

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE GRELHAS PLANAS DE
CONCRETO ARMADO

WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

Março de 1987

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

Guillermo J. Creus.

Prof. Guillermo Juan Creus
Orientador

José Carlos Ferraz Hennemann

Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng.Civil

BANCA EXAMINADORA

Prof. GUILLERMO JUAN CREUS (Orientador)
D.Sc. pela COPPE/UFRJ

Prof. ADEMAR GILBERTO GROEHS
D.Sc. pela COPPE/UFRJ

Prof. PABLO GASTON BIGNON
D.Sc. pela COPPE/UFRJ

À Mariana, minha mãe,
e ao meu irmão
Wellington

AGRADECIMENTOS

Ao professor Guillermo Juan Creus pela dedicação na orientação deste trabalho e pelo apoio recebido no desenvolvimento do mesmo.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, na pessoa de seu coordenador, professor José Carlos Ferraz Henemann, pelo auxílio e confiança depositados no transcorrer do curso e deste trabalho.

Aos professores, colegas e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil que de alguma forma colaboraram na realização deste trabalho.

Ao CNPq, CAPES e CNEN pelo auxílio financeiro.

À Liliani Gaeverzen Mazzali pelos trabalhos de dactilografia.

À Juliana Zart Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.

Aos funcionários do "Núcleo de Assistência aos Usuários" do Centro de Processamento de Dados da Universidade de Brasília pela atenção dispensada ao longo deste trabalho.

À Cândida pelo incentivo e apoio em todos os momentos.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	vii
RESUMO.....	xi
ABSTRACT.....	xii
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Objeto de Estudo.....	1
1.2. Problemas de Torção-Flexão-Corte em Concreto Armado.....	3
1.3. Organização da Dissertação.....	5
2. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA - FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	6
2.1. Definição do Elemento de Grelha Plana.....	6
2.2. Comportamento Elastoplástico de um Material - Caso Multiaxial.....	8
2.3. Relações Constitutivas Elastoplásticas.....	12
2.3.1. Endurecimento Isótropo.....	16
2.3.2. Determinação da Constante de Endurecimento.....	17
2.4. Matriz de Rigidez Elastoplástica para Elementos de Barra.....	19
3. RESISTÊNCIA ÚLTIMA DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOB FLEXÃO-TORÇÃO-CORTE.....	22
3.1. Resultados Experimentais e Modelos de Comportamento.....	22
3.2. Modelo Generalizado da Treliça Espacial.....	27
3.2.1. Resistência Torsional da Seção Retangular sob Torção Pura.....	30
3.2.2. Resistência a Flexão e Corte da Seção Transversal Retangular.....	34
3.3. Interação Torção-Flexão.....	38
3.4. Interação Torção-Flexão-Corte.....	42

3.5. Superfície de Escoamento.....	46	46
4. CARACTERÍSTICAS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL. ALGORÍ- TOS EMPREGADOS. PROCEDIMENTOS E CRITÉRIOS UTILIZADOS....	48	48
4.1. Elemento Implementado.....	48	48
4.2. Obtenção da Matriz de Rigidez do Elemento.....	48	48
4.3. Critério de Plastificação dos Elementos.....	49	49
4.4. Algoritmo de Solução.....	50	50
4.5. Diagrama de Blocos do Programa Computacional.....	56	56
5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS. ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	58	58
5.1. Exemplos com a Utilização de Apenas um Elemento.....	58	58
5.2. Viga Curva de Concreto Armado com Diversas Con- dições de Contorno.....	63	63
5.2.1. Influência das Condições de Contorno na Carga de Colapso.....	68	68
5.2.2. Influência do Esforço de Corte na Carga de Colapso.....	69	69
5.2.3. Influência das Constantes Plásticas (Re- lação T_p/M_p) na Carga de Colapso.....	75	75
5.2.4. Comparação com as Curvas Carga-Desloca- mento Obtidas Experimentalmente.....	76	76
5.3. Grelha Plana Ortogonal com Duas Vigas Longitu- dinais e Duas Vigas Transversais.....	78	78
5.4. Um Elemento de Grelha Plana em Ângulo Reto.....	83	83
6. CONCLUSÕES.....	86	86
BIBLIOGRAFIA.....	89	89
APÊNDICE A - ENTRADA DE DADOS.....	95	95
A.1. Exemplo de Utilização do Programa.....	95	95

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Maiúsculas

- A_{inf} - área das seções transversais das armaduras longitudinais dispostas num dos cantos inferiores da seção transversal retangular da peça
- A_o - área limitada pelo perímetro que liga os eixos bari-cêntricos das armaduras longitudinais dispostas nos cantos da seção transversal retangular da peça
($A_o = b_o \cdot h_o$)
- A_{sup} - área das seções transversais das armaduras longitu-dinais dispostas num dos cantos superiores da seção transversal retangular da peça
- D - força de compressão resultante das tensões de compres-são nas diagonais de concreto em uma "Parede Resisten-te"
- E - módulo de elasticidade longitudinal
- \vec{F} - vetor de forças nas extremidades do elemento de barra
- F - resultante das forças axiais nas armaduras longitudi-nais de uma "Parede Resistente"
- F_{inf} - resultante das forças axiais nas armaduras longitudi-nais dispostas em um dos cantos inferiores da seção transversal retangular da peça
- F_{sup} - resultante das forças axiais nas armaduras longitudi-nais dispostas em um dos cantos superiores da seção transversal retangular da peça
- F_{yinf} - resultante das forças axiais de escoamento das arma-duras longitudinais dispostas em um dos cantos infe-riores da seção transversal retangular da peça

- $F_{y\text{sup}}$ - resultante das forças axiais de escoamento das armaduras longitudinais dispostas em um dos cantos superiores da seção transversal retangular da peça
- F_z - força interna na direção do eixo local de referência \underline{z}
- G - módulo de elasticidade transversal
- I - momento de inércia em relação ao eixo local de referência \underline{y}
- J - momento de inércia à torção
- \tilde{K} - matriz de rigidez elástica do elemento de barra
- $[K]$ - matriz de rigidez global da estrutura
- L - comprimento
- M - momento fletor
- M_p - momento fletor de plastificação das extremidades do elemento de barra
- M_{uo} - momento fletor último para a seção transversal subarmada sob flexão pura
- M_u - momento fletor último para a seção transversal subarmada sob flexão-torção-corte
- M_x - momento interno na direção do eixo local de referência \underline{x} (momento torsor)
- M_y - momento interno na direção do eixo local de referência \underline{y} (momento fletor)
- \tilde{P} - vetor de cargas nodais
- R - resultante das forças axiais nas armaduras longitudinais da seção transversal
- S - força axial no estribo
- SGN - indica o sinal da grandeza escalar
- S_y - força axial de escoamento do estribo
- T - momento torsor
- T_p - momento torsor de plastificação das extremidades do elemento de barra

- T_{u_0} - momento torsor último para a seção transversal subarmada sob torção pura
 T_u - momento torsor último para a seção transversal subarmada sob flexão-torção-corte
 \underline{U} - vetor de deslocamentos nodais do elemento de barra
 $[\underline{U}]$ - vetor de deslocamentos nodais da estrutura
 V - força cortante
 V_p - força cortante de plastificação das extremidades do elemento de barra
 V_{u_0} - força cortante última para a seção transversal subarmada sob corte puro
 V_u - força cortante última para a seção transversal subarmada sob flexão-torção-corte
 X, Y, Z - sistema cartesiano de referência global, eixos de referência da estrutura
 Y - função que define um critério de escoamento

Letras Romanas Minúsculas

- b_0 - distância horizontal entre os eixos baricêntricos das armaduras longitudinais dispostas nos cantos da seção transversal retangular
 e - superíndice, refere-se às grandezas elásticas
 ep - superíndice, refere-se às grandezas elastoplásticas
 h_0 - distância vertical entre os eixos baricêntricos das armaduras longitudinais dispostas nos cantos da seção transversal retangular
 i - subíndice, nó inicial do elemento de barra
 j - subíndice, nó final do elemento de barra
 k - subíndice, k-ésimo elemento de barra da estrutura
 l - superíndice, l-ésima etapa de um processo incremental
 p - superíndice, refere-se às grandezas plásticas

- t - espessura fictícia da "Parede Resistente"
- x,y,z - sistema cartesiano de referência local, eixos de referência do elemento de barra.

Letras Gregas Maiúsculas

- Ψ - função no espaço de tensões
- $\left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{F}} \right\}$ - vetor de fluxo plástico (vetor gradiente da função Ψ)
- Δ - incremento

Letras Gregas Minúsculas

- α - inclinação das fissuras nas "Paredes Resistentes"
- τ - tensão tangencial
- σ_c - tensão normal de compressão no concreto
- σ_{yinf} - resultante das tensões axiais de escoamento das armaduras longitudinais dispostas num dos cantos inferiores da seção transversal retangular da peça
- σ_{yst} - tensão axial de escoamento do estribo
- σ_{ysup} - resultante das tensões axiais de escoamento das armaduras longitudinais dispostas num dos cantos superiores da seção transversal retangular da peça

Símbolos

- $\dot{}$ - derivada temporal
- $\| \quad \|$ - norma Euclidiana
- $| \quad |$ - valor absoluto

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um programa computacional para analisar problemas elastoplásticos com pequenas deformações em grelhas planas de concreto armado, utilizando o método dos deslocamentos.

O material é definido através de um critério de escoamento generalizado que leva em consideração o efeito dos esforços de corte, momento fletor e momento torsor nas seções críticas e apresenta endurecimento isótropo.

Uma solução incremental empregando o método da matriz de rigidez tangente foi adotado.

Algumas comparações foram feitas com resultados experimentais, numéricos e teóricos.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a computational program to analyse elastoplastic problems of small deformations in reinforced concrete grids using the matrix displacement method.

The material is defined through a generalized yield criterion that accounts for bending, torsion and shear effects at the critical sections and presents isotropic hardening.

An incremental solution with tangent stiffnen matrix is used.

Some comparisons were made with experimental, numerical and theoretical results.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Objeto de Estudo

O interesse na possibilidade de um melhor aproveitamento da reserva de resistência dos materiais, permitindo a utilização de uma maior capacidade da resistência desses materiais, impulsiona o desenvolvimento da teoria da plasticidade.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um programa computacional para resolver, através do método dos deslocamentos⁶ problemas de não linearidade física para o caso de pequenas deformações e deslocamentos, para grelhas planas de concreto armado. Para isto foi utilizado o método da matriz de rigidez tangente, também chamado de método incremental.

A não linearidade física do problema é representada para o caso elastoplástico através da definição de um critério de escoamento generalizado que leva em consideração o efeito combinado do esforço cortante, momento torsor e momento fletor, e de alguns conceitos gerais da teoria clássica da plasticidade ligados ao estudo do comportamento elastoplástico de elementos unidimensionais, estabelecendo-se em seguida a matriz de rigidez elastoplástica dos mesmos.

A utilização deste critério de escoamento generalizado conduz a uma relação elastoplástica que pode ser encarada como representativa de uma articulação plástica generalizada que se reduz ao conceito clássico de rótula em situações especiais.

Para elementos de grelha plana de concreto armado, assume-se como superfície de escoamento uma das superfícies de interação flexão-torção-corte para seções subarmadas, no estado limite último. Obtêm-se estas superfícies de interação para vigas sujeitas a estes esforços, usando o teorema do limite inferior (ou teorema estático) e a analogia da "Treliza Es-

pacial"^{27, 35, 36}.

Sobre o comportamento do material, assume-se que as curvas momento fletor-rotação e momento torsor-torção são elasto-plásticas bilineares com endurecimento isótropo, e que as suas propriedades mecânicas são independentes do tempo.

Com relação aos elementos de barra; são prismáticos, retos, possuindo dois nós e com três graus de liberdade por nó. Considera-se que o comportamento inelástico ocorra nos seus extremos, isto é, as articulações plásticas generalizadas estejam concentradas nos nós da barra. A estrutura é carregada somente em seus nós; caso haja cargas concentradas no elemento, criam-se nós nestes pontos. As cargas distribuídas são substituídas por um sistema estaticamente equivalente de cargas concentradas.

A partir das hipóteses acima, é possível resolver o problema elastoplástico numa série de etapas, cada uma das quais analisando uma estrutura elástica linear. Estas estruturas são obtidas introduzindo articulações plásticas generalizadas nas extremidades dos elementos cujo estado de tensões atingiu a superfície de escoamento na etapa anterior e fazendo as mudanças correspondentes na matriz de rigidez global da estrutura. A carga sob a qual a estrutura transforma-se em um mecanismo chama-se carga de colapso. Alcançada esta carga, a estrutura continua a deformar-se sob carga constante para o comportamento elastoplástico perfeito, enquanto que se considerarmos o endurecimento, a estrutura irá deformar-se sob acréscimos de carga. A análise é válida só para casos em que a carga última é alcançada com deslocamentos e deformações pequenas da estrutura, excluindo problemas de instabilidade; nestas condições, a carga de colapso independe das propriedades elásticas da estrutura.

O problema elastoplástico acima pode ser estudado de duas maneiras: ou pelo uso da análise limite, que somente nos fornece a carga última ou pela análise passo a passo, partindo do comportamento elástico até atingir um mecanismo de colapso plástico. Naturalmente, a análise limite está restringida a situações sem endurecimento.

GRIGORIAN^{18,19} através da análise limite propõe soluções analíticas para a obtenção da carga última de grelhas ortogonais com diversas condições de contorno sem levar em consideração o efeito da torção.

HEYMAN²² e ASKARI¹ obtêm a carga de colapso para grelhas ortogonais levando em consideração o efeito da torção. HEYMAN resolve o problema através da análise limite clássica enquanto que ASKARI através da formulação pelo método das forças e de um critério de escoamento linearizado, resolve o problema usando programação linear.

BONY e KLEIBER⁵ fazem a análise elastoplástica para elementos de grelhas planas ortogonais, considerando um critério de escoamento, que leva em conta o efeito da torção e flexão, usando dois procedimentos numéricos diferentes: o método da matriz de rigidez tangente e o método da tensão inicial, obtendo a carga de colapso.

Pode-se generalizar este procedimento a problemas elastoplásticos de estrutura de barras espaciais através da definição de um critério de escoamento que leva em conta a interação entre os esforços correspondentes aos diversos graus de liberdade^{7,31}; a extensão a problemas com deformações finitas pode ser feita conforme a referência |10|.

1.2. Problemas de Torção-Flexão-Corte em Concreto Armado

Para uma análise do valor da carga de colapso de uma estrutura, se faz necessário conhecer a capacidade resistente dos vários elementos que a compõem.

Numa grelha plana, seus elementos sofrem a ação combinada dos esforços cortante, momento fletor e torsor; daí a necessidade de se conhecer o comportamento de um elemento de concreto armado sob estes esforços.

Durante as duas décadas passadas um grande número de pesquisas foram realizadas, considerando vários aspectos da influência da torção e combinações de esforços em vigas de concreto armado e protendido¹⁵.

Hã dois modelos teóricos mais aceitos para simular o comportamento de uma viga sob torção-flexão-corte: os modelos da "Trelia Espacial"²⁷ e de "Skew Bending"⁸. Estas teorias são baseadas em modelos simples e racionais, que levam a resultados satisfatórios, comprovados por um número extenso de testes experimentais^{26,38}.

A formulação analítica destes modelos para vigas de concreto armado e protendido^{30,34} permite determinar:

- a capacidade de resistência última;
- as rigidezes torsional e flexural antes e depois da fissuração;
- as deformações das armaduras longitudinais e dos estribos, ao longo da história de carga;
- as deformações do concreto nas seções críticas, ao longo da história de carga;
- as curvas momento-curvatura e torque-torção;
- mecanismos de ruptura;
- uma superfície de interação entre os esforços de torção-flexão-corte, definindo-a como capacidade de carga.

Um dos trabalhos pioneiros foi o de GVOZDEV, LESSIG e RULLE²¹. Eles observaram dois mecanismos de ruptura diferentes, para vigas de concreto armado, caracterizados pelo modelo de "Skew Bending", e propuseram expressões para o cálculo da resistência última através do equilíbrio entre as forças externas e internas na face de ruptura.

COLLINS et al⁸, McMULLEN e WARWARUK²⁸ e GOODE e HELMY¹⁷ entre outros, propuseram novas variáveis e outras modificações na teoria de Lessig por meio de observações experimentais, como por exemplo, um terceiro modo de ruptura. Outros estenderam-na para vigas de concreto protendido como BELOW et al⁴ e MISIC e WARWARUK³⁰.

O modelo da "Trelia Espacial" foi proposto por RAUSCH em 1929 para o estudo de torção pura. Em 1969, LAMPERT e THURLIMANN²⁷ aproximou este modelo para estudos de torção e flexão, e em 1976 THURLIMANN³⁶ estendeu-o para análise de torção, flexão e corte; OJHA³³ utilizou-o para avaliar as ri-

gidezes torsional e flexural antes e depois da fissuração da peça.

Houve também a preocupação em determinar curvas de interação entre momento fletor, momento torsor e esforço cortante. Nesse sentido EWIDA e McMULLEN¹³ e ELFREN et al¹¹ propuseram curvas de interação flexão-torção-corte utilizando o modelo teórico de "Skew Bending" enquanto que THURLIMANN e LAMPERT²⁷ propuseram curvas de interação flexão-torção baseado no modelo da "Treliza Espacial". Recentemente, THURLIMANN³⁶ utilizando o modelo da "Treliza Espacial" propôs curvas de interação flexão-torção-corte.

Neste trabalho adotamos o modelo teórico da "Treliza Espacial", cujo desenvolvimento será descrito no capítulo 3.

1.3. Organização da Dissertação

Com referência ao conteúdo específico de cada capítulo, tem-se o que segue: No segundo capítulo apresenta-se alguns fundamentos da teoria da plasticidade e o desenvolvimento das relações constitutivas em forma matricial considerando o endurecimento isótropo para elementos de grelha plana. No terceiro capítulo apresenta-se a obtenção da superfície de escoamento para uma seção retangular de concreto armado submetida à combinação de esforços de torção-flexão-corte e a capacidade resistente última da mesma, isto é, momento torsor de plastificação, momento fletor de plastificação e cortante de plastificação, utilizando o modelo da "Treliza Espacial" desenvolvida por THURLIMANN³⁶. No capítulo 4 apresenta-se o elemento de barra implementado, os critérios de plastificação e descarga dos elementos, algoritmos de solução e as características do programa computacional. Os resultados dos exemplos analisados juntamente com outros resultados experimentais estão apresentados no capítulo 5. Finalmente no capítulo 6 estão apresentadas algumas conclusões e sugestões.

Os procedimentos automáticos foram programados na linguagem Fortran do computador BURROUGHS B-6700 da UFRGS.

2. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA - FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo serão desenvolvidas algumas expressões gerais da teoria clássica da plasticidade. A introdução geral desta teoria pode ser encontrada nas referências |25| e |14|.

O método geral desenvolvido para estruturas contínuas pode ser aplicado em estruturas de barras conforme indicado nas referências |10| e |37|. O objetivo deste capítulo é formular a matriz de rigidez elastoplástica para estes elementos.

Neste capítulo usaremos a notação matricial.

2.1. Definição do Elemento de Grelha Plana

A cada elemento associa-se o seu próprio sistema de eixos de referência (x, y, z), chamado sistema local de referência.

Para um elemento cujas extremidades correspondem aos nós \underline{i} (nó inicial) e \underline{j} (nó final), seu sistema de eixos tem a origem ligada ao nó \underline{i} e o eixo \underline{x} está dirigido deste nó ao nó \underline{j} (FIGURA 2.1).

Define-se as componentes do vetor de deslocamentos nodais do elemento de grelha plana em coordenadas locais como:

$$\underline{U}^T = (\omega_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}, \omega_j, \theta_{x_j}, \theta_{y_j}) \quad (2.1)$$

onde ω é o deslocamento na direção do eixo \underline{z} , θ_x é a rotação em torno do eixo \underline{x} e θ_y é a rotação em torno do eixo \underline{y} (FIGURA 2.2) e o superíndice \underline{T} indica a transposição de vetores ou matrizes.



FIGURA 2.1 - Sistema de referência do elemento.

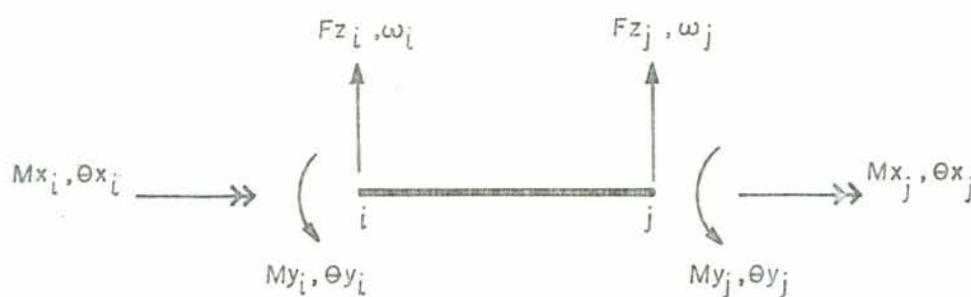


FIGURA 2.2 - Ações e deslocamentos nas extremidades do elemento.

As componentes do vetor de forças nas extremidades do elemento de grelha plana em coordenadas locais são definidas como:

$$\tilde{F}^T = (Fz_i, Mx_i, My_i, Fz_j, Mx_j, My_j) \quad (2.2)$$

onde Fz é a força na direção do eixo z (esforço cortante), Mx é o momento na direção do eixo x (momento torsor) e My é

o momento na direção do eixo \underline{y} (momento fletor) (FIGURA 2.2).

Os esforços solicitantes \underline{F} e os deslocamentos \underline{U} são positivos se tiverem o sentido positivo dos eixos de referência local.

Para processos elásticos e deformações infinitesimais, a relação entre forças e deslocamentos para um elemento de barra, no sistema local de coordenadas, pode ser escrita como:

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{U} \quad (2.3)$$

onde \underline{K} é a matriz de rigidez elástica.

2.2. Comportamento Elastoplástico de um Material - Caso Multiaxial

A determinação de uma relação constitutiva elastoplástica para um estado complexo de tensões utiliza:

a) Uma relação força-deslocamento correspondente ao regime elástico e deformações infinitesimais de acordo com a equação (2.3).

b) Um critério de escoamento que caracteriza a transição entre o regime elástico e elastoplástico, que é dado por uma certa combinação de três componentes do vetor de forças \underline{F} em uma das extremidades do elemento. Este critério pode ser representado pela relação abaixo:

$$Y = \Psi(\underline{F}, \underline{s}) - \chi = 0 \quad (2.4)$$

onde \underline{s} e χ são funcionais da história de deformação plástica. A cada valor fixo de \underline{s} e χ corresponde uma superfície de escoamento no campo das tensões. O funcional \underline{s} modela o endurecimento cinemático e o funcional χ modela o endurecimento isotrópico.

Pontos no interior desta superfície correspondem a estados elásticos de tensão e pontos sobre a superfície cor-

respondem a estados elastoplásticos de tensão. As superfícies de escoamento após a inicial são também chamadas de superfície de carga.

Assume-se ainda a existência de um estado virgem do material, isto é, antes da aplicação de cargas tem-se $\underline{\underline{s}}=0$ e $\chi=\chi_0$.

Durante o processo de deformação elastoplástica, o vetor de tensões $\underline{\underline{F}}$ dos pontos que estão sofrendo deformações inelásticas deve permanecer sobre a superfície de carga (Princípio de Consistência). A condição para que isto ocorra é dada por:

$$\dot{Y} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \right\}^T \dot{\underline{\underline{F}}} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{s}}} \right\}^T \dot{\underline{\underline{s}}} - \dot{\chi} = 0 \quad (2.5)$$

Para aplicação das equações a seguir, devemos distinguir entre processos elásticos (PE), processos de deformação plástica (PP) e processos de descarga (PD). No caso multiaxial tal distinção não é simples, sendo que no mesmo processo algumas tensões podem aumentar, enquanto outras diminuem.

Se num instante dado, tem-se $Y=0$ (estado elastoplástico) e $\dot{Y}<0$, naturalmente no instante seguinte ter-se-á $Y<0$ (estado elástico) caracterizando, assim, uma descarga.

Durante a descarga, naturalmente tem-se deformações plásticas nulas de modo que $\dot{\underline{\underline{s}}}=0$ e $\dot{\chi}=0$. Assim, descarga é caracterizada por

$$Y=0, \quad \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \right\}^T \dot{\underline{\underline{F}}} < 0 \quad (\text{PE}) \quad (2.6)$$

Tem-se carga quando

$$Y=0, \quad \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \right\}^T \dot{\underline{\underline{F}}} > 0 \quad (\text{PP}) \quad (2.7)$$

A situação com

$$Y=0, \quad \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \right\}^T \dot{\underline{\underline{F}}} = 0 \quad (\text{PP}) \quad (2.8)$$

é denominada carga neutra.

Existe uma interpretação geométrica simples e útil das equações (2.6), (2.7) e (2.8). Já que a superfície de carga é fechada, pode-se falar em partes interna e externa. No espaço \underline{F} , $(\partial\Psi/\partial\underline{F})$ representa um vetor normal à Ψ ; carga, descarga e carga neutra correspondem aos casos em que o vetor $\underline{\dot{F}}$ é dirigido para fora, para dentro ou tangente a superfície de carga, respectivamente.

Na FIGURA 2.3, esta interpretação é representada para o espaço de tensões atuantes numa das extremidades do elemento de grelha plana.

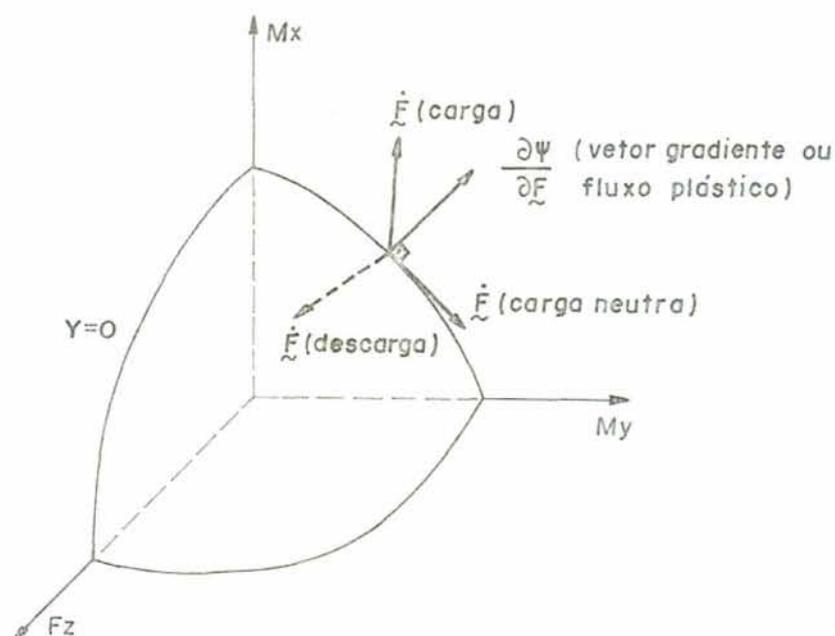


FIGURA 2.3 - Superfície de carga.

A forma e a posição da superfície podem modificar-se ao longo do processo de deformação plástica, expandindo-se e/ou deslocando-se conforme o tipo de endurecimento do material.

Para o caso de endurecimento isótropo a superfície de carga se expande uniformemente em torno da origem, mantendo

a mesma orientação e forma da superfície de escoamento inicial, conforme a FIGURA 2.4.

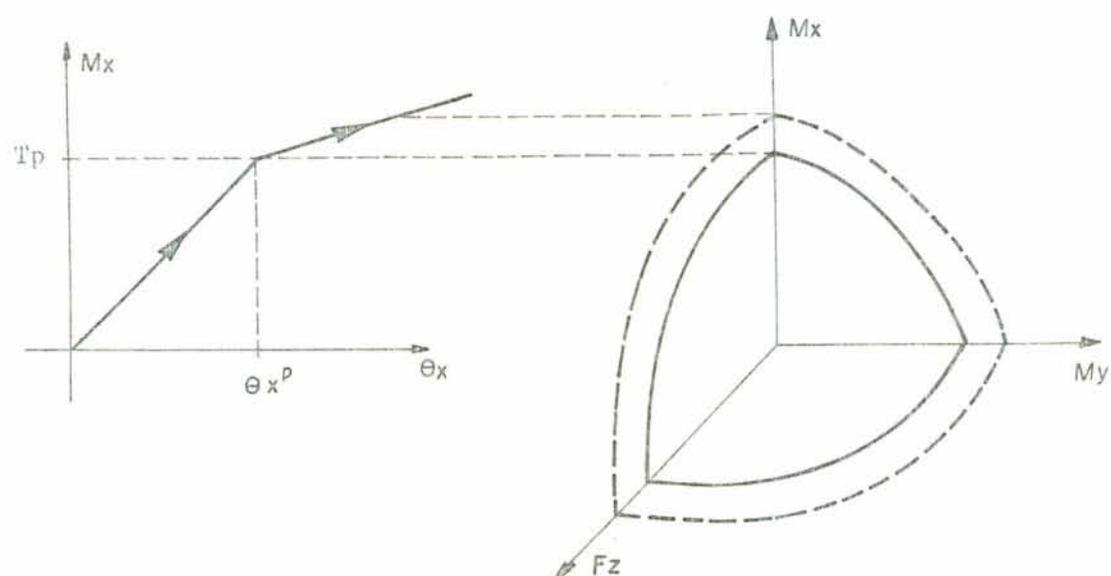


FIGURA 2.4 - Movimento da superfície de carga com endurecimento isótropo.

Para este caso tem-se

$$\Psi(\tilde{F}) = \chi \quad (2.9)$$

O critério de escoamento adotado neste trabalho, para o caso de endurecimento isótropo, é dado por:

$$\gamma = \left(\frac{Fz}{Vp}\right)^\eta + \left(\frac{Mx}{Tp}\right)^\beta + \frac{|My|}{Mp} - \chi = 0 \quad (2.10)$$

onde Fz , Mx e My são os esforços de extremidade do elemento, e Vp , Tp e Mp são os valores plásticos limites respectivos para os esforços de corte, momento torsor e momento fletor do elemento considerado. Esta função de plastificação é bastante geral e representa o comportamento de seções retangulares e subarmadas de concreto armado com valores adequados de η e β ,

conforme veremos no Capítulo 3.

A variável de estado χ modela um tipo de endurecimento isotropo.

c) Uma relação entre tensões e deformações plásticas que é estabelecida usando o princípio da normalidade, ou seja,

$$\dot{\underline{u}}^p = \dot{\Lambda} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} \quad (2.11)$$

onde o superíndice p indica a componente plástica das distorções do elemento e $\dot{\Lambda}$ é um escalar não negativo. Este princípio indica que as componentes da taxa de deformação plástica são proporcionais às correspondentes componentes do gradiente da função de escoamento no espaço de tensões \underline{F} .

2.3. Relações Constitutivas Elastoplásticas

Baseado no que foi visto anteriormente, serão escritas agora as relações constitutivas elastoplásticas, do elemento de barra, de forma geral e particularizada para o caso de endurecimento isotropo.

Se a condição de plasticidade é atingida, tem-se que

$$\Psi(\underline{F}, \underline{s}) - \chi = 0 \quad (2.12)$$

e aparecerão deformações plásticas.

A compatibilidade geométrica entre as taxas do vetor de deslocamentos na extremidade do elemento, com articulação plástica generalizada, é dada por:

$$\dot{\underline{u}} = \dot{\underline{u}}^e + \dot{\underline{u}}^p + \dot{\underline{u}}^r \quad (2.13)$$

onde $\dot{\underline{u}}^e$, $\dot{\underline{u}}^p$ são os incrementos das distorções elásticas e plásticas do elemento e $\dot{\underline{u}}^r$ é a componente de movimento rígido proveniente do incremento de deformação do restante da estrutura.

Para o caso de um elemento de grelha plana, estes deslocamentos e distorções podem ser definidos de acordo com a FIGURA 2.5.

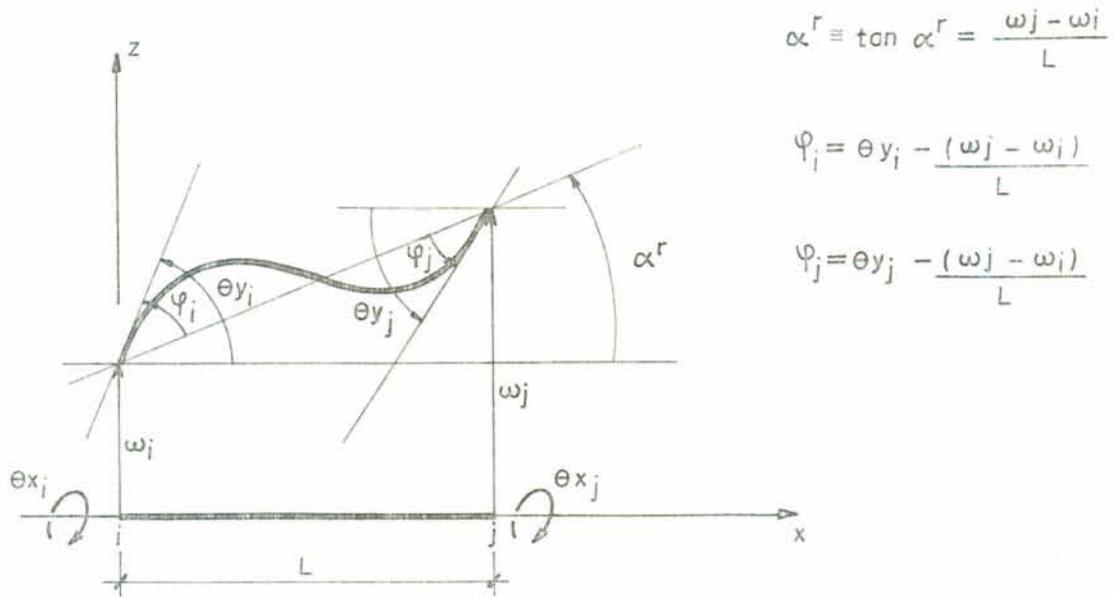


FIGURA 2.5 - Deslocamentos, rotações e distorções do elemento no sistema de referência local.

Como considera-se pequenos deslocamentos $\alpha^r \approx \tan \alpha^r = \frac{(\omega_j - \omega_i)}{L}$, desta maneira, tem-se

$$\underline{D} = \underline{U}^e + \underline{U}^p = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{y_i} - \frac{(\omega_j - \omega_i)}{L} \\ 0 \\ \theta_{x_j} - \theta_{x_i} \\ \theta_{y_j} - \frac{(\omega_j - \omega_i)}{L} \end{Bmatrix} \quad \underline{U}^r = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \theta_{x_i} \\ \frac{(\omega_j - \omega_i)}{L} \\ \omega_j \\ \theta_{x_i} \\ \frac{(\omega_j - \omega_i)}{L} \end{Bmatrix}$$

onde α^r é a rotação de corpo rígido da corda do elemento deformado, \underline{D} é o vetor de distorções do elemento. Para uma ex-

tremidade com articulação plástica generalizada, este vetor contém as parcelas escalarmente aditivas das deformações elástica e plástica.

A relação entre as taxas de forças e deslocamentos elásticos para um elemento de barra em equilíbrio pode ser obtida da equação (2.3), deste modo:

$$\dot{\underline{F}} = \underline{K} \dot{\underline{U}}^e \quad (2.14)$$

onde $\dot{\underline{F}}$ é a taxa do vetor de forças nas extremidades do elemento.

Introduzindo a definição

$$A = \frac{1}{\dot{\Lambda}} \left(\dot{X} - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{s}} \right\}^T \dot{\underline{s}} \right) \quad (2.15)$$

onde A é uma expressão em função do tipo de endurecimento adotado, a equação (2.5) pode ser escrita como

$$\dot{Y} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \dot{\underline{F}} - \dot{\Lambda} A = 0 \quad (2.16)$$

Substituindo a equação (2.13) em (2.14), vem que

$$\dot{\underline{F}} = \underline{K} (\dot{\underline{U}} - \dot{\underline{U}}^P) - \underline{K} \dot{\underline{U}}^R = \underline{K} (\dot{\underline{U}} - \dot{\underline{U}}^P) \quad (2.16.a)$$

já que o vetor de cargas associado com a taxa de movimento rígido é nula.

Assim, usando a equação (2.11) e substituindo-a na equação (2.16.a), chega-se a

$$\dot{\underline{F}} = \underline{K} \left(\dot{\underline{U}} - \dot{\Lambda} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} \right) \quad (2.17)$$

Substituindo a equação (2.17) em (2.16) e isolando a variável $\dot{\Lambda}$, determina-se

$$\dot{\underline{\Lambda}} = \frac{\left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \underline{K} \dot{\underline{U}}}{\underline{A} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \underline{K} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}} \quad (2.18)$$

Substituindo a equação (2.18) em (2.17), obtêm-se a relação abaixo

$$\dot{\underline{F}} = \left(\underline{K} - \frac{\underline{K} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \underline{K}}{\underline{A} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \underline{K} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}} \right) \dot{\underline{U}} \quad (2.19)$$

A equação (2.19) fornece a relação entre as taxas de forças e deslocamentos nas extremidades do elemento durante processos elastoplásticos; o termo entre parênteses é a matriz de rigidez elastoplástica do elemento de barra em relação às coordenadas locais; sendo esta matriz simétrica.

Pode observar-se que durante um movimento arbitrário de corpo rígido de um elemento com uma ou ambas extremidades com articulações plásticas generalizadas, não há variação da energia potencial elástica nem dissipação de energia no processo plástico. Desta forma, pelo princípio dos trabalhos virtuais, o trabalho externo deve ser nulo e conseqüentemente o vetor associado de forças nas extremidades do elemento deve ser forçosamente nulo.

Seja então $\dot{\underline{U}}^r$ um incremento arbitrário de movimento rígido. Aplicando a equação (2.19) tem-se

$$\dot{\underline{F}} = \underline{K} \dot{\underline{U}}^r - \frac{\underline{K} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T}{\underline{A} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \underline{K} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}} (\underline{K} \dot{\underline{U}}^r)$$

Por ser $\underline{K} \dot{\underline{U}}^r = \underline{0}$ resulta finalmente

$$\dot{\underline{F}} = \underline{0}$$

Dai conclui-se que através da matriz elastoplástica somente as distorções no elemento influenciam na obtenção das forças de extremidade de membro.

2.3.1. Endurecimento Isótropo

No caso de endurecimento isótropo, considerando o endurecimento por deformação mecânica ("strain hardening")²⁵ e usando a equação (2.11), tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= H \|\dot{\underline{u}}^P\| \\ &= H \dot{\Lambda} \left\| \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} \right\|\end{aligned}\quad (2.20)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana e H é a constante de endurecimento que podemos determinar da curva momento-rotação ou torque-torção, cujo valor é dado, conforme será visto no item 2.3.2, por

$$H = \frac{\Delta My}{\Delta \theta_y^P}$$

Substituindo a equação (2.20) em (2.15), obtêm-se

$$\Lambda = H \left\| \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} \right\| \quad (2.21)$$

Considerando o caso de flexão pura e a superfície de escoamento da equação (2.10), o vetor de fluxo plástico $\{\partial \Psi / \partial \underline{F}\}$ torna-se igual a

$$\left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial Fz} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Mz} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial My} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{SGN My}{Mp} \end{Bmatrix}$$

onde SGN indica o sinal da grandeza escalar. Desta maneira, chega-se na expressão abaixo

$$\left\| \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} \right\| = \left\| \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial My} \right\} \right\| = \frac{1}{Mp} \quad (2.22)$$

Logo, a matriz de rigidez elastoplástica do elemento de barra com endurecimento isótropo considerando a superfície de carga da equação (2.10), fica igual a

$$\underline{\underline{K}}^{ep} = \underline{\underline{K}} - \frac{\underline{\underline{K}} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \underline{\underline{K}}}{\frac{H}{Mp} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \underline{\underline{K}} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}} \quad (2.23)$$

2.3.2. Determinação da Constante de Endurecimento

O valor de H pode ser obtido da curva momento-rotação ou torque-torção, como mostra a FIGURA 2.6 para a curva $My-\theta_y$, onde o comportamento do material foi aproximado por uma reta de endurecimento.

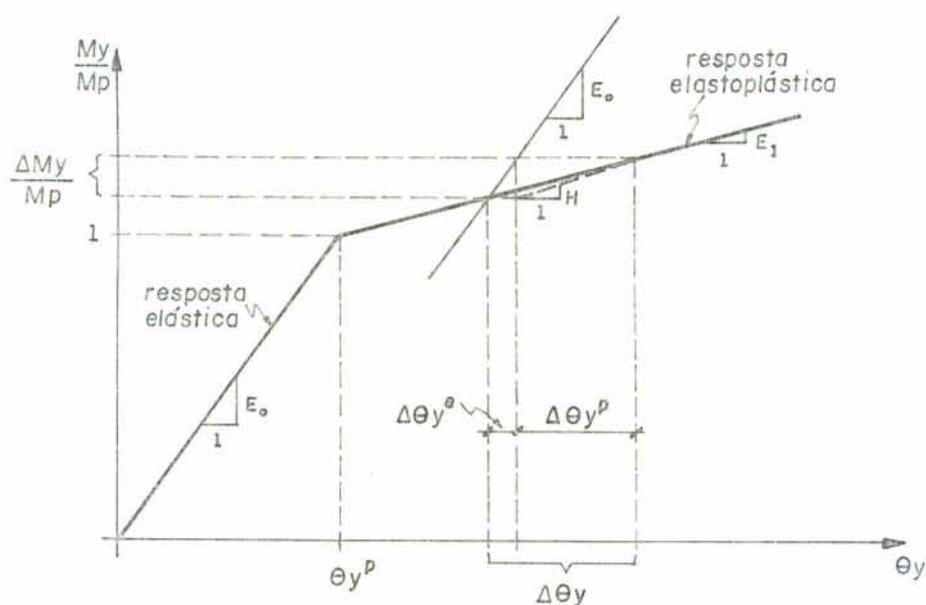


FIGURA 2.6 - Curva momento-rotação bilinear.

A constante de endurecimento \underline{H} pode ser interpretada como a inclinação da curva momento-rotação depois da remoção da componente elástica da rotação. Assim,

$$H = \frac{\frac{\Delta My}{Mp}}{\Delta \theta_y^p} \quad (2.24)$$

Ainda, da figura 2.5, define-se as seguintes relações:

$$a) \Delta \theta_y = \Delta \theta_y^e + \Delta \theta_y^p \quad (2.25)$$

onde o incremento de rotação ($\Delta \theta_y$) é a soma dos incrementos de rotação elástico ($\Delta \theta_y^e$) mais o de rotação plástica ($\Delta \theta_y^p$);

$$b) E_o = \frac{\frac{\Delta My}{Mp}}{\Delta \theta_y^e} = \frac{\Delta My}{Mp \Delta \theta_y^e} \quad (2.26)$$

onde \underline{E}_o é a inclinação da curva momento-rotação na fase elástica;

$$c) E_1 = \frac{\frac{\Delta My}{Mp}}{\Delta \theta_y} = \frac{\Delta My}{Mp \Delta \theta_y} \quad (2.27)$$

onde \underline{E}_1 é a inclinação da curva momento-rotação na fase elastoplástica.

Aplicando a eq. (2.25) em (2.24), tem-se

$$H = \frac{\frac{\Delta My}{Mp}}{\Delta \theta_y - \Delta \theta_y^e}$$

Dividindo o numerador e o denominador da expressão acima por $\Delta \theta_y$, obtêm-se

$$H = \frac{\frac{\Delta My}{M_p} \Delta \theta_y^e}{1 - \frac{\Delta \theta_y^e}{\Delta \theta_y}}$$

Isolando os valores de $\Delta \theta_y^e$ na equação (2.26) e $\Delta \theta_y$ na equação (2.27) e substituindo-os na equação acima, chega-se na seguinte expressão para a constante de endurecimento:

$$H = \frac{E_1}{1 - \frac{E_1}{E_0}} \quad (2.28)$$

É interessante observar neste caso que H é uma grandeza escalar adimensional.

2.4. Matriz de Rigidez Elastoplástica para Elementos de Barra

Quando a resultante das componentes do vetor de forças \underline{F} em uma das extremidades do elemento de barra atinge a superfície de escoamento fica caracterizado um estado de deformações elastoplásticas neste nó, isto é, forma-se uma articulação plástica generalizada.

Para o elemento de barra haverá quatro comportamentos elastoplásticos distintos, conforme as resultantes das solicitações nos nós atinjam ou não a superfície de escoamento durante a história de carga; conseqüentemente haverá quatro matrizes de rigidez elastoplásticas diferentes (FIGURA 2.7), que descreveremos a seguir:

a) comportamento elástico: não há formação de articulações plásticas generalizadas durante o processo de carga, assim a matriz de rigidez é elástica;

b) comportamento elastoplástico: com formação de uma articulação plástica generalizada no nó i ;

Portanto, o vetor de fluxo plástico ficará definido como:

$$\left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T = \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right)_i^T, 0 \right\}$$

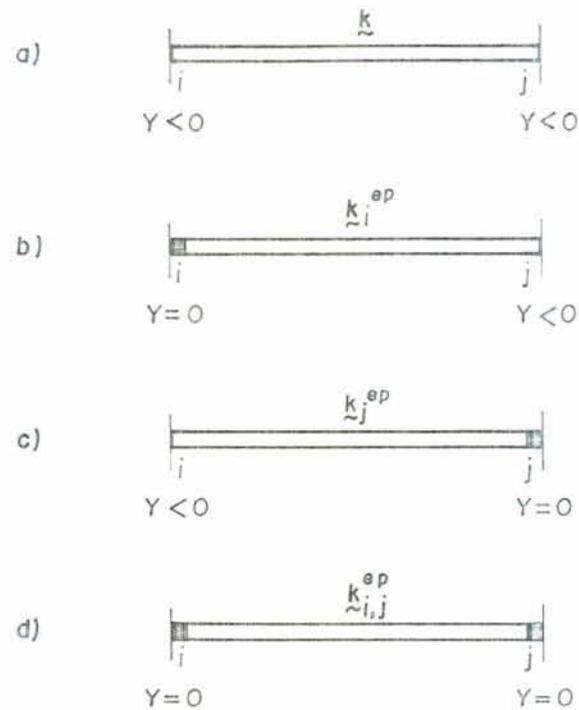


FIGURA 2.7 - Articulações plásticas possíveis para um elemento da barra.

Aplicando-o na equação (2.10), tem-se

$$\left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{F}} \right\}_i^T = \left\{ \frac{\eta F z_i^{\eta-1}}{V_p \eta} ; \frac{\beta M x_i^{\beta-1}}{T_p \beta} ; \frac{\text{SGN}(M y_i)}{M_p} \right\}_i$$

escrevendo \tilde{K} na forma particionada

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ii} & \tilde{K}_{ij} \\ \tilde{K}_{ji} & \tilde{K}_{jj} \end{bmatrix}$$

Determina-se a matriz de rigidez elastoplástica \tilde{K}_i^{ep} do elemento com uma articulação plástica no \underline{i}

$$\tilde{K}_i^{ep} = \tilde{K} - \frac{\begin{bmatrix} \tilde{K}_{ii} \\ \tilde{K}_{ji} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_i \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_i^T \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ii} & \tilde{K}_{ij} \end{bmatrix}}{\frac{H}{M_p} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_i^T \tilde{K}_{ii} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_i} \quad (2.29)$$

c) comportamento elastoplástico: com formação de uma articulação plástica generalizada no nó \underline{j} . Adotando o mesmo procedimento do item b, tem-se

$$\tilde{K}_j^{ep} = \tilde{K} - \frac{\begin{bmatrix} \tilde{K}_{ij} \\ \tilde{K}_{jj} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_j \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_j^T \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ji} & \tilde{K}_{jj} \end{bmatrix}}{\frac{H}{M_p} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_j^T \tilde{K}_{jj} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_j} \quad (2.30)$$

d) comportamento elastoplástico: com formação de articulações plásticas generalizadas em ambos os nós. Deste modo:

$$\tilde{K}_{i,j}^{ep} = \tilde{K} - \frac{\begin{bmatrix} \tilde{K}_{ii} & \tilde{K}_{ij} \\ \tilde{K}_{ji} & \tilde{K}_{jj} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_{i,j} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_{i,j}^T \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ii} & \tilde{K}_{ij} \\ \tilde{K}_{ji} & \tilde{K}_{jj} \end{bmatrix}}{\frac{H}{M_p} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_{i,j}^T \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ii} & \tilde{K}_{ij} \\ \tilde{K}_{ji} & \tilde{K}_{jj} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \right\}_{i,j}} \quad (2.31)$$

3. RESISTÊNCIA ÚLTIMA DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOB FLEXÃO-TORÇÃO-CORTE

Como vimos no capítulo anterior, para determinar-se uma relação constitutiva elastoplástica para um estado complexo de tensões, usando a teoria clássica da plasticidade, necessita-se de:

- a) Uma relação tensão-deformação na fase elástica;
- b) Um critério de escoamento que caracteriza a transição entre o regime elástico e elastoplástico;
- c) Uma relação entre tensões e deformações plásticas que é estabelecida através do princípio da normalidade.

Neste capítulo, usando o modelo teórico da "Treliza Espacial", determina-se uma superfície de interação entre os esforços de corte, momento fletor e momento torsor, que a partir de algumas simplificações, assume-se como sendo uma superfície de escoamento segundo o item "b".

3.1. Resultados Experimentais e Modelos de Comportamento

O comportamento e a resistência última das vigas de concreto armado e protendido sob torção-flexão-corte são bastante influenciados pela geometria da seção transversal, pela quantidade e disposição das armaduras longitudinais e dos estribos, pelas relações momento torsor/momento fletor e momento torsor/cortante, pelo processo de fissuração do concreto e por último pelo efeito de escala (ensaios de laboratório)^{2 3}.

HSU^{2 4}, por meio de observações experimentais, mostrou que a ruptura de barras de concreto simples de seção retangular, submetidas a torção pura, ocorreu por flexão em relação a um eixo paralelo ao maior lado da face de ruptura inclinada, cuja inclinação era de 45^o graus em relação ao eixo longitudinal, como mostra a FIGURA 3.1. Basicamente, este

tipo de ruptura ocorre em vigas de concreto armado e protendido, com diversas formas de seção transversal, submetidas a torção-flexão-corte, com exceção da inclinação da face de ruptura.

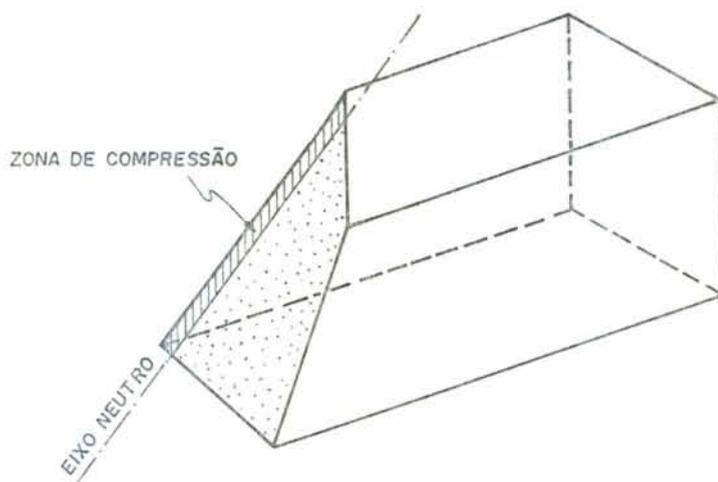


FIGURA 3.1 - Face de ruptura.

LESSIG et al²¹, baseado no modelo teórico de "Skew Bending", propôs expressões para o cálculo da resistência última de vigas de concreto armado, de seção transversal retangular e com estribos, submetidas a torção e flexão. Este, concluiu haver dois modos de ruptura diferentes. O primeiro modo ocorreu em vigas com armaduras simétricas e com o predomínio de flexão, em que a linha neutra ficava próxima a parte superior da face inclinada, isto é, a zona de compressão estava no topo da seção (FIGURA 3.2a). O segundo modo ocorreu para a mesma viga mas com o predomínio de torção e corte, em que a linha neutra ficava próxima a lateral da face inclinada, isto é, a zona de compressão estava em um dos lados verticais da seção (FIGURA 3.2b).

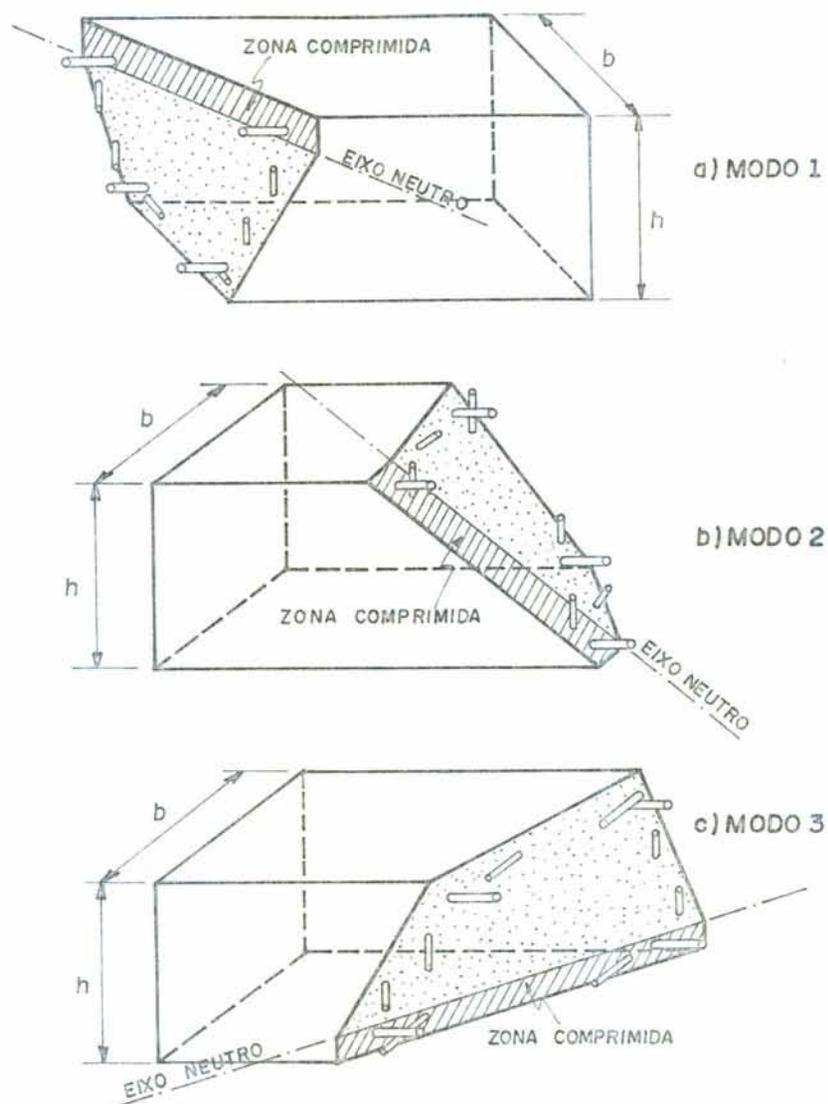


FIGURA 3.2 - Modos de ruptura por "Skew Bending".

A teoria de Lessig foi estendida por GOODE e HELMY¹⁷ e COOLINS et al⁸ para incluir o caso onde a zona de compressão se formava na parte inferior da seção (FIGURA 3.2c). Este modo de ruptura foi observado por diversos pesquisadores em vigas que tinham as armaduras longitudinais superiores mais fracas que as inferiores e com o predomínio da torção. Em adição, GOODE e HELMY também consideraram outro modo de ruptura no qual as armaduras transversais e longitudinais não escoavam simultaneamente como pressupõe a teoria de Lessig. A comparação dessas diferentes versões da teoria de ruptura por "Skew Bending" podem ser vistas na FIGURA 3.3.

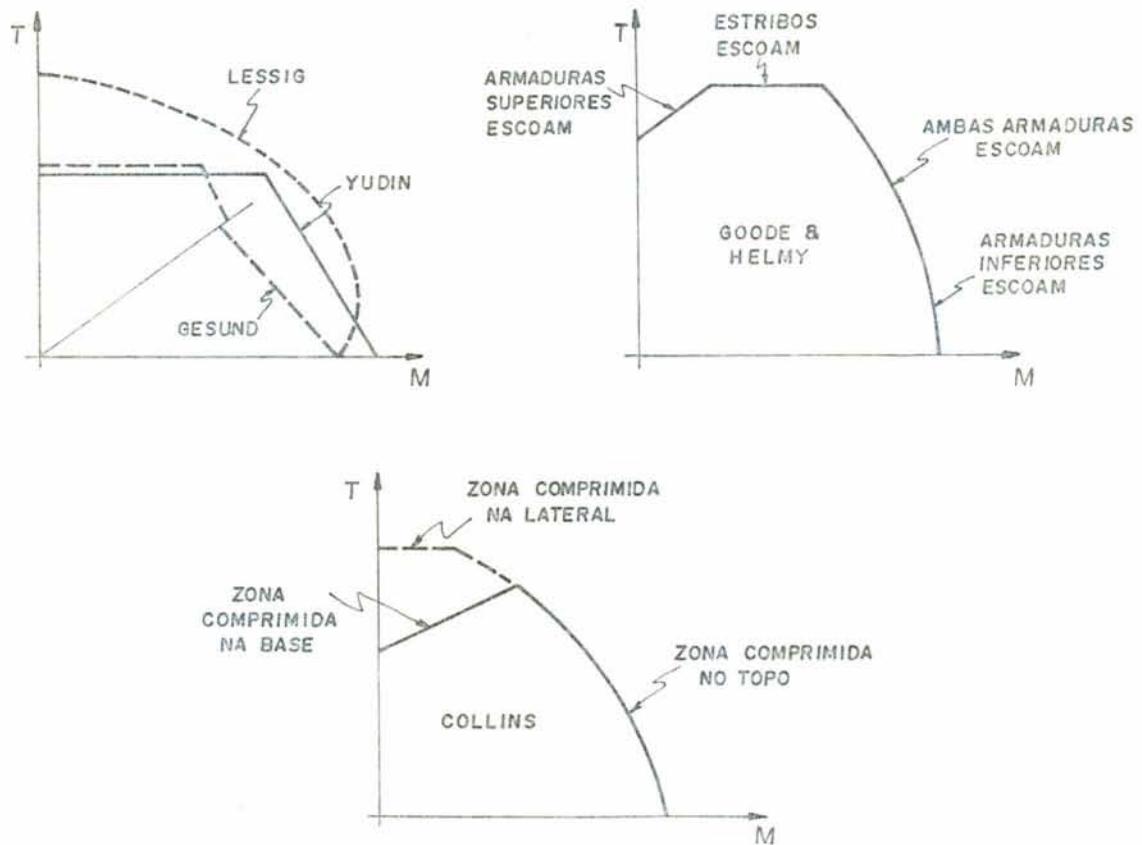


FIGURA 3.3 - Diferentes versões da teoria de "Skew Bending".

A maioria das investigações experimentais, tratando da combinação torção-flexão, foram feitas para vigas retangulares contendo armaduras longitudinais e estribos. Observou-se que para as vigas com armaduras antisimétricas, um pequeno aumento na flexão provocava um aumento substancial na capacidade de torque (FIGURA 3.3). Por outro lado, para vigas com armaduras simétricas, um aumento na flexão reduzia a capacidade de torque. Em ambos os casos houve redução na capacidade de flexão devido a um pequeno aumento no torque.

No caso de vigas submetidas a torção e corte, as primeiras pesquisas foram feitas com vigas de concreto protendido, pois estes elementos estão presentes em estruturas como pontes, viadutos, etc., onde os esforços de torção são importantes. GAUSEL^{3B} ensaiou vigas de seção "I" com protensão excêntrica, com e sem estribos, e com base nos resultados obtidos propôs uma curva quadrada para a interação entre torção e flexão, e uma curva circular para a interação entre tor-

ção e corte. ERSOY e FERGUSON¹² mostraram que uma curva circular era mais apropriada para a interação torção-corte em vigas de concreto armado.

Num comprimento finito de viga é impossível aplicar uma combinação de torção e corte sem introduzir momento fletor. Somente nos pontos de inflexão de vigas contínuas pode-se ter a condição de torção e corte sem flexão. Desta maneira, qualquer curva de interação torção-corte é na realidade a projeção da superfície de interação torção-flexão-corte no plano de torção e corte.

ELFREN et al¹¹ usando a teoria de "Skew Bending" propôs uma superfície de interação entre flexão-torção-corte para vigas de seção transversal retangular e subarmadas, onde cada modo de ruptura apresenta-se numa superfície de interação e a intersecção das três superfícies determina a capacidade de carga de viga sob flexão-torção-corte (FIGURA 3.4).

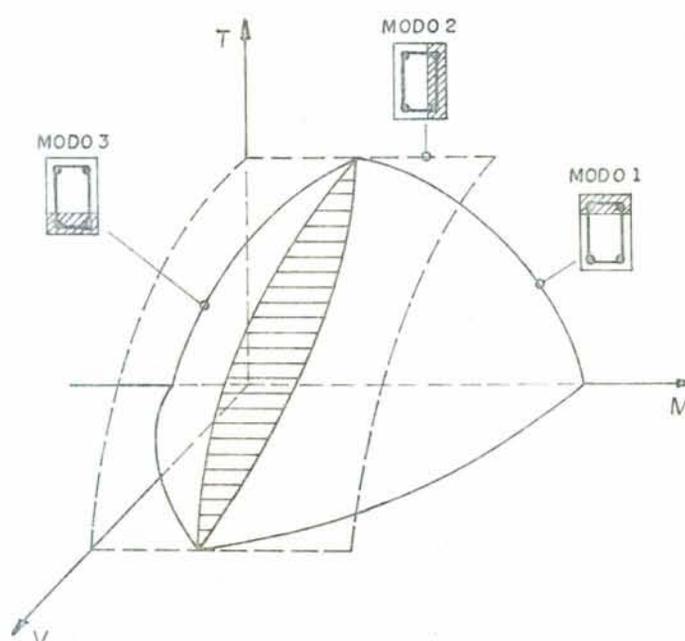


FIGURA 3.4 - Superfície de interação flexão-torção-corte.

O modelo teórico da "Trelíça Espacial" foi usado por LAMPERT e THURLIMANN²⁷ no estudo de vigas de concreto armado e protendido com seções transversais de diversas formas geométricas, com a finalidade de determinar a capacidade resistente destas seções e obter as curvas de interação entre torção e flexão; sendo que os resultados experimentais tiveram uma boa aproximação com o modelo em questão.

Ambas as teorias assumem que a seção de concreto é subarmada e em muitos casos elas levam a resultados próximos mas segundo MULLER³², com o modelo da "Trelíça Espacial" evita-se certas hipóteses assumidas pela teoria de "Skew Bending" que não se verificam nos testes experimentais.

Além disso, o modelo da "Trelíça Espacial" aplica-se a qualquer tipo de seção transversal permitindo um tratamento analítico simples e uniforme para diversas combinações de carregamento³⁴. Obtém-se com este modelo facilmente as curvas de interação através do equilíbrio estático entre as forças internas e externas na seção de ruptura usando o teorema do limite estático da análise limite. Recentemente, este modelo foi usado para determinar a resistência ao empenamento de seções abertas de paredes finas de concreto armado e protendido^{35,36}. Com relação as considerações de projeto, este modelo oferece fórmulas simples e práticas para o dimensionamento de seções de concreto armado e protendido, sujeitas a torção pura ou outras combinações de solicitações, sendo este modelo adotado pelo CEB⁹.

Por estas razões adota-se o modelo da "Trelíça Espacial" para determinar uma superfície de escoamento de um modelo de grelha plana de concreto armado.

3.2. Modelo Generalizado da Trelíça Espacial

Na FIGURA 3.5, está representado o mecanismo de ruptura de uma viga de concreto armado, proposto pelo modelo da "Trelíça Espacial", para uma combinação geral de carregamentos.

Em relação ao modelo observa-se o seguinte:

- As armaduras longitudinais estão dispostas nos cantos da seção transversal e intermediadas pelas "Paredes Resistentes";

- As armaduras longitudinais e estribos funcionam como elementos da treliça espacial, isto é, estão sujeitas a esforços axiais de tração ou compressão;

- Uma casca de parede fina de concreto fissurado envolvendo as armaduras;

- Entre as fissuras formadas, considera-se como elemento da treliça espacial, diagonais de concreto trabalhando a compressão e inclinadas em relação ao eixo longitudinal da viga.

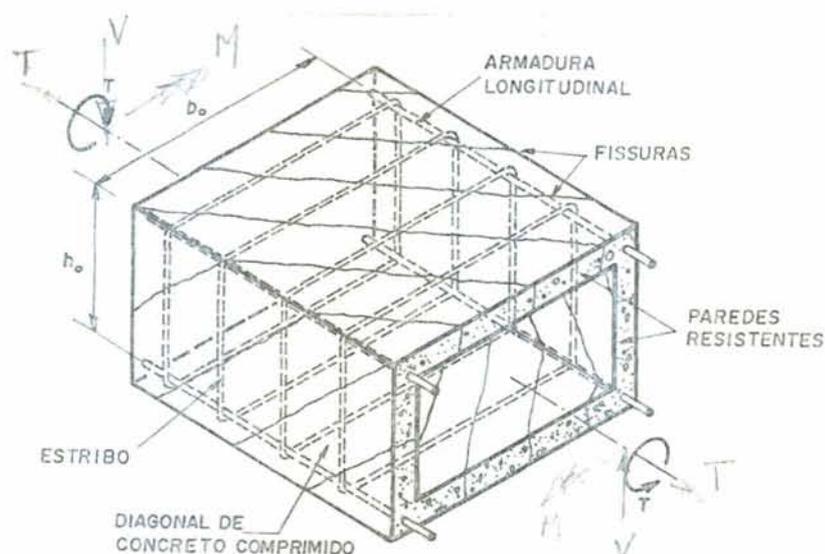


FIGURA 3.5 - Mecanismo de ruptura proposto pelo modelo da "Treliza Espacial".

Do exposto acima, conclui-se que a seção retangular sólida funciona como uma seção vazada fictícia na ruptura. Esta simplificação é aceitável, pois foi confirmada experimentalmente para ensaios de torção pura que, uma vez iniciado o

processo de fissuração, a influência do núcleo na capacidade resistente da seção é bastante reduzida. Como hipótese, entendemos esta simplificação aos casos de combinações de esforços.

Ao longo das paredes da seção vazada fictícia, cria-se um fluxo de tensões tangenciais em função das solicitações externas. São estas paredes que vão resistir a este fluxo de tensões tangenciais, sendo denominadas de "Paredes Resistentes". É através do estudo da compatibilidade geométrica do mecanismo de ruptura e do equilíbrio estático do correspondente estado de tensões nas "Paredes Resistentes" que se determina a capacidade resistente última das seções e a superfície de interação entre as solicitações.

Para analisar a resistência última da "Parede Resistente" ou de todo o conjunto, assumem-se as seguintes hipóteses:

1. O concreto resistirá somente à compressão, isto é, a resistência à tração é negligenciada;
2. As armaduras são dispostas como uma malha ortogonal;
3. Quaisquer que sejam os esforços atuantes na treliça espacial, serão transmitidos somente esforços axiais de tração e compressão nas armaduras;
4. Somente seções subarmadas serão consideradas, para assegurar que a ruptura ocorra devido ao escoamento das armaduras sem ocorrer falhas no concreto;
5. As diagonais de concreto comprimido (bielas de compressão) são devidamente ancoradas pela armadura longitudinal e estribos, para evitar falhas locais.

Visto que a falha do concreto é excluída através da hipótese da seção subarmada, a ruptura é determinada pelas forças de escoamento das armaduras longitudinais e estribos. Assim é possível investigar os mecanismos de ruptura por meio dos teoremas do limite superior e inferior da teoria da plasticidade, admitindo a curva tensão-deformação das armaduras com o comportamento elastoplástico perfeito e a formulação do equilíbrio para sistemas indeformados (teoria de primeira ordem).

3.2.1. Resistência Torsional da Seção Retangular sob Torção Pura

Da teoria da membrana para cascas cilíndricas, demonstra-se que um fluxo de corte constante em todo perímetro da seção de parede fina constitui um estado de tensões estáticamente admissível, quando o torque aplicado é constante.

O fluxo de corte para seções de paredes finas oriunda da torção será dada por

$$(\tau t) = \frac{T}{2 A_o} \quad (3.1)$$

onde A_o é a área limitada pelo perímetro u , que liga os centros das seções transversais das armaduras longitudinais nos cantos e t é a espessura das paredes da seção vazada (FIGURA 3.6).

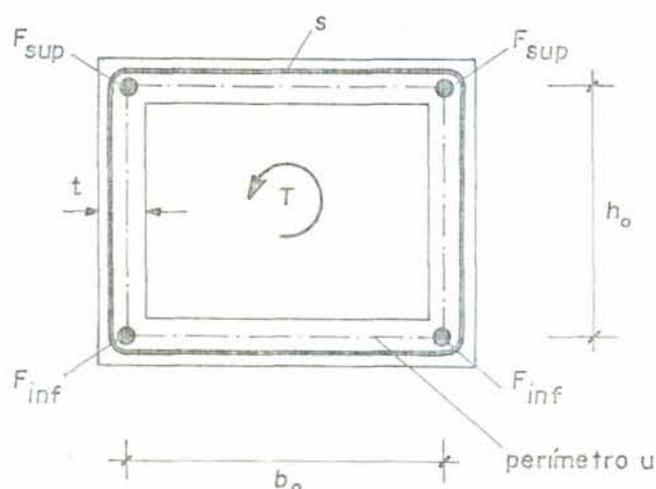


FIGURA 3.6 - Seção transversal vazada.

Da FIGURA 3.6 define-se as seguintes variáveis:
 F_{sup} é a força na armadura longitudinal superior, F_{inf} é a força na armadura longitudinal inferior, S é a força no estribo, h_o é a distância vertical entre os eixos das armadu-

ras longitudinais nos cantos e b_o a distância horizontal.

As forças produzidas pelo fluxo de corte (τt) em uma "Parede Resistente" são mostradas na FIGURA 3.7. Assume-se que a resultante D do campo de tensões de compressão σ_c no concreto tenha uma inclinação α constante.

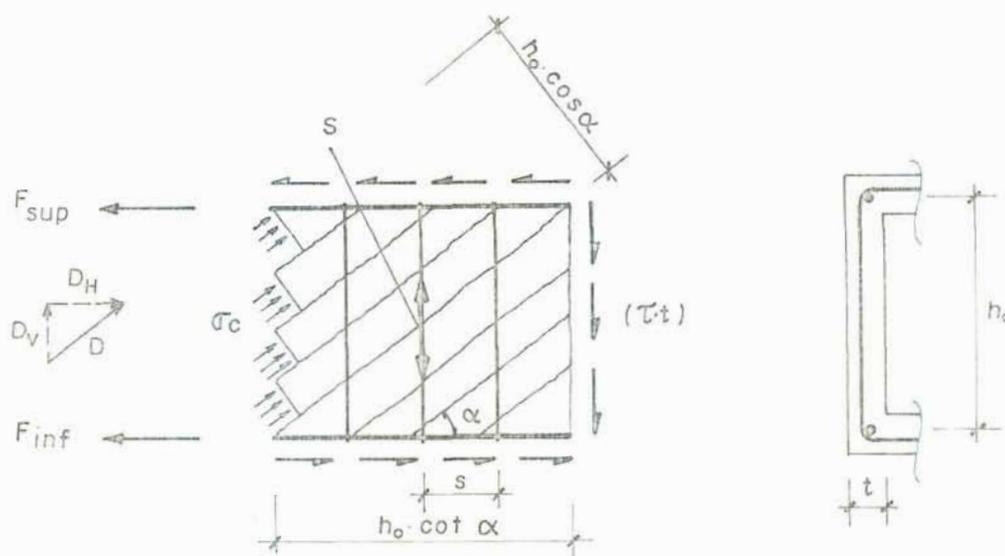


FIGURA 3.7 - Forças na "Parede Resistente" sob torção pura.

Fazendo o equilíbrio entre as forças atuantes na "Parede Resistente", obtemos as seguintes relações:

- Força de compressão nas diagonais de concreto

$$D = \frac{(\tau t) h_o}{\text{sen } \alpha} \quad (3.2)$$

- Tensão de compressão

$$\sigma_c = \frac{D}{t h_o \cos \alpha} = \frac{\tau}{\text{sen } \alpha \cos \alpha} \quad (3.3)$$

- Forças nas armaduras longitudinais, supondo

$$F_{\text{sup}} = F_{\text{inf}} = F$$

$$F = \frac{1}{2} D_H = \frac{1}{2} D \cos \alpha = \frac{1}{2} (\tau t) h_o \cot \alpha \quad (3.4)$$

- Ou a resultante de tração na parede

$$2 F = (\tau t) h_o \cot \alpha \quad (3.5)$$

- Força nos estribos

$$\frac{S h_o \cot \alpha}{s} = (\tau t) h_o$$

$$S = (\tau t) s \tan \alpha \quad (3.6)$$

onde s é o espaçamento entre os estribos.

Considerando a área da seção transversal do estribo constante ao longo de toda seção transversal da peça, bem como a inclinação das diagonais de concreto comprimido, então pode-se aplicar a equação (3.1), originando-se as expressões a seguir:

- A resultante axial das forças nas armaduras longitudinais da seção transversal

$$R = \Sigma F = (\tau t) \cot \alpha \Sigma h' = \frac{T u}{2 A_o} \cot \alpha \quad (3.7)$$

onde $\Sigma h' = u$. A resultante R atua no centróide do perímetro u em um lado da seção e está equilibrada com a componente horizontal D_H da resultante de compressão nas diagonais.

- Força nos estribos

$$S = \frac{T s}{2 A_o} \cdot \tan \alpha \quad (3.8)$$

- Tensão de compressão no concreto

$$\sigma_c = \frac{T}{2 A_o t} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad (3.9)$$

Sendo o estado de tensões descrito pelas equações (3.7), (3.8) e (3.9) estaticamente admissível (o que garante o equilíbrio das demais equações) e a seção subarmada, pode-se aplicar o teorema estático. Assim, o valor da resultante das forças nas armaduras longitudinais e o valor da força nos estribos são limitados pela resultante das forças de escoamento das armaduras longitudinais e pela força de escoamento do estribo, respectivamente.

Portanto, teremos os seguintes limites inferiores:

- para a resultante das armaduras longitudinais

$$R \leq R_y$$

- para a força nos estribos

$$S \leq S_y$$

A resistência torsional última T_u será atingida se as armaduras longitudinais e os estribos escoarem simultaneamente.

Pela manipulação algébrica das equações (3.7) e (3.8), determina-se:

$$T_u = \frac{2 A_o R_y}{u} \tan \alpha \quad (3.10)$$

$$T_u = \frac{2 A_o S_y}{s} \cot \alpha$$

Eliminando T_u ou α , chega-se às seguintes expressões finais

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{S_y \cdot u}{R_y \cdot s}} \quad (3.11)$$

$$T_u = 2 \cdot A_o \sqrt{\frac{R_y \cdot S_y}{u \cdot s}} \quad (3.12)$$

Sendo R_y um limite inferior, e supondo que a força de escoamento das barras superiores seja menor ou igual a força de escoamento das barras inferiores ($F_{ysup} \leq F_{yinf}$), a equação (3.12) pode ser escrita como

$$T_{uo} = 2 \cdot A_o \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot F_{yinf} \cdot S_y}{u \cdot s}} \quad (3.13)$$

onde T_{uo} é a resistência torsional última para torção pura.

Para o caso de torção pura, LAMPERT²⁷ desenvolveu um mecanismo de ruptura compatível com o estado de tensões últimas na "Parede Resistente".

Não se vai desenvolvê-lo aqui, pois o objetivo é determinar a superfície de interação entre os esforços de torção, flexão e corte, e para isto, é necessário somente o teorema estático.

Discute-se também, a necessidade de limitar o valor da inclinação das diagonais de concreto comprimido para evitar um aumento excessivo nas aberturas das fissuras e, conseqüentemente, o esmagamento do concreto nestas diagonais.

Dos resultados experimentais, deduziu-se os seguintes limites para esta inclinação

$$1/2 \leq \tan \alpha \leq 2 \quad (3.14)$$

para qualquer combinação de carregamento⁹.

3.2.2. Resistência a Flexão e Corte da Seção Transversal Retangular

As forças internas atuantes nos elementos da "Parede Resistente", devido ao momento fletor e a força cortante aplicados, são mostrados na FIGURA 3.8.

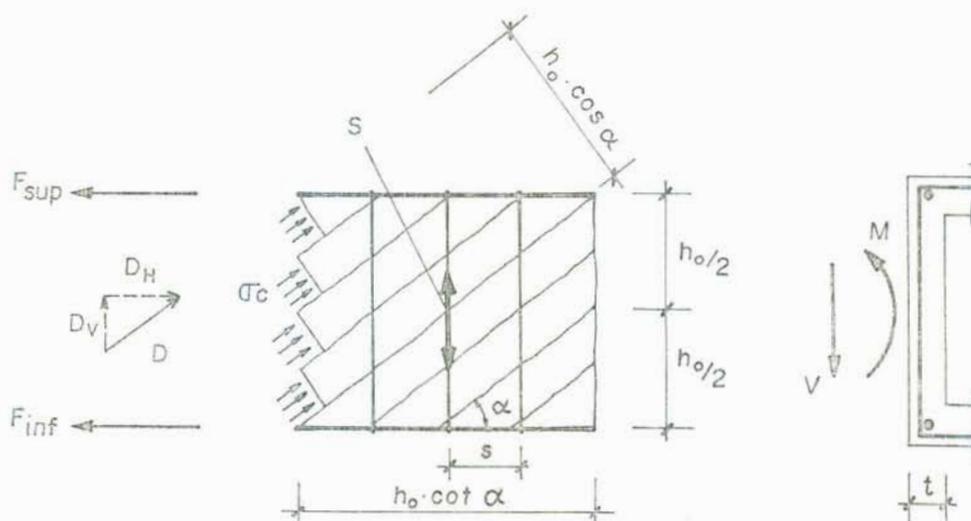


FIGURA 3.8 - Forças na "Parede Resistente" sob flexão e corte.

Determina-se a capacidade resistente última desta parede a partir do teorema estático, adotando o mesmo procedimento do item anterior.

Assim, equilibrando as solicitações e os esforços internos produzidos na "Parede Resistente", obtêm-se as relações seguintes:

- Força de compressão na diagonal de concreto, considerando a inclinação da diagonal constante

$$D = V / \sin \alpha \quad (3.15)$$

onde \underline{V} é a força de corte atuante na parede.

- Tensão de compressão no concreto

$$\sigma_c = \frac{D}{t h_0 \cos \alpha} = \frac{V}{t h_0 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (3.16)$$

- Forças nas armaduras longitudinais

barra superior:
$$F_{sup} = - \frac{M}{h_0} + \frac{V}{2} \cdot \cot \alpha \quad (3.17)$$

$$\text{barra inferior: } F_{\text{inf}} = \frac{M}{h_o} + \frac{V}{2} \cdot \cot \alpha \quad (3.18)$$

onde \underline{M} é o momento fletor aplicado na parede.

- Força nos estribos

$$S = \frac{V \cdot s \cdot \tan \alpha}{h_o} \quad (3.19)$$

Para uma seção subarmada e, considerando que o estado de tensões descrito pelas equações anteriores é estaticamente admissível, tem-se os seguintes limites para as forças nas armaduras longitudinais e estribos

$$\text{barra superior: } F_{\text{sup}} \leq F_{\text{ysup}} = A_{\text{sup}} \sigma_{\text{ysup}}$$

$$\text{barra inferior: } F_{\text{inf}} \leq F_{\text{yinf}} = A_{\text{inf}} \sigma_{\text{yinf}}$$

$$\text{estribo: } S \leq S_y = A_{\text{st}} \sigma_{\text{yst}}$$

onde F_{ysup} , F_{yinf} e S_y são forças de escoamento, A_{sup} , A_{inf} e A_{st} são áreas das seções transversais e σ_{ysup} , σ_{yinf} e σ_{yst} são tensões de escoamento da barra superior, barra inferior e estribo, respectivamente.

Para a carga última, assume-se como hipótese que o escoamento ocorra nas barras inferiores e nos estribos, logo

$$F_{\text{inf}} = F_{\text{yinf}}$$

$$S = S_y$$

Introduzindo as equações (3.18) e (3.19) na condição acima, chega-se nos valores últimos para o momento fletor e cortante

$$\frac{M_u}{h_o} + \frac{V_u}{2} \cdot \cot \alpha = F_{\text{yinf}} \quad (3.20)$$

$$\frac{V_u \cdot s \cdot \tan \alpha}{h_o} = S_y \quad (3.21)$$

com

$$\tan \alpha = \frac{S_y \cdot h_o}{V_u \cdot s} \quad (3.22)$$

Substituindo a equação (3.22) em (3.20), obtêm-se

$$\frac{M_u}{h_o} + \frac{1}{2} \cdot \frac{V_u^2 \cdot s}{S_y \cdot h_o} = F_{yinf}$$

Por conveniência, adimensionaliza-se a equação acima usando os seguintes valores de referência:

Se $V_u = 0$ (flexão pura), o momento plástico será

$$M_{uo} = F_{yinf} \cdot h_o \quad (3.23)$$

Se $M_u = 0$ (corte puro), a força cortante plástica será

$$V_{uo} = \sqrt{2 F_{yinf} S_y \frac{h_o}{s}} \quad (3.24)$$

Desta maneira, chega-se a curva de interação entre o momento fletor e o esforço de corte expressa pela equação abaixo

$$\frac{M_u}{M_{uo}} + \left(\frac{V_u}{V_{uo}} \right)^2 = 1 \quad (3.25)$$

Como a seção retangular fissurada contém quatro elementos de "Parede Resistente", a resistência última da mesma em relação ao momento fletor e a força cortante será expressa pelas seguintes equações:

- Para o momento fletor último em flexão pura

$$M_{uo} = 2 F_{yinf} h_o \quad (3.26)$$

pois as duas barras inferiores da seção transversal contribuem

para resistir à flexão.

- Para a força cortante última em corte puro

$$V_{uo} = 2 \sqrt{2} F_{yinf} S_y \frac{h_o}{s} \quad (3.27)$$

Neste caso, considera-se que as duas "Paredes Resistentes" verticais da seção contribuem para resistir ao esforço cortante.

As considerações cinemáticas sob o estado de tensões últimas na "Parede Resistente" submetida a flexão e corte e a limitação da inclinação das diagonais de concreto comprimido estão descritas na referência²⁰.

3.3. Interação Torção-Flexão

Procedendo da mesma maneira e assumindo as hipóteses simplificativas dos itens anteriores, determinaremos as curvas de interação torção-flexão através das relações de equilíbrio estático das forças que atuam na treliça espacial. O eixo de referência adotado e estas forças estão mostradas na FIGURA 3.9.

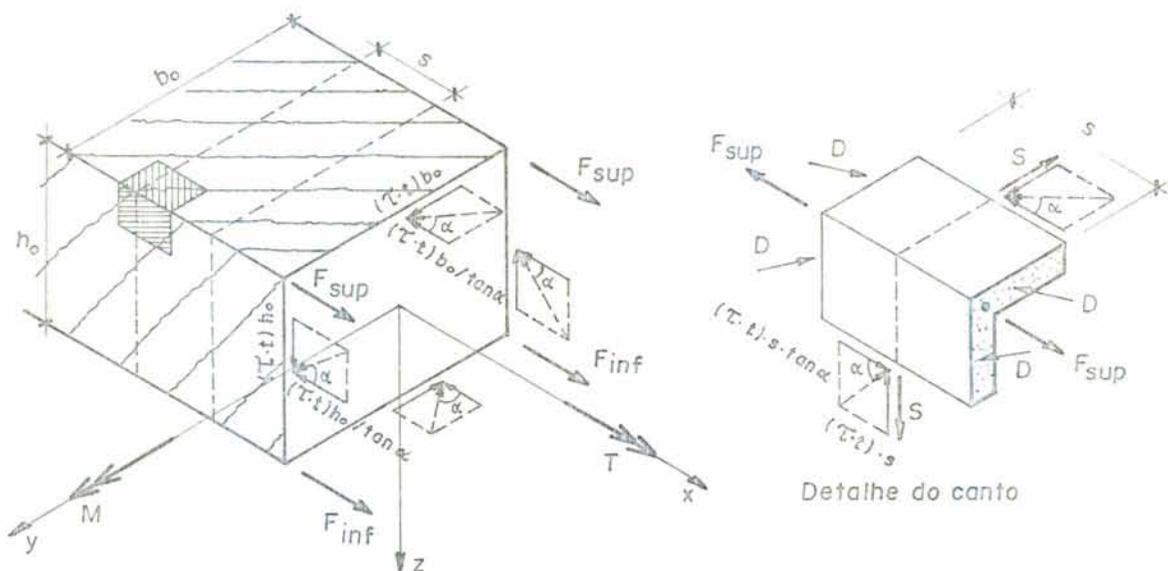


FIGURA 3.9 - Forças na "Treliza Espacial" sob flexo-torção.

Equilibrando as forças atuantes na seção, em relação aos eixos de referência adotados, tem-se:

- Somatório das forças na direção do eixo \underline{x}

$$\Sigma F^X = 0 = 2 (F_{\text{sup}} + F_{\text{inf}}) - \frac{(\tau \cdot t)}{\tan \alpha} \cdot u \quad (3.28)$$

- Somatório dos momentos na direção do eixo \underline{y}

$$\Sigma M^Y = M = 2 (F_{\text{inf}} - F_{\text{sup}}) \frac{h_o}{2} \quad (3.29)$$

- Somatório dos momentos na direção do eixo \underline{x}

$$\Sigma M^X = T = (\tau t) A_o + (\tau t) A_o = 2 A_o (\tau t) \quad (3.30)$$

é interessante observar que a equação acima é igual a equação (3.1).

- Força nos estribos

$$S = (\tau t) \cdot s \cdot \tan \alpha \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.30) em (3.31) e na equação (3.28), e desenvolvendo a equação (3.29), determina-se

$$\tan \alpha = \frac{2 \cdot A_o \cdot S}{T \cdot s} \quad (3.32)$$

$$F_{\text{sup}} + F_{\text{inf}} = \frac{T \cdot u}{4 \cdot A_o \cdot \tan \alpha} \quad (3.33)$$

$$- F_{\text{sup}} + F_{\text{inf}} = \frac{M}{h_o} \quad (3.34)$$

Devido a superposição das tensões normais nas armaduras longitudinais causadas pelos momentos fletor e torsor, os módulos das forças que atuam nas armaduras superiores e inferiores são diferentes, isto é, enquanto as forças nas barras superiores somam-se, as forças nas barras inferiores subtraem-se ou vice-versa, dependendo dos sentidos dos momentos fletor

e tursor aplicados. Conseqüentemente haverá um trecho da curva de interação flexão-torção em que o escoamento das armaduras inferiores ocorrerá antes do escoamento das armaduras superiores, ou vice-versa.

Assim, vamos considerar estes dois casos separadamente.

No primeiro caso, considera-se o escoamento das armaduras inferiores, $F_{inf} = F_{yinf}$. Adicionando a equação (3.33) a (3.34) e substituindo pelo valor $\tan \alpha$ da equação (3.32), obtém-se

$$2 \cdot F_{yinf} = \frac{T_u^2}{4 \cdot A_o^2} \cdot \frac{u \cdot s}{2 \cdot S_y} + \frac{M_u}{h_o}$$

Dividindo por $2 F_{yinf}$, introduzindo os momentos fletor último (equação (3.26)) e tursor último (equação (3.13)) para flexão pura e torção pura, respectivamente, e a relação $\rho = F_{yinf}/F_{ysup}$, chega-se a seguinte expressão

$$\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{T_u}{T_{uo}} \right)^2 + \frac{M_u}{M_{uo}} = 1 \quad (3.35)$$

Agora, considere-se o escoamento das armaduras superiores, $F_u = F_{ysup}$. Neste caso, subtrae-se a equação (3.33) da (3.34) e substitui-se pelo valor de $\tan \alpha$ da equação (3.32), chegando-se na expressão seguinte

$$2 \cdot F_{ysup} = \frac{T_u^2}{4 \cdot A_o^2} \cdot \frac{u \cdot s}{2 \cdot S_y} - \frac{M_u}{h_o}$$

Dividindo por $2 F_{ysup}$, introduzindo os momentos últimos das equações (3.26) e (3.13), e a relação $\rho = F_{ysup}/F_{yinf}$, obtém-se

$$\left(\frac{T_u}{T_{uo}} \right)^2 - \rho \cdot \frac{M_u}{M_{uo}} = 1 \quad (3.36)$$

Com as equações (3.35) e (3.36) e a relação $\rho=3$ traçamos a curva de interação flexão-corte (FIGURA 3.10).

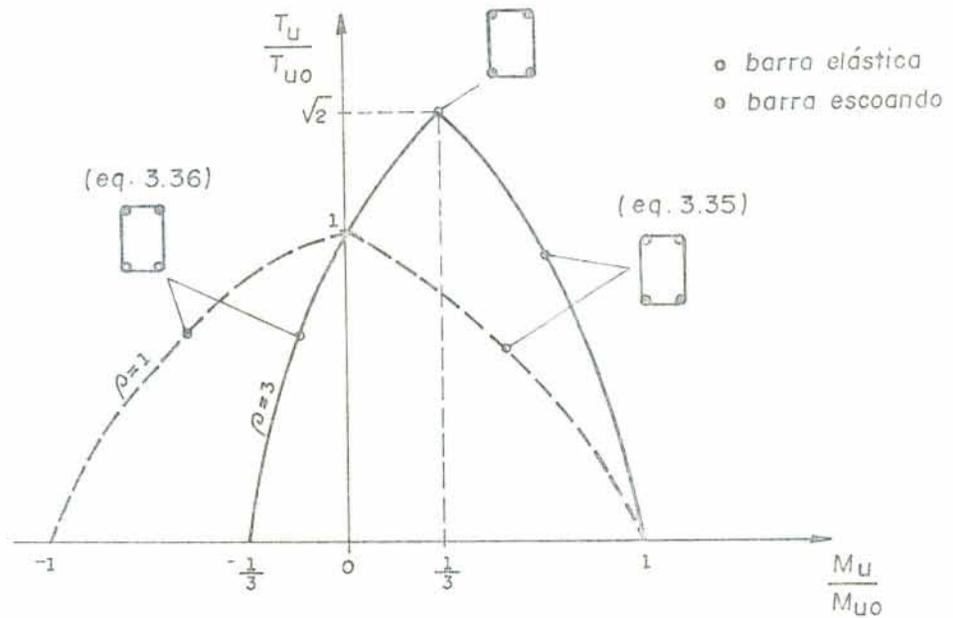


FIGURA 3.10 - Diagrama de interação torção-flexão.

Como podemos ver, em uma seção armada para resistir à flexão ($F_{yinf} > F_{ysup}$, $\rho > 1$), a resistência torsional pode ser aumentada com a aplicação simultânea do momento fletor. A máxima resistência torsional é obtida pela intersecção das duas curvas representadas pelas equações (3.35) e (3.36), para a qual todas as armaduras longitudinais escoam. Enquanto que numa seção armada para resistir à torção pura ($F_{yinf} = F_{ysup}$, $\rho = 1$), o máximo torque ocorre quando o momento fletor é nulo. Neste último caso, ocorre o escoamento das armaduras longitudinais e estribos. Estas curvas foram confirmadas experimentalmente em testes feitos em Alberta²⁸, New South Wales⁸, Zurich⁹ e Illinois²⁶.

Cabe salientar que MÜLLER³² propôs um mecanismo de ruptura para seções vazadas de paredes finas, compatível geometricamente com o estado de tensões último na "parede resistente" sob flexão e torção descrito neste item.

3.4. Interação Torção-Flexão-Corte

Examina-se agora, a "Parede Resistente" para uma combinação geral de torção, flexão e corte.

Os fluxos de tensões tangenciais devido ao momento torsor e a força cortante são obtidas de acordo com a FIGURA 3.11.

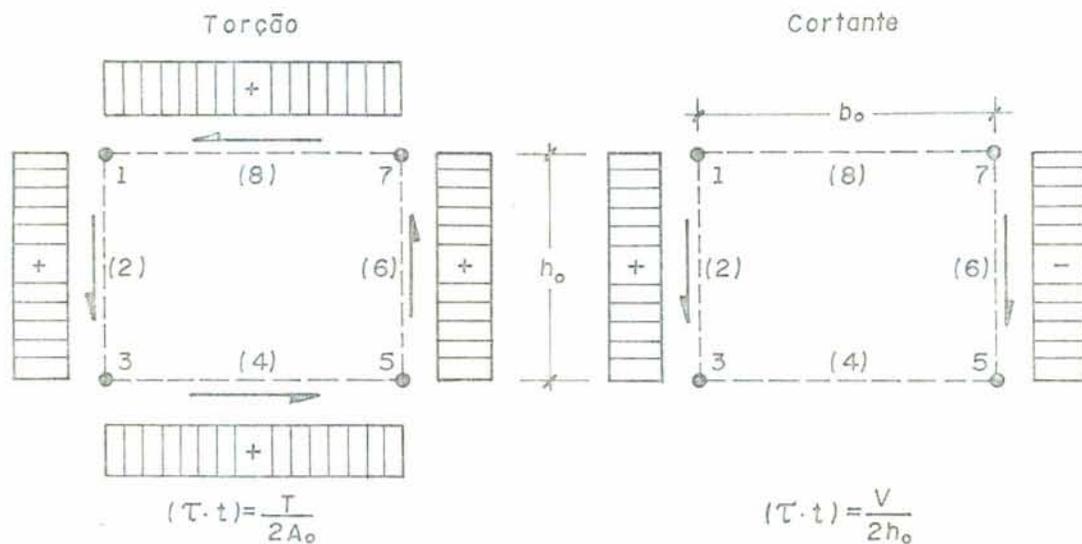


FIGURA 3.11 - Fluxos de tensões tangenciais devido a torção e cortante.

Pela superposição destes fluxos tangenciais para os diferentes lados, obtêm-se

$$\text{Para o lado 2} \quad (\tau t)_2 = \frac{T}{2 \cdot A_o} + \frac{V}{2h}$$

$$\text{Para o lado 4 e 8} \quad (\tau t)_4 = (\tau t)_8 = \frac{T}{2 \cdot A_o} \quad (3.37)$$

$$\text{Para o lado 6} \quad (\tau t)_6 = \frac{T}{2 \cdot A_o} - \frac{V}{2h}$$

Todos os lados terão diferentes inclinações para as bielas de compressão, de tal modo que o escoamento de dois conjuntos quaisquer das armaduras longitudinais e os estribos deverá ocorrer simultaneamente. O correspondente esquema estático está na FIGURA 3.12.

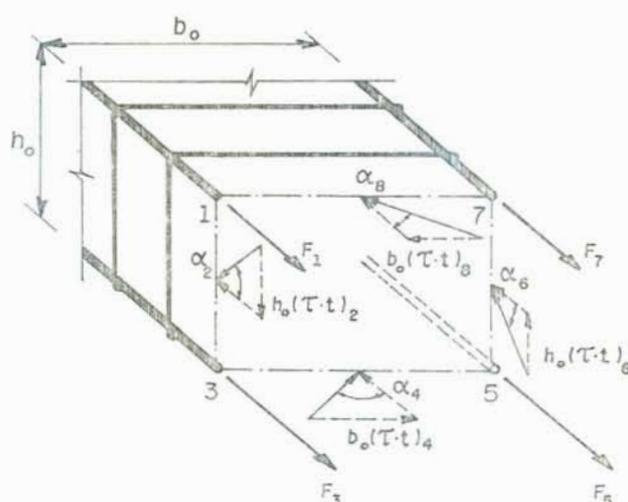


FIGURA 3.12 - Sistema estático sob torção-flexão-corte.

Para o primeiro mecanismo de ruptura, assume-se que as barras inferiores escoam, $F_3 = F_5 = F_{yinf}$. Desta maneira, a seção transversal rotará em relação ao eixo superior 1-7 (FIGURA 3.12).

Fazendo o somatório dos momentos em relação a este eixo e igualando-o ao momento fletor último, $\Sigma M^{1-7} = M_u$, obtemos a seguinte expressão

$$M_u = 2 \cdot F_{yinf} \cdot h_o - (\tau \cdot t)_2 \cdot h_o \cdot \cot \alpha_2 \cdot \frac{h_o}{2} - (\tau \cdot t)_4 \cdot b_o \cdot \cot \alpha_4 \cdot h_o - (\tau \cdot t)_6 \cdot h_o \cdot \cot \alpha_6 \cdot \frac{h_o}{2} \quad (3.38)$$

A equação (3.31) estabelece uma relação entre as forças no estribo e a inclinação α das diagonais de concreto comprimido. Se o escoamento do estribo ocorre, esta equação fica igual a

$$S_y = (\tau \cdot t) \cdot s \cdot \tan \alpha$$

Substituindo este valor nas equações (3.37), determina-se as inclinações das bielas nas quatro "Paredes Resistentes" da seção, com as expressões a seguir

$$\cot \alpha_2 = \frac{(\tau \cdot t)_2 \cdot s}{S_y} = \frac{s}{S_y} \cdot \left(\frac{T}{2 \cdot A_o} + \frac{V}{2 \cdot h_o} \right)$$

$$\cot \alpha_4 = \frac{(\tau \cdot t)_4 \cdot s}{S_y} = \frac{s}{S_y} \cdot \frac{T}{2 \cdot A_o}$$

$$\cot \alpha_6 = \frac{(\tau \cdot t)_6 \cdot s}{S_y} = \frac{s}{S_y} \cdot \left(\frac{T}{2 \cdot A_o} - \frac{V}{2 \cdot h_o} \right)$$

Trocando o valor $\cot \alpha$ na equação (3.38) pelos valores das expressões acima; fazendo uso dos valores de referência das equações (3.13), (3.26) e (3.27) e da relação $\rho = F_{yinf} / F_{ysup}$, obtém-se a seguinte equação de interação

$$\frac{1}{\rho} \cdot \left[\left(\frac{T_u}{T_{uo}} \right)^2 + \left(\frac{V_u}{V_{uo}} \right)^2 \right] + \frac{M_u}{M_{uo}} = 1 \quad (3.39)$$

Uma expressão similar é obtida supondo o escoamento das armaduras longitudinais superiores, $F_1 = F_7 = F_{ysup}$.

$$\left(\frac{T_u}{T_{uo}} \right)^2 + \left(\frac{V_u}{V_{uo}} \right)^2 - \rho \cdot \frac{M_u}{M_{uo}} = 1 \quad (3.40)$$

Existe outra possibilidade de escoamento das armaduras longitudinais: escoamento das barras 1 e 3 ou das barras 7 e 5. Supondo que as barras 1 e 3 escoem, tem-se

$F_1 = F_{y\text{sup}}$ e $F_3 = F_{y\text{inf}}$. Neste caso, a seção transversal rotará em relação ao eixo vertical 5-7 ao longo do lado direito (FIGURA 3.12). Os momentos fletores em relação a este eixo tornam-se nulos.

Usando os mesmos procedimentos anteriores chegamos a seguinte equação de interação

$$\left(\frac{T_u}{T_{uo}}\right)^2 + \frac{2 T_u V_u}{T_{uo} V_{uo}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_o}{u}} + \left(\frac{V_u}{V_{uo}}\right)^2 = \frac{1}{2} (\rho + 1) \quad (3.41)$$

A interpretação gráfica destas três curvas de interações está na FIGURA 3.13, para uma taxa $\rho=3$. Os diferentes mecanismos de ruptura, devido às diversas possibilidades de escoamento das armaduras, são também mostrados. A intersecção destas três curvas forma uma superfície no espaço de tensões chamada de capacidade de carga da viga sob flexão-torção-corte.

É importante observar que nenhum mecanismo de ruptura compatível geometricamente com as curvas da FIGURA 3.13 mostrada na página seguinte, foi proposta. Com isso não se garante a unicidade da solução, mas garante-se que esta solução é um dos limites inferiores.

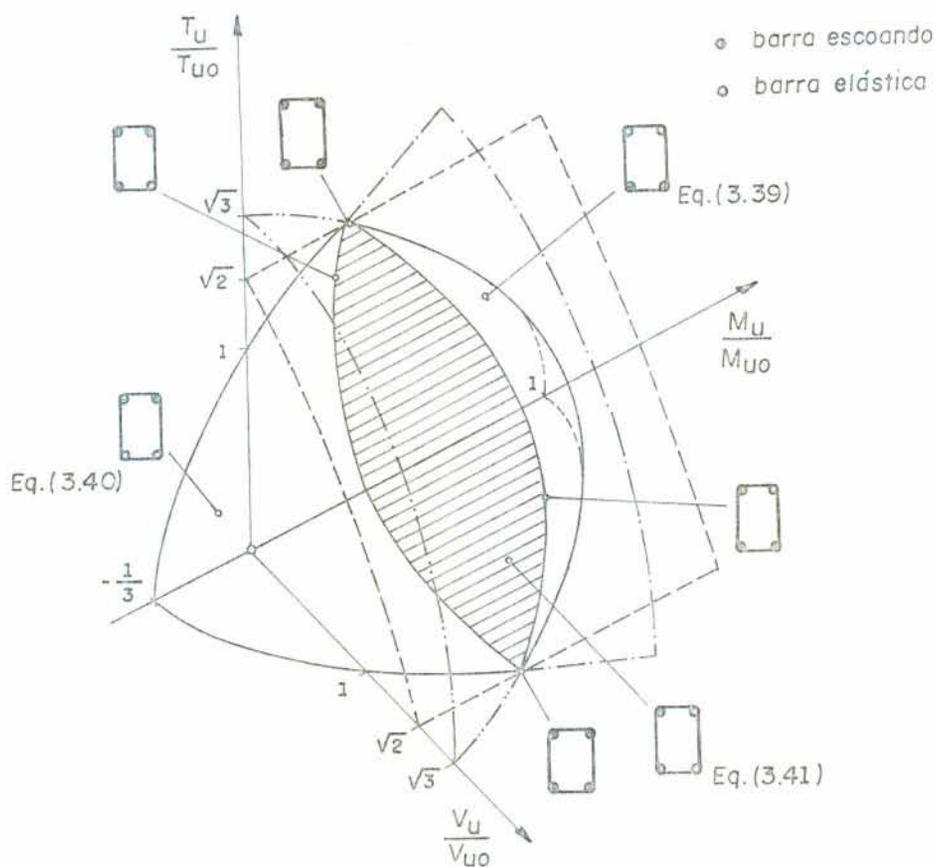


FIGURA 3.13 - Curvas de interação para torção-flexão-corte.

3.5. Superfície de Escoamento

A análise da FIGURA 3.13 trata-se de um problema complexo, pois a intersecção das três curvas de interação geram uma superfície de carga com infinitos pontos angulosos, onde o vetor de fluxo plástico não está definido. Além do que, haveria uma dificuldade enorme para a implementação computacional ao se adotar esta superfície.

Assim surge a necessidade de se definir uma superfície de carga simples para haver a possibilidade da aplicação teórica e computacional do problema proposto, a partir das curvas de interação do item 3.4.

Desta maneira, define-se as seguintes curvas de interação:

- A primeira curva obtém-se trocando os valores de referência V_{uo} e T_{uo} da equação (3.39) pelos valores $V_{u1} = \sqrt{\rho} V_{uo}$ e $T_{u1} = \sqrt{\rho} T_{uo}$, chegando a equação abaixo

$$\left(\frac{V_u}{V_{u1}}\right)^2 + \left(\frac{T_u}{T_{u1}}\right)^2 + \frac{|M_u|}{M_{uo}} = 1 \quad (3.42)$$

O valor absoluto de M_u é usado pois as outras duas parcelas da equação acima são positivas, ambas são elevadas ao quadrado e assim, trabalha-se no quadrante positivo do espaço de tensões.

- A segunda curva tem-se trocando os valores de V_{uo} e T_{uo} da equação (3.41) pelos valores $V_{u2} = \sqrt{1/2(\rho+1)} \cdot V_{uo}$ e $T_{u2} = \sqrt{1/2(\rho+1)} \cdot T_{uo}$, determinando-se a expressão seguinte

$$\left(\frac{T_u}{T_{u2}}\right)^2 + \left(\frac{V_u}{V_{u2}}\right)^2 + \frac{|T_u| |V_u|}{T_{u2} V_{u2}} 2 \cdot \sqrt{\frac{2 h_o}{u}} = 1 \quad (3.43)$$

Os valores absolutos de T_u e V_u são adotados pelos mesmos motivos apresentados acima.

Para a análise de um problema, as curvas de interação calculadas neste item serão aplicadas separadamente, sem considerar a intersecção entre as mesmas.

Cabe salientar que, ao determinar-se as curvas de interação das equações (3.42) e (3.43), assumiu-se como hipótese básica o comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras longitudinais e transversais. Portanto, nas aplicações numéricas do capítulo 5, ao usar-se estas curvas de interação como superfície de escoamento de elementos de barra de concreto armado, a constante de endurecimento será tomada igual a zero ($H=0$).

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, G o módulo de elasticidade transversal, I o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo local y , J o momento de inércia a torção da seção transversal do elemento e L o comprimento do elemento.

A matriz de rigidez elastoplástica é calculada de acordo com as equações (2.29), (2.30) e (2.31) para um elemento que tenha articulação plástica no nó i , nó j ou em ambos, respectivamente.

4.3. Critério de Plastificação dos Elementos

No caso dos elementos de grelha, serão considerados plásticos os nós cujos estados de tensões satisfizerem a equação (3.42), isto é, quando o estado de tensões do nó ocupar no espaço de tensões, um ponto sobre a superfície de escoamento.

Conforme o item 2.4, o elemento será considerado: elástico, se não tiver nenhum nó plastificado; parcialmente plastificado, se tiver um dos nós plastificado; totalmente plástico, quando ambos os nós estiverem plastificados.

Afim de melhorar a eficiência computacional, definimos uma faixa de plastificação que contém estados de tensões próximos ao estado de tensões que plastifica o nó. Portanto, serão considerados plastificados os nós cujos níveis de tensões estiverem dentro desta faixa de plastificação, de tal forma que o nó i de um elemento k estará plastificado quando se cumprir

$$1 - \delta \leq \left(\frac{Fz_{ik}}{Vp_k} \right)^2 + \left(\frac{Mx_{ik}}{Tp_k} \right)^2 + \frac{|My_{ik}|}{Mp_k} \leq 1 \quad (4.2)$$

onde Fz_{ik} , Mx_{ik} e My_{ik} são esforços na extremidade i do elemento k , Vp_k , Tp_k e Mp_k são os esforços plásticos limites do elemento k e δ é um valor que pode ser escolhido em função da precisão e eficiência desejadas. Um valor típico usado é $\delta = 0,01$.

4.4. Algoritmo de Solução

A seguir será feita uma descrição da seqüência geral do programa computacional. O programa foi desenvolvido de modo que ao fim de cada etapa de cargas tenhamos um ou mais nós da estrutura plastificados. A seqüência usada é a seguinte:

a) Arbitra-se um vetor de cargas \underline{p}^0 com as componentes aplicadas nos nós e nas direções desejadas. A proporção numérica adotada entre as diversas componentes é mantida constante até o fim do cálculo. Para este carregamento resolve-se o problema de forma elástica, obtendo os deslocamentos nodais e os esforços nas extremidades dos elementos.

b) Determina-se um valor \underline{r}^0 de tal forma que a multiplicação deste valor pelo sistema de carga inicial \underline{p}^0 dá o primeiro nó plastificado. Para determinar o valor de \underline{r}^0 , aplicamos a equação (3.45).

Partindo de uma análise inicial elástica, de onde obtém-se as forças no nó \underline{i} do elemento \underline{k} (Fz_{ik}^0 , Mx_{ik}^0 , My_{ik}^0), atingirá-se o estado de plastificação do nó \underline{i} se multiplicarmos os esforços, cargas e deslocamentos por um valor r_{ik}^0 tal que

$$\left(\frac{r_{ik}^0 Fz_{ik}^0}{Vp_k}\right)^2 + \left(\frac{r_{ik}^0 Mx_{ik}^0}{Tp_k}\right)^2 + \frac{|r_{ik}^0 My_{ik}^0|}{Mp_k} = 1 \quad (4.3)$$

Desenvolvendo esta equação de 2º grau pode-se obter o valor de \underline{r}^0 :

$$r_{ik}^0 = \frac{\sqrt{\left(\frac{My_{ik}^0}{Mp_k}\right)^2 + 4 \left[\left(\frac{Fz_{ik}^0}{Vp_k}\right)^2 + \left(\frac{Mx_{ik}^0}{Tp_k}\right)^2\right]} - \frac{My_{ik}^0}{Mp_k}}{2 \left[\left(\frac{Fz_{ik}^0}{Vp_k}\right)^2 + \left(\frac{Mx_{ik}^0}{Tp_k}\right)^2\right]} \quad (4.4)$$

Usa-se o sinal positivo na raiz quadrada pois não

interessam valores negativos de r_{ik}^o .

Uma vez calculado os valores de r_{ik}^o para todos os elementos, determina-se o menor deles r_{\min}^o que dará o primeiro nó plastificado.

c) Atualizam-se os vetores de cargas nodais, de deslocamentos nodais e de forças nas extremidades dos elementos:

$$\begin{aligned}\tilde{P}^1 &= r_{\min}^o \tilde{P}^o \\ \tilde{U}^1 &= r_{\min}^o \tilde{U}^o \\ \tilde{F}^1 &= r_{\min}^o \tilde{F}^o\end{aligned}\tag{4.5}$$

d) Calcula-se a matriz de rigidez elastoplástica \tilde{K}^{ep} , conforme item 2.4, para elementos que tiverem algum nó plastificado. Entre estes serão incluídos também os elementos que satisfizerem a equação (4.2).

A matriz de rigidez elastoplástica dos elementos será sempre atualizada no início de cada etapa. Para isto, utiliza-se o vetor de forças nas extremidades dos elementos acumulados até a etapa anterior.

e) O próximo passo é modificar a matriz de rigidez global da estrutura. Isso é feito retirando-se a contribuição correspondente a etapa anterior, de cada elemento que já estava plastificado ou que se plastificou durante a etapa atual, e acrescentando-se a nova contribuição de cada elemento plastificado à matriz de rigidez global.

f) Resolve-se o sistema

$$\tilde{P}^o = [\tilde{K}] \Delta \tilde{U}\tag{4.6}$$

onde \tilde{P}^o é o vetor de cargas definido em a, $[\tilde{K}]$ é a matriz de rigidez global obtida em e e $\Delta \tilde{U}$ é o incremento do vetor de deslocamentos nodais, que obtemos como solução do sistema.

Para a solução deste sistema o procedimento esco-

Obtido foi o método de Gauss para banda simétrica⁶.

Calcula-se o determinante da matriz de rigidez global na etapa atual comparando-o com o valor da etapa anterior. Se

$$\det [\underline{K}]^{\ell} = \det [\underline{K}]^{\ell-1} \quad (4.7)$$

ou

$$\det [\underline{K}]^{\ell} \leq 0 \quad (4.8)$$

a estrutura apresenta a configuração de mecanismo de colapso plástico, sendo que a equação (4.7) corresponde ao colapso parcial e a equação (4.8) ao colapso total.

g) Obtido o vetor $\Delta \underline{U}$, determina-se o incremento do vetor de forças nas extremidades dos elementos, isto é,

$$\Delta \underline{F} = \underline{K} \Delta \underline{U} \quad \text{para elementos elásticos;}$$

$$\Delta \underline{F} = \underline{K}^{ep} \Delta \underline{U} \quad \text{para elementos parcialmente ou totalmente plásticos.}$$

h) O próximo passo do programa é a determinação de um valor r para o nó i do elemento k na etapa ℓ . Este valor calculado é o necessário para fazer com que as forças na extremidade i do elemento k em fase elástica atinja linearmente, na etapa considerada, a superfície de escoamento do material.

Neste caso a estrutura já está submetida a um determinado estado de carga. Se quisermos atingir a plastificação de um nó devemos multiplicar os incrementos de esforços, cargas e deslocamentos por um valor r_{ik} para que se cumpra

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Fz_{ik}^{\ell-1} + r_{ik} \Delta Fz_{ik}^{\ell}}{Vp_k} \right)^2 + \left(\frac{Mx_{ik}^{\ell-1} + r_{ik} \Delta Mx_{ik}^{\ell}}{Tp_k} \right)^2 + \\ & + \frac{|My_{ik}^{\ell-1} + r_{ik} \Delta My_{ik}^{\ell}|}{Mp_k} = 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $Fz_{ik}^{\ell-1}$, $Mx_{ik}^{\ell-1}$ e $My_{ik}^{\ell-1}$ são os esforços existentes no nó em consideração com os valores acumulados até a etapa anterior, ΔFz_{ik}^{ℓ} , ΔMx_{ik}^{ℓ} e ΔMy_{ik}^{ℓ} são os incrementos calculados na etapa atual de acordo com o item "g" e r_{ik} um fator a ser determinado.

Resolvendo a equação (4.9) de 2º grau, podemos determinar

$$r_{ik} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.10)$$

onde os valores de A, B e C são dados pelas fórmulas:

$$A = \left(\frac{\Delta Fz_{ik}^{\ell}}{Vp_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Mx_{ik}^{\ell}}{Tp_k}\right)^2 \quad (4.11)$$

$$B = \frac{|\Delta My_{ik}^{\ell}|}{Mp_k} \frac{2 Fz_{ik}^{\ell-1} \Delta Fz_{ik}^{\ell}}{Vp_k^2} + \frac{2 Mx_{ik}^{\ell-1} \Delta Mx_{ik}^{\ell}}{Tp_k^2} \quad (4.12)$$

$$C = \left(\frac{Fz_{ik}^{\ell-1}}{Vp_k}\right)^2 + \left(\frac{Mx_{ik}^{\ell-1}}{Tp_k}\right)^2 + \frac{|My_{ik}^{\ell-1}|}{Mp_k} - 1 \quad (4.13)$$

A seguir, será analisado o sinal da raiz quadrada na fórmula (4.10)

Sinal de A:

Da equação (4.11) conclui-se que

$$A > 0$$

Sinal de B:

Lembrando o item 2.2, tem-se que a expressão

$\left\{\frac{\partial \psi}{\partial F}\right\}^T \cdot \tilde{F}$ é matematicamente envolvida no critério de carga, carga neutra e descarga. Assim, desenvolvendo esta expressão para o nó i do elemento k na etapa ℓ , com a superfície de escoamento da equação (4.2), obtém-se:

$$\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T = \left\{ \frac{2 Fz_{ik}^{\ell-1}}{Vp_k^2} ; \frac{2 Mx_{ik}^{\ell-1}}{Tp_k^2} ; \frac{SGN My_{ik}^{\ell-1}}{Mp_k} \right\} \quad (4.14)$$

$$\dot{\underline{F}} = \begin{Bmatrix} \Delta Fz_{ik}^{\ell} \\ \Delta Mx_{ik}^{\ell} \\ \Delta My_{ik}^{\ell} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Do produto escalar entre as equações (4.14) e (4.15), tem-se como resultado a mesma expressão da equação (4.12), logo conclui-se que

$$B = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \underline{F}} \right\}^T \cdot \dot{\underline{F}}$$

Portanto, o sinal de B será

- em carga

$$B > 0$$

- em descarga

$$B < 0$$

Sinal de C:

Como o nã irã atingir a superfície de carga nesta etapa, tem-se

$$\left(\frac{Fz_{ik}^{\ell-1}}{Vp_k} \right)^2 + \left(\frac{Mx_{ik}^{\ell-1}}{Tp_k} \right)^2 + \frac{|My_{ik}^{\ell-1}|}{Mp_k} < 1 \quad (4.16)$$

Logo, o sinal de C será

$$C < 0$$

Analisando os sinais de A, B e C conclui-se que: tanto em carga quanto em descarga, tem-se

$$\sqrt{B^2 - 4AC} > 0$$

$$|\sqrt{B^2 - 4AC}| > |B|$$

Desta maneira, o valor de r_{ik} é positivo.

i) De todos os valores de r_{ik} calculados conforme o item "h", escolhe-se o menor deles denominado r_{\min} . O incremento de carga $r_{\min} P^0$ é necessário para levar o nó i do elemento k ao escoamento.

j) Atualizam-se os vetores de cargas nodais, de deslocamentos nodais e de forças nas extremidades dos elementos.

$$\underline{P}^{\ell} = \underline{P}^{\ell-1} + r_{\min} \underline{P}^0$$

$$\underline{F}^{\ell} = \underline{F}^{\ell-1} + r_{\min} \Delta \underline{F}^{\ell} \quad (4.17)$$

$$\underline{U}^{\ell} = \underline{U}^{\ell-1} + r_{\min} \Delta \underline{U}^{\ell}$$

k) Faz-se o controle dos nós já plastificados. O objetivo deste passo é verificar se os nós plastificados até a etapa anterior afastaram-se muito (definido de acordo com o acuramento numérico desejado) da superfície de escoamento.

Se algum nó plastificado cujo estado de tensões não satisfizer a equação abaixo

$$\left(\frac{Fz_{ik}^{\ell-1}}{Vp_k}\right)^2 + \left(\frac{Mx_{ik}^{\ell-1}}{Tp_k}\right)^2 + \frac{|My_{ik}^{\ell-1}|}{Mp_k} \leq 1,01 \quad (4.18)$$

procede-se da seguinte maneira: diminui-se o valor de r_{\min} calculado em h (neste programa toma-se $0,5 r_{\min}$). Em seguida, volta-se ao item "j" e repete-se o processo até que todos os nós plastificados satisfaçam a equação (4.18); quando isto acontecer, passa-se para o item seguinte.

Para os elementos já plastificados calcula-se novas matrizes de rigidez elastoplástica e com estas, atualiza-se a matriz de rigidez global.

Voltamos ao item "d" e repetimos o processo até atingir a carga de colapso.

4.5. Diagrama de Bloco do Programa Computacional

A seguir será representado o desenvolvimento do programa computacional em forma de macro-diagrama de blocos, conforme a figura (4.1) na página que segue. Detalhes sobre a entrada de dados são encontrados no Apêndice A.

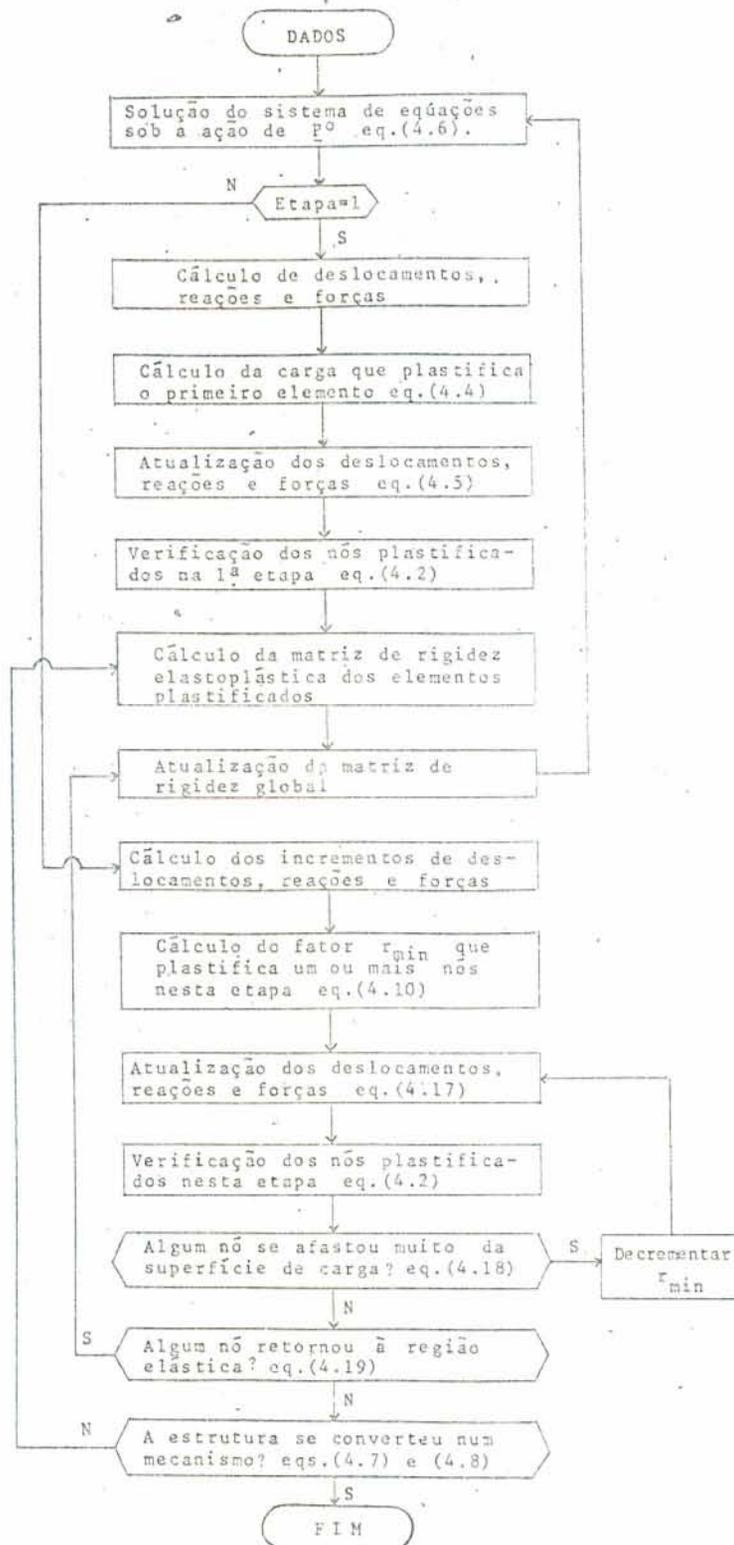


FIGURA 4.1

5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo procura-se estabelecer algumas comparações dos resultados obtidos através da implementação dos procedimentos discutidos nos capítulos anteriores.

Algumas soluções são comparadas com as obtidas por outros autores, outras confrontadas com resultados experimentais.

Serão apresentados também resultados da análise de problemas simples, constituídos por um único elemento, que foram úteis na implementação do endurecimento isótropo no programa. O computador utilizado foi o BURROUGHS B6700.

5.1. Exemplos com a Utilização de Apenas um Elemento

O objetivo dos exemplos a seguir foi testar o comportamento do programa, para problemas com endurecimento isótropo.

Apresenta-se então, uma viga em balanço submetida a um momento fletor em sua extremidade livre (FIGURA 5.1). Desta maneira, tem-se um estado de flexão pura, podendo-se portanto, determinar a curva momento fletor-rotação na extremidade livre da viga. Esta curva deve coincidir com o modelo bilinear da relação momento-rotação adotada para o material com endurecimento isótropo. Na FIGURA 5.1 pode ser visto que há uma concordância muito boa.

Os dados apresentados para a análise numérica dos exemplos deste item foram retirados do exemplo do item seguinte, com exceção da constante de endurecimento. Para este exemplo foram: constante de endurecimento $H = 10$, rigidez a flexão elástica $EI = 1381,35 \text{ KN.m}^2$, momento fletor de plastificação $MP = 76,82 \text{ KN.m}$, comprimento do elemento $l = 1\text{m}$ e o incremento de carga igual a 10 KN.m .

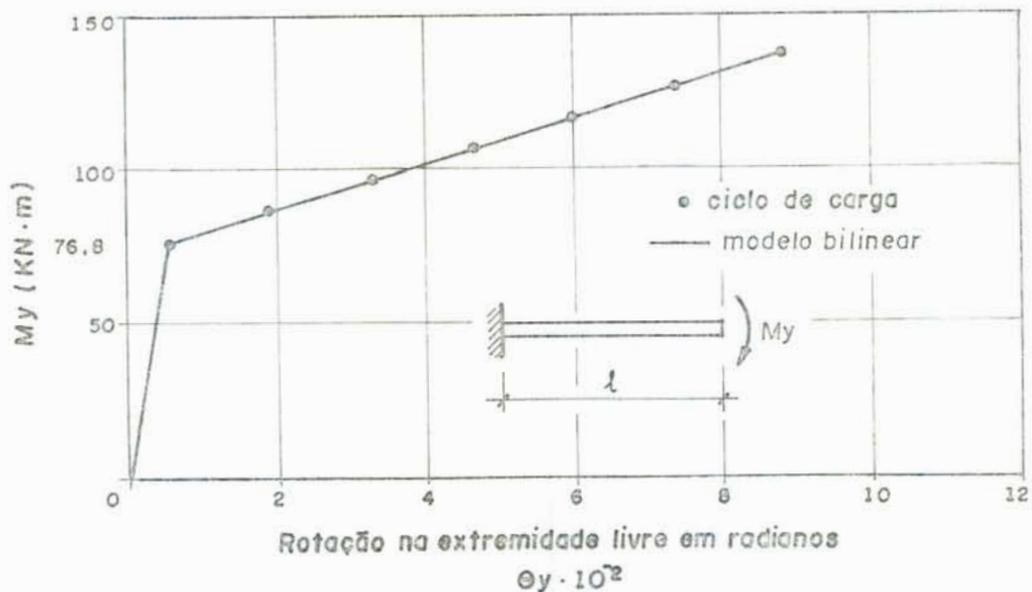


FIGURA 5.1 - Curva momento-rotação na extremidade livre da viga em balanço sob flexão pura.

Como segundo exemplo, tem-se o mesmo elemento, agora submetido a um momento torsor em sua extremidade livre (FIGURA 5.2), tendo-se assim, um estado de torção pura. A partir daí, determina-se a curva momento torsor-torção na extremidade livre da viga em balanço. Esta curva deve coincidir com o modelo bilinear da relação torque-torção adotado para o material com endurecimento isótropo. Na FIGURA 5.2 pode ser visto que há uma concordância muito boa.

Os valores adotados para este exemplo foram: constante de endurecimento $H = 10$, rigidez torsional elástica $GJ = 392,82 \text{ KN.m}^2$, momento torsor de plastificação $T_p = 13,56 \text{ KN.m}$, comprimento do elemento $l = 1 \text{ m}$ e o incremento de carga igual a 1 KN.m .

Como terceiro exemplo, discute-se a influência da interação flexo-torção no comportamento elastoplástico da viga em balanço. Assim, aplicam-se um momento fletor e um momento torsor na extremidade livre da viga. Adotou-se para este caso, a superfície de escoamento com a equação $m^2 + t^2 = R^2$, onde $m = M_y/M_p$ e $t = M_x/T_p$. Para a superfície de escoamento inicial toma-se $R = 1$.

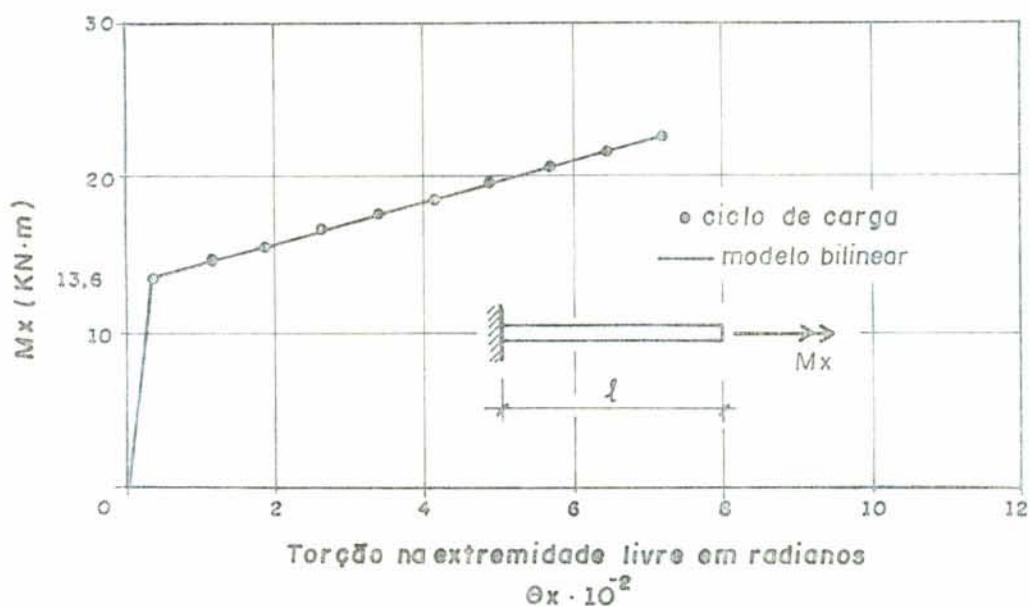
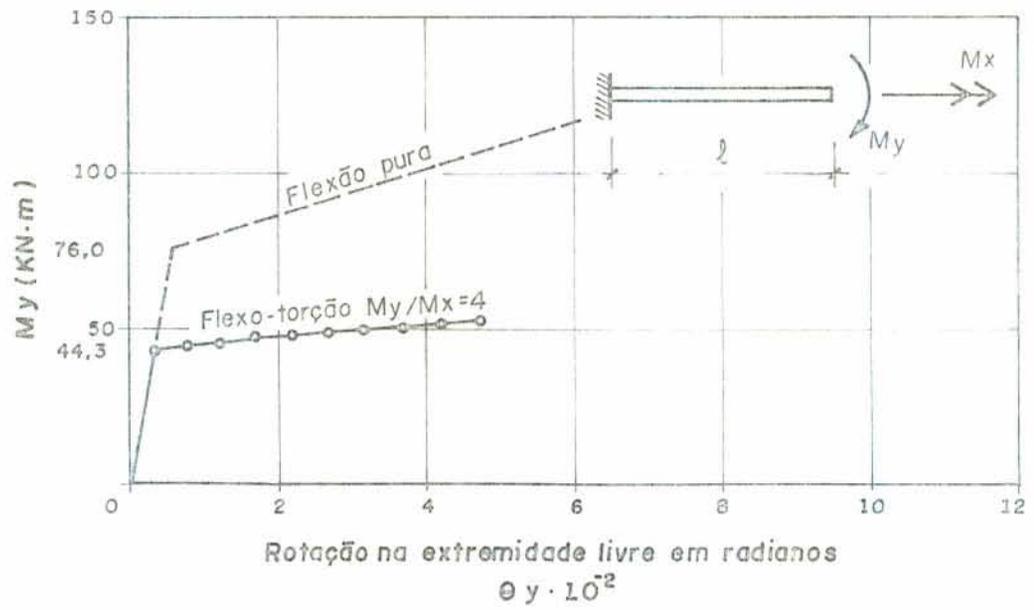


FIGURA 5.2 - Curva torque-torção na extremidade livre da viga em balanço sob torção pura.

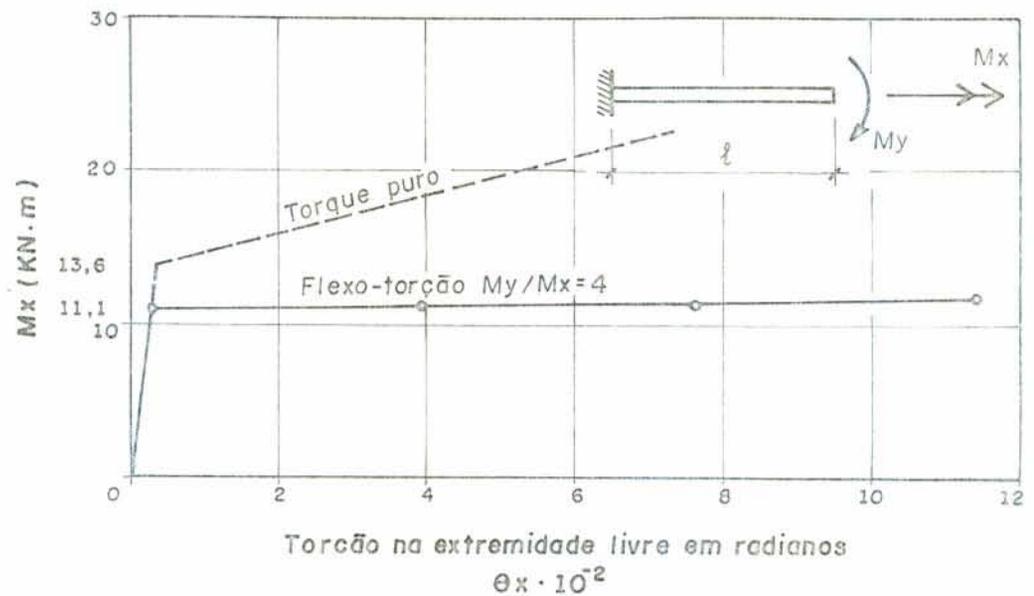
As FIGURAS 5.3.a e 5.3.b indicam as curvas momento fletor-rotação e torque-torção na extremidade livre da viga, obtidas da análise numérica utilizando um incremento de carga proporcional com $M_y/M_x = 4$. Pode-se observar a não linearidade destas curvas para as deformações elastoplásticas, o que é correto, uma vez que a não linearidade da interação flexo-torção, definida através da superfície de escoamento, determina a não linearidade da matriz de rigidez elastoplástica e conseqüentemente a não linearidade da relação entre esforços de extremidade do elemento e deformações elastoplásticas (FIGURA 5.4).

A superfície de escoamento fica representada por um círculo de raio R . Pode-se ver na FIGURA 5.4 o movimento da superfície de escoamento, expandindo-se uniformemente, durante o processo de carga, o que é condizente com o comportamento da superfície de carga do material com endurecimento isótropo.

Os dados são os mesmos dos exemplos anteriores, sendo os incrementos de carga iguais a 1 KN.m e 0,25 KN.m, para o momento fletor e torsor, respectivamente.



(a)



(b)

FIGURA 5.3 - Comportamento elastoplástico da viga em balanço sob flexo-torção.

a) Curva momento-rotação na extremidade livre. b) Curva torque-torção na extremidade livre.

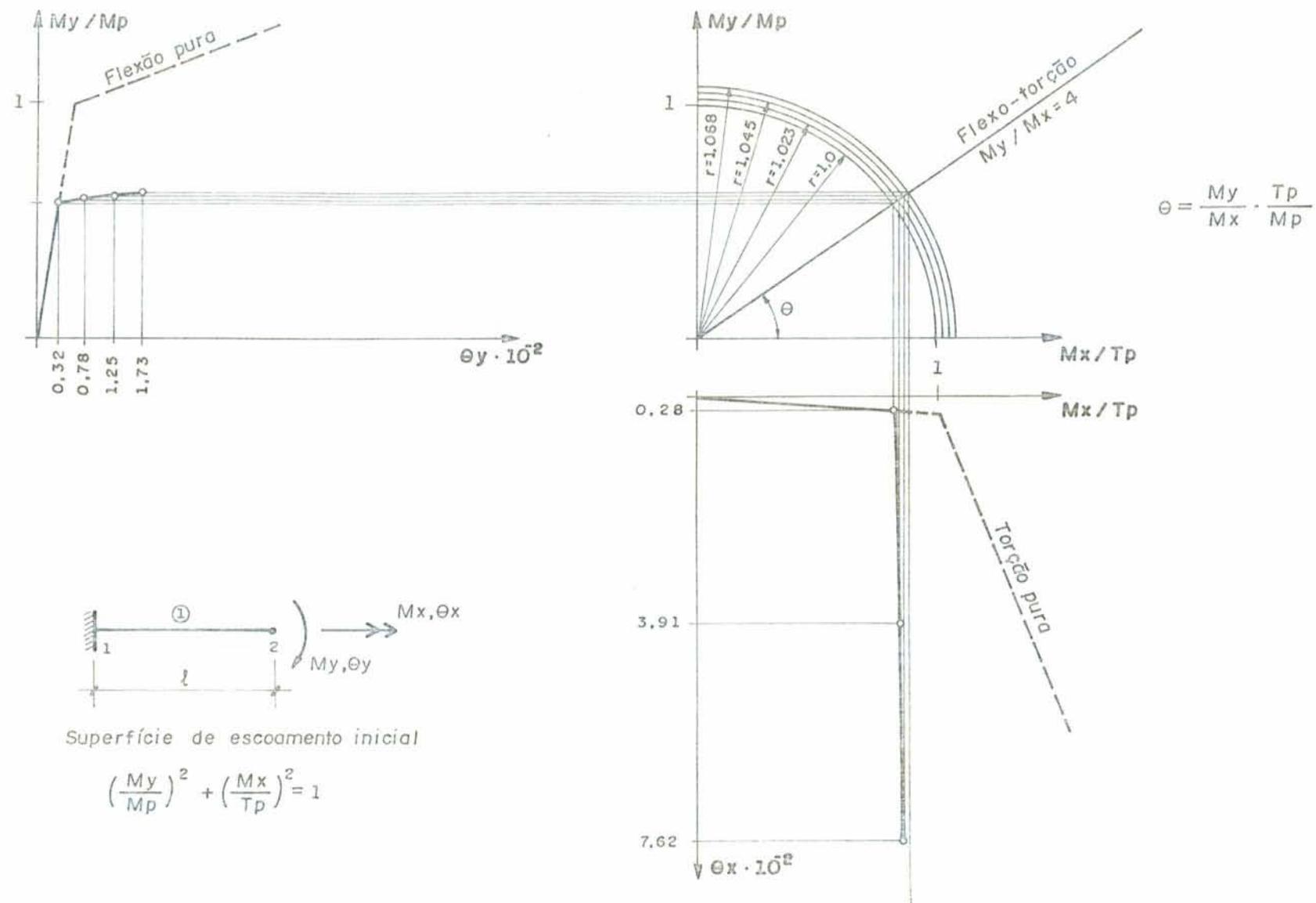


FIGURA 5.4 - Comportamento elastoplástico com endurecimento isótropo das curvas momento-rotação e torque-torção, e da superfície de escoamento, durante o processo de carga para a viga em balanço sob flexo-torção.

5.2. Viga Curva de Concreto Armado com Diversas Condições de Contorno

O exemplo a ser considerado agora é uma viga curva de concreto armado de seção transversal retangular. Com o comprimento de 2,9m, o ângulo do vão de 75 graus e o raio de 2,21m. Sujeita a uma carga concentrada aplicada à 24 graus do apoio direito (FIGURA 5.5).

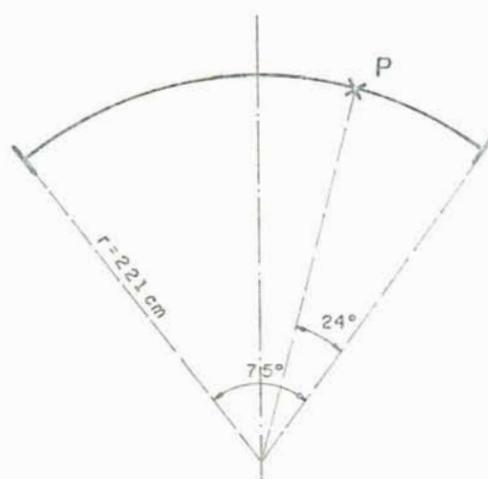


FIGURA 5.5 - Geometria da viga curva.

Uma viga com estas características foi ensaiada por BADAWY et al³ para as condições de contorno apresentadas na figura abaixo.

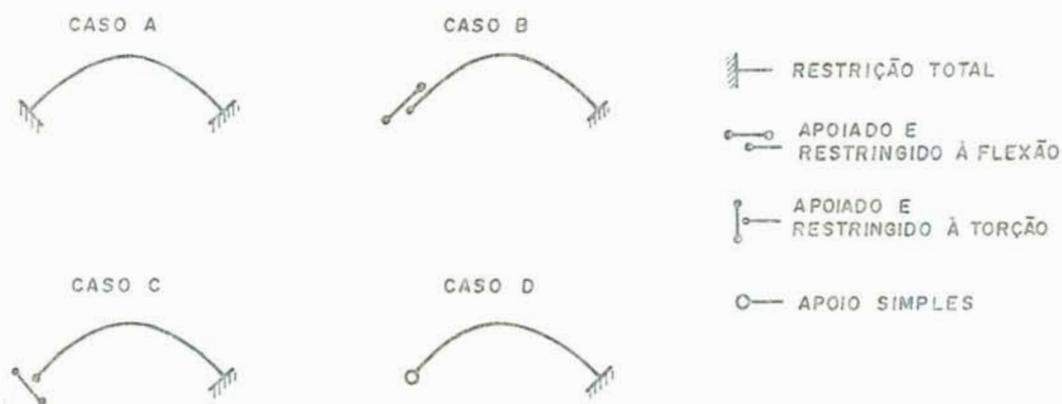


FIGURA 5.6 - Condições de contorno da viga curva.

Este autor obteve as cargas últimas e os correspondentes mecanismos de ruptura, tanto analítica como experimentalmente. Na análise teórica BADAWY assumiu que as seções transversais da viga tinham o comportamento rígido-plástico e ductilidade suficiente a flexão, torção e corte. Utilizou a aproximação do teorema do limite inferior, para o qual as configurações de equilíbrio estático dos mecanismos de ruptura da viga curva satisfaziam os critérios de escoamento descritos abaixo.

O primeiro critério tem a equação $m^2 + t^2 / (1-v^2) = 1$ e define um limite superior para a carga última, de acordo com a referência [2]. Enquanto que o segundo critério, de equação $m^2 + t^2 / (1-v)^2 = 1$, define um limite inferior.

De acordo com BADAWY, estes critérios levam em consideração a influência do esforço de corte na obtenção da carga última através dos termos $(1-v^2)$ e $(1-v)^2$.

Nas expressões acima $m = M_y/M_p$, $t = M_x/T_p$ e $v = F_z/V_p$.

Assume-se daqui em diante a seguinte notação: Y.C.1 ("Yield Criterion") refere-se ao primeiro critério de escoamento e Y.C.2 refere-se ao segundo. Enquanto que Y.C.3 refere-se ao critério de escoamento definido no capítulo 3, de acordo com a equação 3.42, isto é, $m + t^2 + v^2 = 1$. Cabe lembrar que esta equação também define um limite interior para a carga última, conforme o desenvolvimento teórico exposto no capítulo 3. A interpretação geométrica destas equações acima está mostrada na FIGURA 5.7.

Para aplicarmos o nosso programa e conferi-lo com os resultados de BADAWY, assumimos a viga com comportamento elastoplástico perfeito com força cortante de plastificação $V_p = 151,2$ KN, momento torsor de plastificação $T_p = 13,56$ KN.m e momento fletor de plastificação $M_p = 76,82$ KN.m, dados na referência [3]. Os valores da rigidez a flexão elástica $EI = 1381,35$ KN.m² e da rigidez torsional elástica $GJ = 392,82$ KN.m² foram calculados a partir da seção transversal da viga de 15,2 x 30,5 cm, da resistência média do concreto

ã compressão de $30,04 \text{ N/mm}^2$, de acordo com a referência [3], e fazendo uso dos itens 8.2.5 e 8.2.6 da NB-1/78.

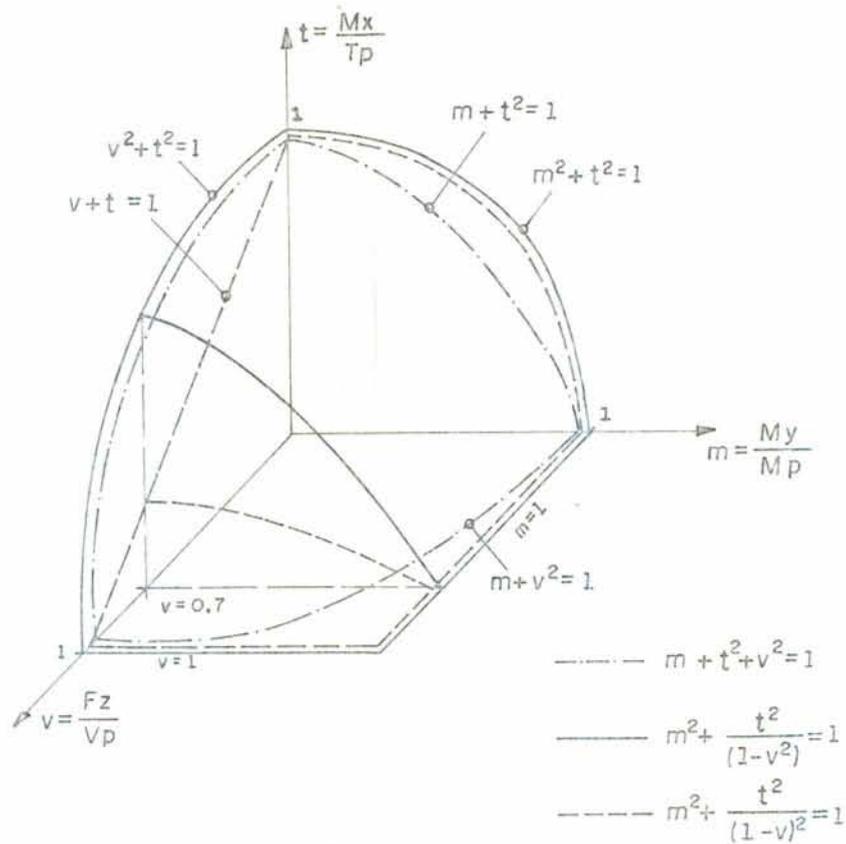


FIGURA 5.7 - Superfícies de escoamentos.

Usando o procedimento numérico descrito no capítulo 4, e utilizando uma faixa de plastificação de 1%, um controle de plastificação de 1,05 e um incremento de carga igual a 1 kN, determinaram-se as cargas últimas que são comparadas com os resultados de BADAWEY, como se indica no decorrer deste exemplo.

Naturalmente, a adoção de elementos retos na modelagem de uma viga curva introduz erros nos esforços internos e na sua redistribuição durante o processo de plastificação. Para saber com quantos elementos retos deveríamos discretizar a viga curva, realizou-se uma análise de convergência, cujos resultados estão indicados na TABELA 1.

TABELA 1 - Valores da carga última em KN para a viga curva discretizada em 6, 8 e 12 elementos retos e com as condições de contorno da FIGURA 5.6, usando o critério de escoamento Y.C.3.

Condições de contorno	6 elementos	8 elementos	12 elementos	$\Delta \%$ *
Caso A	147,4	149,7	150,2	1,9
Caso B	147,5	148,0	148,4	0,6
Caso C	99,8	100,7	103,2	3,4
Caso D	79,8	79,4	81,8	2,5

* Diferença relativa entre o valor da carga última obtida com 6 e 12 elementos.

Concluiu-se da tabela acima que a consideração de um número maior de elementos não afeta significativamente o resultado da carga última e que a partir de 6 elementos tem-se uma precisão razoável. A maior diferença entre os valores da carga última para 6 e 12 elementos foi de 3,4%, para a condição de contorno do Caso C. Portanto, assumiremos daqui em diante a discretização da viga curva em 6 elementos retos, conforme mostra a FIGURA 5.8 abaixo.

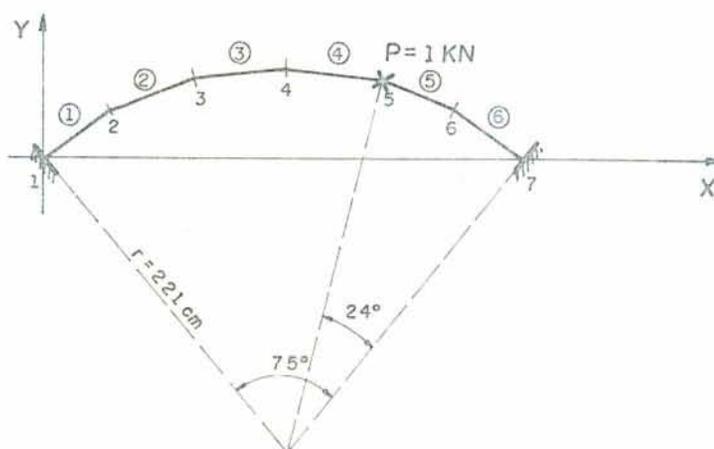


FIGURA 5.8 - Discretização da viga curva em 6 elementos retos.

Na TABELA 2 compara-se os valores da carga última, obtidos através da análise numérica e usando o critério de escoamento Y.C.3, com os valores teóricos, calculados a partir do critério Y.C.2, e experimentais, ambos determinados por BADAWY.

TABELA 2 - Valores da carga última KN para viga curva discretizada em 6 elementos retos, com as condições de contorno da FIGURA 5.6 e usando o critério de escoamento Y.C.3. Comparação com resultados teóricos e experimentais³.

Condições de contorno	6 elementos Y.C.3	valor teórico Y.C.2	$\Delta\%$	valor experimental	$\Delta\%$
Caso A	147,4	144,6	1,9	185,9	26
Caso B	147,5	135,2	9,1	184,6	25,2
Caso C	99,8	95,2	4,8	120,1	20,3
Caso D	79,8	74,5	7,1	84,5	5,9

Levando em consideração que discretizamos a viga curva em elementos retos e utilizamos o critério de escoamento Y.C.3 para obtermos os valores da carga última, pode-se afirmar que estes resultados são confiáveis, pois comparando-os com os valores teóricos obtidos através do critério Y.C.2 (TABELA 2) obteve-se uma boa correlação entre estes valores, o coeficiente de correlação encontrado foi igual a 0,99.

A média de erros entre os resultados da carga última, determinados através da análise numérica, e os valores experimentais foi de 19,4%. Portanto, podemos concluir que de fato o critério de escoamento Y.C.3 também define um limite inferior para a carga última.

Quanto aos mecanismos de colapso plástico determinados pelo nosso programa, eles não correspondem aos mecanismos obtidos, teórica e experimentalmente, por BADAWY, pois discre-

tizamos a viga curva em segmentos retos. Por exemplo, um dos tipos de mecanismos de ruptura previsto pela teoria deste autor, implica na formação de articulações plásticas à torção-corte nos pontos de momento nulo. Com a viga curva discretizada em segmentos de reta, não é possível determinarmos estes pontos. Entretanto, segundo NEAL⁴⁰, o fato de não termos a localização correta das articulações plásticas nos mecanismos de ruptura, não necessariamente, provoca erros importantes na carga de colapso plástico.

Nos itens seguintes, discute-se a influência das condições de contorno, do esforço de corte e das constantes plásticas na carga última.

5.2.1. Influência das Condições de Contorno na Carga Colapso

Neste item, analisa-se a viga curva discretizada em 6 elementos retos (FIGURA 5.8), para os quatro casos de condições de contorno, usando o critério de escoamento Y.C.3. Obtiveram-se as curvas carga-deslocamento expressas no gráfico da figura abaixo.

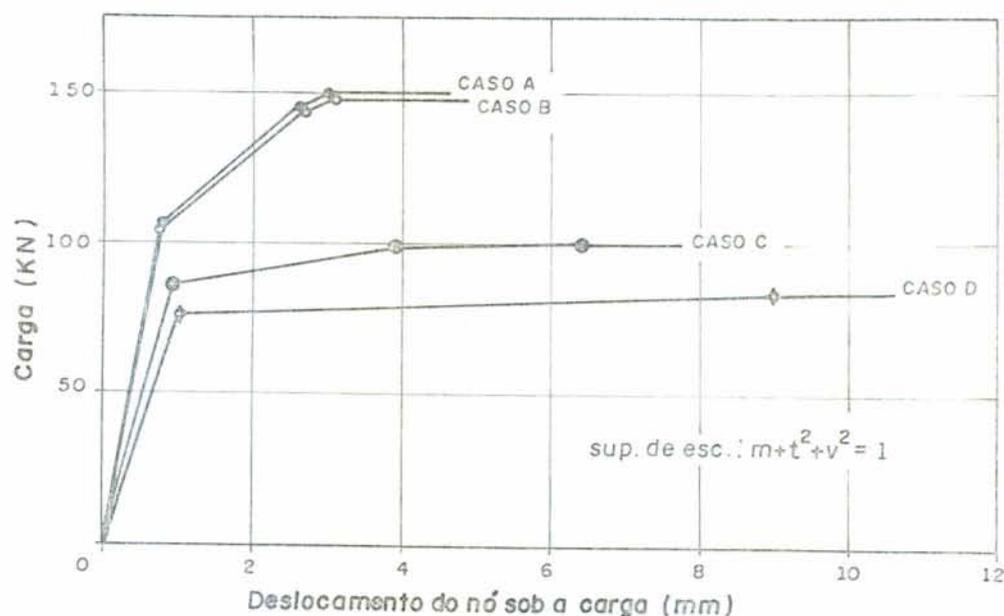


FIGURA 5.9 - Curvas carga-deslocamento da viga curva discretizada em 6 elementos retos. Influência das condições de contorno.

Sobre a influência das condições de contorno na carga de colapso, observa-se nas curvas da FIGURA 5.9, que a falta de restrição a torção na extremidade esquerda da viga curva (condição de contorno do Caso B) tem um efeito desprezível no valor da carga última, ou seja, enquanto que para a condição de contorno do Caso A a carga última foi de 147,4 KN, para o Caso B este valor foi de 147,5 KN. Observa-se ainda que, a restrição à flexão (Caso B, $P_u = 147,5$ KN, TABELA 1) é mais efetiva que a restrição à torção (Caso C, $P_u = 99,8$ KN, TABELA 1) no incremento da carga última e no decréscimo das deformações, isto é, para o mesmo incremento de carga, as vigas com as condições de contorno dos Casos A e B se deformam menos que as vigas dos Casos C e D (FIGURA 5.9). Estes comportamentos foram previstos pela teoria desenvolvida na referência 2 e confirmados experimentalmente³.

5.2.2. Influência do Esforço de Corte na Carga de Colapso

Antes de analisar o exemplo que se segue, é importante fazer a seguinte observação: Durante a análise numérica, ao determinarmos o incremento de carga necessário para plastificar o primeiro, e posteriormente, outros nós da estrutura, utilizando os critérios de escoamento Y.C.1 e Y.C.2, chega-se a uma equação de 4º grau para a variável r_{min} (fator de carga).

Mas de acordo com as seqüências b e h do item 4.4 do capítulo anterior, somente podemos determinar este fator de carga para equações de 2º grau em r_{min} .

Para contornar este problema, arbitraremos valores para $v = Fz/Vp$ nos termos $(1-v^2)$ e $(1-v)^2$ das equações dos critérios de escoamento Y.C.1 e Y.C.2, respectivamente. Este procedimento é sugerido na referência [2]. Tornando-as, deste modo, em equações de 2º grau para a variável r_{min} .

Podendo-se portanto, realizar a análise numérica empregando estes critérios de escoamento.

Desta maneira, analisaremos a viga curva discretizada em 6 elementos retos (FIGURA 5.8) com as condições de contorno da FIGURA 5.6. Usando os critérios de escoamento Y.C.1 e Y.C.2.

Das constantes plásticas dadas para a seção da viga curva, tira-se o valor de $T_p/M_p = 13,56 \text{ KN}/76,82 \text{ KN} \approx 0,18$. Mantém-se este valor fixo e faz-se a análise para os valores de $v = Fz/V_p = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9$ e $0,99$. Obtendo-se as curvas "fator de carga de colapso - \underline{v} " plotadas nos gráficos das FIGURAS 5.10 e 5.11.

Pode-se concluir dos gráficos das referidas figuras que:

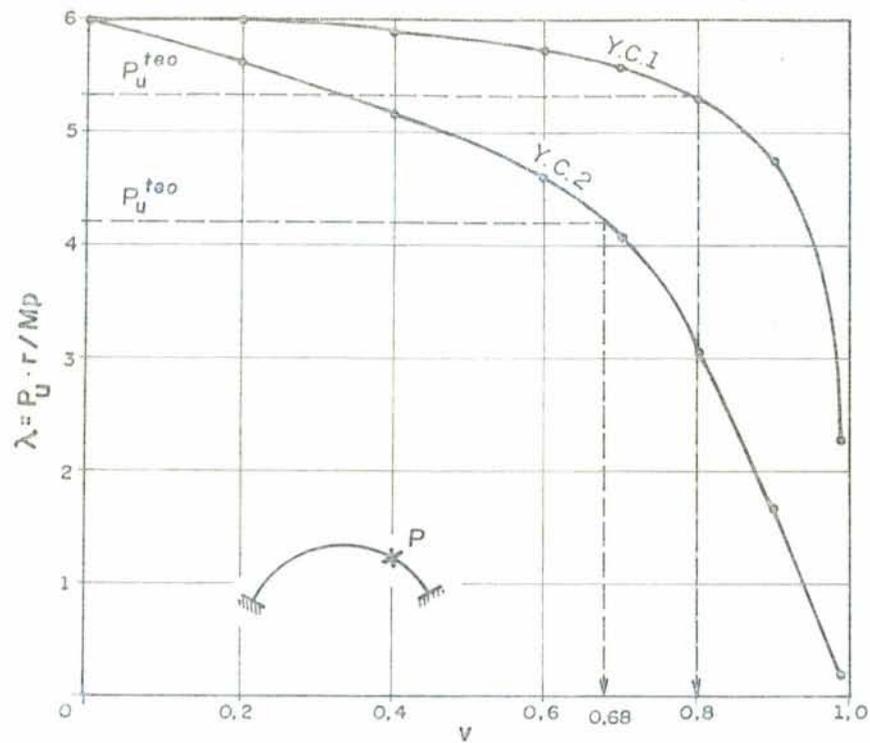
- O fator de carga última decresce com o aumento do valor de \underline{v} ;

- O fator de carga última obtido a partir do critério de escoamento Y.C.2 decresce mais rapidamente que o fator de carga última determinado através da superfície de escoamento Y.C.1;

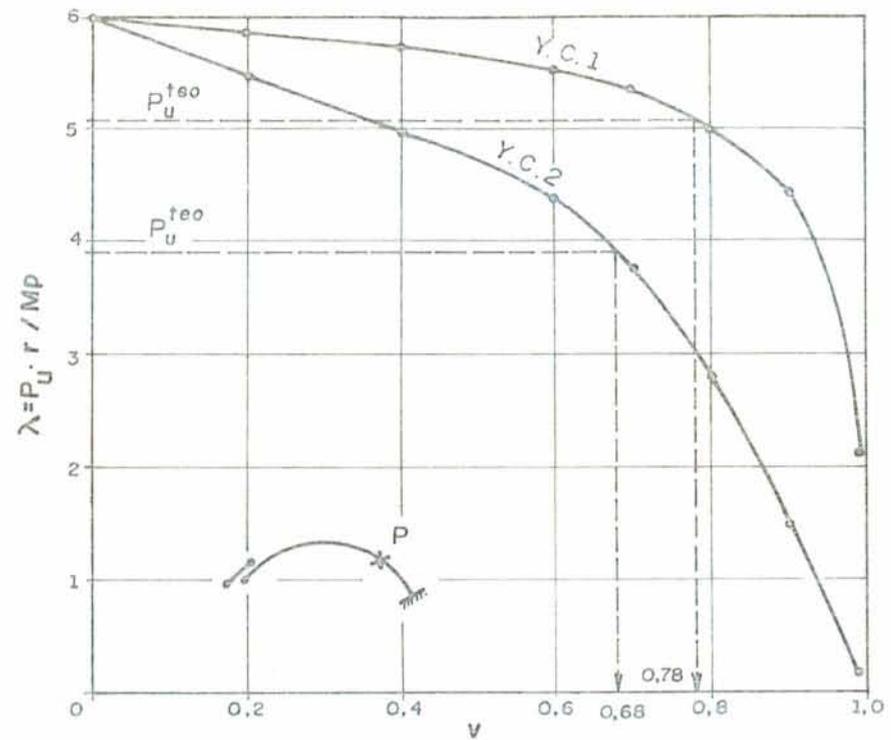
- Este fator tende a anular-se para valores de \underline{v} próximos de 1,0.

Estas conclusões já eram previstas, pois pela interpretação geométrica dos critérios de escoamento da FIGURA 5.7, vê-se que, a medida que o valor arbitrado para \underline{v} (por exemplo, $v = 0,7$) cresce, estas superfícies de escoamento decrescem. Sendo que a superfície Y.C.2 decresce mais rapidamente que a superfície Y.C.1. Quando o valor arbitrado para \underline{v} aproxima-se de 1, estas superfícies tendem para a curva $v = 1$ (intersecção de Y.C.1 e Y.C.2 com o plano de flexão e corte), consequentemente o fator de carga última tende a zero.

A seguir, compara-se os valores da carga última, determinados a partir da análise numérica com Y.C.1 e Y.C.2, com os resultados teóricos obtidos por BADAWY usando os mesmos critérios de escoamento.

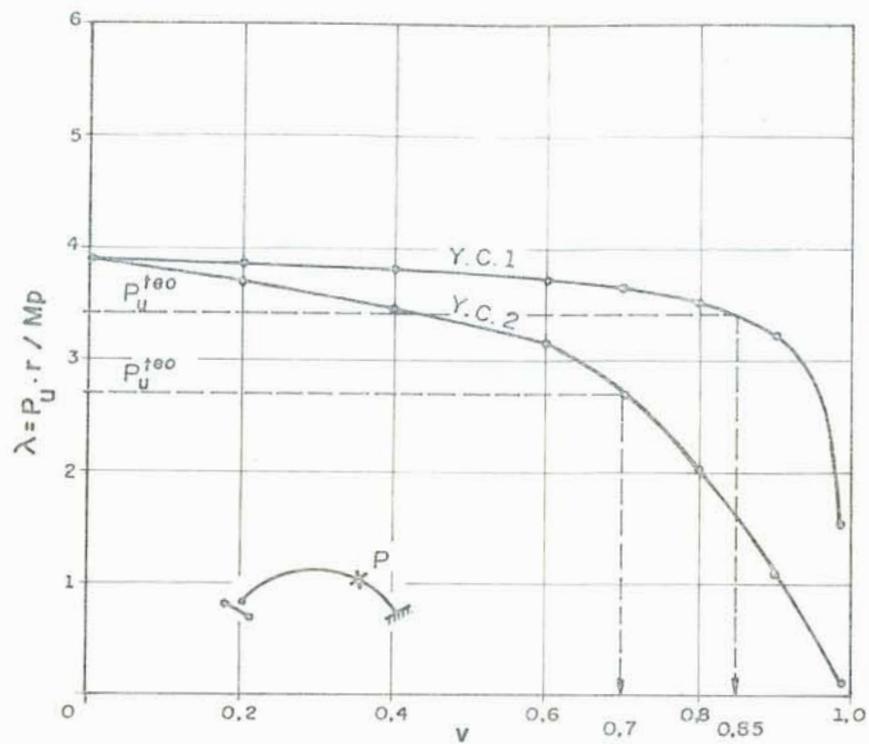


(a)

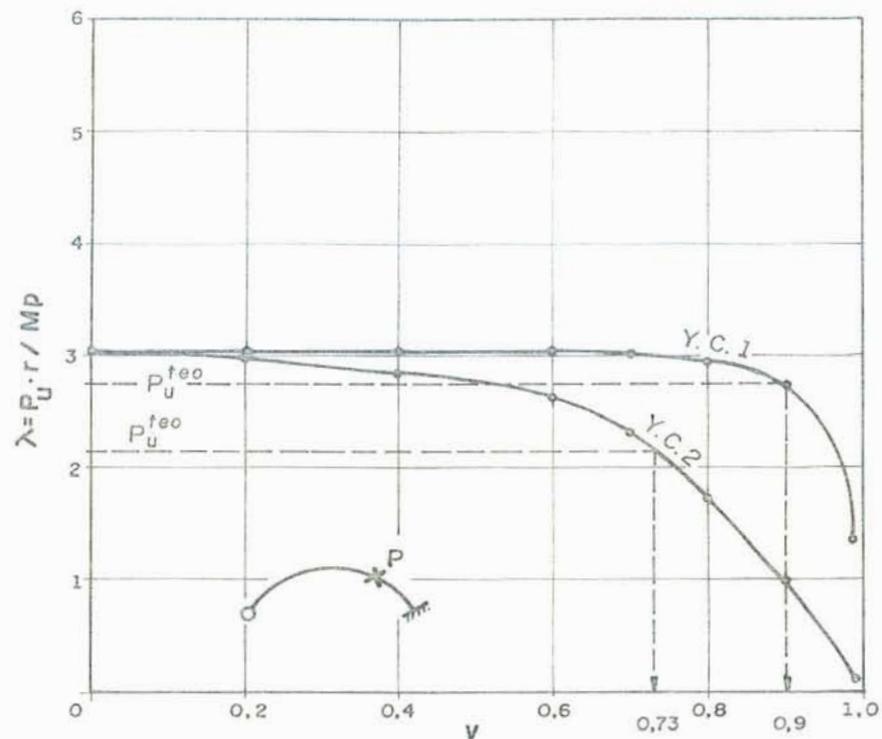


(b)

FIGURA 5.10 - Curva fator de carga de colapso- v para a viga curva discretizada em 6 elementos retos. Usando os critérios de escoamento Y.C.1 e Y.C.2. a) Para a condição de contorno do Caso A. b) Para a condição de contorno do Caso B.



(a)



(b)

FIGURA 5.11 - Curva fator de carga de colapso- v para a viga curva discretizada em 6 elementos retos. Usando os critérios de escoamento Y.C.1 e Y.C.2. a) Para a condição de contorno do Caso C. b) Para a condição de contorno do Caso D.

Como não sabemos para qual valor de \underline{v} a solução converge, pois estes são arbitrados, adotou-se o seguinte procedimento:

- Com os valores teóricos calculados por BADAWY entra-se no eixo das ordenadas das curvas "fator de carga última- \underline{v} ", na forma adimensional $(P_u^{teo} \cdot r) / M_p$, e para o critério de escoamento correspondente determina-se o valor de \underline{v} no eixo das abscissas. Estes procedimentos estão mostrados nos gráficos das FIGURAS 5.10 e 5.11.

- Com o valor de \underline{v} calcula-se a carga última para a viga curva em questão através da análise numérica.

Evidentemente, chega-se a uma solução com o valor de \underline{v} arbitrado para o qual a mesma converge. Estes valores estão listados na TABELA 3.

Este exemplo serve para demonstrar a validade do procedimento numérico, descrito no capítulo anterior, na determinação de cargas últimas para estruturas de concreto armado. No caso específico de vigas curvas, discretizadas por elementos retos de grelha plana, houve uma boa aproximação com os resultados teóricos e experimentais.

A limitação da análise numérica, para este exemplo, está no fato de não podermos aplicar os critérios de escoamento Y.C.1 e Y.C.2 com o valor de \underline{v} sendo uma variável.

TABELA 3 - Valores da carga última em KN para a viga curva discretizada em 6 elementos retos, com as condições de contorno da FIGURA 5.6 e usando os critérios Y.C.1 e Y.C.2 com valores de ν arbitrados. Comparação com resultados teóricos e experimentais.

Condições de contorno	Y.C.2	Valor teórico	$\Delta \%$	Y.C.1	Valor teórico	$\Delta \%$	Valor experimental	$\Delta \%$ *
Caso A	146,4 ($\nu=0,68$)	144,6	1,24	184,5 ($\nu=0,8$)	184,9	0,22	185,7	0,65
Caso B	136,1 ($\nu=0,68$)	135,2	0,67	174,7 ($\nu=0,78$)	175,3	0,34	184,6	5,36
Caso C	94,9 ($\nu=0,7$)	95,2	0,32	117,9 ($\nu=0,85$)	118,5	0,51	120,1	1,83
Caso D	74,7 ($\nu=0,73$)	74,5	0,27	95,6 ($\nu=0,9$)	95,9	0,31	84,5	-13,14

* É o erro entre os valores da carga última obtida com o critério de escoamento Y.C.1, através da análise numérica, e o resultado experimental.

5.2.3. Influência das Constantes Plásticas (relação T_p/M_p) na Carga de Colapso

A seguir, analisa-se a viga curva discretizada em 6 elementos retos e com a condição de contorno do Caso A. Usando os critérios de escoamento Y.C.1 e Y.C.2 com os valores de ν iguais a zero e 0,8. Das constantes elásticas dadas para a seção da viga, tira-se o valor $GJ/EI = 392,82 \text{ KN.m}^2/1381,35 \text{ KN.m}^2 = 0,28$. Mantêm-se este valor fixo e faz-se a análise para os valores de $T_p/M_p = 0,01; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e 1,0. Obtendo-se as curvas "fator de carga de colapso - T_p/M_p " plotadas no gráfico da figura abaixo.

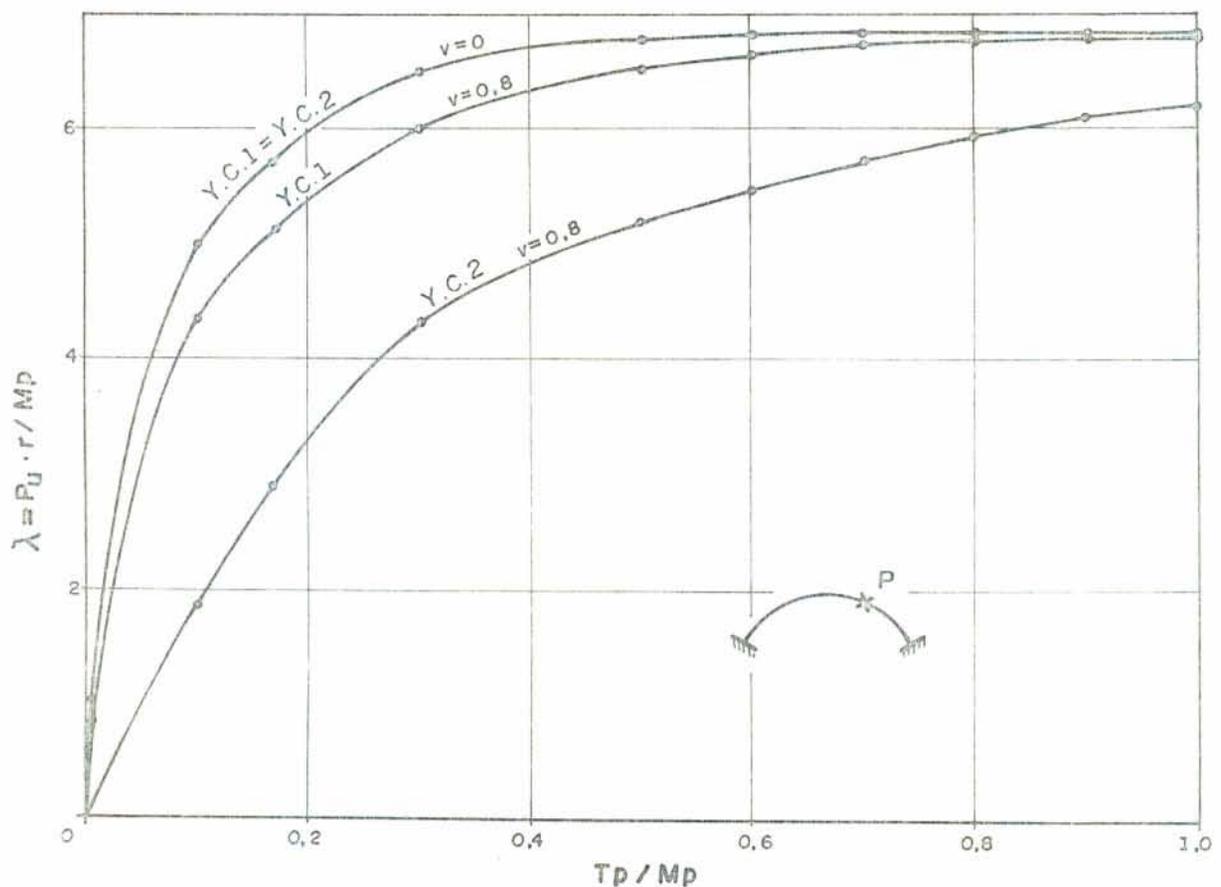


FIGURA 5.12 - Curva de carga de colapso - T_p/M_p para a viga curva discretizada em 6 elementos retos, com a condição de contorno do Caso A, usando os critérios de escoamentos Y.C.1 e Y.C.2.

Pode-se concluir deste gráfico que:

- O fator de carga última cresce com o aumento da relação T_p/M_p ;

- Para a equação $m^2 + t^2 = 1$ (Y.C.1 = Y.C.2 para o valor de $v = 0$), o fator de carga última não se altera para valores de T_p/M_p maiores que 0,6;

- O fator de carga última diminui quando se leva em conta o efeito do esforço de corte no critério de escoamento. Este decréscimo é em função do critério de escoamento adotado. Por exemplo, para $T_p/M_p = 0,18$, têm-se os fatores de carga última iguais a $\lambda = 5,7$ considerando Y.C.1 = Y.C.2 ($v = 0$), $\lambda = 5,1$ para Y.C.1 ($v = 0,8$) e $\lambda = 2,9$ com Y.C.2 ($v = 0,8$);

- Para valores de relação T_p/M_p próximos de zero, o fator de carga última tende a anular-se. Isto explica-se, devido ao acoplamento entre as rigidezes a flexão e torsional em uma viga curva. Portanto, quando T_p/M_p tende a zero, significa que estamos desprezando a resistência à torção da viga, conseqüentemente, a resistência à flexão também fica desprezada, é como se a viga não tivesse resistência a flexo-torção. Logo, o fator de carga última para esta situação se anula.

O comportamento dessas curvas foi previsto pela teoria desenvolvida na referência [2].

5.2.4. Comparação com as Curvas Carga-Deslocamento Obtidas Experimentalmente

Neste item, vamos comparar as curvas carga-deslocamento determinadas através da análise numérica da viga curva, discretizada em 6 elementos retos, para os quatro casos de condições de contorno da FIGURA 5.6, com as curvas obtidas experimentalmente por BADAUWY. Estas curvas estão mostradas na FIGURA 5.13. Na análise numérica, utilizou-se o critério de escoamento Y.C.1 com os valores de v arbitrados, para os quais a solução convergiu, conforme mostra a TABELA 3.

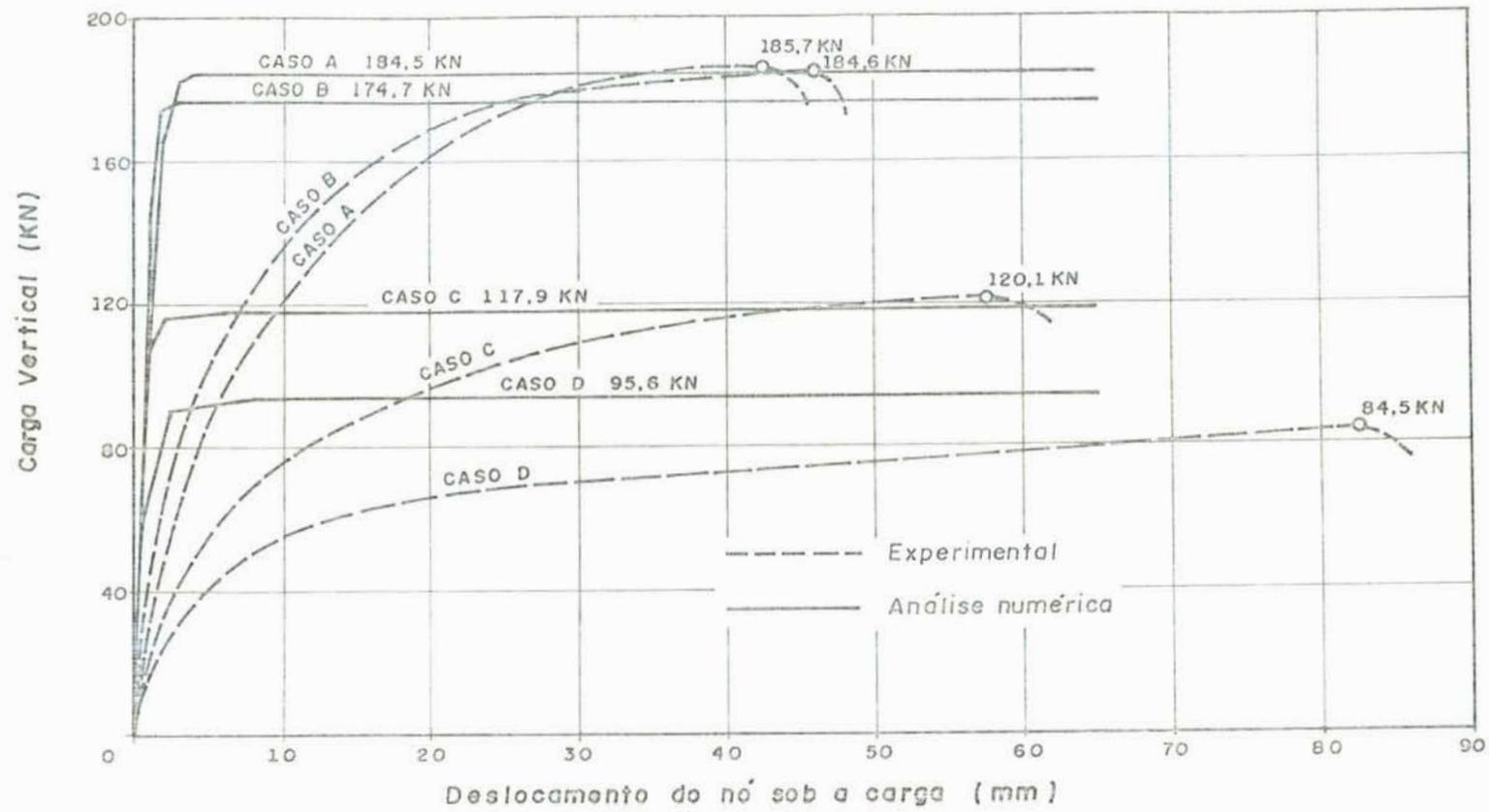


FIGURA 5.13 - Curvas carga-deslocamento experimentais e numéricas.

Da figura anterior, observa-se que em se tratando de deslocamentos o nosso programa não obtém resultados satisfatórios. Evidentemente, a forte não linearidade física e geométrica do concreto armado, desde o início do processo de fissuração até a ruptura, sob um estado complexo de tensões, neste caso, flexo-torção-corte; não pode ser retratado corretamente através do modelo de barra, com não linearidade física puntual, adotado pelo nosso programa.

Mesmo porque, a não linearidade física do concreto armado refere-se ao comportamento do concreto e das armaduras separadamente, mas levando o efeito conjunto na determinação da rigidez da seção, e estas rigidezes degradam-se durante o processo de fissuração, o que não é levado em conta na formulação do elemento de barra empregado neste programa.

Por outro lado, podemos observar que a formulação numérica deste trabalho obtém resultados satisfatórios com relação a carga última, para elementos de concreto armado sob flexão-torção-corte.

5.3. Grelha Plana Ortogonal com Duas Vigas Longitudinais e Duas Vigas Transversais

Neste exemplo, trata-se de uma grelha plana ortogonal composta de 12 elementos, 12 nós, com apoios restringindo os deslocamentos verticais e os giros de torção em suas extremidades, e com 4 cargas concentradas aplicadas em seus nós livres (FIGURA 5.14.a). Os elementos têm o comprimento igual a 1 m, sendo as propriedades geométricas e físicas iguais para todos eles.

Assume-se a grelha com comportamento elastoplástico perfeito, com rigidez a flexão elástica $EI = 10000 \text{ KN.m}^2$ e rigidez torsional elástica $GJ = 1000 \text{ KN.m}^2$. As constantes plásticas dos elementos são, força cortante de plastificação $V_p = 200 \text{ KN}$, momento torsor de plastificação $N_p = 10 \text{ KN.m}$ e o momento fletor de plastificação $M_p = 100 \text{ KN.m}$. A faixa de plastificação adotada foi de 1%, o controle de plastificação

igual a 1,05 e o incremento de carga igual a 1 KN.

Em primeiro lugar, fez-se a análise elastoplástica considerando a superfície de escoamento igual a $m^2 + t^2 = 1$, onde $m = My/Mp$ e $t = Mx/Tp$. Isto é, sem considerar a influência do esforço de corte. A relação entre as rigidezes torsional e a flexão elásticas da seção foi fixado com os valores dados acima, ou seja, $GJ/EI = 0,1$, enquanto que a taxa entre os momentos torsor e fletor de plastificação variou-se para os seguintes valores; $Tp/Mp = 0,01; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e $1,0$. Obtendo-se a curva "fator de carga de colapso - Tp/Mp ", expressa no gráfico da FIGURA 5.14.b.

Observando-se esta curva, pode-se concluir que o fator de carga de colapso aumenta com o acréscimo da taxa Tp/Mp . Quando a relação Tp/Mp tende a zero, o fator de carga de colapso aproxima-se do valor $\lambda_0 = 1,2$, que é o valor encontrado quando se faz a análise elastoplástica desta grelha sob flexão pura e desprezando a sua rigidez torsional. Explica-se esta observação, devido ao fato das rigidezes torsional e flexional serem desacopladas em uma grelha ortogonal. Assim, quando a relação Tp/Mp for igual a zero, significa que desprezaremos a rigidez torsional da grelha, conseqüentemente estaremos assumindo que a mesma tenha somente rigidez a flexão.

Esta curva foi comparada com o resultado de uma análise numérica feita por ASKARI¹, mas devido a omissão de alguns dados nesta referência bibliográfica, não foi possível uma discussão sobre o resultado da análise feita por este autor. Sabe-se entretanto, que essa análise numérica foi feita com base em programação linear, isto é, trata-se de um problema de análise limite com a condição de escoamento linearizada.

Em seguida, fez-se a análise elastoplástica levando em consideração o efeito do esforço de corte através da superfície de escoamento $m + t^2 + v^2 = 1$, onde $v = Fz/Vp$. Manteve-se a relação entre as rigidezes torsional e flexional elásticas igual a $GJ/EI = 0,1$ e variou-se a taxa Tp/Mp para os mesmos valores dados anteriormente. Para este caso, definiu-se ainda, a taxa entre o esforço cortante de plastificação e

o momento fletor de plastificação como $V_p \cdot h / M_p$, onde h é a altura da seção transversal do elemento.

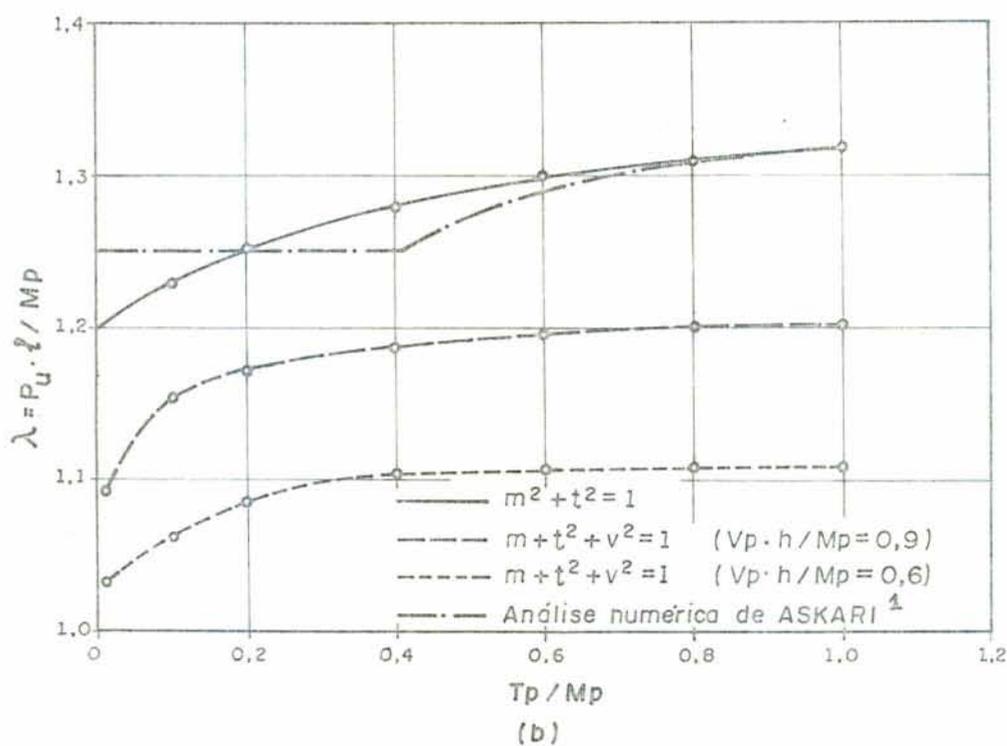
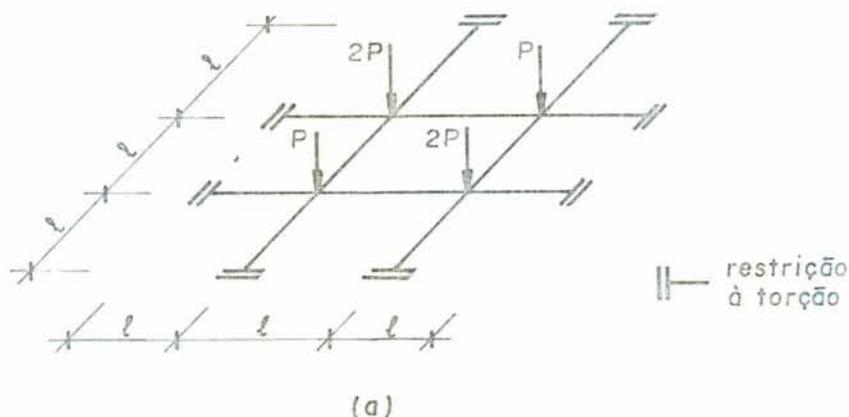


FIGURA 5.14 - Comportamento elastoplástico de uma grelha plana. a) Grelha plana ortogonal com duas vigas longitudinais e duas vigas transversais. b) Curva fator de carga de colapso T_p / M_p para as superfícies de escoamento $m^2 + t^2 = 1$ e $m + t^2 + v^2 = 1$.

Fez-se esta análise com a taxa $V_p \cdot h/M_p$ igual a 0,6 e 0,9. Obtendo-se as curvas "fator de carga de colapso - T_p/M_p " plotadas no gráfico da FIGURA 5.14.b.

Da análise destas curvas pode-se concluir que:

- O fator de carga de colapso aumenta com o acréscimo da taxa T_p/M_p . Observe-se que para $T_p/M_p \geq 0,6$ e $V_p \cdot h/M_p = 0,6$, o fator de carga manteve-se constante;

- O fator de carga de colapso aumenta com o acréscimo da taxa $V_p \cdot h/M_p$.

E da análise das três curvas em conjunto, conclui-se que:

- O critério de escoamento $m^2 + t^2 = 1$ define um limite superior para a carga de colapso da grelha em estudo;

- O critério de escoamento $m + t^2 + v^2 = 1$ define um limite inferior para a carga de colapso, pois a consideração da força cortante de plastificação finita, no critério acima, diminui o fator de carga de colapso.

Fez-se também, uma análise elastoplástica da grelha plana considerando somente a rigidez a flexão elástica e o momento fletor de plastificação, ou seja, considerou-se a grelha sob um estado de flexão pura. Neste caso, a força cortante de plastificação tem um valor infinito e assume-se a rigidez torsional elástica nula.

Obteve-se um fator de carga de colapso igual a $\lambda_o = P_u \cdot l/M_p = 1,2$, sendo este valor igual ao obtido por ASKARI¹ para a mesma análise.

No gráfico da FIGURA 5.15, comparam-se os valores do fator de carga de colapso determinados através dos critérios de escoamento $m^2 + t^2 = 1$ e $m + t^2 + v^2 = 1$ com o valor obtido para a grelha sob um estado de flexão pura.

Da análise das curvas da FIGURA 5.15, conclui-se que:

- Se considerarmos que a grelha tenha rigidez torsional e não levarmos em conta o efeito do esforço de corte no critério de escoamento, isto é, $m^2 + t^2 = 1$, tem-se acrésci-

mos em relação a carga de colapso da grelha sob flexão pura;

- Se além da rigidez torsional, considerarmos o efeito do esforço de corte no critério de escoamento, isto é, $m + t^2 + v^2 = 1$, tem-se decréscimos em relação a carga de colapso da grelha sob flexão pura. Estes decréscimos, ocorrem ou não, dependendo dos valores assumidos para as relações $V_p \cdot h / M_p$ e T_p / M_p .

Por exemplo, na FIGURA 5.15, para $m^2 + t^2 = 1$ e $T_p / M_p = 1$, tem-se um acréscimo de 9,8% sobre $\lambda_o = 1,2$ (flexão pura). Enquanto que para $m + t^2 + v^2 = 1$, $T_p / M_p = 1$ e $V_p \cdot h / M_p = 0,6$, tem-se um decréscimo de 7,75% em relação a λ_o . E com $V_p \cdot h / M_p = 0,9$, obteve-se o mesmo valor da carga última para a flexão pura, isto é, λ_o .

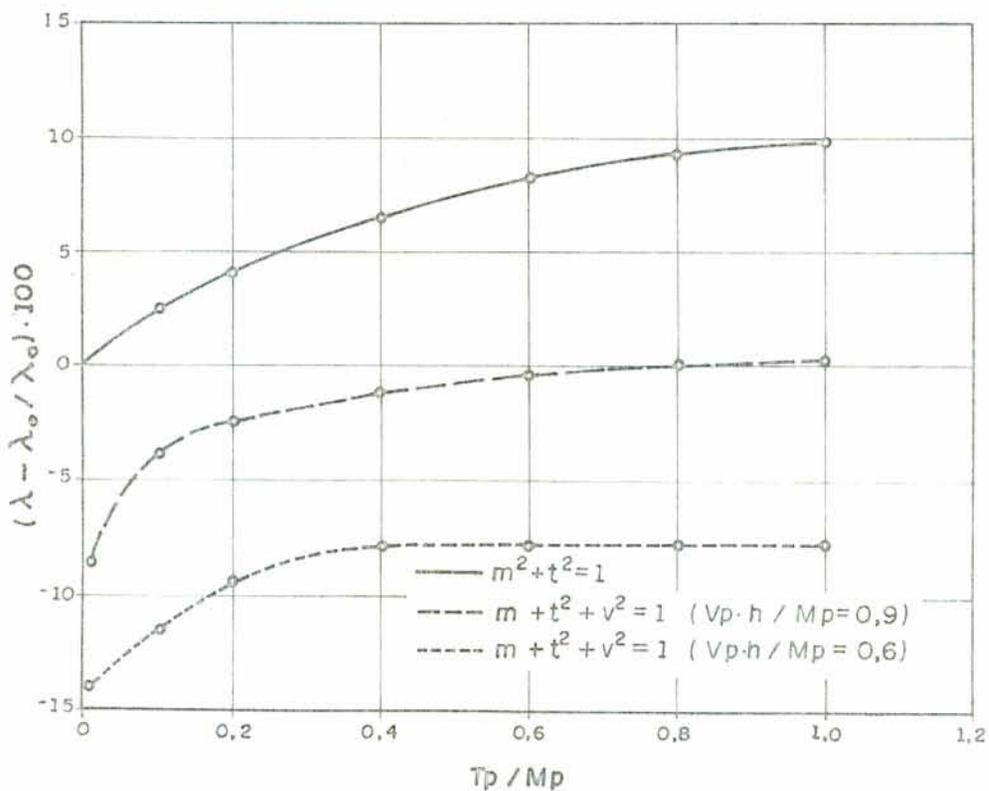


FIGURA 5.15 - Aumento ou decréscimo no fator de carga de colapso, levando em conta o efeito da torção e do esforço de corte, em relação ao fator de carga de colapso para grelha sob flexão pura.

Naturalmente, quando incluímos o efeito do esforço de corte no critério de escoamento $m + t^2 + v^2 = 1$, a força cortante de plastificação passa a ter um valor finito. E quando a relação T_p/M_p tende a zero, este critério tende à curva $m + v^2 = 1$, isto explica o fato de termos valores para o fator de carga de colapso menores que λ_0 . Pois, na flexão pura, a força cortante de plastificação é considerada infinita.

Agora, quanto ao fato de termos decréscimos em relação ao fator λ_0 para outros valores da relação T_p/M_p , isto se deve ao valor de $V_p \cdot h/M_p$ adotado para a análise.

5.4. Um Elemento de Grelha Plana em Ângulo Reto

No exemplo a seguir, trata-se de um elemento ortogonal de grelha plana composto de 3 elementos de barra, 4 nós, com suas extremidades engastadas e submetido a uma carga concentrada em um de seus nós livres (FIGURA 5.16.a).

As propriedades físicas e geométricas são iguais para todos elementos. Assume-se o elemento ortogonal com comportamento elastoplástico perfeito, com rigidez a flexão elástica $EI = 388,08 \text{ KN.m}^2$ e rigidez torsional elástica $GJ = 297,92 \text{ KN.m}^2$. As constantes plásticas dos elementos são, momento torçor de plastificação $T_p = 17,24 \text{ KN.m}$ e o momento fletor de plastificação $M_p = 21,95 \text{ KN.m}$.

Os dados acima estão de acordo com a referência [37].

A faixa de plastificação adotada foi de 1% e o incremento de carga igual a 1 KN.

Adotou-se como superfície de escoamento a equação $m^2 + t^2 = 1$, onde $m = M_y/M_p$ e $t = M_x/T_p$. Inicialmente, fez-se a análise com o controle de plastificação igual a 1,05, isto é, $m^2 + t^2 \leq 1,05$. Portanto, estamos admitindo que os esforços internos em uma articulação plástica exceda a condição de plastificação em 5%. Com este controle de plastificação obteve-se o mecanismo de colapso plástico na terceira etapa, como mostra a FIGURA 5.16.a.

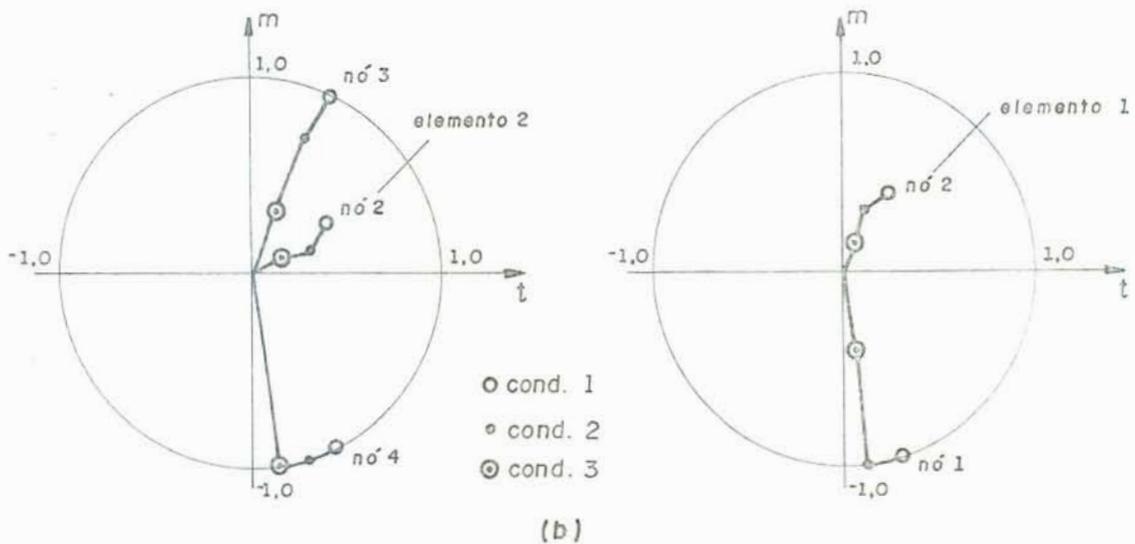
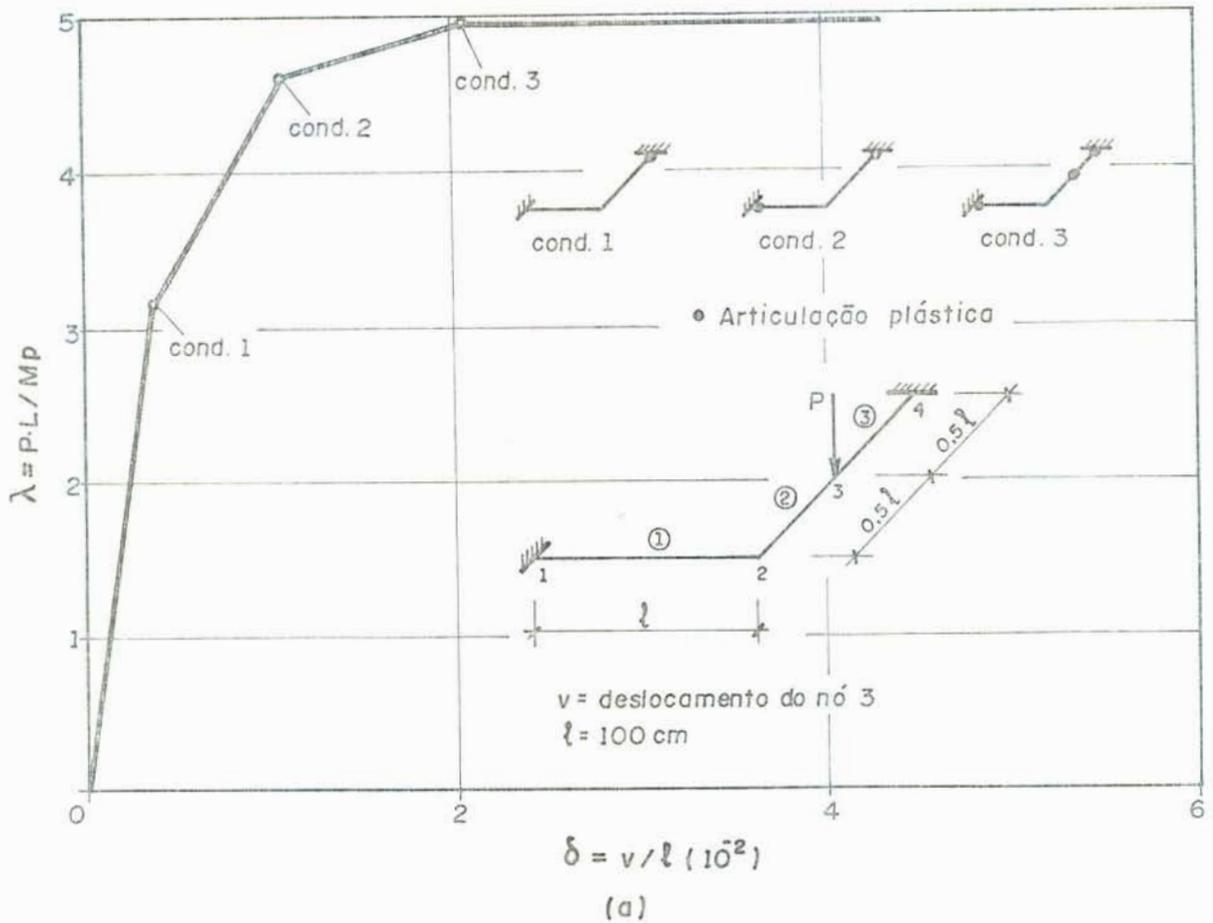


FIGURA 5.16 - Comportamento elastoplástico da grelha plana ortogonal com 3 elementos.
a) Curva carga-deslocamento. b) Perfil dos esforços internos ao longo do processo de carga até atingir o mecanismo de colapso plástico.

A curva carga-deslocamento foi obtida conforme mostra a FIGURA 5.16.a. O resultado do fator de carga de colapso foi de $\lambda = p_u \cdot l / M_p = 4,958$. UEDA³⁷ obteve o valor de 4,92, porém, sem dar informações a respeito do método de solução adotado, sendo que a diferença relativa entre esses dois valores foi de 0,8%, portanto, houve uma boa aproximação entre os mesmos.

O perfil dos esforços internos dos nós, ao longo do processo de carga até atingir o mecanismo de colapso plástico, está mostrado na FIGURA 5.16.b.

Adotando-se um controle de plastificação igual a 1,01, encontramos o valor de 4,903 para a carga de colapso plástico, enquanto que na referência [37] este valor foi de 4,91. Para este caso, a diferença relativa entre esses dois valores foi de 0,14%.

HODGE³⁹ obteve para a carga de colapso o valor de 4,9 para o mesmo problema, mas usando como critério de escoamento um octógono equilátero inscrito numa circunferência de raio igual a 1. Ou seja, inscrito na curva $m^2 + t^2 = 1$.

Neste exemplo, pôde-se observar que a medida que diminuimos o controle da plastificação, os resultados obtidos apresentam-se mais acurados, e que houve uma boa aproximação com os resultados de soluções numéricas e analítica.

CONCLUSÕES

Com base nos estudos teóricos e nos exemplos calculados e comparados ao longo deste trabalho, envolvendo a análise elastoplástica com pequenas deformações em vigas curvas de concreto armado e em grelhas planas ortogonais, considerando ambas, com comportamento elastoplástico perfeito, chegou-se a várias conclusões. Dentre elas, destacou-se três de fundamental importância. A primeira referente a validade do procedimento numérico empregado neste trabalho na determinação da carga de colapso de vigas curvas de concreto armado, discretizada com elementos retos de grelha plana. A segunda, relacionada com a deficiência deste método numérico na obtenção dos deslocamentos em estruturas de concreto armado (viga curva) desde o processo de fissuração até a ruptura, sob um estado complexo de tensões (flexão-torção-corte). A terceira, foi a boa aproximação com os resultados analíticos e numéricos, encontrados na bibliografia técnica internacional, para os exemplos de grelha plana ortogonal apresentados no capítulo anterior.

O procedimento numérico apresentado neste trabalho é uma extensão do conhecido "método das rótulas plásticas" com as seguintes características:

1) Na fase elástica, a análise é exatamente a mesma feita pelo método da rigidez direto⁶.

2) As articulações plásticas ocorrem, quando a resultante dos esforços internos em algum nó da estrutura atinge uma superfície de escoamento generalizada, que leva em conta a interação entre os esforços de corte, momento fletor e momento torsor.

3) Depois que os nós tornaram-se plásticos, a resultante dos esforços internos varia com o incremento da carga, mas satisfazendo a condição de plasticidade, e a matriz de rigidez elastoplástica do elemento é determinada de forma explícita como função da matriz de rigidez elástica e das derivadas

parciais da superfície de escoamento em função das forças de extremidades do elemento.

4) Usa-se como solução, o método incremental da matriz de rigidez tangente.

Esta análise numérica substitui a análise limite com vantagens, principalmente em se tratando de estruturas complexas onde a análise por meio de mecanismos combinados é bastante tediosa, e naturalmente, não leva em consideração situações com endurecimento.

No caso de obtenção da carga última, a disponibilidade de um método matricial geral é útil, pois soluções analíticas fechadas só aparecem ser possíveis para estruturas simples e com hipóteses simplificativas, isto é, material com comportamento rígido-plástico.

Este método pode ser aplicado a qualquer tipo de estrutura de barra desde que se defina um critério de escoamento que leve em conta a interação entre os esforços correspondentes aos diversos graus de liberdade do elemento de barra considerado.

A partir dos diferentes estudos abordados no transcorrer deste trabalho, sugere-se os seguintes temas como posteriores trabalhos de pesquisa:

a) Consideração de critérios de escoamento que defina a interação entre flexão-torção-corte para vigas de concreto armado com taxas geométricas de armadura que correspondam, respectivamente, a vigas parcialmente super-armadas e completamente super-armadas;

b) Determinar a capacidade de rotação e giro de torção das vigas de concreto armado sob flexão-torção-corte na ruptura utilizando o modelo "Skew Bending" e/ou o modelo da "Treliça Espacial" conforme indicam as referências 30 e 34, respectivamente;

c) Refinar o controle (redução da resultante dos esforços nodais à superfície de escoamento) dos nós plastificados através do vetor de desequilíbrio usando um processo iterativo, conforme o indicado no capítulo 7, páginas 249-257, da referên-

cia |41|.

Para melhorar a resposta em deslocamentos do procedimento numérico adotado neste trabalho, referido à estrutura de concreto armado, têm-se as seguintes sugestões:

d) Levar em conta a degradação das rigidezes torsional e flexural durante o processo de carga, início da fissuração até a ruptura, dos elementos de barra sob flexão-torção-corte;

e) No modelo numérico, levar em conta a não linearidade geométrica.

BIBLIOGRAFIA

1. ASKARI, M.R. Calcul de la charge ultime des grillages compte tenu de la rigidité a la torsion des poutres. Construction Métallique, Puteaux, 11(1):39-57, 1974.
2. BADAWEY, H.E.I.; JORDAAN, I.J.; McMULLEN, A.E. Effect of shear on collapse of curved beams. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 103(9):1849-66, Sept. 1977.
3. BADAWEY, H.E.I.; McMULLEN, A.E.; JORDAAN, I.J. Experimental investigation of the collapse of reinforced concrete curved beams. Magazine of Concrete Research, London, 29(99):59-69, June 1977.
4. BELOW, K.D.; RANGAN, B.V.; HALL, A.S. Theory for concrete beams in torsion and bending. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 101(8):1645-60, Aug. 1975.
5. BONI, B. & KLEIBER, M. Numerical plastic collapse analysis of plane bending-and-torque supporting grids. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Amsterdam, 19(1):1-19, June 1979.
6. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech Press, 1978. 354p.
7. BRUNETTE, K.E. & FENVES, S.J. A general formulation of the elastic-plastic analysis of space frameworks. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF SPACE STRUCTURES, University of Surrey, Sept. 1966. Oxford, Blackwell Scientific Publications, 1967. p.92-108.

8. COLLINS, M.P. et alii. Ultimate strength of reinforced concrete beams subjected to combined torsion and bending. In: SYMPOSIUM ON TORSION OF STRUCTURAL CONCRETE, Philadelphia, Mar. 1966. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1968. p.379-402.
9. COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON. Manuel de calcul "effort tranchant-torsion" (final draft). London, 1973. p.167-240. (Bulletin d'Information, 92)
10. CREUS, G.J.; TORRES, P.L.; GROEHS, A.G. Elastoplastic frame analysis with generalized yield function and finite displacements. Computer and Structures, Oxford, 18(5):925-9, 1984.
11. ELFREN, L.; KARLSSON, I.; LOSBERG, A. Torsion-bending-shear interaction for concrete beams. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 100(8):1657-76, Aug. 1974.
12. ERSOY, V. & FERGUSON, P.M. Concrete beams subjected to combined torsion and shear-experimental trends. In: SYMPOSIUM ON TORSION OF STRUCTURAL CONCRETE, Philadelphia, Mar. 1966. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1968. p.441-60.
13. EWIDA, A.A. & McMULLEN, A.E. Torsion-shear-flexure interaction in reinforced concrete members. Magazine of Concrete Research, London, 33(115):113-22, June 1981.
14. FEIJÓO, R.A. & TAROCO, E. Introdução a plasticidad y su formulación variacional. In: CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS. Laboratório de Cálculo. Métodos variacionais em mecânica dos sólidos. Rio de Janeiro, 1980. v.2, p.1-156. (Escola de Matemática Aplicada, 2)

15. FISHER, G.P. Torsion in structural concrete - a perspective. In: SYMPOSIUM ON TORSION OF STRUCTURAL CONCRETE, Philadelphia, Mar. 1966. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1968. p.1-6.
16. GERE, J.M. & WEAVER Jr., W. Matrix analysis of framed structures. 2.ed. Princeton, N.J., Van Nostrand, 1980. 492p.
17. GOODE, C.D. & HELMY, M.A. Ultimate strength of reinforced concrete beams in combined bending and torsion. In: SYMPOSIUM ON TORSION OF STRUCTURAL CONCRETE, Philadelphia, Mar. 1966. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1968. p.357-77.
18. GRIGORIAN, M. Plastic design of regular orthotropic grids with two adjacent edges fixed, free, or hinged. Journal of Strain Analysis, London, 7(4):279-84, Oct. 1972.
19. GRIGORIAN, M. & YAGHMAI, S. A theorem for the plastic design of regular twistless grids under continuous transverse loading. International Journal of Solid and Structures, Oxford, 9(12):1421-30, Dec. 1973.
20. GROB, J. & THÜRLIMANN, B. Ultimate strength and design of reinforced concrete beams under bending and shear. Mémoires. Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zürich, 36(2):105-20, 1976.
21. GVOZDEV, A.A.; LESSIG, N.N.; RULLE, L.K. Research on reinforced concrete beams under combined bending and torsion in the Soviet Union. In: SYMPOSIUM ON TORSION OF STRUCTURAL CONCRETE, Mar. 1966. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1968. p.307-36.
22. HEYMAN, J. The limite design of a transversely loaded square grid. Journal of Applied Mechanics, New York, 19(2):153-', June 1952.

23. HSU, T.T.C. Torsion of structural concrete - behavior of reinforced concrete rectangular members. In: SYMPOSIUM ON TORSION OF STRUCTURAL CONCRETE, Philadelphia, Mar. 1966. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1968. p.261-306.
24. _____. Torsion of structural concrete - plain concrete rectangular sections. In: SYMPOSIUM ON TORSION OF STRUCTURAL CONCRETE, Philadelphia, Mar. 1966. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1968. p.203-38.
25. KACHANOW, L.M. Foundations of the theory of plasticity. Amsterdam, North-Holland, 1971. 482p.
26. LAMBERT, P. & COLLINS, M.P. Torsion, bending and confusion - and attempt to establish the facts. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 69:500-4, Aug. 1972.
27. LAMPERT, P. & THÜRLIMANN, B. Ultimate strength and design of reinforced concrete beams in torsion and bending. Mémoires. Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zürich, 31(1):107-31, 1971.
28. McMULLEN, A.E. & WARWARUK, J. Concrete beams in bending, torsion and shear. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 96(5):885-903, May 1970.
29. MANSUR, M.A. & RANGAN, B.V. A lower-bound analysis for torsion in concrete frames. Magazine of Concrete Research, London, 29(101):191-8, Dec. 1977.
30. MISIC, J. & WARWARUK, J. Strength of prestressed solid and hollow beams subjected simultaneously to torsion, shear and bending. In: DOUGLAS McHENRY INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON CONCRETE AND CONCRETE STRUCTURES, Mexico, Oct. 1976. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1978. p.515-45.

31. MORRIS, G.A. & FENVES, S.J. A general procedure for the analysis of elastic and plastic frameworks. Urbana, University of Illinois, 1967. 188p. Tese dout.
32. MÜLLER, P. Failure mechanisms for reinforced concrete beams in torsion and bending. Mémoires. Association Internationales des Ponts et Charpentes, Zürich, 36(2): 147-63, 1976.
33. OJHA, S.K. Deformations of reinforced concrete rectangular beams under combined torsion, bending, and shear. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 71:383-91, Aug. 1974.
34. RABBAT B.G. & COLLINS, M.P. A variable angle space truss model for structural concrete members subjected to complex loading. In: DOUGLAS McHENRY INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON CONCRETE AND CONCRETE STRUCTURES, Mexico, Oct. 1976. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1978. p.547-87.
35. THÜRLIMANN, B. Shear strength of reinforced and prestressed concrete beams. Bulletin d'Information du Comité Européen du Béton, Paris (126):16-38, juin. 1978.
36. _____. Torsional strength of reinforced and prestressed concrete beams. Bulletin d'Information du Comité Européen du Béton, Paris (126):39-65, juin 1978.
37. UEDA, Y. & YAO, T. The plastic node methods: a new method of plastic analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Amsterdam, 34(1/3): 1089-1104, Sept. 1982.
38. ZIA, P. What do we know about torsion in concrete members? Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 96(6):1185-99, June 1970.

39. HODGE, P.G. Plastic analysis of structures. New York, McGraw-Hill, 1959. 364p.
40. NEAL, B.G. The plastic methods of structural analysis. 3.ed. London, Chapman and Hall, 1977. 198p.
41. OWEN, D.R.J. & HINTON, E. Finite Elements in Plasticity: theory and practice. Swansea U.K., Pineridge Press Limited, 1980. 594p.

APÊNDICE A - ENTRADA DE DADOS

Para a utilização do programa, deve-se inicialmente numerar os nós da estrutura de 1 a NN (número de nós), e os elementos de 1 a NE (número de elementos).

Deve-se estabelecer um sistema cartesiano de eixos X-Y-Z de referência global, de forma que o plano X-Y seja o plano da estrutura.

Cada elemento tem seu sistema de eixos de referência x-y-z local, com origem no nó inicial do mesmo, sendo o eixo x coincidente com o eixo baricêntrico do elemento.

As coordenadas dos nós, as restrições nodais e incôgnitas prescritas, juntamente com o carregamento nodal são dados em relação ao sistema de referência global enquanto que as propriedades dos elementos são dadas em relação ao sistema de referência local. As unidades destas grandezas são dadas de acordo com o "Sistema Internacional de Unidades S.I".

A seguir descreveremos o manual de entrada do programa.

Número de ordem	Número de cartões	Variáveis	Formato
1	1	NN, NE, NLN, NBN, FLAPA NN-número de nós da estrutura NE-número de elementos da estrutura NLN-número de nós carregados NBN-número de nós restringidos FLAPA-faixa de plastificação	livre

(continua)

Número de ordem	Número de cartões	Variáveis	Formato
2	NN	N_1 , XX, YY N_1 - número do nó XX e YY-coordenada do nó N_1 nas direções dos eixos x e y, respectivamente (cm)	livre
3	NE	N_1 , J, K, XI, YI, EE, GG, QP, TP, MP, HARD N_1 - número do elemento J-nó inicial K-nó final XI-momento de inércia a torção (cm^4) YI-momento de inércia em relação ao eixo y local (cm^4) EE-módulo de elasticidade longitudinal (N/cm^2) GG-módulo de elasticidade transversal (N/cm^2) QP-cortante de plastificação (N) TP-momento torsor de plastificação (N) MP-momento fletor de plastificação (N.cm) HARD-constante de endurecimento (adimensional)	livre
4	NBN	N_1 , IZ, IRX, IRY, ZZ, XRX, YRY 1 - restringido 0 - livre N_1 - número do nó restringido	livre

(continua)

Número de ordem	Número de cartões	Variáveis	Formato
		IZ-restrição ao deslocamento na direção do eixo global Z (0 ou 1) IRX-restrição à rotação em relação ao eixo global X (0 ou 1) IRY-restrição à rotação em relação ao eixo global Y (0 ou 1) ZZ-deslocamento prescrito na direção do eixo global Z (cm) XRX-rotação prescrita em relação ao eixo global X (radianos) XRY-rotação prescrita em relação ao eixo global Y (radianos)	
5	NLN	N_1 , FZ, FRX, FRY N_1 - número do nó carregado FZ-força aplicada na direção do eixo global Z (N) FRX-momento aplicado na direção do eixo global X (N.cm) FRY-momento aplicado na direção do eixo global Y (N.cm)	livre

As variáveis que começam com as letras I, J, K, L, M e N são inteiras e as demais são variáveis reais.

Em cada estágio de carregamento o programa fornece como resultados:

- A etapa em que o mesmo se encontra;
- O determinante da matriz de rigidez global;
- O fator de carga (r_{\min});
- O(s) nó(s) que plastificou-se (plastificaram-se) na etapa atual;

- Os deslocamentos dos nós e as reações nodais em relação ao sistema de referência global;
- As ações nas extremidades dos elementos referidas aos eixos locais dos mesmos.

A.1. Exemplo de Utilização do Programa

Como ilustração serão apresentados aqui os dados necessários para análise da grelha apresentada na FIGURA A.1.

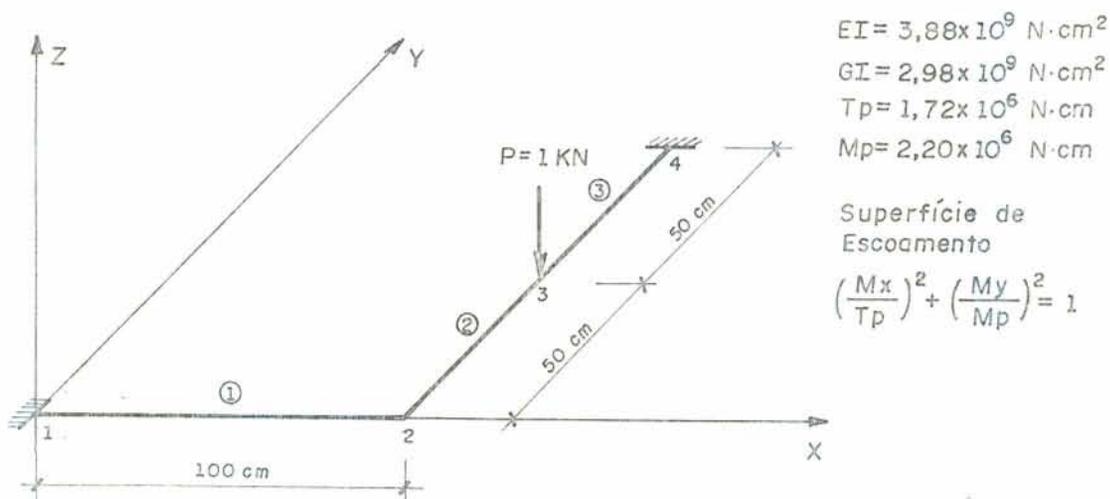


FIGURA A.1

De acordo com o manual exposto anteriormente, os cartões de dados para este exemplo são:

4, 3, 1, 2, 0.01

1, 0., 0.

2, 100., 0.

3, 100., 50.

4, 100., 100.

1, 1, 2, 1., 1., 3.88E+9, 2.98E+9, 1.0E+20, 1.72E+6, 2.20E+6, 0.
2, 2, 3, 1., 1., 3.88E+9, 2.98E+9, 1.0E+20, 1.72E+6, 2.20E+6, 0.
3, 3, 4, 1., 1., 3.88E+9, 2.98E+9, 1.0E+20, 1.72E+6, 2.20E+6, 0.
1, 1, 1, 1, 0., 0., 0.
4, 1, 1, 1, 0., 0., 0.
3, -1000., 0., 0.