

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Passeios Aleatórios Quânticos e a
Quantização dos Tempos de Primeiro Retorno**

Nathália Mariath Cristimann

Trabalho de Conclusão do Curso de Bacharelado em Física realizado sob a orientação do prof. Dr. Carlos Felipe Lardizabal

Porto Alegre
17 de dezembro de 2017

Agradecimentos

Agradeço ao prof. Dr. Carlos Felipe Lardizabal pela paciência, pelo tempo investido e pela disposição em me orientar nesse trabalho de conclusão de curso. Ao prof. Dr. Rafael Rigão Souza, por ter indicado o meu orientador.

Ao prof. Dr. Luis Gustavo Pereira, pelos ensinamentos e incentivo no início do curso de graduação. Aos colegas Milena, Bárbara, Rodrigo, Eduardo, Érison, Guilherme e Débora, por toda a ajuda em diversas disciplinas.

A Denise e Marisa Mariath (mãe e avó, respectivamente), pelo apoio incondicional. Ao meu irmão Bernardo, por tudo que me ensinou.

A CAPES/CNPq, pela bolsa de iniciação científica e intercâmbio acadêmico.

Resumo

O estudo da recorrência e o problema de se calcular tempos de chegada de processos aleatórios são questões importantes em diversos problemas de física matemática. Neste trabalho, consideramos o passeio aleatório quântico em tempo discreto em uma dimensão com a moeda de Hadamard. Analisamos alguns aspectos de seu comportamento, e fazemos uma comparação com o caso clássico. Duas noções de recorrência são apresentadas. A mais recente delas, introduzida por Grünbaum et al [23], é baseada em um monitoramento em termos de projeções ortogonais. Essa definição leva a um critério de recorrência em termos da função de Schur relacionada. Em particular, descrevemos o fato de que, no caso recorrente, o tempo médio de primeiro retorno é quantizado, em notável contraste com o que acontece com passeios aleatórios clássicos. São mencionadas aplicações e trabalhos relacionados.

Palavras-chave: passeio aleatório quântico, recorrência, tempos de chegada, tempo médio de primeiro retorno.

Abstract

The study of recurrence and the problem of calculating hitting times for stochastic processes are of fundamental importance in many problems of mathematical physics. In this work, we consider discrete-time quantum random walks on the line with the Hadamard coin. We analyze some aspects of its behavior, and compare it with the classical case. Two notions of recurrence are presented. The most recent one, introduced by Grünbaum et al [23], is based on performing projective measurements. This definition leads to a recurrence criterion in terms of the related Schur function. In particular, we describe the fact that, in the recurrent case, the expected first return time is quantized. This is in sharp contrast to classical random walks. We will mention applications and recent developments in this area.

Keywords: quantum random walks, recurrence, hitting times, expected first return time.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Passeio Aleatório Clássico	3
2.1	Introdução	3
2.2	Passeio Aleatório Clássico Discreto	5
2.3	Recorrência e Transiência	8
3	Passeio Aleatório Quântico	10
3.1	Introdução	10
3.2	Recorrência e Monitoramento	15
3.2.1	Caso clássico	16
3.2.2	Recorrência sem monitoramento	18
3.2.3	Recorrência monitorada	19
3.2.4	Exemplo	20
3.3	Caracterização Espectral da Recorrência	22
3.3.1	Critério de recorrência	24
3.4	Tempo Médio de Primeiro Retorno	25
3.4.1	Exemplo	27
4	Aplicações e Conclusão	30
	Apêndice A Probabilidade e Cadeias de Markov	32
	Apêndice B Teorema de Plancherel	37
	Bibliografia	38

1 Introdução

Passeios aleatórios quânticos, definidos em analogia com o passeio aleatório clássico, foram introduzidos em tempo discreto por Aharonov et al [1], e em tempo contínuo por Farhi e Gutmann [2]. No caso discreto, foram definidos e analisados em uma dimensão em [4, 5], no hipercubo em [7], e em grafos gerais em [6]. A relação entre os passeios discreto e contínuo em uma dimensão foi apresentada por Strauch em [8]. Mais tarde, Childs [9] mostrou uma correspondência direta entre esses dois tipos de processos quânticos em grafos arbitrários. O passeio quântico discreto foi inicialmente definido [1, 5] com um grau de liberdade extra atribuído à partícula, geralmente chamado de moeda. Entretanto, diversos modelos de passeios quânticos sem moeda foram propostos [10–12].

A utilização de passeios quânticos no desenvolvimento e análise de algoritmos é uma das principais motivações para o estudo desses processos. Passeios quânticos contínuos [14] e discretos [34–36] vêm sendo implementados com sucesso em algoritmos de busca. Além disso, constituem modelos universais para a computação quântica [15, 16]. A fim de compreender como melhor utilizar passeios quânticos em algoritmos, faz-se necessário o estudo das propriedades desses passeios. Dentre os diversos conceitos importantes para a caracterização desses processos, estão recorrência e tempo de chegada.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira: na Seção 2 é apresentada uma breve revisão de passeios aleatórios clássicos, utilizando alguns resultados de teoria da probabilidade e cadeias de Markov (Apêndice A). Começamos a Seção 3 com uma introdução sobre passeios aleatórios quânticos, mostrando algumas propriedades do passeio quântico discreto em uma dimensão com a moeda de Hadamard, e fazendo uma comparação com o caso clássico. A seguir, são estudadas duas noções de recorrência: a primeira, proposta por Štefaňák, Jex e Kiss [21], evita a inclusão de monitoramentos no sistema; a segunda, proposta por Grünbaum et al [23], se baseia em realizar uma medida de projeção a cada passo da evolução do sistema.

Na Seção 3.3, é dada uma caracterização espectral desta última noção de recorrência, e o critério de recorrência é apresentado no Teorema 3.1. O tempo médio de primeiro retorno τ é analisado na Seção 3.4 e o resultado principal (descrito aqui, e provado em [23]) é mostrado no Teorema 3.2: τ é um número inteiro ou infinito, em notável contraste com o que acontece no caso de passeios clássicos. Concluímos com um exemplo de passeio quântico em duas dimensões para estudar a recorrência e calcular o tempo τ . Na Seção 4, são mencionadas algumas aplicações de passeios quânticos.

2 Passeio Aleatório Clássico

2.1 Introdução

Um passeio aleatório é um tipo particular de processo estocástico com aplicações em diversas áreas - não apenas em física, mas também em ciência da computação, biologia e economia [49]. Consideremos a seguinte definição formal:

Definição 2.1. [55] (**Passeio aleatório**) Seja $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Para cada n inteiro positivo, seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. A sequência $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ formada pelas somas sucessivas das variáveis aleatórias é chamada **passeio aleatório**. Dizemos que $\{S_n\}$ é um passeio aleatório em \mathbb{R}^m se o domínio comum das X_k é \mathbb{R}^m .

Como as variáveis X_k são independentes, a probabilidade de uma sequência particular ocorrer é dada pela multiplicação das probabilidades individuais de cada X_k assumir os valores determinados da sequência [55]. Um passeio aleatório pode, portanto, ser visto como uma **cadeia de Markov** (Teorema A.1).

Uma vez que existem diversos exemplos práticos de passeio aleatório, há várias maneiras de se visualizar tal processo. Podemos imaginar que uma partícula se move em \mathbb{R}^m , e é situada na origem no tempo $n = 0$. A posição da partícula no tempo n é dada pela soma $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, onde a variável aleatória discreta X_i denota o

resultado de cada passo da partícula, e $S_0 = 0$.

Quando X_k assume os valores $\{-1, +1\}$, $(S_n)_{n \geq 0}$ é chamado **passeio aleatório simples (SRW)**. Além disso, se $Pr(X = 1) = Pr(X = -1) = \frac{1}{2}$, o passeio é chamado **simétrico**. Se o passeio ocorre em espaço e tempo discretos, é chamado passeio aleatório **discreto**. Se o tempo é contínuo, ou seja, $t \in [0, +\infty)$, e o espaço discreto ou contínuo, o passeio em questão é chamado **contínuo** (no tempo).

Exemplo 2.1 (Passeio aleatório simples em \mathbb{Z}).

Considere uma partícula na reta dos inteiros, que se move com passos de uma unidade em intervalos de tempo de também uma unidade. Sejam $i, j \in \mathbb{Z}$, $p \in [0, 1]$ e $q = 1 - p$. Sejam p_{ij} a probabilidade de a partícula passar da posição i para a posição j em um passo, e $P = (p_{ij})_{i, j \in \mathbb{Z}}$ sua matriz de transição. Então, para o passeio aleatório simples em uma dimensão, p_{ij} e P são dadas por

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{se } |i - j| = 1 \text{ e } j > i, \\ q, & \text{se } |i - j| = 1 \text{ e } j < i, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \cdots & 0 & p & 0 & & & \\ \cdots & q & 0 & p & 0 & & \\ \cdots & 0 & q & 0 & p & 0 & \\ & & 0 & q & 0 & p & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

Exemplo 2.2 (Passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d).

É possível generalizar o exemplo anterior para d dimensões. Nesse caso, X pode assumir os valores $\{\pm \hat{e}_k : k = 1, 2, \dots, d\}$, onde \hat{e}_k é o vetor $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ com o elemento “1” na k -ésima posição. Sejam $i, j \in \mathbb{Z}^d$. Para o passeio simétrico, $Pr(X = \hat{e}_k) = Pr(X = -\hat{e}_k)$ e as probabilidades de transição p_{ij} são

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/2d, & \text{se } |i - j| = 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

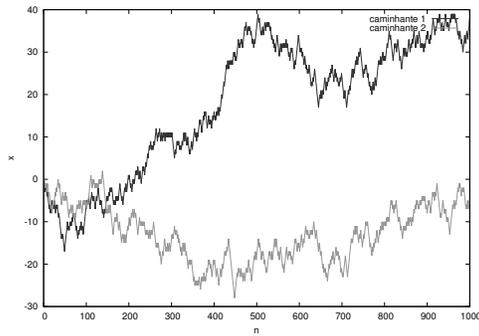


Figura 1: Simulação de passeio aleatório simples em uma dimensão. O gráfico mostra a posição x de dois caminhantes até $n=1000$ passos.

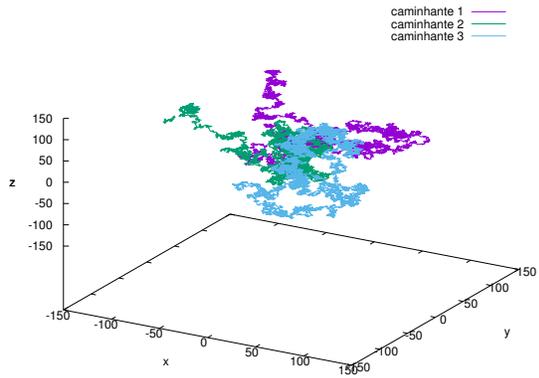


Figura 2: Simulação de passeio aleatório simples em 3 dimensões. São mostradas as posições de 3 caminhantes até $n=10000$ passos.

2.2 Passeio Aleatório Clássico Discreto

Vamos considerar o passeio aleatório simples em \mathbb{Z} (exemplo 2.1), com posição inicial $Z_0 = 0$. Se Z_n é a posição da partícula no tempo n , então $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, onde $Pr(X = 1) = p$ e $Pr(X = -1) = q$. Buscamos a probabilidade de a partícula estar na posição k após n passos, denominada $P_n(k) = P(Z_n = k)$. Definimos uma variável aleatória discreta $Y_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$, de modo que [47]:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i = +1, \\ 0, & \text{se } X_i = -1. \end{cases}$$

e usamos Y_i para definir:

$$T_n = \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{2}(Z_n + n)$$

Cada Y_i é um experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso p , e T_n representa o “número de sucessos” após n experimentos (definições A.1 e A.2). É

fácil ver que

$$P(Z_n = k) = P(T_n = \frac{1}{2}(k + n))$$

Como T_n é uma distribuição binomial, a probabilidade $P(Z_n = k) = P_n(k)$ é dada por

$$P_n(k) = \begin{cases} \frac{n!}{(\frac{n+k}{2})!(\frac{n-k}{2})!} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{se } (n+k) \text{ é par e } k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

Além disso, como $E[T_n] = np$ e $V[T_n] = npq$ (A.4), usando propriedades da média e da variância obtemos

$$E[Z_n] = E[2T_n - n] = n(p - q) \quad (4)$$

$$V[Z_n] = V[2T_n - n] = 4npq \quad (5)$$

Portanto, para o passeio aleatório clássico simétrico ($p = q = \frac{1}{2}$), o valor esperado é $\mu = 0$, e o desvio padrão é $\sigma = \sqrt{n}$.

Considere o caso do passeio aleatório simétrico para uma partícula que se encontra na origem no tempo $n = 0$. No tempo $n = 1$, a partícula pode estar ou na posição 1 com probabilidade $1/2$, ou na posição -1 com probabilidade $1/2$. Seguindo esse raciocínio, podemos confirmar os dados mostrados na tabela 1.

n/k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2		1/2				
2				1/4		1/2		1/4			
3			1/8		3/8		3/8		1/8		
4		1/16		1/4		3/8		1/4		1/16	
5	1/32		5/32		5/16		5/16		5/32		1/32

Tabela 1: Probabilidade de a partícula ser encontrada na posição k após n passos do passeio aleatório clássico simétrico em uma dimensão, assumindo posição inicial na origem. A probabilidade é zero nas células vazias.

É fácil ver que a probabilidade deve ser zero para $n + k$ ímpar ou $k \geq n$. Um

termo genérico não nulo dessa tabela é dado por (3) com $p = q = 1/2$:

$$P_n(k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{1}{2}(k+n)} \quad (6)$$

Para grandes valores de n fixo, a probabilidade em função da posição possui uma curva característica. Um exemplo dessa curva é mostrado no gráfico a seguir

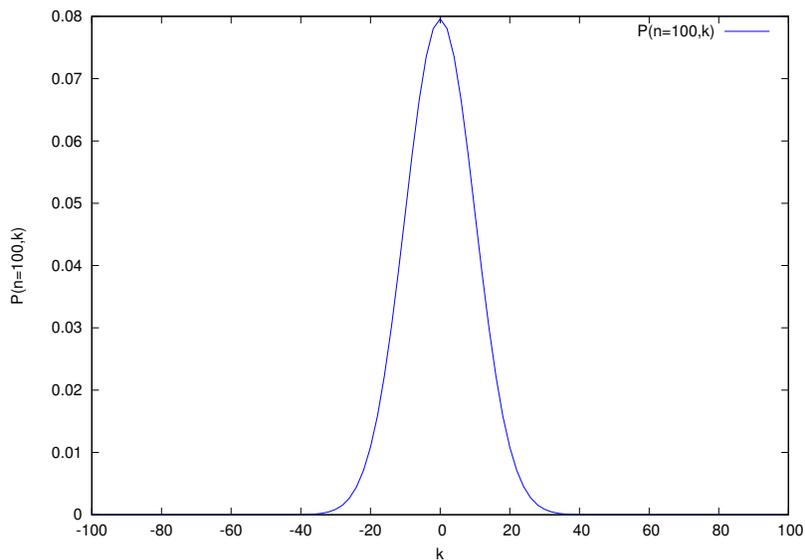


Figura 3: Distribuição de probabilidade do passeio aleatório clássico simétrico com posição inicial $k=0$ para $n=100$ passos. Somente as probabilidades correspondentes a posições pares são mostradas (posições ímpares têm, nesse caso, probabilidade igual a zero).

É possível mostrar que a distribuição $P_n(k)$ dada por (3) satisfaz a equação de recorrência

$$P_{n+1}(k) = pP_n(k-1) + qP_n(k+1) \quad (7)$$

Sabemos que, para n grande, a distribuição binomial $W_n(k)$ (com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$) possui o comportamento assintótico [55]

$$W_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

Esse resultado é um caso especial do teorema do limite central, conhecido como teorema de Moivre-Laplace [56]. Analogamente, utilizando (4) e (5), obtemos

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{8\pi npq}} e^{-\frac{[k-n(p-q)]^2}{8npq}} \quad (9)$$

Portanto, para grandes valores de n , a distribuição $P_n(k)$ pode ser aproximada pela distribuição Gaussiana.

2.3 Recorrência e Transiência

Considere um passeio aleatório em \mathbb{Z}^d com a posição da partícula no tempo n dada por X_n . Seja p_{ij} a probabilidade de a partícula passar do estado i para o estado j em um passo (**probabilidade de transição**). Se o passeio é simples, as p_{ij} são dadas por (2). Usaremos a partir de agora a notação $P_j(a) = Pr(a|X_0 = j)$.

Seja $T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ o tempo que a partícula leva para chegar em i pela primeira vez, e $\inf\{\emptyset\} = \infty$. T_i é chamado **tempo de primeira passagem de i** . A probabilidade de que, começando em i , a partícula irá atingir o estado j em algum momento é $f_{ij} = P_i(T_j < \infty)$. A probabilidade de a partícula retornar ao estado i , chamada **probabilidade de retorno**, é definida por $f_i = P_i(T_i < \infty)$.

O **tempo médio necessário para que a partícula retorne à i** é definido por [51]

$$\bar{T}_i = E_i(T_i) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_i(T_i = n) \quad (10)$$

Para $i = 0$, \bar{T}_0 é o **tempo médio de primeiro retorno à origem**. Para estados $i \in \mathbb{Z}^d$, se $P_i(X_n = i, \text{ para infinitos } n\text{'s}) = 1$, dizemos que i é **recorrente**, e se $P_i(X_n = i, \text{ para infinitos } n\text{'s}) = 0$, dizemos que i é **transiente**. Um passeio aleatório (ou sua matriz de transição) será dito recorrente se todo estado for recorrente.

O teorema seguinte fornece o critério básico para determinar recorrência e

transiência de estados em termos de f_i e p_{ii} . Observe que, pelo Teorema A.2, $P_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}$, a entrada (i, j) de P^n .

Teorema 2.1. [51] (**Cr terio de recorrência e transiência**)

- (i) Se $f_i = 1$, então i   recorrente e $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$
- (ii) Se $f_i < 1$, então i   transiente e $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

Portanto, dizemos que um passeio aleatório   **recorrente** se a soma $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ diverge, e **transiente** se $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ converge.

Exemplo 2.3 (Recorrência do passeio aleatório simples (SRW) em \mathbb{Z}).

Vamos considerar novamente o passeio aleatório simples nos inteiros. Seja $0 \leq p = 1 - q \leq 1$. A posi o da partícula no tempo n   dada por X_n , onde $Pr(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = p$, e $Pr(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = q$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

  fácil ver que $p_{00}^{(2n+1)} = 0$, e $p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Sabemos que, para grandes valores de n , $n!$ pode ser aproximado pela fórmula de Stirling [56]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n \tag{11}$$

Usando (11), após algumas manipula es algébricas obtemos

$$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \tag{12}$$

No caso simétrico, $p = q$ e o numerador em (12)   $(4pq)^n = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Então $p_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Por compara o com a série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$, temos que

$$\sum_n p_{00}^{(2n)} = \infty \quad (\text{para } p = q) \tag{13}$$

Entretanto, se $p \neq q$, então $4pq = r < 1$ e $p_{00}^{(2n)} \sim \frac{r^n}{\sqrt{\pi n}}$. Por compara o com a série $\sum_n x^n$, que converge se $|x| < 1$, obtemos

$$\sum_n p_{00}^{(2n)} < \infty \quad (\text{para } p \neq q) \quad (14)$$

Como a série $\sum_n p_{00}^n$ diverge para $p = q = 1/2$, concluímos que o passeio aleatório simétrico em uma dimensão é recorrente.

3 Passeio Aleatório Quântico

3.1 Introdução

Em analogia direta com o caso clássico discutido no capítulo anterior, poderíamos tentar definir o passeio quântico (em uma dimensão) da seguinte maneira: a cada passo de tempo, uma partícula se move, em superposição, para a direita e para a esquerda com a mesma amplitude. Entretanto, tal processo é fisicamente impossível em geral, conforme mostrou Meyer em [17]. A fim de construir um processo unitário com evolução não trivial, foi sugerido [4, 5] introduzir à partícula mais um grau de liberdade.

Considere uma partícula na reta dos números inteiros, com um grau de liberdade extra, i.e., um grau interno de liberdade (em certas referências, o termo “quiralidade” é empregado [4]), que assume dois possíveis valores. Podemos descrever um passeio realizado por essa partícula da seguinte maneira: a cada passo de tempo, o grau interno de liberdade passa por uma transformação unitária, e a partícula então se move de acordo com o novo grau interno de liberdade.

Seja \mathcal{H}_P o espaço de Hilbert gerado pelas posições da partícula, i.e., gerado pela base $\{|i\rangle : i \in \mathbb{Z}\}$. O espaço de Hilbert do sistema é dado pelo produto tensorial $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$, onde \mathcal{H}_C , chamado “espaço da moeda”, é o espaço de dimensão 2 gerado pela base $\Omega = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Um estado do sistema pode ser identificado como um vetor unitário $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ tal que $|\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |i\rangle$, onde $|\psi\rangle \in \Omega$ e $i \in \mathbb{Z}$. Considerando a notação usada em informação quântica, podemos identificar

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

A primeira parte do passeio quântico é a aplicação de um operador, chamado operador moeda C . Vamos considerar um operador moeda frequentemente utilizado: o operador Hadamard

$$C = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Na segunda parte do passeio, a translação do sistema pode ser descrita pela transformação unitária

$$S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_{i \in \mathbb{Z}} |i+1\rangle\langle i| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_{i \in \mathbb{Z}} |i-1\rangle\langle i| \quad (17)$$

Observe que $H|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$, $H|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ e S atua nos estados da base da seguinte maneira:

$$S(|\uparrow\rangle \otimes |i\rangle) = |\uparrow\rangle \otimes |i+1\rangle \quad (18)$$

$$S(|\downarrow\rangle \otimes |i\rangle) = |\downarrow\rangle \otimes |i-1\rangle. \quad (19)$$

Cada passo do passeio quântico consiste na aplicação do operador unitário

$$U = S \cdot (C \otimes I) \quad (20)$$

e o passeio de n passos pode ser definido pela transformação U^n . Escrevendo

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (21)$$

e considerando um estado inicial $|\phi_{in}\rangle = |\psi\rangle \otimes |0\rangle$, é fácil ver que [18]

$$U|\phi_{in}\rangle = R|\psi\rangle \otimes |1\rangle + L|\psi\rangle \otimes |-1\rangle, \quad (22)$$

e as probabilidades de, após um passo, encontrar a partícula nas posições $|-1\rangle$ e $|1\rangle$ são $\|L|\psi\rangle\|^2$ e $\|R|\psi\rangle\|^2$, respectivamente.

A fim de observar o comportamento do passeio quântico e analisar de que maneira ele se diferencia do passeio clássico, vamos realizar as iterações, sem mediadas intermediárias, por alguns passos. Consideramos nesse exemplo o estado inicial $|\phi_{in}\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle$. Os três primeiros passos podem ser escritos como

$$|\phi\rangle_1 = U|\phi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle)$$

$$|\phi\rangle_2 = U^2|\phi_{in}\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \otimes |2\rangle - (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle)$$

$$|\phi\rangle_3 = U^3|\phi_{in}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |3\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |1\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |-1\rangle - 2|\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |-3\rangle)$$

Continuando com as iterações e calculando as probabilidades, obtemos os dados resumidos na Tabela 2.

n/i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2		1/2				
2				1/4		1/2		1/4			
3			1/8		5/8		1/8		1/8		
4		1/16		5/8		1/8		1/8		1/16	
5	1/32		17/32		1/8		1/8		5/32		1/32

Tabela 2: Probabilidade de a partícula ser encontrada na posição i após n passos do passeio quântico em uma dimensão, com estado inicial $|\phi_{in}\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle$. A probabilidade é zero nas células vazias.

Esse exemplo mostra que as probabilidades no passeio quântico começam a se tornar diferentes daquelas no caso clássico a partir de $n = 3$ (compare esses resultados com a Tabela 1 da seção 2). Além disso, ao analisar a tabela acima notamos que a distribuição é assimétrica com um desvio para a esquerda. Essa assimetria se deve ao fato de que a moeda utilizada, i.e., o operador Hadamard, não trata as direções $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ igualmente.

Há duas maneiras de se obter uma distribuição simétrica: a primeira é começar

o passeio em um estado simétrico. Isso pode ser feito utilizando o estado inicial $|\phi_{sym}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ (como H não gera amplitudes complexas, as trajetórias de $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ serão, respectivamente, reais e imaginárias puras, não interferindo, assim, uma com a outra). A outra forma de se eliminar a assimetria do passeio é utilizar uma moeda mais simétrica:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

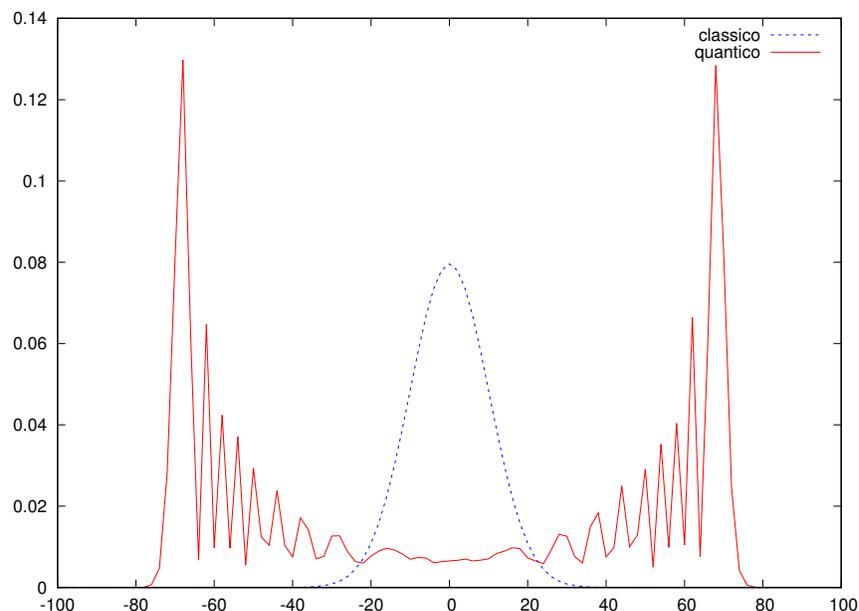


Figura 4: Distribuições de probabilidade dos passeios clássico (simétrico, com posição inicial 0), e quântico (com posição inicial simétrica) para 100 passos. Somente as probabilidades correspondentes a posições pares são mostradas (posições ímpares têm probabilidade nula).

Na Seção 2 mostramos que, para o passeio aleatório clássico, a variância é dada por $\sigma^2 = T$, onde T é o número de passos. Nesse caso, a distância esperada da origem é $\sigma = \sqrt{T}$. No caso do passeio aleatório quântico, é possível mostrar que $\sigma^2 \sim T^2$ - implicando $\sigma \sim T$ -, o que significa que o passeio quântico se propaga quadraticamente mais rápido. De fato, Konno [20] mostrou que $\frac{\sigma}{T} \rightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ para $T \rightarrow \infty$.

Uma análise assintótica do comportamento do passeio quântico foi feita por Nayak e Vishwanath [4], Ambainis et al [5], e Carteret et al [19]. Considere

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L(n, t) \\ \psi_R(n, t) \end{pmatrix} \quad (24)$$

o vetor das amplitudes de a partícula estar na posição n no tempo t , com grau interno de liberdade “R” ou “L” (ou na notação usada até aqui, \uparrow ou \downarrow). Seja

$$P(n, t) = p_L(n, t) + p_R(n, t) \quad (25)$$

a probabilidade de estar na posição n no tempo t . Se a partícula começa o passeio na origem com grau interno de liberdade “L”, as condições iniciais são $\Psi(0, 0) = (1 \ 0)^T$, e $\Psi(n, 0) = (0 \ 0)^T$ para $n \neq 0$. Utilizando análise de Fourier, Nayak e Vishwanath [4] obtiveram a seguinte solução para a evolução temporal do passeio de Hadamard:

$$\psi_L(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos(k)}{\sqrt{1 + \cos^2(k)}}\right) e^{-i(\omega_k t + kn)} \quad (26)$$

$$\psi_R(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2(k)}} e^{-i(\omega_k t + kn)}, \quad (27)$$

onde $\omega_k = \sin^{-1} \frac{\sin k}{\sqrt{2}} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Utilizando duas abordagens diferentes, Ambainis et al [5] mostraram que as probabilidades $p_L(n, t) = |\psi_L(n, t)|^2$ e $p_R(n, t) = |\psi_R(n, t)|^2$, para $n = \alpha t$, com $\alpha \in (-1/\sqrt{2} + \epsilon, 1/\sqrt{2} - \epsilon)$, onde ϵ é uma constante positiva, no limite $t \rightarrow \infty$ podem ser escritas como

$$p_L(n, t) \sim \frac{2(1 + \alpha)}{\pi(1 - \alpha)\sqrt{1 - 2\alpha^2 t}} \cos^2(-\omega t + \frac{\pi}{4}) \quad (28)$$

$$p_R(n, t) \sim \frac{2}{\pi\sqrt{1 - 2\alpha^2 t}} \cos^2(-\omega t + \frac{\pi}{4} - \rho), \quad (29)$$

onde $\omega = \alpha\rho + \theta$, $B = 2\alpha/(1 - \alpha)$, $\Delta = B^2 - 4(B + 1)$, $\rho = \arg(-B + \sqrt{\Delta})$,

$$\theta = \arg(B + 2 + \sqrt{\Delta}).$$

O gráfico a seguir apresenta uma comparação entre duas distribuições de probabilidade do passeio de Hadamard com estado inicial $|\downarrow\rangle \otimes |0\rangle$: uma obtida da solução exata, e outra da análise assintótica descrita acima.

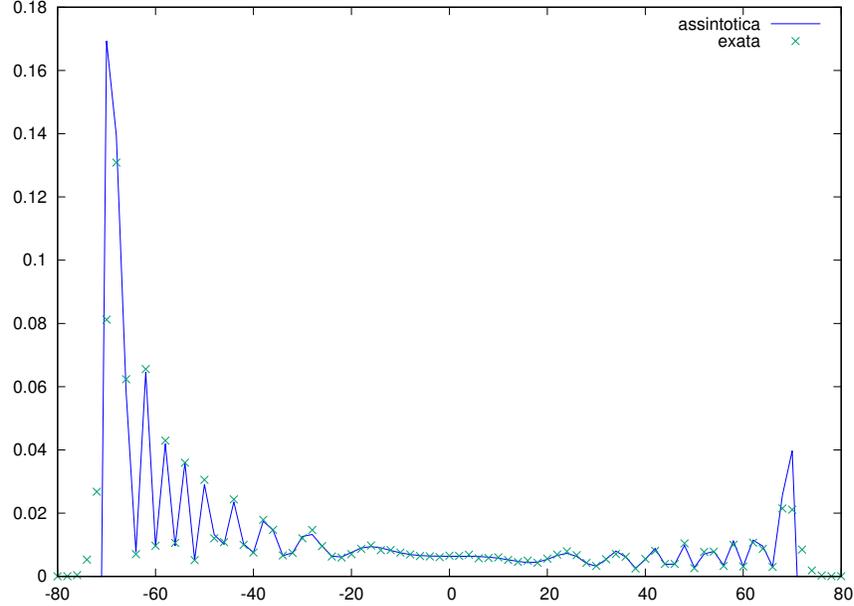


Figura 5: Comparação entre duas distribuições de probabilidade, uma obtida por integração numérica de (26) e (27), e outra do comportamento assintótico (28),(29). O número de passos é 100. Somente as probabilidades para pontos pares foram consideradas (as probabilidades são nulas para os pontos ímpares).

3.2 Recorrência e Monitoramento

Pela definição de recorrência e transiência de estados i de uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com matriz de transição P (definição A.4), a cadeia é recorrente se, com probabilidade 1, todo caminho retorna à posição inicial. Essa definição, em princípio, envolve uma medição do processo (a cada passo, devemos checar se a partícula retornou), e esse fato deve ser levado em conta ao se generalizar a noção de recorrência

para passeios quânticos.

Duas abordagens diferentes foram feitas a respeito da recorrência para sistemas quânticos de tempo discreto. Štefaňák, Jex e Kiss [21] propuseram um modelo no qual se evita medições explícitas a cada passo. Mais recentemente, foi sugerida por Grünbaum et al [23] a implementação de *monitoramento* na descrição da recorrência.

Nessa seção, vamos fazer uma breve descrição do caso clássico [23,51,52], e então discutir e comparar as duas noções de recorrência mencionadas acima. Concluímos com um exemplo que mostra que as duas abordagens não são equivalentes.

3.2.1 Caso clássico

Pólya [45] provou, em 1921, que somente em uma e duas dimensões o passeio aleatório simétrico simples é recorrente, retornando ao ponto inicial com probabilidade 1. Para passeios finitos e fechados, o teorema de Poincaré [46] garante a recorrência. Consideremos um passeio aleatório simétrico em um espaço infinito d -dimensional partindo da origem. A probabilidade de o caminhante retornar à origem é chamada número de Pólya. O passeio é dito recorrente se esse número é igual a 1, e transiente caso contrário.

O número de Pólya para passeios aleatórios clássicos pode ser expressado pela soma $\sum_n p_n$, onde $p_n = p_{00}^{(n)}$ é a probabilidade de retornar à origem em n passos. Além disso, mostraremos que o seu comportamento depende somente da convergência ou divergência dessa série (Teorema 2.1). De acordo com as notações e definições apresentadas na Seção 2.2, o número de Pólya é $f_0 = P_0(T_0 < \infty)$.

Considere um passeio aleatório clássico descrito pela cadeia de Markov com matriz de transição $P = (p_{xy})$, onde $x, y \in X$, e X é um espaço de estado contável. p_{xy} é a probabilidade de o caminhante ir de x a y em um passo, e portanto $p_{xy} \geq 0$ e $\sum_y p_{xy} = 1$. Da propriedade de Markov, temos que $p_{x,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{n-1},y}$ é a probabilidade de ir de x a y passando pelos pontos intermediários x_1, \dots, x_{n-1} . A probabilidade

de retornar à origem em n passos é dada por

$$p_n = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} p_{0,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{n-1},0} \quad (30)$$

Estamos interessados em saber a probabilidade q_n de retornar a 0 pela primeira vez no n -ésimo passo, ou seja, consideramos a soma anterior com a condição de que nenhum passo intermediário é 0. Portanto,

$$q_n = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1} \neq 0} p_{0,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{n-1},0}. \quad (31)$$

Como (31) é uma soma sobre um subconjunto de (30), podemos reescrever (30) como

$$p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}, \quad (32)$$

onde k é o maior índice tal que $x_k = 0$, e consideramos $p_0 = 1$, e $q_0 = 0$. Introduzindo as funções geradoras

$$\hat{p}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad e \quad \hat{q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n, \quad (33)$$

e somando em (32), temos

$$\begin{aligned} \hat{p}(z) &= p_0 z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \\ &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \right) z^n \\ &= 1 + \hat{p}(z) \hat{q}(z). \end{aligned} \quad (34)$$

Portanto,

$$\hat{q}(z) = 1 - \frac{1}{\hat{p}(z)} \quad (\text{equação de renovação}). \quad (35)$$

A probabilidade de retornar à origem é dada por

$$R = \sum_n q_n = \hat{q}(1). \quad (36)$$

Usando o resultado (35) com $z = 1$, podemos escrever

$$R = 1 - \frac{1}{\hat{p}(1)} = 1 - \frac{1}{\sum_n p_n}. \quad (37)$$

Portanto, o passeio clássico é recorrente se e somente se $R = 1$, ou seja, $\sum_n p_n = \infty$.

3.2.2 Recorrência sem monitoramento

O critério de recorrência proposto por Štefaňák, Jex e Kiss [21] consiste em estender o conceito de número de Pólya descrito acima para passeios quânticos por meio da expressão

$$R_{SJK} = 1 - \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n). \quad (38)$$

O procedimento sugerido por [21] é o seguinte: “Pegue um sistema e meça a posição do caminhante após um passo na origem, então descarte o sistema. Pegue um segundo sistema identicamente preparado, e deixe evoluir por dois passos, meça na origem, então descarte o sistema. Continue similarmente para um tempo de evolução arbitrariamente longo. A probabilidade de o caminhante ser encontrado na origem em uma única série de tais medidas é o número de Pólya.”

No k -ésimo experimento, a partícula não é encontrada na origem com probabilidade $1 - p_k$. Como os experimentos são independentes, a probabilidade de não se encontrar a partícula nos n primeiros experimentos é dada pelo produto

$$\bar{P}_n = \prod_{k=1}^n (1 - p_k), \quad (39)$$

e a probabilidade do evento complementar

$$P_n = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - p_k) \quad (40)$$

é a probabilidade de encontrar a partícula na origem pelo menos uma vez. Portanto, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (40), obtemos a expressão (38), que é a definição de número de Pólya para passeios quânticos.

Como $\sum_n p_n = \infty$ é equivalente a $\prod_n (1 - p_n) = 0$ [22], a equação (38) leva ao mesmo critério de recorrência com relação a p_n do passeio clássico. Então, se $\sum_n p_n$ converge, o passeio é transiente; caso contrário, $R_{SJK} = 1$ e o passeio é recorrente.

3.2.3 Recorrência monitorada

Em contraste à [21], a noção de recorrência para processos quânticos de tempo discreto sugerida por Grünbaum et al [23] se baseia na introdução de um tipo de monitoramento, após cada passo, para checar o retorno do sistema. O procedimento descrito por [23] é o seguinte: começando em $\phi_0 = \phi$, um passo consiste na transformação unitária $\phi_n \rightarrow U\phi_n$ seguida pela medida da projeção $|\phi\rangle\langle\phi|$. Se isso dá um resultado positivo (para o qual a probabilidade é $|\langle\phi|U|\phi_n\rangle|^2$) o experimento acaba. Caso contrário, o sistema é deixado no estado $\phi_{n+1} = c_{n+1}(\mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)U\phi_n$, onde escolhemos c_{n+1} tal que $\|\phi_{n+1}\| = 1$.

O estado ϕ_n será sempre proporcional a $\tilde{U}^n\phi$, onde \tilde{U} é dado por

$$\tilde{U} = (\mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)U. \quad (41)$$

Como ϕ_n deve ser unitário, podemos escrever $\phi_n = \tilde{U}^n\phi/\|\tilde{U}^n\phi\|$. A **probabilidade de sobrevivência**, i.e., a probabilidade de a partícula não ser encontrada até o passo n é dada pelo fator de normalização $s_n = \|\tilde{U}^n\phi\|^2$

A probabilidade de detecção no passo n é $|\langle\phi|U|\phi_{n-1}\rangle|^2$. Usando $\phi_{n-1} = \tilde{U}^{n-1}\phi/\|\tilde{U}^{n-1}\phi\|$, podemos expressar a **probabilidade de primeira chegada** na forma $|a_n|^2$, onde a_n é chamada **amplitude de primeira chegada**,

$$a_n = \langle \phi | U \tilde{U}^{n-1} \phi \rangle, \quad n \geq 1. \quad (42)$$

A **probabilidade de retorno** é definida por

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2. \quad (43)$$

A partir da observação de que a probabilidade total para eventos até o n -ésimo passo é dada pela soma

$$1 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + \|\tilde{U}^n \phi\|^2, \quad (44)$$

podemos escrever a probabilidade de retorno como

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{U}^n \phi\|^2 \quad (45)$$

O par (U, ϕ) é dito **recorrente** se ϕ é recorrente com respeito a U , ou seja, se $R = 1$, e **transiente** caso contrário.

3.2.4 Exemplo

Vamos examinar um exemplo que evidencia a diferença entre as noções de recorrência propostas por Štefaňák, Jex e Kiss [21] e por Grünbaum et al [23]. Sejam $|*\rangle$ e $|x\rangle$, $x \in \mathbb{Z}$ vetores da base do espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$. O operador unitário é definido por $U|*\rangle = |*\rangle$ e $U|x\rangle = |x+1\rangle$. Consideremos o estado inicial normalizado $\phi = \alpha|*\rangle + \beta|0\rangle$. É fácil ver que $\langle \phi | U^n | \phi \rangle = |\alpha|^2, \forall n \geq 1$. Como $\langle \phi | U^0 | \phi \rangle = 1$, podemos escrever

$$\langle \phi | U^n | \phi \rangle = |\alpha|^2 (\delta_{n,0} - 1) + \delta_{n,0}. \quad (46)$$

Aplicando o operador $\tilde{U} = (\mathbf{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)U$ ao estado $|\phi\rangle$ n vezes, obtemos

$$\tilde{U}^n|\phi\rangle = \alpha|\beta|^{2n}|*\rangle + \beta|n\rangle - \beta|\alpha|^2 \sum_{k=1}^n |\beta|^{2(k-1)}|n-k\rangle. \quad (47)$$

Agora, podemos calcular $s_n = \|\tilde{U}^n\phi\|^2$:

$$s_n = \alpha^2\beta^{4n} + \beta^2 + \beta^2\alpha^4 + \sum_{k=1}^n \beta^{4(k-1)}, \quad (48)$$

onde $\alpha \equiv |\alpha|$ e $\beta \equiv |\beta|$. Como $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, e $\sum_{k=1}^n x^{4k} = \frac{x^4(x^{4n}-1)}{x^4-1}$ para $|x| < 1$, após algumas simplificações algébricas obtemos

$$s_n = \frac{2\beta^2}{1+\beta^2} + \frac{\alpha^2\beta^{4n}}{1+\beta^2}. \quad (49)$$

Como $|\beta| < 1$, o segundo termo de (49) tende a 0 para $n \rightarrow \infty$. Assim, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{U}^n\phi\|^2 = \frac{2\beta^2}{1+\beta^2}. \quad (50)$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{U}^n\phi\|^2 = 0 \iff \beta = 0$, e de acordo com (45), (U, ϕ) é recorrente se $\beta = 0$. Portanto, conforme a definição de Grünbaum et al [23], o único caso recorrente é para $\phi = |*\rangle$.

Por outro lado,

$$p_n = |\langle\phi|U^n|\phi\rangle|^2 = |\alpha|^4, \quad \forall n > 1. \quad (51)$$

Como a soma $\sum_n p_n$ converge somente para $\alpha = 0$ e diverge para qualquer outro valor de α , então $R_{SJK} = 1$ para todo $\alpha \neq 0$. Portanto, segundo a definição de Štefaňák, Jex e Kiss [21], o único caso transiente é para $\alpha = 0$, ou seja, $\phi = e^{i\theta}|0\rangle$.

3.3 Caracterização Espectral da Recorrência

Nesta seção faremos um breve desenvolvimento técnico que irá culminar em uma expressão simples para se calcular amplitudes de probabilidade (eq. (64)). Vamos considerar um processo quântico em tempo discreto cuja evolução é descrita pelo operador unitário U em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . A definição de recorrência proposta em [23] depende somente de U e do estado inicial unitário $\phi \in \mathcal{H}$. A medida de probabilidade μ no círculo unitário $S_1 = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$ é definida em termos da medida espectral E de U :

$$\mu(du) = \langle \phi | E(du) | \phi \rangle. \quad (52)$$

Podemos caracterizar o sistema pelos momentos $\mu_n = \int \mu(du) u^n$ de μ , que são dados por

$$\mu_n = \langle \phi | U^n | \phi \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (53)$$

Vamos utilizar as seguintes funções para caracterizar μ : **função momento geradora** (ou **função de Stieltjes**)

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n = \int \frac{\mu(du)}{1 - uz}, \quad (54)$$

e a **função de Schur**

$$f(z) = \frac{1 - \overline{\hat{\mu}(z)}}{z \hat{\mu}(z)}, \quad (55)$$

onde $\overline{\hat{\mu}(z)} = \overline{\hat{\mu}(\bar{z})}$.

Temos interesse em determinar as probabilidades de sobrevivência $s_n = \|\tilde{U}^n \phi\|^2$ no limite $n \rightarrow \infty$ e assim, de (45) obter $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$, onde $a_n = \langle \phi | U \tilde{U}^{n-1} | \phi \rangle$ é a amplitude de chegada. A fim de obter a função geradora para a_n , começamos com a **função geradora para o operador \tilde{U}^n** , onde $\tilde{U} = (\mathbf{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)U$:

$$\tilde{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{U}^n = (\mathbf{1} - z\tilde{U})^{-1}, \quad (56)$$

que pode ser relacionada com $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n U^n = (\mathbf{1} - zU)^{-1}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
G(z) - \tilde{G}(z) &= (\mathbf{1} - z\tilde{U})^{-1}((\mathbf{1} - z\tilde{U}) - (\mathbf{1} - zU))(\mathbf{1} - zU)^{-1} \\
&= \tilde{G}(z)(\mathbf{1} - z(\mathbf{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)U - (\mathbf{1} - zU))G(z) \\
&= z\tilde{G}(z)|\phi\rangle\langle\phi|UG(z) \\
G(z) &= \tilde{G}(z)(\mathbf{1} + z|\phi\rangle\langle\phi|UG(z))
\end{aligned} \tag{57}$$

Aplicando ao estado ϕ , temos

$$G(z)\phi = \tilde{G}(z)\phi(1 + z\langle\phi|UG(z)|\phi\rangle) \tag{58}$$

$$\tilde{G}(z)\phi = \frac{G(z)\phi}{1 + z\langle\phi|UG(z)|\phi\rangle} \tag{59}$$

Como $U = \int uE(du) \Rightarrow \langle\phi|U|\phi\rangle = \int u\mu(du)$, o denominador na última equação pode ser simplificado para

$$1 + z\langle\phi|UG(z)|\phi\rangle = \int \mu(du)(1 + \frac{zu}{1 - zu}), \tag{60}$$

e comparando com o lado direito da equação (54), temos que

$$1 + z\langle\phi|UG(z)|\phi\rangle = \hat{\mu}(z). \tag{61}$$

Podemos então reescrever (59) como

$$\tilde{G}(z)\phi = \frac{G(z)\phi}{\hat{\mu}(z)}. \tag{62}$$

Utilizando (56), (62) e (61), obtemos uma **função geradora para as ampli-**

tudes de chegada

$$\begin{aligned}
\hat{a}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi | U \tilde{U}^n | \phi \rangle z^{n+1} \\
&= z \langle \phi | U \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}^n z^n \right) | \phi \rangle \\
&= z \langle \phi | U \tilde{G}(z) | \phi \rangle \\
&= \frac{\hat{\mu}(z) - 1}{\hat{\mu}(z)} \\
&= z \bar{f}(z)
\end{aligned} \tag{63}$$

Então,

$$\boxed{\hat{a}(z) = z \bar{f}(z)} \tag{64}$$

Portanto, a função geradora para as amplitudes de chegada é relacionada com a função de Schur (55). Em analogia com a equação (35) para o caso clássico, temos

$$\hat{a}(z) = 1 - \frac{1}{\hat{\mu}(z)} \quad (\text{equação de renovação}). \tag{65}$$

3.3.1 Critério de recorrência

Podemos agora utilizar (64) para determinar, a partir da condição de recorrência (45), i.e., $\sum_n |a_n|^2 = 1$, um critério de recorrência em termos da função de Schur f . Seja $z = r e^{it}$, onde fixamos $r < 1$. Consideramos a série

$$\hat{a}(r e^{it}) = \sum_n r^n a_n e^{itn} \tag{66}$$

como uma série de Fourier. Do teorema de Plancherel (Teorema B.1), temos

$$\begin{aligned}\sum_n r^{2n}|a_n|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{a}(re^{it})|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |re^{it}\bar{f}(re^{it})|^2 dt.\end{aligned}\tag{67}$$

Portanto,

$$\sum_n r^{2n}|a_n|^2 = \frac{r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{-it})|^2 dt.\tag{68}$$

Para que a condição $\sum_n |a_n|^2 = 1$ seja satisfeita, o limite da expressão (68) para $r \rightarrow 1$ deve ser igual a 1. Logo, devemos ter $|f(re^{it})| \rightarrow 1$ para quase todo t , i.e., a função f deve ser **interna** (inner). Podemos, então, enunciar o seguinte teorema, que é parte do Teorema 1 em [23]:

Teorema 3.1. *Sejam U um operador unitário e ϕ um vetor inicial. Então, (U, ϕ) é recorrente se e somente se a função de Schur f é interna.*

Veremos um exemplo que faz uso deste resultado na Seção 3.4.1.

3.4 Tempo Médio de Primeiro Retorno

Considere um par recorrente (U, ϕ) com probabilidades de primeira chegada $|a_n|^2$. O tempo médio de primeiro retorno é dado por

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n.\tag{69}$$

A função de Schur f é uma função racional que deve ter módulo 1 no círculo unitário. Então, a função geradora $\hat{a}(e^{it}) \equiv g(t)$ das amplitudes de chegada (64)

$$g(t) = e^{it}\bar{f}(e^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{itn}\tag{70}$$

tem módulo 1 para todo t real. Portanto, $g(t)$ dá voltas em torno da origem um número $\omega(g)$ inteiro de vezes quando t varia de 0 a 2π . Localmente, podemos escrever $g(t) = e^{i\gamma(t)}$. A velocidade angular é dada por

$$\frac{\partial\gamma(t)}{\partial t} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \ln(g(t)), \quad (71)$$

e como $|g(t)| = 1$, podemos escrever

$$\frac{\partial\gamma(t)}{\partial t} = \overline{g(t)} \frac{1}{i} \frac{\partial g(t)}{\partial t}. \quad (72)$$

Integrando a velocidade angular entre 0 e 2π , obtemos $2\pi\omega(g)$:

$$\omega(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \overline{g(t)} \frac{1}{i} \frac{\partial g(t)}{\partial t}. \quad (73)$$

De (70), temos que $\partial_t g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} i n a_n e^{itn}$. Portanto, os coeficientes de Fourier de $g(t)$ e de $\frac{1}{i} \partial_t g(t)$ são, respectivamente, a_n e na_n , e podemos usar o Teorema de Plancherel (Teorema B.1) para obter

$$\omega(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} (na_n) = \tau, \quad (74)$$

mostrando que o tempo médio de primeiro retorno τ deve ser um inteiro! O raciocínio desenvolvido aqui, e que leva à (74), segue [23]. Concluimos que

Teorema 3.2. *Sejam U um operador unitário e ϕ um vetor inicial. Então, o tempo médio de primeiro retorno $\tau = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n$ é ou um inteiro positivo, ou infinito.*

3.4.1 Exemplo

Vamos considerar um passeio quântico em duas dimensões, no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ gerado pela base $|x\rangle \otimes |\alpha\rangle$, $x \in \mathbb{C}^2$, $\alpha \in \{\uparrow, \downarrow\}$. Sejam $U : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ um operador unitário e $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^4$ um estado inicial $|\psi\rangle = (1 \ 0)^T \otimes |\uparrow\rangle$ dados por

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

Sejam $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ a projeção do estado inicial, e $Q = I - P$, onde I é a matriz identidade. A função geradora das amplitudes de chegada é dada por

$$\begin{aligned} \hat{a}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} PU\tilde{U}^{n-1}Pz^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} PU(QU)^n Pz^{n+1} \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} PU(zQU)^n P \\ &= zPU(I - zQU)^{-1}P \end{aligned} \quad (76)$$

Portanto, a função de Schur $\bar{f}(z) = PU(I - zQU)^{-1}P$ é

$$\bar{f}(z) = \begin{pmatrix} \frac{-1+2z}{-2+z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(re^{-it})|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-1+2re^{-it}}{-2+re^{-it}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

Mas note que $|\frac{-1+2e^{-it}}{-2+e^{-it}}| = 1$ para todo t real. Portanto, no limite $r \rightarrow 1$, de acordo com (68) temos

$$\sum_n |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{-it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 1. \quad (78)$$

Então $R = 1$ e o passeio é recorrente. Utilizando as amplitudes de chegada $a_n = \langle \psi | U(QU)^{n-1} | \psi \rangle$, podemos determinar o tempo médio de primeiro retorno dado por (69):

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n = 2. \quad (79)$$

Consideremos agora um outro estado inicial, $|\phi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \otimes |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nesse caso, a função geradora $\hat{a}(z)$ é dada por (76), com $P = P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ e $Q = Q_\phi = I - P_\phi$, e a função de Schur $\bar{f}(z) = P_\phi U(I - zQ_\phi U)^{-1} P_\phi$ é

$$\bar{f}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{4z^3 - 2z^2 - z + 2}{2z^3 - z^2 - 2z + 4} & 0 & \frac{1}{2} \frac{4z^3 - 2z^2 - z + 2}{2z^3 - z^2 - 2z + 4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{4z^3 - 2z^2 - z + 2}{2z^3 - z^2 - 2z + 4} & 0 & \frac{1}{2} \frac{4z^3 - 2z^2 - z + 2}{2z^3 - z^2 - 2z + 4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Note que $|\frac{1}{2} \frac{(4z^3 - 2z^2 - z + 2)\sqrt{2}}{2z^3 - z^2 - 2z + 4}|^2 + |\frac{1}{2} \frac{(4z^3 - 2z^2 - z + 2)\sqrt{2}}{2z^3 - z^2 - 2z + 4}|^2 = 1$, $\forall z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{-it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 1. \quad (81)$$

Então, $R = \sum_n |a_n|^2 = 1$, e (U, ϕ) também é recorrente. Agora, calculamos o

tempo médio de primeiro retorno

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n = 4 \quad (82)$$

onde $a_n = \langle \phi | U(Q_\phi U)^{n-1} | \phi \rangle$, e observamos que novamente τ é um número inteiro.¹

¹Cálculos auxiliares foram realizados com Maple[®]. O tempo médio de primeiro retorno τ também pode ser calculado a partir de uma abordagem diferente daquela apresentada, utilizando matrizes de densidade.

4 Aplicações e Conclusão

Passeios aleatórios clássicos possuem diversas aplicações em ciência da computação, sendo frequentemente utilizados na construção e análise de algoritmos randomizados. Dentre os problemas aos quais são aplicados, estão conectividade de grafos e amplificação de probabilidade [50]. Além disso, a solução mais eficiente para o problema 3-SAT baseia-se no tempo de chegada de um passeio aleatório [30]. Similarmente, passeios quânticos são úteis para se desenvolver algoritmos [3, 13].

Para o passeio aleatório clássico no hipercubo d -dimensional [3], o tempo esperado de chegada T até o vértice oposto é $T \sim 2^d$. Kempe [31] mostrou que, no caso do passeio quântico discreto, esse tempo é de ordem polinomial em d . Observa-se, portanto, uma separação de ordem exponencial entre os comportamentos dos passeios clássico e quântico quanto aos tempos de chegada. Utilizando essa propriedade, diversos algoritmos foram desenvolvidos [2, 32, 33].

Childs et al apresentaram em [33] um problema que pode ser eficientemente resolvido utilizando passeios quânticos, e que nenhum algoritmo clássico é capaz de resolver mais rápido. Passeios quânticos são utilizados também em algoritmos de busca [34–38]. Szegedy [39] desenvolveu uma teoria para quantizar algoritmos clássicos baseados em passeios aleatórios, e generalizou alguns resultados anteriores [34, 38] para grafos arbitrários. Para uma determinada classe de cadeias de Markov, o autor mostrou em [39] que os algoritmos quânticos são quadraticamente mais rápidos que os algoritmos clássicos correspondentes.

O uso de passeios quânticos contínuos para a simulação de um processo quântico foi proposto Mohseni et al [40]. Os autores desenvolveram em [40] uma teoria para estudar a influência de efeitos quânticos na dinâmica de transporte de energia, com o objetivo de modelar processos fotossintéticos. Passeios quânticos foram realizados experimentalmente em diversos sistemas, por exemplo com átomos [41], íons [42], e fótons [43, 44]. Em [44], foi descrita a implementação de um passeio quântico unidimensional com moeda em redes óticas, que corresponderia ao análogo quântico de

um tabuleiro de Galton (Quincunx).

Tempos de chegada de passeios quânticos discretos foram estudados recentemente por Krovi e Brun [25, 26]. Foi apresentada em [25] uma definição de tempo de chegada similar à noção de recorrência de [23], onde medidas são realizadas a cada passo de tempo para verificar se a partícula chegou ou não. Os autores mostraram [25, 26] que passeios quânticos podem apresentar tempos de chegada infinitos, e encontraram uma condição suficiente baseada na degenerescência do operador evolução. Varbanov et al [27] provaram que tempos de chegada infinitos também ocorrem no caso de passeios quânticos contínuos.

A definição de tempo de chegada apresentada em [27] utiliza medidas do passeio em tempos aleatórios, de acordo com um processo de Poisson com parâmetro λ . Os autores apresentaram condições para a existência de tempos de chegada infinitos, e discutiram a conexão entre eles e a simetria do grafo. Além disso, foi estudada a dependência dos tempos de chegada em relação ao parâmetro λ . O esquema de medida utilizado é equivalente a realizar um determinado tipo de medida fraca em intervalos de tempo frequentes [27].

A noção de recorrência monitorada apresentada em [23] (Seção 3.2.3) foi estendida para subespaços de dimensão finita por Bourgain et al [24], e diferenças importantes entre recorrência de estado e subespaço foram analisadas. Sinkovicz et al [28] estudaram sistemas quânticos com dinâmicas dissipativas (canais quânticos) em espaços de Hilbert de dimensão finita. Eles provaram que o tempo de primeiro retorno no caso de canais quânticos unitais também é um inteiro, generalizando o resultado obtido em [23] (Teorema 3.2).

Direções futuras de estudo incluem a descrição de funções de primeiro retorno para sistemas de dimensão infinita, onde [24] é uma referência básica, bem como o estudo de tempos de primeira visita (casos finito e infinito). Este último aspecto consiste de elemento básico para a construção de estatísticas de partículas se deslocando em grafos no caso clássico. Portanto, nos parece que esta é uma promissora direção de estudo no contexto quântico se fizermos uso de uma análise semelhante a que é descrita neste trabalho.

Apêndice A Probabilidade e Cadeias de Markov

Esta revisão segue [47, 51, 54–56]. Considere um experimento com espaço amostral S . Uma **variável aleatória** é uma função real $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ que associa valores reais a cada um dos possíveis resultados do experimento. Uma **variável aleatória discreta** é uma variável aleatória cuja imagem é um conjunto finito ou contável.

Sejam X uma variável aleatória discreta e S o espaço amostral correspondente (i.e., o conjunto de todos os valores possíveis de X). Uma **distribuição de probabilidade** (também chamada função de distribuição) para X é uma função real p com domínio igual a S e que satisfaz: i) $p(x_i) \geq 0, \forall x_i \in S$ e ii) $\sum_{x_i \in S} p(x_i) = 1$. Para um subconjunto $A \subset S$, a probabilidade de A é definida como $p(A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$. Os números $p(x_i)$ representam a probabilidade $p(x_i) = Pr(X = x_i) = P(X = x_i)$ associada a cada resultado $x_i \in A$.

Seja $p(x_i)$ a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $X : S \rightarrow A \subset \mathbb{R}$. O **valor esperado** de X , também chamado de média μ , é definido por

$$E(X) = \sum_{x_i \in S} x_i p(x_i) \quad (\text{A.1})$$

se a soma convergir absolutamente. A **variância** de X , também chamada σ^2 , é definida por

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i) \quad (\text{A.2})$$

Exemplo A.1. [47] (**Distribuição de Bernoulli**) A distribuição de Bernoulli $B(\theta)$ é uma função de distribuição que descreve experimentos com somente dois possíveis resultados, a saber: sucesso, com probabilidade θ , e fracasso, com probabilidade $1 - \theta$ (chamados experimentos de Bernoulli). Por convenção, se X é $B(\theta)$, então $X = 1$ se o resultado é sucesso e $X = 0$ se o resultado é fracasso.

É fácil ver que, para a distribuição de Bernoulli, o valor esperado e a variância

são dados por

$$\mu = \theta \quad e \quad \sigma^2 = \theta(1 - \theta) \quad (\text{A.3})$$

Exemplo A.2. [47] (**Distribuição Binomial**) Seja B uma variável aleatória discreta que conta o número de sucessos em uma sequência de n experimentos de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p e probabilidade de fracasso $q = 1 - p$. A distribuição binomial com parâmetros n e p , denominada $Bin(n, p)$, é a distribuição de probabilidade dessa variável aleatória B . A probabilidade de obter r sucessos em n experimentos é dada por $W_n(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$, onde r pode assumir qualquer valor em $(1, 2, \dots, n)$, e $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ é o coeficiente binomial.

Podemos mostrar que se $Y_n = Bin(n, p)$, então o valor esperado e a variância são

$$E[Y_n] = \mu = np \quad e \quad V[Y_n] = \sigma^2 = npq \quad (\text{A.4})$$

Um **processo estocástico** consiste em uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t\}$ onde X_t é a medida, no tempo t , de uma determinada propriedade de um sistema não determinístico [54]. Se $t \in \mathbb{N}$, então $\{X_t\}$ é um processo estocástico discreto, e se $t \in \mathbb{R} \cup \{0\}$, o processo é contínuo.

Seja S um conjunto contável. Cada elemento desse conjunto $i \in S$ é chamado estado, e S é chamado espaço de estado. Uma matriz $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ é dita (linha) estocástica se $\sum_j p_{ij} = 1, \forall i, 0 \leq p_{ij} \leq 1$. Um vetor v com componentes $v_i, i = 0, 1, 2, \dots$ é chamado **vetor (ou distribuição) de probabilidade** se $\sum_i v_i = 1, v_i \geq 0$. Assim, a matriz P é linha (coluna) estocástica se cada linha (coluna) é uma distribuição [51].

Em geral, escrevemos $(X_n)_{n \geq 0}$ para denotar uma sequência de variáveis aleatórias (processo discreto se $n \in \mathbb{Z}$, e contínuo se $n \in \mathbb{R}$).

Definição A.1. [51] (**Cadeia de Markov**) Dizemos que um processo estocástico $(X_n)_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov com distribuição inicial λ e matriz de transição P se

(i) $P(X_0 = i) = \lambda_i$ (X_0 tem distribuição λ);

$$(ii) \quad \begin{aligned} Pr(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) \\ = Pr(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) = p_{i_{n-1}i_n} \end{aligned}$$

(Se $X_n = i$, para $n \geq 0$, então X_{n+1} tem distribuição $(p_{ij} : j \in S)$, e é independente de X_0, X_1, \dots, X_{n-1})

Dizemos que $(X_n)_{n \geq 0}$ é *Markov*(λ, P).

Se a cadeia está no estado i , o elemento p_{ij} da matriz de transição dá a probabilidade de passar para o estado j (**probabilidade de transição**). Essa probabilidade é fixa e não depende dos estados anteriores (depende somente do estado atual).

Teorema A.1. [51] Um processo estocástico $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ é *Markov*(λ, P) se e somente se

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_N = i_N) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{N-1} i_N}$$

para todo $i_0, i_1, \dots, i_N \in S$

Definição A.2. [51] Uma distribuição de probabilidade **estacionária** é uma distribuição $\pi = (\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n)$ tal que $\pi P = \pi$.

Escrevemos $\delta_i = (\delta_{ij} : j \in S)$, onde δ_{ij} é a função delta de Dirac.

Usaremos a seguinte notação: $P_i(A) = P(A \mid X_0 = i) = Pr(A \mid X_0 = i)$

Teorema A.2. [51] Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ *Markov*(λ, P). Então, para todo $n, m \geq 0$,

a) $Pr(X_n = j) = (\lambda P^n)_j$

b) $P_i(X_n = j) = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i) = p_{ij}^{(n)}$,

onde $p_{ij}^{(n)} = (P^n)_{ij}$ é a entrada (i, j) da matriz estocástica P^n .

Definição A.3. [51] Dizemos que um estado i **conduz** a j e escrevemos $i \rightarrow j$ se $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 0$. Dizemos que i se **comunica** com j , e escrevemos $i \leftrightarrow j$ se $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$.

A **classe comunicante** de um estado $i \in S$ é o conjunto $\{j \in S : i \leftrightarrow j\}$, i.e., o conjunto formado pelos estados que se comunicam com i . Uma classe comunicante B é **aberta** se existe um estado $j \in B$ e um estado $k \notin B$ tal que $j \rightarrow k$. Caso contrário, dizemos que B é uma classe **fechada**. Um estado i é dito absorvente se $\{i\}$ for uma classe fechada. Uma cadeia de Markov é chamada **irredutível** se consiste em somente uma classe comunicante [51].

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ *Markov*(λ, P), e $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)\}$ o espaço de todos os caminhos possíveis. O **tempo de passagem** (ou tempo de chegada) de um subconjunto $A \subset S$ é a variável aleatória $\tau^A : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\tau^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} \quad (\text{A.5})$$

e se A é o conjunto vazio, definimos $\tau^A = \infty$.

A probabilidade de que $(X_n)_{n \geq 0}$, começando em i , irá atingir A em algum momento é

$$h_i^A = P_i(\tau^A < \infty) \quad (\text{A.6})$$

Se A é uma classe fechada, h_i^A é chamada probabilidade de absorção. O tempo médio para $(X_n)_{n \geq 0}$ atingir A é

$$k_i^A = E_i(\tau^A) = \sum_{n < \infty} n P_i(\tau^A = n) + \infty \cdot Pr(\tau^A = \infty) \quad (\text{A.7})$$

O **tempo de primeira passagem** de um estado i é a variável aleatória definida por [51]

$$T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\} \quad (\text{A.8})$$

e a **probabilidade de retorno** é definida por

$$f_i = P_i(T_i < \infty) \quad (\text{A.9})$$

Definição A.4. [51] (**Recorrência e transiência de estados**) Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com matriz de transição P .

Um estado i é dito recorrente se $P_i(X_n = i, \text{ para infinitos } n\text{'s}) = 1$, e transiente, se

$P_i(X_n = i, \text{ para infinitos } n\text{'s}) = 0$.

O teorema seguinte estabelece critérios para determinar a recorrência ou transiência de estados em termos da probabilidade de retorno e das probabilidades de transição.

Teorema A.3. [51] **(Critério de recorrência e transiência)**

- (i) Se $P_i(T_i < \infty) = 1$, então i é recorrente e $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$
- (ii) Se $P_i(T_i < \infty) < 1$, então i é transiente e $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

Em particular, todo estado é ou recorrente ou transiente.

Definição A.5. [51] Se i é um estado é recorrente, e se $m_i := E_i(T_i) < \infty$, dizemos que i é **recorrente positivo**. Caso contrário, i é dito **recorrente nulo**.

Teorema A.4. [51] Seja P uma cadeia irredutível. São equivalentes:

- (i) Todo estado é recorrente positivo
- (ii) Algum estado é recorrente positivo
- (iii) P tem uma distribuição de probabilidade invariante $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$

Além disso, quando a última afirmação vale, temos que

$$m_i = \frac{1}{\pi_i}, \quad \forall i \in S \quad (\text{Lema de Kac}) \quad (\text{A.10})$$

Em particular o teorema acima deixa claro que, para passeios aleatórios clássicos, o tempo médio de primeiro retorno pode não ser um número inteiro.

Apêndice B Teorema de Plancherel

O modelo matemático proposto por Fourier em 1807 consiste em representar uma função $f(x)$, definida num intervalo finito, como uma soma de funções sinusoidais [53]

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (\text{B.1})$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{B.2})$$

são os coeficientes de Fourier. (B.1) é chamada série de Fourier de f .

Teorema B.1. [53] **(Plancherel):** Sejam f e g duas funções quadrado integráveis com período 2π e coeficientes de Fourier f_n e g_n , respectivamente. Então

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n g_n^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) g^*(x) dx, \quad (\text{B.3})$$

onde $*$ denota o complexo conjugado. Para $f = g$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (\text{B.4})$$

Esse teorema também é conhecido como teorema de Parseval.

Bibliografia

- [1] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, *Quantum random walks*. Phys. Rev. A, 48(2):1687-1690, 1993
- [2] E. Farhi and S. Gutmann, *Quantum computation and decision trees*, Phys. Rev. A 58, 915 (1998)
- [3] J. Kempe, *Quantum random walks - an introductory overview*. Contemporary Physics, vol. 44(4), pp. 307-327, 2003
- [4] A. Nayak and A. Vishwanath, *Quantum walk on the line*. quant-ph/0010117
- [5] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, *One-dimensional quantum walks*. In Proc.33th STOC, pages 60-69, New York, NY, 2001. ACM
- [6] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe, and U. Vazirani, *Quantum walks on graphs*. In Proc. 33th STOC, pages 50-59, New York, NY, 2001. ACM
- [7] C. Moore and A. Russell, *Quantum walks on the hypercube*. In J.D.P. Rolim and S. Vadhan, editors, Proc. RANDOM 2002, pages 164-178, Cambridge, MA, 2002. Springer
- [8] F. W. Strauch, *Connecting the discrete- and continuous-time quantum walks*. Phys. Rev. A 74 3, 03030. (2006)
- [9] A. M. Childs, *On the relationship between continuous and discrete-time quantum walk*. Communications in Mathematical Physics 294, 581-603 (2010)
- [10] A. Patel, K. S. Raghunathan and P. Rungta, *Quantum random walks do not need a coin toss* Phys. Rev. A 71, 032347 (2005)

- [11] R. Portugal, S. Boettcher and S. Falkner, *One-dimensional coinless quantum walks*. Phys. Rev. A 91, 052319 (2015)
- [12] R. Portugal, R.A.M. Santos, T.D. Fernandes and D.N. Gonalves, *The Staggered Quantum Walk Model*. Quantum Inf. Process. 15, 85 (2016)
- [13] A. Ambainis, *Quantum walks and their algorithmic applications*. Intl. J. Quantum Information 1, 507 (2003)
- [14] S. Chakraborty, L. Novo, A. Ambainis and Y. Omar, *Spatial Search by Quantum Walk is Optimal for Almost all Graphs*. Phys. Rev. Lett. 116, 100501 (2016)
- [15] A. M. Childs, *Universal Computation by Quantum Walk*. Phys. Rev. Lett. 102, 180501 (2009)
- [16] N. B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers and V. Kendon, *Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk*. Phys. Rev. A 81, 042330 (2010)
- [17] D.A. Meyer, *From quantum cellular automata to quantum lattice gases*. J. Stat. Phys., vol. 85, pp. 551-574, 1996
- [18] S. Carvalho, L. Guidi, C. Lardizabal, *Site recurrence of open and unitary quantum walks on the line*. arXiv:1607.07218
- [19] H.A. Carteret, M.E.H. Ismail, and B. Richmond, *Three routes to the exact asymptotics for the one-dimensional quantum walk*. J. Phys. A: Math. Gen, vol. 36(33), pp. 8775-8795, 2003
- [20] N. Konno, *Quantum random walks in one dimension*. Quantum Information Processing, vol. 1(5), pp. 345-354, 2002
- [21] M. Štefanaák, I. Jex, T. Kiss, *Recurrence and Pólya number of quantum walks*. Phys. Rev. Lett. 100, 020501 (2008)

- [22] M. Štefaňák, T. Kiss, I. Jex, *Recurrence properties of unbiased coined quantum walks on infinite d-dimensional lattices*. Phys. Rev. A 78, 032306 (2008)
- [23] F.A. Grünbaum, L. Velázquez, A. Werner, R.F. Werner, *Recurrence for discrete time unitary evolutions*. Commun. Math. Phys. 320, 543-569 (2013)
- [24] J. Bourgain, F.A. Grünbaum, L. Velázquez, J. Wilkening, *Quantum recurrence of a subspace and operator-valued Schur functions*. Commun. Math. Phys. 329, 1031-1067 (2014)
- [25] H. Krovi and T.A. Brun, *Hitting time for quantum walks on the hypercube*. Phys. Rev. A 73, 032341 (2006)
- [26] H. Krovi and T.A. Brun, *Quantum walks with infinite hitting times*. Phys. Rev. A 74, 042334 (2006)
- [27] M. Varbanov, H. Krovi and T.A. Brun, *Hitting time for the continuous quantum walk*. Phys. Rev. A 78, 022324 (2008)
- [28] P. Sinkovicz, Z. Kurucz, T. Kiss, and J. K. Asbóth, *Quantized recurrence time in unital iterated open quantum dynamics*. Phys. Rev. A 91, 042108 (2015)
- [29] P. Sinkovicz, T. Kiss, and J. K. Asbóth, *Generalized Kac lemma for recurrence time in iterated open quantum systems*. Phys. Rev. A 93, 050101(R) (2016)
- [30] U. Schöning, *A probabilistic algorithm for k-SAT and constraint satisfaction problems*. In 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pages 17-19. IEEE, 1999
- [31] J. Kempe, *Quantum random walks hit exponentially faster*. 2002. lanl-arXiv quant-ph/0205083
- [32] A. Childs, E. Farhi, S. Gutmann, *An example of the difference between quantum and classical random walks*. Journal of Quantum Information Processing, 1:35, 2002

- [33] A. Childs, R. Cleve, E. Deotto, E. Farhi, S. Gutmann, D. Spielman, *Exponential algorithmic speedup by quantum walk*. Proceedings of STOC'03, pp. 59-68
- [34] N. Shenvi, J. Kempe, K. Whaley, *Quantum random walk search algorithm*. Phys. Rev. A 67, 052307 (2003)
- [35] A. Ambainis, J. Kempe, A. Rivosh, *Coins make quantum walks faster*. in Proceedings of the 16th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 10991108 (2005)
- [36] V. Potecek, A. Gabris, T. Kiss and I. Jex, *Optimized quantum random-walk search algorithms*. Phys. Rev. A 79, 012325, 2009
- [37] A. Childs, J. Goldstone, *Spatial search by quantum walk*. quant-ph/0306054
- [38] A. Ambainis, *Quantum walk algorithm for element distinctness*. quant-ph/0311001
- [39] M. Szegedy, *Quantum speed-up of Markov chain based algorithms*. In Proceedings of the 45th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pages 32-41, 2004
- [40] M. Mohseni, P. Rebentrost, S. Lloyd, and A. Aspuru-Guzik, *Environment-assisted quantum walks in energy transfer of photosynthetic complexes*. arXiv:0805.2741, 2008
- [41] M. Karski, L. Forster, J. Choi, A. Steffen, W. Alt, D. Meschede, A. Widera, *Quantum walk in position space with single optically trapped atoms*. Science 325, 174 (2009)
- [42] H. Schmitz, R. Matjeschk, Ch. Schneider, J. Glueckert, M. Enderlein, T. Huber, and T. Schaetz, *Quantum walk of a trapped ion in phase space*. arXiv:0904.4214, 2009

- [43] M. A. Broome, A. Fedrizzi, B. P. Lanyon, I. Kassal, A. Aspuru-Guzik, and A. G. White, *Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence*. arXiv:1002.4923v2, 2010
- [44] A. Schreiber et al, *Photons walking the line: A quantum walk with adjustable coin operations*. arXiv:0910.2197v2, 2010
- [45] G. Pólya, *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz*. *Mathematische Annalen* 84 (1921): 149-160
- [46] H. Poincaré, *Acta Math.* 13, A271 (1890)
- [47] S. Venegas-Andraca, *Quantum Walks for Computer Scientists*. Morgan & Claypool, 2008
- [48] R. Portugal, *Quantum Walks and Search Algorithms*. Springer, 2013
- [49] G. H. Weiss, *Aspects and Applications of the Random Walk*. North-Holland, Amsterdam, 1994
- [50] R. Motwani and P. Raghavan, *Randomized Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995
- [51] J. R. Norris, *Markov Chains*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- [52] S. Karlin, H. Taylor, *A first course in stochastic processes*. New York-London: Academic Press, 1975
- [53] E. Hansen, *Fourier Transforms: Principles and Applications*. Wiley, 2014
- [54] R. Coleman, *Stochastic Processes*. George Allen & Unwin Ltd, 1974
- [55] C. Grinstead, J. Snell, *Introduction to probability*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997
- [56] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1968