Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Extensões de Ore e Álgebras de Hopf Fracas

Tese de Doutorado

Ricardo Leite dos Santos

Porto Alegre, 30 de novembro de 2017

Tese submetida por Ricardo Leite dos Santos[1], como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professores Orientadores:
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana
Prof. Dr. Christian Lomp

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antônio Paques (UFRGS)

Prof.ª Dr.ª Daiana Aparecida da Silva Flôres (UFSM)

Prof. Dr. Dirceu Bagio (UFSM)

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)

Prof. Dr. Christian Lomp (UP)

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à Deus por ouvir minhas preces e me dar a força necessária para completar essa caminhada.

À minha esposa Juliana, pela grande companheira que foi durante esta empreitada. Nos momentos mais difíceis, ela sempre esteve ao meu lado me apoiando e me ajudando em todos os sentidos.

Aos meus pais Emerenciano e Erlete, por se mostrarem sempre presentes, apesar das distâncias, pela torcida e o apoio.

À minha irmã Cristiane, por sempre me incentivar e apoiar em todos os sentidos. Também por sempre preocupar-se com o meu bem estar, tanto físico quanto mental. Se cheguei hoje aqui, isso tudo é graças a ti, ao teu apoio e incentivo desde lá do início.

Aos demais familiares e amigos que estiveram sempre na torcida e mandando energias positivas para que eu alcançasse meu objetivo.

Ao meu orientador Alveri Sant'Ana, primeiro por ter aceitado a orientação e depois por estar sempre em prontidão para me atender, tanto para tratar de matemática quanto para me dar conselhos ou ouvir as minhas angústias.

Ao meu coorientador Christian Lomp, por todos os ensinamentos matemáticos e também por estar sempre 'on-line' para as minhas questões. Agradeço também todo o apoio e hospitalidade prestados por ele, e sua esposa Paula, na minha estada em Porto.

Aos meus colegas de Pós-Graduação pelos momentos de descontração na hora do café e por sempre estarem prontos para uma discussão sobre questões matemáticas e o desenvolvimento desse trabalho. Devo um agradecimento especial ao meu grande amigo Robson, que é uma dessas pessoas iluminadas que Deus coloca na nossa vida, por todos os seus conselhos, discussões, ajudas e momentos inesquecíveis vividos juntos.

Agradeço muito a banca, por terem empenhado uma grande parte do seu tempo para a leitura desse texto e por todas as sugestões e correções para o enriquecimento do mesmo.

À Universidade do Porto e seus funcionários, pelo suporte e hospitalidade durante a minha visita.

À FAPERGS, pelo auxílio financeiro para a realização do projeto de Internacionalização da Pós-Graduação, que proporcionou a parceria com os professores da Universidade do Porto e o desenvolvimento desse trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro através da concessão de minha bolsa de doutorado.

Resumo

Extensões de Ore são anéis de polinômios, denotados por $R[x;\sigma,\delta]$, nos quais a variável x e os elementos de R não comutam necessariamente. Álgebras de Hopf fracas são álgebras que também são coálgebras e satisfazem um conjunto de axiomas de compatibilidade entre essas estruturas. Neste trabalho investigamos extensões de Ore cujo anel base é uma álgebra de Hopf fraca. Mais especificamente, dada uma álgebra de Hopf fraca R, estudamos sob quais condições $R[x;\sigma,\delta]$ é uma álgebra de Hopf fraca com uma estrutura que estende a estrutura de R. Sob certas hipóteses, obtemos condições necessárias e suficientes para que a extensão de Ore seja uma álgebra de Hopf fraca, obtendo assim um resultado que generaliza um teorema de Panov para o contexto de álgebras de Hopf fracas.

Palavras-chave: Extensões de Ore. Álgebra de Hopf fraca. Caracter. Coderivação.

Abstract

Ore extensions are polynomial rings, denoted by $R[x; \sigma, \delta]$, in which the variable x and the elements of R do not commute necessarily. Weak Hopf algebras are algebras which are also coalgebras and satisfy a set of axioms of compatibility betweem these structures. In this work, we investigate Ore extensions whose base ring is a weak Hopf algebra. More specifically, if R is a weak Hopf algebra then we study under what conditions $R[x; \sigma, \delta]$ is a weak Hopf algebra extending the structure of R. Under certain hypotheses, we obtain necessary and sufficient conditions for an Ore extension to be a weak Hopf algebra, obtaining a result that generalizes a Panov's theorem to the setting of weak Hopf algebras.

Keywords: Ore extensions. Weak Hopf algebra. Character. Coderivation.

Sumário

Introdução

Sejam R uma k-álgebra, $\sigma : R \to R$ um endomorfismo de R e $\delta : R \to R$ uma σ-derivação. A partir desses elementos podemos considerar a k-álgebra gerada por R e por um elemento x, que não está em R, sujeita a relação $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$ para todo elemento $r \in R$. A nova álgebra obtida é denotada por $R[x; \sigma, \delta]$ e recebe o nome de extensão de Ore. Tal álgebra consiste basicamente de polinômios em uma variável sobre a álgebra R, sendo que essa variável não comuta necessariamente com os elementos de R e recebe esse nome em homenagem ao matemático Norueguês Øyesten Ore (1899-1968), por ter sido o primeiro a estudar essas extensões. Os primeiros resultados obtidos dessa teoria podem ser vistos em seu artigo *Theory of non-commutative polynomials* de 1933 [21].

Observemos que existem álgebras de Hopf bem conhecidas que podem ser construídas a partir de extensões de Ore. Por exemplo, para um inteiro $n \geq 2$ sejam G o grupo cíclico de ordem n gerado por g e q uma raiz primitiva da unidade de índice n. Consideremos a álgebra de grupo $R = kG$ e o automorfismo $\sigma : R \to R$, dado por $\sigma(g) = qg$. Então, a álgebra de Taft $H_{n^2}(q)$, isto é, a k-álgebra gerada por x e g sujeitos as relações $g^n = 1$, $x^n = 0$ e $xg = qgx$, é o quociente da extensão de Ore $R[x; \sigma]$ pelo ideal gerado por x^n. Uma outra álgebra de Hopf que é extensão de Ore é a envolvente quântica da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$. Mais exemplos serão apresentados no decorrer do texto.

Extensões de Ore de álgebras de Hopf foram utilizadas no artigo de Beattie, Dăscălescu e Grünenfelder [1], que foi publicado em 1999. Nesse trabalho, certas álgebras de Hopf foram construídas via quocientes de extensões de Ore, com o intuito de apresentar uma resposta negativa a décima conjectura de Kaplansky, a qual afirma que para uma determinada dimensão fixa, existem apenas um número finito de classes de isomorfismos de álgebras de Hopf dessa dimensão (veja em [23]).

Em 2003, Alexander Nikolaevich Panov publica o artigo *Ore Extensions of Hopf Algebras* [22], que trata mais especificamente sobre extensões de Ore a partir de álgebras de Hopf. Em seu trabalho, Panov caracteriza as extensões de Hopf-Ore geradas por elementos skew-primitivos. Anos depois, em 2015, surge o artigo *Connected Hopf algebras and iterated Ore extensions* de Ken Brown, Steven O'Hagan, James Zhang e Gao Zhuang [5], que generaliza substancialmente o resultado obtido por Panov e também caracteriza as possíveis extensões para o caso de álgebras conexas.

Existem várias generalizações de álgebras de Hopf, mas estaremos interessados nas chamadas *álgebras de Hopf fracas*. Algumas das construções originais de álgebras Hopf fracas foram motivadas por aplicações para álgebras de operadores e outras foram devido as suas relações com "deformações dinâmicas de grupos quânticos". Alguns dos primeiros trabalhos a apresentar explícitamente o conceito de álgebra de Hopf fraca foram os de Florian Nill em 1998 [20] e o de Gabriella Böhm, Florian Nill e Kornél Szlachányi, em 1999 [4]. Assim, como no caso de álgebras de Hopf, uma álgebra de Hopf fraca é um espaço vetorial R sobre um corpo k que possui estrutura de álgebra e de coálgebra simultaneamente, com uma certa compatibilidade. Para a compatibilidade é proposto um novo conjunto de axiomas para a counidade, de forma a garantir que a categoria de representações dessa álgebra (Rep R) seja monoidal. Já os axiomas para a antípoda são propostos de forma que Rep R seja uma categoria rígida. Essas propriedades de Rep R são muito interessantes, tanto que em [10], Etingof, Nikshych e Ostrik mostraram que qualquer categoria de fusão (que é uma categoria monoidal, rígida com propriedades extras) é equivalente a Rep R.

O principal objetivo desse trabalho é estudar extensões de Ore, nas quais o anel base é uma álgebra de Hopf fraca. Vamos seguir no sentido de generalizar o Teorema 1.3.2 de Panov, e também fazer algumas considerações sobre o trabalho de Brown et al (2015).

No primeiro capítulo faremos um apanhado com os principais pré-requisitos para um melhor entendimento do texto. Vamos dedicar a terceira seção desse capítulo para expor os principais resultados obtidos na teoria de extensões de Hopf-Ore que são o Teorema 1.3.2 e o Teorema 1.3.4.

Já no segundo capítulo estão os principais resultados obtidos nesse trabalho, que generalizam os de Panov para o contexto de álgebras de Hopf fracas. Começamos esse capítulo com discussões a cerca de caracteres fracos, que generalizam os caracteres, e coderivações. Em alguns casos, concluímos que as únicas extensões possíveis, com o elemento x sendo primitivo fraco, são extensões nas quais a derivação é nula. Na seção 3, apresentamos mais algumas considerações essenciais sobre elementos group-like fracos, elementos skew-primitivos fracos e skew-coderivações para finalmente apresentar o Teorema 2.3.14, que generaliza o resultado obtido por Panov. Por fim, discutimos o caso em que o elemento gerador é primitivo fraco, obtendo como principal resultado o Corolário 2.3.21.

No último capítulo faremos algumas considerações com o intuito de obter resultados análogos, para o contexto de álgebras de Hopf fracas, aos obtidos por Brown et al. Nesse capítulo obtemos resultados parciais, ou seja, temos resultados para o skew anel de polinômios $R[x;\sigma]$ e para o anel de operadores diferenciais $R[x;\delta]$.

Capítulo 1

Preliminares

Começamos fixando algumas notações. Usaremos a letra k para representar um corpo, $k^{\times} = k - \{0\}$ o grupo multiplicativo do corpo k. Todas as álgebras (serão sempre com unidade 1) e coálgebras serão assumidas sobre um corpo k, salvo menção contrária. Todos os homomorfismos e derivações dessas álgebras/coálgebras serão consideradas k-lineares e os produtos tensoriais serão considerados sobre k. Em geral, denotaremos uma álgebra por (A, μ, η), onde μ indica a sua multiplicação e η a unidade e as coálgebras por (C, Δ, ϵ), onde Δ denota a comultiplicação e ϵ a counidade. Também usaremos a notação A^* para denotar o espaço dual de uma álgebra, ou seja, o conjunto de todas as transformações lineares de A em k.

1.1 Extensões de Ore

Extensões de Ore consistem em polinômios sobre um anel R em uma variável, a qual não comuta necessariamente com os elementos de R. A seguir vamos apresentar algumas definições e resultados pertinentes para esse texto sobre o tema. Para tal, vamos nos guiar basicamente em [11] e [15]. Para resultados mais básicos, usaremos [14] e [12]. Nessa seção, R será sempre um anel com unidade.

Definição 1.1.1. *Seja σ um endomorfismo de R. Uma σ-derivação de R é uma função aditiva $\delta : R \to R$ tal que*

$$\delta(rs) = \sigma(r)\delta(s) + \delta(r)s,$$

para quaisquer $r, s \in R$. No caso que σ é a identidade de R, dizemos simplesmente que δ é uma derivação de R.

Definição 1.1.2. *Sejam R um anel, σ um endomorfismo de R e δ uma σ-derivação de R. Vamos escrever $S = R[x; \sigma, \delta]$ para indicar que:*

(a) *S é um anel, contendo R como subanel;*

(*b*) *x é um elemento de S;*

(*c*) *S é um R-módulo à esquerda livre com base $\{1, x, x^2, \cdots\}$;*

(*d*) *$xr = \sigma(r)x + \delta(r)$, para todo $r \in R$.*

Tal anel S é chamado de Extensão de Ore de R.

Notemos que também é possível definir extensões de Ore sendo um R-módulo à direita, com mesma base, satisfazendo a relação $rx = x\sigma(r) + \delta(r)$ e com $\delta(rs) = \delta(r)\sigma(s) + r\delta(s)$.

Seja $S = R[x; \sigma, \delta]$ uma extensão de Ore, onde S é visto como um R-módulo à esquerda (respectivamente à direita) com base $\{x^n \mid n \geq 0\}$. Se σ for um automorfismo, então é fácil verificar que $\{x^n \mid n \geq 0\}$ também é uma base de S como R-módulo à direita (respectivamente à esquerda).

Observemos que se o endomorfismo σ for a identidade de R, então escreveremos $R[x; \delta]$ em lugar de $R[x; \mathrm{id}, \delta]$ e tal anel é chamado de *anel de operadores diferenciais*. No caso em que a derivação δ é nula, escreveremos $R[x; \sigma]$ em lugar de $R[x; \sigma, 0]$ e tal anel é chamado de *skew anel de polinômios sobre R*. Já no caso em que $\sigma = \mathrm{id}$ e $\delta = 0$ temos simplesmente o anel de polinômios sobre R.

É possível mostrar que extensões de Ore sempre existem.

Proposição 1.1.3. *[11, Proposition 2.3] Dado um anel R, um endomorfismo de anéis σ de R e uma σ-derivação δ de R, existe uma Extensão de Ore $R[x; \sigma, \delta]$.*

As extensões de Ore possuem uma Propriedade Universal, a qual nos diz como estender um homomorfismo de um anel R à extensão de Ore $R[x; \sigma, \delta]$.

Proposição 1.1.4. *[11, Proposition 2.4] Seja $S = R[x; \sigma, \delta]$ uma Extensão de Ore de R. Suponha que temos um anel T, um homomorfismo de anéis (não necessariamente unitário) $\phi : R \to T$, e um elemento $y \in T$ tal que*

$$y\phi(r) = \phi(\sigma(r))y + \phi(\delta(r)), \quad \textit{para qualquer } \ r \in R. \tag{1.1}$$

Então existe um único homomorfismo de anéis (não necessariamente unitário) $\psi : S \to T$ tal que $\psi|_R = \phi$ e $\psi(x) = y$.

Demonstração: A função definida por $\psi(\sum_i r_i x^i) := \sum_i \phi(r_i)y^i$ está bem definida e é aditiva. Mostraremos agora que $\psi(st) = \psi(s)\psi(t)$. Primeiro observemos que para $a \in R$ e $t \in S$,

$$\begin{aligned}
\psi(axt) &= \psi(ax\sum_i b_i x^i) = \psi(a\sum_i x b_i x^i) = \psi(\sum_i a\sigma(b_i)x^{i+1} + a\delta(b_i)x^i) \\
&= \sum_i \phi(a\sigma(b_i))y^{i+1} + \phi(a\delta(b_i))y^i = \phi(a)\sum_i (\phi\sigma(b_i)y + \phi\delta(b_i))y^i \\
&\overset{(1.1)}{=} \phi(a)\sum_i (y\phi(b_i))y^i = \phi(a)y\sum_i (\phi(b_i))y^i = \phi(a)y\psi(t).
\end{aligned}$$

Por indução, suponhamos que $\psi(ax^n t) = \phi(a)y^n\psi(t)$, para $n > 0$. Assim, para todo $t \in S$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(ax^{n+1}t) &= \psi(ax^n\sum_i (xb_i)x^i) = \psi(ax^n\sum_i \sigma(b_i)x^{i+1} + \delta(b_i)x^i) \\
&= \psi(ax^n\sum_i \sigma(b_i)x^{i+1}) + \psi(ax^n\sum_i \delta(b_i)x^i) \\
&= \phi(a)y^n\psi(\sum_i \sigma(b_i)x^{i+1}) + \phi(a)y^n\psi(\sum_i \delta(b_i)x^i) \\
&= \phi(a)y^n\left(\sum_i \phi(\sigma(b_i))y^{i+1} + \phi(\delta(b_i))y^i\right) \\
&\overset{(1.1)}{=} \phi(a)y^n\sum_i y\phi(b_i)y^i = \phi(a)y^{n+1}\psi(t).
\end{aligned}$$

Consequentemente, dados $s, t \in S$, temos

$$\psi(st) = \psi(\sum_i a_i x^i t) = \sum_i \psi(a_i x^i t) = \sum_i \phi(a_i)y^i\psi(t) = \psi(s)\psi(t).$$

Finalmente, vejamos que ψ está unicamente determinado. De fato, pois se ψ' for um outro tal homomorfismo, então

$$\psi'(s) = \psi'(\sum_i a_i x^i) = \sum_i \psi'(a_i x^i) = \sum_i \psi'(a_i)\psi'(x)^i = \sum_i \phi(a_i)y^i = \sum_i \psi(a_i)y^i = \psi(s)$$

para qualquer $s \in S$. ■

Observemos na Proposição acima que, se assumirmos que a relação

$$y \cdot_{op} \phi(r) = \phi\sigma(r) \cdot_{op} y + \phi\delta(r) \Leftrightarrow \phi(r)y = y\phi\sigma(r) + \phi\delta(r), \tag{1.2}$$

é satisfeita (como se estivéssemos com a estrutura de álgebra oposta em T), em lugar da relação (1.1), obtemos um anti-homomorfismo de anéis $\psi : R[x;\sigma,\delta] \to T$, isto é, $\psi(fg) = \psi(g)\psi(f)$, para quaisquer $f, g \in R[x;\sigma,\delta]$.

Lema 1.1.5. *[11, Exercise 2O] Seja $R[x;\sigma,\delta]$ uma Extensão de Ore. Se $r \in R$ e $n \in \mathbb{N}$,* *então*

$$x^n r = \sigma^n(r)x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + \delta^n(r),$$

para alguns $a_{n-1}, \cdots, a_1 \in R$.

Demonstração: Argumentaremos por indução em n. Se $n = 1$, então

$$xr = \sigma(r)x + \delta(r).$$

Suponhamos que a propriedade desejada é satisfeita para $n > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} x^{n+1}r &= x^n(\sigma(r)x + \delta(r)) = x^n\sigma(r)x + x^n\delta(r) \\ &= \sigma^{n+1}(r)x^{n+1} + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1x^2 + \delta^n(\sigma(r))x \\ &+ \sigma^n(\delta(r))x^n + a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a'_1 x + \delta^n(\delta(r)) \\ &= \sigma^{n+1}(r)x^{n+1} + a''_n x^n + a''_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a''_1 x + \delta^{n+1}(r), \end{aligned}$$

como desejado. Notemos que $x^n r = h_{n,r}x + \delta^n(r)$, onde $h_{n,r} = \sigma^n(r)x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \in R[x;\sigma,\delta]$. ■

O seguinte lema é de extrema importância para o restante do texto.

Lema 1.1.6. *Sejam R e S K-álgebras, onde K é um anel comutativo. Se A é um R-módulo à esquerda livre com base $\{a_i\}_{i\in I}$ e B um S-módulo à esquerda livre com base $\{b_j\}_{j\in J}$, então $A \otimes_K B$ é um $R \otimes_K S$-módulo à esquerda livre com base $\{a_i \otimes b_i : i \in I, j \in J\}$.*

Demonstração: Observemos que um elemento de $A \otimes_K B$ possui a seguinte forma:

$$\sum_{l=1}^{p} c_l \otimes d_l = \sum_l \left(\sum_{m\in I} r_{l_m} a_m\right) \otimes \left(\sum_{n\in J} s_{l_n} b_n\right) = \sum_{m,n}\left(\sum_l r_{l_m} \otimes s_{l_n}\right)(a_m \otimes b_n) = \sum_{m,n} \gamma_{m,n}(a_m \otimes b_n),$$

onde $\gamma_{m,n} \in R \otimes_K S$. Isso nos mostra que o conjunto $\{a_i \otimes b_i : i \in I, j \in J\}$ gera $A \otimes_K B$ como $R \otimes_K S$-módulo à esquerda. Notemos que para cada i e j temos as seguintes projeções

$$p_i : A \to R \qquad \text{e} \qquad q_j : B \to S$$

dadas por: $p_i(\sum r_l a_l) = r_i$ e $q_j(\sum s_l b_l) = s_j$, de modo que obtemos uma função K-linear $p_i \otimes q_j : A \otimes_K B \to R \otimes_K S$ satisfazendo

$$(p_i \otimes q_j)\left(\sum_l c_l \otimes d_l\right) = (p_i \otimes q_j)\left(\sum_{m,n} \gamma_{m,n}(a_m \otimes b_n)\right) = \gamma_{i,j}, \quad \text{para quaisquer } i \in I, j \in J.$$

Logo, se $\sum_{m,n} \gamma_{m,n}(a_m \otimes b_n) = 0$, então $\gamma_{i,j} = 0$ para quaisquer $i \in I, j \in J$. Portanto,

$\{a_i \otimes b_i : \ i \in I, j \in J\}$ é um conjunto linearmente independente sobre $R \otimes_K S$. ■

Lema 1.1.7. *Sejam R uma k-álgebra, onde k é um corpo, e $H = R[x;\sigma,\delta]$ uma extensão de Ore. Então $H \otimes H$ é um $R \otimes R$-módulo à esquerda livre com base $\{x^n \otimes x^m \mid n, m \geq 0\}$.*

Demonstração: Segue do Lema anterior. ■

A seguir vamos mostrar como podemos estender endomorfismo σ e uma σ-derivação δ para a álgebra produto tensorial. Sejam A e B k-álgebras. Para um endomorfismo $\sigma : B \to B$ e uma σ-derivação $\delta : B \to B$, a função

$$\overline{\delta} := \mathrm{id} \otimes \delta : A \otimes B \to A \otimes B, \qquad a \otimes b \mapsto a \otimes \delta(b), \qquad \forall a \in A, b \in B$$

é uma $\overline{\sigma} := (\mathrm{id} \otimes \sigma)$-derivação, pois para quaisquer $a, c \in A$ e $b, d \in B$ temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}((a \otimes b)(c \otimes d)) &= \overline{\delta}(ac \otimes bd) = ac \otimes \delta(bd) = ac \otimes (\delta(b)d + \sigma(b)\delta(d)) \\
&= ac \otimes \delta(b)d + ac \otimes \sigma(b)\delta(d) \\
&= (a \otimes \delta(b))(c \otimes d) + (a \otimes \sigma(b))(c \otimes \delta(d)) \\
&= \overline{\delta}(a \otimes b)(c \otimes d) + \overline{\sigma}(a \otimes b)\overline{\delta}(c \otimes d).
\end{aligned}$$

A partir das observações acima, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1.8. *Sejam A e B k-álgebras, σ um endomorfismo de B e δ é uma σ-derivação de B. Então, com as notações acima,*

$$\psi : A \otimes B[x;\sigma,\delta] \longrightarrow (A \otimes B)[\overline{x};\overline{\sigma},\overline{\delta}], \qquad a \otimes bx^n \mapsto (a \otimes b)\overline{x}^n \tag{1.3}$$

define um isomorfismo de álgebras.

Para a demonstração desse teorema, usaremos o seguinte lema:

Lema 1.1.9. *Sejam A, B e C k-álgebras, $f : A \to C$ e $g : B \to C$ homomorfismos de álgebras tais que $f(a)g(b) = g(b)f(a)$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Então, existe um único homomorfismo de álgebras $h : A \otimes B \to C$ que satisfaz $h(a \otimes b) = f(a)g(b)$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$.*

Demonstração: Note que a função $h : A \times B \to C$, dada por $h(a, b) = f(a)g(b)$ é k-balanceada. Logo, pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única transformação linear $h : A \otimes B \to C$ que satisfaz $h(a \otimes b) = f(a)g(b)$. Temos ainda que:

$$\begin{aligned}
h((a \otimes b)(c \otimes d)) &= h(ac \otimes bd) = f(ac)g(bd) = f(a)f(c)g(b)g(d) \\
&= f(a)g(b)f(c)g(d) = h(a \otimes b)h(c \otimes d)
\end{aligned}$$

e $h(1 \otimes 1) = f(1)g(1) = 1$. Portanto, h é homomorfismo de álgebras. ■

Demonstração: (**Demonstração do Teorema 1.1.8**) Começamos verificando que o homomorfismo ψ dado no Teorema existe e está bem definido. Seja $C = (A \otimes B)[\overline{x}; \overline{\sigma}, \overline{\delta}]$. Temos a inclusão $\varphi : B \to C$, $b \mapsto 1 \otimes b$ e o elemento $\overline{x}$ é tal que

$$\overline{x}\varphi(b) = \overline{x}(1 \otimes b) = \overline{\sigma}(1 \otimes b)\overline{x} + \overline{\delta}(1 \otimes b) = (1 \otimes \sigma(b))\overline{x} + 1 \otimes \delta(b) = \varphi(\sigma(b))\overline{x} + \varphi(\delta(b)),$$

para qualquer $b \in B$. Assim, pela propriedade universal da extensão de Ore (Proposição 1.1.4), segue que existe um único homomorfismo de álgebras $g : B[x; \sigma, \delta] \to C$ tal que $g(x) = \overline{x}$ e $g(b) = 1 \otimes b$ para todo $b \in B$.

Também temos a inclusão $f : A \to C$, $a \mapsto a \otimes 1$ que satisfaz

$$f(a)g(b) = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = a \otimes b = (1 \otimes b)(a \otimes 1) = g(b)f(a),$$

para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Logo, pelo Lema 1.1.9, existe um único homomorfismo de álgebras $\psi : A \otimes B[x; \sigma, \delta] \to (A \otimes B)[\overline{x}; \overline{\sigma}, \overline{\delta}]$ dado por $\psi(a \otimes bx^n) = f(a)g(bx^n) = (a \otimes 1)(1 \otimes b)\overline{x}^n = (a \otimes b)\overline{x}^n$, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$ e $n \geq 0$.

Para mostrar o isomorfismo, vamos apresentar uma inversa de ψ. Consideremos a aplicação

$$\theta : A \otimes B \to A \otimes B[x; \sigma, \delta], \qquad a \otimes b \mapsto a \otimes b,$$

(produto tensorial de id_A com a inclusão de B em $B[x; \sigma, \delta]$). O elemento $1 \otimes x \in A \otimes B[x; \sigma, \delta]$ satisfaz o seguinte:

$$\begin{aligned}
(1 \otimes x)\theta(a \otimes b) &= a \otimes xb = a \otimes (\sigma(b)x + \delta(b)) \\
&= a \otimes \sigma(b)x + a \otimes \delta(b) = (a \otimes \sigma(b))(1 \otimes x) + a \otimes \delta(b) \\
&= \overline{\sigma}(a \otimes b)(1 \otimes x) + \overline{\delta}(a \otimes b) \\
&= \theta(\overline{\sigma}(a \otimes b))(1 \otimes x) + \theta(\overline{\delta}(a \otimes b)), \ \forall a \in A, b \in B.
\end{aligned}$$

Logo, pela propriedade universal da extensão de Ore, segue que existe um único homomorfismo de anéis

$$\psi' : (A \otimes B)[\overline{x}; \overline{\sigma}, \overline{\delta}] \to A \otimes B[x; \sigma, \delta],$$

tal que $\psi'|_{A \otimes B} \equiv \theta$ e $\psi'(\overline{x}) = 1 \otimes x$.

Finalmente, vamos verificar ψ' é uma inversa para ψ:

$$\psi'(\psi(a \otimes bx^n)) = \psi'((a \otimes b)\overline{x}^n) = \psi'(a \otimes b)\psi'(\overline{x}^n) = (a \otimes b)(1 \otimes x)^n = a \otimes bx^n;$$

$$\psi(\psi'((a \otimes b)\overline{x}^n)) = \psi((a \otimes b)(1 \otimes x^n) = \psi(a \otimes bx^n) = (a \otimes b)x^n.$$

Isso conclui a demonstração. ■

Apresentaremos agora alguns exemplos de certas álgebras bem conhecidas que podem ser construídas a partir de extensões de Ore.

Exemplo 1.1.10. *Sejam R um anel comutativo, $\sigma \in \mathrm{Aut}(R)$ e G o grupo gerado por σ. Consideremos o skew anel de grupo $R * G$, ou seja, o R-módulo à esquerda livre com base G no qual a soma é definida de forma natural e a multiplicação é definida por $(r * \sigma)(s * \gamma) = r(\sigma \cdot s) * (\sigma \circ \gamma)$, onde a ação de G sobre R é dada por $\sigma^i \cdot r := \sigma^i(r)$. Então, existe $n > 0$ tal que $R * G \cong R[x;\sigma]/ < x^n - 1 >$ ou $R * G$ contém $R[x;\sigma]$ como subanel.*

De fato, como temos a inclusão $\varphi : R \to R * G$ e, para qualquer $r \in R$,

$$(1 * \sigma)\varphi(r) = (1 * \sigma)(r * 1) = \sigma(r) * \sigma = \varphi(\sigma(r))(1 * \sigma) = (\varphi \circ \sigma)(r)(1 * \sigma)$$

pela propriedade universal da extensão de Ore, existe um único homomorfismo de anéis $\overline{\varphi} : R[x;\sigma] \to R * G$ tal que $\overline{\varphi}|_R \equiv \varphi$ e $\overline{\varphi}(x) = 1 * \sigma$. Consequentemente,

1. se σ tem ordem finita, digamos n, então $\overline{\varphi}$ é um epimorfismo e assim $R * G \cong R[x;\sigma]/ < x^n - 1 >$;

2. se σ tem ordem infinita, então $\overline{\varphi}$ é um monomorfismo e assim $R * G$ contém $R[x;\sigma]$ como subanel. De fato, $R * G \cong R[x, x^{-1};\sigma]$, onde o último denota o skew anel de polinômios de Laurent.

Exemplo 1.1.11. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão 2 sobre um corpo k. Então a sua envolvente é $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x,y]$ ou $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[y][x;\delta]$.*

Neste caso temos que, ou $\mathfrak{g}$ é abeliana ($[\ ,\ ] = 0$), ou podemos encontrar uma k-base $\{x,y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[x,y] = y$ (veja [9, Theorem 3.1]).

1. Quando $\mathfrak{g}$ é abeliana: $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x,y]$, no qual $\{x,y\}$ é uma k-base de $\mathfrak{g}$;

2. Quando $\mathfrak{g}$ não é abeliana: $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[y][x;\delta]$, no qual $\delta : k[y] \to k[y]$ é dada por: $\delta(f) = y\frac{\partial f}{\partial y}$.

Seja k um corpo e $q \in k^{\times}$, define-se a *álgebra de Weyl quântica* sobre k como sendo a k-álgebra dada por dois geradores x' e y' sujeitos a relação $x'y' - qy'x' = 1$ e denota-se por $A_1^q(k)$.

Exemplo 1.1.12. *A álgebra de Weyl quântica é uma extensão de Ore de $k[y]$.*

De fato, sejam $k[y]$ o anel de polinômios sobre um corpo k, $q \in k^{\times}$ com $q \neq 1$ e seja σ o automorfismo de $k[y]$ dado por $\sigma(y) = qy$. Defina $\delta : k[y] \to k[y]$ por:

$$\delta(f(y)) = \frac{f(qy) - f(y)}{qy - y} = \frac{\sigma(f) - f}{\sigma(y) - y}, \ f \in k[y].$$

Dessa forma δ é uma σ-derivação e a extensão de Ore $S = k[y][x; \sigma, \delta]$ é a álgebra de Weyl quântica $A_1^q(k)$ (para ver isso, basta verificar pela propriedade universal da extensão de Ore que podemos definir $\psi : S \to A_1^q(k)$ por: $\psi(y) = y'$ e $\psi(x) = x'$, onde x', y' são os gerados descritos no parágrafo acima do exemplo, e que ψ é um isomorfismo).

1.2 Álgebras de Hopf fracas

Nessa seção as principais referências serão [4], [19], [6], [7], [16] e [13]. As três últimas referências servem como apoio ao leitor não familiarizado com a notação e também para resultados do contexto de álgebras de Hopf (ordinárias) que ainda valem no contexto fraco. Aqui vamos apresentar a definição de álgebra de Hopf fraca e suas principais propriedades que serão usadas no decorrer do texto.

Começamos lembrando que para uma coálgebra (C, Δ, ϵ) e uma álgebra (A, μ, η), o conjunto $\mathrm{Hom}(C, A)$ $-$ das transformações lineares de C em A $-$ possui uma estrutura de álgebra com o *produto convolução* dado por:

$$(f * g)(c) = (\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c), \qquad \forall c \in C, \ f, g \in \mathrm{Hom}(C, A),$$

e unidade $1_{\mathrm{Hom}(C,A)} = \eta \circ \epsilon$. Com as notações acima, (H, Δ, ϵ) é uma *álgebra de Hopf* se H é uma álgebra e uma coálgebra com Δ e ϵ homomorfismos de álgebras unitários e, além disso, id_H possui um inverso na álgebra de convolução $(\mathrm{End}(H), *)$. Tal inverso é chamado de antípoda e geralmente é denotado por S.

A seguir apresentaremos a definição de biálgebra fraca, e em seguida a de álgebra de Hopf fraca, que são os objetos de estudo desse texto. A principal diferença do contexto "clássico" para o "fraco", é que neste último não exigimos mais que Δ seja unitária, e a counidade passa a ser apenas "fracamente" multiplicativa.

Vamos utilizar a notação de Sweedler para coálgebras com uma pequena ressalva: omitiremos o símbolo de somatório e escreveremos simplesmente $\Delta(r) = r_1 \otimes r_2$, em lugar de $\Delta(r) = \sum_{(r)} r_1 \otimes r_2$. Mais a frente também usaremos a notação $\Delta^{\otimes 2}$ para denotar a composição $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$ ou $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$ em uma coálgebra coassociativa.

Definição 1.2.1. *Dizemos que R é uma biálgebra fraca se R for uma álgebra que também é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ϵ tais que*

(a) $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$;

(b) $(\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) = (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(1)) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)$;

(c) $\epsilon(ab_1)\epsilon(b_2c) = \epsilon(abc) = \epsilon(ab_2)\epsilon(b_1c)$,

para quaisquer $a, b, c \in R$.

Notemos que a segunda condição da definição nos diz que:

$$1_1 \otimes 1_2 1'_1 \otimes 1'_2 = 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3 = 1_1 \otimes 1'_1 1_2 \otimes 1'_2,$$

onde usamos que $\Delta(1) = 1_1 \otimes 1_2 = 1'_1 \otimes 1'_2$.

As identidades a seguir serão importantes para demonstrar propriedades coassociativas em uma extensão de uma biálgebra fraca R. Para todo elemento $r \in R$ temos que:

- $\Delta^{\otimes 2}(r)(\Delta(1) \otimes 1) = (\Delta(r_1) \otimes r_2)(\Delta(1) \otimes 1) = \Delta(r_1)\Delta(1) \otimes r_2 = \Delta(r_1) \otimes r_2 = \Delta^{\otimes 2}(r)$.
- $\Delta^{\otimes 2}(r)(1 \otimes \Delta(1)) = (r_1 \otimes \Delta(r_2))(1 \otimes \Delta(1)) = r_1 \otimes \Delta(r_2)\Delta(1) = r_1 \otimes \Delta(r_2) = \Delta^{\otimes 2}(r)$.

A partir da definição acima, podemos definir as seguintes transformações lineares:

$$\begin{array}{llll} \epsilon_t : R \to R, & \epsilon_s : R \to R, & \epsilon'_t : R \to R, & \epsilon'_s : R \to R. \\ \quad r \mapsto \epsilon(1_1 r)1_2 & \quad r \mapsto 1_1\epsilon(r1_2) & \quad r \mapsto \epsilon(r1_1)1_2 & \quad r \mapsto 1_1\epsilon(1_2 r). \end{array}$$

As imagens das funções acima serão denotadas por $R_s = \epsilon_s(R)$ e $R_t = \epsilon_t(R)$.

Agora vamos listar alguns resultados pertinentes para esse texto cujas demonstrações e mais detalhes podem ser vistos em [4, Section 2.2].

Lembremos que uma álgebra A é dita *separável* se existe $e = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in A \otimes A$, tal que $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$ e $(a \otimes 1)e = e(1 \otimes a)$, para qualquer $a \in A$. Os conjuntos R_s e R_t, descritos acima, são subálgebras separáveis de R (veja [4, Proposition 2.11]). Com as notações acima, valem as seguintes relações, para quaisquer $a, b \in R$:

(i) $(\epsilon_s \circ \epsilon_s)(a) = \epsilon_s(a)$;

(ii) $(\epsilon_t \circ \epsilon_t)(a) = \epsilon_t(a)$;

(iii) $\epsilon(a\epsilon_t(b)) = \epsilon(ab) = \epsilon(\epsilon'_t(a)b)$;

(iv) $\epsilon(\epsilon_s(a)b) = \epsilon(ab) = \epsilon(a\epsilon'_s(b))$;

(v) $st = ts$ para quaisquer $s \in R_s$ e $t \in R_t$.

Observe que, pelos itens (i) e (ii) segue que $a \in R_t \Leftrightarrow \epsilon_t(a) = a$ e $a \in R_s \Leftrightarrow \epsilon_s(a) = a$.

Lema 1.2.2. *[6, 36.6] Seja R uma biálgebra fraca. Então:*

(i) $\Delta(a)=\Delta(1)(a\otimes 1) \quad \Leftrightarrow \quad a=\epsilon_t(a) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(a)=(a\otimes 1)\Delta(1) \quad \Leftrightarrow \quad a=\epsilon'_t(a)$;

(ii) $\Delta(a)=\Delta(1)(1\otimes a) \quad \Leftrightarrow \quad a=\epsilon_s(a) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(a)=(1\otimes a)\Delta(1) \quad \Leftrightarrow \quad a=\epsilon'_s(a)$.

Notemos agora que, pelo observado antes do Lema, segue que $\Delta(a)=1_1a\otimes 1_2=a1_1\otimes 1_2$, para todo $a\in R_t$ e $\Delta(b)=1_1\otimes 1_2b=1_1\otimes b1_2$, para todo $b\in R_s$.

Lema 1.2.3. *Seja R uma biálgebra fraca. Então $\Delta(1)\in R_s\otimes R_t$.*

Demonstração: Notemos que

$$\Delta(1)=1_1\otimes 1_2=1_1\epsilon(1_2)\otimes 1_3=1_1\epsilon(1'_11_2)\otimes 1'_2=\epsilon_s(1'_1)\otimes 1'_2\in R_s\otimes R.$$

$$\Delta(1)=1_1\otimes 1_2=1_1\otimes \epsilon(1_2)1_3=1_1\otimes \epsilon(1'_11_2)1'_2=1_1\otimes \epsilon_t(1_2)\in R\otimes R_t.$$

Logo,

$$\Delta(1)\in(R_s\otimes R)\cap(R\otimes R_t)=R_s\cap R_t.$$

Onde a última igualdade pode ser vista em [7, Lemma 1.4.5]. ■

Lema 1.2.4. *Seja R uma biálgebra fraca e $a\in R$. Então:*

(i) $\epsilon(Ra)=0$ *se, e somente se,* $\epsilon_t(a)=0$ *se, e somente se,* $\epsilon'_s(a)=0$;

(ii) $\epsilon(aR)=0$ *se, e somente se,* $\epsilon_s(a)=0$ *se, e somente se,* $\epsilon'_t(a)=0$.

Demonstração: (i) Suponha que $\epsilon(ra)=0$ para todo $r\in R$. Então

$$\epsilon_t(a)=\epsilon(1_1a)1_2=0=1_1\epsilon(1_2a)=\epsilon'_s(a).$$

Suponha que $\epsilon_t(a)=0$ e seja $r\in R$. Então $\epsilon(ra)=\epsilon(r1_2)\epsilon(1_1a)=\epsilon(r\epsilon_t(a))=0$. Analogamente se $\epsilon'_s(a)=0$, então $\epsilon(ra)=\epsilon(r1_1)\epsilon(1_2a)=\epsilon(r\epsilon'_s(a))=0$. A demonstração de (ii) é feita de forma análoga. ■

Lema 1.2.5. *Sejam R uma biálgebra fraca, g um elemento de R. Então, para qualquer $n\in\mathbb{N}$:*

(i) $\epsilon_t(g)=1$ *se, e somente se,* $\epsilon(ag^n)=\epsilon(a)$ *se, e somente se,* $\epsilon'_s(g)=1$;

(ii) $\epsilon_s(g)=1$ *se, e somente se,* $\epsilon(g^na)=\epsilon(a)$ *se, e somente se,* $\epsilon'_t(g)=1$.

Demonstração: (i) Suponhamos que $\epsilon(ag^n) = \epsilon(a)$. Então, $\epsilon_t(g) = \epsilon(1_1 g)1_2 = \epsilon(1_1)1_2 = 1$ e $\epsilon'_s(g) = 1_1\epsilon(1_2 g) = 1_1\epsilon(1_2) = 1$. Para as recíprocas vamos argumentar por indução em n. Suponhamos que $\epsilon_t(g) = 1$. Se $n = 1$, então temos

$$\epsilon(ag) = \epsilon(a1_2)\epsilon(1_1 g) = \epsilon(a\epsilon(1_1 g)1_2) = \epsilon(a\epsilon_t(g)) = \epsilon(a).$$

Suponhamos agora por indução, que $\epsilon(ag^n) = \epsilon(a)$ para todo $n > 1$. Então

$$\epsilon(ag^{n+1}) = \epsilon(ag^n g) = \epsilon(ag^n\epsilon_t(g)) = \epsilon(ag^n) = \epsilon(a).$$

Suponhamos agora que $\epsilon'_s(g) = 1$. Para $n = 1$ temos:

$$\epsilon(ag) = \epsilon(a1_1)\epsilon(1_2 g) = \epsilon(a1_1\epsilon(1_2 g)) = \epsilon(a\epsilon'_s(g)) = \epsilon(a).$$

Suponhamos agora por indução, que $\epsilon(ag^n) = \epsilon(a)$ para todo $n > 1$. Então

$$\epsilon(ag^{n+1}) = \epsilon(ag^n g) = \epsilon(ag^n\epsilon'_s(g)) = \epsilon(ag^n) = \epsilon(a).$$

(ii) É demonstrado de forma análoga. ■

Definição 1.2.6. *Seja R uma biálgebra fraca. Dizemos que R é uma álgebra de Hopf fraca se existe uma transformação linear $S : R \to R$, chamada de antípoda, tal que para todo $r \in R$:*

(a) $r_1 S(r_2) = \epsilon_t(r)$;

(b) $S(r_1)r_2 = \epsilon_s(r)$;

(c) $S(r_1)r_2 S(r_3) = S(r)$.

Vejamos alguns resultados que serão utilizados futuramente.

Lema 1.2.7. *[4, Lemma 2.9] Em uma álgebra de Hopf fraca R valem as seguintes relações:*

$$\epsilon_t \circ S = \epsilon_t \circ \epsilon_s = S \circ \epsilon_s \tag{1.4}$$

$$\epsilon_s \circ S = \epsilon_s \circ \epsilon_t = S \circ \epsilon_t \tag{1.5}$$

Proposição 1.2.8. *[4, Theorem 2.10] Seja R uma álgebra de Hopf fraca. Então, a antípoda é um anti-homomorfismo de álgebras ($S(ab) = S(b)S(a)$), um anti-homomorfismo de coálgebras ($\Delta(S(a)) = S(a_2) \otimes S(a_1)$) e a unidade e counidade são S-invariantes, ou seja,*

$$S(1) = 1, \qquad \epsilon \circ S = \epsilon.$$

O seguinte resultado nos fornece uma série de equivalências de quando uma álgebra de Hopf fraca é uma álgebra de Hopf no sentido clássico.

Proposição 1.2.9. *Seja R uma álgebra de Hopf fraca. São equivalentes:*

(i) *R é uma álgebra de Hopf;*

(ii) $\Delta(1) = 1 \otimes 1$*;*

(iii) $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$*, para quaisquer* $a, b \in R$*;*

(iv) $S(a_1)a_2 = \epsilon(a)1$*, para qualquer* $a \in R$*;*

(v) $a_1S(a_2) = \epsilon(a)1$*, para qualquer* $a \in R$*;*

(vi) $R_s = k \cdot 1 = R_t$*.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Imediata.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Por definição $\epsilon(ab) = \epsilon(a1_1)\epsilon(1_2b) = \epsilon(a)\epsilon(b)$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Temos que

$$\Delta(1) = 1_1 \otimes 1_2 = 1_1\epsilon(1_2) \otimes 1_3 = 1_1\epsilon(1_21'_1) \otimes 1'_2 \overset{(iii)}{=} 1_1\epsilon(1_2) \otimes \epsilon(1'_1)1'_2 = 1 \otimes 1.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$: $S(a_1)a_2 = \epsilon_s(a) = \epsilon(a1_2)1_1 = \epsilon(a)\epsilon(1_2)1_1 = \epsilon(a)1$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$: Dados $a, b \in R$, temos que:

$$\epsilon(ab)1 = S((ab)_1)(ab)_2 = S(b_1)S(a_1)a_2b_2 = S(b_1)\epsilon(a)1b_2 = \epsilon(a)\epsilon(b)1,$$

de onde segue que $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$.
$(iii) \Leftrightarrow (v)$: De forma análoga a $(iii) \Leftrightarrow (iv)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Como já vimos $(ii) \Rightarrow (iii)$ e, portanto, implica também em (iv) e (v). Logo, para mostrar que R é uma álgebra de Hopf, resta verificar que $\epsilon(1_R) = 1_k$. Temos que $\epsilon(1_R)1_R = S(1_1)1_2 = S(1_R)1_R = 1_R = 1_k1_R$, o que implica em $\epsilon(1_R) = 1_k$.
$(iii) \Rightarrow (vi)$: Seja $a \in R_s$. Então,

$$a = \epsilon_s(a) = \epsilon(a1_2)1_1 = \epsilon(a)\epsilon(1_2)1_1 = \epsilon(a)1 \in k \cdot 1.$$

Analogamente, $R_t \subset k \cdot 1$. Como $1 \in R_s \cap R_t$, segue que $R_s = k \cdot 1 = R_t$.
$(vi) \Rightarrow (iii)$: Como $\Delta(1) \in R_s \otimes R_t$, segue que existe $\lambda \in k$ tal que $\Delta(1) = \lambda(1 \otimes 1)$. Também temos que $\Delta(1) = \Delta(1)^2$, de onde segue que $\lambda = \lambda^2$. Por outro lado, usando a counidade temos que $1 = (1 \otimes \epsilon)(\Delta(1)) = \lambda\epsilon(1)1$, o que implica que λ é invertível. Logo, $\lambda = 1$ e assim $\Delta(1) = 1 \otimes 1$. Portanto, $\epsilon(ab) = \epsilon(a1_1)\epsilon(1_2b) = \epsilon(a)\epsilon(b)$, para quaisquer $a, b \in R$. ■

Agora vamos listar alguns exemplos de álgebras de Hopf fracas. Começamos observando que toda álgebra de Hopf é uma álgebra de Hopf fraca. Também, temos que se A e B são álgebras de Hopf fracas, então a álgebra produto tensorial $A \otimes B$ também o é, o que será mostrado no Lema a seguir.

Lema 1.2.10. *Sejam A e B álgebras de Hopf fracas. Então $T = A \otimes B$ é uma álgebra de Hopf fraca via:*

$$\Delta_T(a \otimes b) = (a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2), \quad \epsilon_T(a \otimes b) = \epsilon_A(a)\epsilon_B(b), \quad S_T(a \otimes b) = S_A(a) \otimes S_B(b),$$

para quaisquer $a \in A, b \in B$, onde $\Delta_A(a) = a_1 \otimes a_2$ e $\Delta_B(b) = b_1 \otimes b_2$.

Demonstração: Note que a estrutura de álgebra e de coálgebra é a usual do produto tensorial, assim T é uma coálgebra coassociativa, álgebra associativa e Δ_T é multiplicativa. Logo, necessitamos apenas verificar as seguintes condições:
(1) $(\Delta_T(1_T) \otimes 1_T)(1_T \otimes \Delta_T(1_T)) = \Delta_T^{\otimes 2}(1_T) = (1_T \otimes \Delta_T(1_T))(\Delta_T(1_T) \otimes 1_T)$;
(2) $\epsilon_T(XY_2)\epsilon_T(Y_1Z) = \epsilon_T(XYZ) = \epsilon_T(XY_1)\epsilon_T(Y_2Z),\ \forall X, Y, Z \in T$;
(3) Axiomas da antípoda.

Para (1) vamos usar a seguinte notação: $\Delta(1_A) = 1_1 \otimes 1_2 = 1'_1 \otimes 1'_2$ e $\Delta(1_B) = \overline{1}_1 \otimes \overline{1}_2 = \overline{1}'_1 \otimes \overline{1}'_2$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta_T^{\otimes 2}(1_T) &= (\mathrm{id}_T \otimes \Delta_T)\Delta_T(1_T) = (\mathrm{id}_T \otimes \Delta_T)(1_1 \otimes \overline{1}_1 \otimes 1_2 \otimes \overline{1}_2) \\
&= 1_1 \otimes \overline{1}_1 \otimes (1_2)_1 \otimes (\overline{1}_2)_1 \otimes (1_2)_2 \otimes (\overline{1}_2)_2 \\
&= 1_1 \otimes \overline{1}_1 \otimes 1_2 1'_1 \otimes (\overline{1}_2)_1 \otimes 1'_2 \otimes (\overline{1}_2)_2 \\
&= 1_1 \otimes \overline{1}_1 \otimes 1_2 1'_1 \otimes \overline{1}_2 \overline{1}'_1 \otimes 1'_2 \otimes \overline{1}'_2 \\
&= (1_1 \otimes \overline{1}_1 \otimes 1_2 \otimes \overline{1}_2 \otimes 1_A \otimes 1_B)(1_A \otimes 1_B \otimes 1'_1 \otimes \overline{1}'_1 \otimes 1'_2 \otimes \overline{1}'_2) \\
&= (\Delta_T(1_T) \otimes 1_T)(1_T \otimes \Delta_T(1_T)).
\end{aligned}$$

Analogamente, $(1_T \otimes \Delta_T(1_T))(\Delta_T(1_T) \otimes 1_T) = \Delta_T^{\otimes 2}(1_T)$.

Para (2) sejam $(x \otimes y), (a \otimes b), (p \otimes q) \in A \otimes B$. Então,

$$\begin{aligned}
\epsilon_T((x \otimes y)(a \otimes b)(p \otimes q)) &= \epsilon_T(xap \otimes ybq) = \epsilon_A(xap)\epsilon_B(ybq) \\
&= \epsilon_A(xa_1)\epsilon_A(a_2p)\epsilon_B(yb_1)\epsilon_B(b_2q) \\
&= \epsilon_A(xa_1)\epsilon_B(yb_1)\epsilon_A(a_2p)\epsilon_B(b_2q) \\
&= \epsilon_T(xa_1 \otimes yb_1)\epsilon_T(a_2p \otimes b_2q) \\
&= \epsilon_T((x \otimes y)(a_1 \otimes b_1))\epsilon_T((a_2 \otimes b_2)(p \otimes q)) \\
&= \epsilon_T((x \otimes y)(a \otimes b)_1)\epsilon_T((a \otimes b)_2(p \otimes q)).
\end{aligned}$$

Analogamente, $\epsilon_T((x \otimes y)(a \otimes b)(p \otimes q)) = \epsilon_T((x \otimes y)(a \otimes b)_2)\epsilon_T((a \otimes b)_1(p \otimes q))$.

Vejamos agora (3). Se $a \otimes b \in A \otimes B$, então

$$\begin{aligned} S_T((a\otimes b)_1)(a\otimes b)_2 &= S_A(a_1)a_2 \otimes S_B(b_1)b_2 = 1_1\epsilon_A(a1_2)\otimes \overline{1}_1\epsilon_B(b\overline{1}_2) \\ &= (1_1\otimes \overline{1}_1)(\epsilon_A(a1_2)\otimes \epsilon_B(b\overline{1}_2)) = (1_1\otimes \overline{1}_1)(\epsilon_T(a1_2\otimes b\overline{1}_2) \\ &= (1_1\otimes \overline{1}_1)\epsilon_T((a\otimes b)(1_2\otimes \overline{1}_2)) = (1_T)_1\epsilon_T((a\otimes b)(1_T)_2) \\ &= (\epsilon_T)_s(a\otimes b). \end{aligned}$$

Analogamente, $(a\otimes b)_1 S_T((a\otimes b)_2) = (\epsilon_T)_t(a\otimes b)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} S_T((a\otimes b)_1)(a\otimes b)_2 S_T((a\otimes b)_3) &= (S_A(a_1)\otimes S_B(b_1))(a_2\otimes b_2)(S_A(a_3)\otimes S_B(b_3)) \\ &= S_A(a_1)a_2S_A(a_3)\otimes S_B(b_1)b_2S_B(b_3) \\ &= S_A(a)\otimes S_B(b) = S_T(a\otimes b). \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

Exemplo 1.2.11. *O anel das matrizes $M_n(k)$ sobre um corpo k, cuja base vamos denotar por $\{E_{ij} : 1 \leq i,j \leq n\}$, onde E_{ij} denota a matriz que tem 1_k na posição (i,j) e 0 nas posições restantes, com a estrutura usual de álgebra e*

$$\Delta(E_{ij}) = E_{ij}\otimes E_{ij}, \qquad \epsilon(E_{ij}) = 1, \qquad S(E_{ij}) = E_{ji},$$

é uma álgebra de Hopf fraca.

O próximo exemplo é uma aplicação do Lema anterior.

Exemplo 1.2.12. *Seja G um grupo. Então, $M_n(kG)$, a álgebra das matrizes sobre o anel de grupo kG, é uma álgebra de Hopf fraca, pois é o produto tensorial da álgebra de Hopf kG com a álgebra de Hopf fraca do exemplo anterior $M_n(k)$. Nesse caso, a estrutura de $M_n(kG)$ é dada por:*

$$\Delta(gE_{ij}) = gE_{ij}\otimes gE_{ij}, \qquad \epsilon(gE_{ij}) = 1 \quad e \quad S(gE_{ij}) = g^{-1}E_{ji}.$$

Para o próximo exemplo, vamos recordar a definição de grupóide e alguns resultados dessa teoria que serão necessários para esse texto. Um *grupóide* $\mathcal{G}$ é uma categoria pequena na qual todo morfismo é um isomorfismo. Vamos denotar um grupóide por $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^0, s, t, \circ)$ onde $\mathcal{G}^1$ representa conjunto dos morfismos, $\mathcal{G}^0$ o conjunto dos objetos, $\circ$ a composição de morfismos e $s,t : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^0$ as funções "source" e "target", respectivamente, onde a função s associa a cada morfismo o objeto "fonte" e a função t associa a cada morfismo o objeto "alvo".

Um caminho em $\mathcal{G}$ é uma palavra de morfismos, isto é, $p = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ se $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, para todo $i < m$, $s(p) = s(\alpha_1)$ e $t(p) = t(\alpha_m)$. Mais ainda, o inverso do caminho p é dado por $p^{-1} = \alpha_m^{-1}\cdots\alpha_1^{-1}$. Dizemos que dois objetos $e, f \in \mathcal{G}^0$ estão conectados se existir um caminho p com $s(p) = e$ e $t(p) = f$. Essa relação, no conjunto de objetos $\mathcal{G}^0$, é uma relação de equivalência e as suas classes de equivalência são chamadas de componentes conexas de $\mathcal{G}$, isto é, $\mathcal{G} = \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}_\lambda$, para algum conjunto de índices Λ e subgrupóides $\mathcal{G}_\lambda$. Para um objeto arbitrário $e \in \mathcal{G}^0$, seja $G(e) = \{\alpha \in \mathcal{G}^1 \mid s(\alpha) = e = t(\alpha)\}$. Assim, $G(e)$ é um grupo e se p é um caminho do objeto e para o objeto f, então

$$\varphi : G(e) \to G(f), \quad \text{dada por} \quad \varphi(\alpha) = p^{-1}\alpha p,$$

é um isomorfismo de grupos. Consequentemente, para cada componente conexa $\mathcal{G}_\lambda$, existe um único grupo associado G, tal que $G \cong G(e)$, para todo $e \in \mathcal{G}_\lambda^0$. Um grupóide é chamado *conexo* se possui somente uma componente conexa.

A álgebra de grupóide, que denotaremos por $k\mathcal{G}$, é definida como o k-espaço vetorial que tem como base $\mathcal{G}^1$, com a seguinte multiplicação:

$$gh = \begin{cases} g \circ h, & \text{se } s(h) = t(g) \\ 0, & \text{se } s(h) \neq t(g) \end{cases},$$

onde $\circ$ denota a operação de $\mathcal{G}$. Quando $k\mathcal{G}$ é unitária, $1_{k\mathcal{G}} = \sum_{e\in\mathcal{G}^0} \mathrm{id}_e$ e $k\mathcal{G}$ é uma álgebra de Hopf fraca com estrutura dada por:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \epsilon(g) = 1 \text{ e } S(g) = g^{-1}.$$

Para a álgebra de grupóide temos o seguinte resultado:

Lema 1.2.13. *A álgebra de grupóide $k\mathcal{G}$ é unitária se, e somente se, cada componente conexa de $\mathcal{G}$ possui somente um número finito de objetos. Nesse caso, se $\mathcal{G}$ é conexo, então*

$$k\mathcal{G} \cong M_n(kG),$$

como álgebras de Hopf fracas, onde a estrutura de álgebra de Hopf fraca em $M_n(kG)$ foi dada no Exemplo 1.2.12.

Demonstração: Com a notação acima, a álgebra de grupóide $A = k\mathcal{G}$ sobre um corpo k pode ser decomposta como um produto direto das álgebras de grupóide $A_\lambda = k\mathcal{G}_\lambda$, das componentes conexas $\mathcal{G}_\lambda$ de $\mathcal{G}$, ou seja, $A = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. O anel A é unitário se, e somente se, A_λ é unitário $\forall\lambda \in \Lambda$, que por sua vez, é unitário se, e somente se, $\mathcal{G}_\lambda^0$ é finito $\forall\lambda \in \Lambda$.

Suponhamos agora que $\mathcal{G}$ é conexo e sejam $n = \mid \mathcal{G}^0 \mid$ e $\mathcal{G}^0 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Então o conjunto $G = \{\alpha \in \mathcal{G}^1 \mid s(\alpha) = e_1 = t(\alpha)\}$ é um grupo. Para cada $1 \leq i \leq n$, escolha um morfismo γ_i de e_1 para e_i, onde também supomos que $\gamma_1 = \mathrm{id}_{e_1}$. Para qualquer $\alpha \in \mathcal{G}^1$ com $s(\alpha) = e_i$ e $t(\alpha) = e_j$, temos que $\alpha = \gamma_i^{-1} g \gamma_j$, onde $g = \gamma_i \alpha \gamma_j^{-1} \in G$. Assim, a transformação linear

$$\Gamma : k\mathcal{G} \to M_n(kG), \text{ dada por } \Gamma(\alpha) = \gamma_i \alpha \gamma_j^{-1} E_{ij}$$

é um isomorfismo de álgebras. De fato, sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{G}^1$ com $s(\alpha) = e_i$, $t(\alpha) = e_j = s(\beta)$ e $t(\beta) = e_l$, então

$$\Gamma(\alpha\beta) = \gamma_i \alpha \beta \gamma_l^{-1} E_{il} = \gamma_i \alpha \gamma_j^{-1} \gamma_j \beta \gamma_l^{-1} E_{ij} E_{jl} = (\gamma_i \alpha \gamma_j^{-1} E_{ij})(\gamma_j \beta \gamma_l^{-1} E_{jl}) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Note também que

$$\Gamma(1_{k\mathcal{G}}) = \Gamma(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{id}_{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{-1} \mathrm{id}_{e_i} \gamma_i E_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{id}_{e_i} E_{ii} = 1_{M_n(kG)}.$$

O inverso de Γ é dado por: $\Gamma^{-1}(gE_{ij}) = \gamma_i^{-1} g \gamma_j$.

Para um morfismo α de e_i para e_j, temos que:

$$\begin{aligned}(\Gamma \otimes \Gamma)\Delta_{k\mathcal{G}}(\alpha) &= (\Gamma \otimes \Gamma)(\alpha \otimes \alpha) = \gamma_i \alpha \gamma_j^{-1} E_{ij} \otimes \gamma_i \alpha \gamma_j^{-1} E_{ij} \\ &= \Delta_{kG}(\gamma_i \alpha \gamma_j^{-1}) \Delta_{M_n(k)}(E_{ij}) = \Delta_{M_n(kG)}(\Gamma(\alpha)).\end{aligned}$$

Para a counidade temos que:

$$\epsilon_{M_n(kG)}(\Gamma(\alpha)) = \epsilon_{M_n(kG)}(\gamma_i \alpha \gamma_j^{-1} E_{ij}) = \epsilon_{kG}(\gamma_i \alpha \gamma_j^{-1}) \epsilon_{M_n(k)}(E_{ij}) = \epsilon_{k\mathcal{G}}(\alpha).$$

Para a antípoda temos que:

$$\Gamma(S_{k\mathcal{G}}(\alpha)) = \Gamma(\alpha^{-1}) = \gamma_j \alpha^{-1} \gamma_i^{-1} E_{ji} = S_{kG}(\gamma_i \alpha \gamma_j^{-1}) S_{M_n(k)}(E_{ij}) = S_{M_n(kG)}(\Gamma(\alpha)).$$

O que conclui a demonstração. ■

Exemplo 1.2.14. *Sejam $M_n(k)$ o anel das matrizes $n \times n$ sobre um corpo k e $R = M_n(k)[x]$. Então R é uma álgebra de Hopf fraca, pois $R = M_n(k)[x] = M_n(k) \otimes k[x]$ é o produto tensorial da álgebra de Hopf fraca $M_n(k)$ com a álgebra de Hopf $k[x]$. A estrutura de R é a seguinte:*

$$\Delta(E_{ij}x^m) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} E_{ij}x^l \otimes E_{ij}x^{m-l}, \quad \epsilon(E_{ij}x^m) = 0, \forall m > 0, \quad S(E_{ij}x^m) = (-1)^m E_{ji}x^m.$$

Exemplo 1.2.15. *[3, Example 9] Sejam k um corpo e N um inteiro positivo que não é* *múltiplo da característica de k ($char(k)$). Seja R a k-álgebra gerada por U e V sujeitos as relações $U^N = 1$ e $VU = qUV$ com V invertível e $q \in k$ tal que $q^N = 1$. Essa álgebra é conhecida como Toro Algébrico Quântico e é uma álgebra de Hopf fraca via*

$$\Delta(U^nV^m) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(U^{i+n}V^m \otimes U^{-i}V^m), \quad \epsilon(U^nV^m) = \begin{cases} N, & U^n = 1 \\ 0, & U^n \neq 1 \end{cases}, \tag{1.6}$$

e $S(U^nV^m) = V^{-m}U^n$.

Em [3], os autores mostram que a álgebra do exemplo anterior pode ser vista como um produto de uma álgebra de Hopf (álgebra de grupo dos números inteiros) com a álgebra do exemplo a seguir quando o grupo for cíclico de ordem N.

Exemplo 1.2.16. *Sejam k um corpo, N um inteiro positivo que não é múltiplo de $char(k)$ e G um grupo abeliano finito com N elementos. Considere a álgebra de grupo $R = \widetilde{kG}$ com a seguinte estrutura de coálgebra:*

$$\Delta(g) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} gh \otimes h^{-1}, \qquad \epsilon(g) = \begin{cases} N, & se\ g = 1_G \\ 0, & se\ g \neq 1_G \end{cases},$$

e antípoda $S \equiv \mathrm{id}_R$. Desta forma, R é uma álgebra de Hopf fraca.

De fato, começamos por ver que Δ é multiplicativa. Sejam $f, g \in G$. Então,

$$\begin{aligned} \Delta(f)\Delta(g) &= \left(\frac{1}{N}\sum_{h\in G} fh \otimes h^{-1}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{l\in G} gl \otimes l^{-1}\right) \\ &= (fg \otimes 1_G)\frac{1}{N^2}\sum_{h,l\in G} hl \otimes (hl)^{-1} = (fg \otimes 1_G)\frac{1}{N^2}\sum_{l\in G}\left(\sum_{h\in G} h \otimes h^{-1}\right) \\ &= (fg \otimes 1_G)\frac{1}{N^2}N\sum_{h\in G} h \otimes h^{-1} = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} fgh \otimes h^{-1} = \Delta(fg). \end{aligned}$$

Vejamos agora a coassociatividade:

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(g)) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} gh \otimes \Delta(h^{-1}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h,l\in G} gh \otimes h^{-1}l \otimes l^{-1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(g)) &= \frac{1}{N}\sum_{h\in G} \Delta(gh) \otimes h^{-1} = \frac{1}{N^2}\sum_{h,l\in G} ghl \otimes l^{-1} \otimes h^{-1} \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{h,p\in G} gp \otimes p^{-1}h \otimes h^{-1}. \end{aligned}$$

De onde segue a coassociatividade de Δ. Agora vejamos que vale

$$(\Delta(1_G) \otimes 1_G)(1_G \otimes \Delta(1_G)) = \Delta^{\otimes 2}(1_G) = (1_G \otimes \Delta(1_G))(\Delta(1_G) \otimes 1_G).$$

$$(\Delta(1_G)\otimes 1_G)(1_G\otimes\Delta(1_G)) = (\frac{1}{N}\sum_{h\in G} h\otimes h^{-1}\otimes 1_G)(\frac{1}{N}\sum_{l\in G} 1_G\otimes l\otimes l^{-1}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h,l\in G} h\otimes h^{-1}l\otimes l^{-1};$$

$$(1_G\otimes\Delta(1_G))(\Delta(1_G)\otimes 1_G) = (\frac{1}{N}\sum_{h\in G} 1_G\otimes h\otimes h^{-1})(\frac{1}{N}\sum_{l\in G} l\otimes l^{-1}\otimes 1_G) = \frac{1}{N^2}\sum_{h,l\in G} l\otimes l^{-1}h\otimes h^{-1};$$

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Delta(1_G)) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} h\otimes\Delta(h^{-1}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h,l\in G} h\otimes h^{-1}l\otimes l^{-1}.$$

Portanto, a igualdade acima se verifica. Vejamos agora os axiomas da counidade:

$$(\epsilon\otimes\mathrm{id})(\Delta(g)) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G}\epsilon(gh)\otimes h^{-1} = \frac{1}{N}Ng = g;$$

$$(\mathrm{id}\otimes\epsilon)(\Delta(g)) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} gh\otimes\epsilon(h^{-1}) = \frac{1}{N}g1_G N = g;$$

$$\epsilon(fg_1)\epsilon(g_2h) = \frac{1}{N}\sum_{l\in G}\epsilon(fgl)\epsilon(l^{-1}h) = \frac{1}{N}\epsilon(fgh)N = \epsilon(fgh);$$

$$\epsilon(fg_2)\epsilon(g_1h) = \frac{1}{N}\sum_{l\in G}\epsilon(fl^{-1})\epsilon(glh) = \frac{1}{N}N\epsilon(gfh) = \epsilon(fgh).$$

Para a antípoda, começamos observando que

$$\epsilon_t(g) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G}\epsilon(hg)h^{-1} = \frac{1}{N}Ng = g \qquad \text{e} \qquad \epsilon_s(g) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} hg\epsilon(h^{-1}) = \frac{1}{N}gN = g.$$

Assim,

$$S(g_1)g_2 = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} S(gh)h^{-1} = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} ghh^{-1} = g\left(\frac{1}{N}\sum_{h\in G} hh^{-1}\right) = g = \epsilon_s(g);$$

$$g_1S(g_2) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} ghS(h^{-1}) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} ghh^{-1} = g\left(\frac{1}{N}\sum_{h\in G} hh^{-1}\right) = g = \epsilon_t(g).$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
S(g_1)g_2S(g_3) &= \frac{1}{N^2}\sum_{h,l\in G} S(gh)h^{-1}lS(l^{-1}) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} ghh^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{l\in G} ll^{-1}\right)\\
&= g\left(\frac{1}{N}\sum_{h\in G} hh^{-1}\right) = g = S(g).
\end{aligned}
$$

Observe que nesse exemplo $\epsilon_s = \epsilon_t = \mathrm{id}$ e, portanto, $R_s = R_t = R$.

Para finalizar essa seção, vejamos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.17. *Sejam A e B k-álgebras e $\phi : A \to B$ um isomorfismo de k-álgebras. Se B é uma álgebra de Hopf fraca com comultiplicação Δ, counidade ϵ e antípoda S, então A é uma álgebra de Hopf fraca com comultiplicação $\Delta_A = (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\circ\Delta\circ\phi$, counidade $\epsilon_A = \epsilon\circ\phi$ e antípoda $S_A = \phi^{-1}\circ S\circ\phi$.*

Demonstração: Começamos mostrando que, com as definições enunciadas, A possui estrutura de coálgebra. Note que

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{id}_A\otimes\Delta_A)\Delta_A &= (\phi^{-1}\phi\otimes(\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta\phi)(\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta\phi\\
&= (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})(\phi\otimes\Delta\phi)(\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta\phi\\
&= (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta\phi\\
&= (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta\phi\\
&= (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})(\Delta\phi\otimes\phi)(\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta\phi\\
&= ((\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta\phi\otimes\mathrm{id}_A)(\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta\phi\\
&= (\Delta_A\otimes\mathrm{id}_A)\Delta_A.
\end{aligned}
$$

E, para a counidade temos que:

$$
(\mathrm{id}_A\otimes\epsilon_A)\Delta_A = (\phi^{-1}\phi\otimes\epsilon\phi)(\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta\phi = (\phi^{-1}\otimes\epsilon)\Delta\phi = \phi^{-1}(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\Delta\phi = \phi^{-1}\phi = \mathrm{id}_A.
$$

Analogamente temos que $(\epsilon_A\otimes\mathrm{id}_A)\Delta_A = \mathrm{id}_A$. Com isso temos que A é uma coálgebra.

Por definição, Δ_A é multiplicativa. Vejamos agora o axioma (b) da Definição 1.2.1 (biálgebra fraca). Observe que $\Delta_A(1_A) = (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta(\phi(1)) = (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta(1)$. Assim,

$$
(\Delta_A(1_A)\otimes 1_A) = ((\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta(1)\otimes\phi^{-1}(1)) = (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})(\Delta(1)\otimes 1)
$$

e

$$
(1_A\otimes\Delta_A(1_A)) = (\phi^{-1}(1)\otimes(\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})\Delta(1)) = (\phi^{-1}\otimes\phi^{-1}\otimes\phi^{-1})(1\otimes\Delta(1)).
$$

Como $(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1} \otimes \phi^{-1})$ é multiplicativa, segue que

$$\begin{aligned}(1_A \otimes \Delta_A(1_A))(\Delta_A(1_A) \otimes 1_A) &= (\phi^{-1} \otimes \phi^{-1} \otimes \phi^{-1})((1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)) \\ &= (\phi^{-1} \otimes \phi^{-1} \otimes \phi^{-1})((\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(1)) \\ &= (\phi^{-1} \otimes \phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta\phi(1_A) \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \Delta_A)\Delta_A(1_A).\end{aligned}$$

Analogamente, segue que $(\Delta_A(1_A) \otimes 1_A)(1_A \otimes \Delta_A(1_A)) = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta_A)\Delta_A(1_A)$.

Para mostrar que A é uma biálgebra fraca, resta verificar o axioma $\epsilon_A(xa_1)\epsilon_A(a_2y) = \epsilon_A(xay) = \epsilon_A(xa_2)\epsilon_A(a_1y)$. Sejam $x, a, y \in A$ e suponhamos que $\phi(a) = d$. Assim, $\Delta(\phi(a)) = \Delta(d) = d_1 \otimes d_2$ e $a_1 \otimes a_2 = \Delta_A(a) = (\phi^{-1} \otimes \phi^{-1}(\Delta(\phi(a))) = \phi^{-1}(d_1) \otimes \phi^{-1}(d_2)$.

Logo,

$$\begin{aligned}\epsilon_A(xa_1)\epsilon_A(a_2y) &= \epsilon_A(x\phi^{-1}(d_1))\epsilon_A(\phi^{-1}(d_2)y) = \epsilon\phi(x\phi^{-1}(d_1))\epsilon\phi(\phi^{-1}(d_2)y) \\ &= \epsilon(\phi(x)d_1)\epsilon(d_2\phi(y)) = \epsilon(\phi(x)d\phi(y)) = \epsilon(\phi(x)\phi(a)\phi(y)) \\ &= \epsilon(\phi(xay)) = \epsilon_A(xay).\end{aligned}$$

A segunda igualdade do axioma se verifica de forma análoga.

Por fim, vamos verificar os axiomas da antípoda.

$$\begin{aligned}S_A(a_1)a_2 &= S_A(\phi^{-1}(d_1))\phi^{-1}(d_2) = \phi^{-1}(S(\phi(\phi^{-1}(d_1))))\phi^{-1}(d_2) = \phi^{-1}(S(d_1))\phi^{-1}(d_2) \\ &= \phi^{-1}(S(d_1)d_2) = \phi^{-1}(\epsilon_s(d)) = \phi^{-1}(1_1\epsilon(d1_2)) = \phi^{-1}(1_1)\epsilon(d1_2) \\ &= \phi^{-1}(1_1)\epsilon(\phi(\phi^{-1}(d1_2))) = \phi^{-1}(1_1)(\epsilon \circ \phi)(a\phi^{-1}(1_2)) = (1_A)_1\epsilon_A(a(1_A)_2) \\ &= (\epsilon_A)_s(a).\end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-se que $a_1S_A(a_2) = (\epsilon_A)_t(a)$. Para o axioma (c) da Definição 1.2.6 (álgebra de Hopf fraca), começamos observando que

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \Delta_A)(\Delta_A(a)) &= \phi^{-1}(d_1) \otimes \Delta_A(\phi^{-1}(d_2)) = \phi^{-1}(d_1) \otimes \big((\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\Delta(d_2))\big) \\ &= \phi^{-1}(d_1) \otimes \phi^{-1}(d_2) \otimes \phi^{-1}(d_3).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}S_A(a_1)a_2S_A(a_3) &= S_A(\phi^{-1}(d_1))\phi^{-1}(d_2)S_A(\phi^{-1}(d_3)) \\ &= (\phi^{-1}S\phi)(\phi^{-1}(d_1))\phi^{-1}(d_2)(\phi^{-1}S\phi)(\phi^{-1}(d_3)) \\ &= \phi^{-1}(S(d_1))\phi^{-1}(d_2)\phi^{-1}(S(d_3)) = \phi^{-1}(S(d_1)d_2S(d_3)) \\ &= \phi^{-1}(S(d)) = \phi^{-1}(S(\phi(a))) = S_A(a).\end{aligned}$$

Portanto, A é uma álgebra de Hopf fraca. ■

1.3 Extensões de Hopf-Ore

Nessa seção vamos apresentar os resultados de Panov [22] e de Brown, O'Hagan, Zhang e Zhuang [5]. Tais artigos são os primeiros a discutir as condições sob as quais existe uma extensão de Ore de uma álgebra de Hopf que a contém como subálgebra de Hopf. Já haviam trabalhos anteriores na literatura, os quais abordavam extensões de Ore de álgebras de Hopf, mas com outros objetivos. Por exemplo, no artigo de Beattie, Dăscălescu e Grünenfelder [1], quocientes de extensões de Ore aparecem para apresentar uma resposta negativa à décima conjectura de Kaplansky (veja em [23]). Em seu trabalho, Panov caracteriza as extensões de Hopf-Ore geradas por elementos skew-primitivos. Em [5], os autores generalizam o resultado de Panov.

Panov define *extensões de Hopf-Ore* da seguinte maneira:

Definição 1.3.1. *Uma k-álgebra H é uma extensão de Hopf-Ore de uma álgebra de Hopf A, se:*

- *H é álgebra de Hopf tal que A é subálgebra de Hopf de H;*
- *Existe um endomorfismo σ da álgebra A e uma σ-derivação δ de A tais que $H = A[x;\sigma,\delta]$;*
- *$\Delta(x) = a \otimes x + x \otimes b$, com $a, b \in A$.*

Nesse caso o autor conclui, pela coassociatividade desejada em H, que x deve ser um *elemento skew-primitivo* de H, isto é, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, para algum elemento group-like $g \in A$. O principal resultado obtido por Panov é o seguinte:

Teorema 1.3.2. *[22, Theorem 1.3] A álgebra de Hopf $H = A[x;\sigma,\delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore se, e somente se,*

(i) Existem um elemento group-like $g \in A$ e um caracter (homomorfismo de álgebras unitário) $\chi : A \to k$, tal que

$$\sigma(a) = \chi(a_1)a_2 = ga_1g^{-1}\chi(a_2);$$

(ii) δ é uma $(g,1)$-coderivação, ou seja, satisfaz

$$\Delta(\delta(a)) = \delta(a_1) \otimes a_2 + ga_1 \otimes \delta(a_2),\ \forall a \in A.$$

Na seção 2 de seu artigo, Panov faz uma classificação das extensões de Hopf-Ore para algumas álgebras. No caso de uma álgebra de Hopf cocomutativa A, ele apresenta o seguinte método de construir extensões de Hopf Ore:

Sejam χ um caracter de A, $g \in \mathcal{Z}(A)(=$ centro de $A)$ um elemento group-like e $\alpha : A \to k$ uma forma linear tal que

$$\alpha(uv) = \alpha(u)\epsilon(v) + \chi(u)\alpha(v). \tag{1.7}$$

Então, a transformação linear dada por $\delta(a) := \alpha(a_1)(1-g)a_2$ é uma σ-derivação que é uma g-coderivação, onde $\sigma(a) = \chi(a_1)a_2 = a_1\chi(a_2)$, visto que g central implica em $ga_1g^{-1} = a_1$. Ou seja, sob essas hipóteses podemos construir uma extensão de Hopf-Ore de A.

No caso da álgebra de grupo $A = kG$, o autor obtém a seguinte caracterização para as extensões de Hopf-Ore:

Proposição 1.3.3. *[22, Proposition 2.2] Toda extensão de Hopf-Ore de $A = kG$ é da forma $A[x;\sigma,\delta]$, onde $\sigma(g) = \chi(g)g$, para todo $g \in G$ e para algum caracter χ do grupo G, $h \in \mathcal{Z}(G)$ e δ é da forma $\delta(g) = \alpha(g)(g - gh)$, para algum α que satisfaz* (1.7).

Já em [5], Brown et al. observam que existem exemplos onde a hipótese de x ser um elemento skew-primitivo não se verifica. Esse é o caso da álgebra de coordenadas do grupo de Heisenberg de dimensão 3, denotada por $H = \mathcal{O}(G)$. Considerando G como o conjunto da matrizes triangulares superiores 3×3 com a entrada 1 na diagonal, então H é gerada pelas funções coordenadas y, z e x nas entradas $(1,2), (2,3)$ e $(1,3)$, respectivamente. Assim, $H = k[x,y,z] = k[y,z][x]$, é uma extensão de Hopf-Ore da álgebra de Hopf $A = k[y,z]$, mas x não é skew-primitivo, uma vez que

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + y \otimes z.$$

Com isso, os autores modificam a definição de extensão de Hopf-Ore, exigindo que σ seja um automorfismo e generalizam substancialmente o último item da Definição de Panov, para:

- Existem $a, b \in A$, $v, w \in A \otimes A$ tais que

$$\Delta(x) = a \otimes x + x \otimes b + v(x \otimes x) + w.$$

Nesse caso, é mostrado que se A é uma álgebra de Hopf conexa sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, e $A[x;\sigma,\delta]$ é uma álgebra de Hopf contendo A como subálgebra de Hopf, então $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 + w$ com $w \in A \otimes A$. Lembramos que o *coradical* de uma álgebra de Hopf é a soma de todas as suas subcoálgebras simples e uma álgebra de Hopf é dita *conexa* se o seu coradical é k.

O principal resultado de Brown et al., generalizando o teorema de Panov, é o seguinte:

Teorema 1.3.4. *[5, Theorem 2.4] Seja A uma álgebra de Hopf.*

(i) *Seja $H = A[x;\sigma,\delta]$ uma extensão de Hopf-Ore de A (com a nova definição). Suponhamos que*

$$S(x) = \alpha x + \beta, \quad \text{para } \alpha, \beta \in A, \text{ com } \alpha \text{ não nulo.} \tag{H}$$

Escreva $w = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \in A \otimes A$, com $\{u_i\}_{i=1,n}$ e $\{v_i\}_{i=1,n}$ subconjuntos de A k-linearmente independentes. Então, temos que

(a) *a, b são elementos group-like de A e $v = 0$;*

(b) *Depois de uma mudança da variável x e correspondentes ajustes em σ, δ e w,*

$$\epsilon(x) = 0 \quad e \quad \Delta(x) = a \otimes x + x \otimes 1 + w; \tag{1.8}$$

Para o restante de (i) vamos assumir que vale 1.8

(c) *$S(x) = -a^{-1}\left(x + \sum_{i=1}^{n} u_i S(v_i)\right)$;*

(d) *Existe um caracter $\chi : A \to k$ tal que*

$$\sigma(r) = \chi(r_1) r_2 = a r_1 a^{-1} \chi(r_2), \ \forall r \in A; \tag{1.9}$$

(e) *A σ-derivação δ satisfaz a relação*

$$\Delta(\delta(r)) - \delta(r_1) \otimes r_2 - a r_1 \otimes \delta(r_2) = w\Delta(r) - \Delta(\sigma(r))w, \ \forall r \in A; \tag{1.10}$$

(f) *$w \in A^+ \otimes A^+$, onde A^+ denota o núcleo da counidade ϵ, e satisfaz as seguintes identidades:*

$$\sum_{i=1}^{n} S(u_i) v_i = a^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i S(v_i) \ e \ w \otimes 1 + (\Delta \otimes \mathrm{id})(w) = a \otimes w + (\mathrm{id} \otimes \Delta)(w). \tag{1.11}$$

(ii) *Suponha que a é um elemento group-like de A, $w \in A \otimes A$, σ é um automorfismo de A e δ é uma σ-derivação de A, satisfazendo (d), (e) e (f) de (i). Então a extensão de Ore $H = A[x;\sigma,\delta]$ admite uma estrutura de álgebra de Hopf, contendo A como subálgebra de Hopf e x satisfazendo $(H), (a), (b)$ e (c) de (i). Consequentemente, H é uma extensão de Hopf-Ore de A.*

Capítulo 2

Extensões de Hopf-Ore fracas skew-primitivas

Neste capítulo vamos estudar extensões de Hopf-Ore fracas, generalizando o resultado de Panov para o contexto de álgebras de Hopf fracas. Iniciamos apresentando o conceito de tais extensões para o nosso contexto.

Definição 2.0.1. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca e $R \subseteq H$ uma extensão de álgebras. Dizemos que H é uma extensão de Hopf-Ore fraca de R, se valem as seguintes afirmações:*

- *H é uma álgebra de Hopf fraca, contendo R como subálgebra de Hopf fraca;*
- *Existe um automorfismo σ da álgebra R e uma σ-derivação δ de R, tais que $H = R[x; \sigma, \delta]$.*

Observemos que, pelo Lema 1.2.10, $H = R[x] = R \otimes k[x]$ é uma extensão de Hopf-Ore fraca para qualquer álgebra de Hopf fraca R, onde

$$\Delta(x) = \Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) = (1 \otimes x + x \otimes 1)\Delta(1), \ \epsilon(RxR) = 0, \ \text{e } S(x) = -x.$$

Nesse caso, $H_s = R_s$ e $H_t = R_t$.

Observe que Δ_H, quando restrita à R, coincide com Δ_R, de onde segue que $\Delta_H(1) = \Delta_R(1)$ e assim o axioma (b) da Definição 1.2.1 sempre será válido em H. Também, devido a isso e a Proposição 1.2.9, extensões de Hopf-Ore fracas de álgebras de Hopf não podem resultar em álgebras de Hopf fracas.

O próximo resultado nos fornece um método de construir extensões de Hopf-Ore fracas a partir de extensões de Hopf-Ore.

Proposição 2.0.2. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca, A uma álgebra de Hopf, $g \in A$ um elemento group-like, $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$ e $\delta : A \to A$ uma σ-derivação de A. Se g, σ e δ*

satisfazem as condições do Teorema 1.3.2, ou seja, $A[x;\sigma,\delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore de A, então $(R\otimes A)[\overline{x};\overline{\sigma},\overline{\delta}]$ é uma extensão de Hopf-Ore fraca de $R\otimes A$, onde usamos a notação do Teorema 1.1.8.

Demonstração: De fato, pelo Lema 1.2.10 $R\otimes A$ é uma álgebra de Hopf fraca. Pelo Teorema 1.1.8, temos que $(R\otimes A)[\overline{x};\overline{\sigma},\overline{\delta}]\cong R\otimes A[x;\sigma,\delta]$ como álgebras. Finalmente, pelo Teorema 1.2.17, segue que $(R\otimes A)[\overline{x};\overline{\sigma},\overline{\delta}]$ é uma álgebra de Hopf fraca. ■

Note também que podemos usar os resultados obtidos por Brown et al (Teorema 1.3.4) para construírmos extensões de Hopf-Ore fracas. Também observemos que nem toda extensão de Hopf-Ore fraca é obtida via essa construção (veja o Exemplo 2.3.27).

Antes de apresentar nossos resultados vamos precisar de alguma preparação, o que será feito a seguir.

2.1 Caracteres

Para uma álgebra de Hopf H, com antípoda S, temos que o conjunto $\mathrm{Alg}(H,k)$, dos k-homomorfismos de álgebras de H em k, é um grupo com o produto convolução e elemento neutro ϵ. O inverso convolutivo de $\chi\in\mathrm{Alg}(H,k)$, é dado por $\chi\circ S$. Os elementos de $\mathrm{Alg}(H,k)$ são chamados caracteres de H, e para cada $\chi\in\mathrm{Alg}(H,k)$, definem-se os seguintes endomorfismos de H:

$$\tau_\chi^l(h)=h_1\chi(h_2)\ \text{ e }\ \tau_\chi^r(h)=\chi(h_1)h_2,\quad \text{para qualquer } h\in H.$$

Como os elementos de $\mathrm{Alg}(H,k)$ possuem inverso convolutivo, segue que τ_χ^l e τ_χ^r são isomorfismos de álgebras e recebem os nomes *left winding automorphism* e *right winding automorphism*, respectivamente.

No contexto de álgebras de Hopf fracas precisaremos generalizar a definição de caracteres. Assim, com as notações acima, temos a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Um caracter fraco de uma biálgebra fraca R é uma transformação linear $\chi:R\to k$, tal que τ_χ^l e τ_χ^r são endomorfismos de álgebras de R.*

Observemos que se $\chi:A\to k$ é um caracter de uma biálgebra A, ou seja, um homomorfismo de álgebras, temos que χ é um fraco, pois $\tau_\chi^l(1)=1_1\chi(1_2)=1\chi(1)=1$ e

$$\tau_\chi^l(ab)=(ab)_1\chi((ab)_2)=a_1b_1\chi(a_2b_2)=a_1b_1\chi(a_2)\chi(b_2)=a_1\chi(a_2)b_1\chi(b_2)=\tau_\chi^l(a)\tau_\chi^l(b).$$

De forma análoga se mostra que τ_χ^r também é endomorfismo de álgebras.

Exemplo 2.1.2. *A counidade $\epsilon : R \to k$ em uma biálgebra fraca R é um caracter fraco (que não é homomorfismo de álgebras), pois $\tau^l_\epsilon = \tau^r_\epsilon = \mathrm{id}_R$.*

Exemplo 2.1.3. *Os caracteres fracos da álgebra de Hopf fraca $M_n(k)$ do Exemplo 1.2.11, estão em correspondência biunívoca com as n-uplas de $(k^\times)^n$ da forma $(1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.*

De fato, suponha que $\chi : M_n(k) \to k$ dado por $\chi(E_{ij}) = \lambda_{ij}$ é um caracter fraco. Assim, τ^l_χ e τ^r_χ são endomorfismos da álgebra $M_n(k)$, que são dados por: $\tau^l_\chi(E_{ij}) = \tau^r_\chi(E_{ij}) = E_{ij}\chi(E_{ij}) = \lambda_{ij}E_{ij}$. De $\tau^l_\chi(1) = 1$ temos que:

$$\sum_i E_{ii} = 1 = \tau^l_\chi(1) = 1_1\chi(1_2) = \sum_k E_{ii}\chi(E_{ii}) = \sum_i E_{ii}\lambda_{ii}.$$

Logo, $\lambda_{ii} = 1$ para qualquer $i = 1, 2, \cdots, n$. Também temos que $\tau^l_\chi(E_{il})\tau^l_\chi(E_{lj}) = \tau^l_\chi(E_{il}E_{lj}) = \tau^l_\chi(E_{ij})$, de onde segue que

$$\lambda_{ij}E_{ij} = \tau^l_\chi(E_{ij}) = \tau^l_\chi(E_{il})\tau^l_\chi(E_{lj}) = \lambda_{il}\lambda_{lj}E_{il}E_{lj} = \lambda_{il}\lambda_{lj}E_{ij},$$

ou seja, $\lambda_{ij} = \lambda_{il}\lambda_{lj}$ para quaisquer $1 \leq i, j, l \leq n$. Em particular, quando $j = i$ temos que $1 = \lambda_{ii} = \lambda_{il}\lambda_{li}$, isto é, $\lambda^{-1}_{ij} = \lambda_{ji}$, para quaisquer i, j. Assim temos que $\lambda_{ij} = \lambda_{il}\lambda_{lj} = \lambda^{-1}_{li}\lambda_{lj}$. Logo, basta definirmos os elementos λ_{li}'s para um l fixo, para que os demais fiquem completamente determinados.

Seja então $\lambda_{11} = 1$ e $\lambda_{1i} = \lambda_i \in k^\times$, para quaisquer $i = 2, 3, \cdots, n$. Assim, $\lambda_{ij} = \lambda^{-1}_{1i}\lambda_{1j} = \lambda^{-1}_i\lambda_j$ para quaisquer i, j com $i \neq 1$. Assim, temos a n-upla $(1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

Reciprocamente, dada uma n-upla $(\lambda_1 = 1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in (k^\times)^n$ temos que $\chi(E_{ij}) = \lambda^{-1}_i\lambda_j$ é um caracter fraco de $M_n(k)$. Portanto, os caracteres da biálgebra fraca $M_n(k)$ estão em correspondência biunívoca com as n-uplas de $(k^\times)^n$ da forma $(1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

Observação 2.1.4. *Notemos que se A e B são biálgebras fracas e $\chi_A : A \to k$ e $\chi_B : B \to k$ são caracteres fracos, então $\chi : A \otimes B \to k$ dado por $a \otimes b \mapsto \chi_A(a)\chi_B(b)$ é um caracter fraco de $A \otimes B$. Em particular, se A é uma álgebra de Hopf fraca, B é uma álgebra de Hopf e χ é um caracter de B, então $\overline{\chi} : A \otimes B \to k$, dado por $\overline{\chi} = \epsilon_A \otimes \chi$, é um caracter fraco da álgebra de Hopf fraca $A \otimes B$.*

De fato, começamos lembrando que pelo Lema 1.2.10, para $a \in A$ e $b \in B$, $\Delta_{A\otimes B}(a \otimes b) = a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\tau^l_\chi(a \otimes b) &= (a_1 \otimes b_1)\chi(a_2 \otimes b_2) = (a_1 \otimes b_1)\chi_A(a_2)\chi_B(b_2) \\
&= a_1\chi_A(a_2) \otimes b_1\chi_B(b_2) = \tau^l_{\chi_A}(a) \otimes \tau^l_{\chi_B}(b) = (\tau^l_{\chi_A} \otimes \tau^l_{\chi_B})(a \otimes b),
\end{aligned}$$

que é um endomorfismo de $A \otimes B$. De forma análoga, $\tau^r_\chi = \tau^r_{\chi_A} \otimes \tau^r_{\chi_B}$.

Para o próximo exemplo, lembremos que um *caracter de um grupo G* é um homomorfismo de grupos $\rho : G \to k^{\times}$, de G no grupo multiplicativo de k. Cada caracter ρ desse grupo induz um homomorfismo de álgebras de kG em k, pela extensão linear, que denotaremos também por ρ.

Exemplo 2.1.5. *Seja $R = M_n(kG)$ a álgebra de Hopf fraca descrita no Exemplo 1.2.12. Então, $\chi : R \to k$ dado por*

$$\chi(gE_{ij}) = q_{ij}\rho(g), \qquad \forall g \in G, 1 \leq i, j \leq n$$

é um caracter fraco de R, onde ρ é um caracter do grupo G e $q_{ij} = \lambda_i^{-1}\lambda_j$, para constantes não nulas $\lambda_i \in k$.

De fato, basta observar que a álgebra R é o produto tensorial de $M_n(k)$ por kG e o caracter definido nada mais é do que o produto tensorial (como na Observação 2.1.4) de caracteres dessas álgebras.

O lema a seguir é um dos mais importantes para esse texto e será referenciado várias vezes a frente.

Lema 2.1.6. *Sejam R uma biálgebra fraca e $\sigma : R \to R$ um endomorfismo de álgebras. Então:*

(i) O endomorfismo σ satisfaz $\Delta \circ \sigma = (\mathrm{id} \otimes \sigma)\Delta$ se, e somente se, $\sigma = \tau_\chi^l$, para algum $\chi \in R^*$;

(ii) O endomorfismo σ satisfaz $\Delta \circ \sigma = (\sigma \otimes \mathrm{id})\Delta$ se, e somente se, $\sigma = \tau_\chi^r$, para algum $\chi \in R^*$.

Portanto, $(\sigma \otimes \mathrm{id})\Delta = \Delta \circ \sigma = (\mathrm{id} \otimes \sigma)\Delta$ se, e somente se, existe um caracter fraco χ de R tal que $\sigma = \tau_\chi^l = \tau_\chi^r$.

Demonstração: (i) Suponhamos que $(\Delta \circ \sigma)(a) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)\Delta(a)$, para todo $a \in R$. Então, obtemos:

$$\sigma(a) = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta(\sigma(a)) = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)(a_1 \otimes \sigma(a_2)) = a_1(\epsilon \circ \sigma)(a_2) = \tau_{\epsilon\circ\sigma}^l(a).$$

Reciprocamente, suponhamos que $\sigma = \tau_\chi^l$, para algum $\chi \in R^*$. Então,

$$\Delta(\sigma(a)) = \Delta(\tau_\chi^l(a)) = \Delta(a_1)\chi(a_2) = a_1 \otimes a_2\chi(a_3) = a_1 \otimes \tau_\chi^l(a_2) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)\Delta(a),$$

para todo $a \in R$. A demonstração de (ii) segue de forma análoga. Finalmente, se valem (i) e (ii), temos que τ_χ^l e τ_χ^r são endomorfismos de R, pois σ o é, e assim χ é um caracter fraco. ■

Uma consequência direta do Lema acima é que τ_χ^l é sempre R_t-linear enquanto τ_χ^r é R_s-linear. De fato, se $a \in R_t$, então $\Delta(a) = 1_1 a \otimes 1_2$, pelo Lema 1.2.2. Assim, $\tau_\chi^l(a) = 1_1 a\chi(1_2) = \tau_\chi^l(1)a = a$. De forma similar mostra-se que τ_χ^r é R_s-linear, usando que $\Delta(a) = 1_1 \otimes 1_2 a$, para todo $a \in R_s$.

Lema 2.1.7. *Seja χ um caracter fraco de uma álgebra de Hopf fraca R com antípoda S. Então:*

(i) $S * \tau_\chi^l = \epsilon_s \circ \tau_\chi^l$;

(ii) $\tau_\chi^r * S = \epsilon_t \circ \tau_\chi^r$.

Demonstração: Vejamos a demonstração de (i). Seja $a \in R$, então

$$(S * \tau_\chi^l)(a) = S(a_1)\tau_\chi^l(a_2) = S(a_1)a_2\chi(a_3) = \epsilon_s(a_1)\chi(a_2) = \epsilon_s(a_1\chi(a_2)) = \epsilon_s(\tau_\chi^l(a)).$$

A demonstração do item (ii) é feita de forma análoga. ■

Seja $\chi : R \to k$ um caracter fraco de R e suponhamos que $\sigma = \tau_\chi^l$ seja um automorfismo. Assim, σ tem um inverso σ^{-1}, de onde segue que $a = \sigma^{-1}(\sigma(a)) = \sigma^{-1}(a_1)\chi(a_2)$, para todo $a \in R$. Aplicando ϵ em ambos os membros desta igualdade, obtemos $\epsilon(a) = \epsilon\sigma^{-1}(a_1)\chi(a_2) = \chi' * \chi(a)$, com $\chi' := \epsilon \circ \sigma^{-1}$. Usando agora o Lema 2.1.6 temos também,

$$\Delta \circ \sigma^{-1} = (\mathrm{id} \otimes \sigma^{-1})(\mathrm{id} \otimes \sigma)\Delta\sigma^{-1} = (\mathrm{id} \otimes \sigma^{-1})\Delta\sigma\sigma^{-1} = (\mathrm{id} \otimes \sigma^{-1})\Delta.$$

Portanto, novamente pelo Lema 2.1.6, segue que $\sigma^{-1} = \tau_{\chi'}^l$ é um automorfismo. Analogamente mostra-se que $\tau_{\chi'}^r$ é um automorfismo, de onde podemos concluir que χ' é um caracter fraco de R. Nota-se que χ' é o inverso de χ na álgebra de convolução $R^* = \mathrm{Hom}(R, k)$.

Como observado no começo dessa seção, no caso de χ ser um caracter de uma álgebra de Hopf H, então o seu inverso em H^* é $\chi \circ S$. De fato,

$$(\chi * (\chi \circ S))(h) = \chi(h_1)\chi(S(h_2)) = \chi(h_1 S(h_2)) = \chi(\epsilon(h)1_H) = \epsilon(h), \ \forall h \in H.$$

De forma análoga tem-se $(\chi \circ S) * \chi = \epsilon$. No contexto de álgebras de Hopf fracas, não sabemos se $\chi \circ S$ é o inverso convolutivo de χ, mas quando isso acontece, temos o seguinte resultado:

Lema 2.1.8. *Seja R uma álgebra de Hopf fraca com antípoda S. Suponha que χ é um caracter fraco. Se $\chi \circ S$ é o inverso de χ em R^*, então $S = \tau_\chi^l \circ S \circ \tau_\chi^r = \tau_\chi^r \circ S \circ \tau_\chi^l$.*

Demonstração: Para todo elemento $a \in R$ temos:

$$\begin{aligned}
S(a) &= \epsilon(a_1)S(a_2) = (\chi * \chi S)(a_1)S(a_2) = \chi(a_1)\chi(S(a_2))S(a_3) \\
&= \chi(a_1)\chi(S(a_2)_2)S((a_2)_1) = \chi(a_1)\tau_\chi^l(S(a_2)) = \tau_\chi^l(S(\tau_\chi^r(a))).
\end{aligned}$$

A outra igualdade segue de forma análoga. ■

2.2 Coderivações

Recordamos que se (R, μ, η) é uma k-álgebra, então uma transformação linear $\delta : R \to R$ é uma *k-derivação* se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta+\delta\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & R \arrow[d, "\delta"] \\
R \otimes R \arrow[r, "\mu"'] & R
\end{tikzcd} .$$

Agora, se (R, Δ, ϵ) é uma k-coálgebra, então dualizando esta definição, obtemos a noção de uma *k-coderivação*, como sendo uma transformação linear $\delta : R \to R$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & R \arrow[l, "\Delta"'] \\
R \otimes R \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\delta+\delta\otimes\mathrm{id}"] & R \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd} .$$

Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 2.2.1. *Seja R uma coálgebra. Uma transformação linear $\delta : R \to R$ é uma k-coderivação se*

$$\Delta \circ \delta = (\mathrm{id} \otimes \delta + \delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta.$$

No que segue, vamos escrever somente derivação e coderivação para nos referirmos a k-derivação e k-coderivação quando estivermos trabalhando com álgebras e coálgebras.

Observemos que, para um funcional linear f de uma coálgebra R (uma transformação linear $f : R \to k$), a função $\delta : R \to R$, dada por

$$\delta(a) = a_1 f(a_2) - f(a_1)a_2, \text{ para todo } a \in R, \tag{2.1}$$

é uma coderivação. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta(a)) &= \Delta(a_1 f(a_2) - f(a_1)a_2) \\
&= a_1 \otimes a_2 f(a_3) - f(a_1)a_2 \otimes a_3 \\
&= a_1 \otimes a_2 f(a_3) - a_1 f(a_2) \otimes a_3 + a_1 f(a_2) \otimes a_3 - f(a_1)a_2 \otimes a_3 \\
&= a_1 \otimes (a_2 f(a_3) - f(a_2)a_3) + (a_1 f(a_2) - f(a_1)a_2) \otimes a_3 \\
&= a_1 \otimes \delta(a_2) + \delta(a_1) \otimes a_2.
\end{aligned}$$

Uma coderivação δ é chamada *interna* se existe um funcional linear $f \in R^*$ tal que δ é dada por (2.1).

Segundo [8, Section 2.3], uma coálgebra R é dita *coseparável* se existe um funcional linear $\tau : R \otimes R \to k$ tal que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & R \otimes R \otimes R \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\tau"] \\
R \otimes R \otimes R \arrow[r, "\tau\otimes\mathrm{id}"'] & R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & \equiv & R \otimes R \arrow[dl, "\tau"] \\
& k &
\end{tikzcd}.$$

Ou seja, $(\mathrm{id} \otimes \tau)(\Delta \otimes \mathrm{id}) = (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta)$ e $\tau \circ \Delta = \epsilon$. Também por [8, Theorem 3]: uma coálgebra é coseparável se, e somente se, todas suas coderivações são internas.

Proposição 2.2.2. *Seja G um grupo. A coálgebra $M_n(kG)$, com estrutura dada por:*

$$\Delta(gE_{ij}) = gE_{ij} \otimes gE_{ij}, \qquad \epsilon(gE_{ij}) = 1,$$

é coseparável. Em particular, $M_n(k)$ é coseparável.

Demonstração: Basta definir

$$\tau(gE_{ij} \otimes hE_{ml}) := \begin{cases} 1, & \text{se } (g,i,j) = (h,m,l) \\ 0, & \text{se } (g,i,j) \neq (h,m,l) \end{cases}.$$

Assim, temos que

$$\tau(\Delta(gE_{ij})) = \tau(gE_{ij} \otimes gE_{ij}) = 1 = \epsilon(gE_{ij});$$

$$(\mathrm{id}\otimes\tau)(\Delta\otimes\mathrm{id})(gE_{ij}\otimes hE_{ml}) = (\mathrm{id}\otimes\tau)(gE_{ij}\otimes gE_{ij}\otimes hE_{ml}) = \begin{cases} gE_{ij}, \text{ se } (g,i,j) = (h,m,l) \\ 0, \text{ se } (g,i,j) \neq (h,m,l) \end{cases};$$

$$(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta)(gE_{ij}\otimes hE_{ml}) = (\tau\otimes\mathrm{id})(gE_{ij}\otimes hE_{ml}\otimes hE_{ml}) = \begin{cases} hE_{ml}, \text{ se } (g,i,j) = (h,m,l) \\ 0, \text{ se } (g,i,j) \neq (h,m,l) \end{cases}.$$

Como queríamos. ■

Observação 2.2.3. *Observe que se R é uma coálgebra coseparável cocomutativa (como no Exemplo 1.2.11), segue que R não possui coderivações não triviais, ou seja, a única coderivação de R é a função nula.*

De fato, como R é coseparável segue de [8] que todas as suas coderivações são internas. Assim, se δ é uma coderivação em R, então existe um funcional linear $f \in R^*$ tal que

$$\delta(a) = (\mathrm{id} \otimes f - f \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = a_1 f(a_2) - f(a_1)a_2 = a_1 f(a_2) - f(a_2)a_1 = 0, \ \forall a \in R.$$

Exemplo 2.2.4. *A coálgebra $R = \widetilde{kG}$ do Exemplo 1.2.16 é coseparável. Em particular, como na observação acima, essa coálgebra não possui coderivações não triviais.*

De fato, basta definir $\tau = \epsilon \circ \mu$, onde μ e ϵ são multiplicação e counidade de R, respectivamente. Assim, para quaisquer $g, l \in G$ temos

$$\tau(\Delta(g)) = \frac{1}{N}\sum_{h \in G} \tau(gh \otimes h^{-1}) = \frac{1}{N}\sum_{h \in G} \epsilon(g) = \epsilon(g);$$

$$(\mathrm{id} \otimes \tau)(\Delta \otimes \mathrm{id})(g \otimes l) = \frac{1}{N}\sum_{h \in G} gh \otimes \tau(h^{-1} \otimes l) = \frac{1}{N} glN = gl;$$

$$(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta)(g \otimes l) = \frac{1}{N}\sum_{h \in G} \tau(g \otimes lh) \otimes h^{-1} = \frac{1}{N} Ngl = gl.$$

Portanto R é coseparável. Segue então de [8, Theorem 3] que as suas coderivações são todas internas. Como R é cocomutativa, pois G é abeliano, obtemos que R não possui coderivações não triviais.

Exemplo 2.2.5. *Seja $R = M_n(k)[x]$ a álgebra de Hopf fraca do Exemplo 1.2.14. Então, $\delta : R \to R$ dada por $\delta(E_{ij}x^m) = mE_{ij}x^m$ é uma derivação de R, que também é uma coderivação.*

De fato, vejamos que δ é uma derivação:

$$\delta(E_{ij}x^l E_{rs}x^m) \;=\; \delta(E_{ij}E_{rs}x^{l+m}) = \begin{cases} (l+m)E_{is}x^{l+m}, & \text{se } j = r \\ 0, & \text{se } j \neq r \end{cases};$$

$$\begin{aligned} \delta(E_{ij}x^l)E_{rs}x^m + E_{ij}x^l\delta(E_{rs}x^m) &= lE_{ij}x^l E_{rs}x^m + mE_{ij}x^l E_{rs}x^m \\ &= (l+m)E_{ij}E_{rs}x^{l+m} \\ &= \begin{cases} (l+m)E_{is}x^{l+m}, & \text{se } j = r \\ 0, & \text{se } j \neq r \end{cases}. \end{aligned}$$

E agora, que δ é uma coderivação:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}\otimes\delta+\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(E_{ij}x^m)) &= (\mathrm{id}\otimes\delta+\delta\otimes\mathrm{id})(\sum\binom{m}{l}E_{ij}x^l\otimes E_{ij}x^{m-l})\\
&= \sum\binom{m}{l}E_{ij}x^l\otimes\delta(E_{ij}x^{m-l})+\delta(E_{ij}x^l)\otimes E_{ij}x^{m-l}\\
&= \sum\binom{m}{l}(m-l)(E_{ij}x^l\otimes E_{ij}x^{m-l})+l(E_{ij}x^l\otimes E_{ij}x^{m-l})\\
&= m\sum\binom{m}{l}E_{ij}x^l\otimes E_{ij}x^{m-l}\\
&= m\Delta(E_{ij}x^m)=\Delta(mE_{ij}x^m)=\Delta(\delta(E_{ij}x^m)).
\end{aligned}$$

Finalizamos esta seção apresentando dois resultados importantes sobre coderivações em biálgebras fracas.

Lema 2.2.6. *Seja δ uma coderivação de uma biálgebra fraca R. Então $\epsilon\circ\delta=0$.*

Demonstração: Seja $a\in R$. Temos que

$$\delta(a)=(\epsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(\delta(a))=\epsilon(a_1)\delta(a_2)+\epsilon(\delta(a_1))a_2=\delta(a)+\epsilon(\delta(a_1))a_2.$$

Assim, $\epsilon(\delta(a_1))a_2=0$. Com isso, segue que

$$\epsilon(\delta(a))=\epsilon(\delta(a_1))\epsilon(a_2)=\epsilon(\epsilon(\delta(a_1))a_2)=0,$$

como queríamos. ■

Lema 2.2.7. *Seja δ uma coderivação que também é uma derivação de uma biálgebra fraca R. Então*

$$\delta(R_t)=0 \ \Leftrightarrow\ \delta(R_s)=0 \ \Leftrightarrow\ (\mathrm{id}\otimes\delta)(\Delta(1))=0 \ \Leftrightarrow\ (\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1))=0.$$

Demonstração: Como $\delta(1)=0$, temos que $(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Delta(1))=-(\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1))$. Portanto $(\mathrm{id}\otimes\delta)\Delta(1)=0\Leftrightarrow(\delta\otimes\mathrm{id})\Delta(1)=0$. Pelo Lema 1.2.3, $\Delta(1)\in R_s\otimes R_t$, logo se $\delta(R_t)=0$, então $(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Delta(1))=0$ e se $\delta(R_s)=0$, então $(\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1))=0$.

Suponhamos agora que $(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Delta(1))=0$. Então para todo $a\in R$ tem-se que $1_1a\otimes\delta(1_2)=0$. Logo $\delta(\epsilon_t(a))=\sum\epsilon(1_1a)\delta(1_2)=0$, isto é, $\delta(R_t)=0$. Analogamente se mostra que $\delta(R_s)=0$, usando a igualdade equivalente $(\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1))=0$. ■

2.3 Extensões geradas por elementos Skew-Primitivos fracos

O Teorema de Panov [22, Theorem 1.3] caracteriza extensões de Hopf-Ore $R[x;\sigma,\delta]$ geradas por elementos skew-primitivos, ou seja, em tais extensões temos $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, onde $g \in R$ é um elemento group-like. Seja R uma biálgebra fraca que não é uma biálgebra. O seguinte lema mostra que x não pode ser um elemento skew-primitivo, no sentido acima, em uma possível estrutura de biálgebra fraca numa extensão de Ore $R[x;\sigma,\delta]$, contendo R como uma sub-biálgebra fraca.

Lema 2.3.1. *Sejam R uma biálgebra fraca, σ um automorfismo de R e δ uma σ-derivação de R. Suponha que a estrutura de biálgebra fraca de R se estende a uma estrutura biálgebra fraca em $R[x;\sigma,\delta]$ tal que $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, onde $g \in R$. Então R é uma biálgebra.*

Demonstração: Suponha que $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1$. Como $\Delta(x) = \Delta(1)\Delta(x)$, então

$$g\otimes x + x\otimes 1 = \Delta(1)(g\otimes x)+\Delta(1)(x\otimes 1) \Leftrightarrow (g\otimes 1-\Delta(1)(g\otimes 1))(1\otimes x)+(1-\Delta(1))(x\otimes 1) = 0.$$

Pelo Lema 1.1.7, $x \otimes 1$ e $1 \otimes x$ são linearmente independentes sobre $R \otimes R$ e com isso temos que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$. De onde segue que R é uma biálgebra. ■

Por essa razão é necessário enfraquecer as noções de elemento primitivo e skew-primitivo no contexto de biálgebras fracas. Para isso, precisamos conhecer a noção de *elemento group-like* em uma biálgebra fraca.

Em [17, Definition 4.1], o autor define um elemento *group-like* em uma álgebra de Hopf fraca R como sendo um elemento invertível $g \in R$ tal que

$$\Delta(g) = \Delta(1)(g \otimes g); \tag{2.2}$$

$$\Delta(g) = (g \otimes g)\Delta(1). \tag{2.3}$$

A partir dessa definição, segue que se g é um elemento group-like, então

$$\epsilon_t(g) = \epsilon_s(g) = 1;$$

e, além disso, $S(g)$ também é um elemento group-like e $S(g) = g^{-1}$.

Com o objetivo de estender uma comultiplicação coassociativa $\Delta : R \to R \otimes R$ à $H = R[x;\sigma,\delta]$ de modo que essa extensão também seja coassociativa, com uma determinada imagem para x, apresentamos o seguinte resultado:

Lema 2.3.2. *Sejam R uma biálgebra fraca e $H = R[x;\sigma,\delta]$. Dados $g, h \in R$, uma* *transformação linear multiplicativa $\Delta : H \to H \otimes H$, satisfazendo*

$$\Delta(x) = \Delta(1)(g \otimes x + x \otimes h) = (g \otimes x + x \otimes h)\Delta(1) \qquad e \qquad \Delta|_R = \Delta_R,$$

é coassociativa se, e somente se, g e h satisfazem (2.2) *e* (2.3).

Demonstração: De fato, temos que

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(1)(g \otimes x + x \otimes h)) = \Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(g) \otimes x + \Delta(x) \otimes h)\\ &= \Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(g) \otimes x + [\Delta(1)(g \otimes x + x \otimes h)] \otimes h)\\ &= \Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(g) \otimes x + g \otimes x \otimes h + x \otimes h \otimes h).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(x)) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(1)(g \otimes x + x \otimes h)) = \Delta^{\otimes 2}(1)(g \otimes \Delta(x) + x \otimes \Delta(h))\\ &= \Delta^{\otimes 2}(1)(g \otimes [\Delta(1)(g \otimes x + x \otimes h)] + x \otimes \Delta(h))\\ &= \Delta^{\otimes 2}(1)(g \otimes g \otimes x + g \otimes x \otimes h + x \otimes \Delta(h)).\end{aligned}$$

Onde usamos as identidades para $\Delta^{\otimes 2}$ apresentadas logo após a Definição 1.2.1. Logo, $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta \equiv (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$ é equivalente à

$$\Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(g) \otimes x + x \otimes h \otimes h) = \Delta^{\otimes 2}(1)(g \otimes g \otimes x + x \otimes \Delta(h)),$$

que, por sua vez, é equivalente à

$$\begin{aligned}\Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(g) \otimes 1) &= \Delta^{\otimes 2}(1)(g \otimes g \otimes 1);\\ \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes h \otimes h) &= \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes \Delta(h)),\end{aligned}$$

graças ao Lema 1.1.7. Aplicando $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \epsilon)$ na primeira igualdade acima obtemos $1_1 g_1 \otimes 1_2 g_2 \epsilon(1_3) = 1_1 g \otimes 1_2 g \epsilon(1_3)$, ou seja, $\Delta(1)\Delta(g) = \Delta(1)(g \otimes g)$. Portanto,

$$\Delta(g) = \Delta(1g) = \Delta(1)\Delta(g) = \Delta(1)(g \otimes g).$$

Reciprocamente, se $\Delta(g) = \Delta(1)(g \otimes g)$, então

$$\begin{aligned}\Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(g) \otimes 1) &= \Delta^{\otimes 2}(1)([\Delta(1)(g \otimes g)] \otimes 1)\\ &= \Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(1) \otimes 1)(g \otimes g \otimes 1) = \Delta^{\otimes 2}(1)(g \otimes g \otimes 1).\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos que a segunda igualdade é equivalente à $\Delta(h) = \Delta(1)(h \otimes h)$.

Usando a expressão $\Delta(x) = (g \otimes x + x \otimes h)\Delta(1)$, analogamente obtemos as demais condições. ■

A partir das considerações acima, vamos definir o seguinte:

Definição 2.3.3. (*a*) *Um elemento group-like fraco de uma biálgebra fraca R é um elemento $g \in R$ que satisfaz* (2.2) *e* (2.3).

(*b*) *Um elemento (g, h)-primitivo fraco de uma biálgebra fraca R é um elemento $a \in R$ tal que $\Delta(a) = \Delta(1)(g \otimes a + a \otimes h) = (g \otimes a + a \otimes h)\Delta(1)$, onde $g, h \in R$ são elementos group-like fracos.*

Nos casos em que a for $(g, 1)$-primitivo fraco ou $(1, h)$-primitivo fraco também diremos que a é *skew-primitivo fraco*. E, em particular, um elemento $(1, 1)$-primitivo fraco será chamado simplesmente de *primitivo fraco*.

Seja R uma biálgebra fraca. Observamos que um elemento group-like fraco $g \in R$ satisfaz $g = \epsilon_t(g)g = g\epsilon_s(g)$ e que, em geral, g não é invertível. Para exemplos de elementos group-like fracos, basta considerarmos os elementos da forma $g = E_{ij}$ em $M_n(k)$. No entanto, se g tem um inverso à direita, temos que $\epsilon_t(g) = 1$ e se g tem um inverso à esquerda, temos que $\epsilon_s(g) = 1$. No caso em que R é uma álgebra de Hopf fraca, temos que $\epsilon_t(g) = g_1 S(g_2) = g 1_1 S(g 1_2) = g 1_1 S(1_2) S(g) = gS(g)$ e $\epsilon_s(g) = S(g_1)g_2 = S(1_1 g)1_2 g = S(g)S(1_1)1_2 g = S(g)g$. Assim, temos o seguinte:

Lema 2.3.4. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca e $g \in R$ um elemento group-like fraco.*

(*i*) *$\epsilon_t(g) = 1$ se, e somente se, $S(g)$ é um inverso à direita de g;*

(*ii*) *$\epsilon_s(g) = 1$ se, e somente se, $S(g)$ é um inverso à esquerda de g.*

Observação 2.3.5. *Observamos neste momento que se definirmos a expressão da comultiplicação por*

$$\Delta(a) = \Delta(1)(g \otimes a + a \otimes h) = (g \otimes a + a \otimes h)\Delta(1),$$

com g e h elementos group-like fracos, onde um deles é invertível (então um elemento group-like), digamos g, substituindo a por $a' = g^{-1}a$, obtemos que $\Delta(a') = \Delta(1)(1 \otimes a' + a' \otimes l) = (1 \otimes a' + a' \otimes l)\Delta(1)$, onde $l = g^{-1}h$ é um elemento group-like fraco.

Lema 2.3.6. *Sejam R uma biálgebra fraca e $a \in R$.*

(*i*) *Se a é um elemento $(g, 1)$-primitivo fraco tal que $\epsilon_t(g) = 1$, então $\epsilon(Ra) = 0$;*

(*ii*) *Se a é um elemento $(g, 1)$-primitivo fraco tal que $\epsilon'_t(g) = 1$, então $\epsilon(aR) = 0$.*

Demonstração: De fato, temos que

$$\Delta(a) = 1_1 g \otimes 1_2 a + 1_1 a \otimes 1_2 = g 1_1 \otimes a 1_2 + a 1_1 \otimes 1_2.$$

Assim, pelo axioma da counidade segue que

$$a = (\epsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) = \epsilon(1_1 g) 1_2 a + \epsilon(1_1 a) 1_2 = \epsilon_t(g) a + \epsilon_t(a) = a + \epsilon_t(a),$$

e isso nos mostra que $\epsilon_t(a) = 0$. Pelo Lema 1.2.4, segue que $\epsilon(Ra) = 0$. A segunda afirmação é mostrada de forma análoga, usando a segunda expressão acima para $\Delta(a)$. ■

Notemos que, se R é uma álgebra de Hopf fraca e $a \in R$ é um elemento (g, h)-primitivo fraco, então pelos axiomas da antípoda, segue que

$$\begin{aligned} \epsilon_s(a) &= S(a_1)a_2 = S(1_1 g) 1_2 a + S(1_1 a) 1_2 h \\ &= S(g) S(1_1) 1_2 a + S(a) S(1_1) 1_2 h = S(g) a + S(a) h \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_t(a) &= a_1 S(a_2) = g 1_1 S(a 1_2) + a 1_1 S(h 1_2) \\ &= g 1_1 S(1_2) S(a) + a 1_1 S(1_2) S(h) = g S(a) + a S(h). \end{aligned}$$

A partir disso, para os casos em que a é um elemento skew-primitivo, obtemos o seguinte resultado:

Lema 2.3.7. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca e $a \in R$.*

(i) Se a é um elemento $(g, 1)$-primitivo fraco e $\epsilon_s(a) = 0$, então $S(a) = -S(g)a$;

(ii) Se a é um elemento $(1, h)$-primitivo fraco e $\epsilon_t(a) = 0$, então $S(a) = -aS(h)$.

Para um elemento $g \in R$ que possui um inverso à direita $g' \in R$, define-se uma função linear $\mathrm{Ad}_g : R \to R$ por $r \mapsto \mathrm{Ad}_g(r) := grg'$.

A seguir apresentamos um resultado onde obtemos certas consequências de uma extensão de Ore $R[x; \sigma, \delta]$ ser uma álgebra de Hopf fraca, na qual x é um elemento skew-primitivo fraco.

Proposição 2.3.8. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca, σ um automorfismo de R e δ uma σ-derivação. Suponha que a estrutura de álgebra de Hopf fraca de R se estende a $H = R[x; \sigma, \delta]$ de tal modo que x seja um elemento skew-primitivo fraco, com*

$$\Delta(x) = \Delta(1)(g \otimes x + x \otimes 1) = (g \otimes x + x \otimes 1)\Delta(1),$$

para algum elemento group-like fraco $g \in R$. Então:

(i) $S(g)$ *é um inverso à direita de* g*;*

(ii) $\epsilon_t(x) = \epsilon_s(x) = 0$ *e, portanto,* $\epsilon(Hx) = \epsilon(xH) = 0$*;*

(iii) $S(x) = -S(g)x$*;*

(iv) $\sigma = \tau_\chi^r = \mathrm{Ad}_g \circ \tau_\chi^l$*;*

(v) $\Delta(\delta(a)) = ((g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \delta) + (\delta \otimes \mathrm{id}))(\Delta(a)),\ \forall a \in R$*;*

(vi) $S(a)S(g) = S(g)\sigma(S(\sigma(a))),\ \forall a \in R$*;*

(vii) $S(\delta(a)) = S(g)\delta(S(\sigma(a))),\ \forall a \in R$*.*

Demonstração: Como H é uma álgebra de Hopf fraca, temos:

$$x = (\epsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = \epsilon(1_1 g)1_2 x + \epsilon(1_1 x)1_2 = \epsilon_t(g)x + \epsilon_t(x),$$

ou seja, $\epsilon_t(g) = 1$ e $\epsilon_t(x) = 0$. Logo, pelo Lema 2.3.4, segue que $S(g)$ é um inverso à direita de g. Temos também que

$$x = (\epsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = \epsilon(g1_1)x1_2 + \epsilon(x1_1)1_2 = x\epsilon_t'(g) + \epsilon_t'(x),$$

o que implica em $\epsilon_t'(x) = 0$. Pelo Lema 1.2.4, tem-se que $\epsilon_s(x) = 0$ e $\epsilon(Hx) = \epsilon(xH) = 0$. Aplicando agora o Lema 2.3.7, obtemos $S(x) = -S(g)x$. Com isto, mostramos (i), (ii) e (iii).

Como Δ é um homomorfismo multiplicativo, tem-se que $\Delta(xa) = \Delta(\sigma(a)x + \delta(a))$, para todo $a \in R$. Temos assim

$$\begin{aligned}
\Delta(xa) &= (g \otimes x + x \otimes 1)\Delta(1)\Delta(a) = ga_1 \otimes xa_2 + xa_1 \otimes a_2 \\
&= ga_1 \otimes \sigma(a_2)x + ga_1 \otimes \delta(a_2) + \sigma(a_1)x \otimes a_2 + \delta(a_1) \otimes a_2 \\
&= (g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\Delta(a))(1 \otimes x) + (\sigma \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))(x \otimes 1) + [(g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \delta) \\
&+ (\delta \otimes \mathrm{id})](\Delta(a)),
\end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma(a)x + \delta(a)) &= \Delta(\sigma(a))\Delta(1)(g \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(\delta(a)) \\
&= \Delta(\sigma(a))(g \otimes 1)(1 \otimes x) + \Delta(\sigma(a))(x \otimes 1) + \Delta(\delta(a)).
\end{aligned}$$

Logo, $\Delta(xa) = \Delta(\sigma(a)x + \delta(a))$, para todo $a \in R$, é equivalente a

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma(a)) &= (\sigma \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)), & (2.4)\\ \Delta(\sigma(a))(g \otimes 1) &= (g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\Delta(a)), & (2.5)\\ \Delta(\delta(a)) &= ((g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \delta) + (\delta \otimes \mathrm{id}))(\Delta(a)). & (2.6)\end{aligned}$$

Da primeira equação se segue que $\sigma = \tau^r_\chi$, onde $\chi = \epsilon \circ \sigma$. Da segunda equação segue que $\sigma(a)g = ga_1\chi(a_2) = g\tau^l_\chi(a)$, ou seja, $\sigma(a) = g\tau^l_\chi(a)S(g) = \mathrm{Ad}_g(\tau^l_\chi(a))$. Logo, $\tau^r_\chi = \mathrm{Ad}_g \circ \tau^l_\chi$. Isso mostra (iv). A terceira equação é exatamente (v).

Finalmente, como $S : H \to H$ satisfaz $S(x) = -S(g)x$ e é a antípoda de H, segue que $S(xa - \sigma(a)x - \delta(a)) = 0$, para todo elemento $a \in R$. Como S é um anti-homomorfismo de álgebras, temos que:

$$\begin{aligned} S(a)S(x) &= S(x)S(\sigma(a)) + S(\delta(a))\\ -S(a)S(g)x &= -S(g)xS(\sigma(a)) + S(\delta(a))\\ &= -S(g)\sigma(S(\sigma(a)))x - S(g)\delta(S(\sigma(a))) + S(\delta(a)).\end{aligned}$$

De onde segue que $S(a)S(g) = S(g)\sigma(S(\sigma(a)))$ e $S(\delta(a)) = S(g)\delta(S(\sigma(a)))$, para todo $a \in R$. Isso mostra (vi) e (vii) e conclui nossa demonstração. ■

Generalizando a noção de coderivação, vamos chamar uma transformação linear $\delta : R \to R$ de (g,h)-*coderivação* se δ satisfaz

$$\Delta(\delta(a)) = ((g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \delta) + (1 \otimes h)(\delta \otimes \mathrm{id}))(\Delta(a)), \quad \text{para todo} \quad a \in R,$$

onde g e h são elementos group-like fracos. Ou seja, se $\Delta(\delta(a)) = ga_1 \otimes \delta(a_2) + \delta(a_1) \otimes ha_2$, para todo $a \in R$. Quando $h = 1$ (ou $g = 1$), vamos chamar tal transformação de *skew-coderivação* (ou uma $(g,1)$-*coderivação*, no caso em que $h = 1$). Notemos que qualquer coderivação é uma $(1,1)$-coderivação.

Vejamos alguns exemplos de σ-derivações que também são skew-coderivações.

Exemplo 2.3.9. *Sejam A uma álgebra de Hopf, $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$, $g \in A$ um elemento group-like e $\delta : A \to A$ uma σ-derivação de A nas condições do Teorema de Panov (Teorema 1.3.2), ou seja, $A[x;\sigma,\delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore. Então, para toda álgebra de Hopf fraca R, $\overline{\delta} : R \otimes A \to R \otimes A$ dada por $\overline{\delta}(r \otimes a) = r \otimes \delta(a)$ é uma $\overline{\sigma}$-derivação que também é uma $(\overline{g},1)$-coderivação, onde $\overline{\sigma} : R \otimes A \to R \otimes A$ é dado por $\overline{\sigma}(r \otimes a) = r \otimes \sigma(a)$ e $\overline{g} = (1 \otimes g)$ é um elemento group-like fraco de $R \otimes A$.*

Começamos observando que $\overline{g}$ é um elemento group-like fraco (na verdade $\overline{g}$ é um elemento group-like, pois g é invertível). De fato,

$$\begin{aligned}\Delta(\overline{g}) &= \Delta(1\otimes g) = 1_1\otimes g_1\otimes 1_2\otimes g_2 = (1_1\otimes 1\otimes 1_2\otimes 1)(1\otimes g\otimes 1\otimes g)\\ &= \Delta(1_{R\otimes A})((1\otimes g)\otimes(1\otimes g)) = \Delta(1_{R\otimes A})(\overline{g}\otimes\overline{g}).\end{aligned}$$

De forma análoga se mostra que $\Delta(\overline{g}) = (\overline{g}\otimes\overline{g})\Delta(1_{R\otimes A})$. Como vimos na introdução do Teorema 1.1.8, $\overline{\delta}$ é uma $\overline{\sigma}$-derivação. Vejamos agora que $\overline{\delta}$ é uma $(\overline{g},1)$-coderivação:

$$\begin{aligned}\Delta(\overline{\delta}(a\otimes b)) &= \Delta(a\otimes\delta(b)) = a_1\otimes\delta(b)_1\otimes a_2\otimes\delta(b)_2\\ &= a_1\otimes\delta(b_1)\otimes a_2\otimes b_2 + a_1\otimes rb_1\otimes a_2\otimes\delta(b_2)\\ &= \overline{\delta}(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2) + (1\otimes r)(a_1\otimes b_1)\otimes\overline{\delta}(a_2\otimes b_2)\\ &= \overline{\delta}((a\otimes b)_1)\otimes(a\otimes b)_2 + \overline{g}(a\otimes b)_1\otimes\overline{\delta}((a\otimes b)_2).\end{aligned}$$

Para o próximo exemplo, que é um caso particular do anterior, vamos considerar G um grupo, $p\in\mathcal{Z}(G)$, $A = kG$ a álgebra de grupo, χ um caracter de G e δ dada por $\delta(g) = \alpha(g)(g-gp)$, onde α é uma forma linear de A que satisfaz $\alpha(gh) = \alpha(g)+\chi(g)\alpha(h)$. Ou seja, pela Proposição 1.3.3, $A[x;\sigma,\delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore de A.

Exemplo 2.3.10. *Sejam $R = M_n(A) = M_n(k)\otimes A$, a álgebra de Hopf fraca descrita no Exemplo 1.2.12, $\overline{\sigma}: R\to R$, dado por $\overline{\sigma}(gE_{ij}) = \sigma(g)E_{ij}$ e $\overline{p} = \sum_{i=1}^{n} rE_{ii}$. Então, a transformação linear*

$$\overline{\delta}: R\to R,\ \textit{dada por}\ \ \overline{\delta}(gE_{ij}) = \delta(g)E_{ij} = \alpha(g)(g-gr)E_{ij}$$

é uma $\overline{\sigma}$-derivação que também é uma $(\overline{p},1)$-coderivação.

O Lema a seguir é uma generalização do Lema 2.2.7, para o caso de uma $(g,1)$-coderivação.

Lema 2.3.11. *Sejam R uma biálgebra fraca, $g\in R$ um elemento group-like fraco e δ uma $(g,1)$-coderivação de R, que também é uma σ-derivação. Se $\epsilon_s(g) = 1$ ou $\epsilon_t'(g) = 1$, então:*

$$\delta(R_t) = 0 \ \Leftrightarrow\ \delta(R_s) = 0 \ \Leftrightarrow\ (g\otimes 1)(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Delta(1)) = 0 \ \Leftrightarrow\ (\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1)) = 0.$$

Demonstração: Como $\delta(1) = 0$, temos que $(g\otimes 1)(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Delta(1)) = -(\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1))$. Portanto $(g\otimes 1)(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Delta(1)) = 0 \Leftrightarrow (\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1)) = 0$. Se $\delta(R_t) = 0$, então $(g\otimes 1)(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Delta(1)) = 0$ e se $\delta(R_s) = 0$ então $(\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1)) = 0$. Suponha agora que $(\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(1)) = \delta(1_1)\otimes 1_2 = 0$. Então para todo $a\in R$, tem-se que $\delta(\epsilon_s(a)) = \delta(1_1\epsilon(a1_2)) = \delta(1_1)\epsilon(a1_2) =$

0, ou seja, $\delta(R_s) = 0$. Se $g1_1 \otimes \delta(1_2) = 0$, então

$$\delta(\epsilon_t(a)) = \delta(\epsilon(1_1 a)1_2) = \epsilon(1_1 a)\delta(1_2) = \epsilon(g1_1 a)\delta(1_2) = 0,$$

para todo $a \in R$, ou seja, $\delta(R_t) = 0$. Na penúltima igualdade usamos o Lema 1.2.5. ■

A seguinte proposição é uma "recíproca" da Proposição 2.3.8.

Proposição 2.3.12. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca, $g \in R$ um group-like fraco, σ um automorfismo de R, δ uma σ-derivação de R tal que*

$$\epsilon(a\delta(b)) = 0 \text{ para quaisquer } a, b \in R \tag{2.7}$$

e $H = R[x; \sigma, \delta]$. Se g, σ e δ satisfazem:

(i) $S(g)$ *é um inverso à direita de* g*;*

(ii) δ *é uma* $(g, 1)$*-coderivação;*

(iii) $\sigma = \tau^r_\chi$*, para algum caracter fraco* χ *de* R*;*

(iv) $\Delta(\sigma(a))(g \otimes 1) = (g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\Delta(a))$*, para qualquer* $a \in R$*,*

então H tem estrutura de biálgebra fraca com x um elemento $(g, 1)$-primitivo fraco.

Se, além disso, $\delta(R_s) = 0$ e para qualquer $a \in R$ valem:

(v) $S(a)S(g) = S(g)\sigma(S(\sigma(a)))$*;*

(vi) $S(\delta(a)) = S(g)\delta(S(\sigma(a)))$*,*

então H tem estrutura de álgebra de Hopf fraca com x um elemento $(g, 1)$-primitivo fraco e $S(x) = -S(g)x$.

Demonstração: Para a primeira parte, começamos observando que $\Delta(\sigma(1)) = \Delta(1)$ e por δ ser uma σ-derivação que é uma $(g, 1)$-coderivação, segue que $0 = \Delta(\delta(1)) = ((g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \delta) + (\delta \otimes \mathrm{id}))(\Delta(1))$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
(g \otimes x + x \otimes 1)\Delta(1) &= g1_1 \otimes x1_2 + x1_1 \otimes 1_2 \\
&= g1_1 \otimes \sigma(1_2)x + g1_1 \otimes \delta(1_2) + \sigma(1_1)x \otimes 1_2 + \delta(1_1) \otimes 1_2 \\
&= (g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\Delta(1))(1 \otimes x) + (g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \delta)(\Delta(1)) \\
&+ (\sigma \otimes \mathrm{id})(\Delta(1))(x \otimes 1) + (\delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(1)) \\
&= \Delta(\sigma(1))(g \otimes 1)(1 \otimes x) + \Delta(\sigma(1))(x \otimes 1) \\
&+ ((g \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \delta) + (\delta \otimes \mathrm{id}))(\Delta(1)) \\
&= \Delta(1)(g \otimes x + x \otimes 1).
\end{aligned}$$

Com isso, se demonstrarmos que H é uma biálgebra fraca, então x é um elemento $(g,1)$-primitivo fraco. O próximo passo será estender a comultiplicação de R para H. Para isso, vamos mostrar que o elemento

$$y = (g \otimes x + x \otimes 1)\Delta(1) = \Delta(1)(g \otimes x + x \otimes 1) \in H \otimes H$$

satisfaz a relação (1.1) da propriedade universal da extensão de Ore, obtendo assim que existe um único homomorfismo de anéis (não necessariamente unitário) $\Delta_H : H \to H \otimes H$ dado por

$$\Delta_H(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) := \sum_{i=0}^{n} \Delta_R(a_i)\Delta_H(x)^i,$$

com $\Delta_H(x) = \Delta_R(1)(g \otimes x + x \otimes 1)$. A seguir, vamos denotar por Δ a comultiplicação tanto de R quanto de H. Vejamos então que y satisfaz a relação (1.1), onde o homomorfismo de anéis $\phi : R \to H \otimes H$ é a composta de Δ_R com a inclusão de $R \otimes R$ em $H \otimes H$, ou seja, $\phi(r) = \Delta(r) = r_1 \otimes r_2$. Temos que $y\phi(r) = (g \otimes x + x \otimes 1)\Delta(r)$ e, por outro lado,

$$\phi(\sigma(r))y + \phi(\delta(r)) = \Delta(\sigma(r))\Delta(1)(g \otimes x + x \otimes 1) + \phi(\delta(r)).$$

Logo, $y\phi(r) = \phi(\sigma(r))y + \phi(\delta(r))$ é equivalente a (2.4), (2.5) e (2.6), como foi mostrado na demonstração da Proposição 2.3.8. A primeira, (2.4), segue da condição que $\sigma = \tau_\chi^r$, para algum caracter fraco, já as outras duas são respectivamente as condições (iv) e (ii), assumidas no Teorema.

A coassociatividade de Δ segue do Lema 2.3.2, pelo fato de g ser um elemento group-like fraco.

Definamos a counidade $\epsilon_H : H \to k$ por $\epsilon_H(ax^n) := 0$, para quaisquer $n > 0$, $a \in R$ e $\epsilon_H(a) := \epsilon_R(a)$, para todo $a \in R$. Assim,

$$\epsilon_H(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon(a_i x^i) = \epsilon_R(a_0).$$

Aqui também vamos denotar as counidades de R e de H por ϵ. Vejamos os seguintes axiomas da counidade: $(\mathrm{id} \otimes \epsilon)(\Delta(f)) = f = (\epsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(f))$, para todo $f \in H$. Note que basta verificar essa igualdade para elementos da forma $f = ax^n, n \geq 1$. Para isso, vamos ter que escrever a expressão de $\Delta(x)^n$ de uma forma conveniente. Para apresentar a fórmula adequada para o que desejamos, necessitamos observar alguns fatos.

- O k-subespaço gerado por $a\delta(b)$, com $a, b \in R$, que denotaremos por $\mathcal{U}(\delta)$, é um ideal bilateral de R. De fato, seja $r \in R$, então

$$r(a\delta(b)) = ra\delta(b) \in \mathcal{U}(\delta);$$

$$(a\delta(b))r = a\delta(b)r = a\delta(br) - a\sigma(b)\delta(r) \in \mathcal{U}(\delta).$$

- $\mathcal{U}(\delta)$ é igual ao ideal gerado por $\mathrm{Im}(\delta)$. Com efeito, claramente $\mathcal{U}(\delta)$ está contido no ideal gerado por $\mathrm{Im}(\delta)$. Agora, sejam $a, r, s \in R$, então

$$r\delta(a)s = r\delta(as) - r\sigma(a)\delta(s) \in \mathcal{U}(\delta),$$

ou seja, o ideal gerado por $\mathrm{Im}(\delta)$ está contido em $\mathcal{U}(\delta)$.

- $\mathcal{U}(\delta)$ é um δ-ideal, isto é, $\delta(\mathcal{U}(\delta)) \subseteq \mathcal{U}(\delta)$. De fato,

$$\delta(a\delta(b)) = \sigma(a)\delta(\delta(b)) + \delta(a)\delta(b) \in \mathcal{U}(\delta).$$

Agora, vejamos por indução, que para qualquer $n \geq 1$ existem $C_{i,j}^{(n)} \in R$ tais que

$$(g \otimes x + x \otimes 1)^n = \sum_{i,j=0}^{n} C_{i,j}^{(n)} x^i \otimes x^j,$$

na qual

$$C_{n,0}^{(n)} = 1 \ \text{ e } \ C_{i,0}^{(n)} = 0, \ \forall i < n; \ C_{0,n}^{(n)} = g^n \ \text{ e } \ C_{0,j}^{(n)} \in \mathcal{U}(\delta), \ \forall j < n.$$

De fato, para $n = 1$, temos os termos $C_{1,0}^{(1)} = 1$, $C_{0,1}^{(1)} = g$ e $C_{0,0}^{(1)} = 0 \in \mathcal{U}(\delta)$. Suponhamos que a fórmula acima vale para $n > 0$. Vejamos que então valerá para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
(g \otimes x \quad + & \quad x \otimes 1)^{n+1} \\
& \overset{H.I.}{=} (g \otimes x + x \otimes 1) \sum_{i,j=0}^{n} C_{i,j}^{(n)} x^i \otimes x^j \\
& = \sum_{i,j=0}^{n} \left(g C_{i,j}^{(n)} x^i \otimes x^{j+1} + x C_{i,j}^{(n)} x^i \otimes x^j \right) \\
& = \sum_{i,j=0}^{n} \left(g C_{i,j}^{(n)} x^i \otimes x^{j+1} + \sigma(C_{i,j}^{(n)}) x^{i+1} \otimes x^j + \delta(C_{i,j}^{(n)}) x^i \otimes x^j \right) \\
& = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} g C_{i,j-1}^{(n)} x^i \otimes x^j + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sigma(C_{i-1,j}^{(n)}) x^i \otimes x^j + \sum_{i,j=0}^{n} \delta(C_{i,j}^{(n)}) x^i \otimes x^j \\
& = \sum_{i,j=0}^{n+1} C_{i,j}^{(n+1)} x^i \otimes x^j.
\end{aligned}$$

O coeficiente de $x^{n+1} \otimes 1$ é $C_{n+1,0}^{(n+1)} = \sigma(C_{n,0}^{(n)}) = \sigma(1) = 1$ e, para qualquer $1 \leq i \leq n$ o coeficiente de $x^i \otimes 1$ é $C_{i,0}^{(n+1)} = \sigma(C_{i-1,0}^{(n)}) + \delta(C_{j,0}^{(n)}) = \sigma(0) + \delta(1) = 0$.
O coeficiente de $1 \otimes x^{n+1}$ é $C_{0,n+1}^{(n+1)} = g C_{0,n}^{(n)} = g^{n+1}$ e, para qualquer $1 \leq j \leq n$ o coeficiente

de $1 \otimes x^j$ é $C_{0,j}^{(n+1)} = gC_{0,j-1}^{(n)} + \delta(C_{0,j}^{(n)}) \in \mathcal{U}(\delta)$, uma vez que $C_{0,l}^{(n)} \in \mathcal{U}(\delta)$ e que $\mathcal{U}(\delta)$ é um δ-ideal. O coeficiente de $1 \otimes 1$ é $C_{0,0}^{(n+1)} := \delta(C_{0,0}^{(n)}) \in \mathcal{U}(\delta)$.

Finalmente, vejamos os axiomas: $(\epsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(ax^n)) = ax^n = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)(\Delta(ax^n))$.

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon)(\Delta(ax^n)) = \sum_{i,j=0}^{n} a_1 C_{i,j}^{(n)} x^i \epsilon(a_2 x^j) = \sum_{i=0}^{n} a_1 C_{i,0}^{(n)} x^i \epsilon(a_2) = \sum_{i=0}^{n} a C_{i,0}^{(n)} x^i = ax^n.$$

Notemos que a condição (2.7) implica em $\epsilon(\mathcal{U}(\delta)) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(ax^n)) &= \sum_{i,j=0}^{n} \epsilon(a_1 C_{i,j}^{(n)} x^i) a_2 x^j \\ &= \epsilon(a_1 g^n) a_2 x^n + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\epsilon(a_1 C_{0,j}^{(n)})}_{=0} a_2 x^j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\epsilon(a_1 C_{i,j}^{(n)} x^i)}_{=0} a_2 x^j \\ &= \epsilon(a_1) a_2 x^n = ax^n,\end{aligned}$$

onde usamos $\epsilon(ag^n) = \epsilon(a)$ do Lema 1.2.5, já que $gS(g) = 1$ implica em $\epsilon_t(g) = 1$, e com isso estamos nas condições desse Lema. Portanto (H, Δ, ϵ) é uma coálgebra e Δ é multiplicativa.

Para garantir que H seja uma biálgebra fraca, resta mostrar o axioma (c) da Definição 1.2.1. Porém, algum trabalho ainda precisa ser feito. Começamos por observar que $\epsilon(HxH) = 0$. De fato, por definição temos que $\epsilon(Hx) = 0$. Logo, basta verificar que $\epsilon(ax^n xb) = 0$, para quaisquer $a, b \in R$ e $n \geq 0$. Assim,

$$\epsilon(ax^{n+1}b) = \epsilon(ah_{n+1,b}x) + \epsilon(a\delta^{n+1}(b)) = \epsilon(a\delta^{n+1}(b)) = \epsilon(a\delta(\delta^n(b))) \stackrel{(2.7)}{=} 0.$$

Onde usamos na primeira igualdade o Lema 1.1.5: $x^n r = h_{n,r}x + \delta^n(b)$, para algum $h_{n,r} \in H$. Agora, observamos que para $f = \sum_i a_i x^i, p = \sum_j b_j x^j, q = \sum_k c_k x^k \in H$, temos que

$$\begin{aligned}\epsilon(fpq) &= \epsilon(\sum_i a_i x^i \sum_j b_j x^j \sum_k c_k x^k) = \sum_{i,j,k} \epsilon(a_i x^i b_j x^j c_k x^k) \\ &= \sum_{i,j,k} \epsilon(a_i x^i b_j (h_{j,c_k} x + \delta^j(c_k)) x^k) = \sum_{i,j,k} \epsilon(a_i x^i b_j \delta^j(c_k)) x^k) \\ &= \sum_{i,j,k} \epsilon(a_i (h_{i,b_j\delta^j(c_k)} x + \delta^i(b_j \delta^j(c_k))) x^k) = \sum_{i,j,k} \epsilon(a_i \delta^i(b_j \delta^j(c_k)) x^k) \\ &= \sum_{i,j} \epsilon(a_i \delta^i(b_j \delta^j(c_0))) = \sum_{j} \epsilon(a_0 b_j \delta^j(c_0)) = \epsilon(a_0 b_0 c_0).\end{aligned}$$

Estamos agora em condições de verificar que vale (c) da Definição 1.2.1. Sejam $f, p, q \in H$ com termos constantes $a, b, c \in R$, respectivamente. Como visto acima, $\epsilon(fpq) = \epsilon(abc)$.

Assim dado $p = \tilde{p}x + b$, para algum $\tilde{p} \in H$, temos $\Delta(p) = \Delta(\tilde{p})(g \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(b)$. Logo para quaisquer $f, q \in H$ com termos constantes $a, c \in R$ respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\epsilon(fp_1)\epsilon(p_2q) &= \epsilon(f\tilde{p}_1g)\underbrace{\epsilon(\tilde{p}_2xq)}_{=0} + \underbrace{\epsilon(f\tilde{p}_1x)}_{=0}\epsilon(\tilde{p}_2q) + \epsilon(fb_1)\epsilon(b_2q) \\
&= \epsilon(fb_1)\epsilon(b_2q) = \epsilon(ab_1)\epsilon(b_2c) = \epsilon(abc) = \epsilon(fpq).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon(fp_2)\epsilon(p_1q) &= \underbrace{\epsilon(f\tilde{p}_2x)}_{=0}\epsilon(\tilde{p}_1gq) + \epsilon(f\tilde{p}_2)\underbrace{\epsilon(\tilde{p}_1xq)}_{=0} + \epsilon(fb_2)\epsilon(b_1q) \\
&= \epsilon(ab_2)\epsilon(b_1c) = \epsilon(abc) = \epsilon(fpq).
\end{aligned}$$

Portanto, sob nossas hipóteses, H é uma biálgebra fraca, como queríamos mostrar.

Vamos mostrar agora que, assumindo as condições adicionais, H se torna uma álgebra de Hopf fraca. Como feito para a comultiplicação, começamos por estender a antípoda de R a H. Para tal, vamos verificar que o elemento $y = -S(g)x$ satisfaz a relação de Ore (1.2), ou seja, $\phi(a)y = y\phi(\sigma(a)) + \phi(\delta(a))$, onde $\phi : R \to H$ é a composta de S com a inclusão de R em H. De fato,

$$\begin{aligned}
y\phi(\sigma(a)) + \phi(\delta(a)) &= -S(g)xS(\sigma(a)) + S(\delta(a)) \\
&= -S(g)\sigma(S(\sigma(a)))x - S(g)\delta(S(\sigma(a))) + S(\delta(a)) \\
&\overset{(iv),(v)}{=} -S(a)S(g)x - S(\delta(a)) + S(\delta(a)) = \phi(a)y.
\end{aligned}$$

Logo, pela propriedade universal da extensão de Ore existe um único anti-homomorfismo de anéis (nesse caso unitário, pois ϕ o é) $S_H : H \to H$, dado por $S_H(x) = -S(g)x$, que estende $S : R \to R$.

Vamos verificar agora os axiomas $S(f_1)f_2 = \epsilon_s(f)$, $f_1S(f_2) = \epsilon_t(f)$ e $S(f_1)f_2S(f_3) = S(f)$, para todo $f \in H$. Notemos que basta verificar os mesmos para o caso em que $f = ax^n$, com $a \in R$ e $n \geq 1$. Lembremos ainda que $\epsilon(ax^n) = 0$ e assim,

$$\epsilon_t(ax^n) = \epsilon(1_1ax^n)1_2 = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_s(ax^n) = 1_1\epsilon(ax^n1_2) = 1_1\epsilon(ahx) + 1_1\epsilon(a\delta^n(1_2)) \overset{(2.7)}{=} 0.$$

Observamos também que, como $\sigma = \tau_\chi^r$, segue pelo Lema 2.1.6 que $\sigma(r) = r$, para todo $r \in R_s$. Isto somado ao fato que $\delta(R_s) = 0$, nos fornece:

$$xr = \sigma(r)x + \delta(r) = rx, \ \forall r \in R_s.$$

Seja $f = ax^n = ax^{n-1}x = hx$, onde $h \in H$. Então

$$\Delta(f) = \Delta(hx) = \Delta(h)\Delta(x) = h_1g \otimes h_2x + h_1x \otimes h_2,$$

e assim, temos

$$\begin{aligned} f_1 S(f_2) &= h_1 g S(h_2 x) + h_1 x S(h_2) = -h_1 g S(g) x S(h_2) + h_1 x S(h_2) \\ &= -h_1 x S(h_2) + h_1 x S(h_2) = 0 = \epsilon_t(f). \end{aligned}$$

Isso mostra o primeiro dos axiomas citados acima. Para os outros dois, vamos argumentar por indução no grau de f. Para $n = 1$ temos $f = ax$ e assim,

$$\begin{aligned} \Delta^{\otimes 2}(f) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(ax)) = \Delta^{\otimes 2}(a)(g \otimes \Delta(x) + x \otimes \Delta(1)) \\ &= \Delta^{\otimes 2}(a)(g \otimes g \otimes x + g \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1) \\ &= a_1 g \otimes a_2 g \otimes a_3 x + a_1 g \otimes a_2 x \otimes a_3 + a_1 x \otimes a_2 \otimes a_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S(f_1) f_2 &= S(a_1 g) a_2 x + S(a_1 x) a_2 = S(g) S(a_1) a_2 x - S(g) x S(a_1) a_2 \\ &= S(g) \epsilon_s(a) x - S(g) x \epsilon_s(a) = 0 = \epsilon_s(f); \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} S(f_1) f_2 S(f_3) &= S(a_1 g) a_2 g S(a_3 x) + S(a_1 g) a_2 x S(a_3) + S(a_1 x) a_2 S(a_3) \\ &= -S(g) S(a_1) a_2 g S(g) x S(a_3) + S(g) S(a_1) a_2 x S(a_3) + S(x) S(a_1) a_2 S(a_3) \\ &= -S(g) S(a_1) a_2 x S(a_3) + S(g) S(a_1) a_2 x S(a_3) + S(x) S(a) \\ &= S(ax) = S(f). \end{aligned}$$

Suponhamos por indução que as igualdades $S(f_1)f_2 = \epsilon_s(f)$ e $S(f_1)f_2S(f_3) = S(f)$ valham para todo elemento da forma $f = ax^n$. Seja $h = ax^{n+1} = fx$, com $f = ax^n$. Assim,

$$\begin{aligned} S(h_1) h_2 &= S(f_1 g) f_2 x + S(f_1 x) f_2 = S(g) S(f_1) f_2 x - S(g) x S(f_1) f_2 \\ &\overset{H.I.}{=} S(g) \epsilon_s(f) x - S(g) x \epsilon_s(f) = 0 = \epsilon_s(f); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{\otimes 2}(h) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(h) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(f)\Delta(x)) = \Delta^{\otimes 2}(f)(\mathrm{id} \otimes \Delta)(g \otimes x + x \otimes 1) \\ &= \Delta^{\otimes 2}(f)(g \otimes g \otimes x + g \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1) \\ &= f_1 g \otimes f_2 g \otimes f_3 x + f_1 g \otimes f_2 x \otimes f_3 + f_1 x \otimes f_2 \otimes f_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(h_1)h_2S(h_3) &= S(f_1g)f_2gS(f_3x) + S(f_1g)f_2xS(f_3) + S(f_1x)f_2S(f_3) \\ &= -S(g)S(f_1)f_2gS(g)xS(f_3) + S(g)S(f_1)f_2xS(f_3) + S(x)S(f_1)f_2S(f_3) \\ &= S(x)S(f_1)f_2S(f_3) \overset{H.I.}{=} S(x)S(f) = S(fx) = S(h). \end{aligned}$$

Com isso segue que H é uma álgebra de Hopf fraca, o que finaliza a demonstração do Teorema. ■

Observação 2.3.13. *Nas condições da Proposição acima, se supormos que o elemento $g \in R$ é de fato um elemento group-like, podemos substituir as condições (iii) e (iv) por:*

$(iii)'$ $\sigma = \tau^r_\chi = \mathrm{Ad}_g \circ \tau^l_\chi$, *para algum caracter fraco χ de R. Mais ainda, se $g \in \mathcal{Z}(R)$, então devemos ter que: $\sigma = \tau^r_\chi = \tau^l_\chi$;*

e a condição (v) por

$(v)'$ $\mathrm{Ad}_g \circ S = \sigma \circ S \circ \sigma$.

Além disso, a condição (i) é trivialmente satisfeita, pois nesse caso $S(g) = g^{-1}$.

De fato, sendo g um elemento invertível, podemos reescrever a condição (2.5), da forma:

$$\Delta(\sigma(a))(g \otimes 1) = (ga_1 \otimes \sigma(a_2))(g^{-1}g \otimes 1) \;\Rightarrow\; \Delta(\sigma(a)) = (ga_1g^{-1} \otimes \sigma(a_2)).$$

Logo, se vale (2.5), segue que

$$\sigma(a) = ga_1g^{-1}\epsilon(\sigma(a_2)) = ga_1\chi(a_2)S(g) = \mathrm{Ad}_g \circ \tau^l_\chi(a),$$

onde $\chi = \epsilon \circ \sigma$. Reciprocamente, se $\sigma = \mathrm{Ad}_g \circ \tau^l_\chi$, então

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma(a)) &= \Delta(g\tau^l_\chi(a)S(g)) = \Delta(ga_1\chi(a_2)S(g)) \\ &= \chi(a_2)\Delta(g)\Delta(a_1)\Delta(g^{-1}) = \chi(a_3)ga_1g^{-1} \otimes ga_2g^{-1} \\ &= ga_1g^{-1} \otimes ga_2\chi(a_3)S(g) = ga_1g^{-1} \otimes \sigma(a_2). \end{aligned}$$

Ainda, sob a hipótese adicional de que $g \in R$ seja um elemento group-like, podemos reunir os resultados das Proposições 2.3.8 e 2.3.12 num único, como apresentado abaixo.

Teorema 2.3.14. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca, $g \in R$ um elemento group-like, σ um automorfismo de R, δ uma σ-derivação de R tal que $\delta(R_s) = 0$ e $H = R[x; \sigma, \delta]$. Então, H é uma extensão de Hopf-Ore fraca de R, na qual x é um elemento $(g,1)$-primitivo fraco se, e somente se,* *(i)* $\sigma = \tau^r_\chi = \mathrm{Ad}_g \circ \tau^l_\chi$, *para algum elemento* $\chi \in R^*$*;*

(ii) δ *é uma* $(g,1)$*-coderivação tal que* $\epsilon(a\delta(b)) = 0$*, para quaisquer* $a, b \in R$*;*

(iii) A antípoda S *de* R *satisfaz* $\mathrm{Ad}_g \circ S = \sigma \circ S \circ \sigma$ *e* $S(\delta(a)) = g^{-1}\delta(S(\sigma(a)))$*, para qualquer* $a \in R$*.*

Nesse caso, $S(x) = -g^{-1}x$*.*

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$: Estamos nas condições da Proposição 2.3.8. Assim, resta mostrar que $\epsilon(a\delta(b)) = 0$. Pelo item (ii) da Proposição 2.3.8 segue que $\epsilon(Rx) = \epsilon(xR) = 0$. Por um lado temos

$$\epsilon(axb) = \epsilon(a\sigma(b)x + a\delta(b)) = \epsilon(a\sigma(b)x) + \epsilon(a\delta(b)) = \epsilon(a\delta(b)),$$

e por outro,

$$\begin{aligned} \epsilon(axb) &= \epsilon(ax_1)\epsilon(x_2b) = \epsilon(ag1_1)\epsilon(x1_2b) + \epsilon(ax1_1)\epsilon(1_2b) \\ &= \epsilon(a\sigma(1_1)x)\epsilon(1_2b) + \epsilon(a\delta(1_1))\epsilon(1_2b) = 0, \end{aligned}$$

visto que $\Delta(1) \in R_s \otimes R_t$ e $\delta(R_s) = 0$ por hipótese. Logo, $\epsilon(a\delta(b)) = 0$ para quaisquer $a, b \in R$.
$(b) \Rightarrow (a)$: Segue diretamente da Proposição 2.3.12 e da observação feita antes do enunciado desse teorema. ■

Os exemplos a seguir podem ser obtidos a partir da Proposição 2.0.2. Porém vamos obtê-los como uma aplicação do Teorema 2.3.14.

Exemplo 2.3.15. *Sejam* A *uma álgebra de Hopf,* $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$*,* δ *uma* σ*-derivação de* A *e* $g \in A$ *um elemento group-like. Suponhamos que* g*,* σ *e* δ *satisfazem as condições do Teorema 1.3.2, ou seja,* $A[x;\sigma,\delta]$ *é uma extensão de Hopf-Ore de* A*. Então, dada uma álgebra de Hopf fraca* R*, temos que* $(R\otimes A)[y;\overline{\sigma},\overline{\delta}]$*, é uma extensão de Hopf-Ore fraca, com* y *sendo um elemento* $(\overline{g},1)$*-primitivo fraco, onde* $\overline{\sigma}(r\otimes a) = r\otimes\sigma(a)$ *e* $\overline{\delta}(r\otimes a) = r\otimes\delta(a)$*, para quaisquer* $a \in A, r \in R$*.*

De fato, como estamos nas condições do Teorema 1.3.2, segue que $\sigma(a) = \tau^r_\chi(a) = g\tau^l_\chi(a)g^{-1}$, para algum caracter χ de A. Vejamos que $\overline{\sigma}(r\otimes a) = \tau^r_{\overline{\chi}}(r\otimes a) = (1\otimes g)\tau^l_{\overline{\chi}}(r\otimes a)(1\otimes g)^{-1}$, para o caracter fraco $\overline{\chi} = \epsilon_R \otimes \chi$ do Exemplo 2.1.4. Com efeito,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(r\otimes a) &= r\otimes\sigma(a) = \epsilon(r_1)r_2\otimes\chi(a_1)a_2 = \epsilon(r_1)\chi(a_1)(r_2\otimes a_2) = \overline{\chi}((r\otimes a)_1)(r\otimes a)_2 \\ &= \tau^r_{\overline{\chi}}(r\otimes a). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}(r\otimes a) &= r\otimes\sigma(a) = r_1\epsilon(r_2)\otimes ga_1\chi(a_2)g^{-1} = (1\otimes g)(r_1\otimes a_1)\epsilon(r_2)\chi(a_2)(1\otimes g)^{-1}\\
&= (1\otimes g)(r\otimes a)_1\overline{\chi}((r\otimes a)_2)(1\otimes g)^{-1} = (1\otimes g)\tau^l_{\overline{\chi}}(r\otimes a)(1\otimes g)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Observemos que $(R\otimes A)_s = R_s\otimes k$. Logo,

$$\overline{\delta}((R\otimes A)_s) = \overline{\delta}(R_s\otimes k) = R_s\otimes\delta(k) = 0.$$

Também temos que

$$\epsilon((r\otimes a)\overline{\delta}(s\otimes b)) = \epsilon(rs\otimes a\delta(b)) = \epsilon(rs)\epsilon(a\delta(b)) = \epsilon(rs)\epsilon(a)\epsilon(\delta(b)) = \epsilon(rs)\epsilon(a)\cdot 0 = 0,$$

já que δ é uma g-coderivação da álgebra de Hopf A.

Para concluir a demonstração, vamos verificar agora que $(1\otimes g)S(r\otimes a)(1\otimes g)^{-1} = \overline{\sigma}S\overline{\sigma}(r\otimes a)$ e $(1\otimes g)S(\overline{\delta}(r\otimes a)) = \overline{\delta}S\overline{\sigma}(r\otimes a)$, para quaisquer $r\in R$ e $a\in A$. De fato, pois

$$
\begin{aligned}
(1\otimes g)S(r\otimes a)(1\otimes g)^{-1} &= S(r)\otimes gS(a)g^{-1} \overset{\text{Panov}}{=} S(r)\otimes\sigma S\sigma(a)\\
&= \overline{\sigma}(S(r)\otimes S(\sigma(a)) = \overline{\sigma}S(r\otimes\sigma(a)) = \overline{\sigma}S\overline{\sigma}(r\otimes a)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(1\otimes g)S(\overline{\delta}(r\otimes a)) &= (1\otimes g)S(r\otimes\delta(a)) = S(r)\otimes gS(\delta(a)) \overset{\text{Panov}}{=} S(r)\otimes\delta S\sigma(a)\\
&= \overline{\delta}(S(r)\otimes S(\sigma(a))) = \overline{\delta}S(r\otimes\sigma(a)) = \overline{\delta}S\overline{\sigma}(r\otimes a).
\end{aligned}
$$

Assim, aplicando o Teorema 2.3.14, obtemos que $(R\otimes A)[y;\overline{\sigma},\overline{\delta}]$ é uma extensão de Hopf-Ore fraca de $R\otimes A$.

Para o próximo exemplo vamos considerar G um grupo, $p\in\mathcal{Z}(G)$, $A=kG$ a álgebra de grupo, χ um caracter de G e δ dada por $\delta(g)=\alpha(g)(g-gp)$, onde α é uma forma linear de A que satisfaz $\alpha(gh)=\alpha(g)+\chi(g)\alpha(h)$. Ou seja, $A[x;\sigma,\delta]$ é uma extensão de Hopf-Ore de A. Este exemplo pode ser visto como um caso particular do exemplo anterior tomando $R=M_n(k)$ e $A=kG$, via $M_n(kG)\cong M_n(k)\otimes kG$.

Exemplo 2.3.16. *Consideremos a álgebra de Hopf fraca $R=M_n(kG)$, com a estrutura dada no Exemplo 1.2.12, $\overline{\sigma}:R\to R$, dado por $\overline{\sigma}(gE_{ij})=\sigma(g)E_{ij}$, $\overline{p}=\sum_{i=1}^n pE_{ii}$ e $\overline{\delta}:R\to R$, dada por $\overline{\delta}(gE_{ij})=\delta(g)E_{ij}$. Então, $R[x;\overline{\sigma},\overline{\delta}]$ é uma extensão de Hopf-Ore fraca de $R=M_n(kG)$, com x sendo um elemento $(\overline{p},1)$-primitivo fraco.*

Observação 2.3.17. *Com as notações do Teorema 2.3.14, se $\chi\circ S\circ\sigma=\epsilon$, então a condição $\mathrm{Ad}_g\circ S=\sigma\circ S\circ\sigma$ é satisfeita.*

De fato, como $\sigma = \tau_\chi^r = \mathrm{Ad}_g \circ \tau_\chi^l$, segue que

$$\sigma S(a) = \mathrm{Ad}_g \tau_\chi^l S(a) = \mathrm{Ad}_g(S(a_2))\chi(S(a_1)).$$

Assim, para todo $a \in R$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma S \sigma(a) &= \sigma S(\chi(a_1)a_2) = \chi(a_1)\sigma S(a_2) = \chi(a_1)\mathrm{Ad}_g(S(a_3))\chi(S(a_2)) \\
&= g\chi(a_1)S(a_3)\chi(S(a_2))g^{-1} = gS(a_3)\chi(S(\chi(a_1)a_2))g^{-1} \\
&= gS(a_2)\chi(S(\sigma(a_1)))g^{-1} = gS(\chi(S(\sigma(a_1)))a_2)g^{-1} \\
&= \mathrm{Ad}_g(S(\chi(S(\sigma(a_1)))a_2) = \mathrm{Ad}_g S(\epsilon(a_1)a_2) = \mathrm{Ad}_g S(a).
\end{aligned}$$

Para finalizar essa seção, vamos analisar o caso particular quando x é um elemento $(1,1)$-primitivo fraco (ou simplesmente, primitivo fraco). Note que um elemento primitivo em uma biálgebra é um elemento primitivo fraco. Vamos começar reescrevendo os principais lemas para esse caso.

Lema 2.3.18. *Seja R uma biálgebra fraca. Se $a \in R$ é um elemento primitivo fraco, então $\epsilon(Ra) = \epsilon(aR) = 0$.*

Demonstração: Segue do Lema 2.3.6, visto que $g = 1$, implica em $\epsilon_t(g) = \epsilon_t(1) = 1$. ■

Lema 2.3.19. *Seja R uma álgebra de Hopf fraca. Se $a \in R$ é um elemento primitivo fraco e $\epsilon_s(a) = 0$ ou $\epsilon_t(a) = 0$, então $S(a) = -a$.*

Demonstração: Segue do Lema 2.3.7, visto que $g = 1$, implica que $S(g) = 1$. ■

A seguir, vamos apresentar dois corolários do Teorema 2.3.14 para o caso em que x é um elemento primitivo fraco em $R[x; \sigma, \delta]$.

Corolário 2.3.20. *Sejam R uma biálgebra fraca, σ um automorfismo de R e δ uma σ-derivação de R, tal que $\delta(R_s) = 0$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) *$H = R[x; \sigma, \delta]$ tem uma estrutura de biálgebra fraca com R uma sub-biálgebra fraca de H e x um elemento primitivo fraco.*

(*b*) *$\sigma = \tau_\chi^l = \tau_\chi^r$, para algum caracter fraco χ de R, e δ é uma coderivação tal que $\epsilon(a\delta(b)) = 0$, para quaisquer $a, b \in R$.*

Nesse caso, $\epsilon(HxH) = 0$.

Corolário 2.3.21. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca com antípoda S, σ um automorfismo de R e δ uma σ-derivação. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(*a*) $H = R[x;\sigma,\delta]$ *é uma extensão de Hopf-Ore fraca de* R*, na qual* x *é um elemento primitivo fraco e* $\epsilon(HxH) = 0$*.*

(*b*) $\sigma = \tau^l_\chi = \tau^r_\chi$*, para algum caracter fraco* χ *de* R*;* δ *é uma coderivação de* R *tal que* $\delta(R_t) = 0$ *e* $\epsilon(a\delta(b)) = 0$*, para quaisquer* $a, b \in R$*;* $S = \sigma \circ S \circ \sigma$*;* $S \circ \delta = \delta \circ S \circ \sigma$*.*

Demonstração: Basta verificar que $\delta(R_t) = 0$ na demonstração de $(a) \Rightarrow (b)$. Como H é uma álgebra de Hopf fraca com x um elemento primitivo e $\epsilon(HxH) = 0$, segue que $\epsilon_s(x) = 1_1\epsilon(x1_2) = 0$ e, pelo Lema 2.3.19, segue que $S(x) = -x$. Assim, para todo $a \in R$ tem-se

$$\epsilon_s(a)x - x\epsilon_s(a) = S(a_1)a_2x + S(a_1x)a_2 = S((ax)_1)(ax)_2 = \epsilon_s(ax) = 1_1\epsilon(ax1_2) = 0.$$

Portanto, $\epsilon_s(a)x = x\epsilon_s(a)$. Logo, $\delta(\epsilon_s(a)) = 0$ e, pelo Lema 2.2.7, segue que $\delta(R_s) = \delta(R_t) = 0$. ■

Observação 2.3.22. *Do Lema 2.1.8 segue que a hipótese* $S = \sigma S \sigma$ *se verifica no caso que* $\sigma = \tau^l_\chi = \tau^r_\chi$ *e o inverso convolutivo de* χ *é dado por* $\chi \circ S$*. Note que se* R *é uma álgebra de Hopf e* χ *é um caracter de* R*, o inverso convolutivo de* χ *é de fato* $\chi \circ S$*.*

Observação 2.3.23. *Notemos que as condições* $\delta(R_t) = 0$*,* $\delta(R_s) = 0$ *e* $\epsilon(a\delta(b)) = 0$*, para quaisquer elementos* $a, b \in R$*, são trivialmente satisfeitas no caso em que* R *é uma álgebra de Hopf. De fato, nesse caso temos* $R_s = R_t = k$*, e assim* $\delta(k) = 0$*. Para a segunda condição temos que* $\epsilon(a\delta(b)) = \epsilon(a)\epsilon(\delta(b)) = 0$*, pelo fato que* ϵ *é multiplicativa e pelo Lema 2.2.6.*

Exemplo 2.3.24. *Retomando o Exemplo 1.2.16, temos que um endomorfismo de* $R = \widetilde{kG}$*, o qual satisfaz* $\sigma = \tau^l_\chi = \tau^r_\chi$*, só pode ser a identidade.*

De fato, segue pelo Lema 2.1.6 que as condições acima podem se reescritas como

$$(\mathrm{id} \otimes \sigma)\Delta = \Delta \circ \sigma = (\sigma \otimes \mathrm{id})\Delta.$$

Assim, para $1_G = 1_R \in R$, temos que $\Delta(\sigma(1_G)) = \Delta(1_G) = \frac{1}{N}\sum_h h \otimes h^{-1}$. Consequentemente, temos

$$(\mathrm{id} \otimes \sigma)\Delta(1_G) = \frac{1}{N}\sum_h h \otimes \sigma(h^{-1}).$$

Como G é uma k-base para R, segue que $\sigma(h) = h$, para qualquer $h \in G$, ou seja, σ é a identidade de R.

Exemplo 2.3.25. *Sejam* $R = M_n(kG)$ *e* $\chi : R \to k$*, dado por* $\chi(gE_{ij}) = q_{ij}\rho(g)$*, onde* $q_{ij} \in k$ *são constantes não-nulas e* ρ *é um caracter do grupo* G*, a álgebra de Hopf fraca e* *o caracter fraco dados no Exemplo 2.1.5, respectivamente. Então, $R[x;\sigma]$ é uma extensão de Hopf-Ore fraca de R, onde $\sigma(gE_{ij}) = gE_{ij}\chi(gE_{ij}) = \chi(gE_{ij})gE_{ij}$.*

De fato, pelo Corolário 2.3.21 basta verificar que $S = \sigma S \sigma$, já que $\delta = 0$. Agora, pela Observação 2.3.22, devemos verificar que o inverso de χ, na álgebra de convolução R^*, é dado por $\chi \circ S$. Com efeito,

$$\chi S(gE_{ij}) = \chi(g^{-1}E_{ji}) = q_{ji}\rho(g^{-1}) = q_{ij}^{-1}\rho(g)^{-1} = (q_{ij}\rho(g))^{-1} = \chi(gE_{ij})^{-1},$$

pois $q_{ij}^{-1} = q_{ji}$. Assim,

$$(\chi * \chi \circ S)(gE_{ij}) = \chi(gE_{ij})\chi(S(gE_{ij})) = \chi(gE_{ij})\chi(gE_{ij})^{-1} = 1 = \epsilon(gE_{ij}),$$

para todo $g \in G$, $1 \leq i, j \leq n$. Portanto, pelo Corolário 2.3.21 temos que $M_n(kG)[x;\sigma]$ tem uma estrutura de álgebra de Hopf fraca, e assim é uma extensão de Hopf-Ore fraca de $M_n(kG)$.

O exemplo acima nos mostra que para cada caracter do grupo G e cada elemento de $(k^{\times})^{n-1}$, podemos definir um automorfismo σ de $M_n(kG)$ e estender a estrutura de álgebra de Hopf fraca $M_n(kG)$ (uma álgebra de groupóide) à extensão de Ore $M_n(kG)[x;\sigma]$, com x sendo um elemento primitivo fraco.

Exemplo 2.3.26. *Seja $R = M_n(k)[x]$ a álgebra de Hopf fraca do Exemplo 1.2.14. Então, $H = R[y;\delta]$, com $\delta : R \to R$ dada por $\delta(E_{ij}x^m) = mE_{ij}x^m$, é uma extensão de Hopf-Ore fraca de R.*

De fato, vejamos que estamos nas condições do Corolário 2.3.21. Pelo Exemplo 2.2.5, temos que δ é uma derivação que também é uma coderivação. Vejamos as demais condições:

- $\epsilon(a\delta(b)) = 0, \forall a, b \in R$: Seja $q > 0$, então

$$\epsilon(E_{ij}x^p\delta(E_{jl}x^q)) = q\epsilon(E_{il}x^{p+q}) = 0;$$

- $S \circ \delta = \delta \circ S$:

$$\begin{aligned} S(\delta(E_{ij}x^p)) &= pS(E_{ij}x^p) = p(-1)^p E_{ji}x^p \\ &= \delta((-1)^p E_{ji}x^p) = \delta(S(E_{ij}x^p)); \end{aligned}$$

- $\delta(R_t) = 0$: Observemos que $a \in R_t$ se, e somente se, $\epsilon_t(a) = a$. Logo, um elemento

$a = E_{ij}x^p \in R$ está em R_t se, e somente se,

$$\begin{aligned} a &= \epsilon_t(a) = \epsilon(1_1 a)1_2 = \sum_l \epsilon(E_{ll}E_{ij}x^p)E_{ll} \\ &= \epsilon(E_{ij}x^p)E_{ii}, \end{aligned}$$

ou seja, $a = \lambda E_{ii}$, para algum $\lambda \in k$ e $1 \leq i \leq n$. Logo, se $a \in R_t$, então

$$\delta(a) = \delta(\lambda E_{ii}) = \lambda\delta(E_{ii}) = 0.$$

Portanto, $H = R[y;\delta] = M_n(k)[x][y;\delta]$ é uma álgebra de Hopf fraca com

$$\Delta(y) = \Delta(1)(1 \otimes y + y \otimes 1) = (1 \otimes y + y \otimes 1)\Delta(1), \qquad \epsilon(ry^m) = 0, \qquad S(y) = -y,$$

para todo $r \in R$ e $m > 0$.

Observemos que a álgebra do Exemplo anterior é $M_n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de dimensão 2 não-abeliana do Exemplo 1.1.11. De fato, pelo Teorema 1.1.8 temos que

$$M_n(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong M_n(k) \otimes k[x][y;\delta] \cong (M_n(k) \otimes k[x])[\overline{y};\overline{\delta}] \cong M_n(k[x])[\overline{y};\overline{\delta}].$$

O Exemplo a seguir não pode ser obtido através da construção da Proposição 2.0.2.

Exemplo 2.3.27. *Seja R a k-álgebra gerada por U e V sujeitos as relações $U^N = 1$ e $VU = qUV$, com V invertível e $q \in k$ tal que $q^N = 1$. Como visto no Exemplo 1.2.15, R possui estrutura de álgebra de Hopf fraca. Então $R[x;\sigma]$ é uma extensão de Hopf-Ore fraca onde $\sigma(U) = U$ e $\sigma(V) = UV$.*

De fato, observe que esta álgebra é isomorfa ao skew anel de polinômios de Laurent $k\langle U\rangle[V, V^{-1};\alpha]$, onde $\alpha(U) = qU$. Lembramos da propriedade universal do skew anel de polinômios de Laurent:

Sejam R um anel, $\beta \in \mathrm{Aut}(R)$ e $T = R[x^{\pm 1};\beta]$. Suponhamos que temos um anel A, $\phi : R \to A$ um homomorfismo de anéis e y é um elemento invertível de A tal que $y\phi(r) = (\phi \circ \beta)(r)y$, para todo $r \in R$. Então existe um único homomorfismo de anéis $\psi : T \to A$ tal que $\psi|_R \equiv \phi$ e $\psi(x) = y$.

Para o nosso exemplo, note que temos a inclusão de $k\langle U\rangle$ em R e o elemento UV satisfaz a condição da propriedade universal, pois

$$UVU = UqUV = qU^2V.$$

Então existe um único homomorfismo de anéis $\sigma : R \to R$ tal que $\sigma|_{k<U>}$ é a inclusão e $\sigma(V) = UV$. Claramente σ é um automorfismo de álgebras de R.

Vejamos que $(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\Delta(r))=\Delta(\sigma(r))=(\sigma\otimes\mathrm{id})(\Delta(r))$ para todo $r\in R$. Notemos que basta verificar essas igualdades para os elementos U,V. Como $\sigma(U)=U$, segue que $\Delta(\sigma(U))=\Delta(U)$. Por outro lado,

$$(\mathrm{id}\otimes\sigma)\Delta(U)=(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i+1}\otimes U^{-i})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i+1}\otimes U^{-i}=\Delta(U)$$

e

$$(\sigma\otimes\mathrm{id})\Delta(U)=(\sigma\otimes\mathrm{id})(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i+1}\otimes U^{-i})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i+1}\otimes U^{-i}=\Delta(U).$$

Para V temos que:

$$\begin{aligned}(\sigma\otimes\mathrm{id})\Delta(V) &= (\sigma\otimes\mathrm{id})(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i}V\otimes U^{-i}V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma(U^{i}V)\otimes U^{-i}V\\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i}UV\otimes U^{-i}V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i+1}V\otimes U^{-i}V\\ &\overset{(1.6)}{=} \Delta(UV)=\Delta(\sigma(V));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\sigma)\Delta(V) &= (\mathrm{id}\otimes\sigma)(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i}V\otimes U^{-i}V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i}V\otimes\sigma(U^{-i}V)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i}V\otimes U^{-i}UV=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i}V\otimes U^{-i+1}V\\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i+1}V\otimes U^{-i}V=\Delta(UV)=\Delta(\sigma(V)).\end{aligned}$$

Onde em $(*)$ reordenamos os termos do somatório. Mais ainda, temos que

$$(\sigma\circ S\circ\sigma)(U)=(\sigma\circ S)(U)=\sigma(U)=U=S(U)$$

e

$$(\sigma\circ S\circ\sigma)(V)=(\sigma\circ S)(UV)=\sigma(V^{-1}U)=(UV)^{-1}U=V^{-1}=S(V).$$

Portanto, pelo Corolário 2.3.21, segue que $R[x;\sigma]$ possui estrutura de álgebra de Hopf fraca com

$$\Delta(x)=\Delta(1)(1\otimes x+x\otimes 1)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U^{i}\otimes U^{-i}x+U^{i}x\otimes U^{-i},$$

onde $xU=Ux$ e $xV=\sigma(V)x=UVx$.

Capítulo 3

Extensões de Hopf-Ore fracas

Neste capítulo estaremos interessados em construir extensões de Ore com uma escolha mais geral para a imagem de x por Δ. Contudo, não foi possível obter resultados para o caso onde $\Delta(x)$ não sofre alguma restrição. Vamos seguir na direção de obter resultados análogos aos obtidos por Brown et al em [5]. Nesse artigo, os autores observam que para uma álgebra de Hopf A tal que $A \otimes A$ é um domínio, então a única possibilidade de escolha para $\Delta(x)$, em uma extensão de Ore $H = A[x; \sigma, \delta]$, é

$$\Delta(x) = \mathcal{A}(1 \otimes x) + \mathcal{B}(x \otimes 1) + \mathcal{C}(x \otimes x) + \mathcal{D}, \tag{3.1}$$

com $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in A \otimes A$.

Consideremos agora uma álgebra de Hopf fraca R. Não podemos assumir a hipótese que $R \otimes R$ é um domínio, pois $\Delta(1)$ é um idempotente de $R \otimes R$ e assim temos que, ou $\Delta(1) = 0$ (e com isso, Δ é a função nula) ou $\Delta(1) = 1$ (e então, R é álgebra de Hopf). Aqui vale observar que não é possível estender uma álgebra de Hopf A à uma álgebra de Hopf fraca $H = A[x; \sigma, \delta]$, visto que $\Delta_H(1) = \Delta_A(1)$.

O principal objetivo desse capítulo é obter condições para a existência de uma extensão de Hopf-Ore fraca com uma fórmula para $\Delta(x)$ um pouco mais geral que a feita no Capítulo 2. Devido a isso, começamos tentando construir as extensões de Ore de R de modo que Δ seja da forma dada em (3.1). Mesmo assim, vamos precisar impor mais alguma restrição. Observemos que se tentarmos estender R ao anel de polinômios $R[x]$ com tal expressão, temos que os coeficientes devem satisfazer

$$\mathcal{A} = \Delta(1)\mathcal{A}\Delta(1), \ \mathcal{B} = \Delta(1)\mathcal{B}\Delta(1), \ \mathcal{C} = \Delta(1)\mathcal{C}\Delta(1) \text{ e } \mathcal{D} = \Delta(1)\mathcal{D}\Delta(1),$$

pois sempre temos que $\Delta(x) = \Delta(1)\Delta(x)\Delta(1)$.

No Exemplo 1.2.11, caso em que $R = M_n(k)$, temos que se $\mathcal{A} = \sum_{i,j,r,s} a_{ij}^{rs} E_{ij} \otimes E_{rs}$

satisfaz $\mathcal{A} = \Delta(1)\mathcal{A}\Delta(1)$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \Delta(1)\mathcal{A}\Delta(1) \\
&= \sum_{p,i,j,r,s,q} a_{ij}^{rs} E_{pp}E_{ij}E_{qq} \otimes E_{pp}E_{rs}E_{qq} \\
&= \sum_{p,q} a_{pq}^{pq} E_{pq} \otimes E_{pq} \\
&= \Delta(\sum_{p,q} a_{pq}^{pq} E_{pq}) \in \mathrm{Im}(\Delta),
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos que $\mathcal{A} \in \mathrm{Im}(\Delta)$. O mesmo ocorre para $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in R \otimes R$.

No Exemplo 1.2.16, também temos que os coeficientes devem pertencer a imagem de Δ_R. De fato, se $a, b \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
\Delta(1)(a \otimes b)\Delta(1) &= \frac{1}{N}\sum_{h \in G}(h \otimes h^{-1})(a \otimes b)\frac{1}{N}\sum_{g \in G}(g \otimes g^{-1}) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{h,g \in G}(h \otimes h^{-1})(a \otimes b)(g \otimes g^{-1}) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{h,g \in G}(hag \otimes h^{-1}bg^{-1}) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{g,l \in G}(blag \otimes l^{-1}g^{-1}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l \in G}(bl \otimes l^{-1})\frac{1}{N}\sum_{g \in G}(ag \otimes g^{-1}) \\
&= \Delta(b)\Delta(a).
\end{aligned}$$

Logo, $a \otimes b = \Delta(1)(a \otimes b)\Delta(1) = \Delta(b)\Delta(a) = \Delta(ba) \in \mathrm{Im}(\Delta)$, para quaisquer $a, b \in G$.

Tendo em vista as observações acima, estaremos interessados em construir extensões de Ore de uma álgebra de Hopf fraca R, de modo que

$$\Delta(x) = \mathcal{A}(1 \otimes x) + \mathcal{B}(x \otimes 1) + \mathcal{C}(x \otimes x) + \mathcal{D},$$

com $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Im}(\Delta_R)$.

Nessa proposta, os resultados mais significativos foram encontrados no caso do skew anel de polinômios $R[x;\sigma]$ e no anel de operadores diferenciais $R[x;\delta]$, os quais serão apresentados na próxima seção.

3.1 Extensões para os casos $\sigma = \mathrm{id}$ ou $\delta = 0$

Sejam R uma biálgebra fraca, $\sigma \in \mathrm{Aut}(R)$ e $\delta : R \to R$ uma derivação de R. Nessa seção vamos estudar extensões de Ore quando a derivação é nula, isto é, o *skew anel de polinômios* $R[x;\sigma]$, e quando o automorfismo for a identidade, ou seja, o *anel de operadores diferenciais* $R[x;\delta]$.

Começamos pelo skew anel de polinômios. Nesse caso, os elementos de R satisfazem a seguinte identidade em $R[x;\sigma]$: $xr = \sigma(r)x, \forall r \in R$. Estaremos interessados em estender Δ a $R[x;\sigma]$ com

$$\Delta(x) = \mathcal{A}(1 \otimes x) + \mathcal{B}(x \otimes 1) + \mathcal{C}(x \otimes x) + \mathcal{D},$$

onde os coeficientes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Im}(\Delta)$. Ou seja, existem $a, b, c, d \in R$ tais que

$$\Delta(x) = \Delta(a)(1 \otimes x) + \Delta(b)(x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x) + \Delta(d).$$

Definição 3.1.1. *Sejam R uma biálgebra fraca e $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$. Diremos que um elemento $a \in R$ é α-comutativo se*

$$as = \alpha(s)a, \text{ para todo } s \in R.$$

Equivalentemente, $ra = a\alpha(r)$, para todo $r \in R$.

Observemos que, se a é um elemento σ-comutativo em $R[x;\sigma]$, então a satisfaz a mesma identidade que x.

Suponhamos que $c \in R_s$ seja um elemento σ-comutativo e que o automorfismo σ satisfaça as condições (i) e (ii) do Lema 2.1.6. Então obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma(r)c) &= \Delta(\sigma(r))\Delta(c) = \Delta(\sigma(r))\Delta(1)(1 \otimes c) \\
&= \Delta(1)\Delta(\sigma(r))(1 \otimes c) = \Delta(1)(\sigma(r_1) \otimes r_2)(1 \otimes c) \\
&= \Delta(1)(\sigma(r_1) \otimes r_2 c) = \Delta(1)(\sigma(r_1) \otimes c\sigma(r_2)) \\
&= \Delta(1)(1 \otimes c)(\sigma(r_1) \otimes \sigma(r_2)) = \Delta(c)(\sigma \otimes \sigma)(\Delta(r)).
\end{aligned}$$

Onde usamos na segunda igualdade que $c \in R_s$, na quarta o Lema 2.1.6 e na sexta o fato que c é σ-comutativo. Logo, temos que $\Delta(\sigma(r)c) = \Delta(c)(\sigma \otimes \sigma)(\Delta(r))$, para todo $r \in R$. Na verdade, nas hipóteses acima, a σ-comutatividade é equivalente a essa igualdade. De fato, se a igualdade se verifica, então

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma(r)c) &= \Delta(c)(\sigma \otimes \sigma)(\Delta(r)) \\
&= \Delta(c)(\sigma \otimes \mathrm{id})((\mathrm{id} \otimes \sigma)(\Delta(r))) \\
&= \Delta(c)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\Delta(\sigma(r))) \\
&= \Delta(c)\Delta(\sigma^2(r)) = \Delta(c\sigma^2(r)).
\end{aligned}$$

Logo, $\Delta(\sigma(r)c) = \Delta(c\sigma^2(r))$, para todo $r \in R$. Como Δ é injetiva, segue que $\sigma(r)c = c\sigma^2(r)$ ou, equivalentemente, $sc = c\sigma(s)$, para todo $s \in R$. Ou seja, c é σ-comutativo. Portanto temos o seguinte:

Lema 3.1.2. *Sejam R uma biálgebra fraca, σ um automorfismo de R satisfazendo os dois itens do Lema 2.1.6 e $c \in R_s$. Então*

$$c \in R \text{ é } \sigma\text{-comutativo se, e somente se, } \Delta(\sigma(r)c) = \Delta(c)(\sigma \otimes \sigma)(\Delta(r)), \ \forall r \in R.$$

O seguinte lema nos fornece as condições necessárias e suficientes para a coassociatividade de Δ, em uma extensão de Ore $R[x;\sigma,\delta]$, para uma determinada escolha de $\Delta(x)$.

Lema 3.1.3. *Sejam R uma biálgebra fraca e $T = R[x;\sigma,\delta]$. Se $\Delta : T \to T \otimes T$ é uma aplicação linear multiplicativa que satisfaz*

$$\Delta(x) = \Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x) \qquad e \qquad \Delta|_R \equiv \Delta_R,$$

então Δ satisfaz $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta \equiv (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$ se, e somente se, $c \in R_s \cap R_t$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que vale $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta \equiv (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$. Aplicando em x as funções acima obtemos

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x)) \\
&= \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1) \\
&+ \Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(c) \otimes 1)(x \otimes x \otimes 1) + \Delta^{\otimes 2}(c)(1 \otimes x \otimes x + x \otimes 1 \otimes x) \\
&+ \Delta^{\otimes 2}(c)(\Delta(c) \otimes 1)(x \otimes x \otimes x)
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(x)) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x)) \\
&= \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1) \\
&+ \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes \Delta(c))(1 \otimes x \otimes x) + \Delta^{\otimes 2}(c)(x \otimes 1 \otimes x + x \otimes x \otimes 1) \\
&+ \Delta^{\otimes 2}(c)(1 \otimes \Delta(c))(x \otimes x \otimes x).
\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos vetores linearmente independentes (sobre $R \otimes R \otimes R$) $x \otimes x \otimes 1$, $1 \otimes x \otimes x$ e $x \otimes x \otimes x$ temos que:

$$\Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(c) \otimes 1) = \Delta^{\otimes 2}(c) = \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes \Delta(c)); \tag{3.2}$$

$$\Delta^{\otimes 2}(c)(1 \otimes \Delta(c)) = \Delta^{\otimes 2}(c)(\Delta(c) \otimes 1). \tag{3.3}$$

Observemos que (3.3) segue de (3.2), pois

$$\begin{aligned} \Delta^{\otimes 2}(c)(1 \otimes \Delta(c)) &= \Delta^{\otimes 2}(c)\Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes \Delta(c)) \\ = \Delta^{\otimes 2}(c)\Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(c) \otimes 1) &= \Delta^{\otimes 2}(c)(\Delta(c) \otimes 1). \end{aligned}$$

A primeira igualdade de (3.2) nos diz que

$$\Delta^{\otimes 2}(c) = \Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(c) \otimes 1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)(\Delta(c) \otimes 1) = c_1 \otimes 1_1 c_2 \otimes 1_2.$$

Aplicando $(\epsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$ temos a equação: $\Delta(c) = 1_1 c \otimes 1_2 = \Delta(1)(c \otimes 1)$. Pelo Lema 1.2.2, isto é equivalente à $c \in R_t$.
A segunda igualdade de (3.2) nos diz que

$$\Delta^{\otimes 2}(c) = \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes \Delta(c)) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1))(1 \otimes \Delta(c)) = 1_1 \otimes 1_2 c_1 \otimes c_2.$$

Aplicando $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \epsilon)$ temos a equação: $\Delta(c) = 1_1 \otimes 1_2 c = \Delta(1)(1 \otimes c)$. Pelo Lema 1.2.2, isto é equivalente à $c \in R_s$. Assim, segue que $c \in R_t \cap R_s$.

($\Leftarrow$) Observe que $c \in R_t$ implica em

$$\Delta(c) = \Delta(1)(c \otimes 1) \Rightarrow \Delta^{\otimes 2}(c) = \Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(c) \otimes 1). \tag{3.4}$$

E, como $c \in R_s$, segue que

$$\Delta(c) = \Delta(1)(1 \otimes c) \Rightarrow \Delta^{\otimes 2}(c) = \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes \Delta(c)). \tag{3.5}$$

Como visto antes, as duas igualdades acima implicam em (3.3). Em posse desses resultados, mostremos que $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta \equiv (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$. Observe que basta mostrar que essa igualdade é válida quando aplicada em x, já que Δ é multiplicativa e em R a igualdade se verifica. Logo,

$$\begin{aligned}
& (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) \\
= \quad & \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1) + \Delta^{\otimes 2}(1)(\Delta(c) \otimes 1)(x \otimes x \otimes 1) \\
+ \quad & \Delta^{\otimes 2}(c)(1 \otimes x \otimes x + x \otimes 1 \otimes x) + \Delta^{\otimes 2}(c)(\Delta(c) \otimes 1)(x \otimes x \otimes x) \\
\overset{(3.4)}{=} \quad & \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1) + \Delta^{\otimes 2}(c)(x \otimes x \otimes 1) \\
+ \quad & \Delta^{\otimes 2}(c)(1 \otimes x \otimes x) + \Delta^{\otimes 2}(c)(x \otimes 1 \otimes x) + \Delta^{\otimes 2}(c)(\Delta(c) \otimes 1)(x \otimes x \otimes x) \\
\overset{(3.5)}{=} \quad & \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1) + \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes \Delta(c))(1 \otimes x \otimes x) \\
+ \quad & \Delta^{\otimes 2}(c)(x \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes x) + \Delta^{\otimes 2}(c)(\Delta(c) \otimes 1)(x \otimes x \otimes x) \\
\overset{(3.3)}{=} \quad & \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1) + \Delta^{\otimes 2}(1)(1 \otimes \Delta(c))(1 \otimes x \otimes x) \\
+ \quad & \Delta^{\otimes 2}(c)(x \otimes 1 \otimes x + x \otimes x \otimes 1) + \Delta^{\otimes 2}(c)(1 \otimes \Delta(c))(x \otimes x \otimes x) \\
= \quad & (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(x).
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. ■

Antes de apresentar o resultado principal para o skew anel de polinômios, vamos demonstrar um lema que será necessário para mostrar a condição fraca da counidade.

Lema 3.1.4. *Sejam R uma biálgebra fraca e $R \subset T$ uma extensão de R. Se $\Delta : T \to T \otimes T$ é um homomorfismo de álgebras, não necessariamente unitário, o qual estende a comultiplicação de R, então para qualquer homomorfismo de álgebras, não necessariamente unitário, $\varphi : T \to R$ satisfazendo $\Delta \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi)\Delta$, a função $\overline{\epsilon} = \epsilon \circ \varphi : T \to k$ satisfaz*

$$\overline{\epsilon}(abc) = \overline{\epsilon}(ab_1)\overline{\epsilon}(b_2c) = \overline{\epsilon}(ab_2)\overline{\epsilon}(b_1c), \ \forall a, b, c \in T.$$

Assim, a função $\overline{\epsilon}$ satisfaz o axioma (c) da Definição 1.2.1.

Demonstração: A condição $\Delta \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi)\Delta$ significa que $\varphi(a)_1 \circ \varphi(a)_2 = \varphi(a_1) \otimes \varphi(a_2)$, para todo $a \in T$. Assim, usando que φ é homomorfismo de álgebras e que ϵ é uma counidade fraca, temos para quaisquer $a, b, c \in T$:

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon}(abc) &= \epsilon(\varphi(abc)) = \epsilon(\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)) = \epsilon(\varphi(a)\varphi(b)_1)\epsilon(\varphi(b)_2\varphi(c)) \\ &= \epsilon(\varphi(a)\varphi(b_1))\epsilon(\varphi(b_2)\varphi(c)) = \epsilon(\varphi(ab_1))\epsilon(\varphi(b_2c)) = \overline{\epsilon}(ab_1)\overline{\epsilon}(b_2c). \end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-se que $\overline{\epsilon}(abc) = \overline{\epsilon}(ab_2)\overline{\epsilon}(b_1c)$. ■

Teorema 3.1.5. *Sejam R uma biálgebra fraca e σ um automorfismo de R. Então, a extensão $R[x;\sigma]$ é uma biálgebra fraca com Δ, σ e ϵ satisfazendo:*

$$(\sigma \otimes \mathrm{id})(\Delta(1)) = \Delta(1) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)(\Delta(1)), \tag{3.6}$$

$$\Delta(x) = \Delta(a)(1 \otimes x) + \Delta(b)(x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x) + \Delta(d) \tag{3.7}$$

$$e \ \ \epsilon(Rx) = 0 \tag{3.8}$$

se, e somente se,

$$a = b = 1, \ d = 0, \tag{3.9}$$

$$c \in R_s \cap R_t \text{ e } c \text{ é } \sigma\text{-comutativo}, \tag{3.10}$$

$$e \ \sigma = \tau^l_\chi = \tau^r_\chi, \text{ para algum caracter fraco } \chi. \tag{3.11}$$

Nesse caso, $R[x;\sigma]$ é uma biálgebra fraca com $\Delta(x) = \Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x)$.

Demonstração: Suponhamos que $R[x;\sigma]$ seja uma biálgebra fraca como descrita acima. Temos que $\epsilon : R[x;\sigma] \to k$ satisfaz $\epsilon(rx) = 0$, para todo $r \in R$, assim segue que $\epsilon(rx^n) =$

$\epsilon(rx^{n-1}1_2)\epsilon(1_1x) = 0$, para todo $n \geq 1$ e $r \in R$. Notemos que se $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x;\sigma]$, então $\epsilon_{R[x;\sigma]}(f) = \epsilon_R(f(0))$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} x &= (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta(x) = a_1\epsilon(a_2x) + b_1x\epsilon(b_2) + c_1x\epsilon(c_2x) + d_1\epsilon(d_2) \\ &= bx + d \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= (\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(x) = \epsilon(a_1)a_2x + \epsilon(b_1x)b_2 + \epsilon(c_1x)c_2x + \epsilon(d_1)d_2 \\ &= ax + d. \end{aligned}$$

Ou seja, temos que $b = 1 = a$ e $d = 0$. Assim,

$$\Delta(x) = \Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x).$$

Como Δ é coassociativa, segue que $c \in R_t \cap R_s$, pelo Lema 3.1.3.

Como $\Delta : R[x;\sigma] \to R[x;\sigma] \otimes R[x;\sigma]$ é a comultiplicação de $R[x;\sigma]$ e satisfaz

$$\Delta(x) = \Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x),$$

com $c \in R_s \cap R_t$, segue que

$$\Delta(xr - \sigma(r)x) = 0 \Leftrightarrow \Delta(\sigma(r))\Delta(x) = \Delta(x)\Delta(r),$$

para todo $r \in R$. Por um lado temos

$$\Delta(\sigma(r))(\Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x)) = \Delta(\sigma(r))(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(\sigma(r)c)(x \otimes x)$$

e, por outro lado,

$$\Delta(x)\Delta(r) = \Delta(1)(r_1 \otimes xr_2 + xr_1 \otimes r_2) = \Delta(1)(r_1 \otimes \sigma(r_2)x + \sigma(r_1)x \otimes r_2).$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma(r)) &= \Delta(1)(r_1 \otimes \sigma(r_2)) = \Delta(1)(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\Delta(r)); \\ \Delta(\sigma(r)) &= \Delta(1)(\sigma(r_1) \otimes r_2) = \Delta(1)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\Delta(r)); \\ \Delta(\sigma(r)c) &= \Delta(c)(\sigma(r_1) \otimes \sigma(r_2)) = \Delta(c)(\sigma \otimes \sigma)(\Delta(r)). \end{aligned}$$

Como $(\sigma\otimes \mathrm{id})(\Delta(1))=\Delta(1)=(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\Delta(1))$, temos que

$$\Delta(1)(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\Delta(r))=(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\Delta(1))(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\Delta(r))=(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\Delta(r))$$

e

$$\Delta(1)(\sigma\otimes\mathrm{id})(\Delta(r))=(\sigma\otimes\mathrm{id})(\Delta(1))(\sigma\otimes\mathrm{id})(\Delta(r))=(\sigma\otimes\mathrm{id})(\Delta(r)).$$

Logo,

$$(\sigma\otimes\mathrm{id})(\Delta(r))=(\Delta\circ\sigma)(r)=(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\Delta(r)); \tag{3.12}$$

$$\Delta(\sigma(r)c)=\Delta(c)(\sigma\otimes\sigma)(\Delta(r)),\ \forall r\in R. \tag{3.13}$$

Portanto, pelo Lema 2.1.6 e por (3.12) temos que $\sigma=\tau^l_\chi=\tau^r_\chi$, para algum caracter fraco χ, e por (3.13) temos que c é σ-comutativo.

Reciprocamente, vejamos que as condições (3.9), (3.10) e (3.11) implicam que $R[x;\sigma]$ é uma biálgebra fraca com

$$\Delta(x)=\Delta(1)(1\otimes x+x\otimes 1)+\Delta(c)(x\otimes x),\qquad \epsilon(Rx)=0$$

e σ satisfaz a condição (3.6).

Começamos observando que o elemento $y=\Delta(1)(1\otimes x+x\otimes 1)+\Delta(c)(x\otimes x)$ satisfaz a relação de propriedade universal da extensão de Ore em $R[x;\sigma]$: $y\phi(r)=\phi(\sigma(r))y$, onde ϕ é dada pela composição de Δ_R com a inclusão de $R\otimes R$ em $R[x;\sigma]\otimes R[x;\sigma]$. De fato, nesse caso a relação se torna $y\Delta(r)=\Delta(\sigma(r))y$ e assim, como visto acima, Δ satisfazer essa relação é equivalente a (3.12) e (3.13). Logo, por (3.10) e (3.11) segue que Δ está bem definida e é multiplicativa. Mais ainda, (3.11) implica que σ satisfaz a condição (3.6).

Por (3.10) estamos na condição do Lema 3.1.3, ou seja, Δ é coassociativa.

Defina $\epsilon_{R[x;\sigma]}:R[x;\sigma]\to k$ por $\epsilon_{R[x;\sigma]}(rx^n)=0$, para todo $r\in R$, $n>0$ e $\epsilon_{R[x;\sigma]}(r)=\epsilon(r)$, para todo $r\in R$. A seguir vamos omitir o índice $R[x;\sigma]$ de ϵ por não haver perigo de confusão. Para mostrar os axiomas da counidade, começamos observando que basta verifica-los para $rx^n, n\geq 1$. Note que $\Delta(rx^n)=\Delta(r)\Delta(x)^n$ e, por $c\in R_s$, segue pelo Lema 1.2.2 que podemos escrever

$$\Delta(x)=\Delta(1)(1\otimes x+x\otimes(1+cx)).$$

Observemos que o fato de $\sigma=\tau^l_\chi=\tau^r_\chi$ implica que $xr=rx$, para qualquer elemento $r\in R_s\cup R_t$. Em particular, temos que $xc=cx$. Mais ainda, como c é σ-comutativo segue que $cr=rc$, para todo $r\in R_s\cup R_t$. Logo,

$$\Delta(1)(1\otimes x+x\otimes(1+cx))=(1\otimes x+x\otimes(1+cx))\Delta(1).$$

Com as observações acima também segue que

$$(1 \otimes x)(x \otimes (1 + cx)) = (x \otimes (1 + cx))(1 \otimes x)$$

e, portanto, podemos usar a fórmula do binômio de Newton para $\Delta(x)^n$:

$$\begin{aligned}
\Delta(x)^n &= [\Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes (1 + cx))]^n = \Delta(1)^n(1 \otimes x + x \otimes (1 + cx))^n \\
&= \Delta(1) \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (1 \otimes x)^{n-l}(x \otimes (1 + cx))^l \\
&= \Delta(1) \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (1 \otimes x^{n-l})(x^l \otimes (1 + cx)^l) \\
&= \Delta(1) \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l \otimes x^{n-l}(1 + cx)^l \\
&= \Delta(1) \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l \otimes x^{n-l} \left(\sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (cx)^i \right) \\
&= \Delta(1) \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} x^l \otimes c^i x^{n-l+i}.
\end{aligned}$$

Vejamos agora que valem os axiomas da counidade:

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(rx^n)) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \epsilon(r_1 x^l) r_2 c^i x^{n-l+i} = \epsilon(r_1) r_2 c^0 x^n = rx^n;$$

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon)(\Delta(rx^n)) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} r_1 x^l \epsilon(r_2 c^i x^{n-l+i}) = r_1 x^n \epsilon(r_2 c^0) = rx^n.$$

Finalmente, vejamos que vale o terceiro axioma da counidade:

$$\epsilon(fg_1)\epsilon(g_2h) = \epsilon(fgh) = \epsilon(fg_2)\epsilon(g_1h), \forall f, g, h \in R[x; \sigma].$$

Para isso usaremos o Lema 3.1.4, visto que $\epsilon_{R[x;\sigma]} = \epsilon_R \circ \varphi$, onde $\varphi : R[x; \sigma] \to R$ é dada por $\varphi(f) = f(0)$. Ou seja, basta verificar que $(\varphi \otimes \varphi)\Delta \equiv \Delta \circ \varphi$. Como φ e Δ são homomorfismos de álgebras, basta verificar a igualdade acima para o elemento x, visto que ela é verdadeira quando restrita à R (nesse caso $\varphi = \mathrm{id}_R$).

$$(\Delta \circ \varphi)(x) = \Delta(0) = 0.$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi\otimes\varphi)\Delta(x) &= (\varphi\otimes\varphi)(\Delta(1)(1\otimes x + x\otimes 1)+\Delta(c)(x\otimes x))\\
&= \varphi(1_1)\otimes\varphi(1_2x)+\varphi(1_1x)\otimes\varphi(1_2)+\varphi(c_1x)\otimes\varphi(c_2x)\\
&= \varphi(1_1)\otimes 0 + 0\otimes\varphi(1_2)+0\otimes 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Concluímos assim a demonstração do teorema. ■

Observação 3.1.6. *Se σ é um automorfismo interno dado por $u\in\mathcal{U}(R)$, então um elemento $v\in R$ é σ-comutativo se, e somente se, $vu\in\mathcal{Z}(R)$. De fato, $rv = v\sigma(r) = vuru^{-1} \Leftrightarrow r(vu) = (vu)r$, para todo $r\in R$, ou seja, $vu\in\mathcal{Z}(R)$. No caso que $\mathcal{Z}(R)=k$, temos que $v=\lambda u^{-1}$, para algum $\lambda\in k$.*

Observação 3.1.7. *Suponha que $\{v_1,v_2,\cdots,v_N\}$ é uma k-base de R tal que $\Delta(v_i) = v_i\otimes v_i$. Assim, existem escalares $\lambda_i\in k$ tais que $1=\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i v_i$. Logo, σ satisfaz a condição $\Delta(1) = (\mathrm{id}\otimes\sigma)(\Delta(1))$ se, e somente se,*

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(v_i\otimes v_i) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(v_i\otimes\sigma(v_i)).$$

Como $\{v_i\}$ é base, segue que $\sigma(v_i)=v_i$ para qualquer i tal que $\lambda_i\neq 0$. Agora, se σ é interno, dado por u, temos que $uv_iu^{-1}=v_i\Leftrightarrow uv_i=v_iu$ para qualquer i tal que $\lambda_i\neq 0$.

Seja $R=M_n(k)$. Lembramos que os automorfismos de R são todos internos. Vamos usar as observações acima para determinar a forma do automorfismo σ e do elemento $c\in R_s\cap R_t$ que satisfazem as condições do Teorema 3.1.5.

Exemplo 3.1.8. *Sejam $R=M_n(k)$ e $\sigma\in\mathrm{Aut}(R)$ dado pela matriz invertível u, isto é, $\sigma(r)=uru^{-1}$. Pelas observações acima, a matriz u que determina σ deve satisfazer $uE_{ii}=E_{ii}u$, para todo i, ou seja, u deve ser diagonal. De fato, seja $u=\sum u_{kl}E_{kl}$. Logo*

$$\sum u_{kl}E_{kl}E_{ii} = \sum u_{kl}E_{ii}E_{kl} \Rightarrow \sum u_{ki}E_{ki} = \sum u_{il}E_{il} \Rightarrow u_{kl}=0, \qquad \forall k\neq l.$$

Portanto, $\sigma(r)=uru^{-1}$, para uma matriz diagonal invertível u, e o elemento $c\in R_s\cap R_t$ deve ter a forma λu^{-1}, para algum $\lambda\in k$.

Seja R uma biálgebra fraca. Consideremos agora o anel de operadores diferenciais $R[x;\delta]$. Assim temos que os elementos de R satisfazem a seguinte igualdade em $R[x;\delta]$: $xr = rx+\delta(r), \forall r\in R$. Prosseguiremos esta seção estudando as condições sob as quais podemos estender Δ à $R[x;\delta]$ com

$$\Delta(x)=\Delta(a)(1\otimes x)+\Delta(b)(x\otimes 1)+\Delta(c)(x\otimes x)+\Delta(d),\ \text{onde } a,b,c,d\in R.$$

Observemos que $\delta(R_s) = 0$ é equivalente a $\delta(1_1) \otimes 1_2 = 0$. De fato, claramente $\delta(R_s) = 0$ implica em $\delta(1_1) \otimes 1_2 = 0$, visto que $\Delta(1) \in R_s \otimes R_t$. Reciprocamente, se $\delta(1_1) \otimes 1_2 = 0$, então

$$0 = (\mathrm{id}\otimes\epsilon)((1\otimes a)(\delta(1_1)\otimes 1_2)) = (\mathrm{id}\otimes\epsilon)(\delta(1_1)\otimes a1_2) = \delta(1_1)\epsilon(a1_2) = \delta(1_1\epsilon(a1_2)) = \delta(\epsilon_s(a)),$$

para todo $a \in R$. Logo $\delta(R_s) = 0$. De forma análoga, também temos que $\delta(R_t) = 0$ é equivalente a $1_1 \otimes \delta(1_2) = 0$.

Nesse contexto, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.9. *Sejam R uma biálgebra fraca e δ uma derivação de R tal que $\delta(R_s) = \delta(R_t) = 0$ e $\epsilon(r\delta(s)) = 0$ para quaisquer $r, s \in R$. Então, $H = R[x;\delta]$ é uma biálgebra fraca com*

$$\Delta(x) = \Delta(a)(1 \otimes x) + \Delta(b)(x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x) + \Delta(d) \qquad e \qquad \epsilon(Rx) = 0$$

se, e somente se,

$$a = b = 1,\ d = 0,\ c \in R_s \cap R_t \cap \mathcal{Z}(R); \tag{AO1}$$

$$\Delta(c)(\delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(r)) = 0 = \Delta(c)(\mathrm{id} \otimes \delta)(\Delta(r)); \tag{AO2}$$

$$\Delta(\delta(r)) = \Delta(1)(r_1 \otimes \delta(r_2) + \delta(r_1) \otimes r_2) + \Delta(c)(\delta(r_1) \otimes \delta(r_2)). \tag{AO3}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Temos que:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \Delta(a)(1 \otimes x) + \Delta(b)(x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x) + \Delta(d) \\ &= a_1 \otimes a_2x + b_1x \otimes b_2 + c_1x \otimes c_2x + d_1 \otimes d_2. \end{aligned}$$

Por hipótese temos que $\epsilon : R[x;\delta] \to k$ satisfaz $\epsilon(rx) = 0$, para todo $r \in R$. Assim, $\epsilon(rx^n) = \epsilon(rx^{n-1}1_1)\epsilon(1_2x) = 0$, para todo $n \geq 1$ e $r \in R$. Dessa forma, como no Teorema 3.1.5, temos que: $b = 1 = a$ e $d = 0$. Assim,

$$\Delta(x) = \Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x). \tag{3.14}$$

Como Δ é coassociativa, pelo Lema 3.1.3, segue que $c \in R_s \cap R_t$. Para mostrar que $c \in \mathcal{Z}(R)$, começamos observando que $\Delta(xr) = \Delta(rx + \delta(r))$ ou, equivalentemente,

$$\Delta(x)\Delta(r) = \Delta(r)\Delta(x) + \Delta(\delta(r)), \forall r \in R,$$

pois Δ dada por (3.14) é a comultiplicação em $R[x;\delta]$. Analisando essa última igualdade, o lado direito produz

$$\Delta(r)\Delta(x) + \Delta(\delta(r)) = \Delta(r)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(rc)(x \otimes x) + \Delta(\delta(r)),$$

enquanto o lado esquerdo nos dá

$$\begin{aligned}
\Delta(x)\Delta(r) &= \Delta(1)(1\otimes x + x\otimes 1)\Delta(r) + \Delta(c)(x\otimes x)\Delta(r)\\
&= \Delta(1)(r_1\otimes xr_2 + xr_1\otimes r_2) + \Delta(c)(xr_1\otimes xr_2)\\
&= \Delta(1)(r_1\otimes r_2x + r_1\otimes \delta(r_2) + r_1x\otimes r_2 + \delta(r_1)\otimes r_2)\\
&+ \Delta(c)(r_1x\otimes r_2x + r_1x\otimes \delta(r_2) + \delta(r_1)\otimes r_2x + \delta(r_1)\otimes \delta(r_2))\\
&= [(\Delta(r) + \Delta(c)(\delta\otimes \mathrm{id})(\Delta(r))](1\otimes x)\\
&+ [(\Delta(r) + \Delta(c)(\mathrm{id}\otimes \delta)(\Delta(r))](x\otimes 1)\\
&+ \Delta(cr)(x\otimes x) + \Delta(1)(r_1\otimes \delta(r_2) + \delta(r_1)\otimes r_2) + \Delta(c)(\delta\otimes\delta)(\Delta(r)).
\end{aligned}$$

Assim, devemos ter, para todo $r\in R$:

$$\Delta(c)(\delta\otimes \mathrm{id})(\Delta(r)) = 0 = \Delta(c)(\mathrm{id}\otimes \delta)(\Delta(r)); \tag{3.15}$$

$$\Delta(rc) = \Delta(cr); \tag{3.16}$$

$$\Delta(\delta(r)) = \Delta(1)(r_1\otimes \delta(r_2) + \delta(r_1)\otimes r_2) + \Delta(c)(\delta(r_1)\otimes \delta(r_2)). \tag{3.17}$$

Da injetividade de Δ segue que (3.16) é equivalente a $c\in \mathcal{Z}(R)$.

($\Leftarrow$) Devemos mostrar que $R[x;\delta]$ é uma biálgebra fraca com

$$\Delta(x) = \Delta(1)(1\otimes x + x\otimes 1) + \Delta(c)(x\otimes x) \;\text{ e } \epsilon(Rx) = 0.$$

Nesse caso, para estender a comultiplicação de R, devemos ter que o elemento $y = \Delta(x)$ desejado deve satisfazer $y\Delta(r) = \Delta(r)y + \Delta(\delta(r))$, para todo $r\in R$. Pela argumentação feita acima, essa igualdade é equivalente a (3.15), (3.16) e (3.17). Assim, por (AO2), (AO3) e do fato que $c\in\mathcal{Z}(R)$, segue que existe um único homomorfismo de álgebras Δ que estende Δ_R à $R[x;\delta]$ tal que $\Delta(x) = \Delta(1)(1\otimes x + x\otimes 1) + \Delta(c)(x\otimes x)$. A coasociatividade de Δ segue do Lema 3.1.3, visto que $c\in R_s\cap R_t$ (AO1).

Defina $\epsilon_{R[x;\delta]} : R[x;\delta]\to k$ por $\epsilon_{R[x;\delta]}(rx^n) = 0$, para todo $r\in R, n>0$ e $\epsilon_{R[x;\delta]}(r) = \epsilon(r)$, para todo $r\in R$. A seguir vamos omitir o índice $R[x;\delta]$ de ϵ por não haver perigo de confusão. Para mostrarmos que ϵ assim definida satisfaz os axiomas da counidade, começamos observando que basta verifica-los para rx^n com $n\geq 1$. A hipótese $\delta(R_s) = \delta(R_t) = 0$ nos fornece $xr = rx$ para todo $r\in R_s\cup R_t$, em particular $xc = cx$. Escrevendo $\Delta(c) = \Delta(1)(1\otimes c)$, temos que $\Delta(x) = \Delta(1)(1\otimes x + x\otimes (1+cx))$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
(1\otimes x + x\otimes (1+cx))\Delta(1) &= 1_1\otimes x1_2 + x1_1\otimes 1_2 + x1_1\otimes cx1_2\\
&= 1_1\otimes 1_2x + 1_1x\otimes 1_2 + 1_1x\otimes 1_2cx\\
&= \Delta(1)(1\otimes x + x\otimes (1+cx)) = \Delta(x).
\end{aligned}$$

Também temos que $(1 \otimes x)(x \otimes (1+cx)) = (x \otimes (1+cx))(1 \otimes x)$. Portanto, podemos escrever a expressão para $\Delta(rx^n)$ usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.1.5, ou seja,

$$\Delta(rx^n) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} r_1 x^l \otimes r_2 c^i x^{n-l+i}.$$

Como ϵ está definida da mesma forma que no Teorema 3.1.5, segue que

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(rx^n)) = rx^n = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)(\Delta(rx^n)).$$

Finalmente, verifiquemos a validade do axioma

$$\epsilon(fg_1)\epsilon(g_2h) = \epsilon(fgh) = \epsilon(fg_2)\epsilon(g_1h), \forall f, g, h \in R[x;\delta].$$

Observe que basta verifica-lo para $f = ax^m$, $g = rx^n$ e $h = d \in R$, pois $\epsilon(fgdx^l) = 0$ e $\epsilon(fg_1)\epsilon(g_2dx^l) = 0$, sempre que $l > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \epsilon(ax^m rx^n d) &= \epsilon(ax^m r \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^{n-i}(d) x^i) = \epsilon(ax^m r \delta^n(d)) \\ &= \epsilon(a \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \delta^{m-i}(r\delta^n(d)) x^i) = \epsilon(a\delta^m(r\delta^n(d))) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \epsilon(ax^m(rx^n)_1)\epsilon((rx^n)_2 d) &= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \epsilon(ax^m r_1 x^l)\epsilon(r_2 c^i x^{n-l+i} d) \\ &= \epsilon(ax^m r_1)\epsilon(r_2 x^n d) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \epsilon(a\delta^{m-i}(r_1)x^i)\epsilon(r_2\delta^{n-j}(d)x^j) \\ &= \epsilon(a\delta^m(r_1))\epsilon(r_2\delta^n(d)) = 0. \end{aligned}$$

Com isso concluímos que $\epsilon(fg_1)\epsilon(g_2h) = \epsilon(fgh)$. A outra igualdade segue de forma análoga. Isso conclui a demonstração do teorema. ■

Vamos finalizar esta seção analisando essas extensões no caso em que R é uma álgebra de Hopf fraca. Começamos com o seguinte:

Lema 3.1.10. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca, σ um automorfismo de R e δ uma σ-derivação tais que σ é R_s-linear e $\delta(R_s) = 0$. Suponha que $H = R[x;\sigma,\delta]$ é uma extensão* *de Hopf-Ore fraca com*

$$\Delta(x) = \Delta(1)(1 \otimes x + x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x) \qquad e \qquad \epsilon(xR) = 0,$$

onde $c \in R_s$ e é central em R_s. Então $c = 0$.

Demonstração: Como $\epsilon(xR) = 0$ segue que $\epsilon_s(x) = 1_1\epsilon(x1_2) = 0$. Logo,

$$0 = \epsilon_s(x) = S(x_1)x_2 = S(1_1)1_2x + S(1_1x)1_2 + S(c_1x)c_2x = x + S(x) + S(x)cx.$$

Por hipótese $c \in R_s$, de onde segue que $cx = xc$. Se $S(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, então

$$-x = \sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=0}^m a_i c x^{i+1} = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1}c)x^i + a_m c x^{m+1}.$$

Assim, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_i = -a_{i-1}c$, para quaisquer $1 < i \leq m$, e $a_m c = 0$. Ou seja, $(-1)^m c^{m-1} = 0$, isto é, c é um elemento nilpotente e central da álgebra semissimples R_s (veja [4, Proposition 2.11]). Portanto $c = 0$. ■

A partir do lema acima, dos Teoremas 3.1.5 e 3.1.9 e do Corolário 2.3.21, temos os seguintes resultados:

Corolário 3.1.11. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca e σ um automorfismo de R. Então, a extensão $R[x;\sigma]$ é uma álgebra de Hopf fraca com*

$$\Delta(x) = \Delta(a)(1 \otimes x) + \Delta(b)(x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x) + \Delta(d), \qquad \epsilon(xR) = 0$$

e $(\sigma \otimes \mathrm{id})(\Delta(1)) = \Delta(1) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)(\Delta(1))$ se, e somente se,

$$a = b = 1, \ c = d = 0$$

e σ satisfaz as condições do Corolário 2.3.21, isto é, $\sigma = \tau_\chi^l = \tau_\chi^r$, para algum caracter fraco χ e $S = \sigma \circ S \circ \sigma$.

Corolário 3.1.12. *Sejam R uma álgebra de Hopf fraca e δ uma derivação de R. Então, $H = R[x;\delta]$ é uma álgebra de Hopf fraca com*

$$\Delta(x) = \Delta(a)(1 \otimes x) + \Delta(b)(x \otimes 1) + \Delta(c)(x \otimes x) + \Delta(d) \qquad e \qquad \epsilon(xR) = 0$$

se, e somente se,

$$a = b = 1, \ c = d = 0$$

e δ satisfaz as condições do Corolário 2.3.21, isto é, δ é uma coderivação de R tal que $\delta(R_t) = 0$, $\epsilon(a\delta(b)) = 0$, para quaisquer $a, b \in R$ e $S \circ \delta = \delta \circ S$.

Finalizamos observando que, mesmo nesse contexto um pouco mais geral para a escolha da imagem de x por Δ, não conseguimos obter novas extensões de Hopf-Ore fracas, visto que o elemento x acaba por ser um elemento primitivo fraco, como o caso tratado no final do Capítulo 2.

Referências Bibliográficas

[1] BEATTIE, M., DĂSCĂLESCU, S., GRÜNENFELDER, L. On the number of types of finite dimensional Hopf algebras. **Inventiones mathematicae**, v. 136, p. 1-7, 1999.

[2] ____________, Constructing pointed Hopf algebras by Ore extensions. **Journal of Algebra**, v. 225, p. 743-770, 2000.

[3] BÖHM, G., GÓMEZ-TORRECILLAS, J. On the Double Crossed Product of Weak Hopf Algebras. **AMS Contemporary Mathematics**, v. 585, p. 153-174, 2013.

[4] BÖHM, G., NILL, F., SZLACHÁNYI, K. Weak Hopf Algebras I. Integral Theory and C*-Structure. **Journal of Algebra**, v. 221, p. 385-438, 1999.

[5] BROWN, K.A., O'HAGAN S., ZHANG J.J., ZHUANG G. Connected Hopf algebras and iterated Ore extensions. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 219, p. 2405-2433, 2015.

[6] BRZEZINSKI, T., WISBAUER, R. **Corings and Comodules**, London Mathematical Society Lecture Note Series 309, 2003.

[7] DĂSCĂLESCU, S., NĂSTĂSECCU, C., RAIANU, S. **Hopf Algebras**: an introduction, New York: Marcel Dekker, 2001.

[8] DOI, Y. Homological Coalgebra. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 33, n. 1, p. 31-50, 1981.

[9] ERDMANN, K., WILDON. M. J. **Introduction to Lie algebras**, London: Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, 2006.

[10] ETINGOF, P., NIKSHYCH, D., OSTRIK, V. On fusion categories. **Annals of Mathematics**, v. 162, p. 581-642, 2005.

[11] GOODEARL, K. R., WARFIELD JR., R. B. **An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings**, New York: London Mathematical Society Student Texts 61, Cambridge University Press, 2004.

[12] HUNGERFORD, T. W. **Algebra**, New York: Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1974.

[13] KASSEL, C. **Quantum Groups**, New York: Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, v. 155, 1995.

[14] LAM, T. Y. **A First Course in Noncommutative Rings**, New York: Graduate Texts in Mathematics, Springer, v. 131, 2001.

[15] MCCONNELL, J. C., ROBSON, J. C. **Noncommutative Noetherian Rings**, Graduatis Studies in Mathematics 30, AMS, 2001.

[16] MONTGOMERY, S. **Hopf Algebras and Their Actions on Rings**, Chicago: American Mathematical Society CBMS 82, 1992.

[17] NIKSHYCH, D. On the Structure of Weak Hopf Algebras. **Advances in Mathematics**, v. 170, p. 257-286, 2002.

[18] ____________, Semisimple weak Hopf algebras. **Journal of Algebra**, v. 275, p. 639-667, 2004.

[19] NIKSHYCH, D., VAINERMAN, L. Finite Quantum Groupoids and Their Applications. **New Directions in Hopf Algebras**, v. 43, p. 211-262, 2002.

[20] NILL, F. Axioms for Weak Bialgebras. **math.QA/9805104**, 1998.

[21] ORE, O. Theory of Non-Commutative Polynomials. **The Annals of Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 480-508, 1933.

[22] PANOV, A. N. Ore Extensions of Hopf Algebras. **Mathematical Notes**, v. 74, n. 3, p. 401-410, 2003.

[23] RADFORD, D. E. Kaplansky's Ten Hopf Algebra Conjectures. **Department of Mathematics, Statistics, and Computer Science University of Illinois at Chicago**, 2012.

[24] ZHUANG, G. Properties of pointed and connected Hopf algebras of finite Gelfand-Kirillov dimension. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 87, n. 3, p. 877-898, 2013.

Índice Remissivo