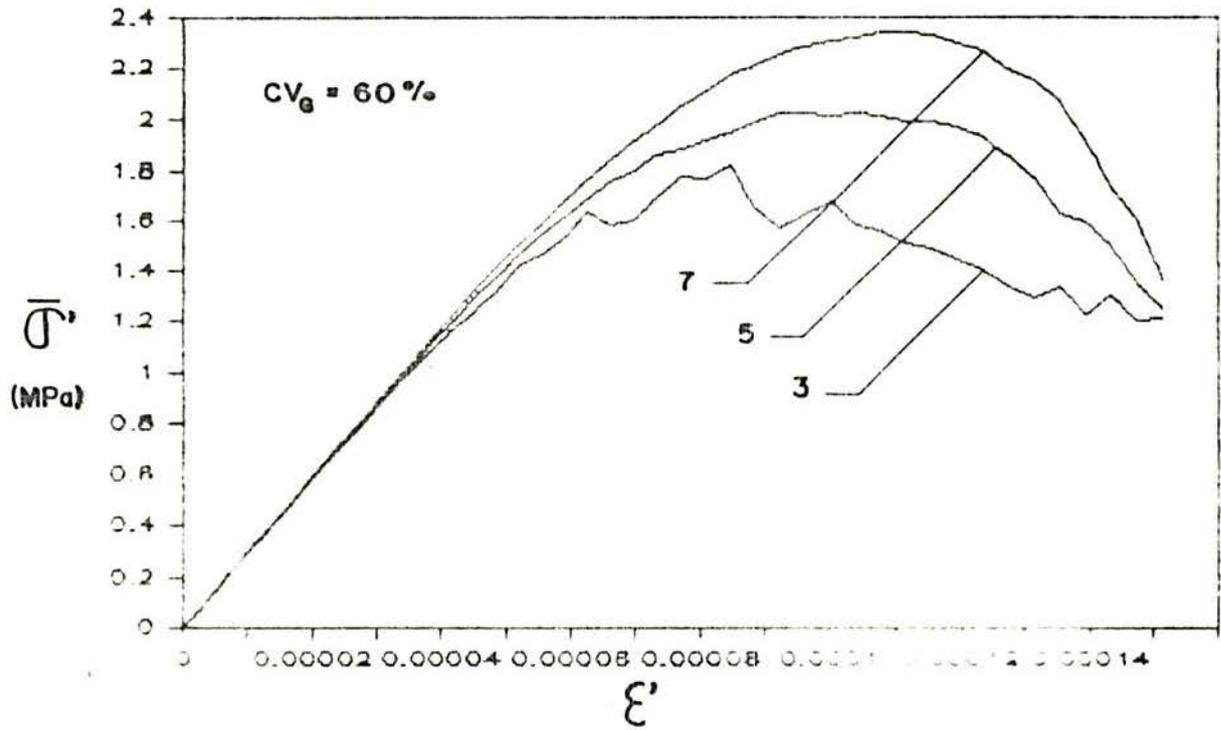


Fig.5.3.3 - Relações constitutivas globais médias para os cubos 3, 5 e 7, com  $CV_{\sigma} = 60\%$ .

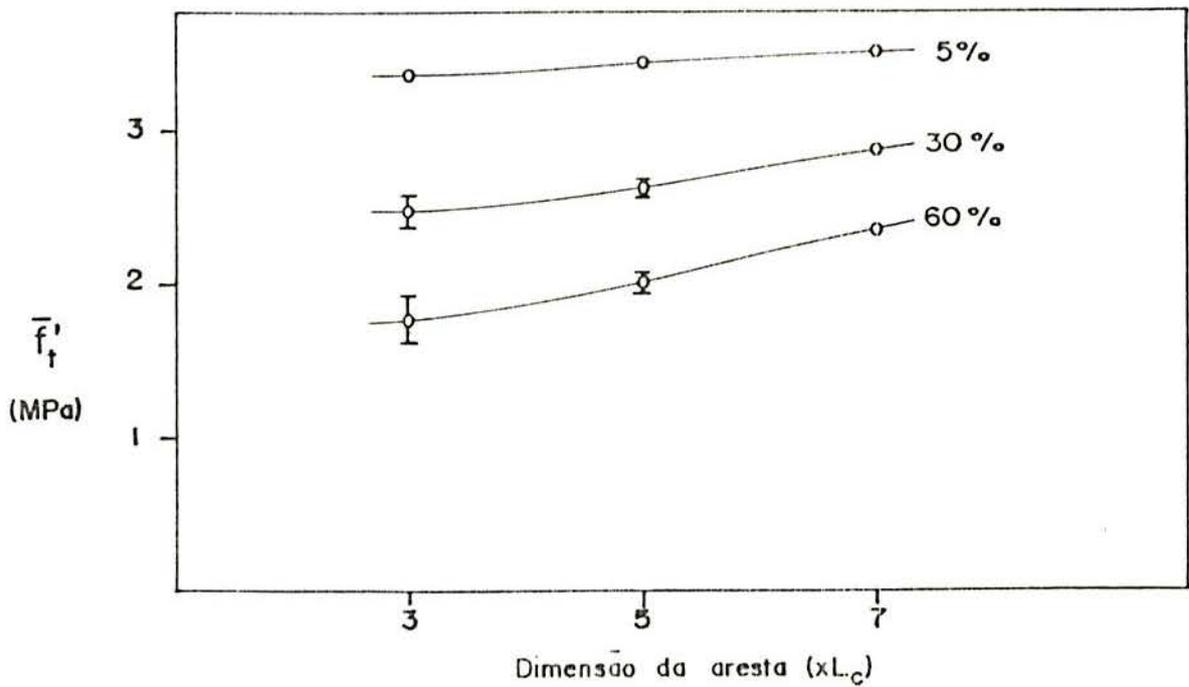


Fig.5.3.4 - Influência do nível de discretização para diferentes  $CV_{\sigma}$ .

#### 5.4 - Influência dos principais parâmetros envolvidos

Analogamente ao que foi feito no capítulo 3, procedeu-se a uma análise da influência de cada parâmetro envolvido nas simulações, desta vez porém ressaltando apenas o aspecto qualitativo, visto não existir uma teoria que forneça resultados para comparação. Os diagramas apresentados neste item, bem como os valores associados ao pico, foram obtidos através de uma média de 6 simulações para cada parâmetro analisado, sendo estes  $L_c$ ,  $G_f$ ,  $R_f$ ,  $CV_d$  e  $\dot{\epsilon}'$ .

Na tabela 5.4.1 estão apresentados os dados empregados neste estudo. As letras A e C, que aparecem na primeira coluna, referem-se a duas séries de simulações, cada uma com um diferente valor para o parâmetro em questão. Um ponto extra (B) é definido pelo resultado das simulações apresentadas na fig.5.2.1, sendo que tal estratégia visa otimizar o esforço computacional.

Tabela 5.4.1 - Dados para análise da influência de parâmetros. (Unidades MPa e metros)

Série	$L_c$	$G_f$	$R_f$	$CV_d$ (%)	$\dot{\epsilon}'$
LA	0.01	40.0	3.25	50	0.20
LC	0.05	40.0	3.25	50	0.20
GA	0.03	20.0	3.25	50	0.20
GC	0.03	100.0	3.25	50	0.20
RA	0.03	40.0	2.66	50	0.20
RC	0.03	40.0	4.21	50	0.20
CA	0.03	40.0	3.25	30	0.20
CC	0.03	40.0	3.25	70	0.20
EA	0.03	40.0	3.25	50	0.05
EC	0.03	40.0	3.25	50	0.80

Tabela 5.4.2 - Resultados associados ao pico do DCG médio de cada série de simulações.

Série	$\bar{f}'_l$	$\bar{\epsilon}'_p$ ( $\times 10^{-4}$ )	CV <sub>f</sub> (%)
LA	3.14	1.63	1.1
LC	2.04	0.885	3.9
GA	1.58	0.698	3.8
GC	3.51	1.44	2.9
RA	2.08	0.923	1.7
RC	2.57	1.04	3.4
CA	2.63	1.00	2.3
CC	1.99	0.962	3.6
EA	2.16	0.923	4.2
EC	2.35	0.962	2.1

Na tab.5.4.3 tem-se uma visão geral da capacidade de cada parâmetro influir na relação constitutiva global. Tal visão será muito importante quando se tentar representar um material real, buscando um ajuste a observações experimentais.

Tabela 5.4.3 - Influência qualitativa dos parâmetros na Relação constitutiva global média.

Característica da RCG média	L <sub>c</sub>	G <sub>f</sub>	R <sub>f</sub>	CV <sub>d</sub> (%)	$\dot{\epsilon}'$
Comportamento plástico-frágil	sim	não	sim	não	não
Area total sob o diagrama	sim	sim	sim	não	sim
Tensão crítica	sim	sim	sim	sim	sim
Deformação associada ao pico	sim	sim	sim	não	sim
Forma geral do diagrama	sim	não	sim	sim	não
Rigidez inicial	não	não	não	não	sim

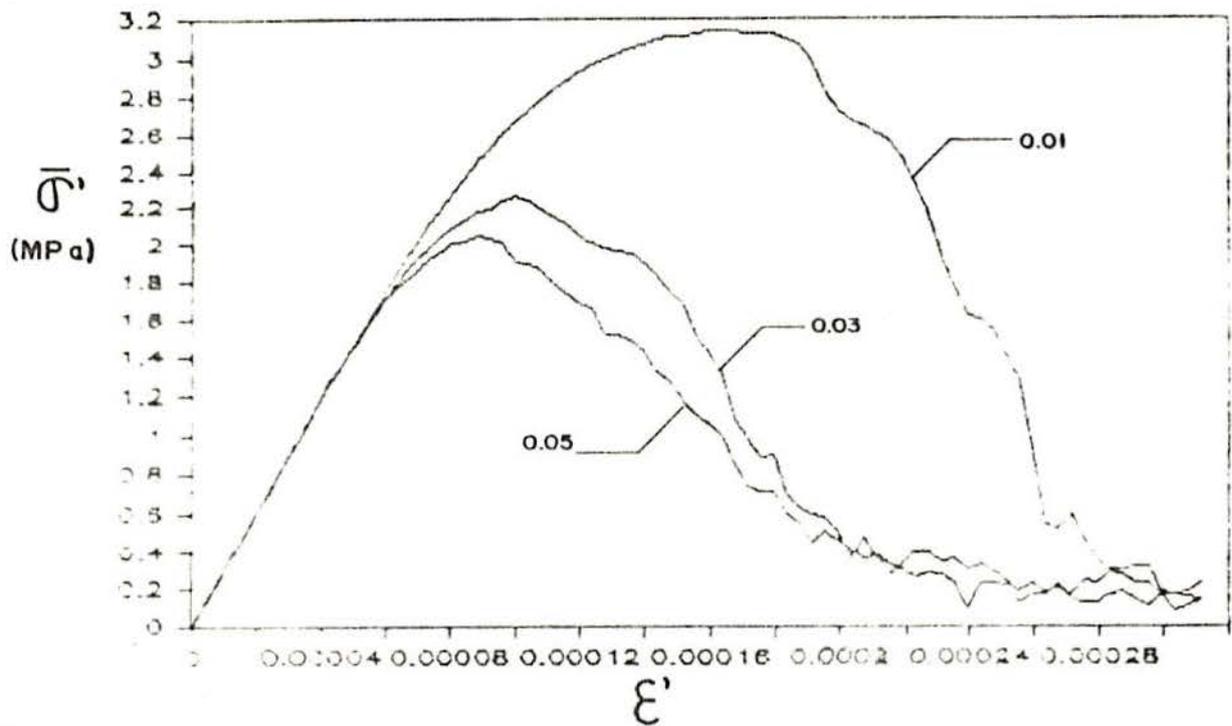


Fig.5.4.1a - Influência do parâmetro  $L_c$  na forma da relação constitutiva global média.

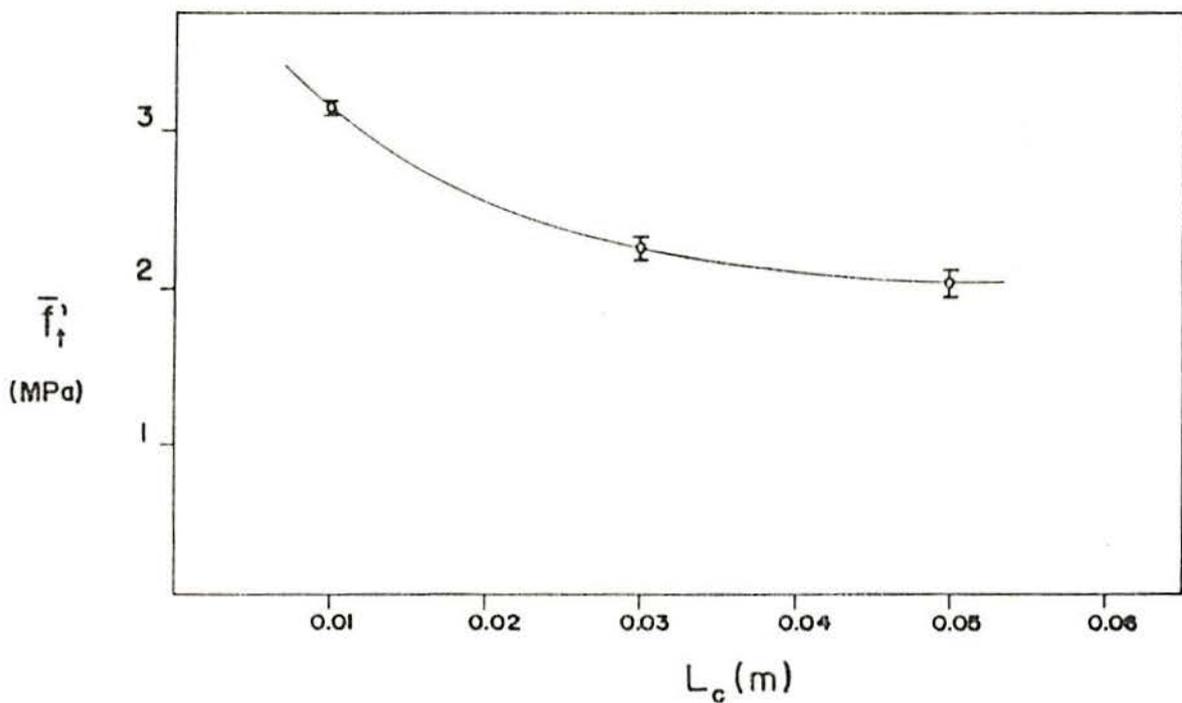


Fig.5.4.1b - Influência do parâmetro  $L_c$  na tensão crítica.

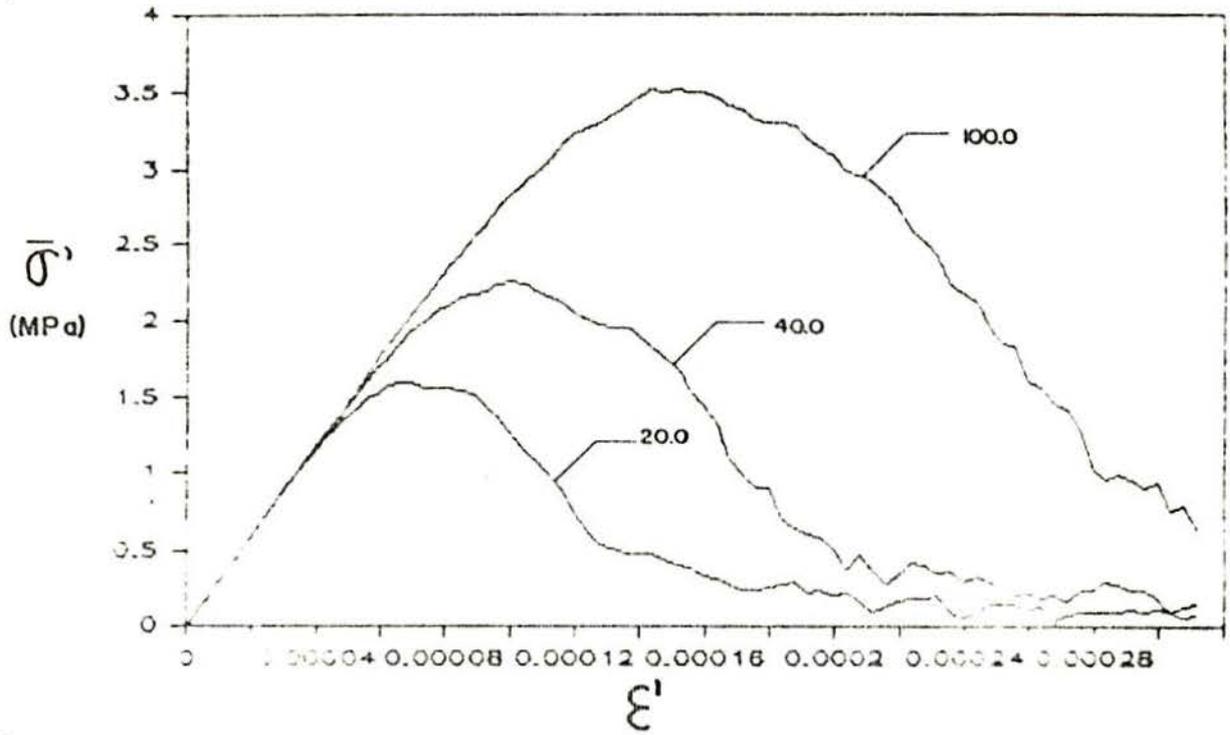


Fig.5.4.2a - Influência do parâmetro  $G_f$  na forma da relação constitutiva global média.

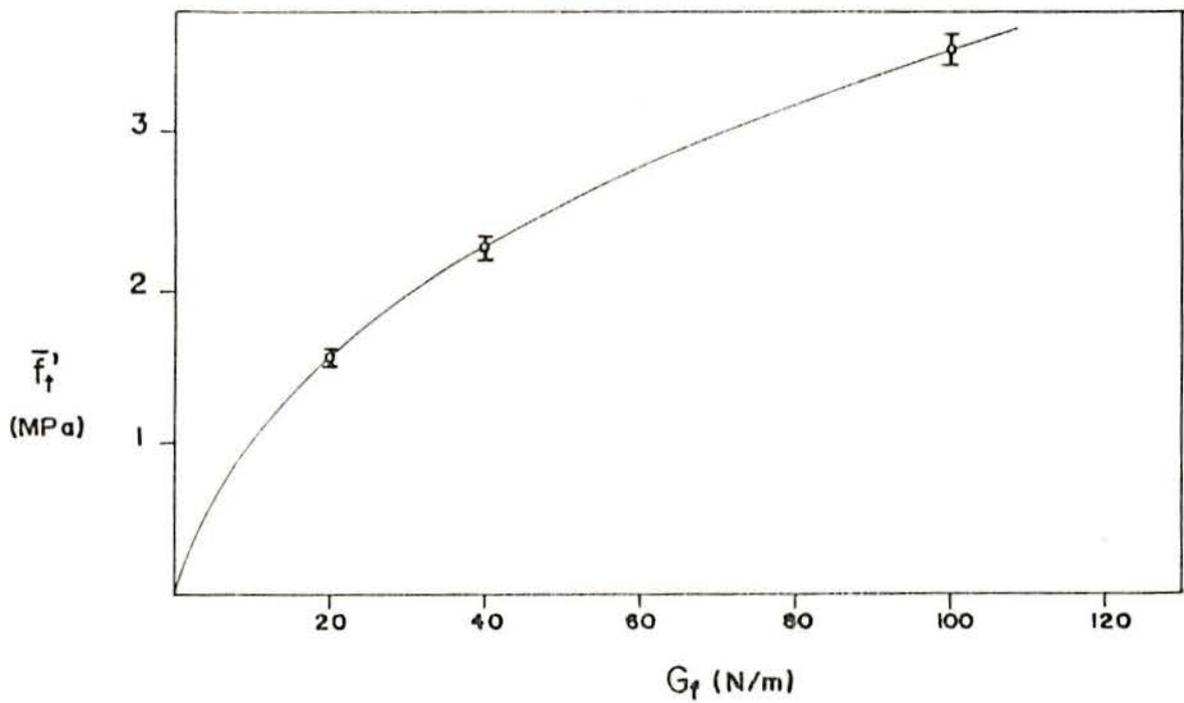


Fig.5.4.2b - Influência do parâmetro  $G_f$  na tensão crítica.

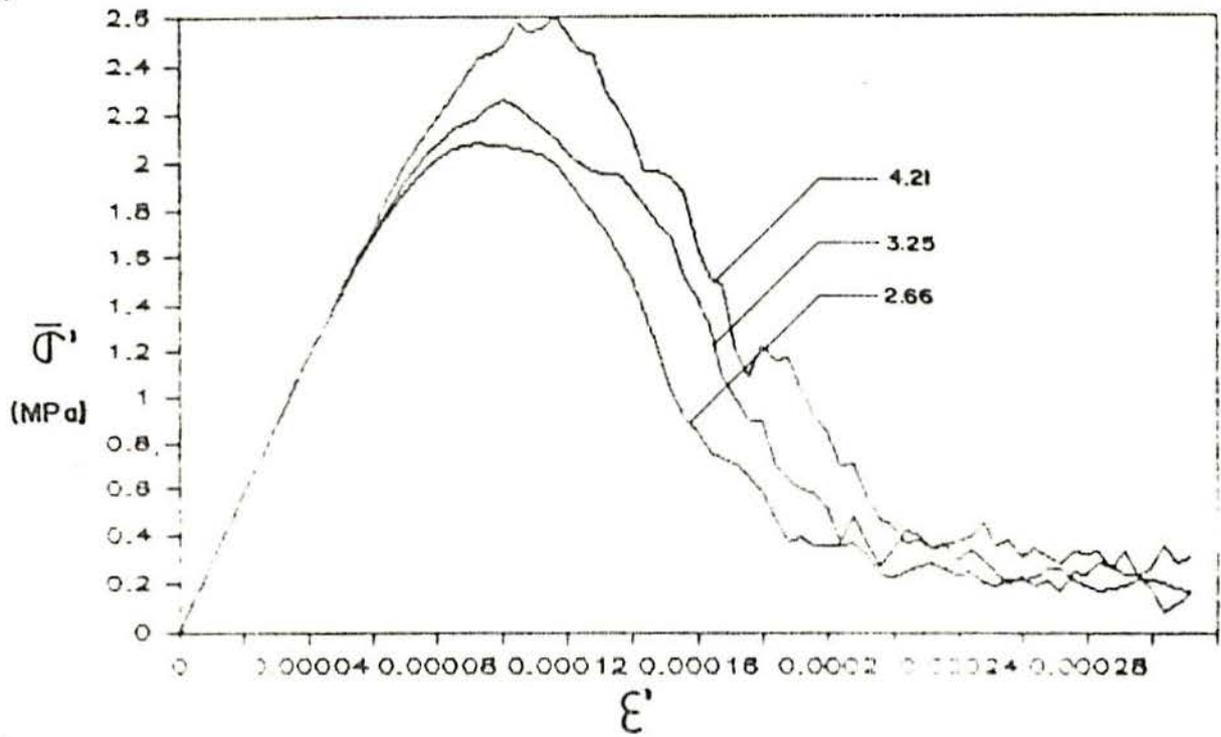


Fig.5.4.3a - Influência do parâmetro  $R_f$  na forma da relação constitutiva global média.

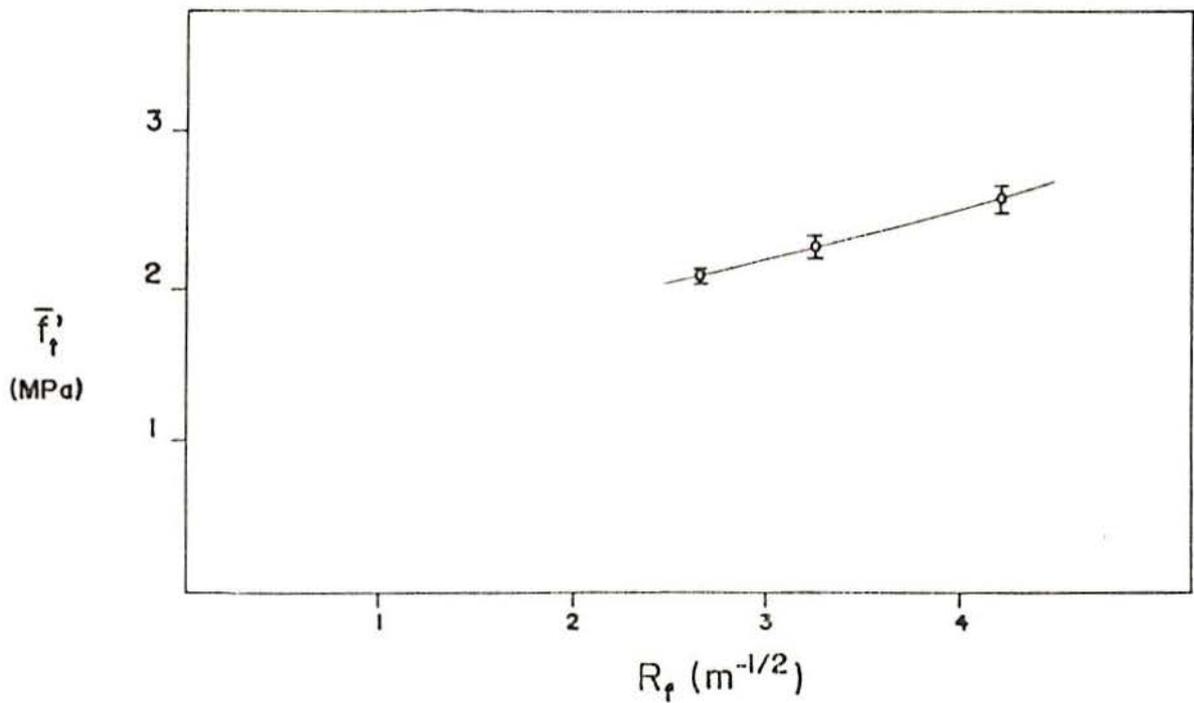


Fig.5.4.3b - Influência do parâmetro  $R_f$  na tensão crítica.

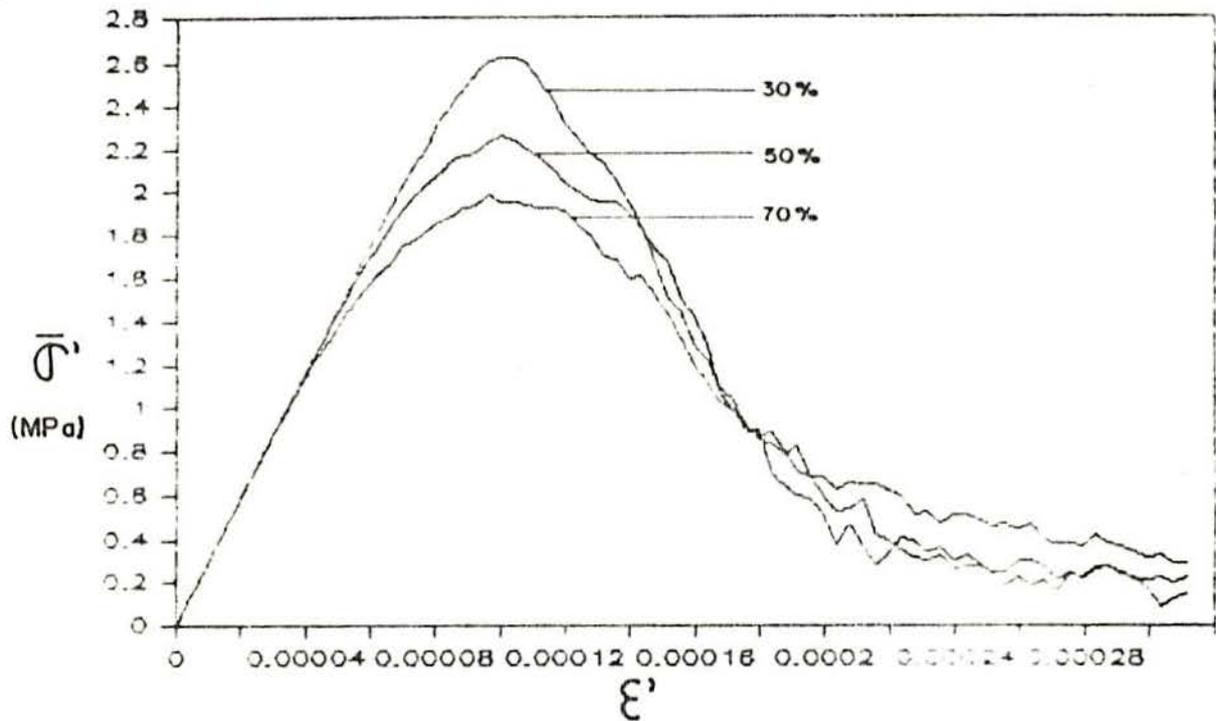


Fig. 5.4.4a - Influência do parâmetro  $CV_G$  na forma da relação constitutiva global média.

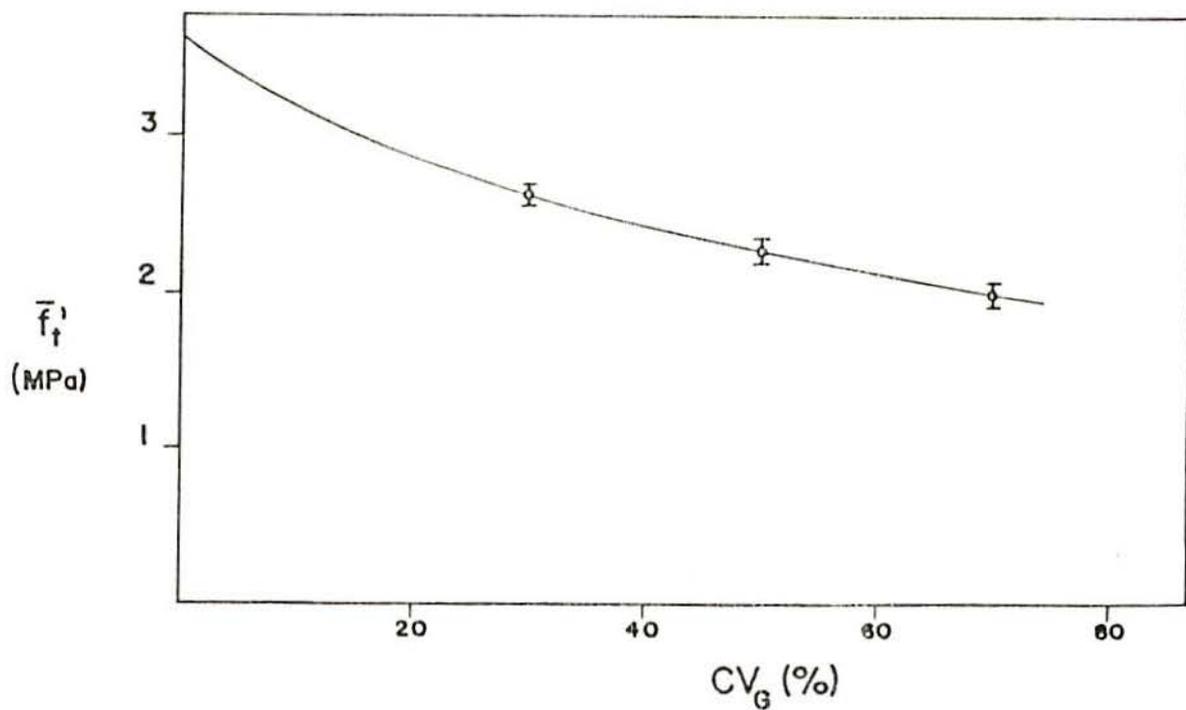


Fig. 5.4.4b - Influência do parâmetro  $CV_G$  na tensão crítica.

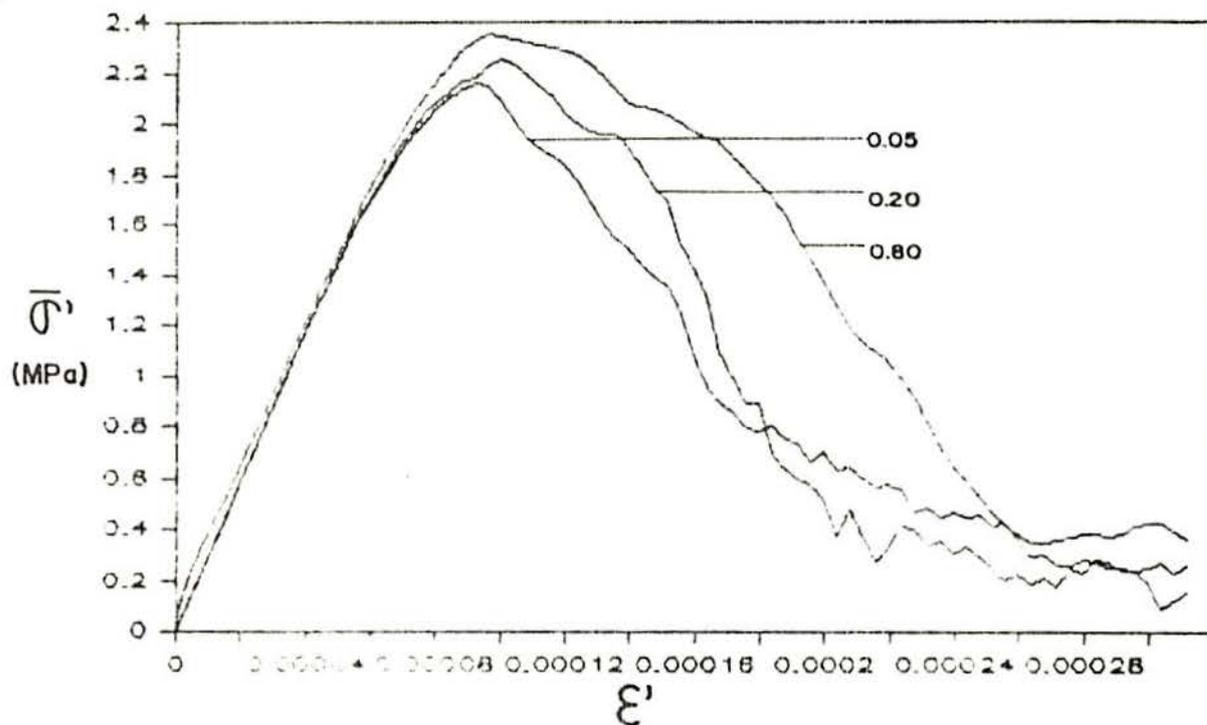


Fig.5.4.5a - Influência do parâmetro  $\dot{\epsilon}'$  na forma da relação constitutiva global média.

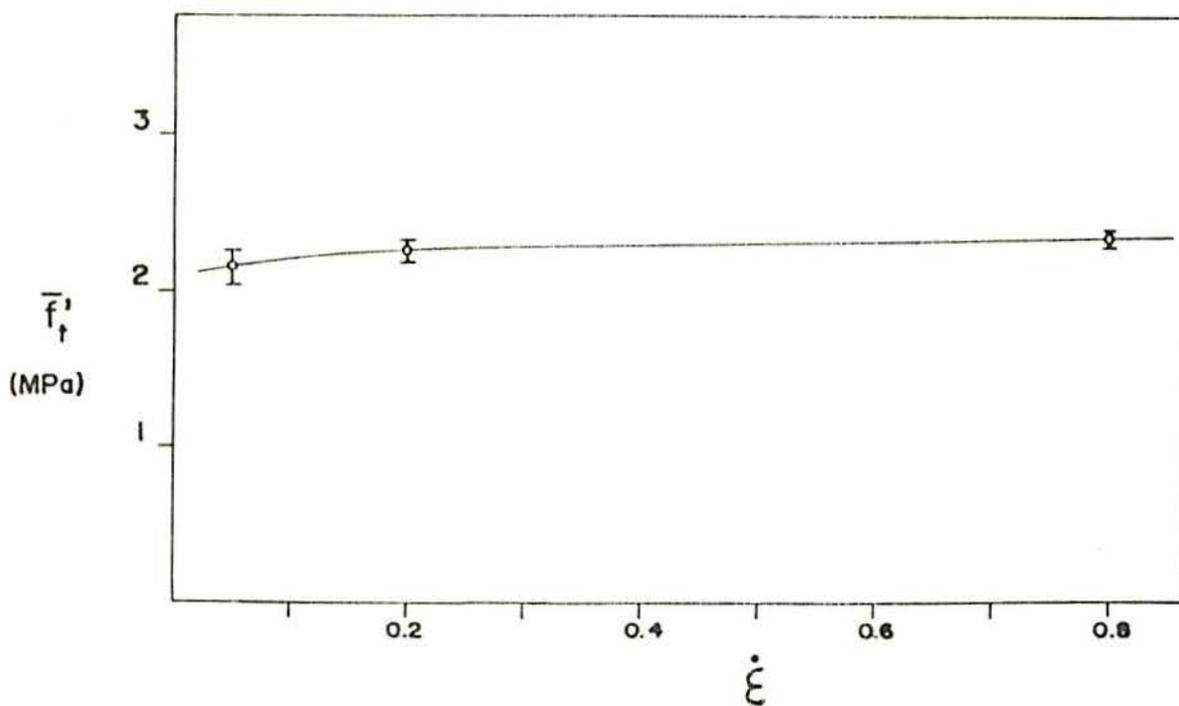


Fig.5.4.5b - Influência do parâmetro  $\dot{\epsilon}'$  na tensão crítica.

Pelas figuras 5.4.1a e 5.4.3a, pode-se notar que o caráter frágil do material é definido através dos valores dos parâmetros  $L_c$  e  $R_f$ . Se incorretamente avaliados resultam em um comportamento de caráter indefinido, com um grande consumo de energia antes que a tensão máxima seja atingida. Assim, conforme o tipo de comportamento do material que se queira representar, deve-se buscar um ponto ideal para estes parâmetros. Por outro lado, enquanto  $L_c$  influi apenas no parâmetro derivado  $k_r$  (que em última análise define por si só o tipo de comportamento do material),  $R_f$  interfere também na deformação associada ao pico ( $\epsilon_p$ ). Seria interessante realizar um estudo sobre o tipo de superfície de escoamento resultante para valores altos da ductilidade.

O parâmetro  $G_f$ , por sua vez, influi alterando a área do diagrama sem alterar sua forma, e portanto será útil para ajustar o consumo global de energia. Outro aspecto interessante, diz respeito a relação  $\epsilon_p = k G_f^{1/2}$  (extraída da expressão 3.2.2), que parece continuar sendo respeitada mesmo para corpos sem uma fissura inicial. Nota-se que a relação entre  $G_f$  e  $\epsilon_p$ , conforme a tabela 5.3.2, ficaria bem ajustada para  $k = 1.58 \times 10^{-5}$ . Este aspecto sugere a possibilidade de avaliar parâmetros da Mecânica das fraturas a partir de ensaios convencionais de tração uniaxial por deformação controlada (sem uma fissura inicial explícita).

Quanto ao coeficiente de variação  $CV_g$ , nota-se pela fig. 5.4.4a, que ele tem sobre a RCG média a mesma influência que teria sobre a função de densidade de probabilidade, ou seja, "espalha" a área sob a curva sem entretanto alterar o seu valor total. Por outro lado, este parâmetro tem pouca ou nenhuma influência sobre a deformação associada ao pico do diagrama.

Finalmente constata-se que a velocidade de deformação também teve sua influência qualitativamente bem representada. Nota-se ainda que, conforme se vê na fig. 5.4.5a, a rigidez inicial tende a aumentar com  $\dot{\epsilon}$ , o que também está de acordo com observações experimentais disponíveis<sup>9, 30, 34</sup>.

## 5.5 - Análise estatística do efeito de escala

No capítulo 3, demonstrou-se a capacidade do modelo de representar problemas de Mecânica das Fraturas para materiais homogêneos (sem aleatoriedade de propriedades). Nestas análises, porém, havia sempre uma fissura inicial perfeitamente definida, responsável pelo início do processo de ruptura. Para tais situações, o efeito de escala tem uma forma conhecida, apresentada no item 2.6.

Por outro lado, evidências experimentais acusam a existência de um efeito de escala também em materiais frágeis não-homogêneos, para os quais não é definida, de forma explícita, uma fissura inicial. Em tais casos, supõe-se que a ruptura se dá por um crescimento de microfissuras inerentes a constituição do material, que se uniriam formando uma fratura preferencial. Esta, por sua vez, se instabilizaria após atingir uma dimensão que resultasse em um fator de intensidade de tensões acima do crítico.

Para testar a capacidade do modelo de apresentar um efeito de escala também nestas situações, foram empregadas séries de cubos submetidos a tração uniaxial com deformação controlada. Os dados fornecidos ao programa FRACTUR são os mesmos do item 5.2, exceto os seguintes:

$$\begin{aligned}L_c &= 0.058\text{m} \quad (k_r = 1.042) \\ \dot{\epsilon} &= 0.025 \text{ s}^{-1} \\ CV_d &= 70\%\end{aligned}$$

As modificações acima visam realçar o efeito de escala, devido aos seguintes fatos:

\* Para valores de  $k_r$  muito maiores do que 1 o material começa a perder a característica de fragilidade em seu comportamento mecânico, de modo que a ruptura de um elemento se torna menos importante para a ruptura do modelo global.

\* Velocidades de deformação muito altas atuam de forma a compensar o efeito de escala, pois a velocidade de deslocamento absoluta imposta às faces dos cubos aumenta com o tamanho do mesmo.

\* A probabilidade de ocorrência de elementos mais fracos é maior para coeficientes de variação mais altos. Além disso, para cubos maiores (compostos de um maior número de elementos) o valor da resistência esperada para o elemento mais fraco é menor, fazendo com que o processo de ruptura se inicie para níveis de tensões mais baixos. Supõe-se ser esta a razão da existência do efeito de escala em materiais não-homogêneos, onde não existe uma fissura inicial explícita.

Tabela 5.5.1 - Tensões críticas obtidas em simulações com cubos sujeitos à deformação axial controlada. (Unidades MPa)

Dimensão	2	3	4	5	6	7
Simul.						
A	1.689	1.738	1.786	1.709	1.660	1.714
B	2.326	1.826	1.728	1.839	1.744	1.773
C	2.160	1.822	1.737	1.700	1.717	1.675
D	1.644	1.941	1.814	1.743	1.711	1.733
E	2.072	1.956	1.631	1.693	1.725	1.701
F	1.715	1.726	1.648	1.756	1.655	1.698
G	1.900	1.694	1.788	-	-	-
H	1.921	1.952	1.714	-	-	-
I	1.449	1.865	1.911	-	-	-
J	1.754	1.939	1.628	-	-	-
K	1.867	1.638	1.757	-	-	-
L	1.948	1.975	1.670	-	-	-
Média	1.870	1.840	1.734	1.710	1.702	1.716
D. Padr.	.24140	.11710	.08402	.08494	.03625	.03397

Na tab.5.5.1 encontram-se as resistências obtidas nas simulações, sendo que o número apresentado na primeira linha é a dimensão da aresta do cubo, em unidades de  $L_c$ .

Além da diminuição da resistência média com as dimensões do cubo (efeito de escala propriamente dito), nota-se que também ocorre uma diminuição no desvio padrão, o que também está de acordo com evidências experimentais.

A partir dos dados apresentados na tab.5.5.1, procedeu-se a um ajuste por mínimos quadrados através do programa NONLINPESO. Este programa realiza um regressão ponderada pelo desvio padrão. As expressões empregadas no ajuste, que serão justificadas no próximo capítulo, foram as seguintes:

$$\bar{f}'_l = A_1 (1 + d/A_2)^{-1/2} \quad (5.5.1)$$

$$\bar{f}'_l = B_1 (1 + d/B_2)^{-B_3} \quad (5.5.2)$$

$$\bar{f}'_l = C_1 (1 + d^{1/2}/C_2)^{-1} \quad (5.5.3)$$

Os ajustes foram feitos de duas formas: pelas médias, com o desvio padrão observado, e pelos pontos individuais, acompanhados de um desvio padrão ajustado pela seguinte expressão (obtida por regressão linear simples, após transformação apropriada):

$$s = \frac{0.1829}{d - 1.414} \quad (5.5.4)$$

A variável  $d$  corresponde a dimensão da aresta do cubo, em unidades de  $L_c$ . A significância do ajuste acima é atestada por  $R^2 = 0.975$ .

Na tab.5.5.2 estão os resultados do ajuste ponderado para as expressões (5.5.1-3). A validade da ponderação requer normalidade da distribuição dos dados, que foi confirmada pelo próprio programa de ajuste.

Tabela 5.5.2a - Valores ajustados pelo programa NONLINPESO para os coeficientes das expressões (5.5.1-3), através das médias e desvios padrões observados.

	Valor ajustado	Valor de t (Student)	Intervalo 95% de confiança
A <sub>1</sub>	1.860	28.2	1.680 a 2.040
A <sub>2</sub>	35.05	2.0	-13.40 a 83.50
B <sub>1</sub>	1.920	3.9	0.338 a 3.500
B <sub>2</sub>	3.134	0.1	-128.0 a 135.0
B <sub>3</sub>	0.105	0.2	-1.650 a 1.860
C <sub>1</sub>	1.993	16.8	1.660 a 2.320
C <sub>2</sub>	15.28	2.3	-3.530 a 34.10

Tabela 5.5.2b - Valores ajustados pelo programa NONLINPESO para os coeficientes das expressões (5.5.1-3), através dos resultados individuais e desvios padrões ajustados.

	Valor ajustado	Valor de t (Student)	Intervalo 95% de confiança
A <sub>1</sub>	1.833	39.1	1.740 a 1.930
A <sub>2</sub>	42.76	2.3	5.390 a 80.10
B <sub>1</sub>	1.901	4.2	0.998 a 2.800
B <sub>2</sub>	2.369	0.1	-53.90 a 58.60
B <sub>3</sub>	0.082	0.3	-0.559 a 0.723
C <sub>1</sub>	1.948	21.3	1.760 a 2.130
C <sub>2</sub>	18.07	2.4	3.230 a 32.90

Observando-se os valores de  $t$  na tab. 5.5.2, conclui-se que a expressão (5.5.2) não representa uma forma de ajuste conveniente. Por outro lado, as outras duas expressões resultam em parâmetros significativos, embora o intervalo de 95% de confiança seja amplo para  $A_2$  e  $C_2$ . Nota-se também que o ajuste feito por pontos individuais resulta melhor que o realizado através das médias.

Note-se que o bom ajuste pôde ser observado, a despeito do fato de ser possível realizar simulações apenas com uma limitada faixa de valores para  $d$ . Entretanto, seria interessante realizar verificações adicionais, quando se pudesse dispor de maiores recursos computacionais.

Finalmente, da análise aqui realizada pode-se concluir que o modelo apresenta um efeito de escala com significativo ajuste a expressões com respaldo teórico-experimental, conforme será apresentado no próximo capítulo. Lembra-se que não foi definida uma fissura inicial de forma explícita, mas que sua existência está implícita no valor na resistência de cada elemento (através de  $R_f$ ).

## 6 - APLICAÇÕES AO CONCRETO

### 6.1 - A teoria de BAZANT

Ao contrário do observado para materiais homogêneos, a teoria linear da MF mostra-se inaplicável ao concreto, principalmente no que diz respeito a uma correta representação do efeito de escala.

Conforme apresentado no item 2.6, para a Mecânica Elástica Linear das Fraturas, a resistência global varia com ( $d^{-1/2}$ ), sendo  $d$  uma dimensão de referência que define a escala global. Assim, traçando-se um gráfico ( $f_t \times d$ ) em escala logarítmica obtém-se uma reta de inclinação  $-1/2$ , conforme apresentado na fig.6.1.1a. Os critérios de ruptura provenientes da Resistência dos Materiais, bem como da plasticidade, não incorporam qualquer tipo de efeito de escala, sendo representados na mesma figura por uma reta horizontal. Entretanto, a análise experimental tem mostrado que para materiais de natureza granular, como o concreto e a rocha, a tendência a uma resistência muito alta prevista pela MELF para corpos de pequenas dimensões não ocorre (representada pela continuação da linha reta na referida figura); o que se observa em tais casos é uma aproximação do critério de tensões críticas da Resistência dos Materiais, enquanto para corpos de grandes dimensões continua sendo válida a MELF. Assim, o fenômeno do efeito de escala para tais materiais seria melhor representado por uma curva que resultasse de uma transição gradual entre a reta horizontal da plasticidade e da reta inclinada da MELF. Tal curva está também representada na fig.6.1.1a, como lei não-linear de BAZANT<sup>10, 11</sup>.

BAZANT propôs, para corrigir a teoria linear, que o consumo de energia na fratura fosse considerado não apenas proporcional a área de fratura formada, mas também ao volume

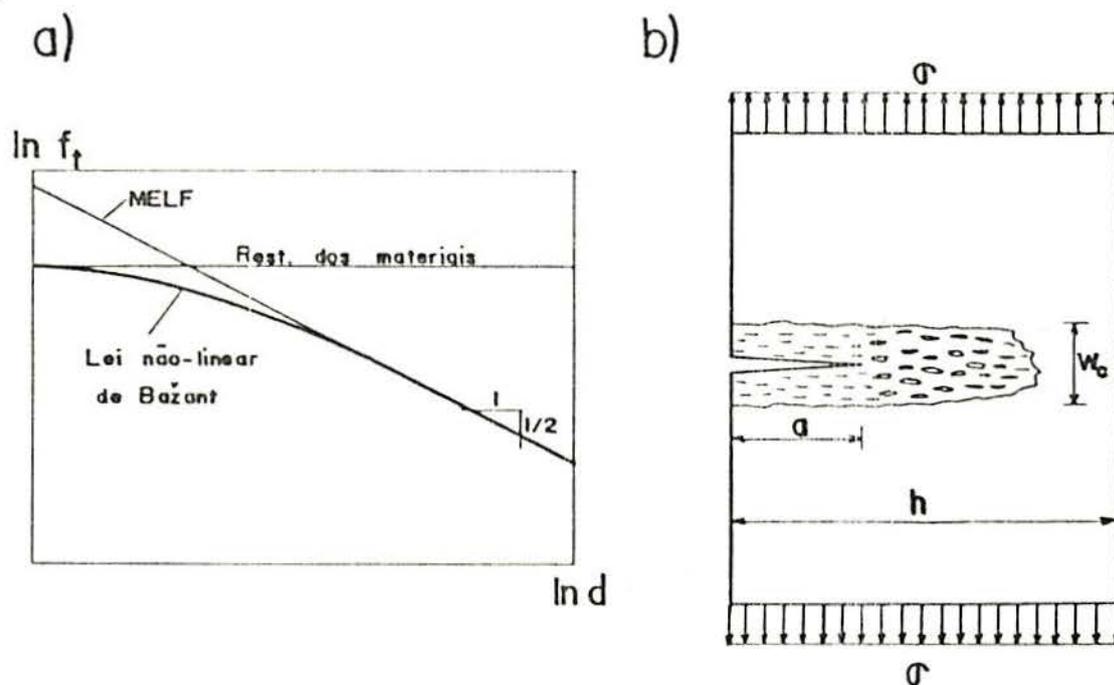


Fig.6.1.1. - a)Efeitos de escala relativos a diferentes teorias; b) Representação do conceito da "banda de fissuração" de BAZANT e dos parâmetros envolvidos.

de uma banda de fissuração hipotética. Tal banda seria caracterizada por uma espessura  $w_c$ , considerada como propriedade do material. Tal idéia está representada na fig.6.1.1b. A espessura  $w_c$  representa também um limite inferior para as dimensões de elementos de discretização. Tal idéia se justifica pelo fato de que, sendo o material composto, não faria sentido analisá-lo localmente, no domínio das fases que o compõem. Note-se que a definição do comprimento de correlação, apresentada no capítulo anterior, tem justificativa semelhante. Da teoria de BAZANT resulta que, para corpos de dimensões muito grandes em relação a espessura da banda de fissuração, a mesma passaria a ser desprezível, aproximando então a situação prevista na MELF.

Devido às considerações acima, deve-se portanto definir uma relação constitutiva associada a espessura  $w_c$ . Assim como foi feito neste trabalho, BAZANT também tem adotado usualmente a forma bilinear.

Analogamente à teoria apresentada no capítulo 3, considerações energéticas acerca da relação constitutiva elementar resultam na relação\*:

$$k_r = \frac{1}{w_c} \left( \frac{2 G_f}{\epsilon_p^2 E} \right) \quad (6.1.1)$$

Das expressões (3.3.2-3) têm-se, por sua vez:

$$k_r = \frac{c_A}{\alpha L_c} \left( \frac{2 G_f}{\epsilon_p^2 E} \right) \quad (6.1.2)$$

Ou seja, a menos de algumas constantes, que se devem ao aspecto geométrico do modelo em treliça, há até aqui uma correspondência nítida entre as duas abordagens. BAZANT também propõe um ajuste idêntico para  $k_r$ , para ser utilizado com elementos finitos, substituindo-se  $w_c$  pela dimensão do elemento de discretização (nunca menor que o próprio  $w_c$ ).

Entretanto, conforme apresentado no capítulo anterior, o fato de que  $L_c$  está também associado a uma função de densidade de probabilidade, aspecto não presente na teoria de BAZANT, surge uma dificuldade adicional para ajustar parâmetros associados à RCE, pois torna-se necessário modificar também as propriedades estatísticas envolvidas. Tal fato foi demonstrado no item 5.3. Como ainda não se tem uma idéia clara de como isto deva ser feito, preferiu-se neste trabalho manter o comprimento de correlação isento de

---

\* O parâmetro  $k_r$  corresponde na simbologia de BAZANT a  $B^2$ , sendo  $B = (1 + E_c / E_t)^{-1/2}$ , onde  $E_c$  é a inclinação do trecho ascendente da relação constitutiva bilinear, e  $E_t$  é a inclinação do trecho descendente ("strain-softening").

quaisquer alterações. Tal procedimento tem, no entanto, o inconveniente de restringir a capacidade de representação de diferentes geometrias, bem como de limitar as dimensões das estruturas analisadas conforme a capacidade computacional disponível.

Por outro lado, o aspecto da teoria de BAZANT que mais interessa ao contexto deste trabalho é o que diz respeito ao efeito de escala. Para exemplificar a teoria proposta, bem como permitir comparações com o modelo em treliça, escolheu-se novamente uma das configurações apresentadas no capítulo 2.

Para uma tira de comprimento infinito e largura  $h$ , com uma fissura lateral de comprimento  $a$  (configuração (d), fig. 2.3.1d), tem-se a seguinte lei de efeito de escala:

$$f'_t = \sqrt{2k_r} f_t (1 + \lambda/\lambda_0)^{-1/2} \quad (6.1.3)$$

Onde:

$$\lambda = h / d_a \quad (6.1.4)$$

$$\lambda_0 = \frac{n h}{2 a k_1} \quad (6.1.5)$$

$$w_c = n d_a \quad (6.1.6)$$

Na fig. 6.1.1b estão ilustradas as dimensões  $w_c$ ,  $h$  e  $a$ . O parâmetro  $k_1$  vale aproximadamente 1. Segundo BAZANT, para o concreto  $d_a$  representaria a dimensão do agregado graúdo, sendo  $n$  um fator multiplicativo estimado em aproximadamente 3.

A expressão (6.1.3) é obtida de um balanço energético igual ao apresentado na expressão (2.4.1). Aqui, porém, a dissipação de energia é função também do volume da banda de fissuração, e a formulação acaba envolvendo uma dimensão de referência. BAZANT afirma que a forma da expressão é geral, sendo que diferentes configurações necessitariam apenas de ajustes nos correspondentes parâmetros. Desta forma, preferiu-se definir uma forma genérica para ser empregada neste trabalho, que deixa apenas dois coeficientes a serem ajustados, conforme o tipo de análise realizada:

$$f'_t = \sigma_0 (1 + a/a_0)^{-1/2} \quad (6.1.7)$$

Onde  $a_0$  é uma dimensão de referência, comum a corpos de diferentes dimensões mas geometricamente semelhantes.

Comparando-se (6.1.7) com (6.1.3-6) têm-se:

$$a_0 = \frac{w_c}{2k_1} \cong 1.5 d_a \quad (6.1.8)$$

É interessante notar que, embora tendo sido desenvolvida para corpos dotados de uma fissura inicial explícita, a lei de BAZANT apresenta bom ajuste a resultados de ensaios com materiais supostos "intactos". Além disso, mesmo em ensaios de compressão simples a expressão (6.1.7) proporciona bons ajustes, conforme apresentado no ANEXO. Uma explicação para este bom desempenho poderia ser fornecida pela hipótese de que microfissuras inerentes ao concreto, as quais seriam responsáveis pelo início do processo de ruptura, teriam dimensões proporcionais as dimensões do corpo em que se encontram. Além disso, o fato de que uma lei formulada em função de esforços de tração ajusta bem efeitos de escala em ensaios de compressão, corrobora a idéia de que a ruptura do concreto se dá sempre por tração, seja ela direta, ou indireta pelo efeito de Poisson.

Assim, justifica-se aqui também o bom ajuste obtido para o efeito de escala no item 5.5, onde, ao invés da dimensão de uma fissura pré-definida, empregou-se a dimensão da aresta do cubo. A expressão (5.5.2), por sua vez, é uma proposta alternativa para realizar a transição entre os dois trechos retilíneos apresentados pela fig. 6.1.1a. Embora não resulte de uma dedução formal, como a expressão de BAZANT, apresentou igualmente parâmetros ajustados com boa significância.

## 6.2 - Simulações em torno da Mecânica Não-Linear das Fraturas, como proposta por BAZANT

Para se verificar a capacidade do modelo de representar corretamente a lei de efeito de escala de BAZANT, empregou-se uma configuração idêntica a apresentada no capítulo 4, ou seja, uma placa quadrada sujeita a estado plano de deformações, a qual se impõe um deslocamento de bordo com velocidade controlada. Os parâmetros atribuídos ao material são os mesmos adotados no item 5.2, excetuando-se a velocidade de deformação global e o coeficiente de variação de  $G_f$ , cuja influência também procurou-se analisar. Para as simulações apresentadas a seguir, a relação  $a/h$  é fixada em 0.5.

Inicialmente analisou-se o comportamento do modelo sem aleatoriedade, constatando-se que, mesmo neste caso, mantendo-se fixo o comprimento de correlação e variando-se as dimensões da placa, obtém-se um efeito de escala com excelente ajuste pela fórmula de BAZANT. Os resultados das simulações estão apresentados na Tab.6.2.1, sendo que a primeira linha refere-se a dimensão do lado da placa, em unidades de  $L_c$ .

Tabela 6.2.1 - Resistências obtidas para placas de diferentes dimensões, com fissura lateral de dimensão  $a = h/2$ , sujeitas a deslocamento de bordo com velocidade controlada, para diferentes dimensões de  $h$  e diferentes velocidades de deformação global. (Tensões em MPa, comprimentos em unidades de  $L_c$ )

Placa:	4	8	12	16
a =	2	4	6	8
$\dot{\epsilon} = 0.025$	1.869	1.488	1.273	1.130
$\dot{\epsilon} = 0.050$	1.860	1.504	1.312	1.214
$\dot{\epsilon} = 0.100$	1.870	1.525	1.414	1.400

Na tab. 6.2.2 estão os ajustes para os parâmetros da expressão (6.1.7), obtidos por regressão linear simples após transformação apropriada.

Pode-se justificar o excelente ajuste se for considerado que a fratura é obrigada a se propagar rompendo pelo menos uma "carreira" de elementos, cujas dimensões são constantes. Esta "carreira" de elementos funciona da mesma forma que a banda de fissuração idealizada por BAZANT, fornecendo portanto o mesmo tipo de efeito de escala.

Nota-se também que o aumento da velocidade de deformação global ocasiona um crescimento do parâmetro  $a_0$ . Isto está de acordo com o fato de que, para altas velocidades de deformação, a fratura deixa de se propagar por um plano preferencial único, e tende a se "espalhar" pelo corpo. Assim, a banda de fissuração teria sua largura aumentada alterando os resultados obtidos para a resistência. Nota-se também que o parâmetro  $R^2$  indica melhores ajustes para as simulações mais próximas a situação estática.

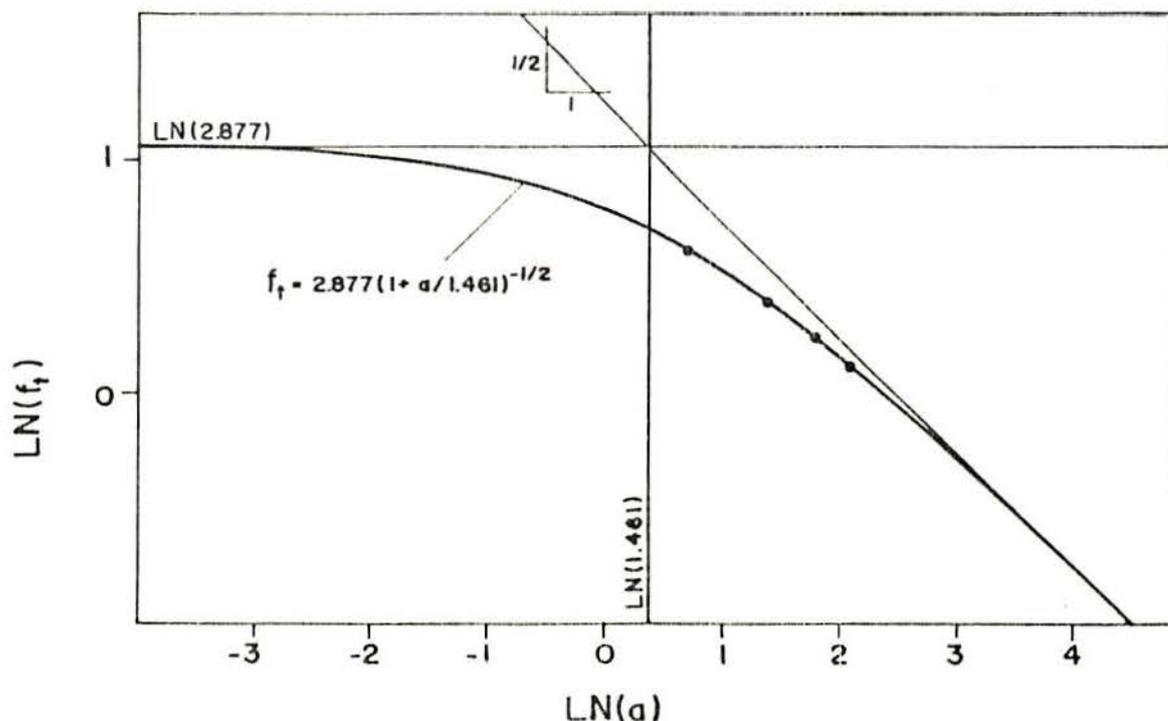


Fig. 6.2.1 - Ajuste dos resultados de simulações à lei de efeito de escala de BAZANT. ( $\dot{\epsilon}' = 0.025 \text{ s}^{-1}$ )

O ensaio mais próximo ao estático que a capacidade computacional disponível permitiu ( $\dot{\epsilon} = 0.025 \text{ s}^{-1}$ ), forneceu para  $a_0$  o valor  $1.46 L_c$ . Para esta velocidade pode-se observar o excelente ajuste ilustrado na fig. 6.2.1. Disto conclui-se que, se BAZANT está correto quanto ao valor de  $n$  para o concreto, tem-se para o modelo em treliça a relação:

$$L_c \cong d_a \quad (6.2.1)$$

Tabela 6.2.2 - Ajustes dos resultados da Tab.6.2.1 conforme a expressão (6.1.7)

	$\sigma_0$	$a_0$	$R^2$
$\dot{\epsilon} = 0.025$	2.877	1.481	0.9932
$\dot{\epsilon} = 0.050$	2.437	2.562	0.9901
$\dot{\epsilon} = 0.100$	2.017	6.628	0.8598

Para estudar a influência de  $CV_0$  realizaram-se duas séries de 8 simulações, para os valores 30 e 50%. Os resultados estão apresentados na Tab.6.2.3, sendo que a última linha contém um desvio padrão ajustado, empregado na introdução de dados, ponto a ponto, do programa NONLINPESO. A velocidade de deformação global adotada foi  $0.05 \text{ s}^{-1}$ .

Na tab.6.3.4 encontram-se os resultados do ajuste feito pelo programa NONLINPESO. Nota-se que o aumento de  $CV_0$  causa uma dispersão da banda de fissuração, que se reflete no aumento do parâmetro  $a_0$ . Pelos valores de  $t$  pode-se concluir que o ajuste também é significativo para o modelo com aleatoriedade.

Na fig.6.2.2 encontra-se uma saída do analisador gráfico ilustrando este fato. A figura refere-se a uma placa  $16 \times 16$  com  $CV_0 = 50\%$ .

Tab. 6.2.3 - Resistências obtidas para placas com aleatoriedade de propriedades mecânicas. (Tensões em MPa e dimensões em unidades de  $L_c$ ).

Placa a =	4 2	8 4	12 6	16 8
$CV_{\sigma} = 30\%$	1.667	1.361	1.286	1.200
	1.853	1.358	1.285	1.172
	1.736	1.486	1.250	1.156
	1.457	1.375	1.250	1.272
	1.582	1.231	1.336	1.237
	1.667	1.457	1.314	1.145
$\mu$	1.661	1.378	1.287	1.197
$s_{ob}$	0.13500	0.08968	0.03427	0.04949
$s_{aj}$	0.11740	0.07060	0.05048	0.03929
$CV_{\sigma} = 50\%$	1.349	1.314	1.212	1.280
	1.692	1.269	1.216	1.219
	1.515	1.492	1.071	1.169
	1.445	1.173	1.131	1.087
	1.331	1.106	1.225	1.279
	1.449	1.384	1.228	1.219
$\mu$	1.464	1.290	1.181	1.209
$s_{ob}$	0.13120	0.14011	0.06470	0.07300
$s_{aj}$	0.14290	0.10360	0.08125	0.06683

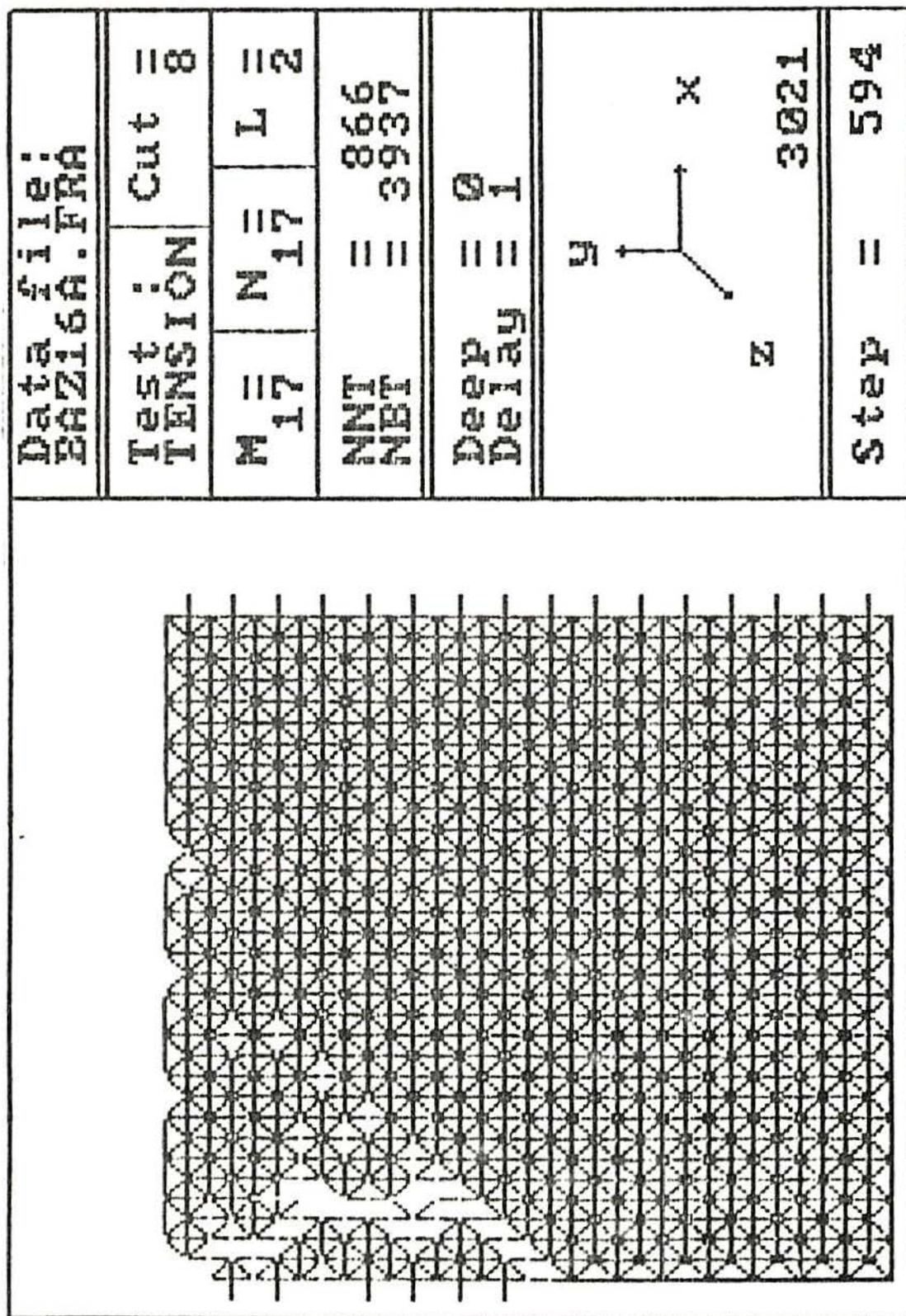


Fig.6.2.2 - Saída do analisador gráfico ilustrando o aumento sofrido pela banda de fissuração devido a aleatoriedade das propriedades mecânicas (Placa 16x16,  $CV_{\sigma} = 50\%$ ).

Tabela 6.2.4 - Ajustes dos resultados da Tab.6.2.3 conforme a expressão (6.1.7)

CV <sub>σ</sub>	Parâmetro	Valor de t	Intervalo 95% de confiança
30%	$\sigma_o = 1.882$	18.5	1.67 a 2.09
	$a_o = 5.307$	4.9	3.04 a 7.58
50%	$\sigma_o = 1.510$	15.8	1.31 a 1.71
	$a_o = 12.24$	2.6	2.33 a 22.2

### 6.3 - Ajuste de um ensaio experimental

Embora ainda não seja possível definir exatamente os parâmetros adequados à representação do concreto, bem como da função de densidade de probabilidade a ser empregada para a geração de  $G_f$ , mostra-se a seguir que o modelo, nas atuais circunstâncias, já não está muito longe de fazê-lo satisfatoriamente.

Para verificar esta capacidade, aproveitou-se uma curva experimental média obtida por ROELFSTRA&WITTMANN (1987) em ensaios do tipo "Compact-Tension". A geometria e dimensões do corpo de prova, modo de solicitação, bem como a adaptação ao modelo estão apresentados na fig.6.3.1.

Mantida a função de densidade de probabilidade de Weibull, utilizaram-se os seguintes parâmetros no programa FRACTUR, conforme fornecidos pelos autores:

$$\begin{aligned}
 E &= 3.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \\
 \nu &= 0.2 \\
 \rho &= 2400.0 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$

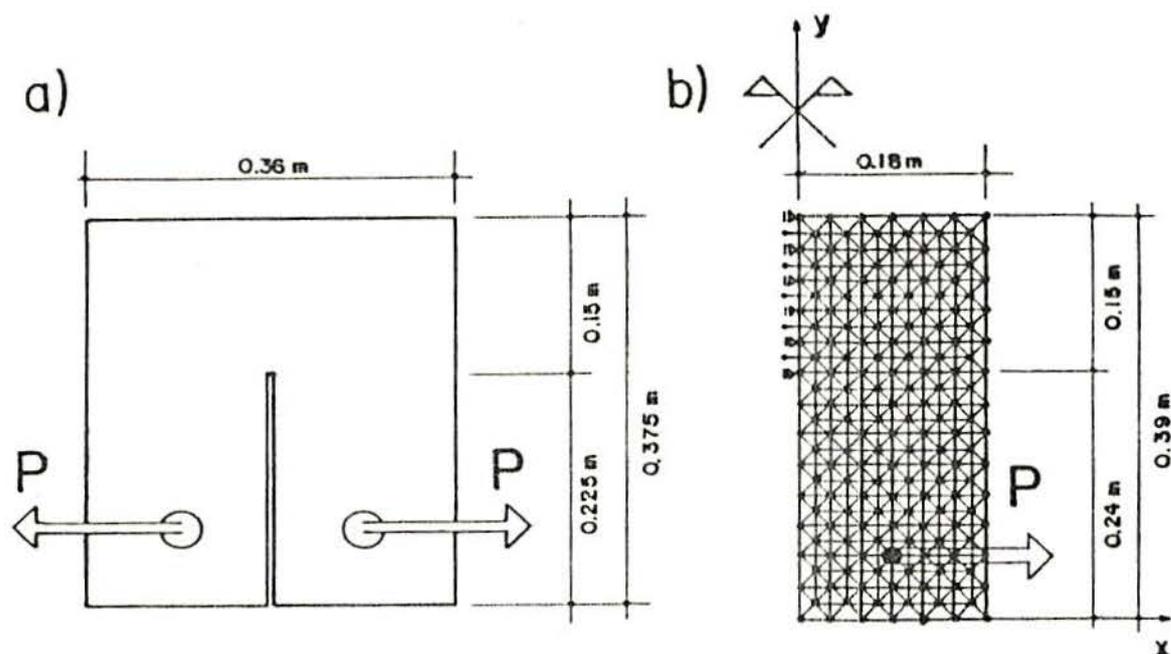


Fig.6.3.1 - a) Corpo de prova utilizado por ROELFSTRA&WITTMANN para testes do tipo "Compact-Tension"; b) adaptação ao modelo em treliça.

Dos experimentos realizados obteve-se:

$$\begin{aligned}
 G_f &= 124 \text{ N/m} \\
 P_{m\alpha x} &= 7.3 \text{ KN} \\
 \delta_{cr} &= 0.13 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

A energia específica de fratura fornecida pelos autores refere-se a área sob a curva  $P \times \delta$ , e difere portanto do valor local. O comprimento de correlação  $L_c$  foi escolhido como 0.03m, em função da melhor representação possível da geometria original do ensaio. Obviamente este procedimento também provocará limitações na capacidade de ajuste, visto que  $L_c$  é uma propriedade do material e não um parâmetro livre.

Os demais parâmetros do modelos foram ajustados conforme a seguir apresentado, de modo a aproximar o máximo possível a curva experimental da curva simulada:

$$\begin{aligned}
 CV_{\sigma} &= 65\% \\
 G_f &= 60.0 \text{ N/m} \\
 R_f &= 2.2 \text{ m}^{-1/2} \\
 V_{\delta} &= 0.05 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Onde  $V_{\delta}$  é a velocidade de deslocamento do ponto de aplicação da carga. Na fig.6.3.2 estão superpostas as curvas experimentais e seis curvas simuladas, mostrando que o ajuste é satisfatório.

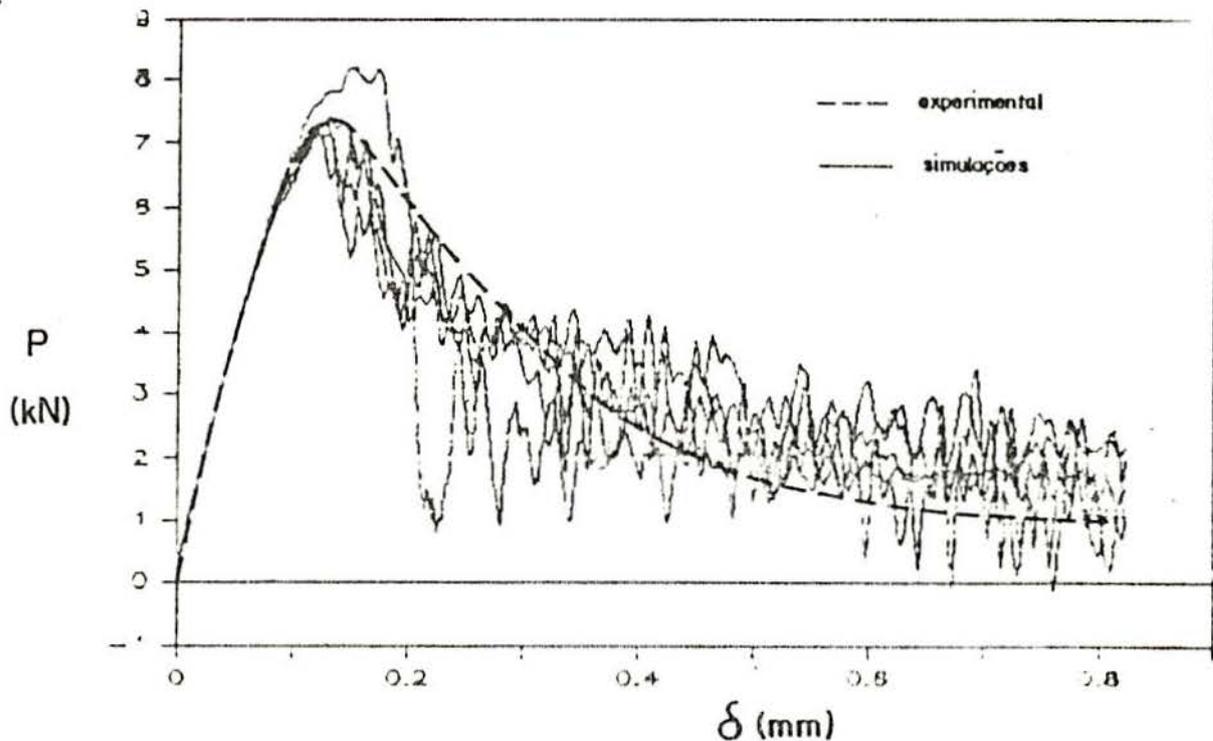


Fig.6.3.2 - Superposição da curva experimental média com as curvas simuladas.

A principal observação a ser feita com relação aos resultados aqui obtidos, diz respeito ao valor aferido para  $G_f$ . Notou-se que BAZANT atribui a este parâmetro valores da ordem de 40 a 70 N/m, enquanto WITTMANN et alii fornecem valores da ordem de 100 a 170 N/m.

O que se nota através do modelo é que, embora localmente o valor de  $G_f$  tenha sido aferido em 60 N/m, compatível com os valores de BAZANT, globalmente obtém-se  $G_f \cong 130$  N/m, compatível com valores de WITTMANN et alii.

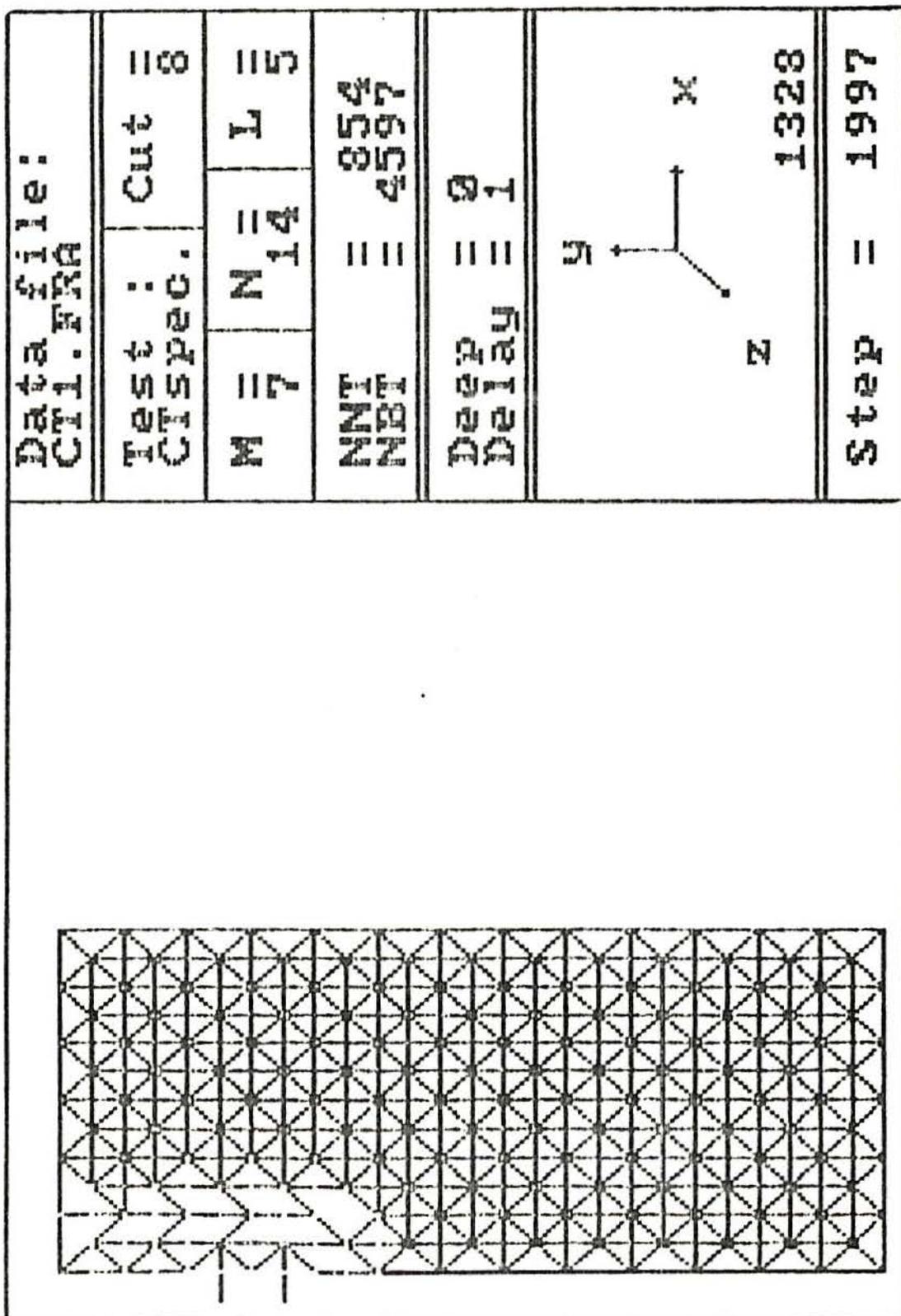


Fig.6.3.3 - Saída do analisador gráfico mostrando o aspecto da fratura para o ensaio simulado.

A explicação para este fato pode ser dada pela consideração, por parte de BAZANT, da banda de fissuração. Tal aspecto não é envolvido na teoria de WITTMANN et alii. Assim, como se pode ver pela fig.6.3.3, o caminhamento irregular da fratura acaba aumentando o consumo de energia na ruptura, que dividido então pela área do ligamento resulta em um valor superior ao especificado localmente.

Pensa-se que um maior número de simulações, envolvendo diferentes tipos de resultados experimentais, contribuiriam para tornar este ponto mais claro. Isto, porém, iria requerer uma capacidade computacional bem maior que a disponível para a realização deste trabalho.

## 7 - CONCLUSÕES

A ruptura de materiais frágeis, homogêneos ou não, requer inúmeros cuidados para ser corretamente modelada. Isto porque, neste tipo de análise, é difícil distinguir os parâmetros relacionados exclusivamente ao material, de outros parâmetros que refletem a geometria de problemas específicos. O emprego de modelos de discretização pode acarretar uma não objetividade se tais fatos não forem levados em conta.

Verificou-se que a relação constitutiva adotada para os elementos deve ser ajustada conforme as dimensões dos mesmos, caso esteja envolvido o efeito de "strain-softening". Isto porque este efeito tem caráter não-local, e sua manifestação depende do comprimento de controle. Além disso, o consumo de energia no processo de ruptura deve ser invariante com relação ao nível de discretização.

Assim, baseada em hipóteses relativamente simples, foi desenvolvida uma formulação incorporando um critério de ruptura frágil, a qual foi acoplada a um modelo de discretização em treliça. Cabe observar todavia, que as considerações feitas neste trabalho são também diretamente aplicáveis a outros modelos, como por exemplo em elementos finitos. O modelo em treliça, dotado de caráter dinâmico e probabilístico, demonstrou possuir um grande potencial para representar as mais diversas situações envolvendo o fenômeno de ruptura, seja em materiais homogêneos ou não.

Inicialmente empregou-se o modelo para representar problemas típicos da MELF, onde uma fissura inicial produz uma concentração de tensões que dá início à ruptura. Os níveis de tensões para os quais isto acontece corresponderam aos resultados esperados com base em uma formulação teórica, que

por sua vez tem respaldo experimental. Também verificou-se a capacidade de se obter valores razoavelmente precisos para as velocidades de propagação de fraturas.

Para representar um material não-homogêneo, distribuiu-se aleatoriamente suas propriedades mecânicas através do volume. Verificou-se que, neste caso, as dimensões dos elementos de discretização também devem ser consideradas uma propriedade característica, assim como o são a rigidez e a energia específica de fratura. Observou-se que, quando simuladas situações onde há uma fissura inicial definida, o modelo se comporta de forma a corroborar a teoria da banda de fissuração de BAZANT. Outrossim, a incorporação do caráter não-determinístico resulta em um comportamento global não-linear (mesmo antes de atingida a tensão crítica), embora para os elementos seja especificada uma relação constitutiva linear até a ruptura.

Uma importante característica do modelo, à qual se dedicou especial atenção, foi a capacidade de apresentar um efeito de escala, que é previsto pela MELF, para corpos dotados de uma fissura inicial, e pelas Teorias Estatísticas da Resistência dos Materiais, para materiais não-homogêneos que apresentam comportamento frágil. Em ambos os casos o modelo mostrou-se apto à uma boa representação, e mais do que isto, reforçou a idéia de que as duas formas de efeito de escala estão relacionadas. Isto porque a não-homogeneidade faz com que a probabilidade de ocorrência de pontos mais fracos aumente para corpos com maior volume. Estes pontos mais fracos dariam origem a descontinuidades que, na sequência do processo, se instabilizariam quando atingidas certas condições determinadas pela Mecânica das Fraturas.

Embora as análises tenha sido restringidas pela capacidade computacional disponível, pois trabalhou-se com um micro-computador do tipo PC, foi possível se ter uma boa idéia das tendências de comportamento esperadas para sistemas maiores. Pensa-se que a implementação do programa FRACTUR em um equipamento de grande porte (que continue permitindo um rápido controle gráfico dos resultados) abrirá caminho para diversos estudos facilmente implementáveis como:

\* Estados multiaxiais de tensões, flexão, torção, corte, e outros tipos de solicitações usuais em estruturas correntes.

\* Não-homogeneidades regulares, como por exemplo a interação de camadas compostas de diferentes materiais.

\* Ruptura frágil em compressão, seja com ou sem flambagem.

\* Efeitos de cargas de impacto, localizadas ou distribuídas. Neste caso seria necessário um estudo mais aprofundado do efeito do amortecimento proporcional a massa.

\* Representação do concreto armado. Isto poderia ser feito superpondo-se as barras do modelo com as barras da armadura.

Também seriam interessantes estudos envolvendo combinações dos itens acima, como por exemplo a ruptura por flambagem em pilares de concreto armado, etc.

Finalmente, pode-se dizer que este trabalho se constituiu em um estudo que focalizou o fenômeno da ruptura em si, e de seus aspectos mais imediatos. Assim, as possíveis aplicações a sistemas estruturais correntes representam um vasto horizonte, ainda esperando por ser explorado.

## BIBLIOGRAFIA

1. KANNINEN, M.F. & POPELAR, C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. New York, Oxford University Press, 1985.
2. IRWIN, G.R. *Fracture*. In: *Handbook der Physik*. Berlin, S. Flugge (Ed.), Springer-Verlag, 551-590, 1958.
3. NAYFEH, A.H. & HEFSY, M.S. Continuum modeling of three dimensional truss-like space structures. *AIAA Journal*, 16(8):779-87, Aug. 1978.
4. HAYASHI, Y. Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear. Tese M.Sc., Porto Alegre, UFRGS, Dez. 1982.
5. RIERA, J.D. Efectos de escala en la capacidad de carga de elementos estructurales de hormigon. In: *A Engenharia Sulamericana na Década de 80*. Montevideo, 269-293, Dez. 1986.
6. NANNI, L.F. & RIERA, J.D. Sobre as distribuições de valores extremos. *Caderno Técnico*, Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, CT-83, 1986.
7. ZUBELEVICZ, A. & BAŽANT, Z.P. Interface element modeling fracture in aggregate composites. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, New York, ASCE, 113(11):1619-30, Nov. 1974.
8. BAŽANT, Z.P. & PANULA, L. Statistical stability effects in concrete failure. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, New York, ASCE, 104(10):1195-212, Oct. 1978.
9. ZIELINKSI, A.J., REINHARDT, H.W. & KÖRMELING, H.A. Experiments on concrete under uniaxial impact tensile loading. *Materiaux et Constructions*, Paris, RILEN, 14(60):103-12, 1981.

10. BAŽANT, Z.P. & OH, B.H. Crack band theory for fracture of concrete. Materiaux et Constructions, Paris, RILEN, 16(03):155-77, Mai.-Jun. 1983.
11. BAŽANT, Z.P. Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 110(4):518-35, Apr. 1984.
12. DIEKKÄMPER, R. Ein Verfahren zur numerischen Simulation des Bruch- und Verformungsverhaltens spröder Werkstoffe. Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr Universität, Mitteilung Nr.84-7, Dec. 1984.
13. SIH, G.C. Mechanics of material damage. In: Fracture Mechanics of Concrete. A. Carpinteri & A.R. Ingraffea (Ed.), The Hague, 1-30, 1984.
14. WITTMAN, F.H., ROELFSTRA, P.E. & SADOUKI, H. Simulation and analysis of composite structures. Summary Report on Research Activities, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, 299-308, Dez. 1986.
15. WITTMAN, F.H., ROELFSTRA, P.E. & SADOUKI, H. Le béton numérique. Summary Report on Research Activities, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, 309-17, Dez. 1986.
16. REINHARDT, H.W. The role of fracture mechanics in rational rules for concrete. IABSE Periodica, S-34/86(1), 1986.
17. BAŽANT, Z.P., KIM, J. & PFEIFFER, P.A. Nonlinear fracture properties from size effect tests. Journal of Structural Engineering Division, New York, ASCE, 112(2), Feb. 1986.
18. ROTS, J.G. Strain softening analysis of concrete fracture specimens. In: Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete. Lausanne, Sulça, F.H. Wittmann (Ed.), 137-148, 1986.
19. WILLAN, K., BICANIC, N., PRAMONO, E. & STURE, S. Composite fracture model for strain softening computations of concrete. Ibid, 140-162.
20. ROELFSTRA, P.E. & WITTMANN, F.H. Numerical method to link strain softening with failure of concrete. Ibid, 163-175.

21. LEIBENGOOD, L.D., DARWIN, D. & DODDS, R.H. Parameters affecting FE analysis of concrete structures. Journal of the Structural Engineering Division, New York, ASCE, 112(2):326-341, Feb. 1986.
22. BAŽANT, Z.P. & SENNER, S., Size effect in torsional failure of concrete beams. Journal of Structural Engineering Division, New York, ASCE, 113(10):2125-36, Oct. 1987.
23. HORDIJK, D.A., REIHARDT, H.W. & CORNELISSEN, H.A.W. Fracture mechanics parameters of concrete from uniaxial tensile tests as influenced by specimen length. In: International Conference on Fracture of Concrete and Rock, Houston, Texas, Jun. 1987.
24. ANSARI, F. Stress-strain response of microcracked concrete in direct tension. ACI Materials Journal, 481-90, Nov.-Dec. 1987.
25. KOLLEGER J. & MEHLHORN, G. Material models for cracked reinforced concrete. In: IABSE Colloquium of Computational Mechanics of Concrete Structures - Advances & Applications, Session 1, IABSE Reports, Delft, 63-74, 1987.
26. MIHASHI, H., WITTMANN, F.H., SIMONIN, P. & ROKUGO, K. Fracture energy evaluation of concrete with compact tension test (Aceito para publicação). 1987.
27. ROKUGO, K., WITTMANN, F.H., ROELFSTRA, P.E. & BRÜHWILER, E. Different methods to determine fracture energy and strain softening of concrete. (Aceito para publicação). 1987.
28. BAŽANT, Z.P., PIJAUDIER-CABOT, G. & PRAT, P.C. Distributed damage and application of nonlocal and microplane concepts. In: Transactions of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT). Rotterdam, Holanda, F.H. Wittmann (Ed.), Vol. H (Concrete and concrete structures):3-13, 1987.
29. ROKUGO, K., BRÜHWILER, E., WITTMANN, F.H. & MIHASHI, H. Methods to determine fracture energy and strain softening of concrete. Ibid, 15-23.

30. BRÜHWILER, E., WITTMANN, F.H. & ROKUGO, K. Influence of rate loading on fracture energy and strain softening of concrete. *Ibid*, 25-33.
31. BAŽANT, Z.P., PRAT, P.C. & PFEIFFER, P.A. Mode I fracture tests of concrete using different specimen geometries. *Ibid*, 35-40.
32. ROELFSTRA, P.E. & WITTMANN, F.H. Numerical modelling of fracture of concrete. *Ibid*, 41-49.
33. ZHANG, X.H. & LI, Q.L. The role of brittleness in fracture of concrete. *Ibid*, 67-72.
34. EIBL, J. & CURBACH, M. Behaviour of concrete under high tensile loading rates. *Ibid*, 245-250.
35. FANELLA, D. & KRAJCINOVIC, D. Size effect in concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 114(4):704-15, Apr. 1988.
36. SADOUKI, H. & WITTMANN, F.H. On the analysis of failure process in composite materials by numerical simulation. Material Science and Engineering, Holanda, Elsevier, A104:9-20, 1988.
37. GRAN, J.K. & SEAMAN, L. Strain softening calculations of concrete in dynamic uniaxial tension. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 114(11):1911-1929, Nov. 1988.
38. BAŽANT, Z.P. & LIN, F.B. Nonlocal smeared cracking model for concrete structures. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 114(11):2493-2511, Nov. 1988.
39. BAŽANT, Z.P. & PIJAUDIER-CABOT, G. Measurements of characteristic length of nonlocal continuum. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 115(4):755-767, Apr. 1989.
40. KLEIN, D. Caderno de Engenharia CE29/89. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS. (A ser publicado.)

## ANEXO

### - Ajuste do efeito de escala em microconcreto à compressão -

Embora o emprego da lei de efeito de escala proposta por BAZANT careça de justificativa quando se trata de ensaios à compressão em cilindros supostos "intactos", os bons ajustes apresentados a seguir poderiam representar uma corroboração à hipótese de que, para o concreto, a ruptura ocorre sempre por tração, direta ou indireta por efeito de Poisson. Para maiores esclarecimentos, vide o corpo principal da dissertação, item 6.2.

Os dados utilizados aqui estão apresentados no Caderno de Engenharia CE 29/89, do CPGEC/UFRGS, de autoria do Professor Dario Klein, e foram obtidos de ensaios realizados no ano de 1986. Dentre os diversos grupos de dados disponíveis, selecionou-se, a título de exemplo, os referentes a corpos de provas cilíndricos rompidos aos 28 dias. O fator água/cimento empregado na dosagem foi 0.5, para três diferentes tipos de microconcreto, conforme o diâmetro do agregado  $d_a$  ( 1.2, 2.4 e 4.8 mm)

Na tabela I.1 estão reproduzidos os resultados em termos de tensões críticas de compressão ( $f_{o28}$ ), em MPa. A expressão I.1 mostra a forma adotada para a expressão de BAZANT neste anexo:

$$\bar{f}'_{o28} = A (1 + \phi / B)^{-1/2} \quad (I.1)$$

Onde  $\phi$  é o diâmetro do corpo de prova, A e B são os parâmetros a serem ajustados.

Tabela I.1 - Valores das tensões de ruptura a compressão simples, para corpos de prova cilíndricos rompidos aos 28 dias. (Tensões em MPa, dimensões em cm)

$\phi \times h$	2.5x5		5x10	7.5x15	10x20	15x30
$d_a = 1.2\text{mm}$	53.0	53.0	38.7	43.9	37.7	34.9
	57.0	57.0	39.7	45.3	40.5	38.2
	40.7	44.8	39.7	38.5	40.2	34.7
	53.0	57.0	24.5	42.6	42.4	40.7
$\mu$	51.9		35.7	42.6	40.2	37.1
$s_{ob}$	6.07		7.45	2.93	1.93	2.87
$s_{aj}$	5.47		4.23	3.44	2.91	2.21
$d_a = 2.4\text{mm}$	48.9	63.2	48.9	37.6	43.0	41.6
	59.1	53.0	39.7	46.2	44.3	38.6
	40.7	61.1	38.2	46.2	41.8	35.0
	30.6	55.0	44.8	43.5	38.2	40.7
$\mu$	51.5		42.9	43.4	41.8	36.5
$s_{ob}$	11.1		4.90	4.05	2.62	6.01
$s_{aj}$	5.67		5.12	4.67	4.30	3.70
$d_a = 4.8\text{mm}$	44.8	28.5	46.9	43.0	44.3	38.2
	53.0	32.6	41.8	41.6	47.4	42.1
	57.0	38.7	49.9	45.7	43.8	38.8
	57.0	50.9	34.6	33.7	40.7	42.8
$\mu$	45.3		43.3	41.0	44.1	40.5
$s_{ob}$	11.0		6.69	5.16	2.74	2.31
$s_{aj}$	11.8		6.32	4.32	3.28	2.21

O ajuste foi realizado pelo programa NONLINPESO, fornecendo-se as resistências obtidas em cada ensaio acompanhadas de um desvio padrão ajustado (também apresentado na Tab.I.1, logo abaixo do desvio padrão observado), da mesma forma como foi feito no item 5.5.

Tabela I.2 - Resultados dos ajustes para os resultados apresentados na Ta.I.1.

$d_a$	Parâmetro	Valor de t	Intervalo 95% de confiança
1.2 mm	A = 51.1 B = 15.6	13.4 2.5	43.2 a 59.1 2.43 a 28.8
2.4 mm	A = 53.8 B = 15.1	13.8 2.3	45.7 a 61.8 1.47 a 28.8
4.8 mm	A = 45.6 B = 59.6	15.4 1.3	39.5 a 51.7 -37.9 a 157.

Na Tab.I.2 estão apresentados os resultados dos ajustes. Os valores obtidos para o parâmetro t indicam um bom nível de significância.

Por outro lado, tal qual ocorrido no item 5.5, o parâmetro B resulta menos significativo, com um intervalo de 95% de confiança muito amplo. Sem dúvida a razão disto decorre da inexistência de uma fissura inicial perfeitamente definida, que deveria liderar o processo de ruptura. Pelos altos valores obtidos para a dimensão de referência, tanto aqui como no item 5.5, nota-se que se admitida a idéia de uma banda de fissuração para estes casos, a mesma seria muito indefinida. Pensa-se que para estes tipos de ensaio ela só poderia ser claramente identificada para dimensões bem maiores dos corpos de prova.