

1974

A meus pais, Eurico e Lourdes

UM ENFOQUE INTEGRADO PARA A IMPLEMENTAÇÃO
DE ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

"TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, COMO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA"

Orientador: Agustin J. Ferrante - PhD

Aprovada em / / por:

A.J.Ferrante - PhD

C.A.Brebbia - PhD

E.C.D. de Lima - MsC

RECONHECIMENTOS

Eu desejo agradecer aos Profs. Agustín J. Ferrante e José S. Gomes Franco, ao primeiro pela sua orientação e a ambos pelo encorajamento e entusiasmo.

A computação foi feita usando-se as facilidades permitidas pelo Centro de Processamento de Dados, UFRGS, cujos docentes auxiliaram-me constantemente.

Agradeço também aos professores do curso de Pós-Graduação por sua compreensão, amizade e apoio.

O autor está também em débito com a Sra. Cordélia Ribu Laitano por datilografar o difícil manuscrito.

SUMMARY

In the present work, the bases of the finite element method and the concept of the isoparametric elements are established, giving in detail the formulation and computer implementation for the quadrilateral and hexahedral elements. The implementation was carried out using an integrated schema.

In particular, the developed elements are used in three dimensional elastic problems, bidimensional plane stress-plane strain problems and axisymmetric cases.

Finally, several illustrative examples are included, which show the practical applications of the presented development.

RESUMO

No presente trabalho estabelecem-se brevemente as bases do método dos elementos finitos e do conceito de elementos isoparamétricos, detalhando-se a formulação e a implementação para os elementos quadriláteros e hexaédricos. Apresentam-se a seguir as características do esquema integrado para tal implementação.

Em particular os elementos desenvolvidos serão aplicados em problemas elásticos tridimensionais, em problemas bidimensionais de tensões e deformações ou axissimétricos com carregamento axissimétrico.

Incluem-se, finalmente, vários exemplos ilustrativos demonstrando a aplicação prática do desenvolvimento apresentado.

ÍNDICE

	<u>Pag.</u>
Reconhecimentos	(i)
Resumo	(ii)
Índice	(iii)
Notação	(v)
Introdução	1
<u>CAPÍTULO I - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - DESLOCAMENTOS</u>	
1.1 - Introdução	2
1.2 - Deformações e Tensões	3
1.3 - Forças Nodais Equivalentes	4
1.4 - Determinação dos deslocamentos	5
<u>CAPÍTULO II - ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS</u>	
2.1 - O conceito de Isoparamétrico	7
2.2 - Requerimentos básicos para uma boa solução.	8
2.3 - Formulação geral dos elementos Isoparamétricos	10
2.4 - Integração Numérica	14
2.5 - Modelo dos elementos Isoparamétricos	15
2.6 - Forças Nodais Equivalentes	21
2.7 - Determinação das Tensões	26
<u>CAPÍTULO III- ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS APLICADOS A TENSÕES E</u> <u>DEFORMAÇÕES PLANAS</u>	
3.1 - Introdução	28
3.2 - Formulação	29
3.3 - Forças Nodais Equivalentes	34
3.4 - Determinação das Tensões	38
<u>CAPÍTULO IV - ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS APLICADOS A ANÁLISE DE</u> <u>TENSÕES EM SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS</u>	
4.1 - Introdução	39
4.2 - Formulação	40
4.3 - Forças Nodais Equivalentes	43
4.4 - Determinação das Tensões	46

	<u>Pag.</u>
<u>CAPÍTULO V - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</u>	
5.1 - Introdução	47
5.2 - Convergência dos elementos planos	47
5.3 - Elementos tridimensionais	57
5.4 - Exemplo prático	61
 <u>CAPÍTULO VI - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL NO LORANE DA FAMÍLIA DE ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS</u>	
6.1 - Introdução	64
6.2 - Fornecimento de dados	64
6.3 - Convenção dos blocos diagramas	66
6.4 - Organização dos programas	67
6.5 - Descrição dos módulos	69
 <u>CAPÍTULO VII - CONCLUSÃO</u>	 / 105
 BIBLIOGRAFIA	 106
 <u>APÊNDICE 1 - VALORES DO JACOBIANO PARA OS CASOS BI e TRIDIMENSIONAL</u>	
1. - Notação	108
2. - Caso Bidimensional	108
3. - Caso Tridimensional	108
 <u>APÊNDICE 2 - MATRIZES DE ELASTICIDADE</u>	
1. - Notação	110
2. - Caso Tridimensional	110
3. - Caso Bidimensional	110
 <u>APÊNDICE 3 - GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ</u>	
1. - Notação	112
2. - Desenvolvimento do método	112

NOTAÇÃO

1. ESCALARES

e	- Índice que indica elemento
\sim	- Símbolo para indicar matriz ou vetor
T	- Índice para indicar a transposta de uma matriz ou vetor
u, v, w	- Componentes de deslocamentos nas direções x, y e z , respectivamente
i, j, k, m	- Sub-índices ou constantes inteiras
x, y, z	- Coordenadas retangulares
ξ, η, ζ	- Coordenadas locais adimensionais
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	- Deformações nas direções x, y e z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	- Deformações de corte nas direções x, y e z , respectivamente.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	- Componentes normais das tensões, paralelas aos eixos x, y e z
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	- Componentes de corte das tensões em coordenadas retangulares
F_i	- Função qualquer
w_i	- Coeficiente de peso usado nas fórmulas de integração numérica
ρ	- Densidade do material
α	- Coeficiente de expansão térmica
E	- Módulo de Elasticidade
ν	- Coeficiente de Poisson
t	- Espessura do elemento
r	- Raio
$\epsilon_z, \epsilon_r, \epsilon_\theta$	- Deformações axial, radial e circunferencial, respectivamente
γ_{rz}	- Deformação tangencial
$\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$	- Componentes radial, axial e circunferencial, das tensões
τ_{rz}	- Componente tangencial, das tensões
NP	- Número de nós do elemento.

2. VETORES E MATRIZES

δ	- Vetor de deslocamento
δ^e	- Vetor de deslocamentos nodais do elemento
N	- Vetor com as funções de forma
ϵ	- Vetor com as componentes de deformação
ϵ_0	- Vetor com as componentes iniciais de deformação
B	- Matriz relacionando deformações com deslocamentos
D	- Matriz de elasticidade
σ	- Vetor com as componentes de tensão
F	- Vetor de forças
F^e	- Vetor de forças nodais equivalentes
F_b^e	- Vetor de forças nodais equivalentes devidas a cargas de volume
F_p^e	- Vetor de forças nodais equivalentes devidas a cargas de superfície agindo sobre o elemento
$F_{\epsilon_0}^e$	- Vetor de forças nodais equivalentes devidas a deformações iniciais do elemento
b	- Vetor de cargas de volume
p	- Vetor de cargas de superfície
k	- Matriz de rigidez total
J	- Matriz Jacobiano
p_x^e, p_y^e, p_z^e	- Vetores com os valores nodais das cargas de superfície, nas direções x, y e z, respectivamente
θ^e	- Vetor cujas componentes são os valores de temperatura nos nós.
t^e	- Vetor com os valores da espessura nos pontos nodais
σ_0	- Vetor cujas componentes são as tensões iniciais

O termo NODAIS significa nos nós.

Todos os vetores são supostos vetores coluna.

INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos consiste basicamente em representar-se o contínuo por um número de partes finitas, chamadas elementos, interconectados através de pontos nodais, normalmente situados nos seus bordos.

A forma geométrica dos elementos utilizados na discretização do contínuo pode ser variável, tendo-se originalmente desenvolvido para casos bidimensionais elementos do tipo triangular e retangular com lados retos e para casos tridimensionais tetraedros e paralelepípedos com faces planas.

As dificuldades encontradas, ao se tentar representar formas geométricas arbitrárias com partes curvas, usando esses elementos, originou a procura de elementos mais refinados, isto é, elementos que possam ter seus lados distorcidos de uma maneira prescrita. IRONS⁽¹⁾ lançou a idéia de usar-se as mesmas funções para definir deslocamentos e o sistema de coordenadas dentro do elemento, originando-se, assim, o conceito de "isoparamétrico".

Este conceito, em conjunção com funções de forma de alta ordem, tornou possível o uso de elementos com lados curvos em problemas bidimensionais e com superfícies curvas nos problemas tridimensionais.

Esta monografia visa produzir um sistema de programas para o projeto LORANE, onde, especificando-se apenas os polinômios de interpolação a utilizar, as relações entre deformações específicas e deslocamentos e a correspondente matriz de elasticidade, se possa gerar automaticamente as características correspondentes a elementos isoparamétricos.

Nesse esquema usa-se a integração numérica para a resolução do problema, fato que facilita a implementação tanto de elementos simples como de complexos.

CAPÍTULO I

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - DESLOCAMENTOS

1.1 - INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos é suficientemente conhecido e não há necessidade de maiores discussões a seu respeito.

Para referência, no entanto, apresentamos um breve resumo do mesmo.

O primeiro passo é determinar a função que deve relacionar a variação dos deslocamentos dentro do elemento. Com os seus valores nos pontos nodais, essa função é normalmente da forma polinomial.

Seja $\underline{\delta}$ o vetor de deslocamentos em qualquer ponto do elemento, dado em função dos deslocamentos nodais, assim:

$$\underline{\delta} = \underline{N}^I T \cdot \underline{\delta}^e \quad 1.1(a)$$

A fórmula acima relaciona os deslocamentos, em qualquer ponto do elemento, com os deslocamentos nodais. Os elementos da matriz \underline{N}^I são funções da geometria do elemento e $\underline{\delta}^e$ é o vetor com os deslocamentos nodais desse elemento.

Por exemplo, seja a figura 1, onde o elemento "e" é definido pelos nós i, j, k e tem lados retos.

Os correspondentes deslocamentos horizontais e verticais de um nó do elemento, no caso de tensões planas, são:

$$\underline{\delta} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad 1.1(b)$$

consequentemente

$$\underline{\delta}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} \quad \underline{N}^I T = \begin{Bmatrix} \underline{N}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{N}^T \end{Bmatrix} \quad 1.1(c)$$

Sendo \underline{N}^T o vetor de "funções de forma".

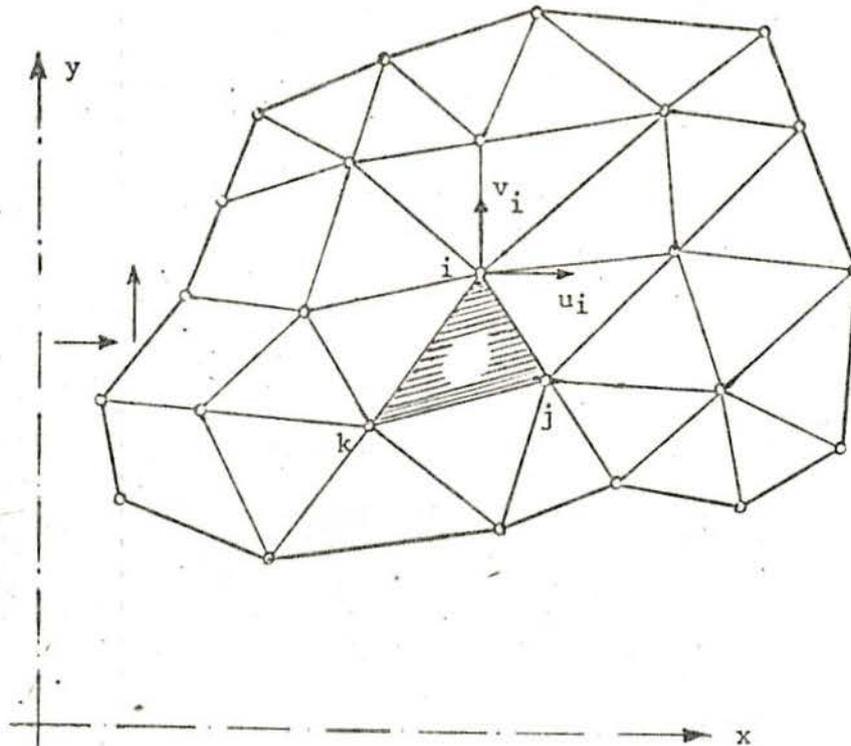


FIGURA 1

O contínuo dividido em elementos finitos

A escolha das funções de interpolação deve satisfazer a critérios determinados a fim de que tenhamos certeza da convergência para um resultado exato. Em geral, se requer que sejam satisfeitas as condições de completude e admissibilidade, no entanto, na prática se trabalha com as seguintes condições:

em modelos de E.

- a) Compatibilidade de deslocamentos entre elementos.
- b) Se os deslocamentos nodais correspondem a um movimento de corpo rígido, as deformações específicas dentro do elemento devem ser nulas.
- c) Reprodução exata dos estados de deformação constante dentro do elemento.

1.2 - DEFORMAÇÕES E TENSÕES

Prosseguindo na formulação e adotando a notação usada por ZIENKIE-

WICZ⁽²⁾, apresentamos a fórmula da deformação específica;

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta}}^e \quad 1.2(a)$$

Sendo $\underline{\underline{B}}$ a matriz com as derivadas de N situadas em posições apropriadas.

As tensões são dadas pela relação abaixo;

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta}}^e - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad 1.2(b)$$

$\underline{\underline{D}}$ é uma matriz simétrica com as propriedades do material, $\underline{\underline{\epsilon}}_0$ é a matriz de elasticidade e $\underline{\underline{\epsilon}}_0$ o vetor de deformações iniciais, geralmente deformações térmicas.

1.3 - FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES - MATRIZ DE RIGIDEZ

Considerando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais e se igualando o trabalho virtual das forças externas com o trabalho virtual das forças internas obtido da integração sobre o volume do elemento temos:

$$(\underline{\underline{d}}\underline{\underline{\delta}}^e)^T \underline{\underline{F}}^e = (\underline{\underline{d}}\underline{\underline{\delta}}^e)^T \left(\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}} \, dv - \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{b}} \, dv - \int_S \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{p}} \, ds \right) \quad 1.3(a)$$

A relação acima é válida para qualquer valor do deslocamento virtual e a igualdade dos fatores deve existir. Substituindo as equações 1.2(a) e 1.2(b) em 1.3(a) obtemos:

$$\underline{\underline{F}}^e = \left(\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \, dv \right) \underline{\underline{\delta}}^e - \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \, dv - \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{b}} \, dv - \int_S \underline{\underline{N}} \underline{\underline{p}} \, ds \quad 1.3(b)$$

A relação acima é característica da análise de qualquer elemento segundo a forma aqui descrita.

A matriz de rigidez é representada por

$$\underline{\underline{k}}^e = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \, dv \quad 1.3(c)$$

As forças nodais equivalentes devidas a cargas de volume obtidas da fórmula 1.3(b), são dadas por:

$$\underline{F}_b^e = \int_v \underline{N}^T \underline{b} \, dv \quad 1.3(d)$$

As forças nodais equivalentes devidas a deformação inicial são:

$$\underline{F}_{\epsilon_0}^e = \int_v \underline{B}^T \underline{D} \epsilon_0 \, dv \quad 1.3(e)$$

As forças nodais equivalentes devidas a cargas de superfície são:

$$\underline{F}_p^e = \int_s \underline{N}^T \underline{p} \, ds \quad 1.3(f)$$

O vetor de cargas nodais equivalentes para um elemento, deve conter o mesmo número de componentes, que os correspondentes deslocamentos nodais desse elemento e estar ordenado de maneira apropriada.

1.4 - DETERMINAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

A equação 1.3(b) escrita de uma forma genérica fornece a relação abaixo:

$$\underline{F}^e = \underline{k}^e \underline{\delta}^e \quad 1.4(a)$$

Considerando todos os elementos em que o contínuo está dividido, temos:

$$\sum_{n^{\circ} \text{ de elem.}} (\underline{k}^e \underline{\delta}^e - \underline{F}^e) = 0 \quad 1.4(b)$$

E a relação final é:

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{F} \quad 1.4(c)$$

Cujos termos estão definidos abaixo

- \underline{K} - matriz de rigidez total da estrutura em análise
- $\underline{\delta}$ - vetor de deslocamentos nodais da peça
- \underline{F} - vetor de cargas nodais devidas a cargas de volume \underline{F}_b^e , deformações específicas $\underline{F}_{\epsilon_0}^e$ e cargas de superfície \underline{F}_p^e .

Aplicando um esquema para a resolução da equação 1.4(c) calculam-

se os valores das componentes do vetor $\underline{\delta}$. A partir desses valores determinamos as tensões principais nos elementos pela equação 1.2(b).

CAPÍTULO II

ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Seja o sólido da figura

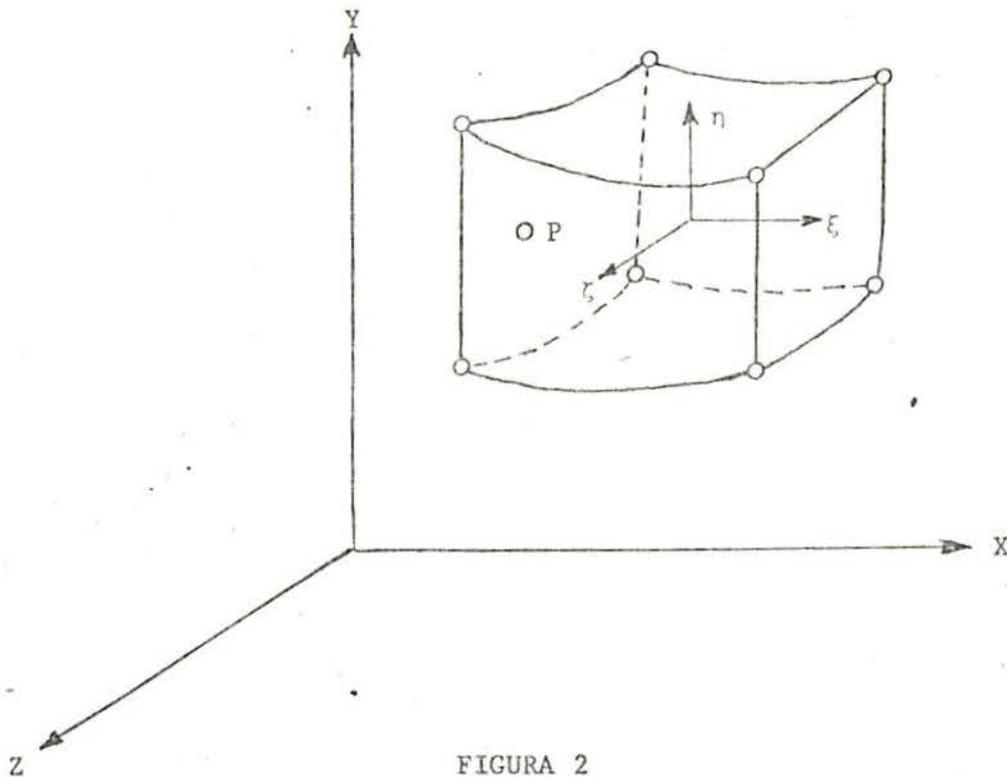


FIGURA 2

Um ponto dentro de um sólido elástico linear

O ponto P, definido pelas coordenadas cartesianas x, y, z , pode ser expresso em termos de coordenadas curvilíneas ξ, η e ζ , ou seja:

$$P(x, y, z) = P [x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)] \quad 2.1(a)$$

As coordenadas curvilíneas adotam nos vértices os valores ± 1 por definição.

Se o determinante do Jacobiano não se anular a transformação de coordenadas existe.

Assim na equação,

$$\underline{\delta} = \underline{N}^T \cdot \underline{\delta}^e \quad 1.1(a)$$

\underline{N}^I é uma matriz em função de ξ , η e ζ .

A relação entre o sistema de coordenadas curvilíneas e o sistema de coordenadas cartesianas \bar{e} da forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \underline{N}^{I'T} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad 2.1(b)$$

O elemento será chamado isoparmétrico se as funções de forma da equação 1.1(a) e 2.1(b) forem iguais, isto é:

$$\underline{N}^I = \underline{N}^{I'} \quad 2.1(c)$$

O elemento será chamado de "SUPER-PARAMÉTRICO" se o grau do polinômio N , usado para definir deslocamentos, for menor que o grau do polinômio usado para definir a geometria e será "SUB-paramétrico" em caso contrário, isto é, o grau do polinômio que define deslocamentos é maior que o que define a geometria.

Todas as fórmulas do capítulo 1 são válidas para a formulação dos elementos isoparmétricos, sendo diferentes apenas no que tange as transformações necessárias, devidas a adoção do sistema de coordenadas curvilíneas local.

2.2 - REQUERIMENTOS BÁSICOS PARA UMA BOA SOLUÇÃO

Para assegurar convergência para uma solução correta, nós vimos no item 1.1 tres condições.

Os elementos que vamos adotar, e estão referidos no capítulo 3, satisfazem as tres condições de convergência, o que é provado exhaustivamente por ERGATODDIUS⁽⁴⁾.

Os polinômios utilizados foram obtidos por inspeção e seguem as condições de que $N_i = 1$ no nó i e $N_i = 0$ nos nós diferentes de i .

O grau do polinômio escolhido deve ser tal que defina os lados, curvos ou não, do elemento referido, isto é, se o elemento tem lados definidos segundo a parábola do segundo grau (um nó intermediário), então, o grau do polinômio deve ser "quadrático" e assim por diante.

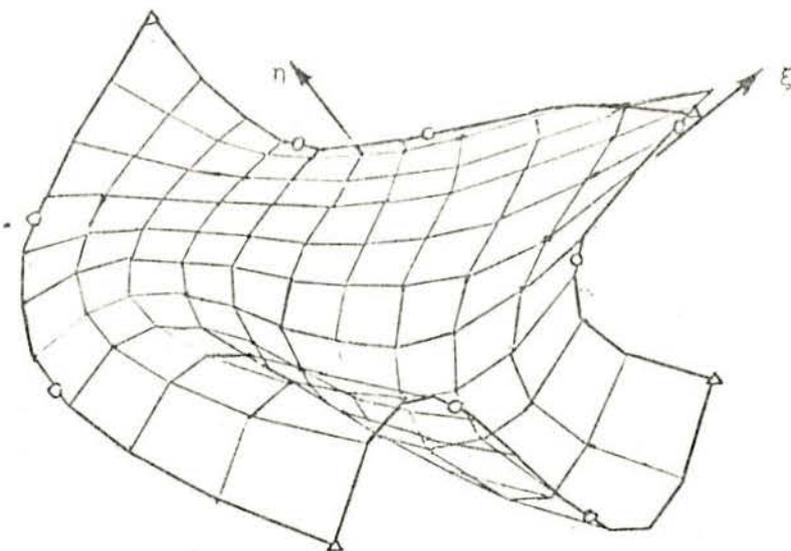
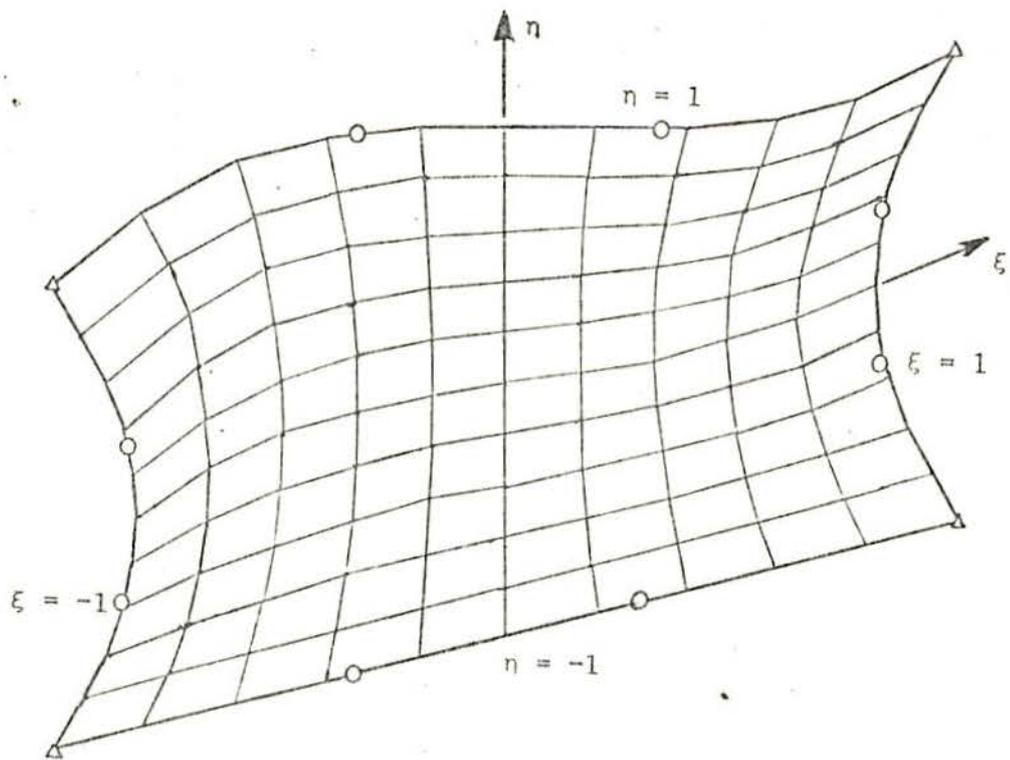


Figura 3
Elementos isoparamétricos, distorções razoáveis e irrazoáveis

2.3 - FORMULAÇÃO GERAL DOS ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

Consideraremos a seguir o caso tridimensional.

Definindo na forma matricial as coordenadas e os deslocamentos, temos as relações abaixo:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{U}_n \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{V}_n \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{W}_n \end{aligned} \quad 2.3(a)$$

as coordenadas cartesianas são dadas por

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{X}_n \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{Y}_n \\ z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{Z}_n \end{aligned} \quad 2.3(b)$$

Sendo \tilde{N} um vetor de funções dependente das coordenadas curvilíneas ξ , η e ζ e \tilde{U}_n , \tilde{V}_n , \tilde{W}_n , \tilde{X}_n , \tilde{Y}_n e \tilde{Z}_n os vetores contendo os valores nodais dos deslocamentos e das coordenadas respectivamente.

A matriz de deformações é dada por:

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{B} \tilde{\delta}^e \quad 1.2(a)$$

com

$$\tilde{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial z + \partial v / \partial x \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \end{Bmatrix} \quad 2.3(c)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial x} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial y} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial y} & \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial x} & \underline{0} \\ \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial z} & \underline{0} & \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial x} \\ \underline{0} & \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial z} & \frac{\partial \underline{N}^T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad 2.3(d)$$

$$\underline{\delta}^e = \begin{Bmatrix} \underline{u}_n \\ \underline{v}_n \\ \underline{w}_n \end{Bmatrix} \quad 2.3(e)$$

As relações diferenciais existentes entre o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas curvilíneas são dadas por:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{aligned} \quad 2.3(f)$$

Que matricialmente é:

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \zeta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta & \partial y / \partial \zeta \\ \partial z / \partial \xi & \partial z / \partial \eta & \partial z / \partial \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \xi} \tilde{x}_n & \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \eta} \tilde{x}_n & \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \zeta} \tilde{x}_n \\ \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \xi} \tilde{y}_n & \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \eta} \tilde{y}_n & \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \zeta} \tilde{y}_n \\ \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \xi} \tilde{z}_n & \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \eta} \tilde{z}_n & \frac{\partial \tilde{N}^T}{\partial \zeta} \tilde{z}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix} \quad 2.3(g)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = \tilde{J}^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix} \quad 2.3(h)$$

e

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix} = (\tilde{J}^{-1})^T \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} \quad 2.3(i)$$

sendo

$$\tilde{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial \xi / \partial x & \partial \eta / \partial x & \partial \zeta / \partial x \\ \partial \xi / \partial y & \partial \eta / \partial y & \partial \zeta / \partial y \\ \partial \xi / \partial z & \partial \eta / \partial z & \partial \zeta / \partial z \end{bmatrix} \quad 2.3(j)$$

De 2.3(d) concluímos que qualquer derivada de função em termos de x , y e z será dada em termos ξ , η e ζ por:

$$\begin{Bmatrix} \partial F / \partial x \\ \partial F / \partial y \\ \partial F / \partial z \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial F / \partial \xi \\ \partial F / \partial \eta \\ \partial F / \partial \zeta \end{Bmatrix} \quad 2.3(k)$$

Logo, temos:

$$\begin{Bmatrix} \partial N^T / \partial x \\ \partial N^T / \partial y \\ \partial N^T / \partial z \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N^T / \partial \xi \\ \partial N^T / \partial \eta \\ \partial N^T / \partial \zeta \end{Bmatrix} \quad 2.3(l)$$

A matriz Jacobiano e seu determinante estão calculados no apêndice 1.

A matriz de rigidez \underline{k}^e , é calculada da equação

$$\underline{k}^e = \int_v \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dv \quad 1.3(c)$$

A matriz \underline{B} é calculada de acordo com 2.3(d) e sua ordem é de 6×3 NP, sendo NP o número de nós do elemento, para o qual se está calculando a matriz de rigidez.

A matriz \underline{D} é a matriz que define a relação entre as tensões e as deformações específicas, é a matriz de elasticidade⁽⁵⁾:

Calculando-se um elemento diferencial de volume temos:

$$dv = dx dy dz \quad 2.3(m)$$

mas

$$dx dy dz = (\det \underline{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad 2.3(n)$$

A relação acima é encontrada em qualquer livro texto de cálculo integral.

Substituindo 2.3(n) em 2.3(m), vem:

$$dv = (\underline{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad 2.3(o)$$

E finalmente temos a matriz de rigidez, para elementos finitos isoparamétricos, definida a seguir:

$$\underline{k}^e = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} |\underline{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad 2.3(p)$$

2.4 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integral da fórmula 2.3(p) poderia ser resolvida algebricamente, mas somente para os elementos mais simples seria fácil, além disso, um erro neste tipo de integração é difícil de ser determinado, existindo ainda o fato de que a integração algébrica é particular para cada elemento.

Para evitarmos os problemas citados acima e com o fim de acelerarmos a formulação e a programação adotamos, para resolução de todas as integrais que se apresentam no presente trabalho, a integração numérica.

Para os elementos isoparamétricos adotamos como limites de integração os valores -1 e 1 , isto é, o intervalo de integração será entre -1 e 1 .

As integrais que se apresentam neste trabalho são:

$$\int_{-1}^1 F(x) dx$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x,y) dx dy$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x,y,z) dx dy dz$$

CELIBERTO⁽¹⁴⁾ reuniu cerca de 11 fórmulas, "gaussianas produto", e "não produto", em um procedimento de cálculo que fornece o valor exato de

qualquer uma das integrais indicadas acima, se F for um polinômio de grau conveniente.

O resultado das integrais dadas em 2.4(a) foi aproximado para

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n W_i F_i \quad 2.4(b)$$

onde

k - é um número inteiro, usado a fim de reduzir o efeito de programação dos erros de truncamento e "roundoff".

W_i - é o coeficiente (peso), associado ao valor de F no ponto de integração designado por i , com $i = 1, 2, \dots, n$.

Uma das vantagens de usarmos a integração numérica é a versatili-dade que ela proporciona ao programa de computação, por exemplo:

podemos usar diferentes elementos para resolver uma mesma estrutura, deter-minando qual o elemento mais eficiente, sem nenhum algebrismo adicional.

Outra vantagem da integração numérica associada a geração automá-tica das funções de forma é a facilidade de determinarmos erros, pois normal-mente é suficiente verificar se os polinômios utilizados satisfazem as con-dições do Ítem 2.2.

2.5 - MODELO DOS ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

2.5.1 - INTRODUÇÃO

Nesta seção daremos a representação dos elementos isoparamétrico a serem usados e a definição do vetor \underline{N} usado nas fórmulas do Ítem 2.3, de acordo com os polinômios de interpolação.

O elemento isoparamétrico é um quadrilátero ou hexaédrico de lados arbitrários no espaço das coordenadas cartesianas e uma figura de lados bem definidos no espaço das coordenadas curvilíneas.

Os polinômios apresentados a seguir são gerados automaticamente, esse fato permite sem maiores problemas a introdução de novos elementos.

2.5.2 - ELEMENTOS TRIDIMENSIONAIS

2.5.2.1 - HEXAÉDRICO LINEAR -> ILS

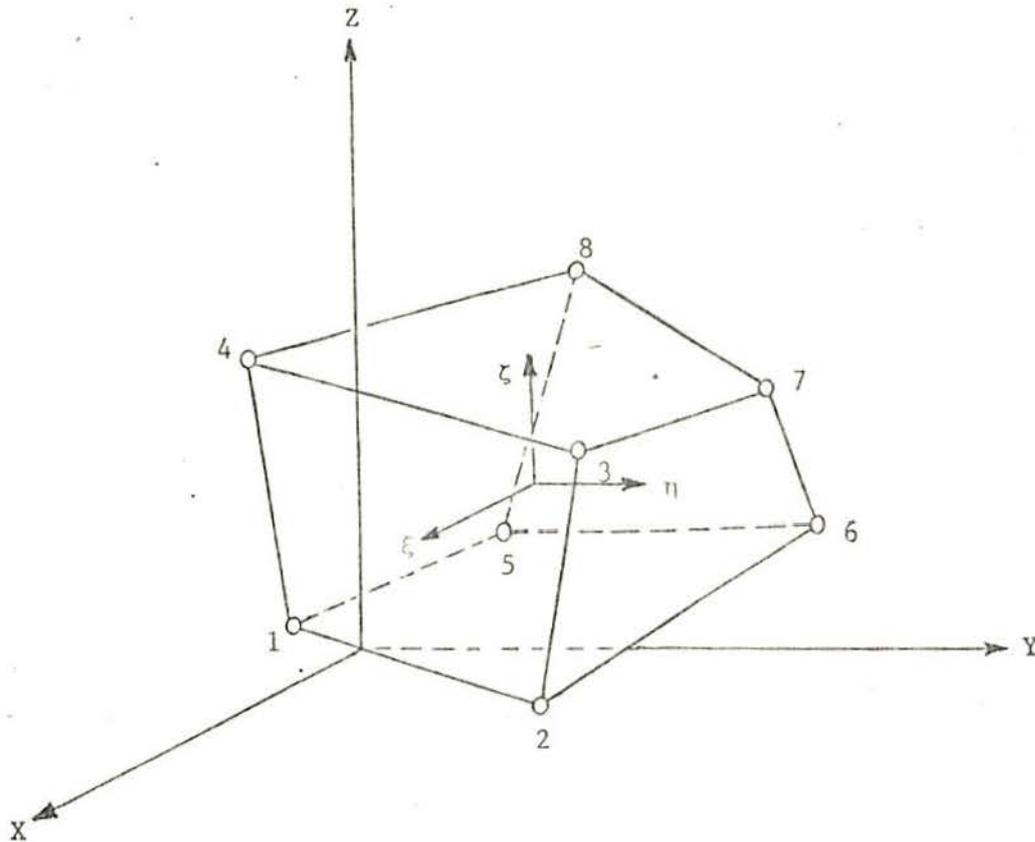


FIGURA 4

Isoparamétrico Sólido Linear

O vetor \underline{N}^T é definido por

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad i = 1, \dots, 8 \quad 2.5.2.1(a)$$

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1$$

2.5.2.3 - HEXAÉDRICO QUADRÁTICO - IQS

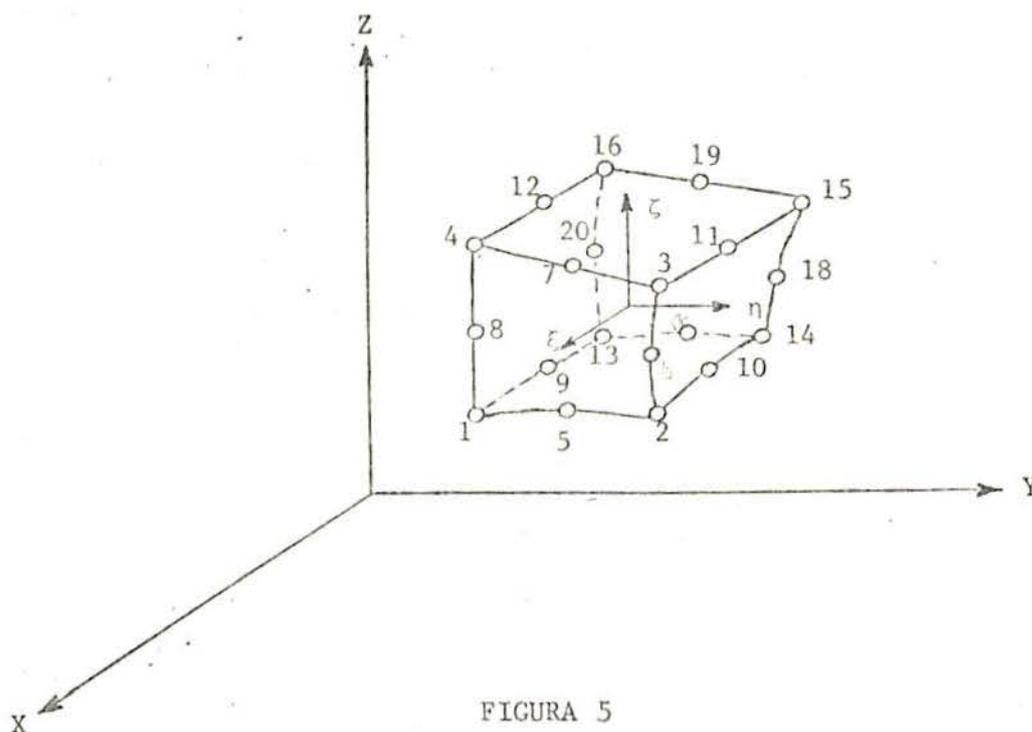


FIGURA 5
Isoparamétrico Sólido Quadrático

O vetor \underline{N}^T é definido por,

- a) Nós dos Vértices (1,2,3,4,13,14,15,16)

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i - 2)$$

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1$$

- b) Nós Intermediários

- b.a) (9,10,11,12)

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$$

$$\eta_i, \zeta_i = \pm 1$$

- b.b) (5,7,17,19)

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i)$$

$$\xi_i, \zeta_i = \pm 1$$

- b.c) (6,8,18,20)

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$$

$$\xi_i, \eta_i = \pm 1$$

2.5.3 - ELEMENTOS BIDIMENSIONAIS

2.5.3.1 - QUADRILÁTERO LINEAR - IQL

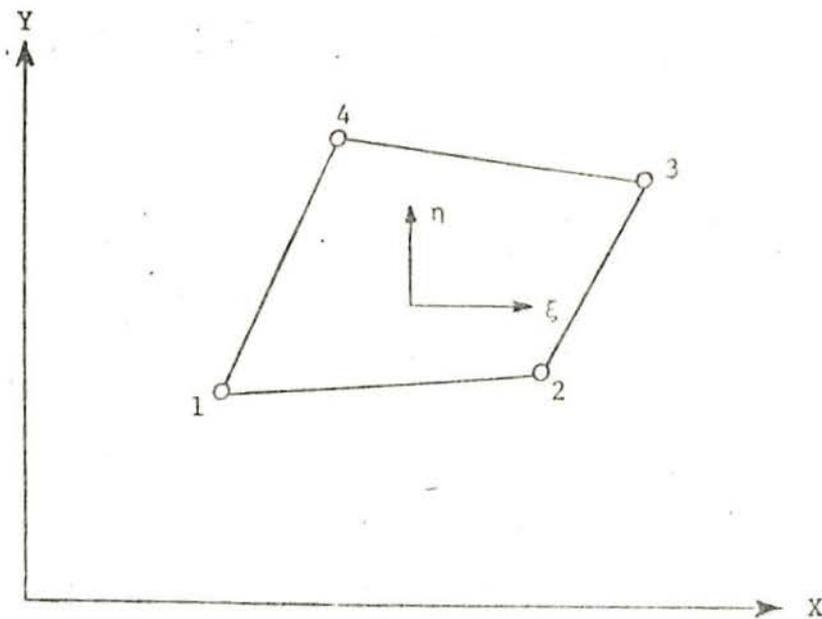


FIGURA 6

Quadrilátero Linear

O vetor \underline{N}^T é definido por:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$$

2.5.3.1(a)

$$\xi_i, \eta_i = \pm 1$$

2.5.3.2 - QUADRILÁTERO QUADRÁTICO - IQQ

O vetor \underline{N}^T é definido por:

a) Nós dos Vértices

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\xi_i, \eta_i = \pm 1$$

manda →

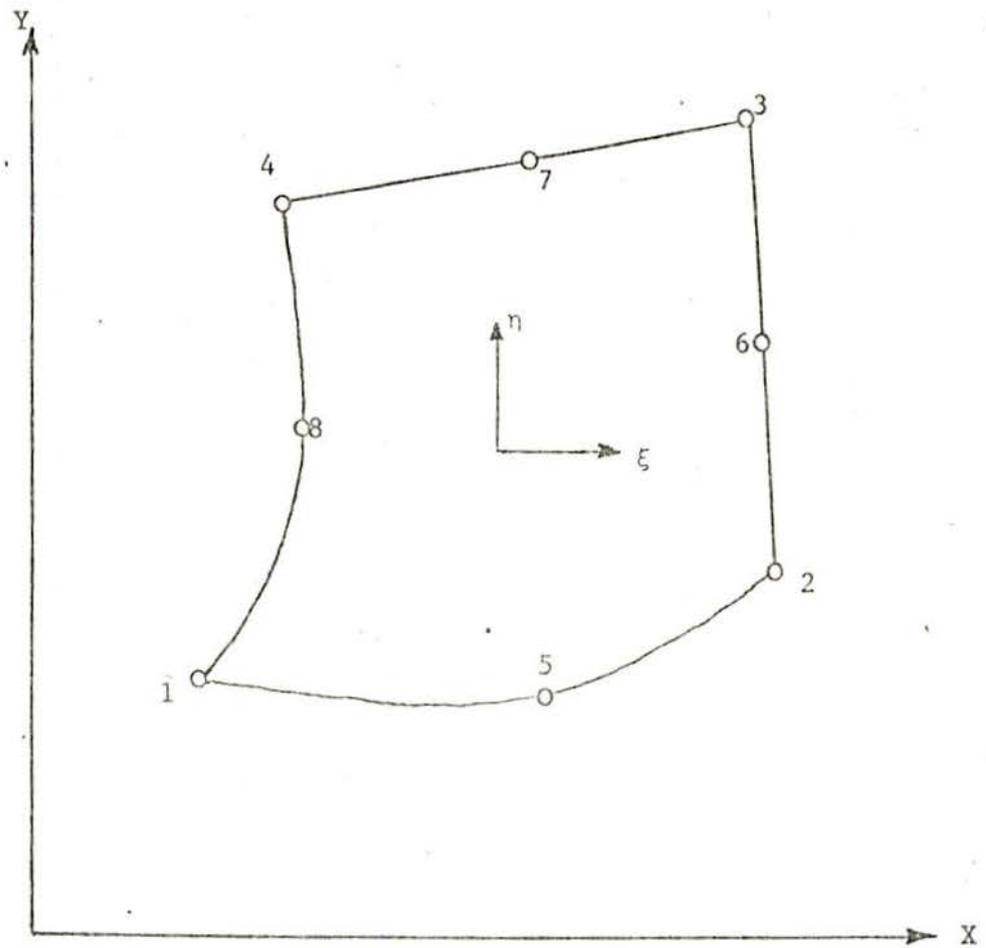


FIGURA 7
 Quadrilátero Quadrático

b) Nós Intermediários

b.a) (5,7)

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \eta\eta_i) (1 - \xi^2)$$

2.5.3.2(a)

$$\eta_i = \pm 1$$

b.b) (6,8)

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi\xi_i) (1 - \eta^2)$$

$$\xi_i = \pm 1$$

2.5.3.3 - QUADRILÁTERO CÚBICO - IQC

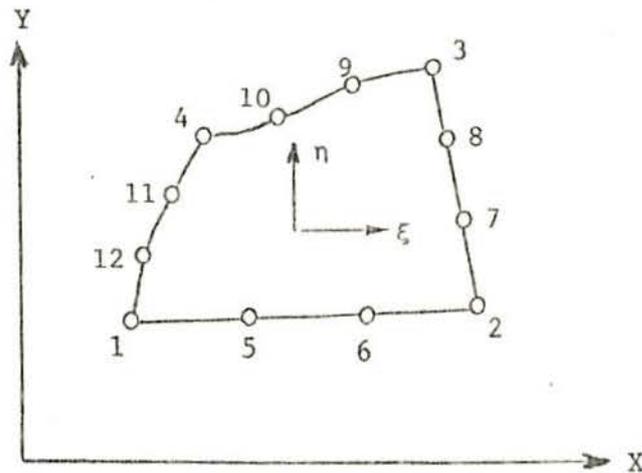


FIGURA 8
Quadrilátero Cúbico

a) Nós dos Vértices

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \left[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2) \right] \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\xi_i, \eta_i = \pm 1$$

b) Nós Laterais

b.a) (7, 8, 11, 12)

$$N_i = \frac{9}{32} (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + 9\eta\eta_i)$$

$$\xi_i = \pm 1, \quad \eta_i = \pm 1/3$$

b.b) (5, 6, 9, 10)

$$N_i = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + 9\xi\xi_i)$$

$$\xi_i = \pm 1/3, \quad \eta_i = \pm 1$$

2.5.3.3(a).

2.6 - FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

2.6.1 - INTRODUÇÃO

Analisaremos tres tipos de carregamentos, nos quais o contínuo a ser mapeado pelos elementos isoparamétricos, pode estar submetido.

Todos esses carregamentos devem ser convertidos para forças nodais equivalentes, para o que as equações dadas no ítem 1.3 são suficientes, bastando particularizá-las para os elementos isoparamétricos.

Todas as forças aqui consideradas podem ter uma distribuição variável, de acordo com a superfície, por exemplo, se for uma superfície quadrática, a distribuição das forças externas também será quadrática e seus valores, ao longo da superfície, serão obtidos por interpolação a partir de seus valores nodais.

2.6.2 - FORÇAS DE SUPERFÍCIE

A distribuição das forças ao longo da superfície do elemento será expressa com os mesmos polinômios, usados para interpolar deslocamentos e geometria.

Por exemplo: na figura abaixo o valor da carga \bar{p} na direção x ao longo, digamos, do lado de um "IQQ" será dado por ⁽¹³⁾;

$$\bar{p}_x = \bar{p}_{x1} N_1 + \bar{p}_{x2} N_2 + \bar{p}_{x4} N_4 = \tilde{N}^T \bar{p}_x^e \quad 2.6.2(a)$$

\bar{p}_x = força por unidade de comprimento ao longo do lado.

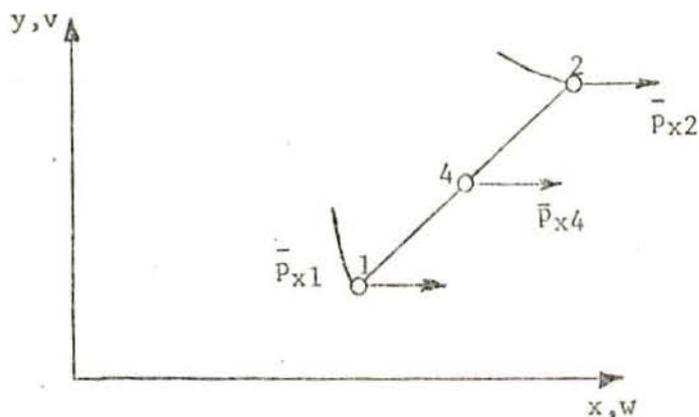


FIGURA 9

Forças agindo lateralmente

ESCOLA DE ENGENHARIA
BIBLIOTECA

Se tivermos a face de um "IQS" o vetor \underline{N} será dado pela fórmula 2.5.3.2(a), ou seja, é determinado pelos polinômios para o "IQQ". Figura 10.

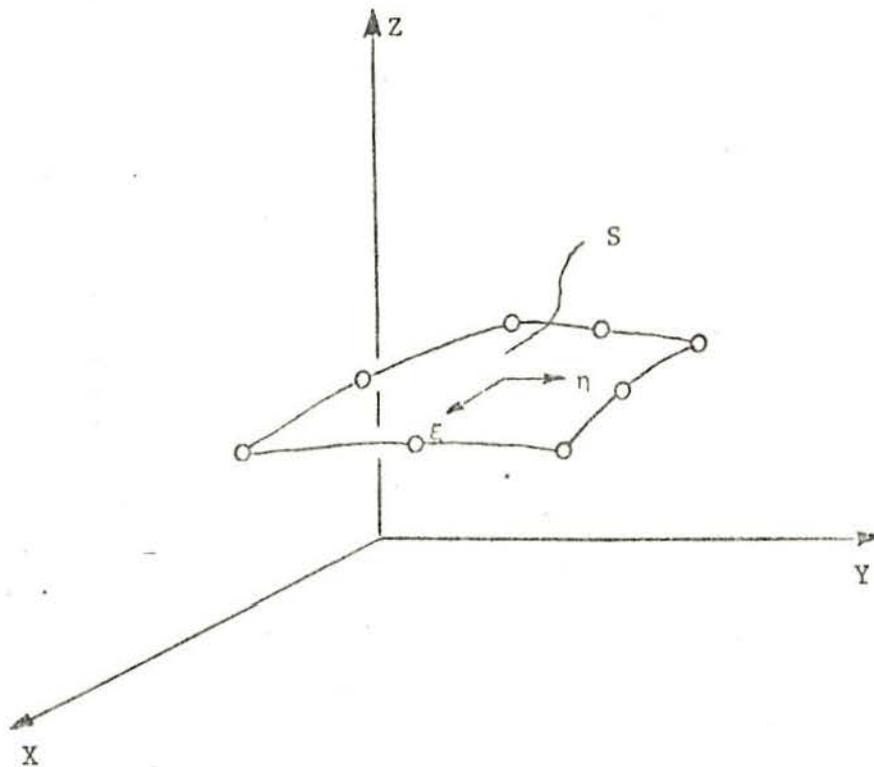


FIGURA 10

Face de um Isoparamétrico Sólido Quadrático

Da fórmula 1.3(f) temos:

$$\underline{F}_p^e = \int_s \underline{N}^I \underline{p} \, ds \quad 1.3(f)$$

onde:

$$\underline{N}^I = \begin{bmatrix} \underline{N} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{N} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{N} \end{bmatrix} \quad 2.6.2(b)$$

e \underline{p} o vetor contendo as intensidades nodais das forças externas por unidade de área. Lembrando 2.6.2(a) teremos \underline{p} representado de acordo com:

$$p = \begin{Bmatrix} \tilde{N}^T p_x^e \\ \tilde{N}^T p_y^e \\ \tilde{N}^T p_z^e \end{Bmatrix} \quad 2.6.2(c)$$

$$F_{\tilde{p}}^e = \begin{bmatrix} \int_s \tilde{N} \tilde{N}^T ds & 0 & 0 \\ 0 & \int_s \tilde{N} \tilde{N}^T ds & 0 \\ 0 & 0 & \int_s \tilde{N} \tilde{N}^T ds \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x^e \\ p_y^e \\ p_z^e \end{Bmatrix} \quad 2.6.2(d)$$

Onde o elemento de área ds é o módulo do produto vetorial $d\vec{\xi} \times d\vec{\eta}$ e é expresso por:

$$ds = \left\{ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right] * \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \times \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \times \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]^2 \right\}^{1/2} d\xi d\eta \quad 2.6.2(e)$$

Todo o problema reduz-se a calcular a integral abaixo

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{N} \tilde{N}^T ds \quad 2.6.2(f)$$

Sendo os elementos do vetor \tilde{N} polinômios de interpolação bidimensional.

2.6.3 - FORÇAS DE VOLUME

São forças que aparecem devido ao peso próprio, magnetismo, etc. Seguimos o mesmo raciocínio do item anterior, apenas que a fórmula básica é

$$F_{\tilde{b}}^e = \int_v \tilde{N}^T \tilde{b} dv \quad 1.3(d)$$

Se \tilde{b} for força de peso próprio ela é constante e então,

$$\underline{\tilde{b}} = \begin{Bmatrix} \rho g_x^e \\ \rho g_y^e \\ \rho g_z^e \end{Bmatrix} \quad 2.6.3(a)$$

ρ - densidade do material

g_x^e, g_y^e, g_z^e - acelerações constantes de gravidade em tres direções, valores nos nós

$$\underline{\tilde{F}}_b^e = \begin{bmatrix} \int_V \underline{\tilde{N}} dv & 0 & 0 \\ 0 & \int_V \underline{\tilde{N}} dv & 0 \\ 0 & 0 & \int_V \underline{\tilde{N}} dv \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho g_x^e \\ \rho g_y^e \\ \rho g_z^e \end{Bmatrix} \quad 2.6.3(b)$$

Onde \underline{dv} é o elemento de volume dado por

$$dv = |\underline{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad 2.3(o)$$

resumindo-se então:

$$\int_V \underline{\tilde{N}} dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\tilde{N}} |\underline{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad 2.6.3(c)$$

Usando-se o polinômio de interpolação para o caso tridimensional.

2.6.4 - DEFORMAÇÃO TÉRMICA

A equação 1.3(e) fornece o valor das nodais equivalentes para o caso de deformações específicas.

$$\underline{\tilde{F}}_{\epsilon_0}^e = \int_V \underline{\tilde{B}}^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 dv \quad 1.3(e)$$

Onde $\tilde{\epsilon}_0$ é o vetor que contém as deformações específicas.

$$\tilde{\epsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \epsilon_{z0} \\ \epsilon_{xy0} \\ \epsilon_{yz0} \\ \epsilon_{zx0} \end{Bmatrix} \quad 2.6.4(a)$$

Se as deformações iniciais surgirem devido a variação de temperatura temos ⁴:

$$\tilde{\epsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \alpha_x \theta \\ \alpha_y \theta \\ \alpha_z \theta \\ \alpha_{xy} \theta \\ \alpha_{xz} \theta \\ \alpha_{yz} \theta \end{Bmatrix} \quad 2.6.4(b)$$

Onde os α 's são os coeficientes de expansão térmica nas direções respectivas e θ o valor da temperatura em um ponto de coordenadas (ξ, η, ζ) .

Como trata-se de um sólido arbitrário, temos seis componentes de deformação

θ será expresso em termos de seus valores nodais,

$$\theta = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{\theta}^e \quad 2.6.4(c)$$

$\tilde{\theta}^e$ = vetor de temperaturas nodais.

A fórmula final, para a obtenção das forças nodais equivalentes, é obtida substituindo-se todos os valores aqui determinados na equação 1.3(e) e lembrando que dv é dado pela fórmula 2.3(o), temos:

$$\underline{F}_{\epsilon 0}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \underline{D} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ \alpha_{xy} \\ \alpha_{xz} \\ \alpha_{yz} \end{Bmatrix} (\underline{N}^T \underline{\theta}^e) dv \quad 2.6.4(d)$$

O vetor $\underline{F}_{\epsilon 0}^e$ terá tres componentes: na direção do eixo x , do eixo y e do eixo z .

2.7. - DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES

Determinamos pela equação 1.4(c), os deslocamentos nodais do contínuo e aplicando a seguir a equação 1.2(b), determinamos as tensões:

Como \underline{B} nessa equação depende das coordenadas curvilíneas ξ , η e ζ , as tensões serão funções de ξ , η , ζ .

Na equação

$$\underline{\delta} = \underline{D} \underline{B} \underline{\theta}^e - \underline{D} \underline{\epsilon}_0 \quad 1.2(b)$$

o último termo só existirá quando houver deformação inicial.

A matriz de elasticidade⁵, que é formada em termos do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν , não requer tratamento especial da computação, sendo normalmente fornecida. No apêndice 2 está listada a matriz de elasticidade \underline{D} para um elemento tridimensional isotrópico.

De acordo com a prática usual, determinamos as tensões nos nós dos elementos. Em nós comuns a diversos elementos, os valores das tensões nesses nós são dados pela média dos valores individuais das tensões dos elementos concorrentes.

As seis componentes do vetor tensão são:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

2.7(a)

Uma fórmula mais geral que 1.2(b) é:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_0) + \underline{\sigma}_0$$

2.7(b)

para o caso de termos tensões iniciais.

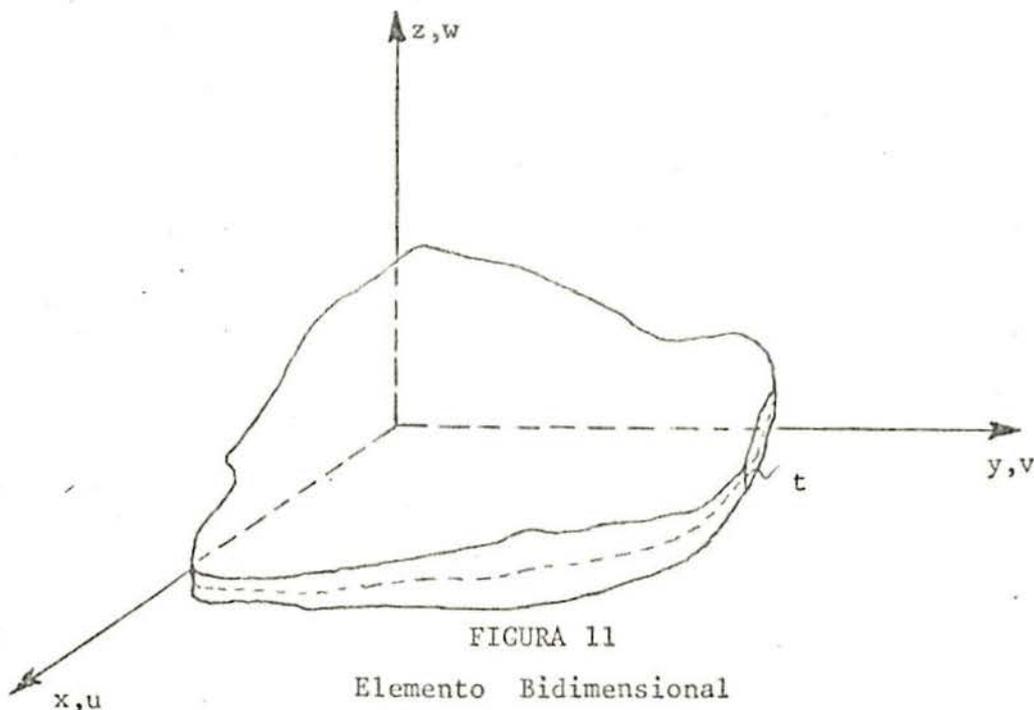
CAPÍTULO III

ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS APLICADOS A TENSÕES PLANAS E DEFORMAÇÕES PLANAS

3.1 - INTRODUÇÃO

Os problemas que vamos abordar seguem as relações básicas descritas ao longo do capítulo 2 para os sólidos.

Consideremos apenas duas componentes de deslocamentos, u na direção x e v na direção y .



As forças de volume e de superfície são planas e independentes de z e não existem forças atuando sobre os lados paralelos ao plano xy .

Consideraremos tres componentes de deformações específicas, aquelas do plano xy .

No estado plano de deformações, a tensão σ_z na direção dos ângulos direitos do plano xy não é zero, apesar de considerarmos a deformação nessa direção como nula, contudo não contribui para o trabalho interno, por isso a desconsideramos e, se desejarmos calculá-la, basta usarmos a correspondente relação entre tensões e deformações específicas no fim de toda a computação.

3.2 - FORMULAÇÃO

Os elementos isoparamétricos a serem usados na resolução dos problemas bidimensionais serão os elementos dados no item 2.5.3 e para facilitar reunidos na figura 12.

Os deslocamentos nodais são:

$$\tilde{\delta}_e = \begin{Bmatrix} u \\ \tilde{u}_n \\ v \\ \tilde{v}_n \end{Bmatrix} \quad 3.2(a) \quad \text{ou} \quad \tilde{\delta}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad 3.2(b)$$

as coordenadas e quaisquer outras quantidades são expressas em função de ξ e η apenas, então:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{u}_n$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{v}_n$$

e

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{x}_n$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots = \tilde{N}^T \tilde{y}_n$$

Onde \tilde{N} é um vetor de funções dependentes apenas das coordenadas curvilíneas ξ e η .

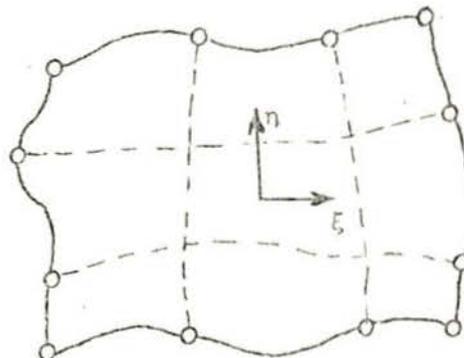
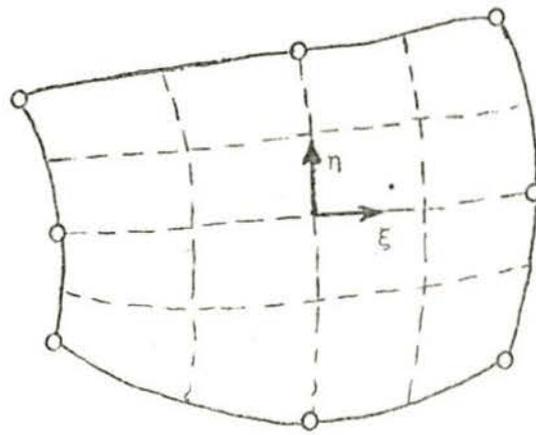
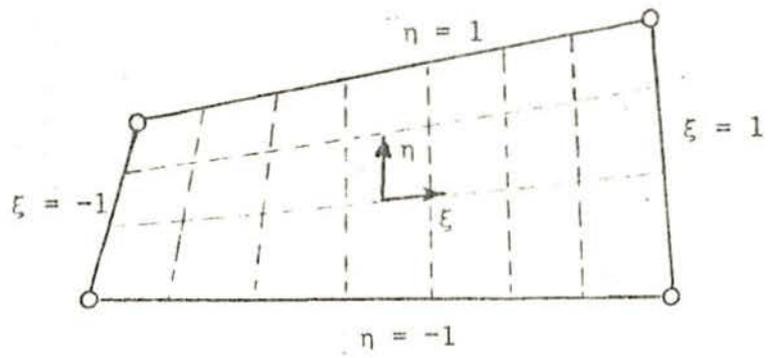


FIGURA 12
Elementos Isoparamétricos Bidimensionais

A matriz de deformações é:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad 3.2(e)$$

e $\underline{\underline{B}}$ agora em função de ξ e η apenas

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} \\ \frac{\partial N^T}{\partial y} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \quad 3.2(f)$$

As relações diferenciais entre o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas curvilíneas são:

$$d_x = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad 3.2(g)$$

$$d_y = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

matricialmente,

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial \xi} x_n & \frac{\partial N^T}{\partial \eta} x_n \\ \frac{\partial N^T}{\partial \xi} y_n & \frac{\partial N^T}{\partial \eta} y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad 3.2(h)$$

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = (\underline{J}^{-1})^T \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \quad 3.2(i)$$

com

$$\underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial \xi / \partial x & \partial \eta / \partial x \\ \partial \xi / \partial y & \partial \eta / \partial y \end{bmatrix} \quad 3.2(j)$$

e por analogia com 2.3(k) temos:

$$\begin{Bmatrix} \partial \underline{N}^T / \partial x \\ \partial \underline{N}^T / \partial y \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial \underline{N}^T / \partial \xi \\ \partial \underline{N}^T / \partial \eta \end{Bmatrix} \quad 3.2(k)$$

No apêndice 1 está a forma explícita do jacobiano Inverso e de seu determinante. O jacobiano desta transformação é uma matriz de ordem 2x2.

A matriz de rigidez é

$$\underline{k}^e = \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} t \, d(\bar{\text{área}}) \quad 3.2(l)$$

Sendo \underline{B} calculada pela expressão 3.2(f) e com ordem de 3x2 $N_{p,on}$ de NP é o número de nós de um elemento.

A matriz \underline{D} , matriz de elasticidade, será assunto de um item posterior e finalmente t é a espessura do elemento.

Considerando um elemento diferencial de área temos:

$$dA = dx dy \quad 3.2(m)$$

e

$$dA = |\underline{J}| d\xi d\eta \quad 3.2(n)$$

logo

$$\underline{k}^e = \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} t |\underline{J}| d\xi d\eta \quad 3.2(o)$$

Supondo que a espessura não seja constante, obteremos o seu valor em qualquer ponto do elemento a partir dos seus valores nodais por interpolação, sendo N mais uma vez o polinômio interpolador a ser usado, ou seja:

$$t = N_1 t_1 + N_2 t_2 + \dots = \underline{N}^T \underline{t}^e \quad 3.2(p)$$

$$\underline{t}^e = \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \quad 3.2(q)$$

Onde t_1, t_2, \dots são os valores da espessura nos pontos nodais do elemento.

Com isso 3.2(o) fica:

$$\underline{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} (\underline{N}^T \underline{t}^e) |\underline{J}| d\xi d\eta \quad 3.2(r)$$

Resolvemos por integração numérica de acordo com o item 2.4 e assim, o fato da espessura ser variável, não é um problema muito grande. Se os valores da espessura nos pontos nodais forem iguais, significará espessura constante, não sendo necessária a interpolação e com isso usa-se a equação 3.2(o) ao invés da equação 3.2(r).

3.3 - FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

3.3.1 - FORÇAS AGINDO SOBRE OS LADOS DOS ELEMENTOS

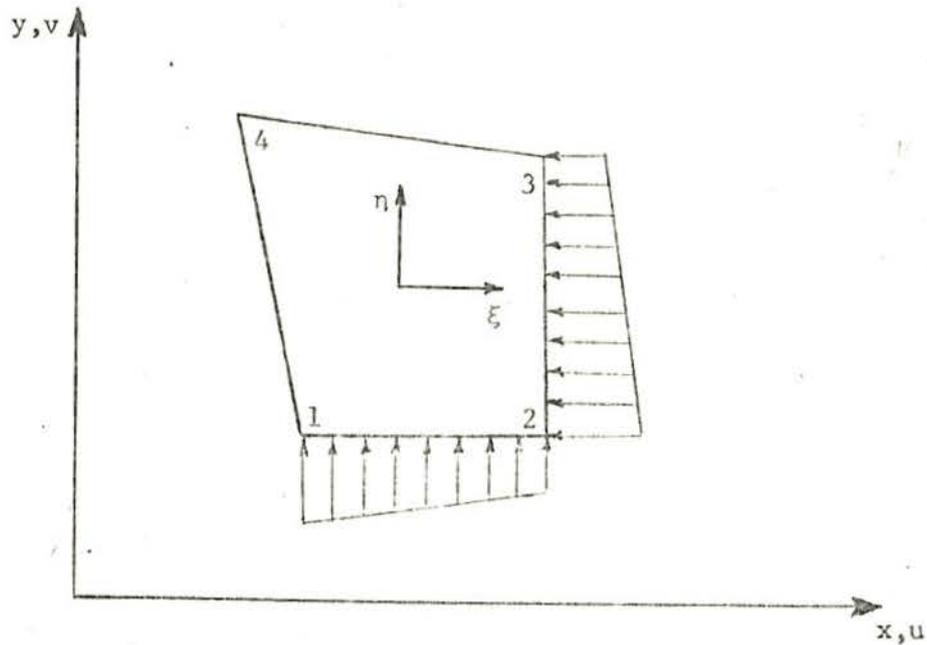


FIGURA 13

IQL submetido a forças laterais

As forças laterais são interpoladas a partir de seus valores nodais, pelas mesmas funções de interpolação usadas para deslocamentos.

Particularizando a equação 1.1(k), a fim de integrá-la ao longo de uma linha, temos:

$$\underline{\tilde{p}}^e = \int_L \underline{\tilde{N}}^I \underline{p} d(\text{linha}) \quad 3.3.1(a)$$

Sendo

$$\underline{\tilde{N}}^I = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{N}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\tilde{N}} \end{bmatrix} \quad 3.3.1(b)$$

e \underline{p} o vetor de forças por unidade de comprimento, contendo as intensidades nodais multiplicadas por $\underline{\tilde{N}}$, isto é:

$$\underline{p} = \begin{Bmatrix} \underline{N}^T \underline{p}_x^e \\ \underline{N}^T \underline{p}_y^e \end{Bmatrix} \quad 3.3.1(c)$$

Logo

$$\underline{F}_{-p}^e = \begin{bmatrix} \int_L \underline{N} \underline{N}^T d_L & \underline{0} \\ \underline{0} & \int_L \underline{N} \underline{N}^T d_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{p}_x^e \\ \underline{p}_y^e \end{Bmatrix} \quad 3.3.1(d)$$

O polinômio de interpolação N é unidimensional, ver seção 2.5.3, particularizado para o lado do elemento onde age o carregamento.

O valor de \underline{d}_L é obtido de qualquer livro de matemática aplicada;

e

$$d_L = (x'^2 + y'^2)^{1/2} dl \quad 3.3.1(e)$$

x' e y' são as derivadas de x e y em relação a ξ ou η e dl será $d\xi$ ou $d\eta$ conforme ξ ou η sejam constantes para o lado em questão.

Por exemplo: para a fig. 13 d_L para o lado 2-3 será dado por

$$d_L = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} d\eta \quad 3.3.1(f)$$

3.3.2 - DEFORMAÇÃO TÉRMICA

As forças nodais equivalentes devidas a deformações específicas são dadas por ²:

$$\underline{F}_{\epsilon_0}^e = \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon} dA \quad 3.3.2(a)$$

Sendo $\underline{\varepsilon}_0$ o vetor contendo as deformações específicas

$$\underline{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad 3.3.2(b)$$

Quando as deformações iniciais são devidas a variação de temperatura, não temos tensão de corte para o caso de expansão térmica, devido a propriedade do material isotrópico, então o vetor de deformações específicas fica:

$$\underline{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \alpha_x \theta \\ \alpha_y \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 3.3.2(c)$$

α_x e α_y - são coeficientes de expansão térmica nas direções x e y respectivamente, supondo um elemento bidimensional linear arbitrário.

θ - é o valor da temperatura em um ponto de coordenadas (ξ, η) e obtido em termos dos valores nodais, ver seção 2.3.4

Assim a equação 3.3.2(a) da maneira mais geral é

$$\underline{F}_{\varepsilon 0}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} \underline{D} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} (\underline{N}^T \theta^e) (\underline{N}^T t^e) \quad 3.3.2(d)$$

O elemento de área dA é expresso pela equação

$$dA = |J| \, d\xi d\eta \quad 3.2(n)$$

3.3.3 - FORÇAS DISTRIBUIDAS DE VOLUME

Normalmente o elemento estará sujeito a forças nas direções dos eixos x e y , se essas cargas forem constantes temos:

$$\underline{\tilde{b}} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad 3.3.3(a)$$

Substituindo na equação 1.3(d), segue-se:

$$F_b^e = t \begin{bmatrix} \int_A \underline{\tilde{N}} d_x d_y & 0 \\ 0 & \int_A \underline{\tilde{N}} d_x d_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad 3.3.3(b)$$

com

$$\int_A \underline{\tilde{N}} d_x d_y = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\tilde{N}} |\underline{\tilde{J}}| d\xi d\eta \quad 3.3.3(c)$$

A fórmula acima será resolvida por integração numérica.

Se as cargas de volume não forem constantes, deverão ser interpoladas e a fórmula 3.3.3(c) fica:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\tilde{N}} \underline{\tilde{N}}^T |\underline{\tilde{J}}| d\xi d\eta \quad 3.3.3(d)$$

Os polinômios a serem usados são os do caso bidimensional.

3.4 - DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES

A tensão para o caso bidimensional terá apenas tres componentes:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \quad 3.4(a)$$

Por definição as tensões são constantes dentro do elemento e serão determinadas para os pontos nodais desse elemento e calculadas a partir da fórmula básica.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta}}^e - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad 1.2(b)$$

A matriz de elasticidade $\underline{\underline{D}}$ está listada no apêndice 2 para o caso de materiais isotrópicos, para tensões planas e deformações planas.

CAPÍTULO 4

ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS APLICADOS A ANÁLISE DE TENSÕES EM SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Resolvemos analisar as tensões nos corpos de revolução submetidos a carregamento axissimétrico com elementos isoparamétricos, devido ao seu considerável interesse de ponto de vista prático.

Matematicamente o problema é bidimensional.

Devido a simetria, dois componentes de deslocamentos² são

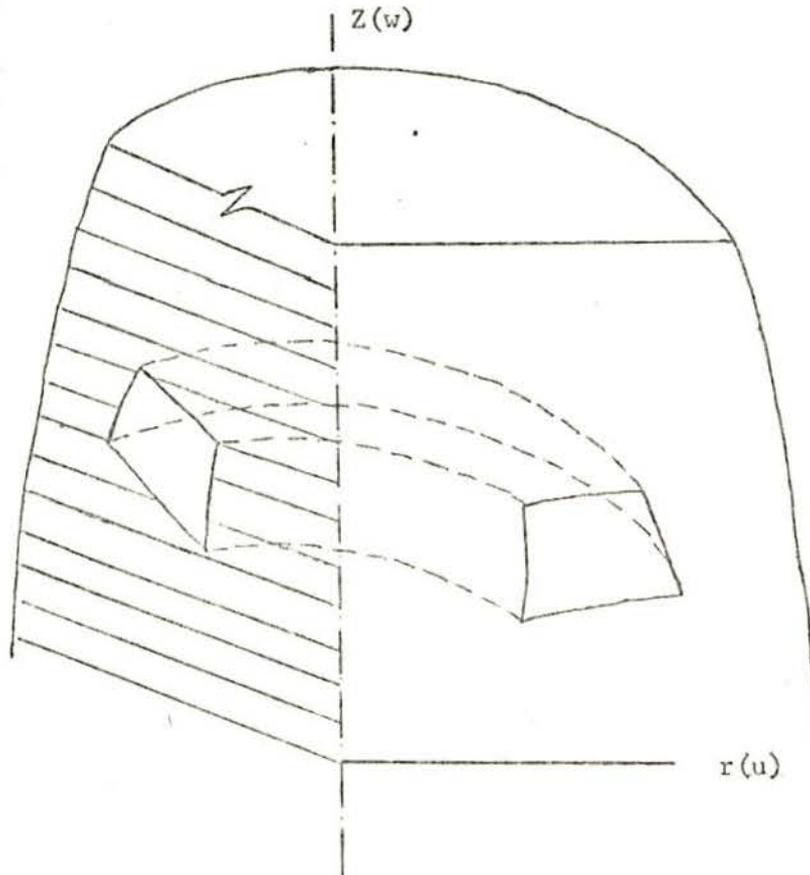


FIGURA 14

Elemento Isoparamétrico em um Sólido Axissimétrico

suficientes para definirem completamente o estado de tensões e deformações planas.

Na figura 14 temos um sólido axissimétrico, onde r é a coordenada radial e z a coordenada axial de qualquer ponto, sendo u e v , respectivamente, os componentes do deslocamento desse ponto nas direções r e z .

Neste caso teremos quatro componentes de tensões e como veremos a quarta componente é justamente a diferença entre a situação axissimétrica e a de tensões e deformações planas.

Os polinômios definidos no ítem 2.5.3 são novamente usados aqui.

Convém salientar que a integração numérica será feita ao longo do anel formado.

4.2 - FORMULAÇÃO

Sendo um problema abordado do ponto de vista bidimensional, os elementos isoparamétricos são os do ítem 2.5.3.

Os vetores com os deslocamentos e as coordenadas de um ponto qualquer no interior do sólido de revolução serão dados por:

$$u = \tilde{N}^T \tilde{u}_n \quad 4.2(a)$$

$$v = \tilde{N}^T \tilde{v}_n$$

$$r = \tilde{N}^T \tilde{r}_n \quad 4.2(b)$$

$$z = \tilde{N}^T \tilde{z}_n$$

E seguindo o desenvolvimento idêntico ao de tensões planas e deformações planas, o vetor de deformações específicas terá quatro elementos.

$$\tilde{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad 4.2(c)$$

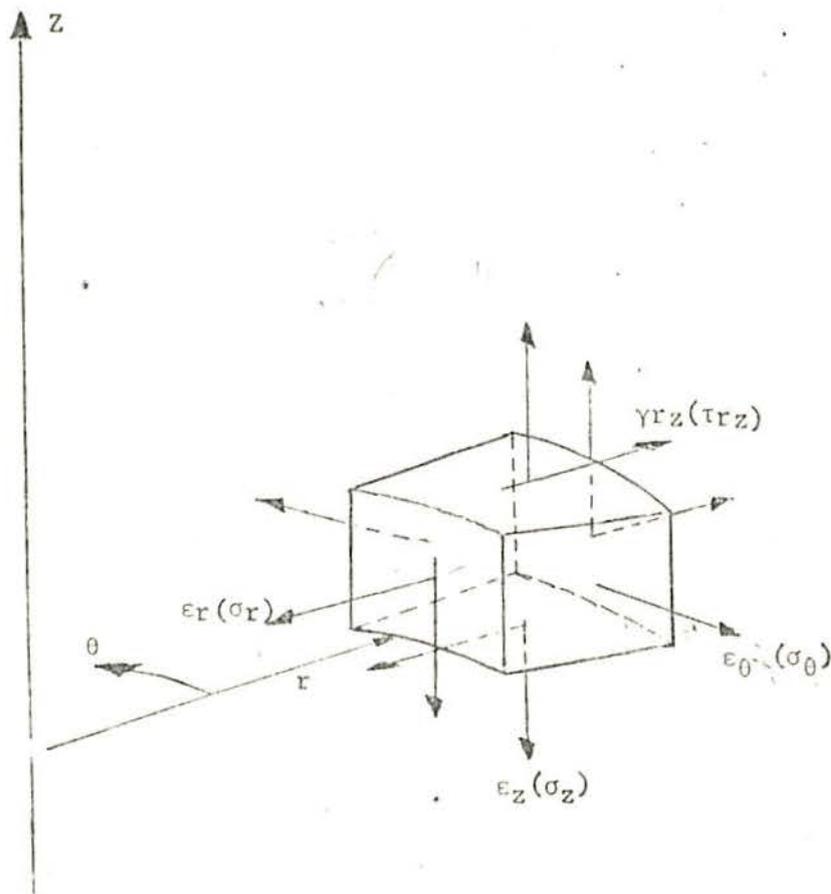


FIGURA 15

Tensões e deformações em Sólidos Axissimétricos

A matriz que relaciona deformações e deslocamento na fórmula:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{\delta}^e \quad 1.2(a)$$

é,

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{(N^T r_n)} \\ \frac{\partial N^T}{\partial r} & \frac{\partial N^T}{\partial z} \end{bmatrix} \quad 4.2(d)$$

O vetor de deslocamentos $\underline{\delta}^e$ está explícito na equação 3.2(a)

As relações diferenciais entre o sistema de coordenadas axial e radial z e r respectivamente e o sistema de coordenadas curvilíneas ξ e η

são

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial r}{\partial \eta} d\eta \quad 4.2(e)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta$$

Ou na forma matricial, já com a substituição de r e z pelos seus valores em 4.2(a), temos

$$\begin{Bmatrix} dr \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial \xi} r_n & \frac{\partial N^T}{\partial \eta} r_n \\ \frac{\partial N^T}{\partial \xi} z_n & \frac{\partial N^T}{\partial \eta} z_n \end{bmatrix} \quad 4.2(f)$$

O que nos leva a uma relação quase idêntica a 3.2(i). Seguindo o mesmo caminho obtemos a relação

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial r} \\ \frac{\partial N^T}{\partial z} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad 4.2(g)$$

A matriz \underline{J}^{-1} é a mesma do caso bidimensional e está determinada no apêndice 1.

A matriz de rigidez, cuja integral de volume é ao longo do anel formado pelo material, é derivada da equação geral 1.3(c)

$$\underline{k}^e = 2 \pi \int_{\Lambda} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} r d_r dz \quad 4.2(h)$$

Onde \underline{B} é a matriz obtida em 4.2(d) e de ordem 4×2 NP.

Substituindo os valores determinados nas equações anteriores temos a relação final

$$\underline{k}^e = 2 \pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} (N^T r_n) |J| d\xi d\eta \quad 4.2(i)$$

4.3 - FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

4.3.1 - FORÇAS AGINDO SOBRE OS LADOS DOS ELEMENTOS

Por analogia com o ítem 3.3.1, a força nodal equivalente devida a essas forças é:

$$\underline{\tilde{F}}_p^e = 2 \int_L \underline{\tilde{N}}^T \underline{p} r d(\text{LINHA}) \quad 4.3.1(a)$$

com

$$\underline{p} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{N}}^T \underline{p}_x^e \\ \underline{\tilde{N}}^T \underline{p}_y^e \end{array} \right\} \quad 4.3.1(b)$$

O vetor \underline{p} contém as intensidades nodais das forças externas, multiplicadas pelo vetor $\underline{\tilde{N}}$, particularizado para o lado do elemento onde age o carregamento.

Generalizando, temos:

$$\underline{\tilde{F}}_p^e = \begin{bmatrix} 2 \int_L \underline{\tilde{N}} \underline{\tilde{N}}^T (\underline{\tilde{N}}^T \underline{r}_n) dL & \underline{0} \\ \underline{0} & 2 \int_L \underline{\tilde{N}} \underline{\tilde{N}}^T (\underline{\tilde{N}}^T \underline{r}_n) dL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{p}_x^e \\ \underline{p}_y^e \end{Bmatrix} \quad 4.3.1(c)$$

O valor de dL é expresso pela equação 3.3.1(d).

4.3.2 - FORÇAS DISTRIBUIDAS DE VOLUME

São forças que aparecem devido ao peso próprio, forças centrífugas em máquinas rotativas etc, forças por unidade de volume do material.

A equação

$$\underline{\tilde{F}}_b^e = \int_v \underline{\tilde{N}}^T \underline{b} dv \quad 1.3(d)$$

adaptada ao caso axissimétrico, fica

$$\underline{\tilde{F}}_b^e = 2 \int_A \underline{\tilde{N}}^T \underline{b} r dr dz \quad 4.3.2(a)$$

Se \underline{b} for o peso próprio do material, será constante e teremos

$$\underline{b} = \begin{Bmatrix} \rho g_z^e \\ \rho g_r^e \end{Bmatrix} \quad 4.3.2(b)$$

ρ - densidade do material

g_z^e e g_r^e - acelerações constantes da gravidade nas direções z e r respectivamente, valores nodais.

Substituindo em 4.3.1(a)

$$\underline{F}_b^e = 2 \pi \begin{bmatrix} \int_A \underline{N} r dr dz & 0 \\ 0 & \int_A \underline{N} r dr dz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho g_z^e \\ \rho g_r^e \end{Bmatrix} \quad 4.3.2(c)$$

com

$$\int_A \underline{N} (\underline{N}^T \underline{r}_n) dr dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{N} (\underline{N}^T \underline{r}_n) |J| d\xi d\eta \quad 4.3.2(d)$$

Qualquer outro tipo de força de volume pode ser analisado da mesma forma tendo-se em mente que haverá duas componentes, uma na direção de z (axial) e outra na de r (radial).

4.3.3 - DEFORMAÇÃO TÉRMICA

Novamente da equação 1.3(e) obtemos

$$\underline{F}_{\epsilon_0}^e = 2 \pi \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 r dr dz \quad 4.3.3(a)$$

As componentes da deformação inicial são

$$\underline{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z0} \\ \varepsilon_{r0} \\ \varepsilon_{\theta 0} \\ \gamma_{rzo} \end{Bmatrix} \quad 4.3.3(b)$$

O caso mais comum é o de variação térmica e para um material isotrópico o vetor de deformações, devido a variação térmica em um material estratificado (fiberglass), é

$$\underline{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \alpha_z \theta \\ \alpha_r \theta \\ \alpha_r \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 4.3.3(c)$$

Sendo α_z e α_r coeficientes de expressão térmica na direção axial z e na direção radial r respectivamente e, θ a variação de temperatura em um elemento, ver seção 3.3.2

Assim, ficamos com

$$\underline{F}_{\varepsilon 0}^e = 2 \pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{(N^T)_{r_n}} \\ \frac{\partial N^T}{\partial r} & \frac{\partial N^T}{\partial z} \end{Bmatrix}^T \underline{D} \begin{Bmatrix} \alpha_z \\ \alpha_r \\ \alpha_r \\ 0 \end{Bmatrix} (N^T)_{\theta^e} (N^T)_{r_n} dr dz \quad 4.3.3(d)$$

Onde $dr dz$ é expresso por $|J| d\xi d\eta$

4.4 - DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES

As tensões para o caso axissimétrico terão quatro componentes

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{array} \right\} \quad 4.4(a)$$

As tensões são determinadas nos nós e no centro do elemento.

A fórmula 1.2(b) é usada uma vez mais.

A matriz de elasticidade \underline{D} para o problema axissimétrico está listada no apêndice 2.

Para os nós entre elementos, as tensões são determinadas através de sua média.

CAPÍTULO V

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

5.1 - INTRODUÇÃO

Com a finalidade de se determinar a convergência dos resultados conseguidos nos exemplos, fizemos diversas comparações. Os valores obtidos com os elementos para tensões planas foram comparados com os da teoria de vigas.

A solução obtida para o caso axissimétrico foi verificada com o auxílio de um elemento para cascas axissimétricas. Os valores produzidos pelos elementos tridimensionais foram comparados com valores analíticos e com os obtidos pelo STRUDL.

Após apresentamos a resolução de um caso prático, com elementos quadriláteros simples e quadráticos.

Deve-se notar que os exemplos apresentados são apenas parte dos testes feitos, em particular, salientamos que os resultados obtidos com os elementos implantados foram verificados em detalhe com exemplos resolvidos por outros sistemas e os resultados coincidiram, o que sugere a exatidão da implantação da família de elementos isoparamétricos no sistema LORANE.

5.2 - CONVERGÊNCIA DOS ELEMENTOS PLANOS

5.2.1 - TENSÕES PLANAS

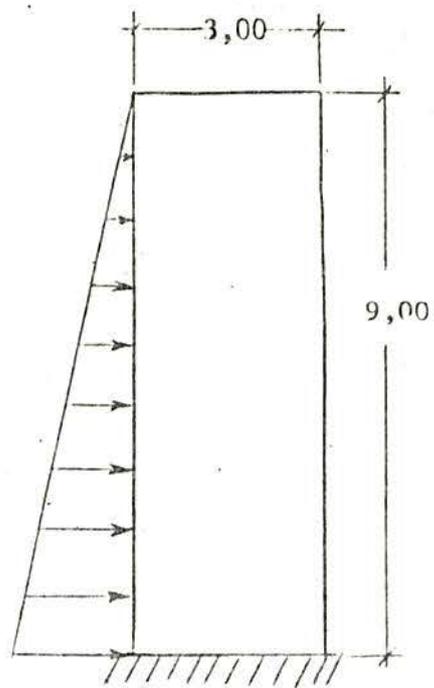
Para avaliar as características de convergência dos elementos planos se tomou o exemplo indicado na figura 16.

Trata-se de uma viga engastada-livre, com carregamento triangular, a qual analisamos com tres elementos diferentes e malhas de diversas densidades.

O problema foi analisado utilizando-se os seguintes elementos para o estado plano de tensões:

- quadrilátero linear IQL.
- quadrilátero quadrático IQQ.
- quadrilátero cúbico IQC.

A figura 16 indica as características do problema e as figuras 17 e 18 mostram as distintas malhas utilizadas na sua solução. A figura



$$E = 1$$

$$t = 1$$

$$v = 0$$

$$q = 1$$

FIGURA 16

Viga engastada com carregamento triangular

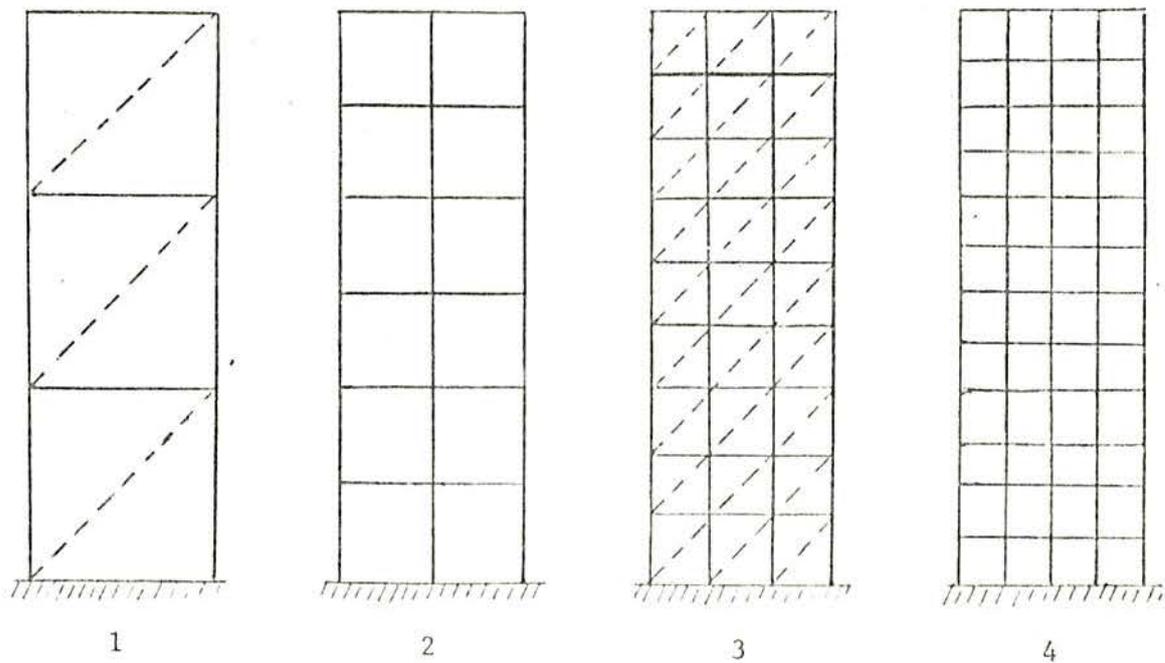


FIGURA 17

Malhas utilizadas no exemplo, IQL

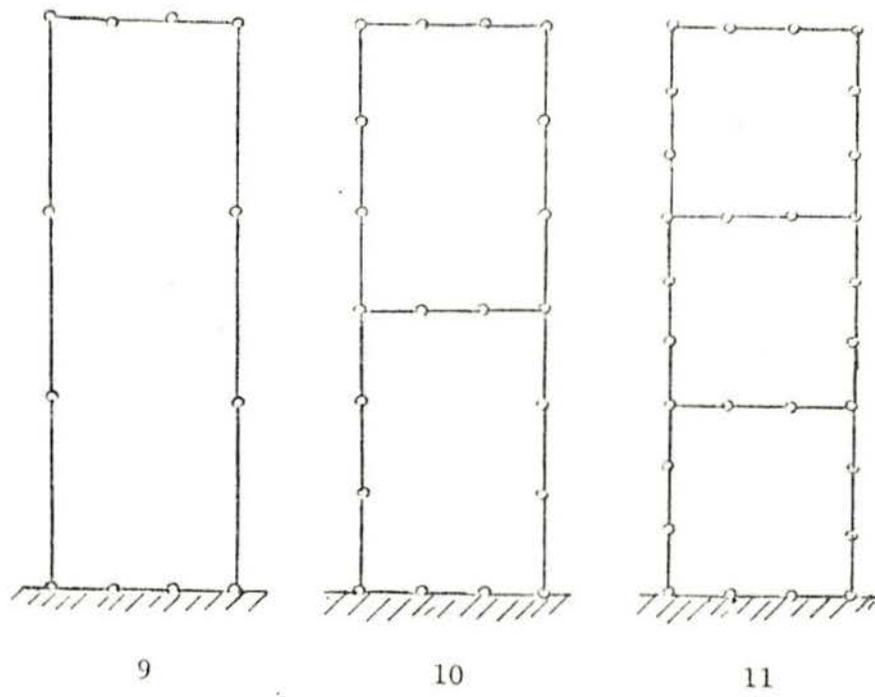
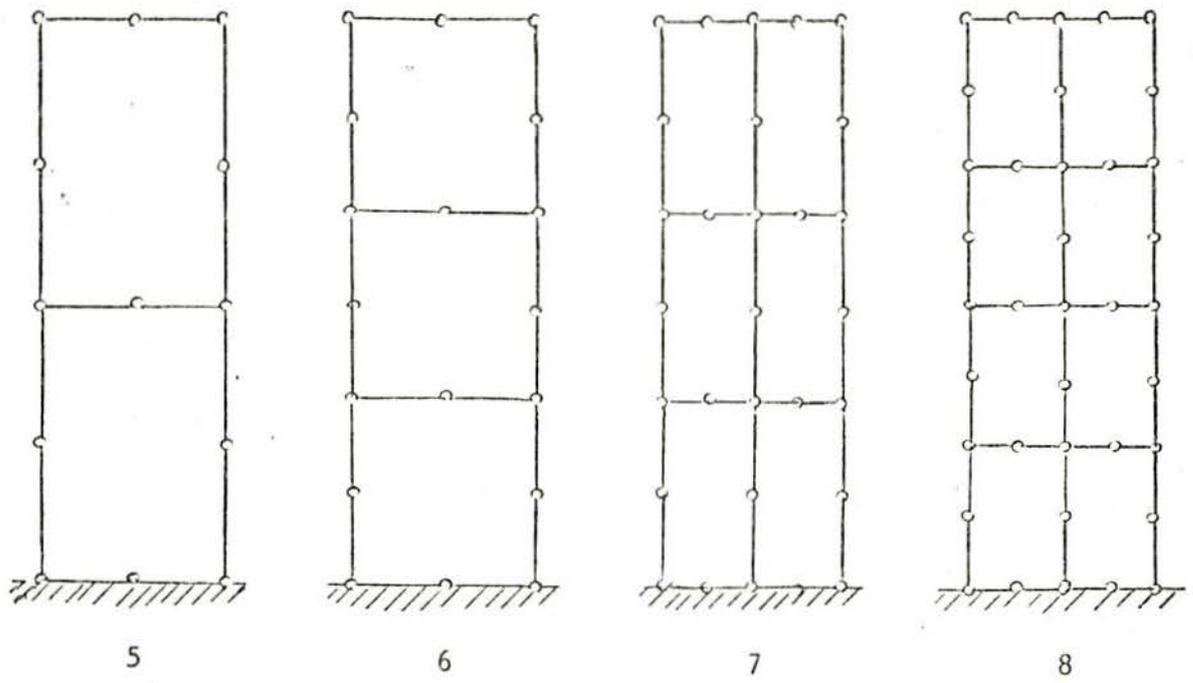


FIGURA 18

Malhas para o IQQ e IQC

19 corresponde aos deslocamentos do bordo livre obtido com os diferentes elementos, para cada uma das malhas consideradas. Nesta mesma figura indicam-se, também, os valores correspondentes aos da teoria de vigas, sem levar em conta o efeito de corte e os determinados pelos elementos retângulo simples, TRL, e triângulo simples, TTL.

Segundo esses valores, pode-se ver que o quadrilátero linear IQL produz os valores mais distantes da solução analítica, inclusive para uma quantidade considerável de elementos.

Os elementos de maior ordem, isto é, os quadriláteros IQQ e IQC, produzem bons resultados inclusive para malhas grosseiras.

Valores anteriormente obtidos com esses elementos, levam-nos a concluir que o valor exato do deslocamento no bordo livre seja ao redor de 107. Observamos que o resultado obtido para a malha 9, IQC, ultrapassa o valor exato, fenômeno devido seguramente a problemas de instabilidade numérica.

Os resultados encontrados indicam, que os elementos de ordem superior são os mais adequados para a solução de problemas relativos a vigas sob efeito de corte, já que com poucos elementos se obtêm resultados aceitáveis, o que permite evitar o tratamento de grandes sistemas de equações.

A figura 20 mostra os valores das tensões obtidas sobre o bordo esquerdo da viga. Os resultados correspondem às malhas 3, 7 e 10, com os elementos IQL, IQQ e IQC respectivamente. Traçamos graficamente, também, os resultados conseguidos com o TRL e TTL para a malha 3 e t. de vigas¹⁸.

Os resultados indicam um comportamento similar àquele dos deslocamentos. Novamente, são os elementos de ordem superior que produzem os melhores resultados, ainda que para eles notam-se certas perturbações no bordo livre.

Note-se que, salvo nessas zonas, para efeitos práticos existe uma quase coincidência entre os resultados produzidos pelos elementos de ordem superior e as tensões determinadas pelas fórmulas de flexão da teoria técnica de vigas.

Como complementação a figura 21 mostra o tempo de computação requerido pelas diversas malhas, para a obtenção da solução.

O processamento se realizou mediante a utilização da linguagem LORANE, em um computador Burroughs B-6700.

Conforme indica a figura 21, o elemento IQL, para resultados comparáveis, requer um tempo de solução consideravelmente maior que os elementos de ordem superior IQQ e IQC. Isto sugere que os elementos quadriláteros de ordem superior são mais adequados do ponto de vista de eficiência do processo por computador, que o quadrilátero linear.

Concluimos também que o elemento IQL e T11 são equivalentes, pois, dão resultados aproximadamente iguais.

5.2.2 - SÓLIDO AXISSIMÉTRICO

O estudo da convergência dos elementos planos para tensões axis-simétricas foi feito através da comparação de resultados destes com os de um elemento tipo tronco-cônico e cujo nome na linguagem LORANE é CAXR2.

O reservatório da figura 22 foi analisado, utilizando-se os elementos IQL e IQQ para as malhas 1 e 2 da figura 23.

Os resultados obtidos, para os deslocamentos dos pontos situados no meio da parede do reservatório, estão representados no gráfico da figura 24. Também estão representados graficamente os valores para o elemento CAXR2. Como vemos o elemento IQQ e o elemento CAXR2 apresentam deslocamentos aproximadamente iguais, o que nos leva a concluir, em princípio, que os deslocamentos reais da linha média da parede do reservatório possuem essa ordem de grandeza.

O tempo total de análise com o elemento CAXR2 foi de 27,52 segundos para uma malha com 41 nós, o do elemento IQQ foi de 17,24 segundos para uma malha com 53 nós e o do elemento IQL foi de 69,84 segundos para uma malha com 63 nós.

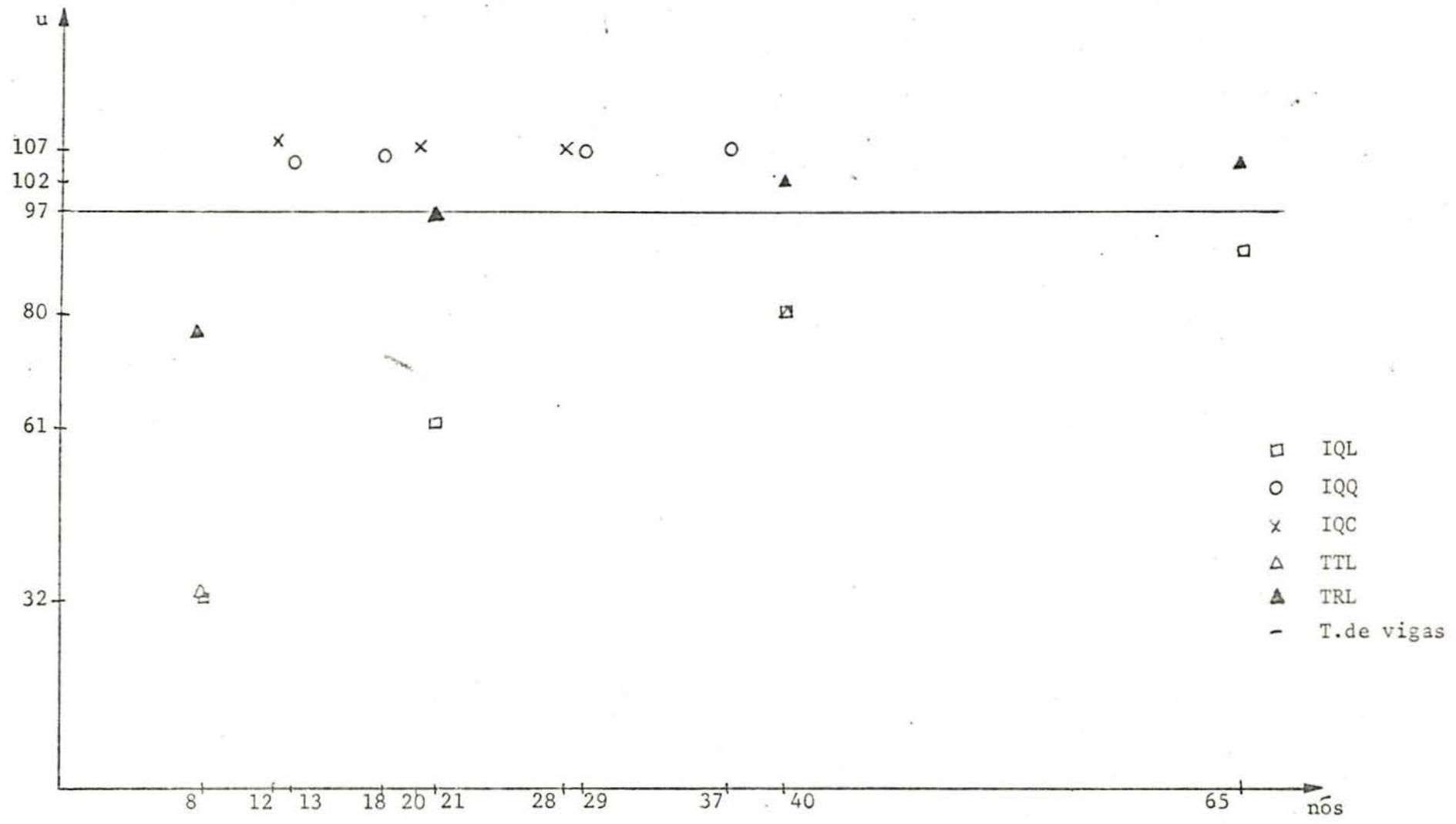


FIGURA 19

Resultados obtidos, deslocamentos do extremo livre

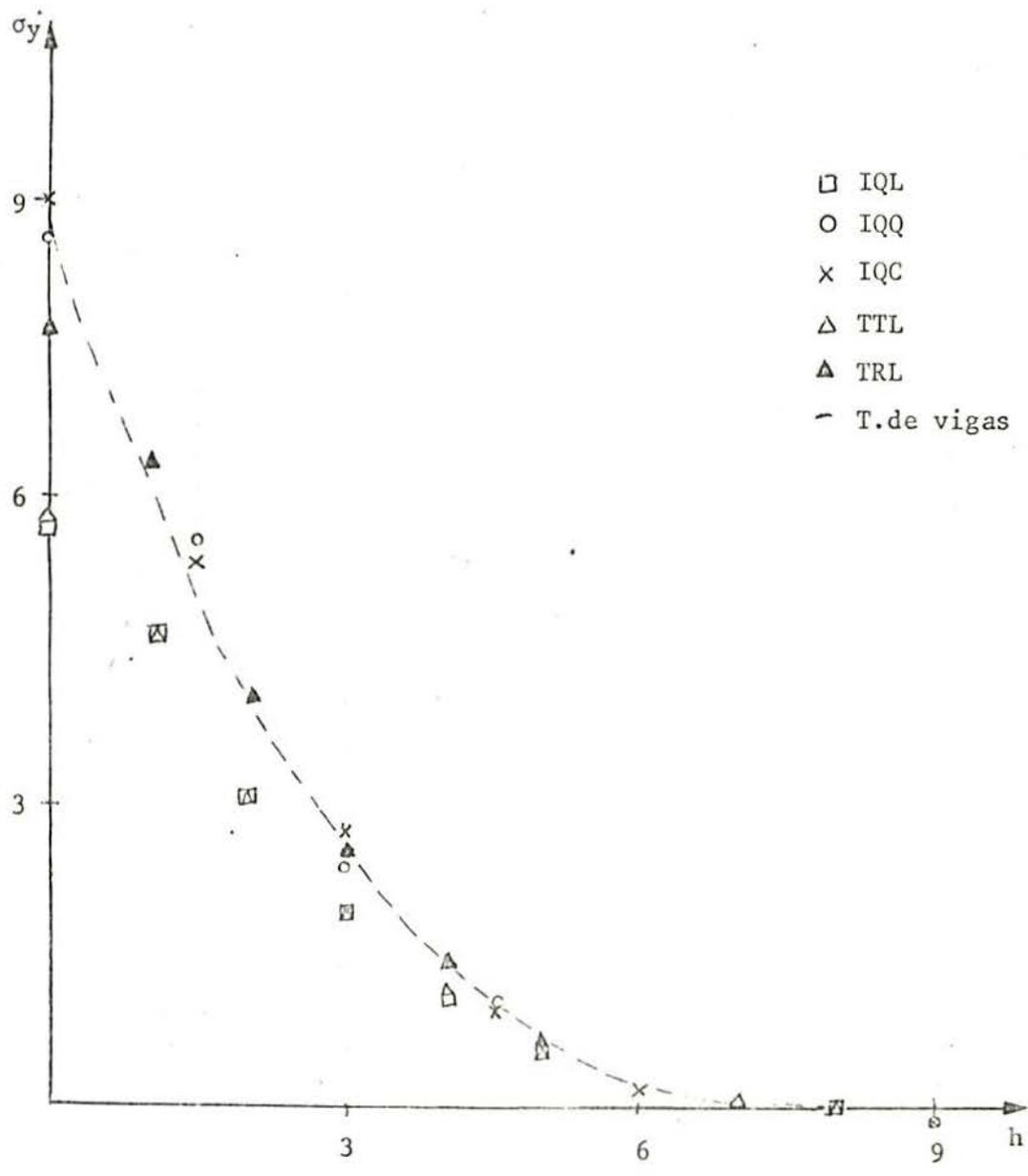


FIGURA 20

Resultados obtidos, tensões sobre o bordo esquerdo da viga

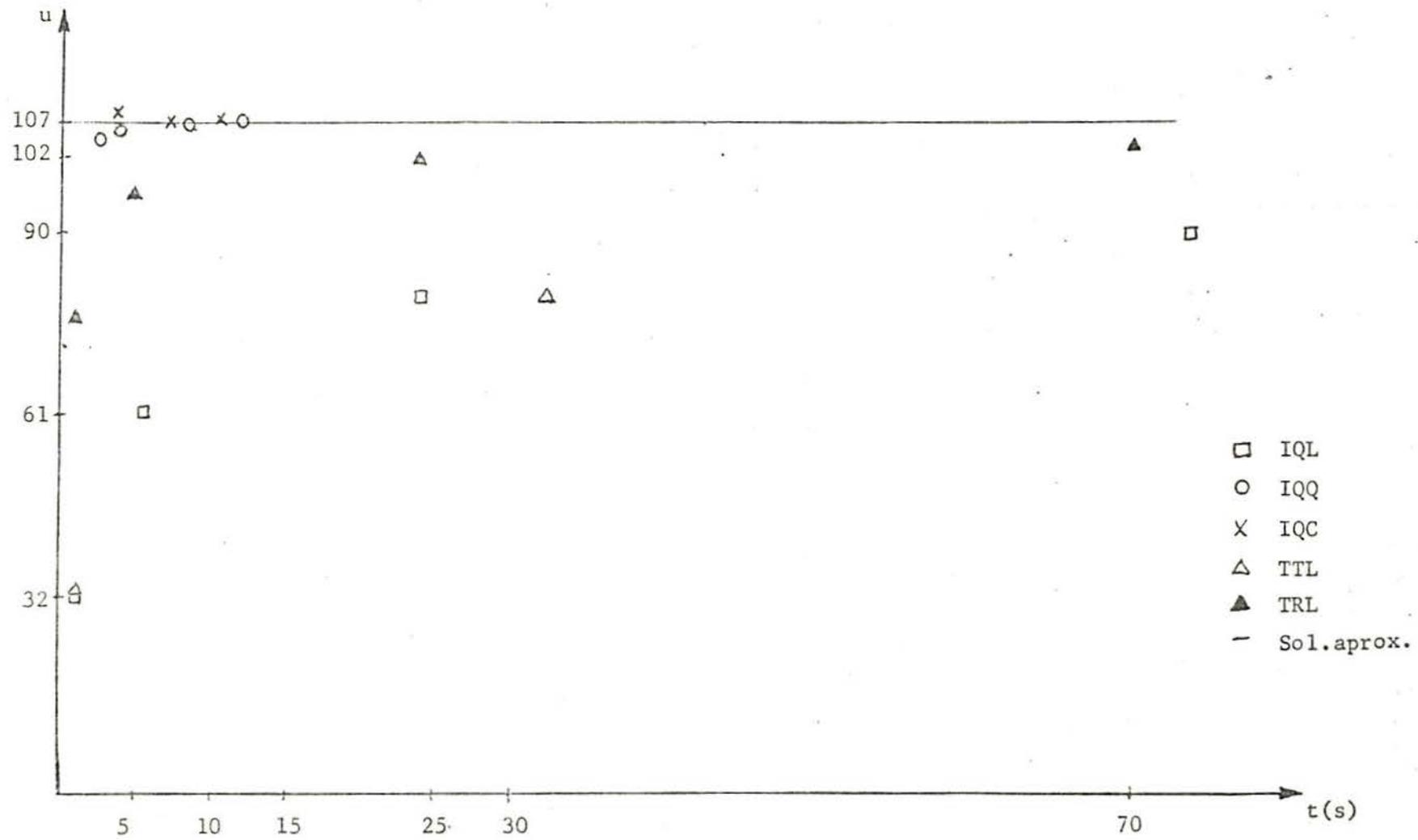


FIGURA 21

Tempos de Solução

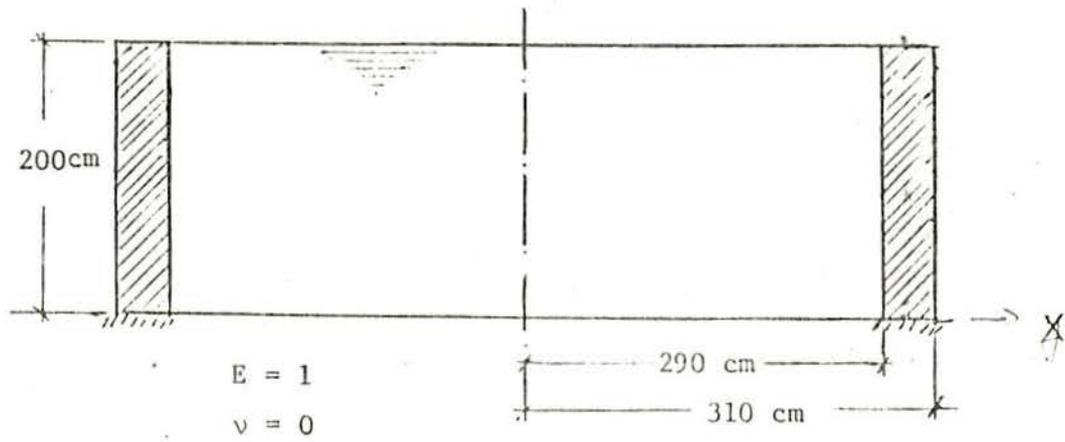


FIGURA 22

Reservatório cilíndrico de espessura uniforme

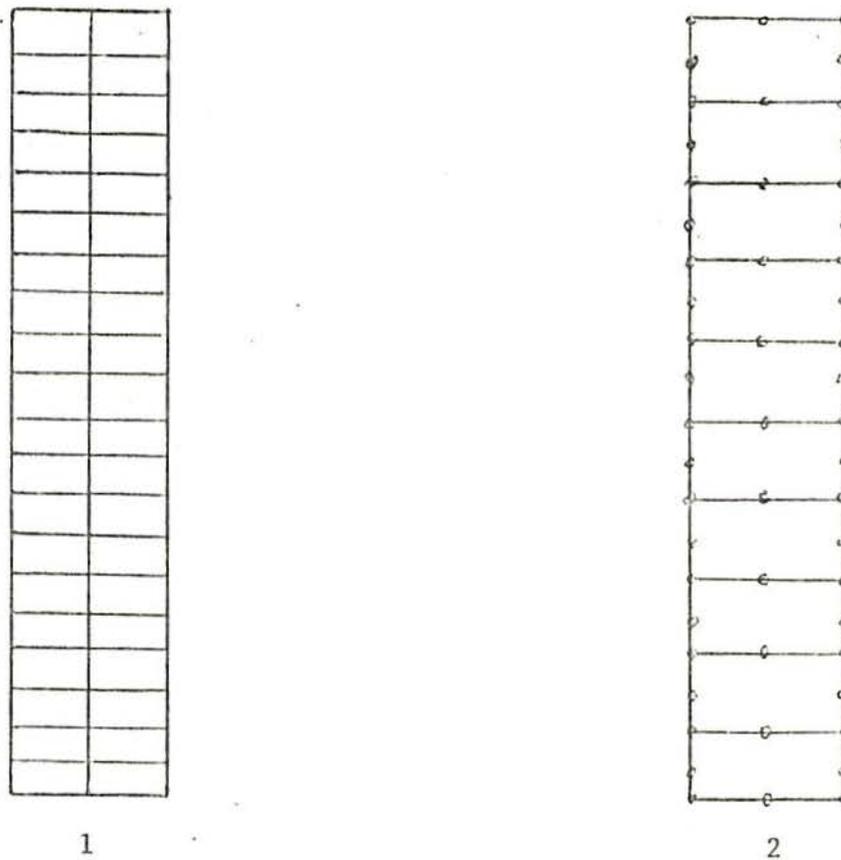


FIGURA 23

Malhas utilizadas no exemplo, IQL e IQQ

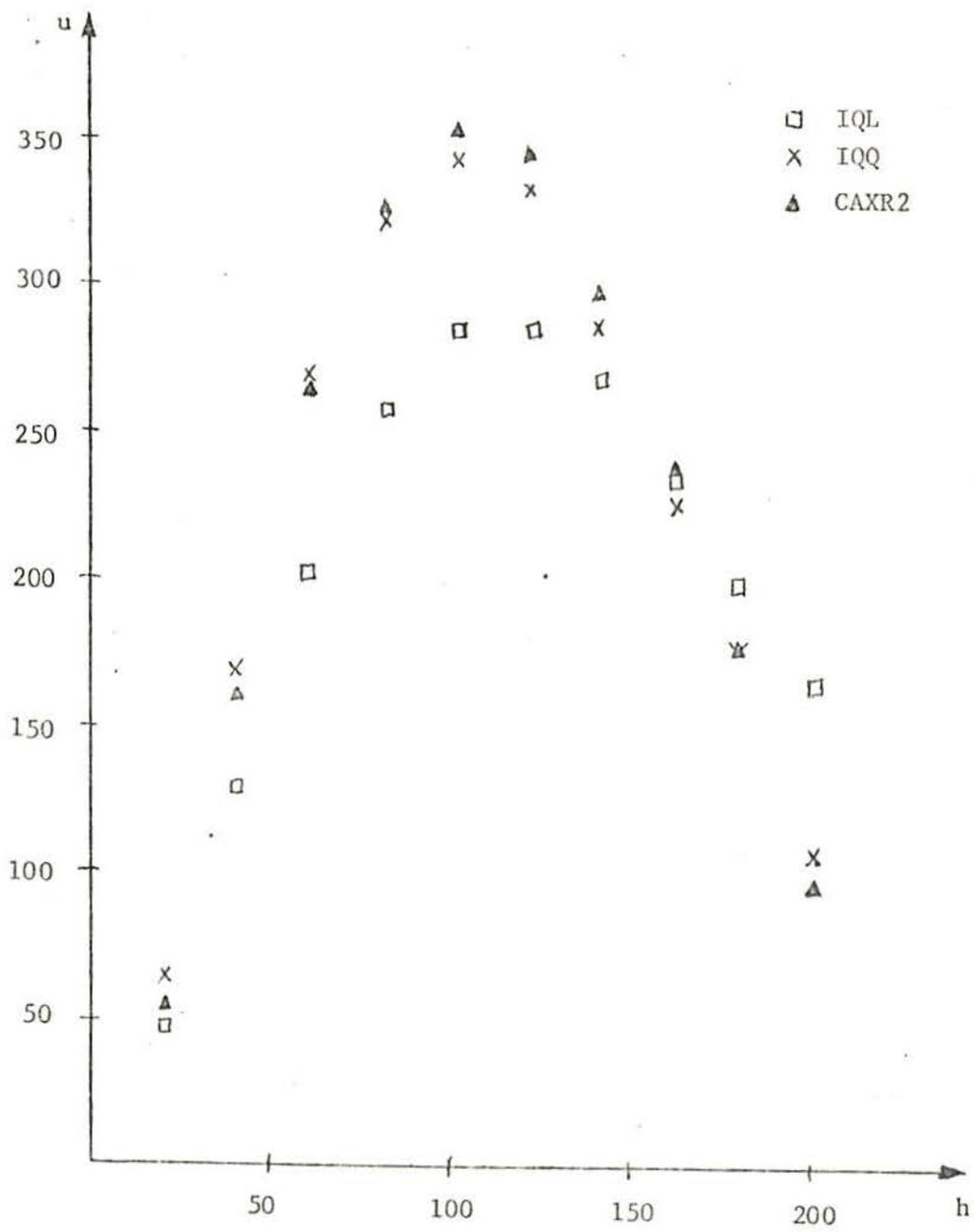


FIGURA 24

Resultados obtidos, deslocamentos da linha média

5.3 - ELEMENTOS TRIDIMENSIONAIS

Considerou-se uma viga de secção retangular, submetida a momentos na sua extremidade livre.

A malha utilizada para o sólido linear, ILS foi a mesma usada pelo elemento IPLS do sistema STRUDL.

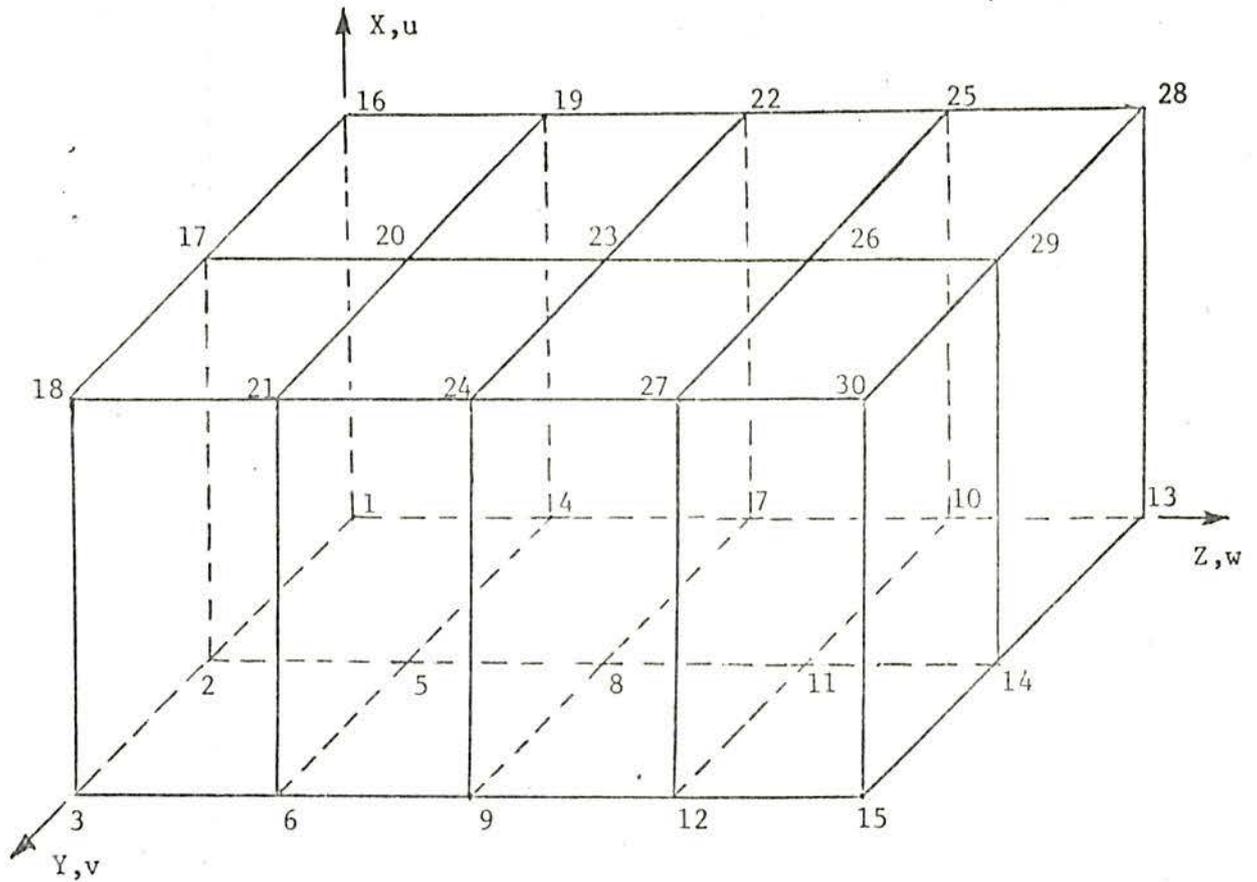
Na figura 25 estão representados a malha e as condições de contorno.

O sólido quadrático, IQS foi comparado com o seu correspondente no sistema STRUDL, IPQS. Na figura 26, desenhamos a malha usada. As condições de contorno foram as mesmas e para os nós intermediários 9 e 10 adotamos $v = w = 0$ e $w = 0$ respectivamente.

A figura 27 mostra os resultados dos deslocamentos em diferentes bordos da viga.

O tempo gasto para a análise foi, para o IQS 23,63 segundos e para o ILS 26,05 segundos.

Os resultados encontrados com os dois elementos foram quase iguais, assim a decisão de qual empregar é uma questão de preferência. Os dois são uma boa escolha.



Condições de Contorno:

- 1) Nós no plano $x - z$
 $v = 0$
- 2) Nós no plano $y - z$
 $v = w = 0$
- 3) Nó 1
 $u = v = w = 0$
- 4) Nós 17 e 18
 $w = 0$
- 5) Nó 16
 $v = w = 0$

Handwritten notes:
 $N = 0, 5$
 $E = 1, 2, 3, 4$
 $A = 6, 7, 8, 9$
 $F = 10, 11, 12, 13$

FIGURA 25

Malha para o ILS e condições de contorno

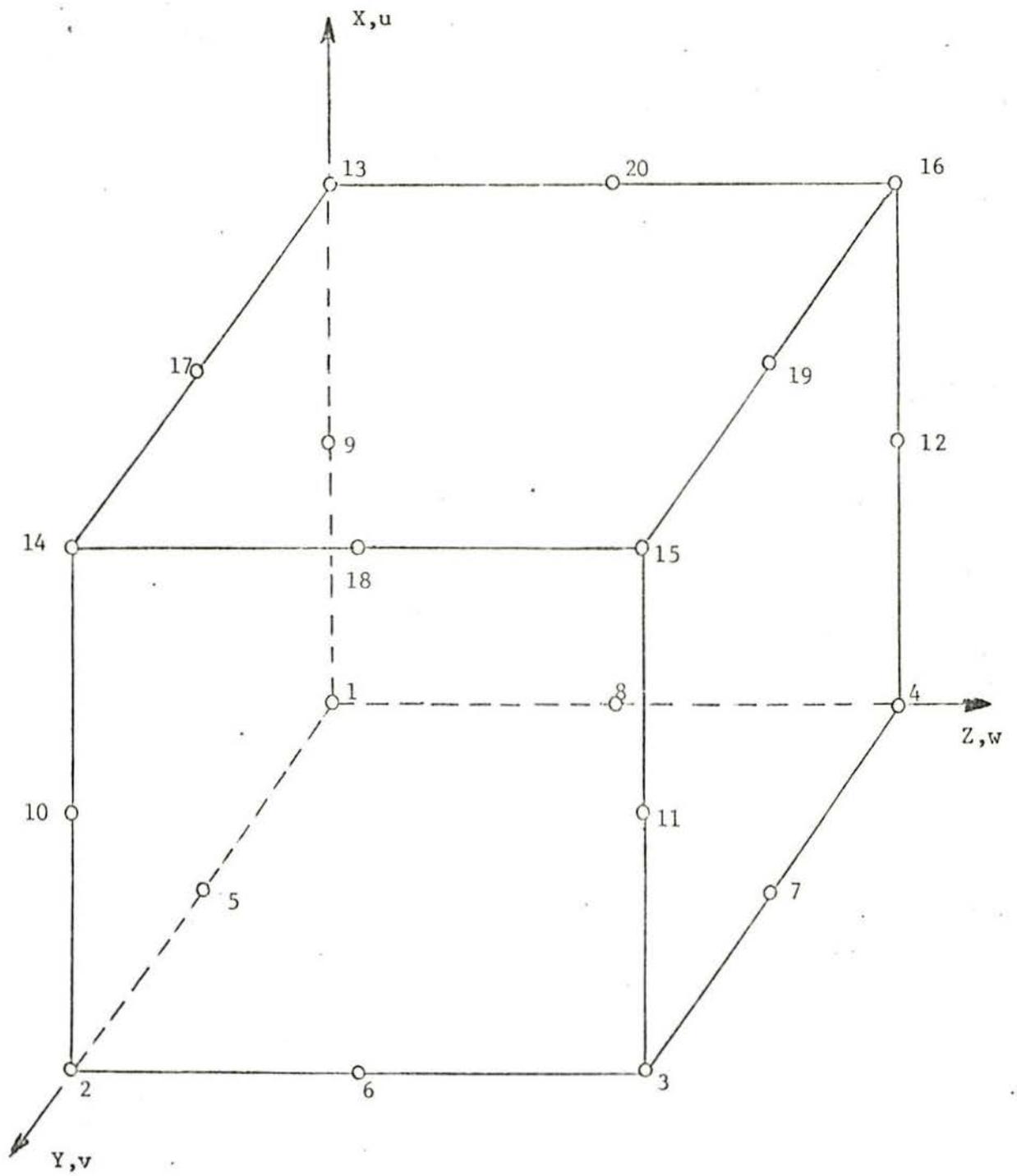
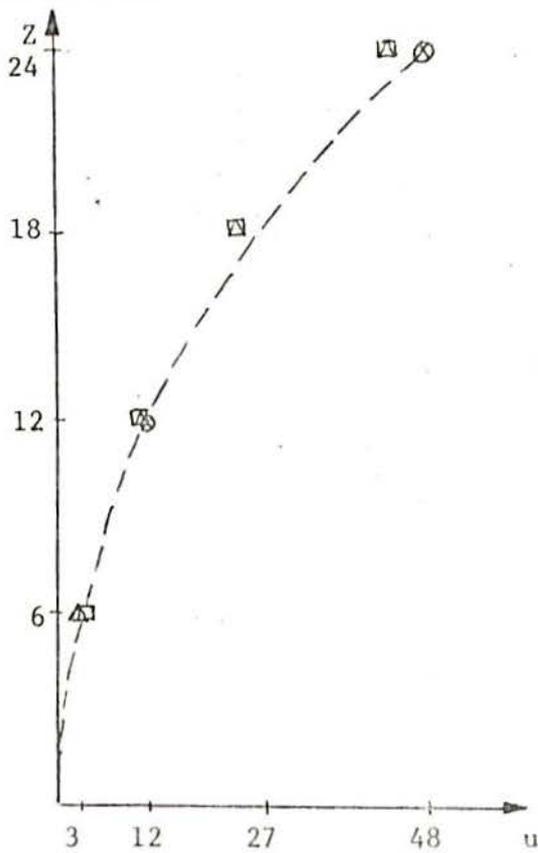
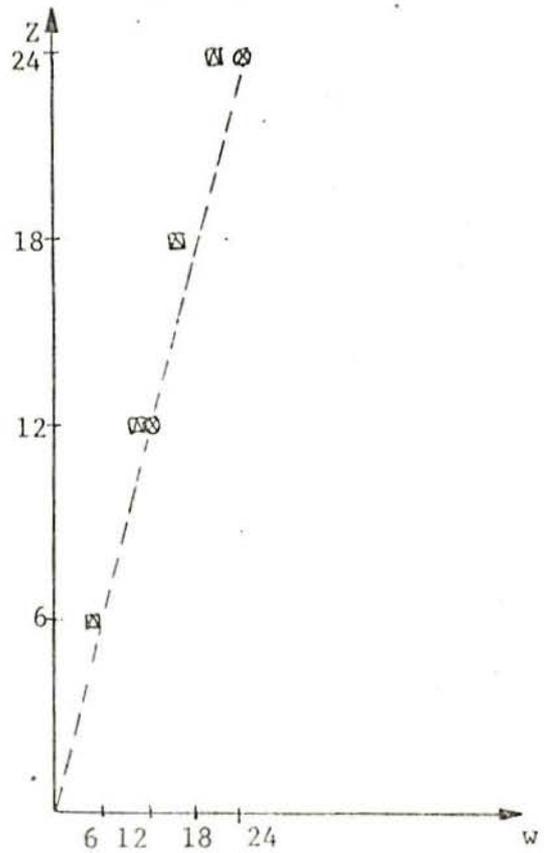


FIGURA 26
 Malha para o IQS

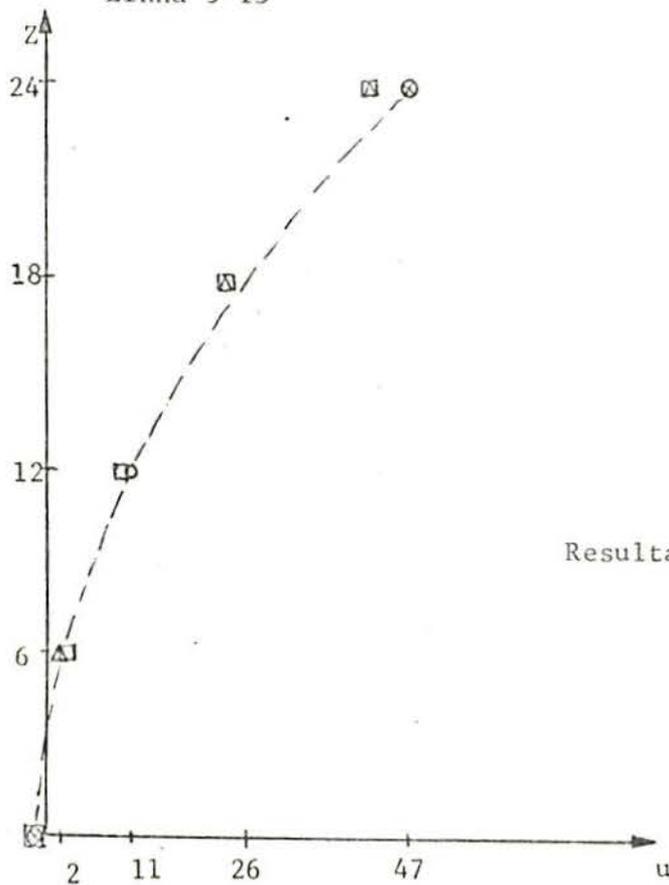
Linha 1-13



Linha 18-30



Linha 3-15



- ILS
- IQS
- △ IPLS
- × IPQS
- Analítica

FIGURA 27

Resultados dos deslocamentos

5.4 - EXEMPLO PRÁTICO

Foi analisado um emissário cloacal, de concreto, com os elementos IQL e IQQ, usando-se as malhas das figuras 28 e 29.

Para esse emissário determinamos o estado de tensões e deformações levando em conta dois tipos de carregamento, um devido ao peso próprio e pressão interna e o outro devido ao empuxo lateral.

Neste caso, as tensões obtidas com o elemento IQL, foram aproximadamente 50% diferentes das obtidas com o IQQ.

Por exemplo, a maior tensão de tração encontrada com o IQQ foi de 62,74, enquanto que com o IQL a mesma tensão foi de 42,15.

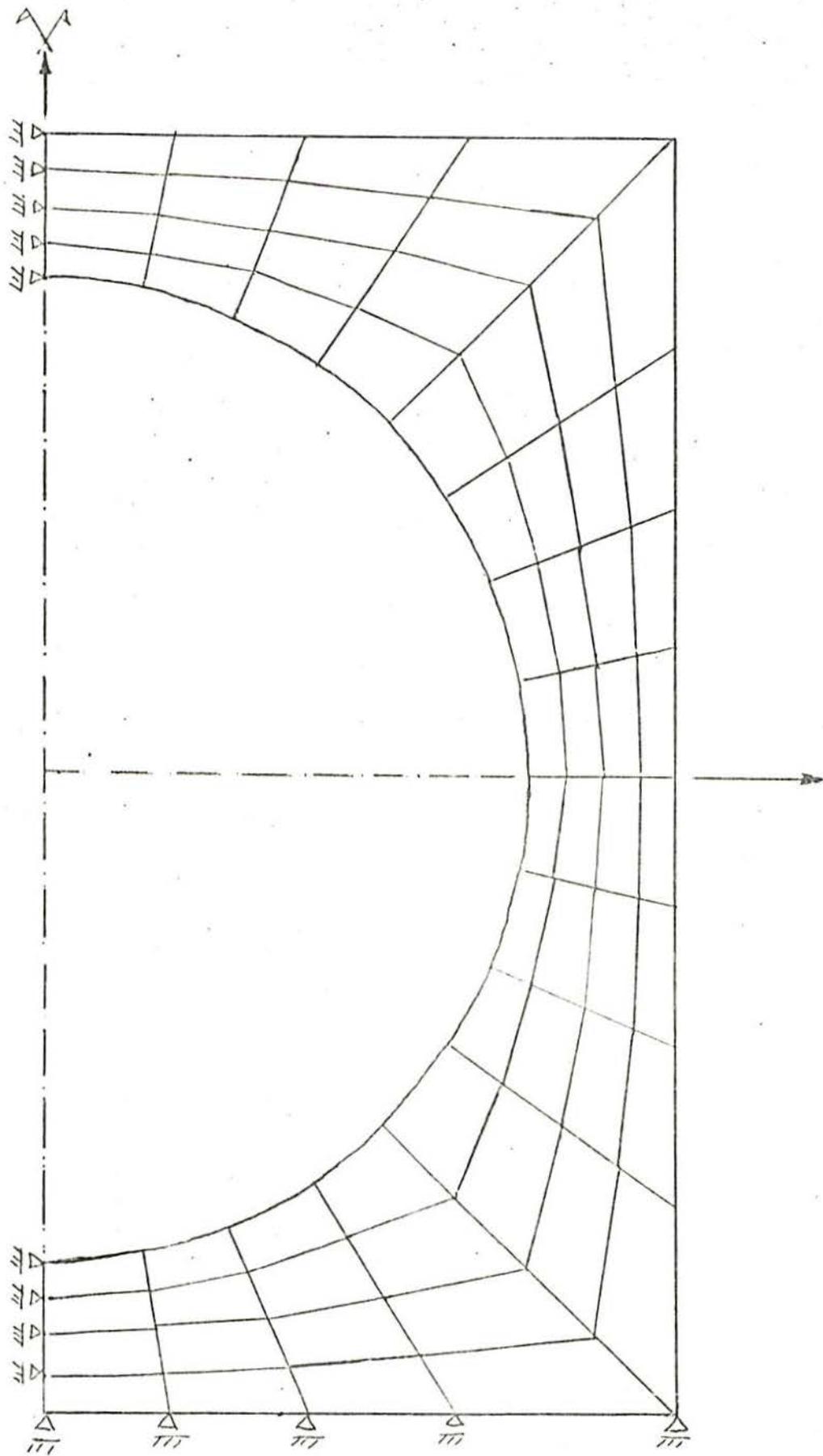


FIGURA 28

Malha para o IQL

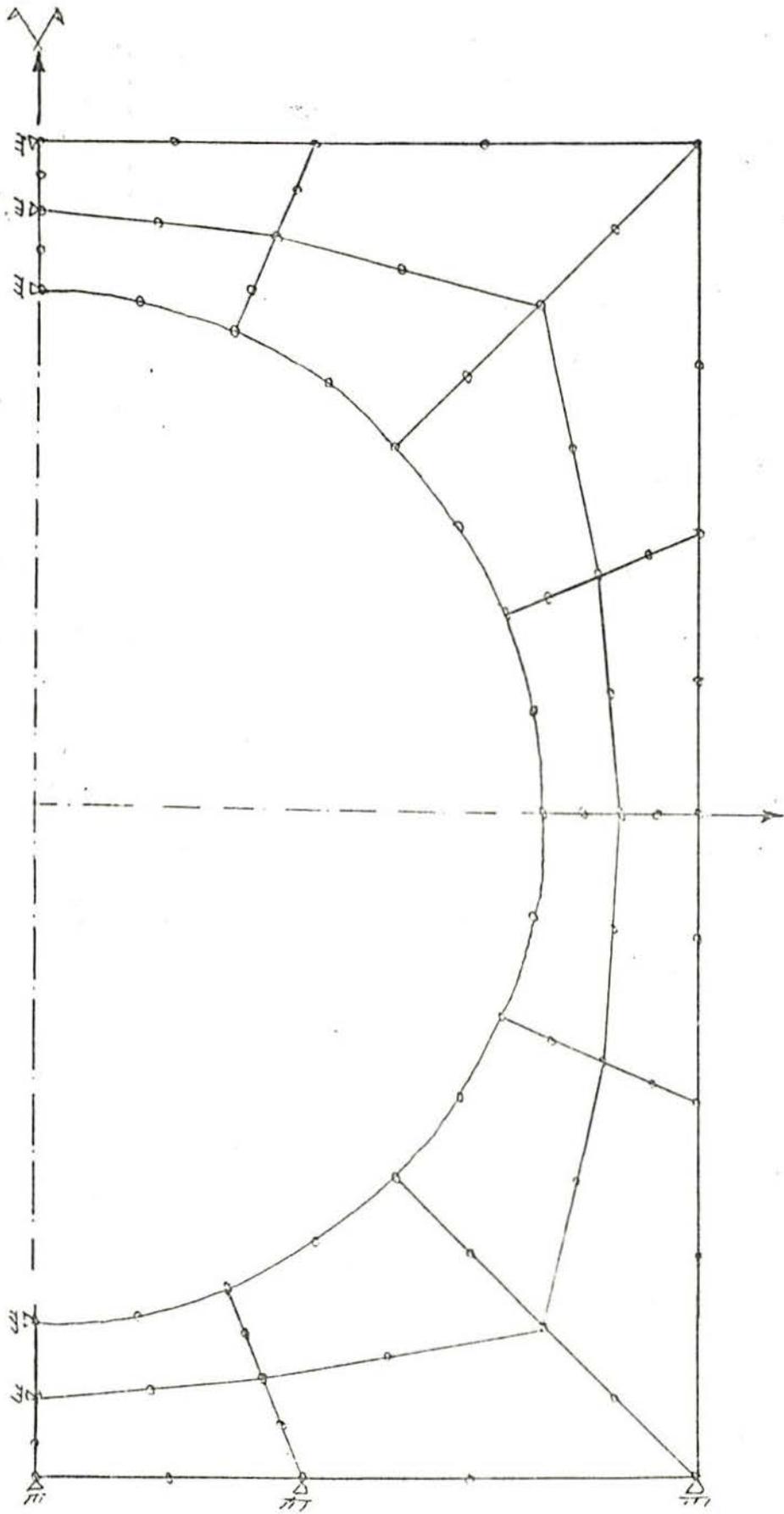


FIGURA 29
 Malha para o IQQ

CAPÍTULO VI

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL NO LORANE DA FAMÍLIA DE ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS.

6.1 - INTRODUÇÃO

A seguir descreveremos a implementação no sistema LORANE da família de elementos isoparamétricos para tensões planas e axissimétricas e de elementos tridimensionais com expansão até o segundo grau.

Os programas permitem o tratamento de materiais isotrópicos, ortotrópicos e divisão em elementos com propriedades diferentes entre si.

Os deslocamentos, tensões e tensões principais são calculados para cada ponto nodal da estrutura em estudo.

Um procedimento especial aqui adotado é o de armazenar em cada dois bits, de uma palavra, o valor do expoente, nunca maior do que tres, das variáveis do polinômio, o que além de economizar memória permite grande maleabilidade.

Outra peculiaridade é o fato de usarmos um algoritmo, descrito no apêndice 3, o qual permite que na montagem da matriz de rigidez de elemento leve-se em conta apenas os valores não nulos das matrizes envolvidas, com isso reduziu-se o tempo de montagem cerca de 70%.

Podemos ter os seguintes carregamentos:

- forças agindo diretamente nos nós;
- forças variáveis de superfície;
- forças de volume e variação de temperatura.

A cada momento pode-se calcular tensões e deformações para qualquer quantidade de distintos carregamentos.

Os dados são fornecidos de acordo com o padrão para o sistema LORANE e qualquer número de problemas podem ser resolvidos a cada execução do programa.

6.2 - FORNECIMENTO DE DADOS.

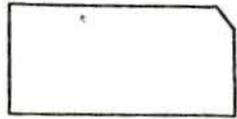
O sistema LORANE permite que os dados sejam especificados da seguinte maneira:

- 1º - Divide a estrutura convenientemente em elementos, numerando os seus nós.
- 2º - Especificam-se as coordenadas nodais da estrutura, as coordenadas omitidas são supostas iguais a zero.
- 3º - Fornecem-se as incidências nodais de cada elemento de uma maneira determinada.
- 4º - Identificam-se as restrições nodais.
- 5º - Determinam-se os carregamentos e as deformações impostas.
- 6º - Finalmente fornecem-se as propriedades características do material da estrutura.

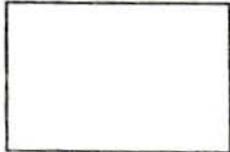
Os dados não precisam necessariamente seguir a ordem acima.

Como esta monografia refere-se ao cálculo da matriz de rigidez, das cargas nodais equivalentes, do vetor de tensões, descrevemos a seguir a integração do sistema LORANE com os programas, módulos, que compõem a tese.

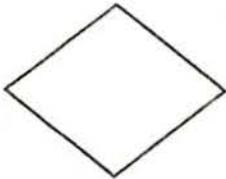
6.3 - CONVENÇÃO DOS BLOCOS DIAGRAMAS



CHAMADA DE PROCEDURES



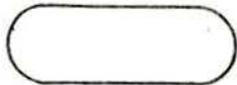
EXECUÇÃO DE UM CÁLCULO



DECISÃO



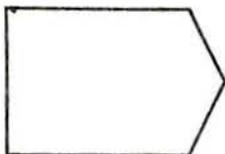
CONECTOR



INICIO ou FIM



OPERAÇÃO DE I/O



ITERAÇÃO



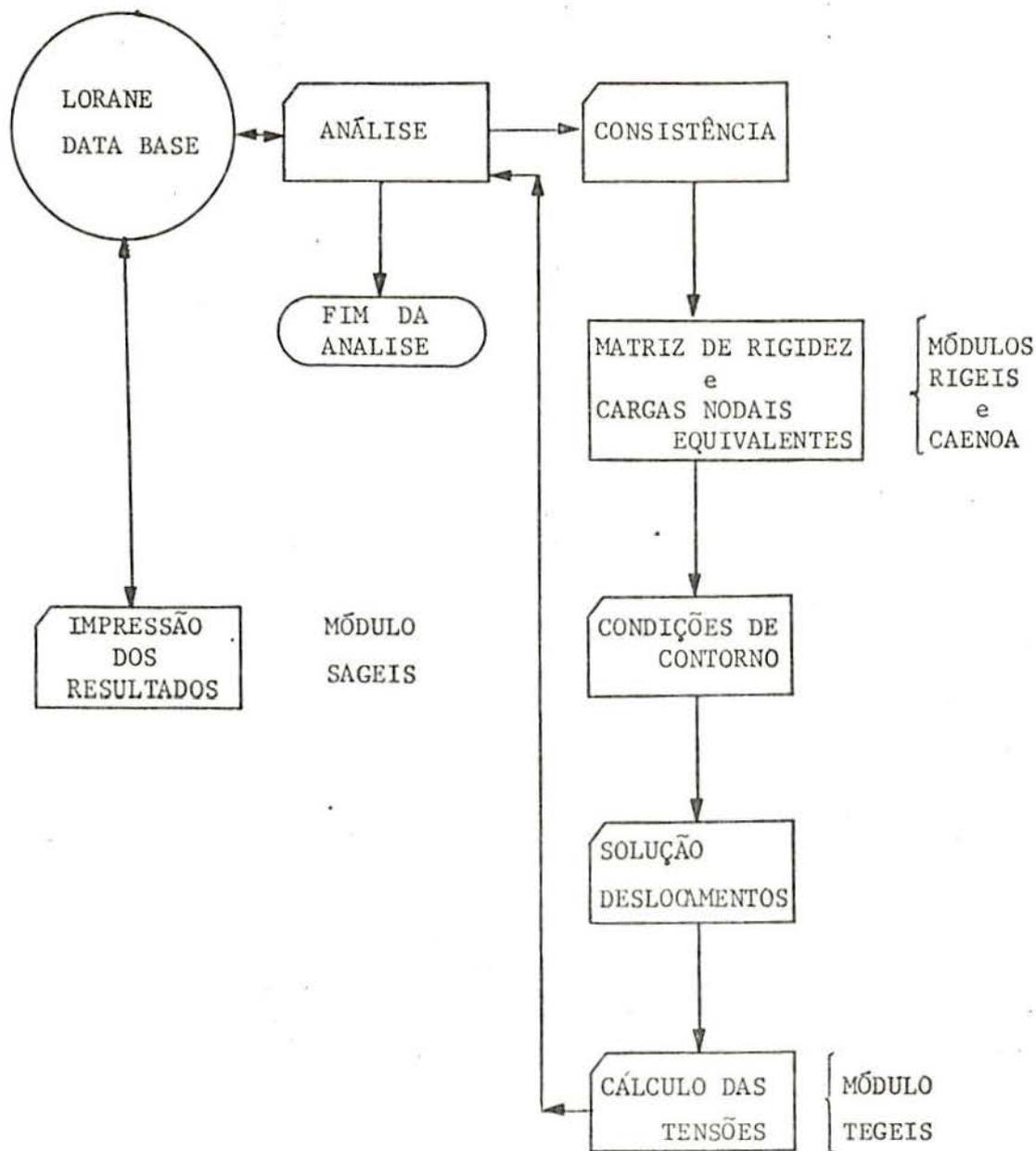
COMANDO CASE

6.4 - ORGANIZAÇÃO DOS PROGRAMAS

No macro diagrama de blocos está descrita a ligação do sistema LORANE com os módulos RIGEIS, CAENOD, TEGEIS e SAGEIS.

A montagem da matriz de rigidez total, a resolução do sistema de equações e o armazenamento de dados específicos como, propriedades, carregamentos, etc, são feitos por procedimentos padrões do LORANE.

A linguagem usada foi o EXTENDED ALGOL, assim, os programas estão organizados em blocos, fato que favorece o uso integral do conceito de memória dinâmica.



6.5 - DESCRIÇÃO DOS MÓDULOS

1. Nome do Módulo

PROCEDURE RIGEIS

2. Descrição do Programa

RIGEIS gera a matriz de rigidez para a família de elementos isoparamétricos.

3. Sistema Usando o Módulo

Sistema LORANE

4. Programas que Compõem o Módulo

IPPEL, DECHA e CAENOD

5. Variáveis Locais

INTEGER

POINT - variável utilitária

NCO - número de linhas/colunas da matriz de elasticidade

NPONT - número de nós do elemento

GRAU - número de termos do polinômio

NP - número de pontos de integração

TIPO - código identificando o elemento chamado pelo programa. O valor de TIPO é definido a seguir:

0 - elemento bidimensional

1 - elemento tridimensional

2 - elemento axissimétrico

D - código identificando a regra de integração. O valor de D é definido a seguir:

1 - integral simples

2 - integral dupla

3 - integral tripla

LABEL FIN - término da execução

6. Variáveis Globais

ARRAY

RIG - matriz de rigidez

XYZ - matriz de coordenadas

ELESPES - matriz de espessuras

ALPHA ARRAY

ELTIPO - vetor de tipos de elementos

ELNOME - vetor de nomes de elementos

INTEGER ARRAY

NOS - vetor com o número de nós

INTEGER

NEXTEL - número do elemento

TEGEIS

1. Nome do Módulo

PROCEDURE TEGEIS

2. Descrição do Módulo

TEGEIS calcula as tensões para a família de elementos isoparamétricos.

3. Sistema Usando o Módulo

Sistema LORANE

4. Programas que Compõem o Módulo

IPPEL e ECHA

5. Variáveis Locais

INTEGER

POINT - variável utilitária

NCO - número de linhas/colunas da matriz de elasticidade.

NPONT - número de nós do elemento

GRAU - número de termos do polinômio

TIPO - código identificando o elemento chamado pelo programa, o valor de TIPO está definido em RIGEIS

ICN - variável auxiliar

LABEL

FIN - término da execução

6. Variáveis Globais

ARRAY

SIGMA - vetor de tensões

XYZ - matriz de coordenadas

DESLO - matriz de deslocamentos

ALPHA ARRAY

ELTIPO - vetor de tipos de elementos

ELNOME - vetor de nomes de elementos

INTEGER ARRAY

NOS - vetor com o número dos nós

NEXTEL - número do elemento

SAGEIS

1. Nome do Módulo

PROCEDURE SAGEIS

2. Descrição do Módulo

SAGEIS executa operações de saída para tensões da família de elementos isoparamétricos.

3. Sistema Usando o Módulo

Sistema LORANE

4. Programas que Compõem o Módulo

SATEP - impressão das tensões para o caso plano

SATEA - impressão das tensões para o caso axissimétrico

SATET - impressão das tensões para o caso tridimensional

5. Variáveis Locais

INTEGER

I,J - variáveis utilitárias

6. Variáveis Globais

ARRAY

SIGMA - vetor de tensões

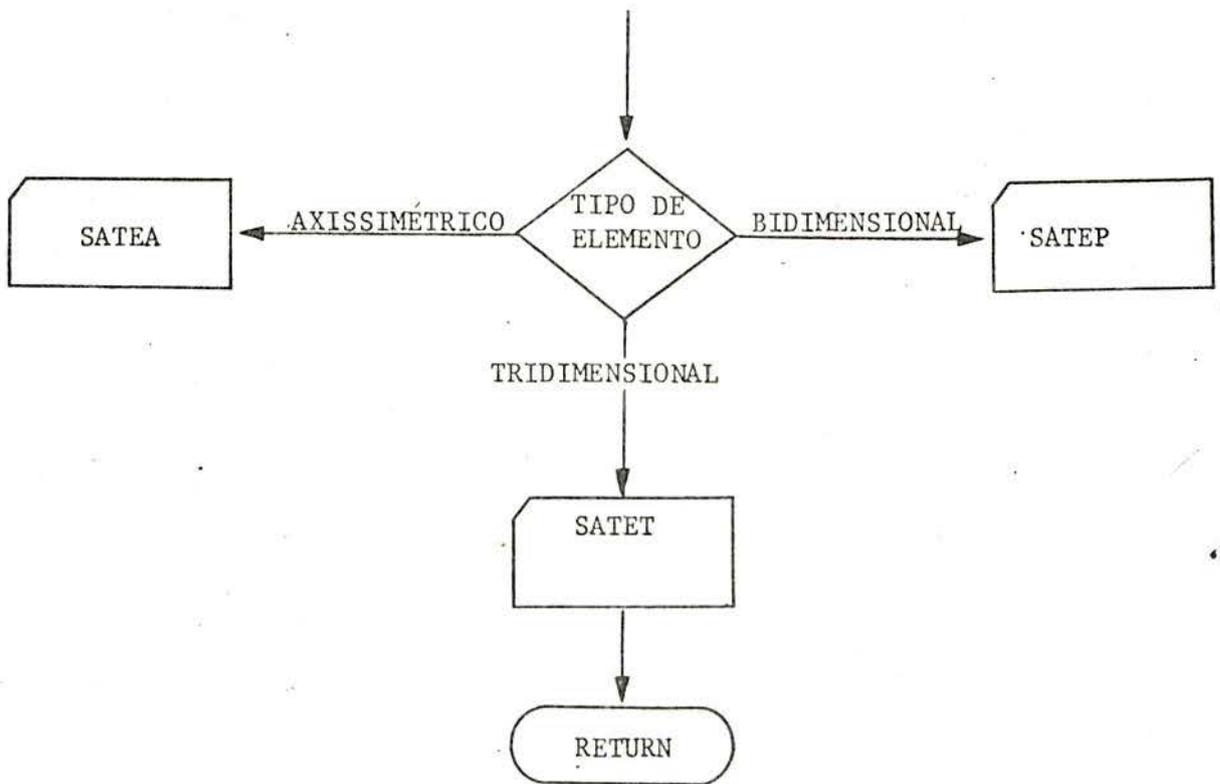
ALPHA ARRAY

ELNOME - vetor de nomes dos elementos

NONOME - vetor de nomes dos nós

ELTIPO - vetor de tipos de elementos

7. Macro Diagrama de Blocos. PROCEDURE SAGEIS



IPPEL

1. Nome do Programa

PROCEDURE IPPEL

2. Descrição do Programa

Fornece para o elemento isoparamétrico em análise, informações necessárias a geração da matriz de rigidez.

3. Lógica do Programa

IPPEL compara o elemento tipo contra uma lista interna de elementos implementados. A lista atual está composta com os elementos ILS, IQS, IQL, IQQ e IQC.

O programa fornece o número de pontos de integração, número de nós do elemento e se é caso plano, axissimétrico ou espacial e o número de linhas/colunas da matriz de elasticidade.

4. Parâmetros Formais

Nenhum

5. Ligação com Programas

BE - compara o elemento atual com a lista interna de elementos, uma chamada típica é: BE ("EPTIQL").

DECHA (COEF, EXPX, EXPY, EXPZ) - inicia o cálculo da matriz de rigidez e cargas nodais equivalentes se for o caso.

PIPPQ, uma chamada típica é:PIPPQ (COEF, EXPX, EXPY,EXPZ,0), gera as matrizes necessárias a montagem do polinômio, para o quadrilátero linear.

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

ARRAY

COEF - matriz de constantes

EXPX - vetor de expoentes de KSI

EXPY - vetor de expoentes de ETA

EXPZ - vetor de expoentes de ZTA

8. Variáveis Globais

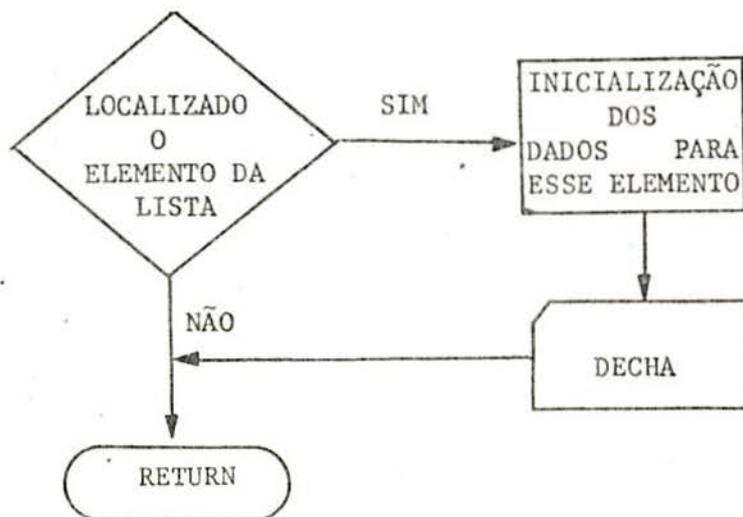
INTEGER

TIPO, D, NP e NCO

9. Variáveis Modificadas

- TIPO, D, NP e NCO

10. Macro Diagrama de Blocos: PROCEDURE IPPEL



PIPPQ

1. Nome do Programa

PROCEDURE PIPPQ

2. Descrição do Programa

Obtém os dados para a montagem dos diversos polinômios

3. Lógica do Programa

Chama as procedures que devem gerar as informações referentes ao polinômio dos diversos tipos de elementos.

4. Parâmetros Formais

ARRAY

COEF - matriz de constantes

KSI - vetor de expoentes de ξ

ETA - vetor de expoentes de η

ZTA - vetor de expoentes de ζ

INTEGER

N - identifica qual o polinômio a montar

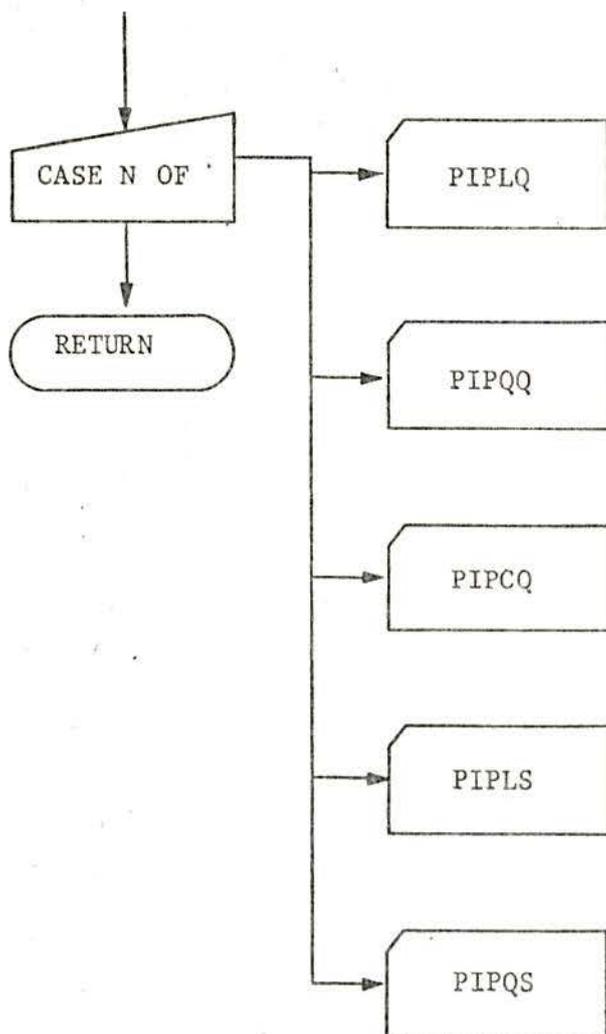
5. Ligação com Programas

PIPLQ, PIPQQ, PIPCQ, PIPLS e PIPQS

6. Procedimento de Erro

Nenhum

Macro Diagrama de Blocos: PROCEDURE PIPPQ



PIPLQ

1. Nome do Programa

PROCEDURE PIPLQ

2. Descrição do Programa

Esta procedure gera os elementos para o cálculo do polinômio a ser usado para o quadrilátero linear, fórmula 2.5.3.1(a).

3. Lógica do Programa

Monta a matriz com os termos constantes do polinômio, os vetores com os expoentes das variáveis ξ e η , determina o número de termos do polinômio menos um.

4. Parâmetros formais

ARRAY

A - matriz de constantes

KSI - vetor de expoentes de ξ , armazenados por bits

ETA - vetor de expoentes de η , armazenados por bits

5. Ligação com Programas

Nenhuma

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

INTEGER

I, J - for-loop variáveis

IA - variável utilitária

8. Variáveis Globais

INTEGER

GRAU, NPONT

9. Variáveis Modificadas

GRAU, NPONT

PIPQQ

1. Nome do Programa

PROCEDURE PIPQQ

2. Descrição do Programa

Gera o polinômio para o quadrilátero quadrático de acordo com a fórmula 2.5.3.2(a)

3. Lógica do Programa

Monta a matriz das constantes e os vetores cujos elementos são os expoentes das variáveis ξ e η e determina o número de termos do polinômio menos um.

4. Parâmetros Formais

ARRAY

A - matriz de constantes

KSI - vetor de expoentes de ξ , armazenados por bits

ETA - vetor de expoentes de η , armazenados por bits

5. Ligação com Programas

Nenhuma

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

INTEGER

I, J - For-loop variáveis

I A - variável utilitária

8. Variáveis Globais

INTEGER

GRAU, NPONT

9. Variáveis Modificadas

GRAU e NPONT

PIPCQ

1. Nome do Programa

PROCEDURE PIPCQ

2. Descrição do Programa

Gera o polinômio para o quadrilátero cúbico, fórmula 2.5.3.3(a)

3. Lógica do Programa

Monta a matriz das constantes e os vetores com os expoentes de ξ e η e indica o maior número de termos do polinômio menos um, em relação aos diversos nós.

4. Parâmetros Formais

ARRAY

A - matriz de constantes

KSI - vetor de expoentes de ξ , armazenados por bits.

ETA - vetor de expoentes de η , armazenados por bits.

5. Ligação com Programas

Nenhuma

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

INTEGER

I - For-loop variável

IA - variável utilitária

8. Variáveis Globais

INTEGER

GRAU e NPONT

9. Variáveis Modificadas

GRAU e NPONT

PIPLS

1. Nome do Programa

PROCEDURE PIPLS

2. Descrição do Programa

Esta procedure gera os elementos para o cálculo do polinômio a ser usado para o paralelepípedo linear, dado pela fórmula 2.5.2.1(a)

3. Lógica do Programa

Monta a matriz com os termos constantes do polinômio, os vetores com os expoentes das variáveis ξ , η e ζ , determina o número de termos do polinômio menos um.

4. Parâmetros Formais

ARRAY

A. - matriz de constantes

KSI - vetor de expoentes de ξ , armazenados por bits.

ETA - vetor de expoentes de η , armazenados por bits.

ZTA - vetor de expoentes de ζ , armazenados por bits.

5. Ligação com Programas

Nenhuma

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

INTEGER

I - For-loop variável

IA - variável utilitária

8. Variáveis Globais

INTEGER

GRAU e NPONT

9. Variáveis Modificadas

GRAU e NPONT

PIPQS

1. Nome do Programa

PROCEDURE PIPQS

2. Descrição do Programa

PIPQS gera os elementos necessários a montagem do polinômio para o paralelepípedo quadrático, baseado na fórmula 2.5.2.2(a).

3. Lógica do Programa

Monta a matriz de constantes, e os expoentes de ξ , η , ζ , determinando o número de termos do polinômio menos um.

4. Parâmetros Formais

ARRAY

A - matriz de constantes

KSI - vetor de expoentes de ξ , armazenados por bits.

ETA - vetor de expoentes de η , armazenados por bits.

5. Ligação com Programa

Nenhuma

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

INTEGER

I, J - For-loop parâmetros

IA - variável utilitária

8. Variáveis Globais

INTEGER

GRAU e NPONT

9. Variáveis Modificadas

GRAU e NPONT

DECHA

1. Nome do Programa

PROCEDURE DECHA

2. Descrição do Programa

Esta é a procedure básica do módulo RIGEIS, obtém os dados relativos ao elemento, forma a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes para a família de elementos isoparamétricos incluídos no LORANE.

3. Lógica do Programa

Para cada elemento forma a matriz D e obtém os dados para a integração numérica. A seguir o programa entra num loop sobre o número de pontos de integração executando as seguintes etapas:

- a) Obtém-se as derivadas dos polinômios de interpolação, calcula-se o Jacobiano inverso e o determinante do Jacobiano.
- b) Transforma os vetores acima para coordenadas cartesianas e calcula a matriz B .
- c) Monta a triangular inferior da matriz de rigidez.

4. Parâmetros Formais

ARRAY

COEF - matriz de constantes
EXPX - vetor de expoentes de ξ
EXPY - vetor de expoentes de η
EXPZ - vetor de expoentes de ζ

5. Ligação com Programas

ELAST, DERIVJ, DERXYZ, SMKMB, CAENOD, SOMAT
INTNUM - uma chamada típica é INTNUM (D, NP, X, Y, Z, PESO).

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

ARRAY

TM	- matriz auxiliar
DE	- matriz de elasticidade
DEKSI	- vetor com derivadas do polinômio em relação a ξ , depois X
DEETA	- vetor com derivadas do polinômio em relação a η , depois Y
DEZTA	- vetor com derivadas do polinômio em relação a ζ , depois Z, no caso axissimétrico tem os valores $\underline{N}^T/\underline{R}$.
XX, YY, ZZ	- vetores com as coordenadas nodais
VD	- vetor indicativo das derivadas em relação a X, Y ou Z a serem multiplicadas, $\frac{\partial N^T}{\partial X} \times \frac{\partial N^T}{\partial Y}, \frac{\partial N^T}{\partial Y} \times \frac{\partial N^T}{\partial Z}$, etc.
JAC	- matriz Jacobiano
X, Y, Z	- vetores com as coordenadas dos pontos de integração
PESO	- vetor com os pesos dos pontos de integração
VX	- vetor com os subscritos de todos os valores da matriz \underline{D} a serem usados na avaliação da matriz de rigidez

INTEGER

IGL, I, HU, J	- variáveis utilitárias
NC	- número de produtos de derivadas a executar
NL	- número de submatrizes da \underline{K}

REAL

DET	- determinante do Jacobiano
TT	- espessura do elemento

8. Variáveis Globais

INTEGER

POINT, NCO, NPONT, GRAU, NP, TIPO, D

ARRAY

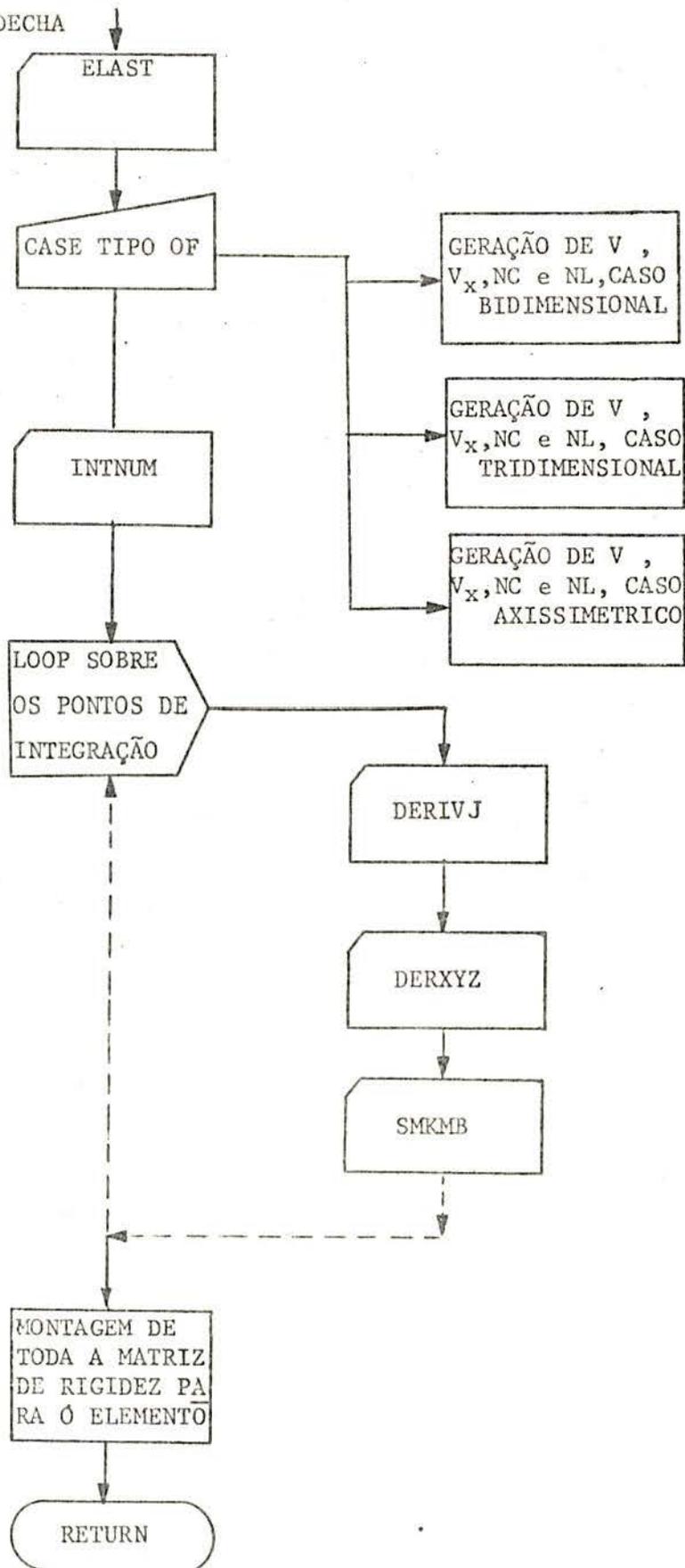
RIG

9. Variáveis Modificadas

RIG

10. Macro Diagrama de Blocos.

PROCEDURE DECHA



ELAST

1. Nome do Programa

PROCEDURE ELAST

2. Descrição do Programa

Computa ou armazena as propriedades para os elementos isoparamétricos.

3. Lógica do Programa

ELAST calcula a matriz de elasticidade D, da equação básica, para um material isotrópico quando não fornecida. O Módulo de Young e o coeficiente de Poisson são usados nesse cálculo.

4. Parâmetros Formais

Nenhum

5. Ligação com Programas

REALCONST - fornece as propriedades do elemento, uma chamada típica é REALCONST(NEXTEL, E, G, P, PE, AL, BE, BPE, BA, BEL)

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

REAL

E - Módulo de Young

P - Coeficiente de Poisson

AUX, PE, G, AL - variáveis utilitárias

BOOLEAN

BPE, BA, BEL - variáveis utilitárias

8. Variáveis Globais

INTEGER

NEXTEL

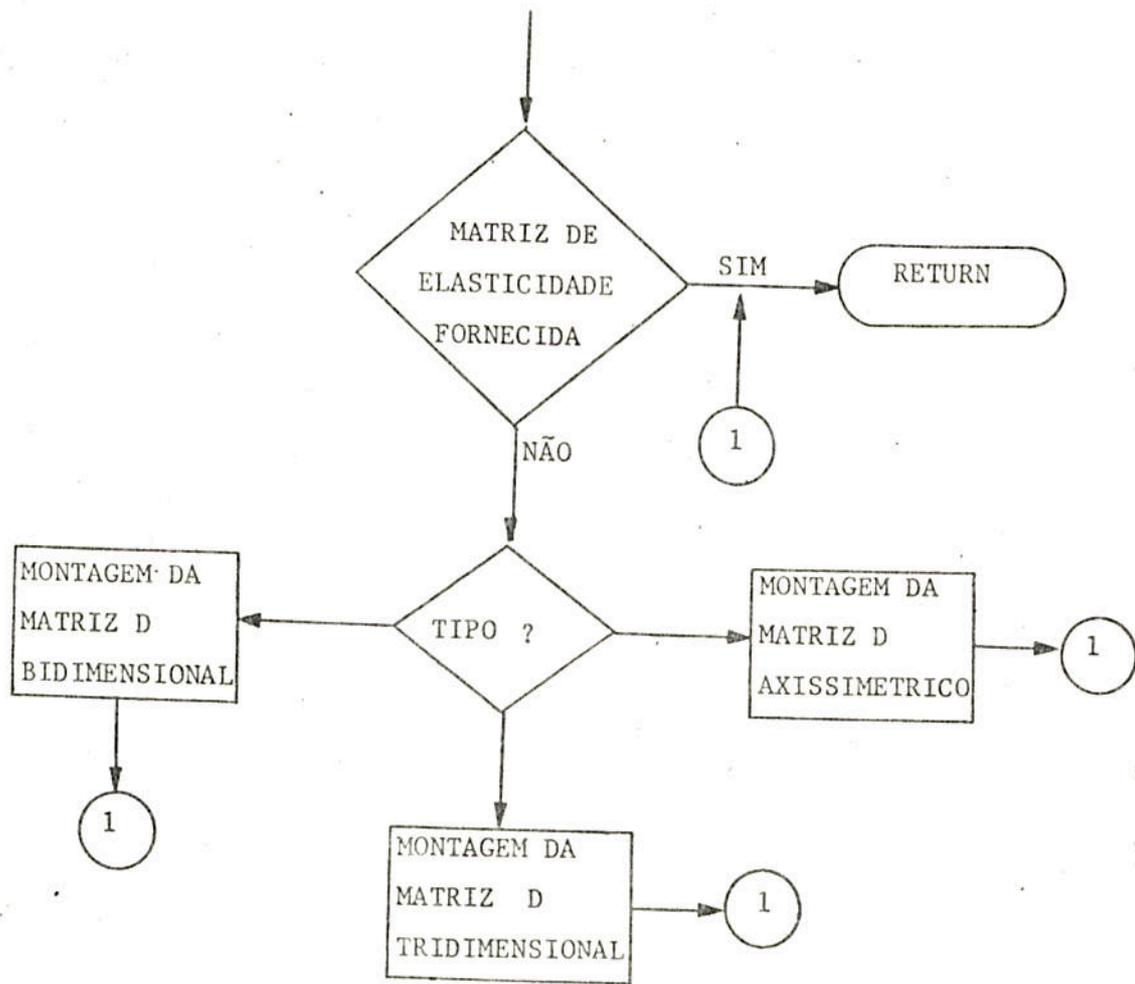
ARRAY

DE

9. Variáveis Modificadas

DE

10. Macro Diagrama de Blocos: PROCEDURE ELAST



INTNUM

1. Nome do Programa

PROCEDURE INTNUM

2. Descrição do Programa

INTNUM contém fórmulas de quadratura para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional, usadas na integração numérica de polinômios de até grau 7.

3. Lógica do Programa

INTNUM contém uma coleção de 11 fórmulas para os diferentes graus do polinômio. A integral definida a ser solucionada pela procedure supõe limites de integração variando ente -1 e 1.

Por uma transformação linear de coordenadas recai-se no caso especificado por esta rotina, se os limites de integração são diferentes.

As fórmulas estão distribuídas de acordo com o domínio de integração e a cada fórmula estão associados o número de pontos de integração e a precisão (grau do polinômio interpolador).

Para maiores detalhes ver referência 14.

4. Parâmetros Formais

- D - dimensão do domínio de integração
- N - número de pontos de integração numa particular fórmula usada
- X - vetor de abcissas dos pontos de integração. Usado quando $D = 1, 2, 3$
- Y - vetor de ordenadas dos pontos de integração Usado quando $D = 2, 3$
- Z - vetor de cotas dos pontos de integração. Usado quando $D = 3$
- PESO - vetor que contém os pesos (coeficientes) da fórmula associada aos pontos de integração.

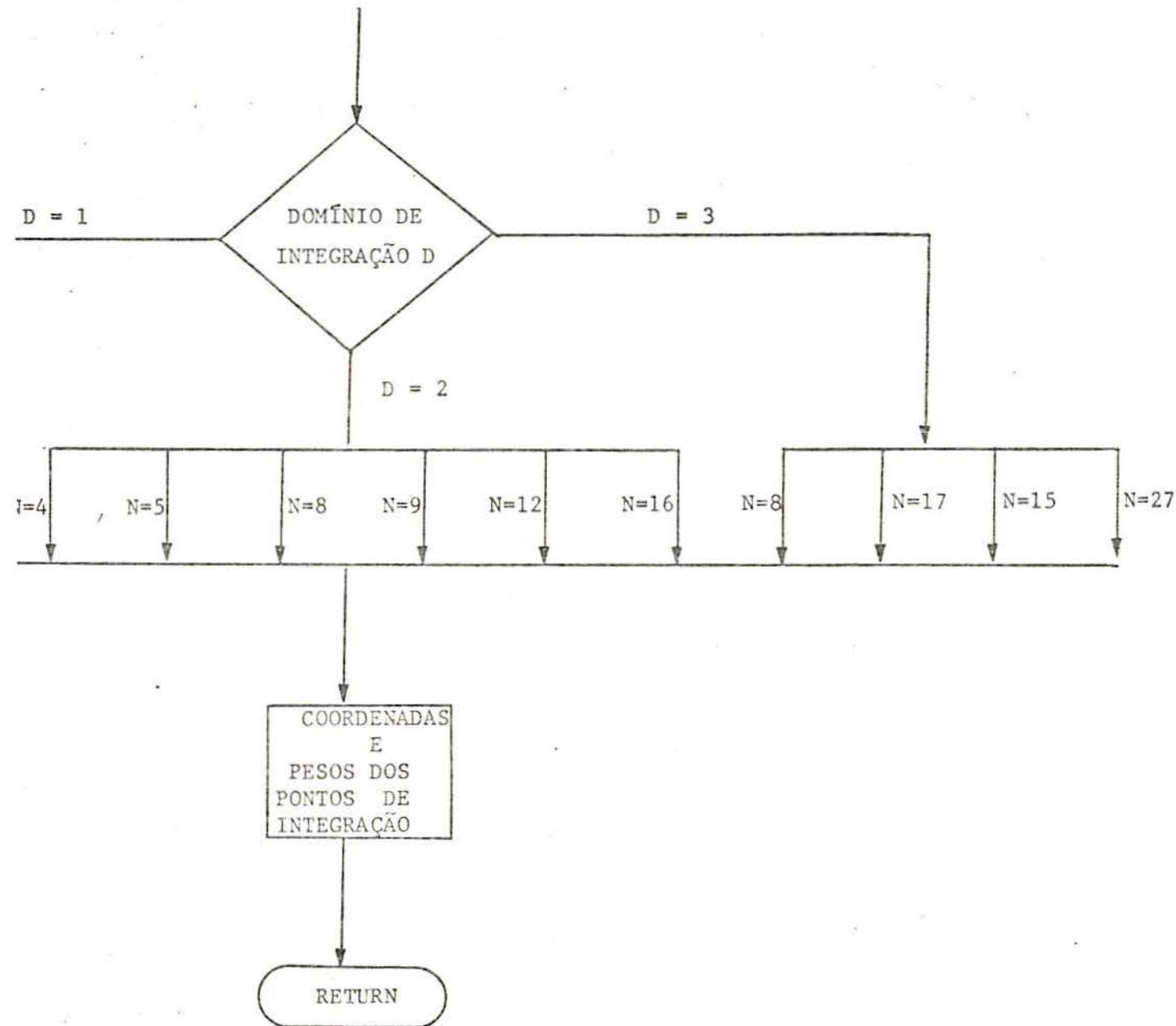
5. Ligação com Programas

Nenhum

6. Procedimento de Erro

Nenhum

10. Macro Diagrama de Blocos . PROCEDURE INTNUM



DERIVJ

1. Nome do Programa

PROCEDURE DERIVJ

2. Descrição do Programa

Determina as derivadas do polinômio em relação as coordenadas curvilíneas, calcula o Jacobiano inverso e o determinante do Jacobiano.

3. Lógica do Programa

Determina se é caso bidimensional ou tridimensional, montando a seguir os vetores com as derivadas do polinômio, calculando o determinante e o Jacobiano, inverso para os casos em análise.

Se o determinante anular-se, sai uma mensagem de aviso e a execução cessa imediatamente.

Para caso bidimensional a derivada em relação ζ é ignorada.

Para caso axissimétrico é montado o polinômio \underline{N} e a divisão \underline{N}^T/R é armazenada em DEZTA.

4. Parâmetros Formais

Nenhum

5. Ligação com Programas

ABA - calcula o valor da coordenada de integração elevada ao expoente correspondente, uma chamada típica é: ABA (EX, X)

JACOB - determina o Jacobiano inverso.

6. Procedimento de Erro

Quando $|J| = 0$, uma mensagem é imprimida. A mensagem tem a seguinte forma:

"JACOBIANO ANULOU-SE PARA ELEMENTO ISOPARAMETRICO"

7. Variáveis Locais

REAL

CF - variável utilitária

INTEGER

R. I, J - variáveis utilitárias

EX - expoente de ξ

EY - expoente de η

EZ - expoente de ζ

8. Variáveis Globais

ARRAY

DEKSI, DEETA, DEZTA, JAC, EXPX, EXPY, EXPZ, N

REAL

DET

INTEGER

NPONT, GRAU

LABEL

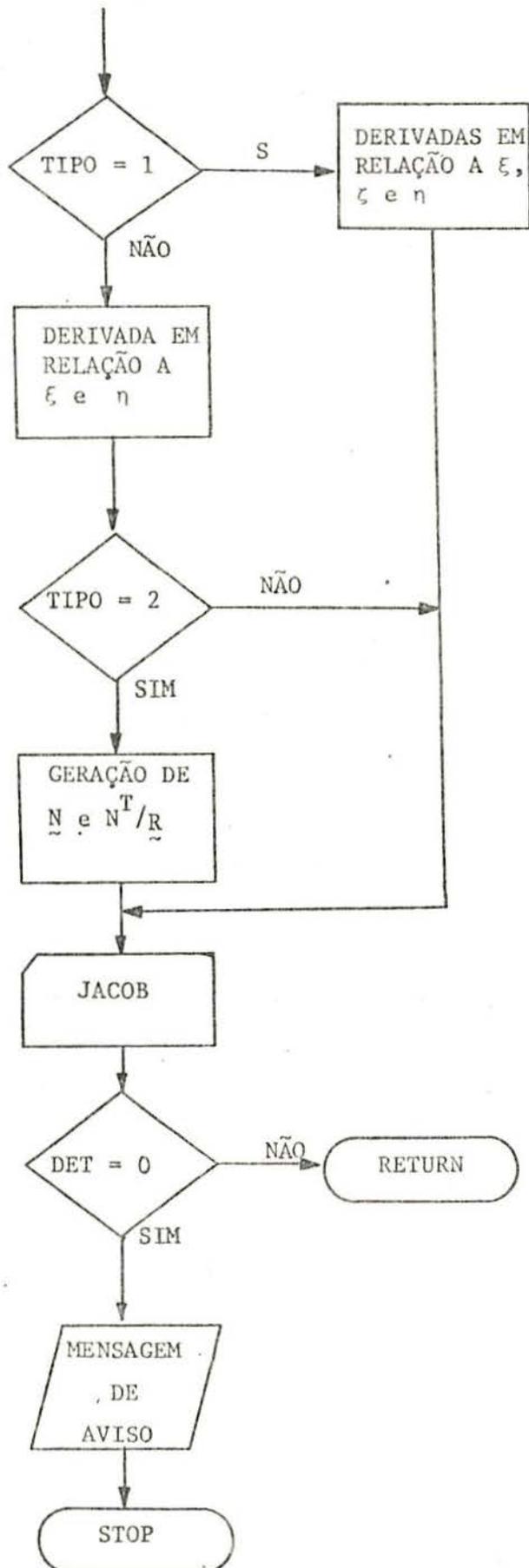
FIN

9. Variáveis Modificadas

DEKSI, DEETA, DEZTA, JAC, DET e N

10. Macro Diagrama de Blocos.

PROCEDURE DERIVJ



JACOB

1. Nome do Programa

PROCEDURE JACOB

2. Descrição do Programa

Calcula a matriz Jacobiano inversa e o determinante do Jacobiano

3. Lógica do Programa

Os elementos da matriz Jacobiano são determinados usando-se os valores referidos no apêndice 1.

São adotados dois procedimentos diferentes, um para o caso bidimensional, outro para o caso tridimensional.

Calcula-se o determinante usando-se as fórmulas dadas no Apêndice 1.

4. Parâmetros Formais

Nenhum

5. Ligação com Programas

SOMAT - calcula a multiplicação de um vetor de derivadas de \underline{N} por um vetor de coordenadas cartesianas, uma chamada típica

é: PFX := SOMAT (DEETA, XX)

6. Procedimento de Erro

Nenhum

7. Variáveis Locais

REAL

PFX - $\underline{\phi} \times \underline{X}_n$, adotando a nomenclatura do apêndice 1

PFY - $\underline{\phi} \times \underline{Y}_n$

PFZ - $\underline{\phi} \times \underline{Z}_n$

PKX - $\underline{\psi} \times \underline{X}_n$

PKY - $\underline{\psi} \times \underline{Y}_n$

PKZ - $\underline{\psi} \times \underline{Z}_n$

PGX - $\underline{\Gamma} \times \underline{X}_n$

PGY - $\underline{\Gamma} \times \underline{Y}_n$

PGZ - $\underline{\Gamma} \times \underline{Z}_n$

8. Variáveis Globais

ARRAY

DEETA, DEKSI, DEZTA, XX, YY, ZZ, JAC

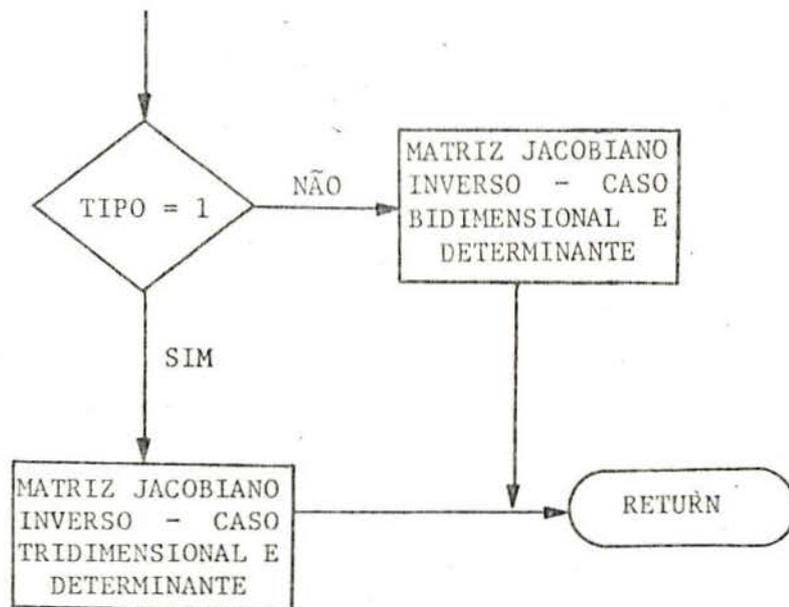
REAL

DET

9. Variáveis Modificadas

JAC, DET

10. Macro Diagrama de Blocos - PROCEDURE JACOB



DERXYZ

1. Nome do Programa

PROCEDURE DERXYZ

2. Descrição do Programa

Determina as derivadas do polinômio de interpolação em relação ao sistema de coordenadas cartesianas.

3. Lógica do Programa

Decide qual o caso, se bidimensional ou tridimensional e a seguir obtêm as derivadas do polinômio N em função de x , y e z (TIPO = 1), baseado nas fórmulas do ítem 2.5. O valor dessas derivadas retorna em DEKSI, DEETA e DEZTA.

4. Parâmetros Formais

Nenhum.

5. Ligação com Programas

Nenhuma.

6. Procedimento de Erro

Nenhum.

7. Variáveis Locais

REAL

DEXIS - derivada em relação a x

DEYPS - derivada em relação a y

DEZES - derivada em relação a z

8. Variáveis Globais

INTEGER

NPONT

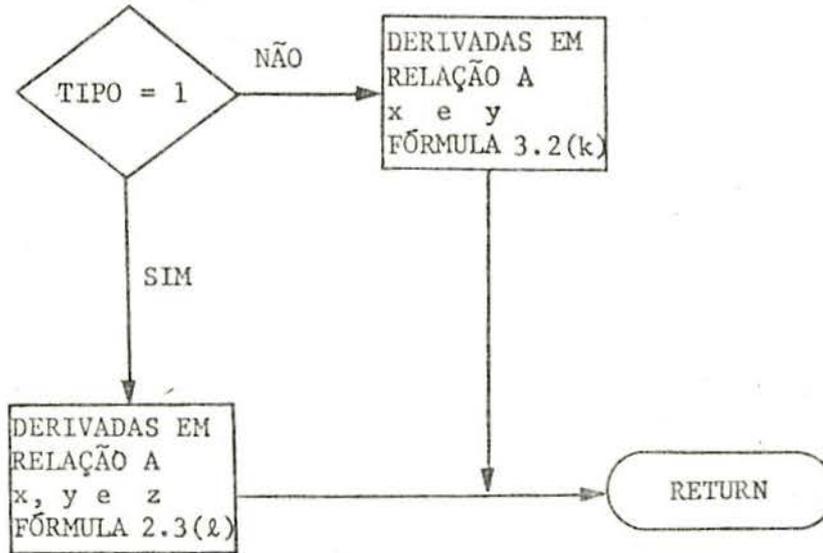
ARRAY

DEETA, DEZTA e DEKSI

9. Variáveis Modificadas

DEETA, DEZTA e DEKSI

10. Macro Diagrama de Blocos. PROCEDURE DERXYZ



SMKMB

1. Nome do Programa

PROCEDURE SMKMB

2. Descrição do Programa

Determina a triangular inferior da matriz de rigidez.

3. Lógica do Programa

Determina-se o produto de derivadas e o coeficiente de rigidez. Percorre-se a seguir a matriz de rigidez (triangular inferior) acrescentando-se o resultado do produto dos valores determinados acima nas posições convenientes. Para maiores esclarecimentos referir-se ao apêndice 3.

4. Parâmetros Formais

Nenhum.

5. Ligação com Programas

MULT - calcula a multiplicação das derivadas, uma chamada por exemplo é: MULT (DEKSI, DEKSI, TM)

6. Procedimento de Erro

Nenhum.

7. Variáveis Locais

INTEGER

I, J	- localizador de qual o produto de derivadas a executar
SR, SC	- índices de linhas e colunas da matriz DE respectivamente
Il, J1	- localizadores das submatrizes da K
IL, JL	- índices de linhas e colunas da matriz K
VL	- área ou volume do elemento

8. Variáveis Globais

ARRAY

RIG, TM, DE, VD, VX, DEKSI, DEETA, DEZTA

9. Variáveis Modificadas

RIG e TM.

ECHA

1. Nome do Programa

PROCEDURE ECHA

2. Descrição do Programa

É a procedure básica do módulo TEGEIS, obtém os dados relativos ao elemento e calcula o vetor de tensões.

3. Lógica do Programa

Para cada elemento forma a matriz \underline{D} , quando necessário e obtém as coordenadas adimensionais dos nós.

A seguir entra-se num loop sobre o número de carregamentos, num loop sobre o número de nós do elemento executando as seguintes etapas:

- a) Obtém-se as derivadas dos polinômios, calcula-se o Jacobiano inverso e o determinante do Jacobiano.
- b) Transforma os vetores acima para coordenadas cartesianas.
- c) Monta-se a matriz B
- d) Determina-se as tensões e as tensões principais nos pontos nodais.

4. Parâmetros Formais

Nenhum.

5. Ligação com Programas

ELAST, CONOD, DERIVJ, DERXYZ, MBAUX, MTENS

6. Procedimento de Erro.

Nenhum.

7. Variáveis Locais

ARRAY

U	- matriz auxiliar
DE	- matriz de elasticidade
DRKSI	- vetor de derivadas
DEETA	- vetor de derivadas
DEZTA	- vetor de derivadas
XX, YY, ZZ	- vetores de coordenadas nodais
B	- matriz \underline{B} da equação
JAC	- matriz Jacobiano
X, Y, Z	- vetores de coordenadas nodais adimensionais
N	- polinômio de interpolação

INTEGER

IGL, I, HU, J - variáveis utilitárias

REAL

DET - determinante do Jacobiano

8. Variáveis Globais

INTEGER

POINT, NCO, NPONT, GRAU, TIPO, ICN

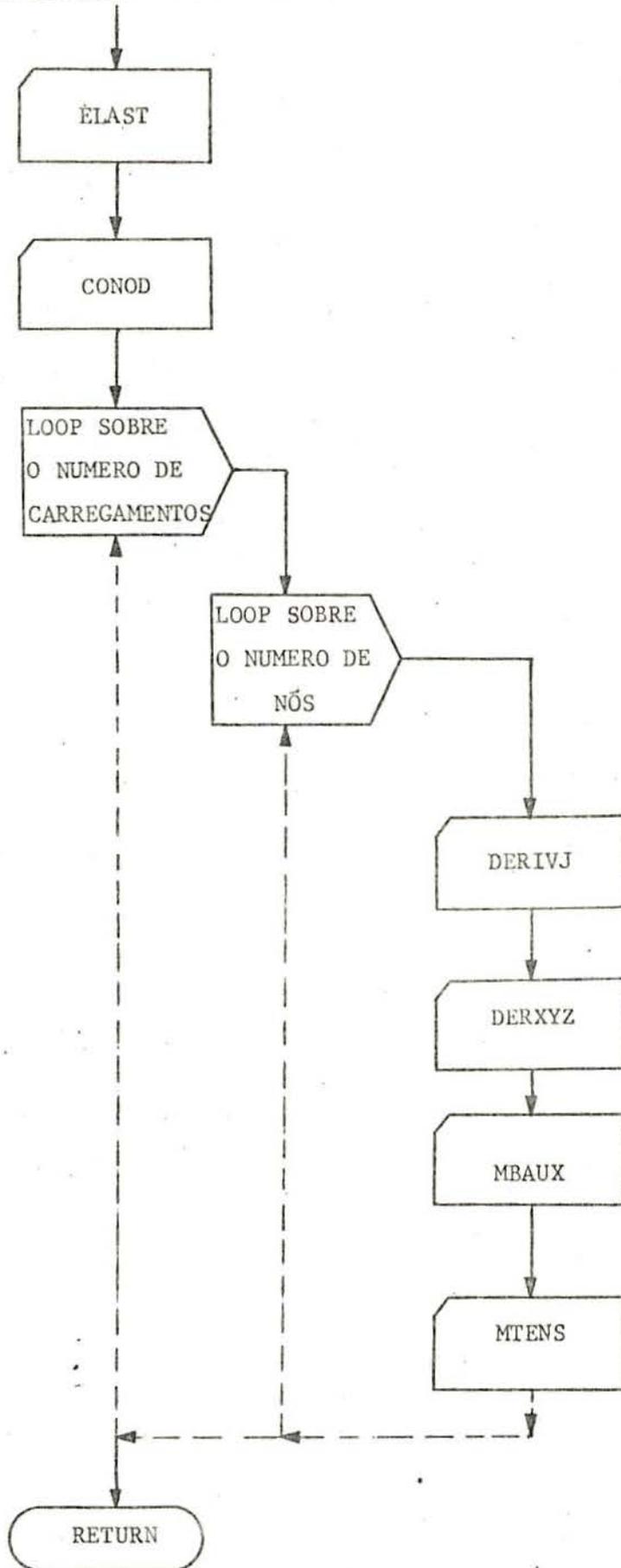
ARRAY

SIGMA, DESLO

9. Variáveis Modificadas

SIGMA

10. Macro Diagrama de Blocos. PROCEDURE ECHA



CONOD

1. Nome do Programa

PROCEDURE CONOD

2. Descrição do Programa

Determina os valores de ξ , η e ζ nos nós dos elementos

3. Lógica do Programa

A variável ICN é o indicador de onde começam os valores de ξ , η e ζ a serem colocados nos vetores x, y e z respectivamente.

4. Parâmetros Formais

Nenhum.

5. Ligação com Programas

Nenhuma.

6. Procedimento de Erro

Nenhum.

7. Variáveis Locais

INTEGER

AM - NPONT - 1 + ICN

K - Índice dos arrays x, y e z

I - Índice que determina os valores das coordenadas, usado na expressão CASE

8. Variáveis Globais

ARRAY

x, y e z

9. Variáveis Modificadas

x, y e z

MBAUX

1. Nome do Programa

PROCEDURE MBAUX

2. Descrição do Programa

Determina a matriz que relaciona tensões e deformações.

3. Lógica do Programa

Se for caso axissimétrico monta a B usando a fórmula 4.2(d).

4. Parâmetros Formais

Nenhum.

5. Ligação com Programas

SOMAT - chamada somente no caso axissimétrico, para calcular o valor da multiplicação $(\tilde{N}^T \times \tilde{r}_n)$, a chamada é AP - SOMAT (N, XX)

6. Procedimento de Erro

Nenhum.

7. Variáveis Locais

INTEGER

I, K - variáveis utilitárias

REAL

AP - $(\tilde{N}^T \times \tilde{r}_n)$

8. Variáveis Globais

ARRAY

DEETA, DEKSI, DEZTA, B, N

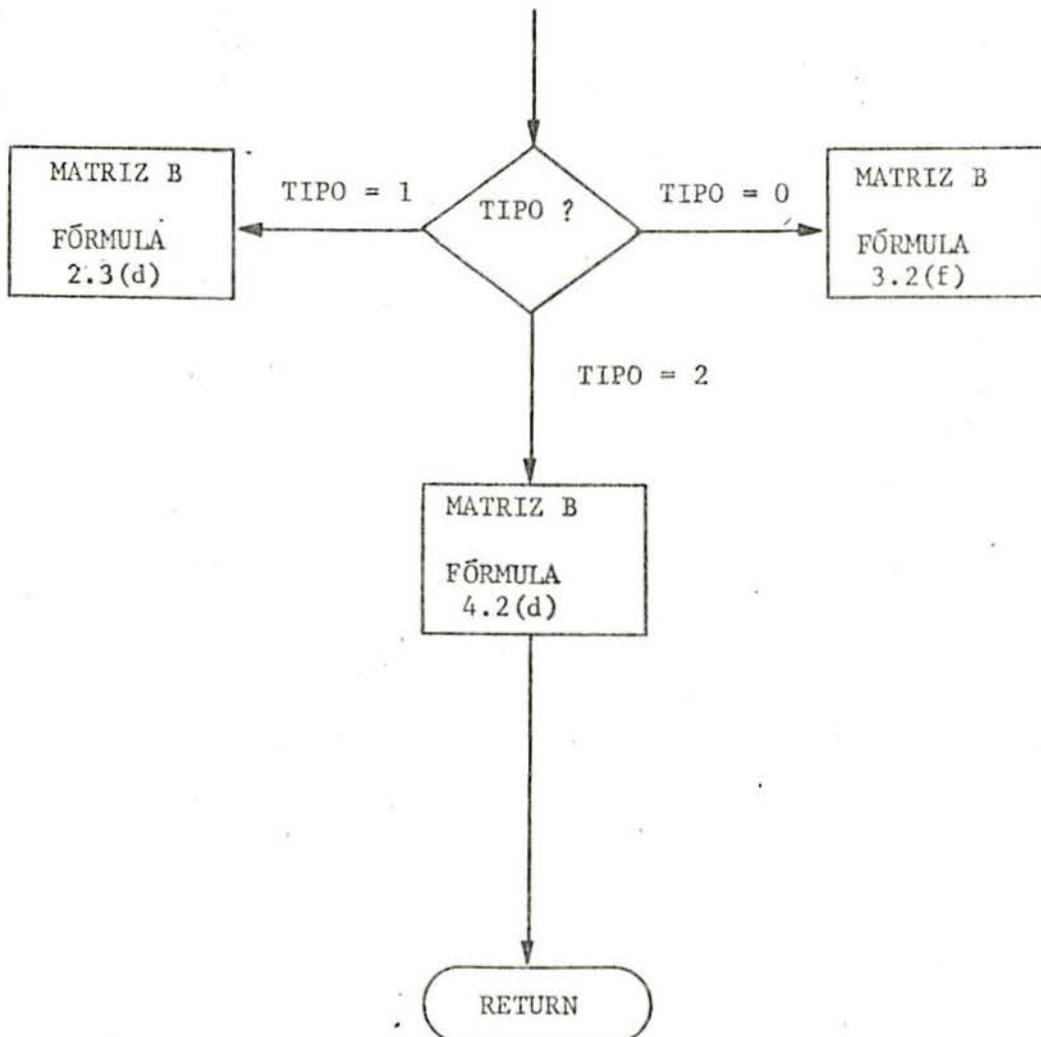
INTEGER

NPONT

9. Variáveis Modificadas

B

10. Macro Diagrama de Blocos. PROCEDURE MBAUX



MTENS

1. Nome do Programa
PROCEDURE MTENS
2. Descrição do Programa
Calcula o vetor SIGMA
3. Lógica do Programa
Multiplica as matrizes \underline{D} , \underline{B} e \underline{U}
4. Parâmetros Formais
Nenhum.
5. Ligação com Programas
Nenhuma.
6. Procedimento de Erro
Nenhum.
7. Variáveis Locais
INTEGER
M, J - variáveis utilitárias
REAL
VA - variável auxiliar
8. Variáveis Globais
INTEGER
NPONT, NCO
ARRAY
SIGMA, DESLO
9. Variáveis Modificadas
SIGMA

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Esta monografia apresenta um enfoque integrado para a família de elementos isoparamétricos, o qual permite, com um só programa, de uma maneira eficiente, contar com uma série de elementos de grande utilidade.

Resulta claro que este enfoque apresenta grandes vantagens sobre a implantação individual de cada um destes elementos, ao evitar a duplicação dos esforços de programação, por aproveitar processos comuns a todos os elementos, os quais são incluídos apenas uma vez.

Oferece, outrossim, uma base consistente de comparação entre os distintos elementos, quanto a resultados como tempo de computação, já que o grau de sofisticação na programação é o mesmo para todos os elementos.

Deve-se mencionar que a implantação de um novo elemento, pode ser efetuada com um mínimo de esforço, pois o esquema geral já está montado.

Quanto aos elementos atuais, verificamos que quase sempre é aconselhável usar-se elementos de ordem superior para o estado plano de tensões e deformações. A escolha entre os elementos IQQ e IQC, cujos tempos de análise e valores de tensões são muito semelhantes, deve recair sobre o primeiro, que é bem menos complexo que o segundo.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Irons, B.M. - "Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Methods". Journal AIAA, V.4, p. 2035-37, 1966.
- 2 - Zienkiewicz, O.C. - "The Finite Element Method in Engineering Science" McGraw-Hill.
- 3 - Aparicio, Luis E. & Connor, J. - "Isoparametric Finite Element Displacement Models". Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering, research report 70-39.
- 4 - Ergatoudius, J.G. - "Isoparametric Finite Element in Two and Three dimensional Stress Analysis". Tese de Doutorado, University College of Swansea.
- 5 - Fung, Y.C. - "Foundations of Solid Mechanics". Prentice Hall.
- 6 - Ferrante, A.J. - "Metodos de los Elementos Finitos". Notas do Curso ministrado no Pós-Graduação de Eng.Civil, UFRGS, P.A., 1973.
- 7 - Veryard, D.A. - "Problems Associated with Convergence of Isoparametric and Mixoparametric Finite Elements". University of Wales, report nº C/M/69/71.
- 8 - Tottenham, H. & Brebbia, C.A. - "Finite Elements Techniques in Structural Mechanics". Stress Analysis Publishers.
- 9 - Irons, B.M. & Zienkiewicz, O.C. - "The Isoparametric Finite Element system. A new concept in Finite Element Analysis". University of Wales, Civil Engineering Dept., Swansea.
- 10 - Desai & Abel - "Introduction to the finite element Method". Van Nostrand Reinhold Company.
- 11 - Ergatoudius, J.G., Irons, B.M. & Zienkiewicz, O.C. - "Curved, Isoparametric, Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis". Int.J. Solids Structures, V.4, p.31-42, 1968.
- 12 - Irons, B.M. - "Quadratura Rules for Brick Based Finite Elements". Int. J.Num. Meth., V.3, p. 293-4, 1971.

- 13 - Connor, J. & Will, G. - "Computer-aided Teaching of Finite Element Displacement Method". MIT. research report, 61-23.
- 14 - Celiberto, Genaro - "Quadratura Numérica". Pós-Graduação em Engenharia Civil, P.A., 1973.
- 15 - Irons, B.M. - "Comments on Stiffness Matrices for Sector Element". By I.R. Riju and A.K.Rao, Journal AIAA, V.7, p.156-7, 1969.
- 16 - Walton, Jay - " Computer Approaches to Engineering Problems-Debugging". Department of Civil Engineering, MIT.
- 17 - Gutfreind, Henrique - "Elementos Finitos Aplicados a Estruturas Axissimétricas com Carregamento não Axissimétrico". Departamento de Engenharia Civil, UFRGS, 1972.
- 18 - Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N. - "Theory of Elasticity". McGraw-Hill.
- 19 - Zlamel, M. - "The Finite Element Method in Domains with Curved Boundaries". Int. J. Num. Meth. Engng, V.5, p.367-73.

APÊNDICE 1

VALORES DO JACOBIANO PARA OS CASOS BI e TRI-DIMENSIONAIS

1. NOTAÇÃO

Para simplificar, a fim de evitar-se expressões muito grandes, adotamos os seguintes símbolos:

$$\underline{\psi} = \partial \underline{N}^T / \partial \underline{\xi} \quad , \quad \underline{\phi} = \partial \underline{N}^T / \partial \underline{\eta} \quad e \quad \underline{\Gamma} = \partial \underline{N}^T / \partial \underline{\zeta}$$

2. CASO BIDIMENSIONAL

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{|\underline{J}|} \begin{bmatrix} J_{11} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

com

$$J_{11} = \underline{\phi} \times \underline{y}_n$$

$$J_{12} = \underline{\psi} \times \underline{y}_n$$

$$J_{21} = \underline{\phi} \times \underline{x}_n$$

$$J_{22} = \underline{\psi} \times \underline{x}_n$$

e

$$|\underline{J}| = (\underline{\phi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\psi} \times \underline{x}_n) - (\underline{\psi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{x}_n)$$

3. CASO TRIDIMENSIONAL

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{|\underline{J}|} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

com

$$J_{11} = (\underline{\phi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{z}_n) - (\underline{\phi} \times \underline{z}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{y}_n)$$

$$J_{12} = (\underline{\psi} \times \underline{z}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{y}_n) - (\underline{\psi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{z}_n)$$

$$J_{13} = (\underline{\psi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{z}_n) - (\underline{\psi} \times \underline{z}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{y}_n)$$

$$J_{21} = (\underline{\phi} \times \underline{z}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{x}_n) - (\underline{\phi} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{z}_n)$$

$$J_{22} = (\underline{\psi} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{z}_n) - (\underline{\psi} \times \underline{z}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{x}_n)$$

$$J_{23} = (\underline{\psi} \times \underline{z}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{x}_n) - (\underline{\psi} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{z}_n)$$

$$J_{31} = (\underline{\phi} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{y}_n) - (\underline{\phi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{x}_n)$$

$$J_{32} = (\underline{\psi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{x}_n) - (\underline{\psi} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{y}_n)$$

$$J_{33} = (\underline{\psi} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{y}_n) - (\underline{\psi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{x}_n)$$

e

$$\begin{aligned} |\underline{J}| &= (\underline{\psi} \times \underline{x}_n) \left| (\underline{\phi} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{z}_n) - (\underline{\Gamma} \times \underline{y}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{z}_n) \right| - \\ &\quad (\underline{\psi} \times \underline{y}_n) \left| (\underline{\phi} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{z}_n) - (\underline{\Gamma} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{z}_n) \right| + \\ &\quad (\underline{\psi} \times \underline{z}_n) \left| (\underline{\phi} \times \underline{z}_n) \times (\underline{\Gamma} \times \underline{y}_n) - (\underline{\Gamma} \times \underline{x}_n) \times (\underline{\phi} \times \underline{y}_n) \right| \end{aligned}$$

APÊNDICE 2

MATRIZES DE ELASTICIDADE

1. NOTAÇÃO

E - módulo de Elasticidade

ν - coeficiente de Poisson

2. CASO TRIDIMENSIONAL

$$\underline{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \\ & & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Simétrico

3. CASO BIDIMENSIONAL

3.1 - Tensões Planas

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

3.2 - Deformações Planas

$$\underline{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

3.3 - Tensões Axissimétricas

$$\underline{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

$\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$

$$\frac{E(1-\nu)(1-\nu)(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu) \cdot 2}$$

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{(1-2\nu)(1-\nu)}{2} \quad \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu)}$$

APÊNDICE 3

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ

1. NOTAÇÃO

Para simplificar, adotamos os seguintes símbolos:

$$\underline{\psi} = \partial \underline{N}^T / \partial x \quad \text{e} \quad \underline{\phi} = \partial \underline{N}^T / \partial y$$

2. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

A matriz de rigidez, fórmula 3.2(l), é avaliada por um produto matricial. Se expressarmos esse produto, $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$, na forma de submatrizes obteremos uma simplificação considerável da computação.³

Seja

$$\underline{B}^T \underline{D} \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{\psi}^T & \underline{0} & \underline{\phi}^T \\ \underline{0} & \underline{\phi}^T & \underline{\psi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & & \text{Sim.} \\ D_{21} & D_{22} & \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\phi} \\ \underline{\phi} & \underline{\psi} \end{bmatrix} \quad 2(a)$$

e

$$\underline{K} = \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dA = \begin{bmatrix} K_{uu} & \text{Sim.} \\ K_{vu} & K_{vv} \end{bmatrix} dA \quad 2(b)$$

temos

$$\underline{K}_{uu} = \begin{bmatrix} \underline{\psi}^T & \underline{\phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{31} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\psi} \\ \underline{\phi} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{K}_{vu} = \begin{bmatrix} \underline{\psi}^T & \underline{\phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{31} & D_{33} \\ D_{21} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\psi} \\ \underline{\phi} \end{Bmatrix}$$

2(c)

$$\underline{K}_{vv} = \begin{bmatrix} \underline{\psi}^T & \underline{\phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{32} & D_{33} \\ D_{22} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\psi} \\ \underline{\phi} \end{Bmatrix}$$

Pelo exposto acima todas as submatrizes são similares quanto aos produtos matriciais $\underline{\psi}^T \underline{\psi}$, $\underline{\phi}^T \underline{\phi}$, $\underline{\psi}^T \underline{\phi}$ e $\underline{\phi}^T \underline{\psi}$. Uma submatriz pode ser expressa como a soma desses subprodutos, multiplicados pelo elemento correspondente na matriz de elasticidade. Em analogia com 2(b) expressamos a soma como uma matriz "falsa" da forma

$$\begin{aligned} & d_1 \underline{\psi}^T \underline{\psi} + d_2 \underline{\psi}^T \underline{\phi} \\ & d_3 \underline{\phi}^T \underline{\psi} + d_4 \underline{\phi}^T \underline{\phi} \end{aligned} \tag{2(d)}$$

onde d_1 , d_2 , d_3 e d_4 são as combinações dos elementos da matriz de elasticidade. A semelhança entre 2(b) e 2(d) junto com a forma de \underline{B} sugere um algoritmo, que torna a avaliação da matriz de rigidez uma simples rotina.

A posição de $\underline{\psi}$ e $\underline{\phi}$ em cada coluna de \underline{B} pode ser representada por um vetor linha,

$$\begin{bmatrix} 1, 3, 3, 2 \end{bmatrix} \tag{2(e)}$$

Este vetor fornece os subscritos de todos os elementos da \underline{D} a serem usados na avaliação das submatrizes. O transposto da o subscrito da

linha e o próprio vetor o subscrito da coluna.

Modificando 2(e) convenientemente podemos determinar a relação para qualquer forma de \underline{B} .

Assim, para o caso axissimétrico teremos,

$$\left[2, 4, 3, 4, 1 \right]$$

e para o caso tridimensional

$$\left[1, 4, 5, 4, 2, 6, 5, 6, 3 \right]$$

As submatrizes são então obtidas superpondo as contribuições dos termos em 2(d). A forma de 2(d) modifica-se conforme o caso que se está abordando. Para maior facilidade os produtos em 2(d) foram indicados por um vetor.

Por exemplo, consideremos o produto $\underline{\psi}^T \underline{\psi}$. A posição de $\underline{\psi}^T \underline{\psi}$ em 2(d) é dada por dois subscritos I e J. Neste caso o termo $\underline{\psi}^T \underline{\psi}$ está na linha I de 2(d).

A iteração sobre a matriz de rigidez leva a outro par de subscritos I_1 e J_1 , para cada termo em 2(b). Assim, K_{uu} é o termo na linha I_1 coluna J_1 em 2(b). Esses coeficientes são tudo o que necessitamos para determinar os elementos da matriz \underline{D} . O subscrito da coluna é o inteiro localizado na posição LSC em 2(e), sendo

$$LSC = NC (J_1 - 1) + J$$

e NC definido como

NC = 3 , caso tridimensional e axissimétrico

NC = 2 , caso bidimensional.

O subscrito da linha é dado por LSR, sendo

$$LSR = NC (I_1 - 1) + I$$

Então para o caso particular de $\underline{\psi}^T \underline{\psi}$ e K_{uu} temos,

$$LSC = 1 \text{ e } LSR = 1$$

o que nos dá de acordo com $2(l)$ o coeficiente D_{11} da matriz de elasticidade. Durante a iteração sobre K_{uu} , acrescentaríamos a contribuição de $D_{11} \psi^T \psi$ a ela.

O número de repetições deste procedimento depende do número de pontos de integração.

Para o caso isotrópico os coeficientes da matriz D que forem nulos são ignorados.

ESCOLA DE ENGENHARIA
BIBLIOTECA