UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

COMUNICAÇÃO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA *ON-LINE*: Um Estudo com o Editor Científico ROODA Exata

MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Porto Alegre
2009

Márcia Rodrigues Notare

COMUNICAÇÃO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA *ON-LINE*: Um Estudo com o Editor Científico ROODA Exata

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para obtenção do título de Doutor em Informática na Educação.

Orientadora:
Profa. Dra. Patricia Alejandra Behar

Linha de Pesquisa: Ambientes Informatizados e Ensinos a Distância

Porto Alegre
2009

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

N899c Notare, Márcia Rodrigues

Comunicação e aprendizagem matemática on-line: um estudo com o editor científico ROODA exata / Márcia Rodrigues Notare; orientadora: Patricia Alejandra Behar. – Porto Alegre, 2009.

180 f. + Apêndices.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, 2009, Porto Alegre, BR-RS.

1. Ambiente de aprendizagem. 2 Ambiente virtual. 3. Matemática. 4. Ensino aprendizagem. 5. Ensino a distância. 6. Rede Cooperativa de Aprendizagem. I. Behar, Patricia Alejandra. II. Título.

CDU – **371.694.3:681.3:51**

Bibliotecária Neliana Schirmer Antunes Menezes – CRB 10/939 - neliana.menezes@ufrgs.br

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Ata da Sessão de Defesa de Tese de Doutorado de
Márcia Rodrigues Notare

Comunicação e Aprendizagem Matemática Online: Um Estudo com o Editor Científico ROODA Exata

Às quatorze horas do dia seis de julho de dois mil e nove, na sala 323 do PPGIE/CINTED, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, realizou-se a Defesa de Tese intitulada *Comunicação e Aprendizagem Matemática Online: Um Estudo com o Editor Científico ROODA Exata,* de autoria de **Márcia Rodrigues Notare**, sob a orientação da Profa. Dra. Patrícia Alejandra Behar. A Banca Examinadora, composta pelos Professores Doutores Eliseo Berni Reategui, Maria Alice Gravina e Maria Cristina Kessler aprovou a Tese de Doutorado da aluna, que cumpriu com todos os requisitos e terá seu título de Doutor em Informática na Educação homologado pela Comissão de Pós-Graduação em Informática na Educação.

Profa. Dra. Patrícia Alejandra Behar
Presidente e Orientador

Prof. Dr. Eliseo Berni Reategui
PGIE/UFRGS

Profa. Dra. Maria Alice Gravina
UFRGS/IM

Profa. Dra. Maria Cristina Kessler
UNISINOS

AGRADECIMENTOS

Durante esta trajetória, recebi apoio, abraço e força das pessoas queridas com quem convivo. Certamente, elas não esperam de mim um agradecimento ou um reconhecimento, mas minha felicidade. Ainda assim, gostaria de expressar meu eterno agradecimento.

À minha querida orientadora, Patricia Alejandra Behar, que me desafiou, incentivou e acreditou no meu trabalho, iluminando o caminho a ser trilhado, e com quem divido esta realização.

À querida professora Maria Alice Gravina, que vem acompanhando minha trajetória desde a graduação, e que muito contribuiu para a realização desta tese, com sua experiência, suas ideias e seu incentivo.

Ao bolsista Rafael Patro, responsável pela implementação do editor ROODA Exata.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, com quem tive o privilégio de aprender, com seus preciosos conhecimento e experiência.

À banca formada pelos professores Eliseo Berni Reategui, Maria Cristina Kessler e Maria Alice Gravina, pelas sugestões valiosas que qualificaram meu trabalho.

Aos meus amados pais, Edison e Enilsa, pelo incentivo e apoio. Ao longo desta caminhada, sempre me encorajaram a continuar e a enfrentar os desafios e obstáculos que surgiram.

Ao meu amado Edgar, companheiro de todas as horas, agradeço o amor, o incentivo, a força e a paciência dedicados na realização de mais uma importante etapa de minha vida.

Ao meu querido e amado Rafael, que ilumina minha vida desde sua chegada e mostrou-me o quanto posso ser forte e determinada.

Aos meus colegas de trabalho, com quem divido as alegrias e as angústias da docência, pelas trocas de experiências, pelas intermináveis conversas sobre o fazer docente e pela trajetória que estamos trilhando juntos.

Aos meus alunos de graduação, com quem aprendo e renovo-me a cada nova jornada, que muito me auxiliam a compreender o processo de aprendizagem de Matemática e que, a cada semestre, contribuem para que eu me torne uma profissional melhor.

A todos vocês, obrigada por estarem presentes nesta caminhada.

RESUMO

Este trabalho discute as possibilidades de comunicação e aprendizagem de Matemática em ambientes virtuais de aprendizagem. Para que esses processos ocorram, são necessárias ferramentas que possibilitem a utilização de símbolos, fórmulas e expressões, pois a Matemática pode ser entendida como uma linguagem formada por uma simbologia própria. Esta linguagem precisa ser dominada e utilizada para que ocorra uma boa comunicação e expressão. Este suporte à linguagem científica deve estar presente nos mais diversos meios de comunicação e interação *on-line*, como fórum de discussão, bate-papo, e-mail, mensagens instantâneas, entre outros. Entretanto, ainda são poucos os ambientes virtuais de aprendizagem que permitem a comunicação científica a distância. Para possibilitar essa nova forma de comunicação *on-line*, este trabalho projetou e desenvolveu um editor científico, denominado ROODA Exata. Trata-se de uma ferramenta que se encontra integrada às diferentes funcionalidades síncronas e assíncronas oferecidas pelo ambiente virtual de aprendizagem ROODA. Seu objetivo é possibilitar a comunicação na área das ciências exatas, de forma rápida e precisa. Para analisar e validar o ROODA Exata, utilizou-se o ROODA como ambiente de apoio extraclasse em uma turma de Cálculo Diferencial, na modalidade presencial. As interações dos alunos neste ambiente serviram como fonte de dados para a análise. Assim, foram analisados os processos cognitivos desencadeados pelas interações no ROODA, à luz da teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, e o processo de comunicação e aprendizagem ocorrido no ambiente. A pesquisa evidenciou que o editor ROODA Exata potencializa a comunicação matemática *on-line* e que, sem sua utilização, muitos debates seriam inviabilizados, pela complexidade das expressões matemáticas utilizadas. Além disso, os estudos realizados mostram que o processo de aprendizagem de Matemática pode ser desencadeado pelas trocas ocorridas em ambiente virtual. Estas trocas podem ocorrer a partir de atividades que priorizem a participação ativa dos alunos na resolução de problemas, valorizando ações como argumentação, justificativa, análise do percurso do raciocínio, entre outras.

Palavras-chave: **Ambiente de aprendizagem. Ambiente virtual. Matemática. Ensino aprendizagem. Ensino a distância. Rede Cooperativa de Aprendizagem.**

NOTARE, Márcia Rodrigues. **Comunicação e Aprendizagem Matemática On-line**: um estudo com o editor científico ROODA. – Porto Alegre, 2009. 180 f. + Apêndices. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

ABSTRACT

This paper discusses the possibilities of Mathematical learning and communication supported by virtual learning environments. For these processes to occur, tools that enable symbol utilization, formulas and expressions are necessary because Mathematics can be understood as a language with its own symbology. This language should be mastered and used so that good communication and expression can take place. This support to scientific language has to be present in several communication means and *on-line* interactions such as discussion forum, chat, e-mail, instant messages, among others. Yet, there are still very few virtual learning environments and tools that allow for distant learning scientific communication. To make this new way of *on-line* communication possible, the project described herein designed and developed a scientific editor denominated ROODA Exata. ROODA Exata is a tool that is integrated into the different resources of interaction and communication offered by the virtual learning environment ROODA. The objective is to enable quick and precise *on-line* communication in exact sciences. To analyse and validate ROODA Exata, the virtual learning environment was used as extra class support for a group in Differential Calculus, in the presential modality. The interactions among students within the environment provided data for the analysis. Thus, we analysed the cognitive processes triggered by interactions in ROODA, following Piaget´s theory of cognitive development and the processes of communication and learning that occurred there. The research made evident that the editor ROODA Exata potentiates *on-line* mathematical communication and without it, many debates would be unfeasible because of the complexity of mathematical expressions used. Besides, the studies show that the processes of Mathematical learning can be triggered by exchanges among participants. These exchanges occur following the emphasis placed on active participation of those involved in solving the problems, valuing actions such as argumentation, justification, rationality path analyses, among others.

Keywords: **Learning environment. Virtual environment. Mathematics. Teaching learning. Distance learning. Cooperative Learning Network.**

NOTARE, Márcia Rodrigues. **Comunicação e Aprendizagem Matemática On-line**: um estudo com o editor científico ROODA. – Porto Alegre, 2009. 180 f. + Apêndices. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Cenário da Educação Matemática....17
Figura 2. Visualizando uma alternativa....18
Figura 3. Possibilidade para a Comunicação e Expressão em Matemática....19
Figura 4. Esquema da tese....25
Figura 5. Tomada de consciência....30
Figura 6. Patamares do Reflexionamento....33
Figura 7. Gráfico da derivada da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$....46
Figura 8. Estágios da aprendizagem da Matemática....48
Figura 9. Página Inicial do NetTutor....62
Figura 10. Chat gráfico do NetTutor....62
Figura 11. Tela do WebEQ....63
Figura 12. Página do Moodle....64
Figura 13. Tela do LiveMath....65
Figura 14. Tela Inicial do Ambiente ROODA....68
Figura 15. Tela do editor ROODA Exata – Aba Símbolos....70
Figura 16. Tela do editor ROODA Exata – Aba Fórmulas....71
Figura 17. Tela do editor ROODA Exata – Aba Alfabeto Grego....72
Figura 18. Tela do Fórum de Discussão....74
Figura 19. Edição de Fórmulas....75
Figura 20. Edição de Fórmula....76
Figura 21. Mensagem criada no Fórum de Discussão....77
Figura 22. Edição de Matrizes....78
Figura 23. Utilização de Fórmulas....79
Figura 24. Mensagem de Introdução às Atividades Iniciais – Atividade I....86
Figura 25. Mensagem de Introdução às Atividades Iniciais – Atividade II....86
Figura 26. Utilização do ROODA Exata na Atividade I....87
Figura 27. Dificuldade de utilização do ROODA Exata....87
Figura 28. Mensagem de difícil leitura....87
Figura 29. Nível de Interação – Simples Aplicação de Fórmula....88
Figura 30. Nível de Interação – Descrição das operações realizadas....88
Figura 31. Interação entre os colegas....89
Figura 32. Avanço nas interações....89
Figura 33. Questão sem solução....90
Figura 34. Interações entre colegas....90
Figura 35. Problema de Aplicação de Derivada....91
Figura 36. Interpretação do problema....91
Figura 37. Resolução do problema....92
Figura 38. Continuação da resolução do problema....93
Figura 39. Edição de expressões complexas....94
Figura 40. Dificuldade na comunicação....95
Figura 41. Primeira Atividade....98
Figura 42. Exemplo de Problema....99
Figura 43. Problema inicial....99
Figura 44. Problema reformulado....100
Figura 45. Problema reformulado....100

Figura 46. Limite de Funções Racionais 104
Figura 47. Solução para o Cálculo de Limite de Funções Racionais 105
Figura 48. Intervenção do colega 105
Figura 49. Limite de Funções Racionais 106
Figura 50. Solução Correta no Limite de Funções Racionais 106
Figura 51. Limite de Funções Racionais 107
Figura 52. Primeira solução apresentada 107
Figura 53. Intervenção da professora 107
Figura 54. Segunda solução apresentada 108
Figura 55. Terceiro nível de tomada de consciência 109
Figura 56. Primeiro nível de tomada de consciência 109
Figura 57. Reflexão sobre infinito 110
Figura 58. Limite de Funções Racionais 111
Figura 59. Solução Apresentada 111
Figura 60. Nova solução apresentada..111
Figura 61. Limite de Funções Racionais 113
Figura 62. Solução incorreta..113
Figura 63. Incompreensão do infinito 113
Figura 64. Intervenção da professora 113
Figura 65. Solução parcialmente correta 114
Figura 66. Limite de Funções Racionais 114
Figura 67. Solução com problemas de argumentação..114
Figura 68. Intervenção da professora 115
Figura 69. Solução correta 115
Figura 70. Problema de taxas de variação 116
Figura 71. Soluções apresentadas..116
Figura 72. Problema de taxas de variaçã o 117
Figura 73. Soluções apresentadas..117
Figura 74. Problema de taxas de variação 118
Figura 75. Solução correta 119
Figura 76. Intervenção da professora 119
Figura 77. Solução pelas regras de derivação..120
Figura 78. Problema de interpretação 120
Figura 79. Interpretação correta 120
Figura 80. Variação do problema de interpretação..121
Figura 81. Solução correta 121
Figura 82. Novo problema de interpretação..121
Figura 83. Solução correta 122
Figura 84. Outra solução correta 122
Figura 85. Problema de inclinação de reta tangente 123
Figura 86. Primeira solução apresentada 124
Figura 87. Primeira intervenção 124
Figura 88. Retorno do aluno 124
Figura 89. Segunda intervenção 124
Figura 90. Problema sobre técnicas de diferenciação 125
Figura 91. Solução sem argumentação 125
Figura 92. Solução equivocada 126
Figura 93. Comentário de um colega 126
Figura 94. Comentário da professora 126
Figura 95. Reflexão e superação 126

Figura 96. Solução correta 127
Figura 97. Simplificação da solução 127
Figura 98. Comentário de MAH 127
Figura 99. Comentário de JUL..128
Figura 100. Problema sobre técnicas de diferenciação 128
Figura 101. Solução apresentada..129
Figura 102. Percepção de erro cometido 130
Figura 103. Comentário sobre notação utilizada..130
Figura 104. Comentário de TIA..130
Figura 105. Comentário da professora. 131
Figura 106. Problema envolvendo a regra do quociente 132
Figura 107. Solução equivocada 132
Figura 108. Comentário de um colega 132
Figura 109. Intervenção da professora 132
Figura 110. Solução correta..133
Figura 111. Solução com descrição das operações realizadas 133
Figura 112. Correção do equívoco cometido 134
Figura 113. Regras do quociente e do produto 135
Figura 114. Solução correta..135
Figura 115. Problema sobre comportamento gráfico de funções 136
Figura 116. Primeira solução apresentada 136
Figura 117. Intervenção da professora 137
Figura 118. Intervenção da professora 137
Figura 119. Contribuição de TIA 137
Figura 120. Intervenção da professora 137
Figura 121. Explicação de ANR 137
Figura 122. Concavidade de funções 139
Figura 123. Solução organizada e completa...140
Figura 124. Continuação da solução 141
Figura 125. Extremos relativos em funções racionais 141
Figura 126. Solução de TIA 141
Figura 127. Continuação da solução de TIA 142
Figura 128. Intervenção da professora 143
Figura 129. Solução de JUL 144
Figura 130. Continuação da solução de JUL..144
Figura 131. Problema de otimização 145
Figura 132. Solução correta..146
Figura 133. Questionamentos feitos pela professora 147
Figura 134. Retorno do grupo 148
Figura 135. Problema de otimização 149
Figura 136. Solução para o problema 150
Figura 137. Continuação da solução do problema 151
Figura 138. Intervenção da professora 153
Figura 139. Retorno do grupo 153
Figura 140. Nova intervenção...154
Figura 141. Retorno do grupo 154
Figura 142. Mensagem de Boas Vindas 156
Figura 143. Mensagem para dar início aos trabalhos 156
Figura 144. Mensagem sem a utilização do ROODA Exata 157
Figura 145. Incentivo para utilização do ROODA Exata 157

Figura 146. Participação de ADR no debate 158
Figura 147. Necessidade de utilização do ROODA Exata 159
Figura 148. Necessidade de utilização do ROODA Exata 159
Figura 149. Necessidade de utilização do ROODA Exata 160
Figura 150. Necessidade de utilização do ROODA Exata 160
Figura 151. Utilização da aba Fórmulas 161
Figura 152. Insegurança de ROB 162
Figura 153. Intervenção da professora 162
Figura 154. Desconforto e insegurança 162
Figura 155. Contribuição de MAR 163
Figura 156. Publicação da resposta final 164
Figura 157. Insatisfação de JUL....................164
Figura 158. Insatisfação ao utilizar o ROODA Exata 165
Figura 159. Satisfação de WIL 166
Figura 160. Dúvidas de ROB 167
Figura 161. Colaboração de TIA 167
Figura 162. Gráfico da Questão 1....................169
Figura 163. Gráfico da Questão 2....................169
Figura 164. Gráfico da Questão 3....................170
Figura 165. Gráfico da Questão 4....................171
Figura 166. Gráfico da Questão 5....................172

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Equação Quadrática em Latex 60
Quadro 2. Equação Quadrática em MathML 61
Quadro 3. Mensagem de Apresentação do Ambiente de Aprendizagem 84
Quadro 4. Mensagens de solicitação de cadastro 85
Quadro 5. Mensagem de Apresentação da Proposta...98
Quadro 6. Entrevista sobre Perfil do Aluno 103
Quadro 7. Questionário aplicado aos alunos 168

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Comportamento da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$ 45
Tabela 2. Quadro Comparativo 65

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 CONSTRUÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA 21

3 CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO 26

3.1 DESENVOLVIMENTO COGNITIVO: UMA VISÃO PIAGETIANA 26

3.1.1 O Processo de Tomada de Consciência: O Caminho do Fazer ao Compreender 28

3.1.2 Abstração Reflexionante 31

3.2 APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA 35

3.2.1 A Linguagem e os Símbolos na Aprendizagem de Matemática 41

4 EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA: DO PRESENCIAL AO VIRTUAL 50

4.1 A VIRTUALIDADE 50

4.2 A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA E SEMIPRESENCIAL: OS PAPÉIS DO PROFESSOR E DO ALUNO 52

4.3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO 56

4.3.1 Estado da Arte 59

5 METODOLOGIA 67

5.1 O EDITOR CIENTÍFICO ROODA EXATA 67

5.1.1 Projeto 69

5.1.2 Desenvolvimento e Implementação 73

5.1.3 Funcionamento e Interação 74

5.2 PROPOSTA METODOLÓGICA 79

5.3 PROJETO-PILOTO: UMA PRIMEIRA EXPERIÊNCIA 84

5.4 EXPERIMENTO FINAL 95

5.4.1 Re-planejamento das Atividades 97

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS 102

6.1 PERFIL DA TURMA 102

6.2 APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS 104

6.3 COMUNICAÇÃO E EXPRESSÃO MATEMÁTICA 155

6.4 ANÁLISE DOS ALUNOS 168

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 174

REFERÊNCIAS 179

APÊNDICE A – PESQUISA REALIZADA 184

APÊNDICE B – ATIVIDADES PROPOSTAS NO ROODA 185

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO 201

1 INTRODUÇÃO

Os problemas inerentes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática vêm sendo vivenciados por professores e alunos ao longo dos anos. Por um lado, alunos apresentam dificuldades reais em compreender a Matemática em sua verdadeira essência, uma vez que a entendem como um conjunto de regras, fórmulas, algoritmos e definições, a serem decorados e métodos engessados de resolução de problemas. Por outro lado, os professores percebem e reconhecem as dificuldades apresentadas pelos alunos, têm consciência dos problemas apresentados pelos métodos tradicionais de ensino de Matemática e se sentem desafiados a enfrentar esta questão, na tentativa de encontrar meios de superá-la.

Sabe-se que a aprendizagem de Matemática envolve processos cognitivos avançados, uma vez que um mesmo objeto pode ser identificado por diferentes representações. E, uma das condições fundamentais para sua compreensão, é reconhecer um mesmo objeto matemático nas suas diferentes representações, bem como transitar entre elas. É essa flexibilização do pensamento que permite a verdadeira compreensão da Matemática.

Esta área pode ser entendida como uma forma de linguagem precisa, clara e objetiva, e sua compreensão implica, entre outros fatores, no domínio dessa linguagem. Para “fazer matemática”, é preciso saber expressar-se corretamente por meio desta linguagem, pois é por meio do exercício da comunicação e expressão que se concretiza o pensamento e se atinge níveis mais elevados de compreensão.

Assim, o processo de construção do conhecimento matemático deve buscar meios que possibilitem ao aluno enfrentar situações que exijam a comunicação e expressão, valorizando o exercício da argumentação e justificativa.

A teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget (1958) defende a ideia de que a ação é a força propulsora do desenvolvimento humano. Para este autor, a aprendizagem ocorre a partir das ações do sujeito sobre o meio. Assim, a construção do conhecimento deve ocorrer por meio de explorações, tentativas, fracassos, reflexões. Para tal, torna-se importante um ambiente que permita ao aluno elaborar conjecturas, testá-las, construir explicações sobre suas conclusões, de modo a confrontá-las com o conhecimento já existente, para assim construir o conhecimento matemático.

Com a emergência das redes de comunicação, está se presenciando a abertura de um novo meio de interação, que vem modificando as mais variadas áreas, como economia, cultura e educação. Com ele, cresce um novo espaço de comunicação e socialização, assim como um novo meio de informação e de conhecimento. Acompanhando este avanço, uma nova forma de relacionamento, independente de tempo e espaço, vem se estabelecendo, onde se observam pessoas cooperando e acessando uma memória comum. Assim, elas o exploram e o atualizam simultaneamente, tornando-o um espaço de criação e inteligência coletiva[1].

Com a popularização destas tecnologias, abre-se espaço para se desenvolver uma nova forma de ensinar e aprender, tanto de forma presencial, quanto virtual. As metodologias tradicionais de ensino estão se tornando cada vez mais desatualizadas, uma vez que a internet permite uma maior flexibilização de tempo e espaço. Isto não significa que as aulas presenciais, com a utilização de giz e quadro-negro, devem ser abandonadas. Entretanto, é possível complementá-las e enriquecê-las com a utilização das tecnologias da informação e comunicação (TIC).

Assim, a velocidade com que a informação é acessada e modificada nos tempos atuais fez surgir novas formas de pensar, agir e interagir, o que exige diferentes estratégias pedagógicas que acompanhem essa evolução. A utilização das TIC na Educação pode vir ao encontro destas necessidades, pois proporciona que o conhecimento seja construído independente de tempo e espaço, a partir de trocas que ocorrem no meio virtual. Essa prática educacional exige formas de ação e interação que permitam que os alunos construam conceitos de forma coletiva.

Os processos de comunicação, nesse contexto, dependem dos computadores, apresentando uma dinâmica totalmente diferente da utilizada nas práticas anteriores de educação presencial. Tais meios oferecem a oportunidade de compartilhamento e construção de ideias, de informações e de habilidades entre os participantes, com o objetivo de favorecer a construção do conhecimento. Até o momento, estas ferramentas de comunicação virtual são predominantemente escritas, o que permite escrever mensagens, respostas, etc. Percebe-se, dessa forma, que a interação em meio virtual depende fortemente da comunicação escrita.

Diante do exposto, percebe-se que a integração das tecnologias de comunicação ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática pode favorecer a construção do conhecimento matemático. Isto porque, a partir de sua utilização, é possível valorizar a ação,

[1] Para Lévy (2003), inteligência coletiva é uma inteligência distribuída por toda parte, incessantemente valorizada, coordenada em tempo real, que resulta em uma modificação efetiva das competências.

comunicação e expressão, fatores tão importantes neste processo. Mais do que isso, a utilização de estratégias que promovam a participação ativa dos alunos, baseada na formulação de problemas, pode levar à construção coletiva do conhecimento matemático.

Assim, este panorama pode ser visualizado dentro de um cenário como peças isoladas de um quebra-cabeça, que podem ser encaixadas, de modo a caminhar na direção de uma possibilidade para a construção do conhecimento matemático, conforme ilustra a Figura 1.

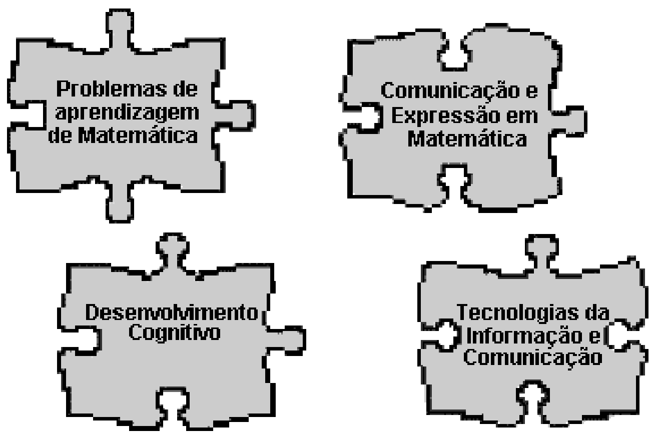


Figura 1. Cenário da Educação Matemática

Mas como encaixar estas peças? Para fazer uso das TIC na Educação, de modo a favorecer a participação ativa do aluno neste processo, por meio de trocas que ocorrem no ambiente virtual, é preciso apoiar-se sobre a comunicação escrita. Entretanto, para que ocorra a comunicação matemática *on-line*, são necessários meios que possibilitem a utilização de símbolos, fórmulas e equações (LEVENTHALL, 2006). A Matemática possui uma linguagem formada por uma simbologia própria, que é indispensável na sua comunicação, e de extrema importância para o processo de aprendizagem da mesma.

A Matemática, assim como as ciências exatas de um modo geral, vem usufruindo pouco dos recursos proporcionados pelas redes de comunicação. Professores da área apresentam certa resistência às modalidades virtual e semipresencial, pois as ferramentas atuais não oferecem os recursos necessários para uma boa comunicação *on-line*. Acredita-se que o suporte à comunicação científica deve estar presente nos mais diversos meios de comunicação e interação em rede, como bate-papo, e-mail, fórum de discussão, mensagens instantâneas, entre outros.

Ainda são poucos os ambientes virtuais de aprendizagem[2] e ferramentas que permitem a comunicação científica a distância, utilizando símbolos e notações próprios desta área, de forma efetiva, intuitiva e amigável.

Assim, as peças do quebra-cabeça começam a encaixar-se, conforme ilustra a Figura 2, mas ainda falta uma forma de viabilizar uma comunicação *on-line* fácil e intuitiva.

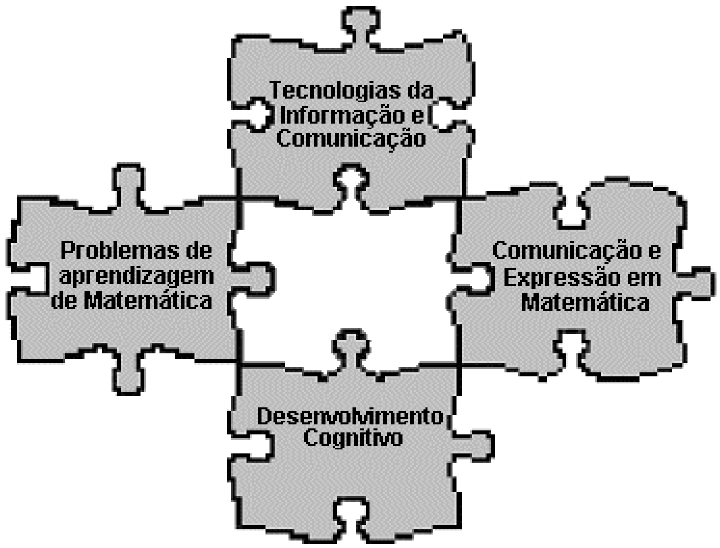


Figura 2. Visualizando uma alternativa

Diante deste contexto, este trabalho se propôs a desenvolver um editor para a comunicação científica *on-line*, denominado ROODA Exata, como uma funcionalidade integrada aos diferentes recursos de interação e comunicação oferecidos no ambiente virtual de aprendizagem ROODA[3] (Rede Cooperativa de Aprendizagem) (BEHAR, 2008). Seu principal objetivo é viabilizar a comunicação científica *on-line*. Dessa forma, visualiza-se uma alternativa a mais de utilização das tecnologias na construção do conhecimento matemático, integrando estas tecnologias com as concepções pedagógicas debatidas anteriormente, conforme ilustra a Figura 3.

[2] Um ambiente virtual de aprendizagem constitui-se em um espaço, formado pelos sujeitos e seus objetos de estudo, suas interações/relações e formas de comunicação por meio de uma plataforma (BEHAR et al, 2009).
[3] O ambiente de aprendizagem ROODA disponibiliza recursos síncronos e assíncronos para interação e comunicação entre professores e alunos, centrado no usuário e de modo a valorizar o processo de cooperação. Encontra-se disponível em https://www.ead.ufrgs.br/rooda.

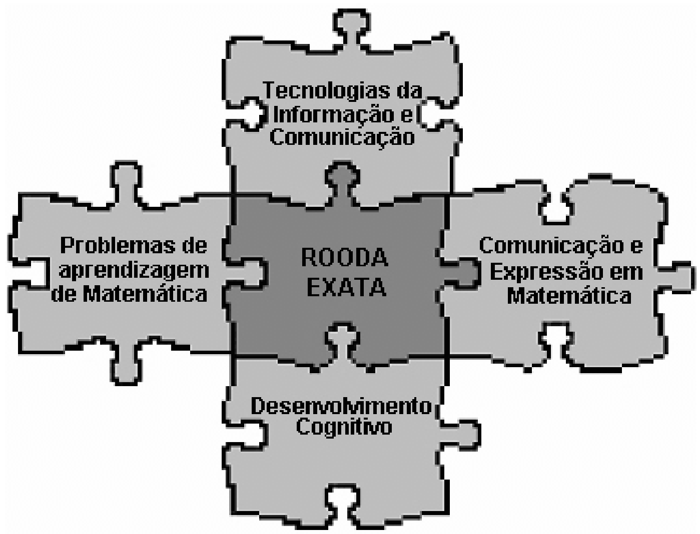


Figura 3. Possibilidade para a Comunicação e Expressão em Matemática

Logo, no capítulo dois é apresentado o contexto no qual esta tese está inserida, delineado o problema de pesquisa a ser investigado e os objetivos a serem alcançados.

O capítulo três apresenta um estudo sobre a teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget, na qual a aprendizagem ocorre pelo desenvolvimento de estruturas cognitivas decorrentes das ações do sujeito sobre o meio. Este estudo foi focado, em especial, nas obras Abstração Reflexionante (PIAGET, 1995), Fazer e Compreender (PIAGET, 1978) e Tomada de Consciência (PIAGET, 1977), por serem considerados processos cognitivos importantes para a construção do conhecimento matemático. Em seguida, é tratada, especificamente, a questão da aprendizagem da Matemática, subsidiada pela epistemologia genética de Piaget.

O capítulo quatro aborda as possibilidades de utilização das tecnologias da informação e comunicação na Educação a Distância e Educação Semipresencial. Na sequência, é realizado um estudo sobre a situação atual da Educação Matemática e as tecnologias da informação e comunicação, apresentando e discutindo as possibilidades de comunicação científica *on-line* disponíveis até o momento.

O quinto capítulo apresenta a metodologia de pesquisa adotada, descrevendo o percurso trilhado ao longo da pesquisa. Inicialmente, o capítulo descreve o projeto e desenvolvimento do editor científico ROODA Exata, desenvolvido ao longo das pesquisas desta tese, de modo a viabilizar a comunicação matemática *on-line*. Assim, apresenta-se sua interface e utilização. Em seguida, é apresentado um estudo piloto, no qual foi realizada uma análise preliminar da utilização do editor ROODA Exata. Cabe destacar que este experimento piloto foi realizado no segundo semestre de 2007, com uma turma de Cálculo Diferencial da Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS). A partir deste estudo experimental, foi possível identificar problemas metodológicos da pesquisa, que foram adequados no segundo experimento. Finalmente, o capítulo apresenta o experimento final, realizado no segundo semestre de 2008.

O capítulo seis apresenta a análise e discussão dos dados, que respondem às questões levantadas nesta tese. Assim, realiza-se um estudo com o editor científico ROODA Exata, para verificar a viabilidade de comunicação matemática *on-line* e as possibilidades de construção do conhecimento de conceitos matemáticos a partir das interações realizadas com o uso do editor, subsidiado pela teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget.

Finalmente, o capítulo sete retoma as questões levantadas nesta pesquisa, discutindo os resultados alcançados. Adicionalmente, aponta-se para pesquisas futuras, que buscam aperfeiçoar o ROODA Exata e, mais do que isso, avançar no desenvolvimento de recursos que favoreçam a utilização das tecnologias da informação e comunicação na Educação Matemática.

2 CONSTRUÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

Para contextualizar e justificar a pesquisa realizada ao longo desta tese, pretende-se, inicialmente, descrever a trajetória da autora, entendendo-se que uma pesquisa representa o percurso de reflexão e transformação do autor. Por isso, esta parte será relatada na primeira pessoa do singular.

Meu interesse pela área de Informática na Educação iniciou no ano de 1995, quando ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS e, logo no primeiro semestre do curso, deparei-me com a disciplina *Computador na Matemática Elementar I*, ministrada pela professora Maria Alice Gravina. Esta disciplina trabalhava com a construção de conceitos matemáticos elementares por meio de atividades realizadas no ambiente LOGO. Foi a partir das experiências vivenciadas nesta disciplina que passei a compreender que a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo ocorrem a partir da ação do sujeito sobre o meio. Percebi que, a partir de atividades e desafios realizados no ambiente LOGO, poderia construir, significativamente, vários conceitos matemáticos.

Ao longo do curso de graduação, pude participar de outras disciplinas na área de Informática na Educação, como *Computador na Educação*, ministrada pela professora Liane Tarouco, e *Computador na Matemática Elementar II*, também ministrada pela professora Maria Alice Gravina. Mas foi como bolsista de iniciação científica que pude aprofundar os estudos nesta área, percebendo o verdadeiro potencial dos ambientes informatizados na construção do conhecimento matemático.

Em 1999, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da UFRGS, para cursar o mestrado. Minha pesquisa focou no desenvolvimento de um sistema para a aprendizagem de demonstrações da Geometria Euclidiana. Neste período, pude vivenciar experiências em ambientes virtuais de aprendizagem, por meio da realização de debates em fóruns de discussão e salas de bate-papo. Percebi a potencialidade destes meios na troca de informações e na construção coletiva do conhecimento.

A partir do ano de 2001, iniciei minha trajetória como professora universitária, atuando em disciplinas de Matemática para os cursos de Engenharia e Ciência da Computação e disciplinas de Informática na Educação para os cursos de Licenciatura em Matemática e

Pedagogia. Neste período, participei de um projeto de pesquisa cujo objetivo foi aproximar a Matemática dos ambientes computacionais, em que foram estudas as possibilidades de utilização destes ambientes na Educação Matemática. A partir de então, passei a vivenciar os processos de comunicação matemática *on-line*, onde muitas vezes, para viabilizar um debate, era necessária a utilização de arquivos anexos, contendo expressões matemáticas e gráficos.

No ano de 2004, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, sob a orientação da professora Patricia Alejandra Behar, que coordena o Núcleo de Tecnologia Digital aplicada à Educação (NUTED/UFRGS). Este grupo de pesquisa desenvolveu o ambiente virtual de aprendizagem ROODA[4] e vem realizando, continuamente, estudos a fim de aperfeiçoá-lo. Assim, me inseri neste projeto, especificamente, no desenvolvimento do editor de notação científica para ser integrado ao ROODA, a fim de possibilitar a comunicação científica a distância.

Ao longo do curso, esta proposta foi sendo amadurecida. A partir de leituras, pesquisas e reflexões, proporcionadas pelas disciplinas cursadas e pelas experiências em ambientes virtuais que pude vivenciar ao longo do curso, o projeto se delineou de forma mais clara.

Assim, com o objetivo de viabilizar a comunicação matemática *on-line* e analisar as possibilidades de aprendizagem a partir das interações ocorridas no ambiente virtual de aprendizagem ROODA, levanta-se o seguinte problema de pesquisa:

Como uma ferramenta, incorporada em um ambiente virtual de aprendizagem, pode auxiliar na comunicação científica *on-line* e no processo de construção de conhecimento de conceitos matemáticos?

Para responder à questão levantada, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- estudar as questões inerentes à comunicação e aprendizagem de Matemática e as possibilidades de utilização das tecnologias da informação e comunicação na Educação Matemática;
- desenvolver um editor de fórmulas científicas *on-line*, integrado ao ambiente virtual de aprendizagem ROODA, denominado ROODA Exata, para permitir a edição de notação científica com a utilização de símbolos da área;

[4] Trata-se de uma das plataformas de Educação a Distância utilizadas na UFRGS e que está sendo utilizada por mais de 36000 usuários.

- validar a ferramenta desenvolvida, analisando como ocorre a comunicação e expressão matemática por meio da mesma;
- verificar como o editor ROODA Exata pode auxiliar na aprendizagem de conceitos matemáticos, analisando os processos cognitivos desencadeados a partir das interações realizadas no ambiente.

Nossa hipótese é que o editor científico ROODA Exata possibilita a comunicação matemática *on-line* e promover a construção de estruturas cognitivas para a aprendizagem dos conceitos matemáticos trabalhados.

Para o projeto e desenvolvimento do editor científico ROODA Exata, foram pesquisadas as possibilidades e características da Educação a Distância e Educação Semipresencial proporcionadas pelas tecnologias da informação e comunicação. Ainda, foi realizado um estudo sobre o papel do professor e do aluno neste contexto e as limitações da tecnologia em proporcionar comunicação e interação de qualidade na área das ciências exatas.

Para analisar as possibilidades de comunicação *on-line* com a utilização da ferramenta construída, foram pesquisados subsídios teóricos que possibilitassem o desenvolvimento de uma estratégia que valoriza a participação ativa do aluno no processo de ensino e aprendizagem (PALLOFF; PRATT, 2004) e (HARASIM, 2005). Com isso, buscou-se promover o desenvolvimento de habilidades como autonomia, pensamento crítico, comprometimento e capacidade de trabalhar em conjunto.

Ainda, este trabalho se propôs a analisar os processos cognitivos desencadeados a partir das interações dos alunos no ambiente ROODA, fundamentada na epistemologia genética de Piaget, e o processo de aprendizagem da Matemática.

Entende-se que, a partir de uma fundamentação teórica sustentada pela teoria de Piaget, a análise das interações no ROODA poderia ser realizada em três grandes dimensões: afetiva, cognitiva e social. Entretanto, este trabalho está focado na dimensão cognitiva do processo de aprendizagem de Matemática.

Cabe salientar que o processo de aprendizagem da Matemática não se reduz à comunicação algébrica. Este é apenas um dos fatores fundamentais para sua compreensão. Além de habilidades como ler e expressar-se corretamente com a utilização da linguagem matemática, é importante reconhecer os objetos matemáticos em suas diferentes representações e ser capaz de trabalhar com elas simultaneamente. Dessa forma, as questões que norteiam a Educação Matemática a distância não estarão esgotadas nem completamente solucionadas neste trabalho. Assim, torna-se necessário o desenvolvimento de ambientes que possibilitem transitar entre as múltiplas representações de um mesmo objeto matemático, como tabelas, diagramas e gráficos, bem como a possibilidade de construção destes objetos de forma dinâmica. Contudo, este trabalho focalizou seus objetivos em viabilizar a comunicação *on-line* em Matemática, uma vez que a Educação a Distância é alicerçada pelas trocas ocorridas no meio virtual, trocas estas proporcionadas pela escrita.

Assim, para o desenvolvimento desta tese, inicialmente foi realizado um estudo sobre a teoria da construção do conhecimento de Jean Piaget, o processo de aprendizagem de Matemática, as implicações das teorias da informação e comunicação na educação presencial, semipresencial e a distância. Para responder o problema de pesquisa, foi desenvolvido o editor científico ROODA Exata e, para sua validação, foi realizado, inicialmente, um estudo piloto, que permitiu o estabelecimento de indicadores que conduziram a pesquisa. Finalmente, foi realizado um segundo experimento, no qual foi possível realizar as análises finais desta pesquisa.

A Figura 4 apresenta um esquema que sintetiza as principais etapas da pesquisa realizada.

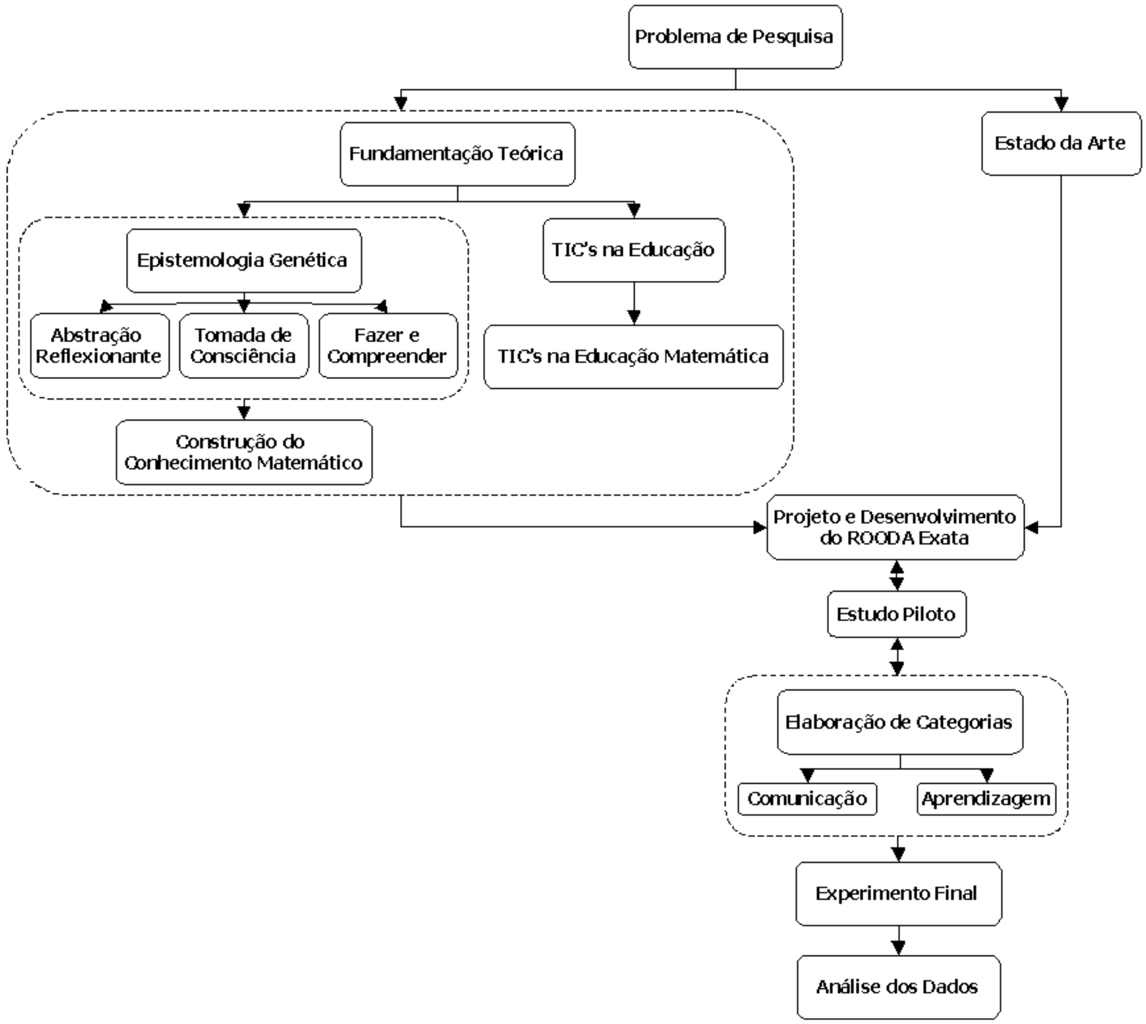


Figura 4. Esquema da tese

O capítulo a seguir, apresenta um estudo sobre o desenvolvimento cognitivo e a construção do conhecimento matemático, à luz a teoria de Piaget.

3 CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Este capítulo apresenta o processo de evolução da inteligência humana, fundamentado pela teoria cognitiva de Jean Piaget. Dessa forma, as seções a seguir descrevem como ocorre a construção do conhecimento à luz da teoria piagetiana. Em seguida, busca relacionar a epistemologia genética de Piaget com o processo de aprendizagem da Matemática, dando ênfase aos processos de abstração reflexionante e tomada de consciência, fundamentais na construção do conhecimento matemático.

3.1 Desenvolvimento Cognitivo: Uma Visão Piagetiana

A teoria de Piaget (PIAGET, 1983) trata da origem do conhecimento e o entende como sendo um processo contínuo de construção, sem início ou final absoluto. A inteligência, para Piaget, é construída pelo mecanismo de adaptação do organismo a uma situação nova e, como tal, implica a construção contínua de novas estruturas. Esta adaptação refere-se ao mundo exterior. Desta forma, os indivíduos desenvolvem-se intelectualmente a partir das vivências e experiências oferecidas pelo meio que os cercam, agindo sobre este meio. A partir dessa ideia, o conhecimento pode conceber-se como uma hierarquia de formas de equilíbrio. Essa tendência ao equilíbrio é expressão do mecanismo que sustenta a evolução do conhecimento. Seus estudos mostram as condições necessárias para que se passe de um conhecimento inferior a um mais rico, tanto em extensão quanto em compreensão.

Para Piaget (1983), o processo de construção do conhecimento se constitui na ação do sujeito sobre um objeto (assimilação) e na ação do sujeito sobre si mesmo (acomodação), respondendo às estranhezas trazidas pelo material assimilado. Assim, sujeito e objeto não podem ser dissociados, mas entendidos como completares, uma vez que o conhecimento não se encontra pré-existente em nenhum destes pólos, mas sim, na sua interação.

Pode-se dizer que o sujeito só aprende porque age. A ação é a força propulsora do desenvolvimento humano, ou seja, é por meio das ações, assimiladoras e acomodadoras, portanto adaptadoras, que o sujeito mesmo pratica, que ele se desenvolve. Entretanto, não é qualquer ação que leva a avanços no conhecimento; é preciso uma ação significativa, que tenha sentido para o sujeito, que o faça pensar sobre o que fez e sobre o próprio pensamento.

Assim, aprendizagem não significa aprender porque alguém ensina, mas sim, por um processo de construção, de re-construção e de tomada de consciência do próprio desenvolvimento por parte do sujeito. Nesta perspectiva, tudo acontece pela ação do sujeito, pois é por meio dela que se constroem as estruturas do conhecimento ou capacidades de conhecer.

A psicologia do desenvolvimento cognitivo vê o sujeito vivendo em busca contínua de um equilíbrio dinâmico entre ele e seu ambiente. Este equilíbrio pode ser perturbado pela presença de um novo conhecimento, que entra em conflito com o conhecimento já existente no sujeito. Neste momento, um período de transição ocorre, onde a estrutura do sujeito é reconstruída, atingindo um nível mais elevado de equilíbrio.

Esse processo de transição pode ser identificado de duas formas: como uma expansão das estruturas cognitivas do indivíduo ou como uma reconstrução mental, disparada por um conflito cognitivo. Muitas vezes, um novo conhecimento contradiz um antigo e, nestes casos, é preciso desenvolver estratégias que ajudem a superar este conflito, reconsiderando o novo conhecimento, ou abandonando-o. O obstáculo é parte do conhecimento, pois este se dá ao resolver os problemas vivenciados como decorrência de assimilações.

Piaget (1958) mostra o desenvolvimento da criança até a fase adulta por meio de vários grandes estágios de equilíbrio, cada um mais enriquecido que o estágio anterior. São identificados quatro estágios principais: sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório formal. A característica marcante da adolescência é a passagem do concreto para o formal, caracterizado pelo raciocínio hipotético-dedutivo. Enquanto o indivíduo operatório concreto raciocina sobre ações, o indivíduo operatório formal o faz por meio de proposições, fazendo com que seu pensamento ultrapasse o mundo dos reais na direção do mundo dos possíveis. Neste período, a inteligência consegue criar um universo de significações que transbordam o real.

Para Piaget, o processo de desenvolvimento humano é um processo de construção lógico-matemática de complexidade crescente. Para conhecer um objeto, é preciso situá-lo em um emaranhado de classes e relações, ou seja, assimilá-lo a um universo lógico-matemático. Assim, o homem se faz matemático na medida em que constrói matemática como conteúdo e sobretudo como estrutura (BECKER, 1997).

A função simbólica ou semiótica, que torna possível todas as formas de representação, permite a representação das coordenações das ações. Ela emerge do período sensório-motor e é condição prévia de toda a socialização. Dessa forma, uma função simbólica precária implicará em uma socialização precária, em um exercício precário da linguagem e em uma precária construção das condições prévias da aprendizagem da Matemática, ou seja, em um pensamento precário. Isto significa que a construção do real na criança coincide com a construção dos alicerces para o desenvolvimento da Matemática. Segundo Becker (1997), a lógica, na sua gênese, provém, por construção, das ações e das coordenações das ações. Com o aparecimento da função semiótica, essa lógica passa a ser traduzida simbolicamente e a linguagem demora muito tempo para alcançar o sistema lógico que surge no período sensório-motor. A experiência lógico-matemática consiste em agir sobre os objetos e retirar da ação e da coordenação das ações qualidades que lhes são próprias. Assim toda a lógica e toda a Matemática são construídas pelo sujeito por abstração reflexionante.

As seções que seguem têm o objetivo de aprofundar o estudo da teoria de Piaget e os conceitos de tomada de consciência e abstração reflexionante, fundamentais para compreender a construção do conhecimento matemático.

3.1.1 O Processo de Tomada de Consciência: O Caminho do Fazer ao Compreender

No processo de desenvolvimento cognitivo, podem ser identificados certos níveis, que trilham o caminho do fazer ao compreender. Em outras palavras, pode-se dizer que essa evolução inicia na ação pura, impulsionada pela busca em alcançar determinado objetivo, muitas vezes de fato alcançado, mesmo que sem a compreensão dos meios que levaram a tal êxito, até a total compreensão das ações realizadas. Assim, tal evolução caminha do “fazer” ao “fazer e saber o que se está fazendo”.

A ação constitui um conhecimento cuja conceituação somente se efetua por tomadas de consciência posteriores, que procedem da periferia para o centro. Verifica-se um atraso da conceituação sobre a ação, o que mostra a autonomia da ação. Porém, a partir de determinado nível, há uma influência da conceituação sobre a ação, uma vez que a conceituação fornece à ação um reforço de suas capacidades de previsão, consistindo em um aumento do poder de coordenação, e tornando possível uma programação completa da ação a partir da conceituação. Dessa forma, identifica-se uma fase inicial, em que a ação e sua conceituação são aproximadamente do mesmo nível e em que se efetuam trocas constantes entre as duas, e outra fase em que a conceituação fornece à ação uma programação, fazendo com que a prática se apoie em teorias. Assim, à medida que a compreensão começa a se estabelecer, percebe-se uma capacidade de antecipação e uma regulagem mais ativa, que abre para uma capacidade de escolha entre meios diferentes, sem limitar-se mais às regulações automáticas. Dessa forma, a antecipação e a capacidade de escolha permitem a passagem do nível do comportamento material para o da representação.

Uma vez que a conceituação aumenta o poder de antecipação do sujeito, pode-se dizer que a conceituação influencia a ação, fornecendo à mesma um reforço de suas capacidades de previsão e a possibilidade de dar um plano de utilização imediato. Segundo Piaget (1978), essa contribuição consiste em um aumento do poder de coordenação do sujeito.

O conceito de tomada de consciência é de fundamental importância na aprendizagem de Matemática. Isto porque, muitas vezes, a Matemática é tratada de forma mecânica e repetitiva, fazendo com que os alunos reproduzam leis e fórmulas na resolução de problemas, obtendo êxito na sua solução, mas sem efetivamente compreender o que estão fazendo. O estudo da tomada de consciência busca aprofundar essas questões, na tentativa de desvendar os verdadeiros limites existentes entre o fazer e o compreender.

Para o senso comum, pode-se entender que o processo de tomada de consciência, ou seja, a passagem do inconsciente para o consciente, reduz-se a um simples processo de iluminação. Entretanto, Piaget (1977) afirma que a tomada de consciência de um esquema de ação o transforma em um conceito, exigindo, portanto, reconstruções por parte do sujeito que levem a uma verdadeira conceituação. A seguir, descreve-se como ocorre esse processo.

Para compreender as razões funcionais da tomada de consciência, deve-se entender que esta se dá por meio de um percurso de um determinado comportamento, que é iniciado com a busca de um fim, onde os dados de observação iniciais são denominados de periféricos. Essa periferia não é definida nem pelo objeto, nem pelo sujeito, mas pela reação do sujeito em face do objeto. Dessa forma, Piaget (1977) afirma que a tomada de consciência procede da periferia para o centro, ou seja, dos objetivos e resultados, para o reconhecimento dos meios empregados e das escolhas realizadas, que levaram a um êxito ou fracasso. A Figura 5 (Piaget, 1977) ilustra esse processo.

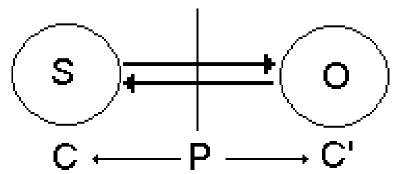


Figura 5. Tomada de consciência

Neste sentido, o conhecimento dá-se a partir da interação entre sujeito e objeto, ou seja, do ponto P, periférico ao sujeito e ao objeto, em direção aos mecanismos mais centrais da ação do sujeito C e das propriedades intrínsecas do objeto C' (Figura 5).

Assim, a tomada de consciência consiste em uma conceituação, ou seja, em uma passagem da assimilação prática a uma assimilação por meio de conceitos. Dessa forma, quanto mais o sujeito se limitar às reações elementares, mais ele deformará conceitualmente os dados de observação, levando a leituras deformadas de dados, mesmo em casos de êxito na ação. Essa deformação inferencial não constitui uma característica da tomada de consciência, refletindo a própria inconsciência do sujeito em relação aos meios empregados para obter tal êxito.

Entretanto, nem todo processo de tomada de consciência inicia por tais deformações. Muitas vezes, percebe-se um atraso da conceituação em relação à ação, e não exatamente uma contradição de princípios.

Então, pode-se observar que a tomada de consciência é, desde seu início, um processo de conceituação. As ações do sujeito são vistas por ele e assimiladas adequadamente por sua consciência, tratando-se de uma reconstrução capaz de explicar as conexões observadas no êxito de suas ações.

A tomada de consciência realiza-se a partir dos dados de observação relativos ao objeto; por outro lado, é a análise desses dados de observação que vai fornecer informações sobre o objeto e a explicação causal do seu comportamento. Isso provoca uma ação recíproca dos dados de observação sobre a ação e vice-versa. Ao ser estabelecido um relacionamento entre eles, seguem-se as coordenações inferenciais, que ultrapassam o campo dos dados de observação e permitem ao sujeito compreender causalmente os efeitos observados. Dá-se, então, um processo de idas e vindas, que refina os dados de observação e o grau de compreensão. As coordenações inferenciais são conexões deduzidas por composição operatória, tendo, consequentemente, por fonte, a lógica do sujeito. Este intercâmbio de informações vai direcionando-se da periferia para os centros C e C', caracterizando os processos de interiorização ($P \rightarrow C$) e exteriorização ($P \rightarrow C'$). A interiorização leva à construção das estruturas lógico-matemáticas e a exteriorização leva à elaboração das explicações físicas. O progresso de um leva ao progresso do outro. No domínio lógico-matemático, significa que o sujeito se torna capaz de teoria e não mais unicamente de raciocínios concretos. Por outro lado, do ponto de vista da exteriorização, ele torna-se apto a fazer variar os fatores em suas experimentações e a considerar os diversos modelos possíveis para a explicação de um fenômeno. Essa solidariedade torna-se mais estreita com o progresso da abstração.

3.1.2 Abstração Reflexionante

Para Piaget (1995), a abstração reflexionante é um dos principais motores do desenvolvimento cognitivo e um dos aspectos mais gerais do equilíbrio. Em seus estudos, Piaget sentiu necessidade de distinguir uma abstração reflexionante da abstração apoiada sobre os objetos, definindo o processo de abstração como constituído por duas grandes formas: a abstração reflexionante e a abstração empírica.

A abstração empírica é uma forma de abstração que se apoia sobre objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da ação do sujeito, denominada por Piaget de observáveis. Em outras palavras, pode-se dizer que a abstração empírica tira informações dos objetos como tais ou das ações, isto é, de suas características materiais que podem ser observadas pelo sujeito. Dessa forma, a abstração empírica depende de um sistema perceptivo que permita um conhecimento sensorial, determinado pelo tato, visão, etc. Como já dito anteriormente, esses observáveis podem ser objetos ou ações e as propriedades abstraídas pelo sujeito já existem no objeto antes de qualquer constatação por parte do sujeito.

Entretanto, a abstração empírica não consiste apenas de leituras, pois para abstrair a partir de um objeto alguma propriedade, é necessário utilizar instrumentos de assimilação (relações, significações, etc.) vindos de esquemas sensório-motores ou conceituais, não fornecidas pelo objeto e sim constituídas anteriormente pelo sujeito.

Por outro lado, a abstração reflexionante apoia-se sobre todas as atividades cognitivas do sujeito, para delas retirar propriedades e utilizar para outras finalidades. Ela pode ser observada em todos os estágios do desenvolvimento. Piaget dividiu a abstração reflexionante em dois casos particulares, denominados de abstração pseudo-empírica e abstração refletida.

A abstração pseudo-empírica apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito que, ao agir sobre o objeto e seus observáveis, retira deles propriedades que não são constatadas sensorialmente, mas a partir do conhecimento do sujeito que é jogado sobre o objeto. Nesse processo, o objeto é modificado pela ação do sujeito e é enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações. Assim, a abstração pseudo-empírica apoia-se sobre objetos materiais mas as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas no objeto por atividades do sujeito. Pode-se dizer que a abstração pseudo-empírica é uma abstração reflexionante com a ajuda dos observáveis (dos objetos ou das ações).

A abstração refletida é a abstração reflexionante com tomada de consciência, que proporciona reflexão sobre reflexões, levando ao pensamento reflexivo.

As abstrações, empírica e reflexionante, existem em todos os níveis de desenvolvimento, desde o sensório-motor, até o pensamento científico. Entretanto, nos estágios iniciais, existem muito menos diferenças entre as ações e suas coordenações do que nos estágios ulteriores.

A abstração reflexionante comporta dois aspectos inseparáveis: o reflexionamento e a reflexão. O reflexionamento é a projeção em um patamar superior daquilo que foi tirado de um patamar inferior. Podem-se identificar os seguintes patamares:

1. reflexionamento mais elementar, que conduz das ações sucessivas a sua representação;
2. reconstituição da sequência de ações, do ponto de partida ao término, reunindo as representações em um todo coordenado;
3. patamar das comparações, onde a ação total é comparada a outras, análogas ou diferentes;

4. reflexões sobre reflexões, patamar em que o sujeito encontra a razão de suas conexões.

A Figura 6 ilustra esta evolução. Esse processo de criação de novos patamares é um processo em espiral, havendo uma alternância ininterrupta de reflexionamentos-reflexões-reflexionamentos, que vai formando domínios cada vez mais amplos e alcançando formas cada vez mais ricas. Dessa forma, têm-se abstrações empíricas e pseudo-empíricas cada vez mais elaboradas, uma vez que os objetos vão sendo revestidos de novas propriedades, introduzidas pelas reflexões do sujeito. Em outras palavras, quanto mais o sujeito age e conhece o mundo que o cerca, mais ele torna-se capaz de aprender, ampliando seus conhecimentos e enriquecendo sua conceituação.

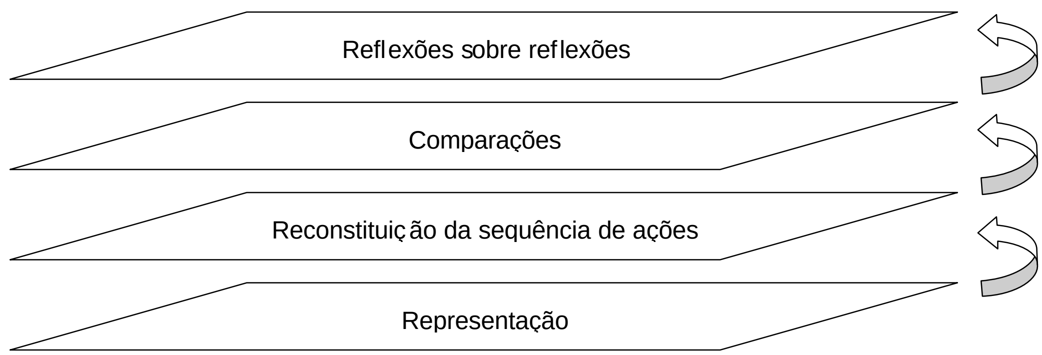


Figura 6. Patamares do Reflexionamento

Dessa forma, a abstração reflexionante torna-se cada vez mais autônoma, sendo a única a operar na lógica e na matemática, em especial pela abstração refletida. Ela purifica-se cada vez mais, em virtude de seu mecanismo de reflexão sobre reflexões.

O primeiro nível de abstração reflexionante objetiva elaborar quadros assimiladores, tendo em vista a abstração empírica. A partir de um segundo nível, ela consegue engendrar funções e operações, mas apoiando-se sobre abstrações pseudo-empíricas. A abstração refletida permanece em retardo em relação ao reflexionamento até o terceiro nível, em que se torna o instrumento necessário das reflexões sobre as reflexões, permitindo o pensamento reflexivo e tornando possível a constituição de sistemas lógico-matemáticos de cunho científico. Uma das formas finais atingidas pela abstração reflexionante é a formalização, onde a forma consegue libertar-se dos conteúdos.

Por outro lado, a abstração empírica só avança porque se apoia sobre a abstração reflexionante, ou seja, ela exige o emprego de esquemas assimiladores cuja formação emerge da abstração reflexionante. Nos estágios iniciais, os atos da abstração empírica são muito mais numerosos que as intervenções da abstração reflexionante. Porém, nos estágios ulteriores, a proporção inverte-se cada vez mais, mas sua subordinação às abstrações reflexionantes reforça seus poderes e atinge progressos consideráveis, tanto em número absoluto quanto em qualidade. Nos níveis mais elementares, quando a abstração empírica aparece quase puramente em relação à abstração reflexionante, ela limita-se a registrar as características perceptivas mais aparentes e mais globais dos objetos. Com os progressos da conceituação e das estruturas lógico-aritméticas, propriedades dos objetos e das ações, que até então haviam sido negligenciadas ou deformadas, tornam-se observáveis. Como afirma Piaget (1995, p.289),

> [...] se as abstrações empíricas puderam multiplicar-se com a ciência contemporânea, é porque foram revestidas por um tecido tão denso de abstrações reflexionantes que as tornou possíveis, de tal modo que o cientista, imerso em seus modelos, é, freqüentemente, levado a esquecer essa parte do contato obrigatório entre o sujeito e as partes das propriedades do objeto que já existiam antes de seu enquadramento e enriquecimento pelas estruturas lógico-matemáticas de natureza reflexionante.

Assim, o desenvolvimento da abstração empírica assinala uma subordinação crescente ao desenvolvimento da abstração reflexionante, devido à inserção gradual dos conteúdos nas formas. Isso porque, quanto mais as formas se enriquecem, melhor servem para a apreensão de observáveis até então não assimiláveis.

A abstração reflexionante tem papel importante na construção dos conceitos matemáticos. Para Piaget, novas construções matemáticas ocorrem por meio da abstração reflexionante (DUBINSKY, 1991). É a abstração reflexionante, na sua forma mais avançada, a abstração refletida, que conduz ao pensamento matemático.

Um sujeito invoca um esquema ou constrói um esquema novo quando quer compreender, organizar ou dar sentido a uma situação-problema vivenciada. Nestas ações de reconhecer e resolver um problema, respondendo a novas situações e criando novos problemas, é que um sujeito constrói novos conhecimentos matemáticos. Um conhecimento matemático consiste em retirar (abstrair) das coordenações dos esquemas qualidades próprias dessas coordenações. Quando um sujeito obtém sucesso na resolução de um problema, diz-se que o mesmo foi assimilado por um esquema antigo ou pela construção de um novo esquema. Por outro lado, quando não há sucesso, pode-se dizer que os esquemas existentes precisam ser acomodados, transformados ou, até mesmo, construir um novo esquema, para dar conta do novo fenômeno. Assim dá-se, de forma construtiva, o processo de abstração reflexionante.

Um esquema não é estático, mas uma atividade dinâmica do sujeito. A existência de um esquema é inseparável de contínuas construções e reconstruções. Os objetos matemáticos (números, variáveis, funções, etc.) são construídos pelo sujeito em algum momento no processo de construção do conhecimento matemático. A qualquer momento o sujeito pode agir sobre esses objetos e manipulá-los (no sentido epistemológico). A ação pode ser interiorizada, onde uma construção interna é realizada. Na medida em que o sujeito se apropria de suas ações ou de coordenações de suas ações, o que faz por reflexionamentos e reflexões (abstração reflexionante), ele interioriza suas ações. Essa interiorização, quando realizada por abstração refletida, o que ocorre com tomada de consciência, produz o pensamento reflexivo. É nesse nível que aparece o conhecimento matemático.

A seção a seguir pretende discutir o processo de aprendizagem da Matemática, suas especificidades e relações com a teoria de Piaget.

3.2 Aprendizagem de Matemática

Um dos grandes problemas da aprendizagem de Matemática pode estar relacionado à forma como ela é apresentada aos alunos. Sabe-se que a Matemática, ao longo dos tempos, foi desenvolvida por meio de tentativas e erros, a partir de afirmações que eram parcialmente corretas (e, consequentemente, parcialmente incorretas), elaboradas intuitivamente, com imprecisões e afirmações fracas, introduzidas intencionalmente na tentativa de visualizar a estrutura matemática, de forma dinâmica (TALL, 1991). Da mesma forma, ocorre a construção do conhecimento matemático: a cada novo problema matemático vivenciado, o indivíduo é perturbado e desafiado a superá-lo. Para resolver o problema, é preciso que o aluno construa novas estruturas que permitam dar conta da situação enfrentada, rever os conceitos já elaborados e tentar reconstruí-los e enriquecê-los, de forma a solucionar o problema apresentado. Se o aluno não vive o problema como uma contradição interna, não sentirá necessidade de construir algo novo para resolver tal problema. Esse processo é contínuo e são justamente esses desafios que promovem o desenvolvimento do ser humano, bem como a construção do conhecimento matemático. Conforme afirma Morgado aput Sousa (2005, p.15), "[...] podemos pois afirmar que, na perspectiva piagetiana, a aprendizagem aparece sempre ligada à superação de contradições internas surgidas entre esquemas do sujeito, que se encontram em diferentes fases de formação.".

Assim, à medida que o aluno é desafiado a resolver um novo problema até então desconhecido, um desequilíbrio cognitivo pode desencadear o processo de construção do conhecimento matemático (que se dá por abstração refletida). Segundo Montangero e Maurice-Naville (1998, p.153)

> [...] esse processo está em jogo quando uma perturbação cognitiva (antecipação desmentida dos fatos, aspecto novo do real pouco compatível com os julgamentos da criança, tomada de consciência de contradições entre seus próprios julgamentos sucessivos, etc.) provoca modificações de atividades cognitivas ou regulações, que conduzem à construção de uma nova forma de conhecimento pela qual a perturbação inicial já não é uma perturbação.

Entretanto, as aulas de Matemática não a mostram sob esse enfoque; apresentam-na de forma polida, por meio de formalismos organizados em uma sequência de teoremas, demonstrações e aplicações, e omitindo o processo de construção dos conceitos envolvidos. Esse enfoque exige um tratamento avançado da Matemática, que normalmente não é acompanhado por grande parte dos alunos, uma vez que é pouco flexível e requer uma vasta experiência com o "fazer matemática[5]".

Sabe-se que há um sucesso aparente dos alunos na resolução de problemas. Isso ocorre porque, geralmente, eles aprenderam, em suas aulas de Matemática escolar, apenas rituais e receitas, como se houvesse um roteiro ou um modelo a ser seguido na resolução de um

[5] Fazer matemática, neste contexto, significa não apenas fazer uso de conceitos e resultados da matemática e da manipulação simbólica, mas sim pensar matematicamente.

problema. Dessa forma, o que ocorre é a aprendizagem de um conjunto de procedimentos padrão, que possibilita a resolução de uma classe de problemas extremamente limitada. Esse processo está longe do verdadeiro “fazer matemática”, que exige habilidades como conjecturar, testar, intuir, deduzir, generalizar – coordenar ações e retirar dessas coordenações novas coordenações, por abstrações refletidas; os alunos adquirem apenas a capacidade de efetuar cálculos, sem compreendê-los.

Piaget (1978) afirma que a ação precede a conceituação. Muitas vezes, um sujeito realiza uma determinada ação, impulsionado por determinado objetivo a ser alcançado, e obtêm sucesso em sua realização. Entretanto, não consegue descrever os caminhos que o levaram a esse sucesso, o que mostra a ausência de compreensão dos conceitos envolvidos em seus atos. Situações como essa são frequentemente observadas nas aulas de Matemática. A valorização de métodos e roteiros para a resolução de problemas faz com que alunos resolvam os problemas apresentados sem a necessidade de uma verdadeira compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos nesses procedimentos; sem agir sobre as coordenações de suas ações e retirar delas qualidades que lhes são próprias.

No entanto, o verdadeiro trabalho dos matemáticos faz uso de uma experiência que os permite usar o conhecimento matemático de forma flexível, para resolver problemas diferentes e até então desconhecidos. Piaget (1995) afirma que quanto mais o sujeito age sobre o meio, mais ele torna-se capaz de aprender, retirando das coordenações das ações novas coordenações e sintetizando-as em estruturas, como as lógicas e matemáticas. Essa experiência matemática é adquirida por meio de um processo contínuo, a partir de diferentes problemas que permitem novas construções por parte do sujeito.

Dessa forma, acredita-se que quanto mais problemas matemáticos são enfrentados pelo sujeito, quanto mais ele pensar, conjecturar, testar suas hipóteses e reorganizar suas ideias, mais experiência matemática ele vai construir, e, consequentemente, mais problemas poderão ser resolvidos por ele, problemas estes até então desconhecidos. Nesse processo, novos conhecimentos vão sendo construídos e a capacidade de resolução de novos problemas vai enriquencendo-se e ampliando-se. Segundo Piaget (1995), a compreensão de uma estrutura torna-se proporcional à extensão dos conteúdos que ela permite engendrar. Em resumo, quanto maior o número de situações novas enfrentadas, mais conhecimento o sujeito constrói e, consequentemente, maior será sua capacidade de revestir os objetos matemáticos de propriedades até então não constatadas, de modo que as abstrações vão tornando-se mais elaboradas.

> Numa palavra, se o desenvolvimento da abstração reflexionante é o de uma depuração progressiva em direção da conquista das formas, ao contrário, o da abstração empírica assinala uma subordinação crescente ao primeiro destes do is tipos, devido à inserção gradual dos conteúdos nas formas , pois que quanto mais estas se enriquecem, melhor servem à apreensão daqueles, isto é, à apreensão de observáveis até então não assimiláveis, mesmo a título de simples constatações. (PIAGET, 1995, p.289).

Entretanto, vale salientar que não se está falando de listas intermináveis de problemas repetitivos, que seguem um mesmo modelo de resolução e não desafiam os alunos nem provocam reflexões e inquietações. Tais problemas devem exigir estratégias diferentes de resolução, bem como diferentes conceitos e propriedades matemáticos.

Diante do exposto, os professores de Matemática poderiam, em suas aulas, deixar transparecer o uso dessa experiência, mostrando o processo pelo qual passam, as tentativas e os conceitos que utilizam na resolução de problemas, uma vez que essa atividade pode envolver etapas como diferentes representações para um mesmo objeto matemático, transformações, visualizações, verificações e deduções, incluindo fases de generalização, abstração e formalização. Os alunos precisam perceber que há um caminho a ser trilhado, que envolve conhecimentos que devem ser construídos por cada sujeito, e que a apresentação de uma solução pronta e enxuta não possibilita vivenciar essa construção.

Por outro lado, sabe-se da importância do raciocínio informal, que permite manipular ideias e imagens mentais na busca de um encaixe que leve a soluções de problemas matemáticos. O ensino da Matemática deve fazer uso da experimentação, da observação e da descoberta. Isso permite uma compreensão em vários estágios necessários ao pensamento matemático, como representação, visualização, generalização, classificação, conjectura, indução, análise, síntese, abstração e formalização (DREYFUS, 1991).

A representação também tem um papel importante na Matemática, uma vez que os símbolos são indispensáveis em seu desenvolvimento. Os símbolos envolvem uma relação entre signo e significado e servem para representar um conhecimento pessoal (o significado) que é explicitado por meio do símbolo.

Uma representação simbólica é escrita externamente com o objetivo de permitir a comunicação sobre um conceito de forma fácil e precisa. Uma representação mental, por outro lado, refere-se ao esquema interno de cada pessoa, que o utiliza para agir com o mundo externo. As representações mentais são criadas na mente do indivíduo sobre um sistema de representações concretas. O sucesso em Matemática requer uma rica representação mental dos conceitos matemáticos, ou seja, a criação de vários componentes mentais para um mesmo objeto matemático (leis, gráficos, tabelas, etc.). Tal riqueza permite uma maior flexibilidade de pensamento no processo de resolução de problemas. Entretanto, o que se observa nos alunos é um pequeno número de representações, que provoca uma inflexibilidade, de modo que uma pequena mudança na estrutura de um problema pode bloqueá-los. As diferentes representações podem ser utilizadas em diversas situações matemáticas, de forma complementar ou integrada.

Todavia, apesar da importância das múltiplas representações de um conceito no processo de aprendizagem da Matemática, sua existência não é suficiente para garantir a flexibilidade de uso na resolução de um problema. Para tal, é preciso ser capaz de conectar as diferentes representações, para poder manipular a informação de modo a resolver o problema. Porém, o ensino e aprendizagem desse processo de troca de representações não é trivial, uma vez que sua estrutura é complexa, por fazer uso de muitas informações que precisam ser consideradas simultaneamente. Ser capaz de reconhecer um mesmo objeto matemático em suas diferentes representações exige níveis elevados de abstração: percebe-se que forma se transforma em conteúdo, tornando-se objeto de nosso pensamento. Pode-se dizer que o trabalho com múltiplas representações opera no patamar das *reflexões-sobre-reflexões*. Conforme Piaget (1995, p.288),

> Quanto à abstração refletida, ela permanece sistematicamente em retardo em relação ao processo reflexionante até o momento em que se torna o instrumento necessário das reflexões sobre a reflexão anterior e, em que permite, finalmente, a formação de uma meta-reflexão ou pensamento reflexivo, que torna, então, possível a constituição de sistemas lógico-matemáticos de cunho científico. A este respeito, uma das formas finais, atualmente atingidas pela abstração reflexionante, é a da formalização, caso limite no qual a forma consegue, embora com as restrições conhecidas, libertar-se dos conteúdos.

Assim, muitas vezes, os alunos ficam limitados a trabalhar com uma única representação. Para superar esse problema, pode-se buscar trabalhar intensamente as múltiplas representações de um conceito e a conexão entre eles desde o início do ensino escolar. Isso pode desenvolver nos alunos essa habilidade e proporcionar mais experiência, característica tão necessária ao sucesso na Matemática.

Outra etapa importante no “fazer matemática” é a abstração. A capacidade de abstrair conduz ao pensamento matemático avançado (na verdade, a abstração conduz a todo e qualquer conhecimento lógico ou matemático, desde os níveis mais elementares até a matemática mais avançada). Dois processos estão envolvidos na abstração: a generalização e a síntese.

Para Dreyfus (1991), generalizar significa derivar de casos particulares propriedades comuns, para expandir o domínio de validação das mesmas. Isso exige uma transição dos casos particulares para o caso geral. Muitas vezes, as exigências cognitivas no processo de generalização são consideráveis e, na história da Matemática, algumas delas levaram décadas para se concretizarem.

Por outro lado, o processo de síntese consiste em compor partes em um todo, sendo que esse todo significa mais que a soma das partes. Para tal, é necessário estabelecer conexões, relações entre conceitos, compondo um todo inter-relacionado e coerente.

O processo de abstração é intimamente ligado à generalização (chega-se a generalização construtiva pela abstração reflexionante). Um dos fios condutores da abstração é a necessidade de se obter uma natureza geral para o objeto de estudo. Entretanto, enquanto a generalização normalmente envolve uma expansão da estrutura de conhecimento do indivíduo, a abstração envolve uma reconstrução mental destas estruturas (DREYFUS, 1991).

Para Piaget (1995), existe uma relação circular entre a abstração e a generalização, em que cada uma implica na outra. Assim, o resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização, bem como o resultado de uma abstração empírica conduz a precisar o grau de uma generalização das propriedades extraídas do objeto. Reciprocamente, toda generalização supõe uma abstração prévia ou a delimitação das propriedades generalizadas.

Esses processos envolvem as diferentes formas de abstração definidas por Piaget: abstração empírica e abstração reflexionante. No início do processo de generalização, é preciso extrair propriedades dos objetos (patamar da ação e representação), comparar os diferentes objetos matemáticos, identificando propriedades comuns (patamar das comparações), para finalmente fazer a transição dos casos particulares para o geral (patamar das reflexões-sobre-reflexões). Segundo Piaget (1995, p.284),

> A abstração consiste, por si mesma, com efeito, numa diferenciação, porquanto separa uma característica para transferi-la, e uma nova diferenciação acarreta a necessidade de integração em novas totalidades, sem as quais a assimilação deixa de funcionar, daí o princípio comum da formação das novidades: a abstração reflexionante conduz a generalizações, por isso mesmo construtivas, e não simplesmente indutivas ou extensivas como a abstração empírica.

Podem ser definidos diferentes tipos de generalização, de acordo com as atividades cognitivas envolvidas. A generalização expansiva ocorre quando o indivíduo já possui estruturas cognitivas, e não há necessidade de mudança nas ideias e concepções correntes, apenas uma expansão das mesmas. Por outro lado, uma generalização que exige reconstrução das estruturas cognitivas já existentes é uma generalização reconstrutiva (TALL, 1991).

A abstração é um processo de construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Esse processo depende do isolamento de propriedades e relações apropriadas e exige a habilidade de deslocar a atenção dos objetos para a estrutura de suas propriedades e relações (DREYFUS, 1991). Assim, a abstração está conectada às imagens visuais, pois representa relações que são tiradas de objetos concretos, para gerar as imagens mentais.

3.2.1 A Linguagem e os Símbolos na Aprendizagem de Matemática

A Matemática, como linguagem formal, caracteriza-se como um sistema simbólico escrito. As linguagens formais foram criadas por se considerarem as línguas naturais imperfeitas, que permitem ambiguidades. A linguagem matemática surgiu para permitir o exercício da razão, cuja gramática permite uma expressão precisa, sem dar margens a duplas interpretações (MACHADO, 1990).

> Aprender Matemática é aprender a utilizar suas diferentes linguagens (aritmética, geométrica, algébrica, gráfica, etc.). Na atualidade, as linguagens matemáticas estão presentes em quase todas as áreas do conhecimento. Por isso, o fato de dominá-las passa a constituir-se um saber necessário. (KLÜSENER, 1998, p.177).

Sabe-se que por meio da leitura e da escrita somos capazes de nos comunicar. Porém, ler e escrever não significa compreender apenas nossa língua materna, mas todas as formas de interpretar, explicar e analisar o mundo. A Matemática é uma dessas formas, com seus códigos e suas linguagens, ou seja, com um sistema de representação e comunicação próprio.

Compreender Matemática não se resume a manipular técnicas operatórias, de forma mecânica, nem memorizar fórmulas, regras e propriedades. Compreender Matemática é entender o que se lê e escreve, buscando significado para isso. Em outras palavras, para entender Matemática não basta saber ler, escrever e contar. É preciso saber expressar-se, pois a expressão auxilia na concretização do pensamento, obrigando o sujeito a ordenar imagens mentais, criando a necessidade de um vocabulário adequado. Este vocabulário consiste nos símbolos matemáticos.

Quando um sujeito consegue se expressar, argumentando sobre determinado conceito ou assunto, está em um nível mais elevado de compreensão se comparado àquele sujeito que apenas resolve numericamente um problema, por meio da utilização de uma fórmula, regra ou equação. Assim, na aprendizagem de Matemática, é preciso incentivar o aluno a pensar e expressar o que pensa, seja falando ou escrevendo, de modo a justificar suas ideias e refletir sobre suas concepções. Se um sujeito consegue expressar-se sobre determinado assunto, há indícios de que ele está em atividade reflexiva, ou seja, em processo de coordenação do pensamento (PIAGET, 1995).

A linguagem matemática é uma linguagem simbólica que opera em dois níveis: semântico, em que os símbolos, os sinais e as notações possuem um significado claro e preciso; e sintático, em que as regras, as propriedades e as estruturas podem ser operadas sem a referência direta a nenhum significado (KLÜSENER, 1998). Assim, a linguagem matemática expressa a síntese formalizada de conceitos, e essa formalização inclui um sistema de significações.

A comunicação em Matemática tem sido realizada, basicamente, de forma escrita. As línguas naturais faladas podem até descrever objetos matemáticos e suas propriedades, como, por exemplo, o conhecido teorema de Pitágoras, que afirma que "*a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*". Mas o simbolismo permite descrever a mesma propriedade de forma direta, rápida e precisa, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, quando as propriedades estruturais tornam-se mais complexas, sua descrição torna-se difícil de ser falada e compreendida sem a utilização de símbolos. O simbolismo apresenta-se como um simplificador e facilitador da Matemática, permitindo clareza e rapidez na resolução de problemas e na expressão de ideias. Entretanto, da mesma forma como a linguagem matemática é imprescindível, a necessidade de dar sentido a cada símbolo também é de extrema importância.

Por outro lado, para os alunos, tal simbolismo pode ser difícil de ser compreendido, assimilado e corretamente utilizado. É importante que o professor esteja atento à atuação dos alunos, procurando analisar as estratégias de solução, a fim de identificar as dificuldades apresentadas. Para tal, é preciso que aluno argumente sobre sua solução e reflita sobre ideias e conceitos já adquiridos, para que sinta a necessidade de reorganizar seus conhecimentos. Assim, torna-se possível uma aprendizagem mais significativa, que não prioriza a memorização.

Se o aluno, além de resolver um problema analiticamente, tem a tarefa de justificar suas escolhas e procedimentos e analisar os resultados obtidos, ele estará refletindo e estabelecendo relações entre conceitos. Dessa forma, é possível que uma maior aproximação entre técnica e significado possa se estabelecer e, quem sabe, auxiliar no processo de aprendizagem de Matemática. Nesse sentido, a habilidade de ler e escrever sobre Matemática parece essencial no processo de aprendizagem.

Becker (2001) reforça essa ideia, quando afirma que falar e escrever são exercícios lógico-matemáticos, pois ao falar e escrever sobre o que se está pensando, o sujeito pode agir sobre o meio, fazendo-se pólo de interação com outros sujeitos e, ao fazer isso, tem condições de voltar-se sobre si mesmo e, por um processo de tomada de consciência, desenvolver-se.

A comunicação em Matemática, ao longo de toda sua história, fez uso de sistema simbólico de representação para expressar os diferentes objetos matemáticos (conceitos, proposições, argumentações, etc.). Isso significa que a Matemática e seu tratamento dependem fortemente de um sistema de representação, visto que os objetos matemáticos não são objetos perceptíveis ou observáveis. São os sistemas de representação que permitem a concretização dos objetos matemáticos de forma a tornarem-se passíveis de difusão e entendimento. É com os sistemas de representação que a produção do conhecimento matemático avança e se difunde. As representações para um mesmo objeto podem ser diferentes. Por exemplo: uma função pode ser representada via uma expressão algébrica, ou via um gráfico ou ainda via uma tabela de números. Segundo Duval (1993), um mesmo objeto matemático pode ser representado por mais de uma representação ou registro. Dessa forma, no processo de aprendizagem de Matemática, é preciso desenvolver a habilidade de trabalhar em diferentes registros, ou seja, sua compreensão supõe a coordenação de diferentes (ao menos dois) registros de representações semióticas. Assim, pode-se dizer que a complexidade do problema semântico da linguagem matemática dá-se também pela variedade de registros semióticos utilizados no "fazer matemática".

A dificuldade na aprendizagem da Matemática ocorre, na maioria das vezes, quando se faz necessária uma troca de registros. Segundo Duval (1993), os alunos não reconhecem o mesmo objeto matemático em duas representações diferentes, o que limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem.

Muitas vezes, percebe-se que os alunos resolvem determinados problemas e equações corretamente, mas não conseguem justificar o procedimento utilizado ou argumentar sobre o que foi feito, como foi feito e porque foi feito. Nota-se, nesses casos, uma situação de "saber fazer", mas "sem compreender". Esses alunos sabem resolver o problema, encontram uma solução para o mesmo, mas não compreendem o que realmente fizeram e, muitas vezes, nem mesmo dão uma interpretação para a solução encontrada. Tais situações dão indícios de que se realizam operações e cálculos de forma mecânica, sem significado, portanto, sem conceituação. Para chegar ao nível da compreensão, é necessário atingir níveis mais elevados de abstração, o que acontece mediante tomadas de consciência, especialmente, mediante abstração refletida (abstração reflexionante com tomada de consciência). Conforme Piaget (1978, p. 176),

> [...] fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos, e compreender é conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, uti lizadas na ação.

Na disciplina de Cálculo Diferencial, por exemplo, pode-se perceber essa situação de "fazer sem compreender" em diversos momentos[6]. Uma das aplicações do conceito de derivada é sua influência no comportamento das funções, determinando intervalos em que as mesmas têm comportamento crescente ou decrescente. Os alunos, de um modo geral, sabem que se o sinal da derivada é positivo em determinado intervalo, então a função é crescente nesse intervalo; da mesma forma, se o sinal da derivada é negativo em determinado intervalo, então a função é decrescente nesse intervalo. Ao apresentar-se a lei de uma função ao aluno e solicitar os intervalos em que a mesma é crescente e decrescente, a grande maioria obtém êxito na solução do problema. Sua solução consiste em encontrar a derivada dessa função e determinar os intervalos em que a mesma possui sinal positivo e negativo. Por exemplo, pode-se considerar a função polinomial $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Encontrando a derivada da mesma, temos $f'(x) = 3x^2 - 3$. Para determinar os intervalos em que a mesma é positiva e negativa, é preciso determinar suas raízes, que são $x = -1$ e $x = 1$. Fazendo um teste de sinal nos intervalos determinados pelas raízes, ou seja, nos intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ e $(1,+\infty)$, consta-se o que mostra a Tabela 1, ou seja, em $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$ a função é crescente e em $(-1,1)$ a função é decrescente.

Tabela 1. Comportamento da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$

Intervalo	Sinal de f'	Comportamento de f
$(-\infty,-1)$	Positivo	Crescente
$(-1,1)$	Negativo	Decrescente
$(1,+\infty)$	Positivo	Crescente

Porém, se apresentar ao aluno o gráfico da função derivada (Figura 7), forma de representação de uma função na qual a identificação do sinal da mesma é realizada de forma direta, fazendo a leitura do gráfico, e solicitar os intervalos em que a função é crescente e decrescente (como no problema anterior), poucos são os alunos que resolvem o problema.

[6] Relato fundamentado na experiência da autora como docente.

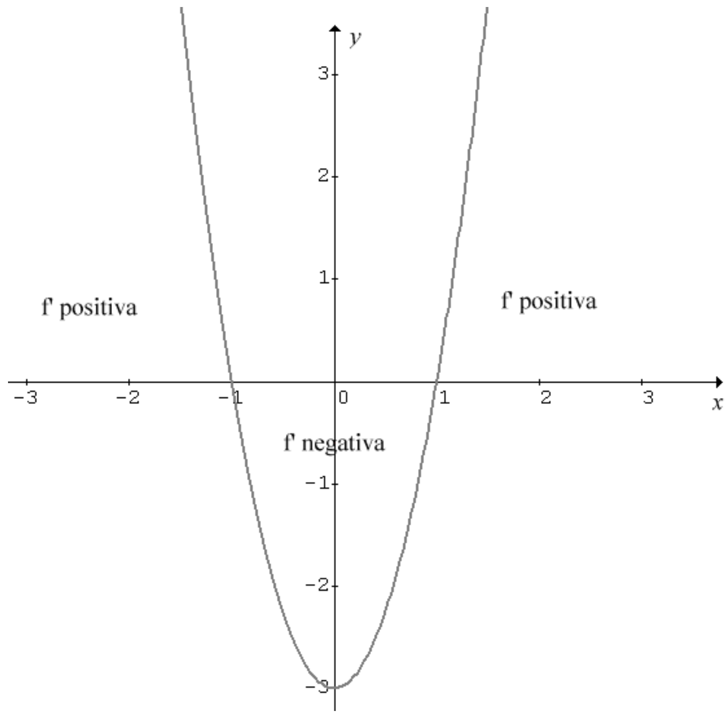


Figura 7. Gráfico da derivada da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$

Acredita-se que isso mostra que a solução do primeiro problema está sendo desenvolvida sem que haja uma compreensão dos conceitos envolvidos, isto é, mesmo que os alunos obtenham êxito na solução do primeiro problema, não há compreensão, uma vez que, ao se propor o mesmo problema com uma representação diferente, não há êxito na sua solução. Pode-se dizer que há ação sem compreensão. Em outras palavras, falta um patamar de generalidade suficiente em que uma reflexão responda a reflexionamentos anteriores a ponto de construir um novo patamar que englobe as duas diferentes situações (diferentes representações de um mesmo problema). Tal patamar é realizado por abstrações refletidas.

Em Matemática, situações como essa são observadas frequentemente quando são apresentados problemas em diferentes representações, de modo que não há como resolvê-lo "seguindo um modelo", mas sim por meio da compreensão dos conceitos envolvidos no mesmo. Para Piaget (1978, p. 179), "compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto fazer é somente utilizá-las com sucesso".

Percebe-se ainda, nessa situação, que um mesmo problema pode ser apresentado por diferentes representações. Entretanto, os alunos reconhecem apenas uma delas. Para compreender Matemática, é preciso ser capaz de transitar entre as múltiplas representações de um mesmo objeto matemático. Isso dá indícios, mais uma vez, de que não há compreensão suficiente do conceito matemático envolvido.

Pode-se analisar ainda a situação apresentada do ponto de vista da teoria da abstração reflexionante de Piaget. Verificou-se que, para a resolução do problema inicial, basta a realização do seguinte procedimento:

1. derivar a função $f(x) = x^3 - 3x + 4$, obtendo $f'(x) = 3x^2 - 3$;
2. encontrar as raízes de $f'(x) = 3x^2 - 3$, obtendo $x = -1$ e $x = 1$;
3. estabelecer os intervalos determinados pelas raízes encontradas, obtendo $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ e $(1,+\infty)$;
4. analisar o sinal da derivada nestes intervalos;
5. estabelecer as relações entre o sinal da derivada e o comportamento da função.

Uma vez compreendido esse método, os alunos são capazes de determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de qualquer outra função polinomial. E isso não requer tomada de consciência de seus atos. Acredita-se que essa resolução, de forma mecânica, não exige níveis elevados de abstração, ficando no patamar da reconstituição e descrição das sequências de ações. Entretanto, ao se apresentar o problema de outra forma, sua solução exige o estabelecimento de relações entre as diferentes representações para uma mesma função matemática, bem como a transição entre elas. Para tanto, é necessário que o conceito de função esteja compreendido, para transformá-lo em objeto de pensamento, relacionando-o com o resultado matemático já conhecido (se o sinal da derivada é positivo, então a função é crescente; se o sinal da derivada é negativo, então a função é decrescente). São as abstrações refletidas que permitem esta construção.

Pode-se perceber que a representação e a abstração são processos complementares. Por um lado, um conceito matemático pode ser abstraído de várias representações e, por outro lado, representações são sempre representações de algum conceito abstrato, melhor dito, formal. Quando várias representações de um mesmo objeto são consideradas simultaneamente, a relação com o conceito abstrato formal torna-se presente e importante.

Assim, segundo Dreyfus (1991) o processo de aprendizagem de Matemática pode ser formado por quatro estágios: utilização de uma única representação; utilização de mais de uma representação simultaneamente (o que envolve comparação – terceira etapa do reflexionamento); estabelecimento de relações entre as representações; e, integração das representações e flexibilização da troca entre elas (Figura 8).

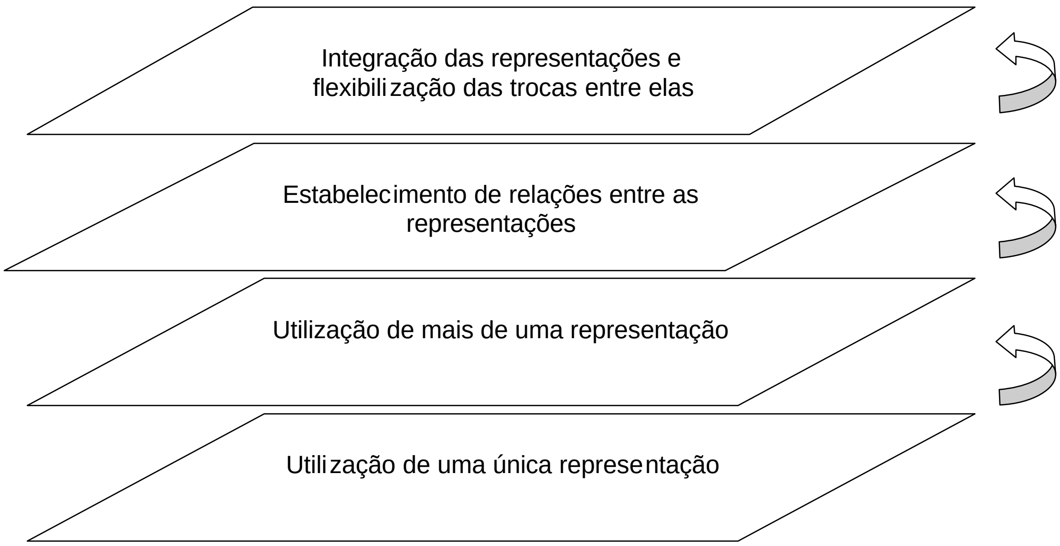


Figura 8. Estágios da aprendizagem da Matemática

No primeiro estágio, o processo começa com uma situação concreta que exige uma única representação. No segundo estágio, múltiplas representações são utilizadas em paralelo. O processo de transição para o conceito depende essencialmente das relações estabelecidas entre as diferentes representações. Relações sólidas e consistentes permitem ao sujeito transitar entre as representações. Quando um processo de integração entre as diferentes representações ocorre, onde propriedades comuns permanecem, forma-se o conceito, no sentido de uma totalidade formal que se abre para o mundo dos possíveis entre os quais a realidade é apenas uma parte.

Assim, o uso de múltiplas representações permite a transição de uma compreensão concreta e limitada para uma compreensão mais formal e flexível. Do mesmo modo, o uso de uma única representação e a resolução de problemas apresentados de forma semelhante, não trabalha em patamares elevados de reflexionamento. Entretanto, na medida em que diferentes representações vão sendo reconhecidas e relacionadas, novas estruturas cognitivas vão estabelecendo-se, de modo que, quando o sujeito se torna capaz de flexibilizar as trocas entre elas e integrá-las em um todo coerente, pode-se dizer que o conceito abstrato (formal) de função está formado (tornou-se forma), operando em níveis elevados de abstração, libertando-se do uso de situações concretas e de casos particulares.

Enfim, compreende-se que a aprendizagem de Matemática é um processo que envolve, entre outras características, o exercício da expressão, argumentação, justificativa, em paralelo com a capacidade de reconhecer e trabalhar com as diferentes representações. Como afirma Ferreira (2005, p. 3), “o educador precisa compreender que a matemática é construída em práticas sociais, cuja comunicação se estrutura através da linguagem não só oral, mas escrita.”.

Acredita-se que as tecnologias da informação e comunicação podem auxiliar neste processo de construção do conhecimento matemático. Assim, o capítulo a seguir aborda esta temática.

4 EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA: DO PRESENCIAL AO VIRTUAL

O avanço tecnológico vem modificando as dimensões da inter-relação com o mundo. As redes eletrônicas de computadores modificam o conceito de tempo e espaço pois, indivíduos que moram em lugares distantes e isolados, podem estar conectados a grandes centros de pesquisa, bibliotecas, colegas de profissão, bem como inúmeros serviços. De qualquer lugar, é possível comunicar-se, trabalhar com outras pessoas sem estar fisicamente com elas, manter-se informado. Além disso, muitas atividades que tomavam tempo, implicavam em deslocamentos, filas e outros aborrecimentos, já podem ser realizadas por meio de redes, sem sair de casa.

Frente a esse contexto, pretende-se discutir as implicações da tecnologia na Educação em geral, e na Educação Matemática, em particular.

4.1 A Virtualidade

A popularização das redes de computadores vem promovendo um novo espaço de comunicação, que está influenciando e modificando a economia, a política e a cultura mundiais. Cabe-nos explorar as potencialidades desse novo espaço e experimentar essas novas formas de comunicação.

A comunicação, ao longo dos tempos, sofreu várias mutações, e essa é apenas mais uma destas transformações. Inicialmente, tinham-se as sociedades orais, onde as mensagens eram discursivas e sempre recebidas no mesmo tempo e lugar em que eram produzidas. Emissores e receptores compartilhavam uma mesma situação e um universo semelhante de significação. Eles evoluíam no mesmo contexto. Com o surgimento da escrita, as mensagens passaram a separar-se do contexto vivo em que foram produzidas, sendo possível ler textos de pessoas situadas a quilômetros de distância ou de séculos passados. A partir de então, emissores e receptores não mais dividiam a mesma situação. Isso ocasionava, muitas vezes, problemas de interpretação e recepção. A partir disso, buscou-se universalizar as mensagens, tornando-as imutáveis pelas interpretações e traduções, de modo a evitar tais problemas. O significado da mensagem deve ser o mesmo em toda parte. Com a cibercultura, Lévy (1999) acredita que a co-presença das mensagens volta a era da oralidade, mesmo que em outra escala. Agora, a universalidade das mensagens se constrói e se estende por meio da interconexão das mesmas, permanentemente renovadas.

Para Lévy (1999), esse novo meio de comunicação, comunitário e interativo, que surgiu com as redes mundiais de computadores, é denominado de ciberespaço. Com ele, um novo espaço de comunicação, de socialização, de organização e de transação, assim como um novo meio de informação e de conhecimento, estabelece-se. Novas formas de mensagens estão proliferando-se nas redes de computadores, como hipertextos, simulações e mundos virtuais. A virtualidade constitui essa nova face da informação. Mas não apenas a informação está em processo de virtualização. O ciberespaço vem gerando uma nova forma de relacionamento, que é independente de lugar geográfico e coincidência de tempo.

Uma nova forma de comunicação surge, possibilitando não mais apenas as formas um-para-todos ou um-para-um de comunicação, mas todos-com-todos. No mundo virtual, as pessoas, ao interagir, o exploram e o atualizam simultaneamente, tornando-o um espaço de criação e inteligência coletivas. É possível não apenas ler um livro, ou navegar em um hipertexto, ou assistir a um vídeo, mas também inserir imagens e textos, alimentando e atualizando essa memória distante. Assim, todos podem ler e escrever, compartilhando e cooperando, independente da posição geográfica.

Frente a esse contexto, é impossível não considerar o impacto e as mudanças que essa tecnologia causará na Educação. A velocidade com que a informação está sendo renovada vem exigindo a necessidade de aperfeiçoamento de profissionais das mais diversas áreas do conhecimento humano.

4.2 A Educação a Distância e Semipresencial: os papéis do professor e do aluno

Muito se tem discutido a respeito de Educação a Distância, no Brasil e no mundo. A popularização da internet motivou essa discussão e abriu novos espaços para se desenvolver uma nova forma de ensinar e aprender, de forma presencial e virtual. As metodologias tradicionais de ensino estão se tornando cada vez mais inadequadas, uma vez que a internet permite uma maior flexibilização do ensino, tornando mais virtuais as aulas presenciais. Com o acesso à internet, é possível integrar os momentos de sala de aula com os momentos de aprendizagem virtual extraclasse, permitindo que os alunos ampliem seus momentos de aprendizagem, não ficando restritos aos encontros presenciais. Assim, o processo de ensinar e aprender, nos dias de hoje, não se limita ao trabalho dentro da sala de aula, pois a internet abre um imenso horizonte que possibilita a flexibilização e evolução das aulas presenciais, bem como de cursos totalmente virtuais.

A proposta de integrar o presencial e o virtual faz valorizar os momentos presenciais, em que estamos em presença física. O meio virtual é um grande aliado, que facilita a comunicação e o contato a distância, em qualquer momento, sem a necessidade de sair do espaço profissional ou familiar. As interações virtuais têm o seu valor e são importantes para o processo de aprendizagem: é possível realizar debates em torno de um tema trabalhado, ou utilizar o espaço virtual para tirar dúvidas e aprofundar conceitos. Assim, segundo Harasim (2005), qualquer curso que enfatize a discussão aprofundada de um assunto pode ser conduzido com eficácia apenas em um ambiente *on-line*, assim como cursos que exigem muitas tarefas escritas.

Uma das principais contribuições de cursos semipresenciais ou virtuais é a aprendizagem ativa, que implica em compromisso social e cognitivo. Para participar desses cursos é preciso opinar, responder aos colegas e compartilhar ideias, pois o aluno só está socialmente *on-line* quando faz um comentário. A participação ativa leva à aprendizagem, pois escrever ideias e informações exige esforço intelectual e auxilia tanto na compreensão quanto na retenção. Formular e articular uma afirmação são ações cognitivas e constituem um processo valioso do desenvolvimento humano. Para fazer comentários, os alunos precisam organizar ideias e pensamentos de forma coerente, e isso consiste em um trabalho intelectual. Além disso, quando ideias e informações são publicadas em fóruns ou listas de discussões, podem desencadear novas respostas, como solicitação de esclarecimentos, desenvolvimento mais aprofundado da ideia ou até mesmo desacordos. Estas trocas fazem com que o autor da mensagem e os demais participantes da discussão aprimorem seus conceitos ou os revejam, em um processo de reconstrução cognitiva. Assim, as ideias são desenvolvidas interativamente, havendo uma motivação à reflexão, à interação e, consequentemente, à construção do conhecimento.

Alguns alunos exibem um comportamento excelente de comunicação no meio virtual, por serem ágeis no raciocínio e na escrita, enquanto outros permanecem apenas como observadores. Tais características dependem do perfil de cada aluno, considerando sua maturidade, sua autonomia, sua motivação, seu tempo disponível e sua facilidade de acesso. Por esse motivo, é importante diversificar as atividades, bem como incentivar os mais passivos, para que o maior número possível de alunos tenha experiências de sucesso no ambiente virtual. Assim, a comunicação virtual permitirá interações espaciotemporais mais livres, adaptação a ritmos diferentes dos alunos e maior liberdade de expressão a distância.

O ritmo ideal do presencial-virtual depende de muitos fatores. Cada professor deverá encontrar o seu ponto ideal de equilíbrio, dependendo do grau de maturidade e cooperação de cada turma.

Aprender a ensinar e a aprender nesse novo contexto, que integra o presencial e o virtual, é um dos grandes desafios que a educação está enfrentando atualmente. Com relação ao papel do professor, muda a relação de espaço, tempo e comunicação com os alunos. As trocas e interações estendem-se da sala de aula para o virtual, assim como o tempo dessas trocas e interações se amplia para qualquer dia e horário. Assim, a comunicação não se dá mais apenas na sala de aula, mas também na internet, por e-mail, fórum de discussão, sala de bate-papo. Este novo professor deve contemplar características do professor convencional, capaz de dar uma boa aula expositiva, e também as de um estimulador, incentivador de pesquisas e coordenador de debates.

Com relação a cursos completamente a distância, deve-se fugir do enfoque totalmente conteudista, que busca apresentar conteúdos e exigir a resolução de exercícios, e buscar formas de valorizar mais as interações, de modo a tornar o espaço virtual um ambiente favorável à aprendizagem. No início da Educação a Distância mediada pelos recursos da internet, toda a atenção estava voltada para o professor e para os recursos tecnológicos, enquanto o aluno ficava como coadjuvante no processo. Hoje em dia, já se percebe que o aluno deve ser o centro e o foco da aprendizagem, tanto em situações presenciais quanto em cursos *on-line*, ou seja, a preocupação principal não deve ser ensinar, mas facilitar a construção do conhecimento. Segundo Palloff e Pratt (2004), algumas características são necessárias para permitir ao professor ter sucesso na sala de aula *on-line*:

- Flexibilidade;
- Disposição para aprender com os alunos;
- Disposição para ceder o controle aos alunos tanto na elaboração do curso quanto no processo de aprendizagem;
- Disposição para colaborar;
- Disposição para afastar-se do papel tradicional do professor.

Por outro lado, para que um aluno tenha sucesso em um curso virtual, é preciso que tenha automotivação e autodisciplina, pois o ambiente *on-line* é livre e, juntamente com essa liberdade, deve haver responsabilidade, comprometimento e disciplina. Além disso, o aluno de um curso a distância deve saber trabalhar em conjunto com seus colegas para atingir seus objetivos de aprendizagem e os objetivos do seu curso. Sabendo que o professor é apenas um facilitador, o aluno torna-se responsável pelo seu processo de aprendizagem.

Entretanto, motivar e manter um aluno virtual não é fácil. Para Palloff e Pratt (2004), quanto mais jovens os alunos, ou quanto mais baixo o nível educacional, maior é a estrutura necessária no ambiente *on-line*. Tal estrutura deve contemplar as seguintes características:

- Criação de horários específicos para o envio de mensagens;
- Clareza quanto ao número de respostas semanais às mensagens de outros alunos;
- Clareza quanto à natureza das mensagens, ou seja, delinear o que constitui uma mensagem substancial;
- Clareza sobre as expectativas do curso;
- Atenção à participação dos alunos e acompanhamento de mudanças de comportamento dos mesmos.

Ainda, para que um aluno tenha sucesso em um curso a distância, é preciso gostar de trabalhar em conjunto, pois a colaboração é uma das principais características de comunidades virtuais. A colaboração ajuda os alunos a atingir níveis mais profundos de geração de conhecimento, uma vez que envolve o trabalho conjunto e a criação de objetivos comuns, que levam a um processo compartilhado de construção de conhecimento. Para Palloff e Pratt

(2004), a colaboração se sustenta quando o diálogo, a crítica e o trabalho em conjunto são estimulados.

Pode-se perceber, desse modo, que o simples acesso ao ambiente de aprendizagem de forma regular não contribui substancialmente para uma discussão e para o desenvolvimento da comunidade virtual. As discussões podem ocorrer de forma síncrona ou assíncrona. As síncronas permitem que os alunos conversem não apenas sobre o assunto proposto, mas também sobre outros tópicos, o que incentiva a socialização e a formação da comunidade. Porém, a discussão assíncrona pode ser a melhor forma de sustentar a interatividade de um curso a distância, desde que os alunos assumam a responsabilidade de interagir ativamente.

A natureza das interações é de extrema importância para se desenvolver uma boa comunicação virtual. Acessar o ambiente e participar das discussões dizendo “concordo” não contribui para uma reflexão séria. Uma boa mensagem deve ser argumentada, de modo a justificar um ponto de vista, contribuindo para a discussão em questão, ou dando início a uma nova discussão.

Entretanto, cabe ao professor aumentar a interatividade e a participação dos alunos. Para isso, é preciso deixar claro o tempo que cada aluno deverá dedicar ao curso, bem como esclarecer como se dá uma aprendizagem *on-line* e quais as responsabilidades de cada envolvido.

Um outro fator que precisa ser observado em EAD é a questão do gerenciamento do tempo por parte dos alunos. Sabe-se que o ritmo de um curso a distância é diferente do ritmo de um curso presencial. Como os participantes não se encontram presencialmente, as leituras, as participações e as elaborações de trabalhos devem ser organizadas e mantidas em dia. Muitos alunos mostram-se ansiosos em situações de EAD, por acharem que precisam retornar aos questionamentos de professores e colegas a toda hora, enquanto outros adiam sua participação e acabam sufocados pelo tempo quando resolvem cumprir as tarefas do curso. Ainda, equivocadamente, há alunos que tendem a acreditar que os cursos a distância são mais leves e mais fáceis. Porém, sabe-se que os cursos de EAD, normalmente, tomam pelo menos o dobro do tempo do aluno, pela quantidade de leituras inerentes a esse processo.

Contudo, todas as questões levantadas aqui ainda precisam ser analisadas no contexto da Educação Matemática, que possui características e especificidades próprias, inerentes a sua natureza e linguagem. A seção a seguir procura discutir a situação atual da Educação a Distância de Matemática.

4.3 Educação Matemática e as Tecnologias da Informação e Comunicação

As vantagens da comunicação e da aprendizagem colaborativa, apresentadas anteriormente, ainda não podem ser totalmente observadas no contexto da Matemática e demais áreas científicas.

A aprendizagem de Matemática *on-line* não vem apresentando bons resultados (SMITH; FERGUSON, 2005). Um dos fatores que pode estar relacionado a tais dificuldades é a falta de suporte à comunicação matemática. Os ambientes de aprendizagem comumente utilizados, e analisados nesta pesquisa, não oferecem suporte adequado para a utilização da notação científica.

Percebe-se que o processo de aprendizagem da Matemática a distância tem sido comprometido devido às limitações dos ambientes e das ferramentas voltados à EAD, que ainda não apresentam recursos suficientes para proporcionar interações de qualidade na área científica. Sabe-se que apenas a linguagem natural não é suficiente para promover uma conversação matemática, uma vez que esta é formada por uma linguagem específica, formada por símbolos próprios, necessários para que se expressem ideias e conceitos de forma precisa. Smith, Fegurson e Izubuchi (2006) destacam que os ambientes virtuais de aprendizagem têm enfatizado a comunicação escrita, por meio da linguagem natural, para promover debates e discussões, mas que esses ambientes não fornecem ferramentas que permitam uma comunicação matemática, vital para o processo de aprendizagem dessa disciplina. Em situações de ensino presencial, Smith, Fegurson e Izubuchi (2006) destacam que a comunicação é contínua, formando um encadeamento de ideias, perguntas e respostas, elaboradas entre professores e alunos. Tal comunicação se dá por meio da notação matemática; dada a carência de ambientes virtuais com tais recursos, a comunicação torna-se trabalhosa, necessitando de arquivos anexos, o que interrompe o encadeamento e naturalidade da comunicação.

Segundo Smith e Fegurson (2005), para inserir notação matemática em documentos *on-line*, os professores submetem-se ao seguinte processo: utilização de um editor de textos, como por exemplo o Microsoft Word, para gerar um arquivo com a notação matemática; salvar o arquivo como uma imagem; enviar a imagem com anexo no ambiente de aprendizagem. Percebe-se que a comunicação matemática torna-se exaustiva e pouco amigável, consumindo um tempo excessivo dos professores para o envio de uma simples mensagem. Por parte dos alunos, o problema ainda se agrava, uma vez que nem todos possuem editores de textos com suporte à notação matemática. Há também o desgaste em aprender a utilizar estas ferramentas, que, combinado ao processo de aprendizagem do próprio ambiente e do conteúdo em questão, acaba desencorajando os alunos no processo de comunicação e interação, fundamentais para a aprendizagem a distância.

Engelbrecht e Harding (2004) acreditam que os professores de Matemática ainda não se encontram entusiasmados com as possibilidades oferecidas pela internet. Esta relutância, entre outros fatores, está relacionada ao fato de que é senso comum entre os professores de matemática que o contato face a face é necessário para aprender Matemática. Outro fator que contribui para a descrença em cursos a distância por parte dos professores dessa área é relativo aos problemas ainda encontrados na representação dos símbolos matemáticos na internet. Entretanto, Engelbrecht e Harding (2004) visualizam que tais tecnologias podem ser desenvolvidas e que, em pouco tempo, não haverá distinção entre educação presencial e a distância, fazendo com que estas práticas tornem-se integradas. Como já mencionado anteriormente, muitos cursos presenciais já fazem uso de recursos tecnológicos, tomando um caráter semipresencial, de modo a viabilizar interações e discussões em horários extraclasse, pelos meios de comunicação oferecidos pela internet. Cada vez mais será possível agendar atividades *on-line*, e as atividades presenciais serão cada vez menos frequentes.

Sabe-se que a colaboração é parte importante do processo de aprendizagem, tanto na educação presencial quanto a distância. Entretanto, ela está sendo prejudicada nas áreas científicas, devido aos transtornos de comunicação mediados pela internet, já mencionados anteriormente. O processo de aprendizagem de Matemática envolve, necessariamente, a utilização e compreensão de sua linguagem de símbolos. Em situações de ensino presenciais, o professor, ao escrever uma equação ou expressão matemática no quadro-negro, verbaliza e descreve o significado da simbologia.

Segundo Leventhal (2004a), a linguagem falada e escrita devem caminhar juntas, pois ambas fazem parte do mesmo processo de comunicação. Além disso, afirma que a utilização de gestos durante o processo de comunicação matemática é bastante importante, destacando duas formas distintas de gesticular: apontar e ilustrar. Apontar significa indicar ou destacar algum objeto, enquanto ilustrar significa fornecer mais informações sobre o objeto. Pesquisas indicam que os gestos ajudam na aprendizagem (LEVENTHAL, 2004a).

Evidentemente, tais características ainda não são observadas em um ambiente de EAD. Para tentar minimizar os problemas enfrentados na EAD em Matemática, Leventhall (2004) investigou quais seriam os quesitos necessários para o ensino e aprendizagem de Matemática *on-line*. Nessa pesquisa, buscou identificar quais estratégias de comunicação são indispensáveis na Educação Matemática presencial e que, consequentemente, deveriam estar também presentes em ferramentas de EAD, para proporcionar ambientes de aprendizagem *on-line* eficazes. Dentre as categorias de comportamento identificadas por estudantes e professores como necessárias à comunicação matemática, tem-se as seguintes:

- Discurso utilizando linguagem matemática, como pronúncias de equações e símbolos matemáticos;
- Discurso por meio da língua natural;
- Leitura em voz alta;
- Escrita no quadro;
- Esboços de gráficos e diagramas;
- Gestos e apontamentos;
- Ambiente de criação;
- Compartilhamento de documentos e telas;
- Utilização da tela do computador como “papel virtual”

Adicionalmente, Leventhall (2004) destaca que um ambiente de aprendizagem de Matemática faz uso do quadro-negro tradicional, onde equações são escritas, destacadas, reescritas, acompanhadas de esboços, rabiscos, explanações e ilustrações. Tais equações são escritas pausadamente, símbolo a símbolo, de modo a deixar claro a relação entre o que está sendo construído, e constantemente acompanhadas de comentários que definem uma linha de raciocínio.

Baseada nestes dados, Leventhall (2004) aponta algumas funcionalidades necessárias em ferramentas colaborativas *on-line*:

- possibilidade de compartilhar e escrever em documentos em tempo real;
- possibilidade de mostrar múltiplos documentos e destacar partes do documento, fazendo ligações em discussões síncronas;

- métodos que permitam apontar, utilizando ícones que representem palavras como “este” ou “aquele”;
- possibilidade de ler uma equação em voz alta para que o estudante possa ouvir referentes aos símbolos;
- ferramenta de esboço rápida, com elementos do tipo pegar-e-arrastar;
- equações reusáveis e reeditáveis em uma linha de discussão, onde elementos já postados possam ser rapidamente cortados, editados e postados novamente;
- gestos em três dimensões que indiquem posições, direções, associadas a diagramas.

Frente a estas constatações, é preciso analisar os ambientes de aprendizagem oferecidos e suas principais características relativas ao suporte à notação matemática. A seguir, apresentam-se alguns destes ambientes e uma breve análise de suas funcionalidades no que diz respeito à aprendizagem de Matemática a distância.

4.3.1 Estado da Arte

Ainda existem poucos ambientes virtuais de aprendizagem que permitem a edição de fórmulas científicas *on-line*. Dos poucos ambientes encontrados, pode-se perceber que as soluções apresentadas se resumem basicamente em:

- uso de linguagens de formatação ou marcação para a inserção dos símbolos, tais como Latex ou MathML (*Mathematic Markup Language*);
- utilização de editores de fórmulas *off-line* que permitem salvá-las para posteriormente anexar nas ferramentas de interação dos ambientes.

O Latex é um pacote desenvolvido para a preparação de textos impressos de alta qualidade, especialmente para textos que utilizem símbolos matemáticos. Com a utilização do Latex, o processamento do texto é feito por meio de comandos de formatação, que são escritos em um arquivo fonte com o uso de um editor de textos. Em seguida, o arquivo fonte é submetido a um programa formatador de textos, no caso o Latex, que gera um arquivo de saída, que pode ser impresso ou visualizado na tela do computador. Apesar de sua utilização não ser trivial, permite a edição de fórmulas complexas por meio de comandos.

O MathML é um padrão utilizado para exibir símbolos e fórmulas matemáticos na *web*, pela utilização de uma linguagem de marcação, desde que o *browser* utilizado seja compatível com os padrões W3C.

Para compreender melhor o funcionamento do Latex e do MathML, vamos escrever a equação quadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ em ambas as linguagens. O Quadro 1 apresenta a equação em Latex e o Quadro 2 a apresenta em MathML.

```
x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
```

Quadro 1. Equação Quadrática em Latex

```
<math>
 <mrow>
  <mi>x</mi>
  <mo>=</mo>
  <mfrac>
    <mrow>
      <mrow>
        <mo>-</mo>
        <mi>b</mi>
      </mrow>
      <mo>&PlusMinus;</mo>
      <msqrt>
        <mrow>
          <msup>
            <mi>b</mi>
            <mn>2</mn>
          </msup>
          <mo>-</mo>
          <mrow>
            <mn>4</mn>
            <mo>&InvisibleTimes;</mo>
            <mi>a</mi>
            <mo>&InvisibleTimes;</mo>
            <mi>c</mi>
          </mrow>
        </mrow>
      </msqrt>
    </mrow>
```

```
    <mrow>
      <mn>2</mn>
      <mo>&InvisibleTimes;</mo>
      <mi>a</mi>
    </mrow>
  </mfrac>
 </mrow>
</math>
```

Quadro 2. Equação Quadrática em MathML

Como se pode perceber, a primeira solução apresentada (uso de linguagens de marcação e formatação) tende a tornar os ambientes de EAD pouco naturais ao usuário, pois exigem o domínio de linguagens normalmente desconhecidas por estudantes e professores; os usuários de ambientes de EAD nem sempre possuem experiência com linguagens de formatação e marcação. Além disso, é preciso considerar que, em uma situação de EAD, o objetivo principal é a aprendizagem de conceitos de um determinado domínio de conhecimento, e não a aprendizagem de linguagens necessárias à comunicação. Nesses casos, a necessidade de utilizar essas linguagens pode desviar o foco principal da interação e prejudicar o processo de aprendizagem. Assim, é preciso que a comunicação seja o mais natural e transparente possível, uma vez que o objetivo principal não é a edição da fórmula, mas sim a aprendizagem de conceitos matemáticos mediante a comunicação *on-line*.

A segunda solução, que exige utilizar arquivos anexos para que a comunicação científica ocorra, é extremamente trabalhosa e demorada. A necessidade de editar a fórmula em outra ferramenta, salvá-la e, posteriormente, anexá-la no ambiente de EAD, torna o processo de comunicação lento e dificultoso, fazendo com que a aprendizagem fique comprometida, visto que as interações tendem a diminuir diante desse contexto.

Na tentativa de traçar um panorama do estado da arte na comunicação científica na internet, investigou-se ambientes virtuais de aprendizagem e ferramentas para edição de fórmulas científicas *off-line*, utilizados no Brasil e no exterior, com o objetivo de identificar as soluções que vêm sendo oferecidas aos usuários, no que diz respeito à comunicação científica *on-line*.

A seguir, são apresentados os ambientes e ferramentas identificados nessa pesquisa.

4.3.1.1 NetTutor

O NetTutor é um ambiente de Educação a Distância comercial, desenvolvido por *Link-Systems International*, uma empresa especializada na comunicação matemática, científica e técnica. O NetTutor pode ser encontrado em http://www.nettutor.com/ (Figura 9). Seu diferencial é a disponibilidade de um *chat* gráfico, onde símbolos e gráficos podem ser construídos *on-line* (veja a Figura 10).

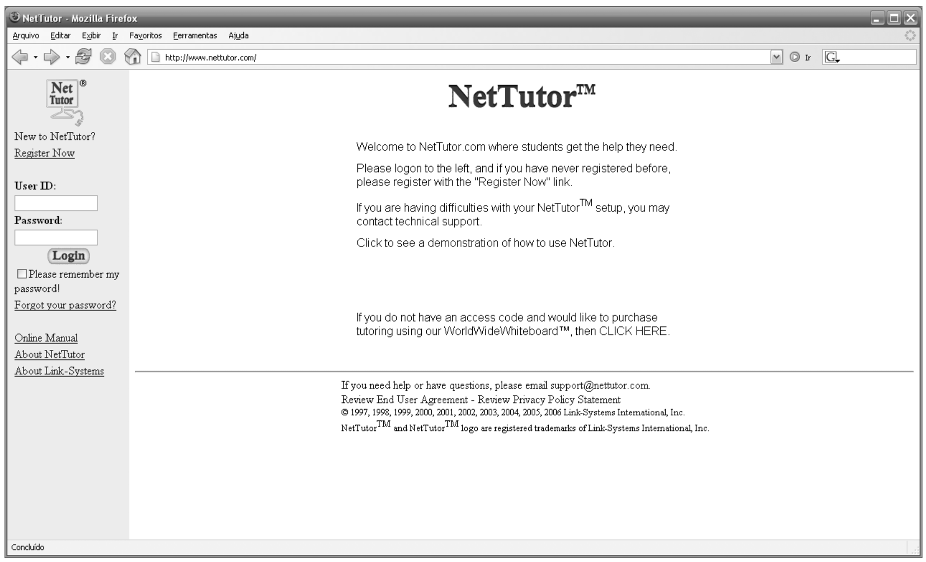


Figura 9. Página Inicial do NetTutor

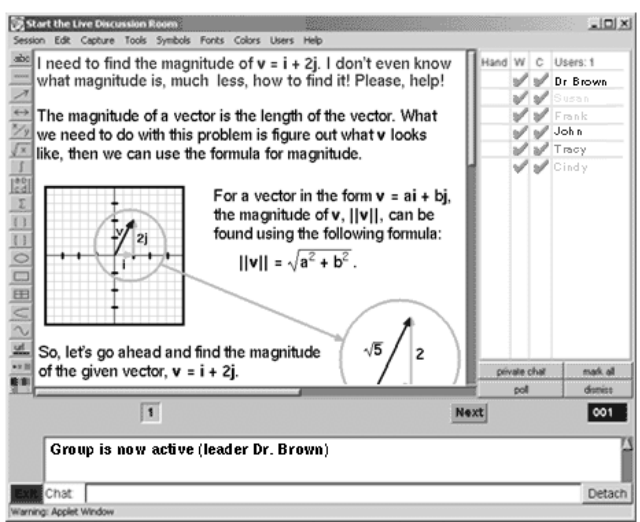


Figura 10. Chat gráfico do NetTutor

4.3.1.2 WebEQ

O WebEQ (Figura 11) é um conjunto de ferramentas comercial desenvolvido para a construção e publicação de páginas *web*, que possibilitem a edição de equações matemáticas. A empresa responsável é *Design Science*, cujo foco é o desenvolvimento de softwares para a comunicação técnica e científica. Uma versão para avaliação do WebEQ pode ser obtida em http://www.dessci.com/en/products/webeq/. Alguns ambientes virtuais de aprendizagem têm utilizado o WebEQ para criar e publicar material didático na *web*. Entretanto, o software não permite a comunicação científica *on-line*.

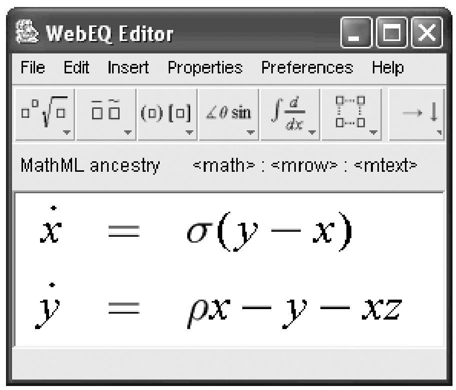


Figura 11. Tela do WebEQ

4.3.1.3 Wiki

O Wiki é um ambiente para edição de textos colaborativos na *web*, por meio de uma linguagem de marcação específica. Uma das principais características dos wikis é a facilidade de criação e alteração das páginas e, em sua grande maioria, são abertos a todo público. Várias versões do Wiki podem ser encontradas na internet, como em http://pt.wikipedia.org/wiki/Wiki. As versões mais completas do Wiki, como o MediaWiki (http://www.mediawiki.org/wiki/MediaWiki), suportam o Tex para a edição de fórmulas matemáticas. Como já mencionado, o Tex é um programa de domínio público desenvolvido para a edição de textos, especialmente textos matemáticos. Sua utilização é feita por meio de comandos de formatação, utilizados entre tags, que permitem a edição de fórmulas e símbolos científicos.

4.3.1.4 Moodle

O Moodle (Figura 12) é um ambiente virtual de aprendizagem baseado na filosofia de software livre, que pode ser encontrado em http://moodle.org/. Foi desenvolvido para dar suporte a cursos a distância na internet. Da mesma forma que o Wiki, o Moodle permite a publicação de fórmulas na *web*, por meio do Tex, ou seja, mediante a utilização de uma linguagem de formatação.

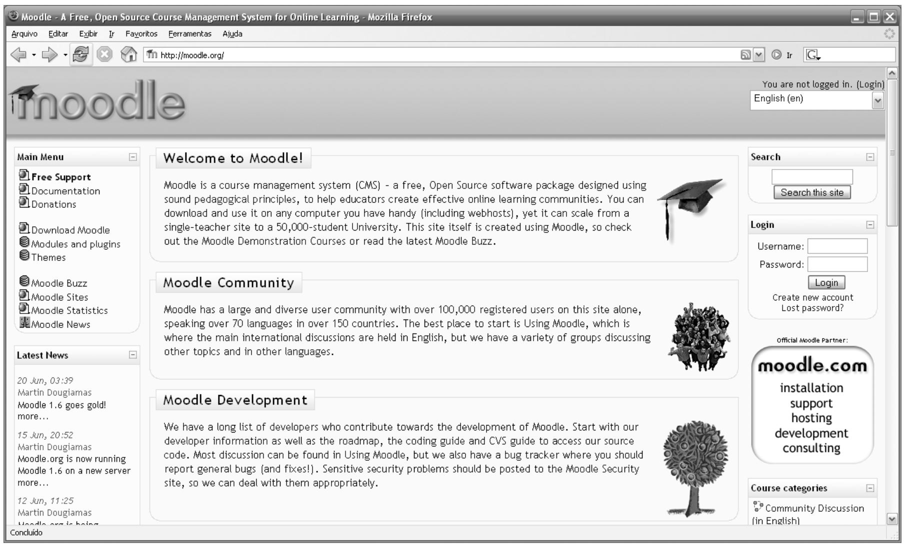


Figura 12. Página do Moodle

4.3.1.5 LiveMath

O LiveMath (Figura 13) é uma ferramenta comercial que pode encontrada em http://www.livemath.com/. O LiveMath é um software de computação algébrica e gráfica, que permite a criação e publicação de gráficos (bidimensionais e tridimensionais) e equações matemáticas na internet. Os gráficos gerados e publicados na internet podem ser manipulados pelo usuário. Entretanto, a ferramenta não permite a discussão *on-line* com a utilização de símbolos e fórmulas.

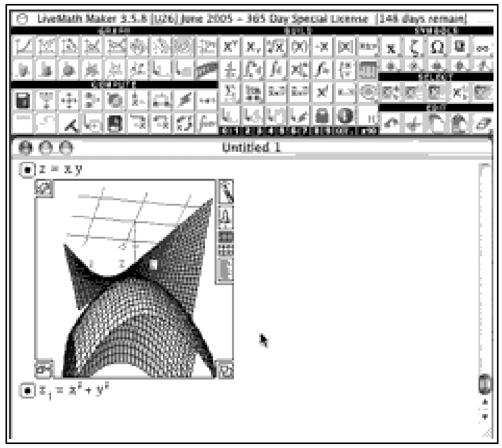


Figura 13. Tela do LiveMath

A Tabela 2 apresenta um resumo dos ambientes e ferramentas pesquisados e suas principais características. Dos ambientes e ferramentas encontrados, apenas dois apresentam características de ambientes virtuais de aprendizagem que possibilitam a comunicação científica *on-line*: o NetTutor e o Moodle. O NetTutor apresenta a desvantagem de ser um ambiente comercial, o que inviabiliza sua utilização em muitas instituições de ensino. Por outro lado, tem-se o Moodle, que apesar de ser um software free, necessita de uma linguagem de formatação para editar as fórmulas científicas, o que o torna pouco amigável para a comunicação matemática *on-line*.

As demais ferramentas apresentadas podem ser utilizadas para a construção de páginas *web* e permitem a elaboração de gráficos dinâmicos ou textos com notação matemática, mas não permitem a comunicação *on-line*.

Tabela 2. Quadro Comparativo

	Comunicação		Ambiente de Aprendizagem	Construção e Criação de Páginas	Domínio	
	On-line	*Off-line*			Free	Comercial
NetTutor	X		X			X
WebEq		X		X		X
Wiki		X		X	X	
Moodle	X		X		X	
Live Math		X		X		X

Como se pode perceber, poucos são os ambientes virtuais de aprendizagem que permitem a comunicação por meio da notação matemática *on-line*, de forma transparente e amigável, sem a necessidade de linguagens paralelas. Os que existem, na sua maioria, são ferramentas comerciais sem versão em português.

Frente ao exposto, sentiu-se a necessidade de projetar e desenvolver um editor de fórmulas científicas *on-line*, que permita a edição e publicação das fórmulas sem a necessidade de linguagens de formatação e marcação, para ser incorporado ao ambiente virtual de aprendizagem ROODA, amplamente utilizado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O capítulo a seguir discute a metodologia de pesquisa adotada neste trabalho, apresentando o projeto e desenvolvimento do editor científico *on-line* ROODA Exata, o estudo piloto realizado e o planejamento do experimento final.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo, são apresentados os aspectos metodológicos desta pesquisa. Para responder o problema de pesquisa, foi projetado e desenvolvido o editor científico ROODA Exata, com o objetivo de viabilizar a comunicação matemática *on-line*. Para validar a ferramenta proposta, inicialmente, foi realizado um estudo piloto, no qual foi possível identificar indicadores que foram analisados em um segundo experimento.

As seções a seguir buscam detalhar este processo.

5.1 O Editor Científico ROODA Exata

De acordo com as ideias expostas até o momento, verifica-se o seguinte cenário: as redes de comunicação e as tecnologias da informação sendo amplamente utilizadas para favorecer a educação, sendo que a comunicação e as trocas virtuais ocorrem de forma predominantemente escrita. Por outro lado, uma carência de ambientes e ferramentas que permitem uma comunicação científica *on-line* de qualidade. Como já visto, este tipo de comunicação ainda encontra-se pouco prática e intuitiva, uma vez que são poucas as opções de editores de fórmulas científicos que permitem um diálogo rápido, prático e preciso. Dessa forma, torna-se difícil fazer uso das tecnologias da informação e comunicação em cursos da área das ciências exatas, tanto em modalidade presencial, quanto virtual. Segundo Leventhall (2004), estudantes e professores vêm, cada vez mais, exigindo uma comunicação *on-line* rápida, em ferramentas de tempo real, tais como mensagens instantâneas e chats, além de fóruns e correios eletrônicos.

Com o objetivo de apresentar uma solução para este problema, foi desenvolvido o editor científico ROODA Exata, um editor científico integrado ao ambiente virtual de aprendizagem ROODA (NOTARE; BEHAR, 2007, 2007a).

O ROODA (http://www.ead.ufrgs.br/rooda) é um ambiente virtual de aprendizagem que foi desenvolvido pelo Núcleo de Tecnologia Digital aplicado à Educação (NUTED/UFRGS)[7]. Seu desenvolvimento teve como pressuposto a interação entre seus usuários. Sua tela inicial apresenta as atividades nos quais alunos e professores estão vinculados, assim como as funcionalidades oferecidas pelo ambiente (Figura 14). Sua interface gráfica é intuitiva e é oferecida em três temas visuais que permitem a personalização do ambiente: Fotográfica, Aqua e Grafite.

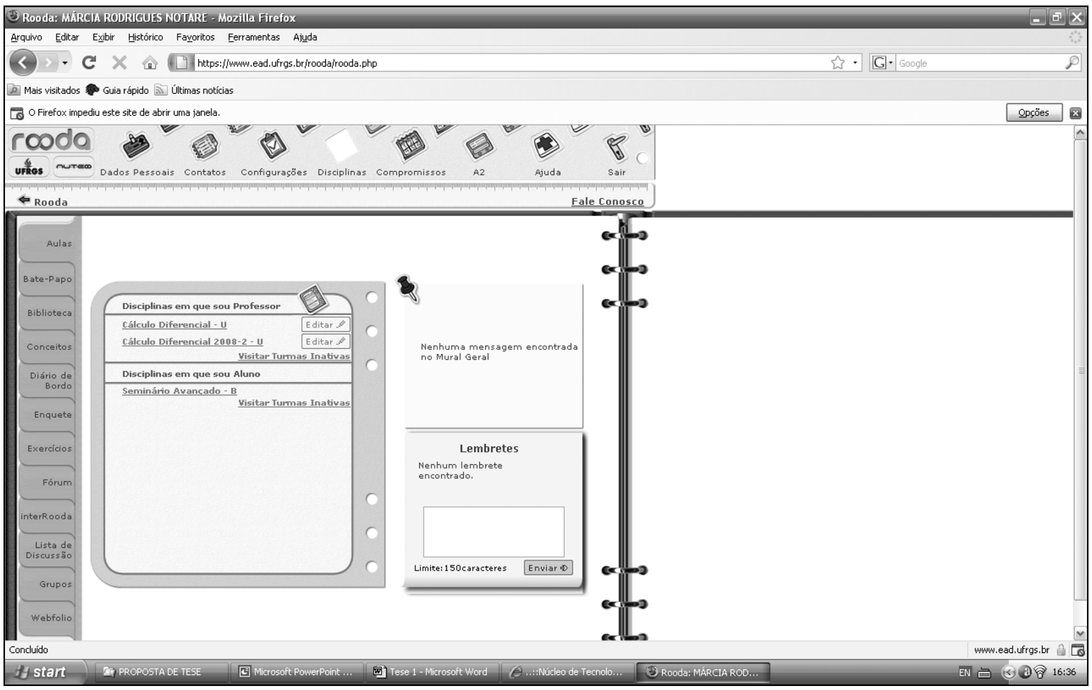


Figura 14. Tela Inicial do Ambiente ROODA

Dessa forma, o editor científico ROODA Exata tem como objetivo possibilitar a utilização de símbolos e fórmulas científicos nos mais variados meios de interação e comunicação oferecidos no ambiente ROODA, como bate-papo, fórum de discussão, A2 (mensagens instantâneas), editor coletivo, entre outros. O presente trabalho teve como objetivo projetar o editor científico, definindo características de interface e navegação, ferramentas de comunicação e interação no qual o editor está disponibilizado, assim como as funcionalidades, símbolos e estruturas que foram implementados na ferramenta.

---

[7] http://www.nuted.edu.ufrgs.br. O NUTED é formado por uma equipe interdisciplinar e uma das linhas de pesquisa é o desenvolvimento de ambientes virtuais de aprendizagem.

A seguir, são apresentados os detalhes do projeto, desenvolvimento e funcionamento do ROODA Exata.

5.1.1 Projeto

Um dos principais requisitos considerados para o desenvolvimento do ROODA Exata foi pensá-lo de modo a não necessitar da utilização de linguagens de formatação e marcação, para que sua utilização fosse transparente e intuitiva ao usuário, seguindo os critérios de usabilidade.

Assim, a interação no editor é realizada por meio de onde ícones e botões que permitem a inserção de símbolos e fórmulas mediante um simples clique do *mouse*.

A estrutura do ROODA Exata foi organizada em três grandes categorias: *Símbolos*, *Fórmulas e Alfabeto Grego*. Foram investigadas, por meio de entrevistas informais com professores, que se encontram no Apêndice A deste trabalho, as necessidades das áreas de Matemática, Física e Química, com o objetivo de definir os símbolos e fórmulas que seriam implementados no editor.

O editor é composto por três abas, uma aba para cada uma das categorias citadas. A aba de *Símbolos* (Figura 15) contém os símbolos mais utilizados na comunicação das ciências exatas, tais como símbolos relacionais, operadores, setas, símbolos lógicos, símbolos da teoria de conjuntos, conjuntos numéricos, subscrito e sobrescrito, somatório, produtório e integral, entre outros.

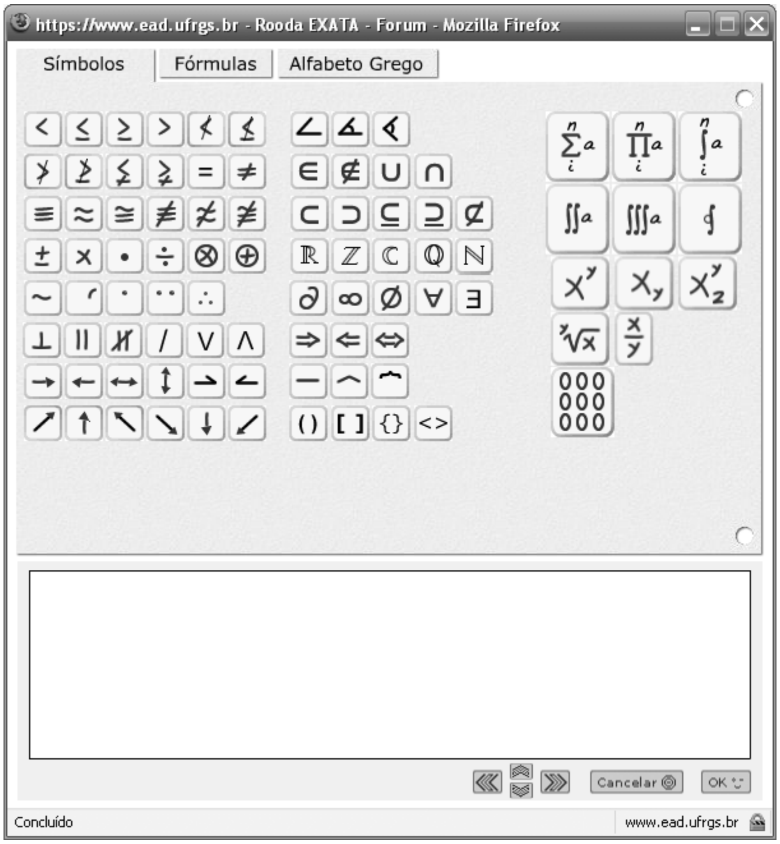


Figura 15. Tela do editor ROODA Exata – Aba Símbolos

A aba de *Fórmulas* (Figura 16) é constituída pelas principais fórmulas de Matemática, Física e Química, e foi elaborada para diminuir o esforço do usuário na comunicação, tornando-a mais rápida, uma vez que as fórmulas mais utilizadas podem ser inseridas diretamente com um simples clique.

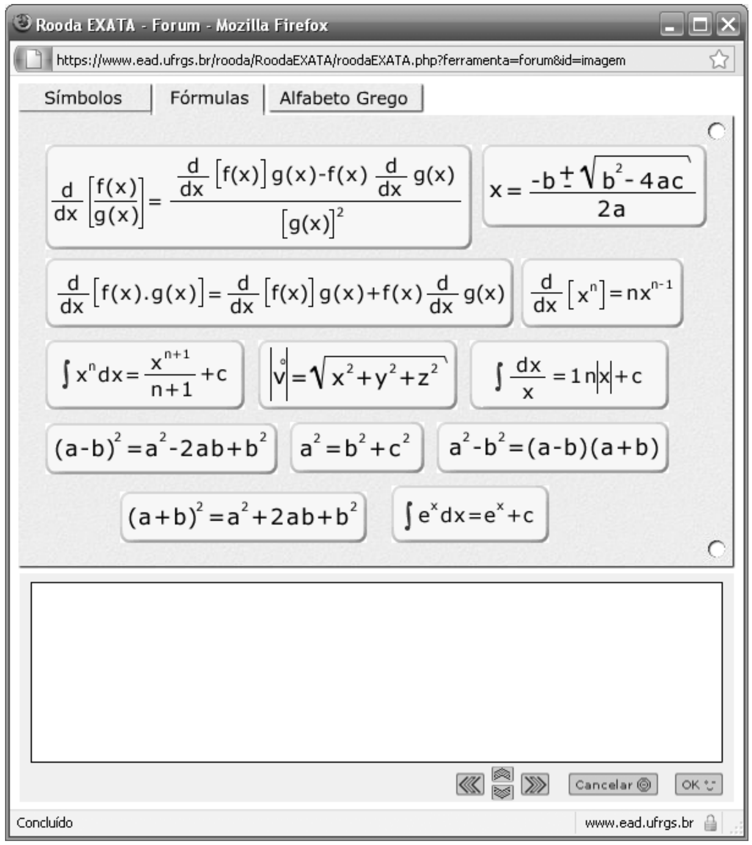


Figura 16. Tela do editor ROODA Exata – Aba Fórmulas

Finalmente, tem-se a aba do *Alfabeto Grego* (Figura 17), que contém o alfabeto grego maiúsculo e minúsculo, por ser amplamente utilizado na comunicação e expressão científica.

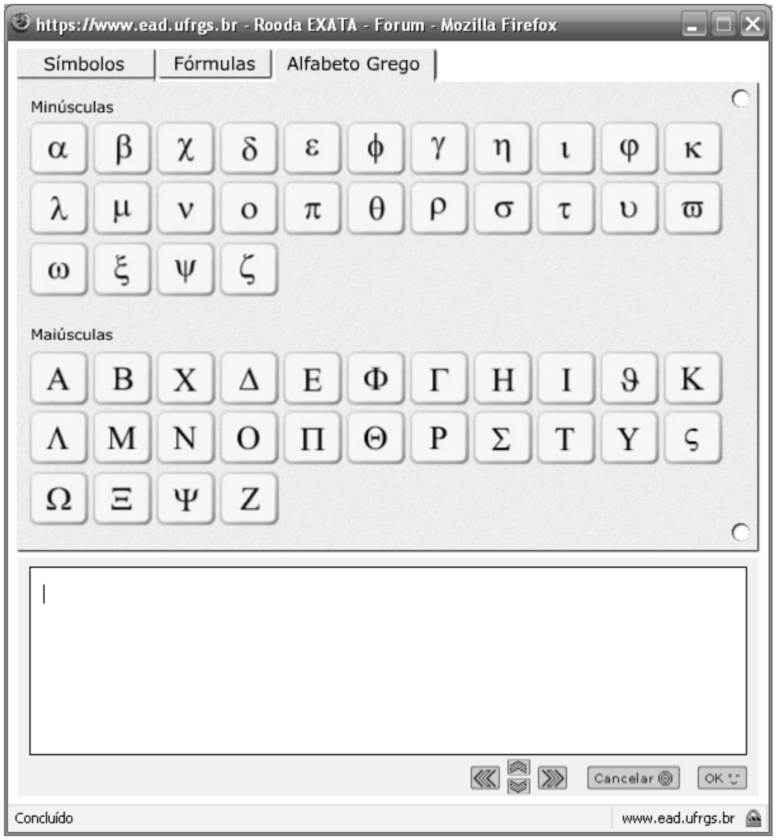


Figura 17. Tela do editor ROODA Exata – Aba Alfabeto Grego

O design do editor científico foi estruturado em abas, para seguir o padrão do ambiente virtual de aprendizagem ROODA, que possui uma interface gráfica agradável, e permite uma navegação intuitiva e rápida. Sua idealização foi baseada no conceito de design de interação, que consiste em criar sistemas computacionais capazes de otimizar, ou seja, facilitar a realização de atividades do cotidiano, como comunicação, trabalho, estudo, etc., criando soluções aos usuários (e não complicações). Dentre as características que devem ser consideradas no desenvolvimento de interfaces de ambientes computacionais, pode-se citar (RADFAHRER, 2001):

- tamanho de tela, considerando as diferentes resoluções de vídeo para evitar barras de rolagens;
- consistência, que garanta uma identidade visual em todo o ambiente, conservando cores, localização de objetos, entre outros;
- estruturas de aponte-e-clique, que tornem a utilização do ambiente intuitiva e automática;

- navegação facilitada, garantida pela organização clara dos elementos que constituem o ambiente;
- uso de imagens pertinentes, de modo a possuir uma função clara no ambiente, seja de auxílio à navegação, ou para a constituição do tema visual.

Dessa forma, o ROODA foi desenvolvido de modo a atender estas características.

Os usuários do ambiente têm acesso a três temas de interface disponíveis para personalização e uso: Fotográfica, Aqua e Grafite. Nos três temas, buscou-se tratar as imagens de modo a facilitar o carregamento das mesmas, mesmo em conexões discadas. Segundo Mazzocato (2005), o tipo de design adotado, estruturado por abas, tem o objetivo de facilitar a navegação pelo ambiente, oferecendo diversas formas de acesso às funcionalidades, facilitando assim, a integração das mesmas. Nos três temas, todos os elementos que compõem o ambiente estão localizados exatamente no mesmo espaço. Dessa forma, o usuário pode trocar de tema e localizar os recursos de navegação da mesma forma, mantendo a consistência do mesmo. Assim, o ROODA Exata mantém as características de design de interação contempladas no ambiente ROODA.

5.1.2 Desenvolvimento e Implementação

A configuração, montagem e desenho dos símbolos e fórmulas do ROODA Exata foram desenvolvidos com o auxílio do software Macromedia Flash 8, na linguagem ActionScript 2.0. A programação é baseada na utilização de símbolos para representar uma ampla gama de equações. O ROODA Exata é específico para criação de imagens, editadas pelo usuário. Para cada classe de operação matemática, são anexados símbolos e campos de texto ao palco da tela do editor. A identação de cada classe é unicamente programada, para proporcionar dinamismo no momento em que o usuário insere um novo elemento. Ao concluir a composição da fórmula, uma imagem é gerada e salva para utilização, em qualquer outra ferramenta, no computador do usuário. As fórmulas e símbolos são convertidos para o formato GIF. Esta conversão, bem como a armazenagem das imagens, é realizada em PHP (gd2). A intermediação dos comandos do ActionScript para o PHP foi implementada em JavaScript.

5.1.3 Funcionamento e Interação

Até o momento, o ROODA Exata está disponível nas ferramentas de fórum de discussão e bate-papo. A seguir, apresenta-se seu funcionamento, por meio de alguns exemplos.

A Figura 18 mostra a interface do fórum de discussão do ambiente ROODA, onde o botão de acesso ao ROODA Exata está localizado ao lado dos *smiles*, no canto inferior direito da tela. Para acessá-lo, basta um clique sobre o botão.

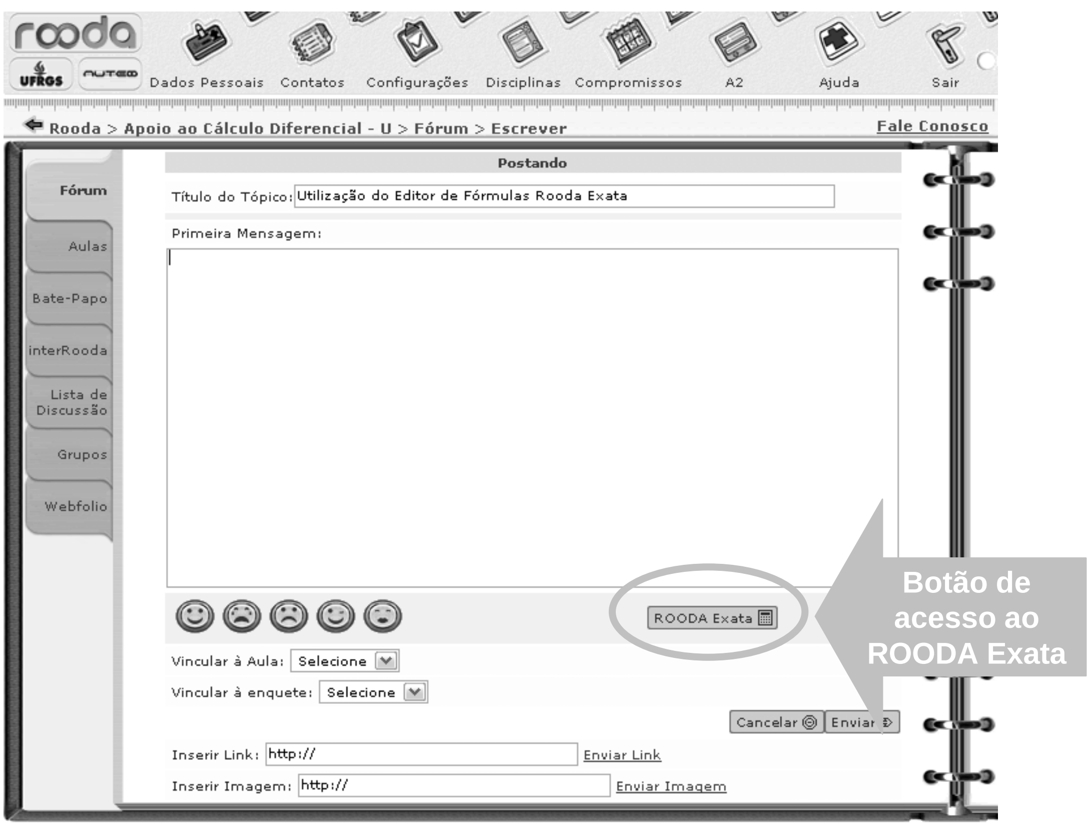


Figura 18. Tela do Fórum de Discussão

As fórmulas são construídas a partir dos botões do editor. Por exemplo, para inserir uma fração, clica-se sobre o botão $\frac{x}{y}$. Abre-se uma caixa de edição que permite a inserção das variáveis desejadas, como mostra a Figura 19.

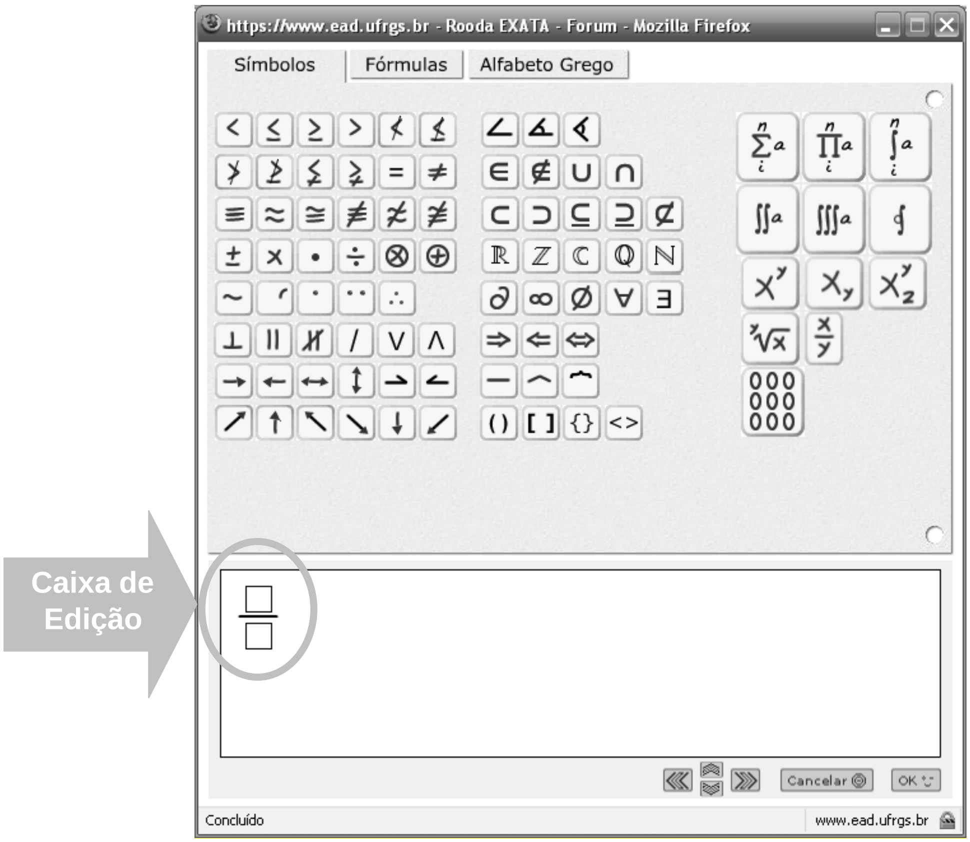


Figura 19. Edição de Fórmulas

Neste momento, basta inserir os valores desejados, como por exemplo a fração $\frac{3}{2}$ ou a fração $\frac{x+1}{x-4}$. Porém, é possível também inserir um novo símbolo sobre a fração que está sendo gerada, como, por exemplo, uma raiz ou uma potência. A Figura 20 mostra uma possível expressão gerada pelo editor, que compõe os símbolos fração e raiz quadrada.

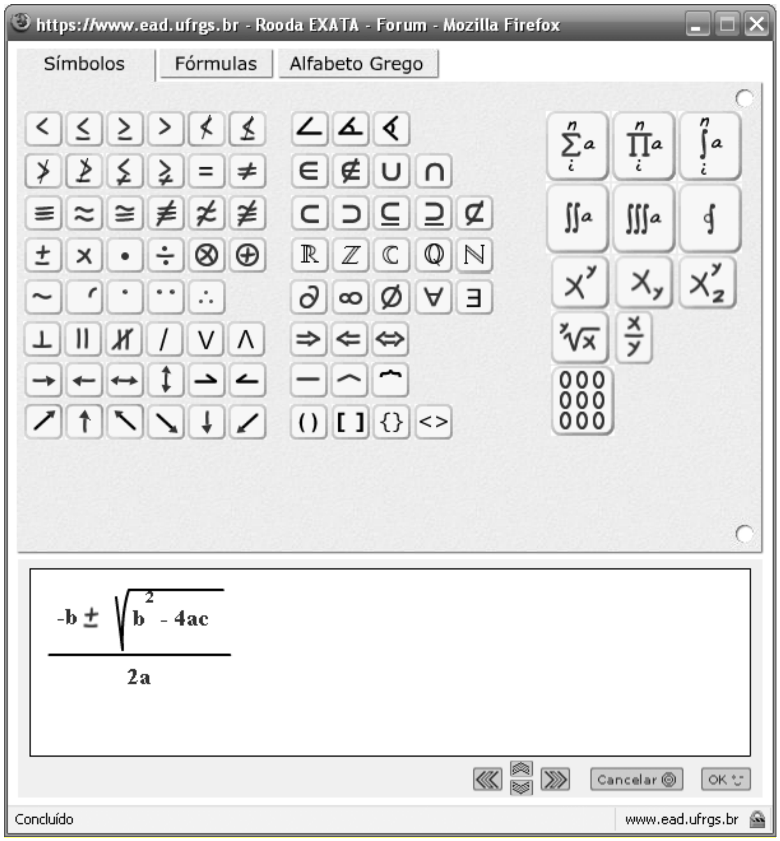


Figura 20. Edição de Fórmula

As mensagens criadas no ROODA Exata podem combinar texto e fórmulas, permitindo uma comunicação rápida e precisa no ambiente de aprendizagem. A Figura 21 mostra uma mensagem do fórum de discussão.

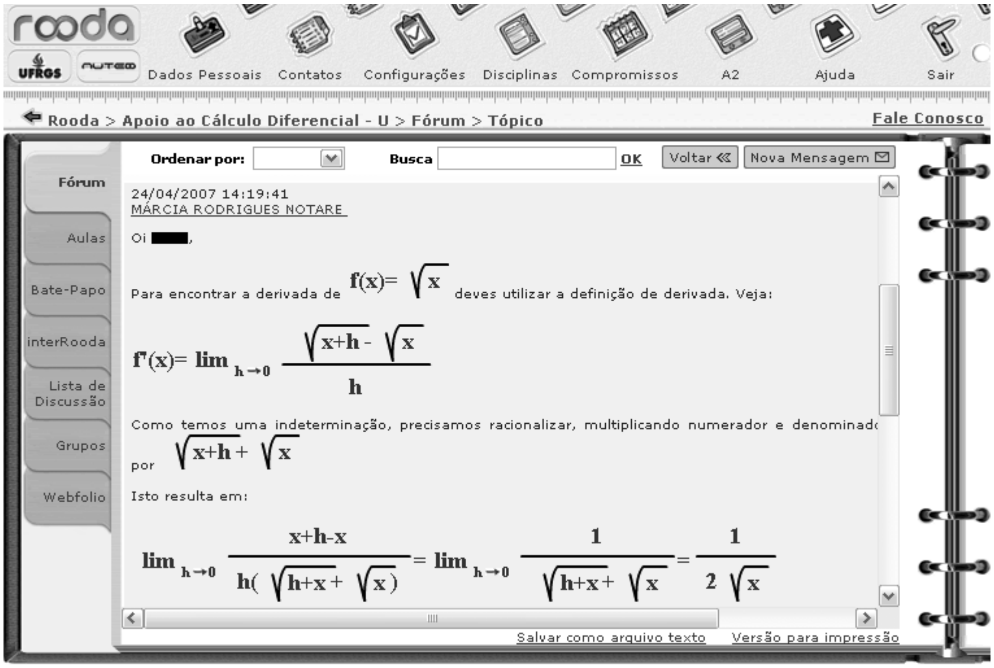


Figura 21. Mensagem criada no Fórum de Discussão

Outro potencial do editor ROODA Exata é a possibilidade de edição de matrizes com as dimensões desejadas. Para inserir, por exemplo, uma matriz de dimensões 3×4, basta digitar os valores 3 e 4 na caixa de edição que será disponibilizada, como mostra a Figura 22. Depois de determinados o número de linhas e o número de colunas da matriz, a mesma será criada, bastando preencher as células com os elementos desejados.

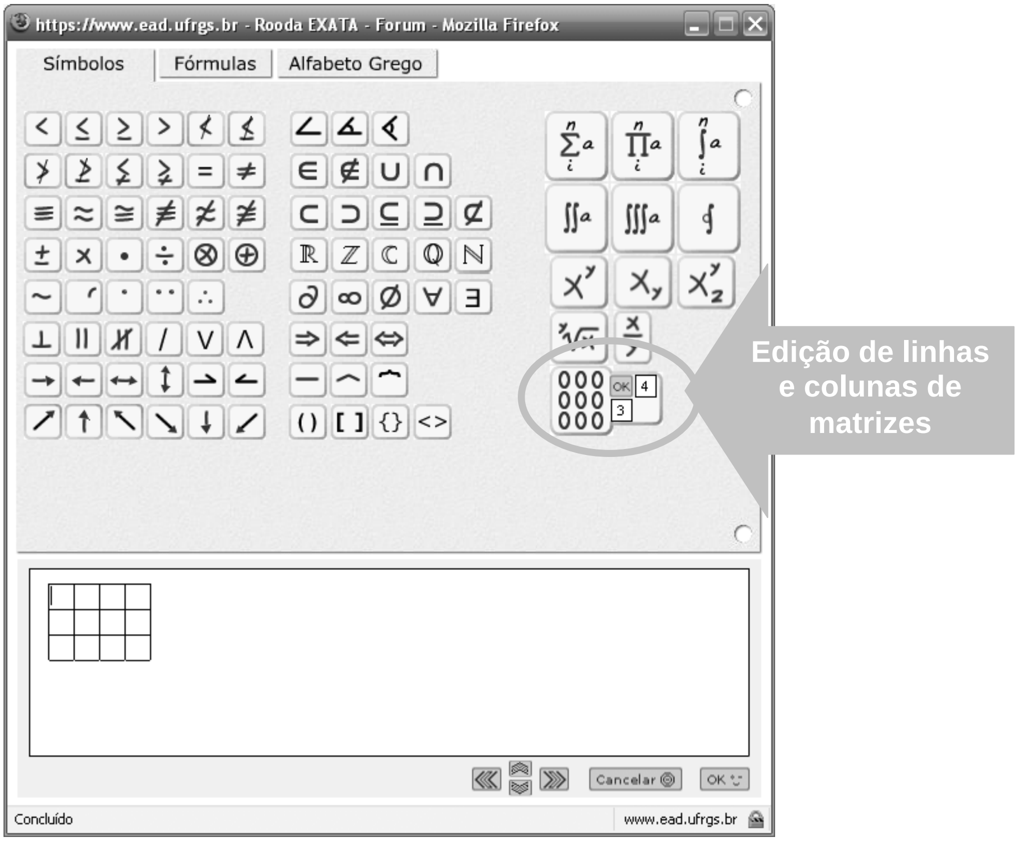


Figura 22. Edição de Matrizes

A aba de *Fórmulas* permite a criação direta de algumas fórmulas. Ao selecionarmos uma fórmula, ela é disponibilizada inteiramente para edição na caixa de edição, como mostra a Figura 23. Basta selecionar os elementos e alterá-los, inserindo os valores desejados.

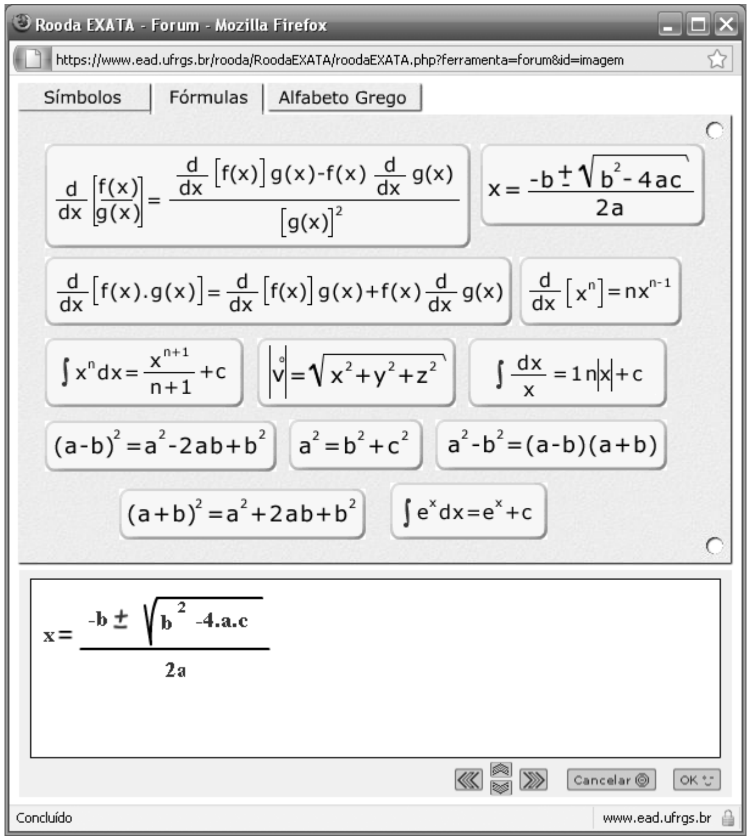


Figura 23. Utilização de Fórmulas

A seguir, é apresentada a proposta metodológica para a validação da ferramenta desenvolvida.

5.2 Proposta Metodológica

Para a realização desta investigação, foi adotada a metodologia de pesquisa denominada *análise de conteúdo*, uma vez que esta proposta metodológica ajuda a interpretar mensagens e atingir uma compreensão de seus significados em um nível que vai além de uma leitura comum.

A matéria prima da análise de conteúdo pode ser qualquer material advindo da comunicação verbal ou não verbal, como cartas, gravações, entrevistas, vídeos, entre outros

(MORAES, 1999). Tais dados, ao chegar ao investigador, devem ser processados, de modo a facilitar o trabalho de compreensão, interpretação e análise.

Segundo Moraes (1999), a análise de conteúdo constitui-se de cinco etapas:

- Preparação das informações: consiste em ler o material e selecionar aquilo que efetivamente vai ao encontro da pesquisa. A seleção destes documentos deve ser representativa e pertinente aos objetivos da análise.
- Transformação do conteúdo em unidades: consiste em reler o material a fim de definir as unidades de análise (palavras, frases, documentos, etc.), obtendo as mensagens divididas em elementos menores.
- Classificação das unidades em categorias: consiste em agrupar dados, considerando o que há em comum entre eles. Esta etapa pode ser entendida com um processo de redução de dados, ou seja, de síntese.
- Descrição: consiste em comunicar o resultado do trabalho.
- Interpretação: consiste em realizar uma compreensão mais aprofundada do conteúdo das mensagens, que vai além da descrição.

A construção das categorias pode ocorrer ao longo do estudo, assim como os objetivos mais precisos podem ir delineando-se com o avançar da investigação. Ainda, para a utilização desta metodologia de pesquisa, é indispensável que se leve em consideração o contexto em que as mensagens são criadas, e não apenas o conteúdo propriamente dito das mesmas. Assim, dados como autor, destinatário e formas de transmissão das mensagens são importantes para a pesquisa.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, optou-se por realizar, inicialmente, um experimento piloto, com o objetivo de identificar indicadores, mesmo que parciais, que mostrassem a usabilidade do ROODA Exata, bem como se o mesmo permite a comunicação matemática *on-line* e auxilia no processo de construção do conhecimento de conceitos matemáticos. Dessa forma, a partir dos dados parciais inicialmente identificados, realizou-se um segundo experimento, que estabeleceu indicadores definitivos que responderam ao problema de pesquisa.

Os experimentos foram realizados em turmas de Cálculo Diferencial da UNISINOS, denominada de Cálculo I, oferecida para o curso de graduação em Engenharia Elétrica. A disciplina de Cálculo I é oferecida na modalidade presencial, e o ambiente virtual de aprendizagem ROODA foi sugerido como um ambiente de apoio extraclasse e um veículo de comunicação e interação entre os participantes das turmas.

O ambiente virtual de aprendizagem ROODA oferece diversas funcionalidades para possibilitar a interação e comunicação entre professores e alunos, tais como listas de discussão, salas de bate-papo, fórum de discussão, diário de bordo, mensagens instantâneas, entre outras. Uma vez que os experimentos foram realizados em modalidade presencial, onde o ambiente ROODA foi utilizado como apoio extraclasse, optou-se por centrar as interações no fórum de discussão, que consiste em uma ferramenta que possibilita a realização de debates e discussões de forma assíncrona.

Dada a especificidade da área, as atividades propostas aos alunos não são temas polêmicos que desencadeiam discussões e abrem margem a diferentes opiniões e pontos de vista (como usualmente percebe-se nos fóruns de discussão), mas sim problemas matemáticos a serem resolvidos. Um problema matemático, quando resolvido, pode ser comentado, detalhado, argumentado, mas não necessariamente desencadeia um debate.

Entretanto, já se destacou que o exercício da leitura, expressão e argumentação em Matemática são fundamentais para seu entendimento. Isto porque, se o aluno, além de resolver um problema matemático analiticamente, consegue argumentar sobre seu desenvolvimento e analisar os resultados obtidos, estará em atividade reflexiva, na medida em que precisa estabelecer relações entre os conceitos envolvidos.

Sabe-se que o processo de aprendizagem de Matemática envolve não só o domínio de sua linguagem e a habilidade de expressar-se corretamente, mas também a capacidade de identificar as múltiplas representações de um mesmo conceito, bem como transitar entre elas. Entretanto, o foco central desta pesquisa é investigar as possibilidades de comunicação matemática a distância por meio do uso do editor de fórmulas desenvolvido.

Assim, a partir da interação e participação dos alunos no ambiente ROODA com o auxílio do editor científico ROODA Exata, buscou-se analisar como ocorre o diálogo, a comunicação, a expressão e a interação *on-line* na área de Matemática, fatores importantes para o processo de aprendizagem da mesma.

Uma vez que a pesquisa teve com principal objetivo analisar a utilização do editor de fórmulas e a viabilidade da comunicação matemática *on-line*, inicialmente foram estabelecidas diferentes categorias de atividades, que seriam propostas aos alunos. Dessa forma, a organização destas atividades teve como objetivo permitir, inicialmente, a familiarização dos alunos com o ambiente e com o editor de fórmulas para, posteriormente, focar na interação e construção do conhecimento. Assim, foram pensadas da seguinte forma:

- Em um primeiro momento, foram realizadas atividades de familiarização com a ferramenta, para permitir aos alunos desenvoltura na edição das fórmulas. Esta primeira etapa foi realizada por meio de cálculo de limites, onde os alunos resolveram alguns limites propostos no ambiente, comentando sua solução e justificando seu desenvolvimento.
- A seguir, foi trabalhada a introdução do conceito de derivada. Neste momento, foram propostos problemas de aplicação envolvendo este conceito, no qual os alunos deveriam resolvê-los e comentá-los. Todos os problemas deveriam ser comentados, argumentados e, cada passo de sua solução, justificado, pois escrevendo sobre o assunto, refletimos e aprendemos.

Com os registros realizados pelos alunos no ambiente, além de analisar a comunicação, interação e expressão, buscou-se também identificar o processo de tomada de consciência de conceitos matemáticos, mediante a análise das argumentações e justificativas dos mesmos. Assim, foram identificados três diferentes níveis de ações, que podem ser caracterizados como:

- *simples aplicação de regras*, que dá indícios de que o aluno sabe resolver o problema analiticamente, mesmo que não o compreenda;
- *descrição das operações realizadas*, que representa um nível intermediário de compreensão;
- *explicação, argumentação, justificativa sobre a solução apresentada*, no qual mostra um nível de compreensão dos conceitos envolvidos no problema.

Tais níveis foram definidos a partir da teoria do “fazer e compreender” de Piaget (1978). Sabe-se que a ação constitui um conhecimento cuja conceituação somente se efetua por tomadas de consciência posteriores. Assim, o primeiro nível foi determinado para caracterizar sujeitos que possuem êxito na ação de alcançar determinado objetivo, mesmo não tendo consciência dos meios que o levaram a tal.

Por outro lado, o terceiro nível foi determinado para caracterizar aqueles que alcançaram o nível da conceituação, que são capazes de realizar ações programadas, sustentadas pelo poder de antecipação fornecido pela compreensão dos conceitos envolvidos no problema. Em Matemática, isto reflete na capacidade de resolver um problema, não por tentativa e erro, mas sim pela capacidade de trilhar uma linha de raciocínio que leve à solução do problema.

Entretanto, percebe-se a existência de um nível intermediário, no qual os sujeitos, na tentativa de argumentar sobre o desenvolvimento da solução, descrevem as operações realizadas, sem mostrar verdadeira compreensão dos conceitos. Esta capacidade de reconstituir (ou descrever) as ações realizadas indica um nível mais elevado de abstração do que a simples execução das ações. Porém, o sujeito talvez ainda não seja capaz de torná-las objeto do pensamento.

Ainda, Tall (1991) afirma que o pensamento matemático pode consistir de três níveis: convencer a si mesmo, convencer um amigo e convencer um inimigo. Convencer a si mesmo envolve a ideia de alguma afirmação considerada verdadeira. Porém, para convencer um amigo, exige que a argumentação seja organizada de forma coerente. Para convencer um inimigo, significa que o argumento deve ser analisado e refinado, passando por um teste crítico.

Assim, com os estudos realizados sobre a epistemologia genética de Jean Piaget e sobre a utilização das tecnologias da informação e comunicação na Educação, bem como a análise do projeto-piloto, identificaram-se dois conjuntos de categorias a serem investigadas: *comunicação e expressão matemática* e *aprendizagem de conceitos matemáticos*.

Para a análise da categoria *comunicação e expressão matemática,* foram consideradas as seguintes questões norteadoras:

- É possível realizar um diálogo a distância com o ROODA Exata?
- Há dificuldades de expressão matemática? Quais?
- Há dificuldades na utilização do ROODA Exata? Quais?
- Quais funcionalidades do ROODA Exata que são utilizadas na comunicação?

A análise dos dados levou em consideração a participação e o depoimento dos alunos ao longo das atividades realizadas.

Da mesma forma, para a análise da categoria *aprendizagem dos conceitos matemáticos,* foram consideradas as seguintes questões norteadoras:

- Há tomada de consciência dos conceitos matemáticos?
- Identificar os diferentes níveis de ação.
- Identificar os diferentes níveis de abstração.

- Os alunos sabem/entendem o que fazem ou apenas escrevem e se comunicam?

A seção a seguir apresenta o experimento piloto realizado, que permitiu uma primeira análise dos dados, a identificação das categorias da pesquisa e um exercício inicial para a autora.

5.3 Projeto-Piloto: Uma Primeira Experiência

A primeira experiência foi realizada em uma turma de Cálculo Diferencial da UNISINOS no segundo semestre de 2007 (NOTARE; BEHAR, 2009). A turma contou com a participação de quarenta e quatro alunos e foi ministrada pela autora deste trabalho.

As atividades realizadas ao longo do semestre foram apresentadas aos alunos por meio da justificativa apresentada no Quadro 3.

"Uma nova atividade será intergrada à disciplina de Cálculo I. Esta atividade consiste na participação de todos os alunos da turma em um ambiente virtual de aprendizagem (ROODA), que será um ambiente para comunicação, interação, trocas de informação, tira-dúvidas, resolução de problemas e avaliação via Internet. Esta atividade se justifica pelos seguintes motivos: já está provado que um aluno, quando precisa escrever sobre determinado problema ou conceito matemático, argumentando, justificando, explicando sua solução, exerce uma atividade de reflexão que contribui para o processo de aprendizagem e compreensão dos conceitos trabalhados. Assim, acredita-se que a utilização de um ambiente virtual venha a contribuir para o processo de aprendizagem do Cálculo. Ainda, com a contribuição de todos, podemos montar um banco de exercícios resolvidos e comentados, onde todos poderão consultar posteriormente. Por fim, o ambiente de aprendizagem será um veículo de comunicação extraclasse, onde dúvidas poderão ser solucionadas."

Quadro 3. Mensagem de Apresentação do Ambiente de Aprendizagem

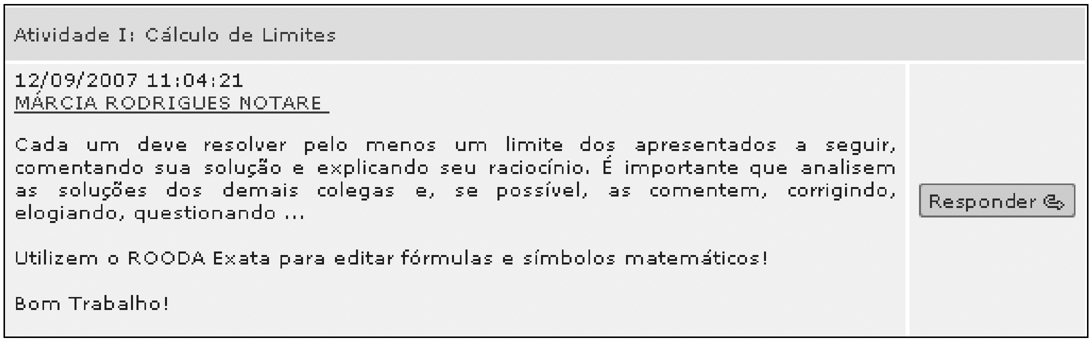
Ao propor à turma de Cálculo Diferencial a utilização de um ambiente virtual de aprendizagem para promover interações e trocas extraclasse, obteve-se uma reação positiva da maioria dos alunos que, imediatamente após a aula, realizaram o cadastro no ambiente. Foram quarenta e dois alunos cadastrados, que aguardavam ansiosos o início das atividades. Pode-se perceber isto pelas mensagens recebidas ao longo da semana, solicitando a autorização para efetivar o cadastro (como mostra o Quadro 4). Isto retrata a nova geração de alunos universitários, que estão conectados e familiarizados com a internet, visto que a proposta de utilização de um ambiente de aprendizagem era totalmente nova para eles, mas a velocidade com que realizaram o cadastro salientou que a utilização da internet era parte de seus cotidianos. Retrata também a necessidade de apoio extraclasse, uma vez que visualizaram no ambiente ROODA um veículo para questionar, argumentar, discutir e resolver problemas de Matemática.

Favor verificar se a solicitação de [redacted] foi aceita no grupo do ROODA.

Quadro 4. Mensagens de solicitação de cadastro

As atividades iniciaram a partir da sexta semana de aula, e foram propostas com uma frequência semanal. A cada semana, uma nova atividade foi proposta no ambiente, para trabalhar e reforçar os conceitos estudados na aula presencial da semana. Observa-se, em turmas de Cálculo Diferencial, que grande parte dos alunos estuda e revisa os conceitos trabalhados em sala de aula apenas com a proximidade das avaliações. Esta postura faz com que os mesmos não consigam aprofundar e compreender tais conceitos, uma vez que é necessário um estudo contínuo para que se acompanhe e compreenda o Cálculo Diferencial. Assim, a proposta de atividades semanais fez com que os alunos se envolvessem com a disciplina semanalmente, não deixando acumular os estudos apenas para as avaliações.

Como dito anteriormente, as primeiras semanas foram dedicadas à familiarização com o ambiente ROODA e, especialmente, com o editor de fórmulas ROODA Exata. As mensagens apresentadas podem ser visualizadas nas Figura 24 e Figura 25, que introduziam as atividades propostas.


Atividade I: Cálculo de Limites

12/09/2007 11:04:21
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

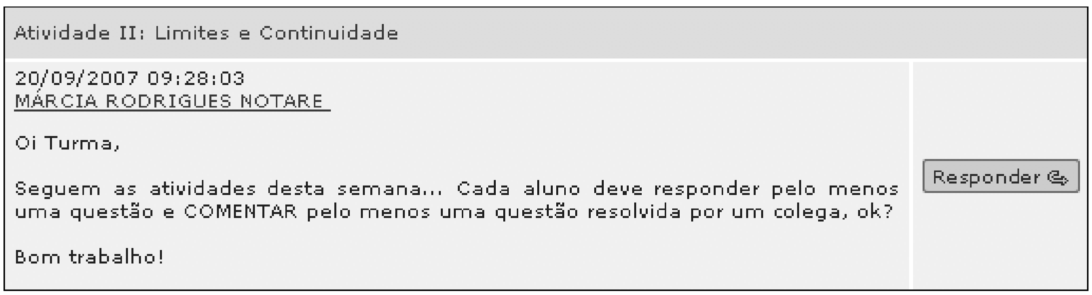
Cada um deve resolver pelo menos um limite dos apresentados a seguir, comentando sua solução e explicando seu raciocínio. É importante que analisem as soluções dos demais colegas e, se possível, as comentem, corrigindo, elogiando, questionando ...

Utilizem o ROODA Exata para editar fórmulas e símbolos matemáticos!

Bom Trabalho!

Responder

Figura 24. Mensagem de Introdução às Atividades Iniciais – Atividade I


Atividade II: Limites e Continuidade

20/09/2007 09:28:03
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Turma,

Seguem as atividades desta semana... Cada aluno deve responder pelo menos uma questão e COMENTAR pelo menos uma questão resolvida por um colega, ok?

Bom trabalho!

Responder

Figura 25. Mensagem de Introdução às Atividades Iniciais – Atividade II

Com relação à utilização do ROODA Exata, pode-se perceber que a maioria dos alunos utilizou o mesmo com bastante desenvoltura, editando expressões que exploraram significativamente o potencial do editor de fórmulas (veja Figura 26). Entretanto, identificou-se um certo grau de dificuldade por parte de uma pequena minoria. Tais manifestações podem ser observadas em mensagens como a apresentada na Figura 27. Percebe-se que o aluno não pode resolver a atividade integralmente por não conseguir utilizar o editor. Ainda se pode observar que a tentativa de escrever frações fracassou, tornando a leitura da solução confusa. Isto reforça a necessidade de utilização do ROODA Exata para promover uma comunicação matemática *on-line*. Ainda, identificaram-se mensagens cuja leitura mostrou-se cansativa e desanimadora, ocasionada pela não utilização do editor de fórmulas (Figura 28).

12/09/2007 22:55:29
[redacted]

$$\lim x \to 4 \quad \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+16} \quad \frac{4^2-6.4+8}{4^2-8.4+16} = \frac{0}{0} \text{ indeterminação}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm 2}{2} \;=4 \quad =2 \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4.1.16}}{2.1} = \frac{8}{2}$$

Figura 26. Utilização do ROODA Exata na Atividade I

13/09/2007 09:17:24
[redacted]

x²-6x+8 4² - 6(4)+8 0
________ = ___________ = __ = Indeterterminação ,então fatoramos,

x²-8x+16 4²-8(4) +16 0

x 4

x²-6x +8= temos como raízes x '= 4 e x ' '= 2
e
x² - 8x+ 16= temos uma raís dupla de valor x = 4

dessa forma devemos ter (x-4) (x-2) (4-4) (4-2)
____________ = ___________ = 2

(x-4)(x-4) (4-4) (4-4)
x= 2
obs: não desenvolvi a baskara no exercicio, pois não consegui usar o rooda exata, não sei se por n

auxílio de como utiliza-lo,qualquer duvida sobre o desenvolvimento do exercício pode me mandar um

Figura 27. Dificuldade de utilização do ROODA Exata

05/11/2007 22:39:15
[redacted]

Vou tentar desenvolver essa.

f(x)=2X/X2-9 -> Derrivando com regra de Quociente

f`(x)=2(X2-9) -2X(2X) / (X2-9)2 = 2X2 -18 -4X2 /(X2 -9) = -2X2 -18 / (X2 -9)2

->raízes: -2X2 -18 / (X2 -9)2 = 0 -> -2X2 -18=0 -> X2= -18/-2 -> X=+ou-3.

f``(x)=-4X(X2 -9)2 -(-2X2 -18)*[2u*(2X)=2(X2 -9)*(2X)] / (X2 -9)4 -> Regra de Quociente e de Cadeia.

f``(x)=-4X(X2-9) - (-2X2 -18) * (4X) * (X2 -9) / (X2 -9)4

f``(x)=-4X3 +36X +8X3 +72X / (x2 -9)3

f``(x)= 4X *(X2+27)/(X2 -9)3

->raízes: 4X=0 -> X=0/3 -> X=0.

X2+27=0 -> x2=-27 -> x=descontinuo

Responder

Figura 28. Mensagem de difícil leitura

Quanto às interações, na primeira atividade, pode-se identificar apenas os dois primeiros níveis de interação apresentados anteriormente, ou seja, quando é solicitado justificar e argumentar o raciocínio utilizado na solução do exercício, eles descrevem os cálculos realizados, sem demonstrar compreensão clara dos conceitos aplicados, ou apenas realizam os cálculos sem qualquer descrição dos passos realizados. Pode-se identificar estas situações em mensagens como as apresentadas nas Figura 29, que mostra uma solução com simples aplicação de fórmulas, e Figura 30, em que a tentativa de justificar o raciocínio reduz-se à simples descrição das operações realizadas.

18/09/2007 12:44:56

[redacted]

$$\frac{x^2+x}{x} = \frac{0^2+0}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \textbf{indeterminação}$$

$$\frac{x(x+1)}{x} = (x+1) = 0+1 = 1$$

Figura 29. Nível de Interação – Simples Aplicação de Fórmula

18/09/2007 00:35:04

[redacted]

boa noite

bem pego o $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ bem pego o x ao quadrado e o 9 e faço a diferença de quadrados pego o resultado e corto os termos iguais $(x-3)(x+3) \;/\; (x-3)$ **corto e me resta (x+3) substituo o x e acho 3+3 = 6**

[redacted]

Figura 30. Nível de Interação – Descrição das operações realizadas

Pode-se observar também que a turma buscou analisar as soluções apresentadas pelos demais colegas, questionando e corrigindo, iniciando um diálogo e não se preocupando apenas em apresentar sua solução (Figura 31).

16/09/2007 23:48:31
[redacted]

Bom pessoal, pode ser que minha idéia esteja errada.

Na questão 19 onde o [redacted] responde a questão eu discordo quanto ao "zero " do divisor "x^2-1 " tornar o mesmo em: 0 positivo.
Já que este "x^2 " multiplica apenas um termo e não o seu resultado final.

A minha resposta seria que NÃO EXISTE limite para esta questão.

lim = __x__ = _1_ = _1_
x->1 x^2-1 1-1 0

lim = _1_ = + infinito
x->1 0+
lim = _1_ = - infinito
x->1 0-

Responder

Figura 31. Interação entre os colegas

A medida em que as semanas foram passando, observou-se que alguns alunos começaram a avançar na tentativa de explicação de suas soluções. Pode-se perceber isto a partir da segunda semana, em mensagens como a da Figura 32.

20/09/2007 17:59:18
[redacted]

Concordo com o [redacted]

Seguindo uma das regras das funções racionais que tendem a + ou menos infinito, para cálculo de seu limite são selecionados os maiores termos da razão (um do numerador e outro do divisor). Como os maiores termos da função racional possuem mesma potência, o valor do limite será o valor da razão dos multiplicadores da incógnita x. Neste caso, haverá divisão de 4/2 de resposta igual a 2 já que as potências x^2 serão eliminadas.

Figura 32. Avanço nas interações

Entretanto, ao propor questões de interpretação, como a apresentada na Figura 33, não houve solução apresentada. Esta questão envolve conhecimento sobre o conceito de derivada. Os alunos calculam a derivada de uma função, por meio de regras de derivação, sem apresentar dificuldades significativas. Porém, questões que envolvem um pouco de interpretação, normalmente apresentam problemas. Pode-se perceber isto também quando se solicitou encontrar os pontos de tangência horizontal de uma função. Tais pontos são caracterizados por pontos em que a derivada da função é nula. Provavelmente, grande parte dos alunos saberia resolver a questão se fosse solicitado, explicitamente, quais pontos a derivada é nula. Entretanto, ao apresentar a questão de forma diferente, não houve solução apresentada.

26/09/2007 14:49:57
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo seja
C = f(x) dólares.
- Quais são as unidades de f'(x)? Justifique sua resposta.
- Qual é o significado de f'(x)?

Figura 33. Questão sem solução

Também se observou que, com o avançar das semanas, os alunos tornaram-se mais "à vontade" com o ambiente e com as atividades, e o relacionamento entre os colegas tornou-se mais íntimo, revelando um verdadeiro diálogo entre a turma. Mensagens, como a apresentada na Figura 34, exemplificam estas interações.

14/10/2007 23:04:59
[redacted]

Fala [redacted] blz! cara no exercicio 7 realmente - 1/3 é uma constante mas não faz parte do conjunto que vc deve derivar,este conjunto esta separado entre parenteses,se por acaso o - 1/3 estivesse dentro do parenteses daí sim vc deveria desconsidera-lo. acredito que seja isso.

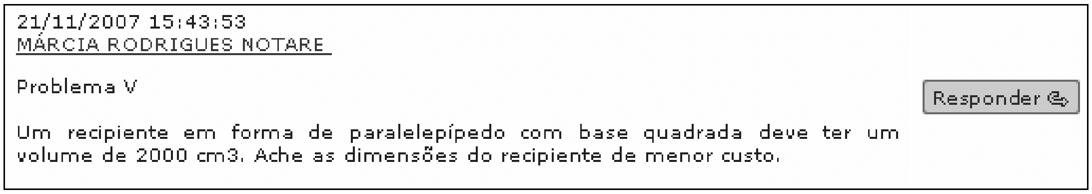
ja no exercicio 11 é o seguinte 2 raiz de x é o mesmo que 2x elevado na 1/2 então derivando fica 2. 1/2x elevado na - 1/2 pois 1/2 -1 fica -1/2 ok. então como o expoente esta negativo eu posso passalo pra baixo positivo,ficando 1/x elevado na 1/2 e x elevado na 1/2 é o mesmo que raiz de x ficando 1/raiz de x.
Espero tenho me feito entender ,qualquer duvida sobre a resposta é só me perguntar.

Marcia todos os exercicios estão resolvidos,espero que possa por alguns antes de terça,boa semana.

Responder

Figura 34. Interações entre colegas

Porém, percebeu-se que o terceiro nível de interações anteriormente estabelecido, que corresponde a explicar, argumentar, justificar sobre o raciocínio e a solução apresentada, que caracteriza um nível de maior compreensão dos conceitos trabalhados, não foi integralmente verificado. Questões mais avançadas, que exigem interpretação de problemas e aplicação do conceito de derivada, apresentaram alguma evolução nesta direção. Pode-se exemplificar esta situação com o problema apresentado na Figura 35, proposto a um grupo de alunos da turma.


21/11/2007 15:43:53
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

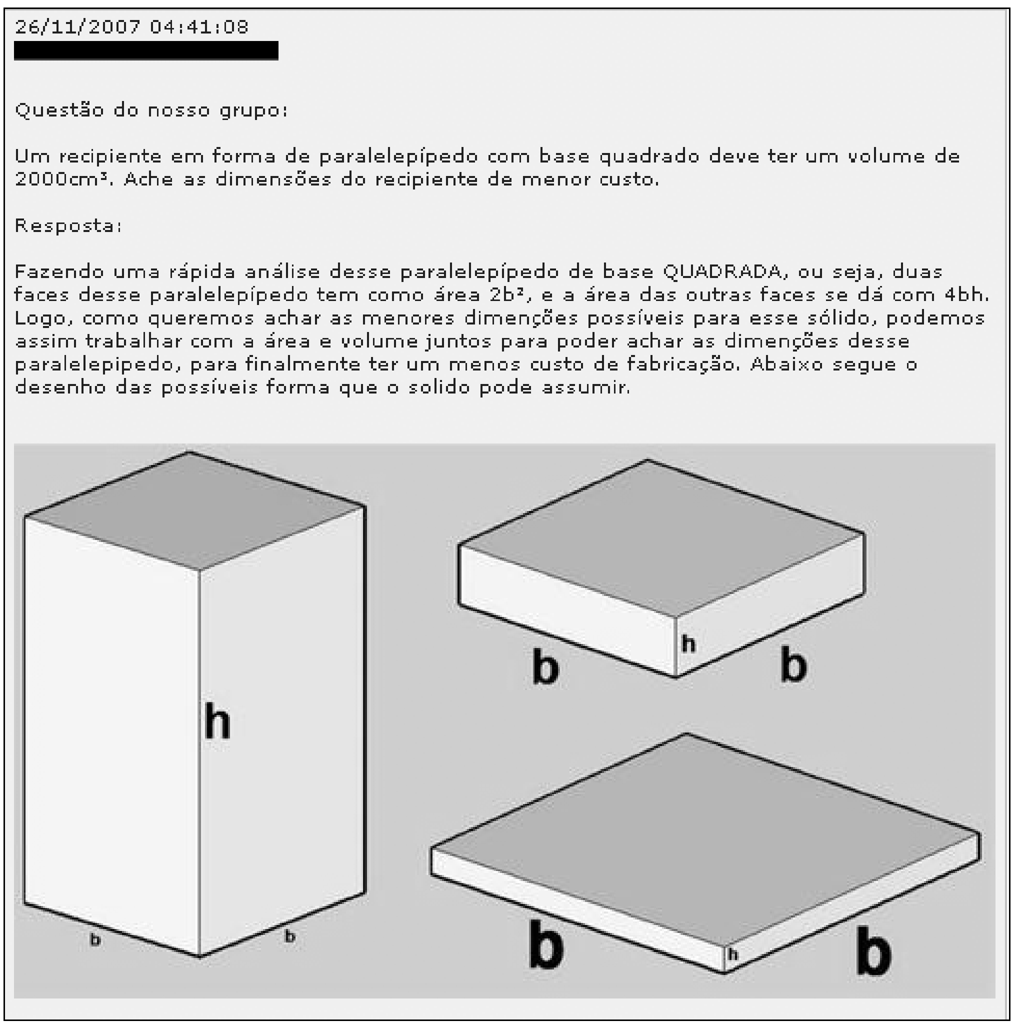
Problema V

Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2000 cm3. Ache as dimensões do recipiente de menor custo.

Responder

Figura 35. Problema de Aplicação de Derivada

A solução apresentada buscou, inicialmente, interpretar o problema, tentando fazer uma breve análise das possíveis soluções para o mesmo (Figura 36). Entretanto, é possível identificar problemas de comunicação e expressão em Matemática, por exemplo, quando os alunos afirmam querer encontrar as menores dimensões possíveis para o sólido. Na verdade, não são as dimensões do sólido que devem ser minimizadas, e sim sua área.


26/11/2007 04:41:08
[redacted]

Questão do nosso grupo:

Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrado deve ter um volume de 2000cm³. Ache as dimensões do recipiente de menor custo.

Resposta:

Fazendo uma rápida análise desse paralelepípedo de base QUADRADA, ou seja, duas faces desse paralelepípedo tem como área 2b², e a área das outras faces se dá com 4bh. Logo, como queremos achar as menores dimenções possíveis para esse sólido, podemos assim trabalhar com a área e volume juntos para poder achar as dimenções desse paralelepipedo, para finalmente ter um menos custo de fabricação. Abaixo segue o desenho das possíveis forma que o solido pode assumir.

Figura 36. Interpretação do problema

Na sequência, o grupo passa a resolver o problema analiticamente (Figura 37). Eles procuram detalhar o passo a passo da resolução do problema. Entretanto, ainda não conseguem realmente explicar a razão de cada passo: Por que isolar a variável h? Faria diferença na resolução se isolassem a variável b? O que significa esta fórmula final? Que tipo de função é esta? Qual seu comportamento? O que estamos buscando com ela?

Iremos definir a fórmula do volume do paralelepipedo:

$$V = b^2 . h$$

Isolando o h temos:

$$h = \frac{v}{b^2} \rightarrow h = \frac{2000}{b^2}$$

Definimos então a área desse sólido:

$$a = 2b^2 + 4bh$$

E abaixo a formula da área em função da variável b:

$$a(b) = 2b^2 + 4b\left(\frac{2000}{b^2}\right)$$

simplificando:

$$a(b) = 2b^2 + \frac{8000}{b}$$

O domínio de função é:

$$D: (0, +\infty)$$

Figura 37. Resolução do problema

A Figura 38 mostra a continuação do desenvolvimento do problema. Algumas justificativas e explicações aparecem, mas não retratam o verdadeiro “saber fazer” matemática. Poderiam justificar o porque do cálculo da derivada, porque encontrar suas raízes, porque se pode afirmar que esta função possui um valor mínimo, etc.

Isso porque se imaginarmos fisicamente o sólido podemos variar indefinidamente a área da base, ou seja o seguimento "b", e o mesmo pode se dizer o "h", e depois dizemos que o intervalo é aberto pois nenhum dos valores pode ser zero, provando essa afirmação pode se dizer que não se pode admitir o produto de zero por um outro número, o que na prática é que tanto o "b " como o "h " nunca podem ser absolutamente zero.

Para reforçar a idéia observamos então comportamento da função no dado domínio pode ser provado abaixo:

$$\lim x \rightarrow o+ \quad 2\,b^2 + \frac{8000}{b} = +\infty$$

$$\lim x \rightarrow +\infty \quad 2\,b^2 + \frac{8000}{b} = +\infty$$

Calculamos então a derivada da função área:

$$a'(b) = 4b - \frac{8000}{b^2}$$

Utilizamos ela para encontrar a raíz em "b ":

$$4b = \frac{8000}{b^2} \rightarrow 4\,b^3 = 8000 \rightarrow b^3 = 2000 \rightarrow b = \sqrt[3]{2000}$$

Essa raíz ocorre bem no mínimo absoluto da função, no ponto onde a variável b pode assumir o menor valor possível, e justamente é o que estamos querendo: o ponto onde as variáveis assumem o menor valor, logo podemos descobrir o menor valor de h com a formula do volume, substituindo o valor de b encontramos:

$$h = \frac{2000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^2} \rightarrow \frac{2000}{2000^{2/3}} \rightarrow 2000^{1/3} = \sqrt[3]{2000}$$

Figura 38. Continuação da resolução do problema

Assim, percebe-se que os alunos chegam ao nível da correta resolução do problema, da descrição dos cálculos, muitas vezes justificam e analisam qualitativamente etapas da resolução, mas ainda não demonstram total compreensão dos conceitos envolvidos. As seguintes hipóteses podem ser consideradas, para justificar esta situação:

1. É necessária uma maior intervenção por parte do professor, para instigar tais questionamentos e incentivar uma argumentação mais profunda.

2. Este é o real grau de compreensão que a grande maioria dos alunos consegue atingir em um curso de Cálculo Diferencial no espaço de tempo de um semestre.

3. Os alunos compreendam o desenvolvimento da resolução do problema, mas apresentam dificuldades em expressar integralmente suas ideias. Entretanto, como já afirmado anteriormente, para entender Matemática, não basta saber ler, escrever e contar; é preciso saber expressar-se, uma vez que a expressão auxilia na concretização do pensamento e na reflexão das ideias.

Observa-se, também, que o experimento-piloto já mostrou a necessidade de um editor de notação científica *on-line*. Certamente, tais atividades não teriam sido viabilizadas sem a utilização do ROODA Exata, uma vez que exigem a edição de expressões com estrutura complexa, difíceis de descrever e ser compreendidas sem a utilização de símbolos, apenas em linguagem natural (Figura 39) A expressão em Matemática exige a utilização de um vocabulário adequado, que consiste justamente nos símbolos matemáticos.

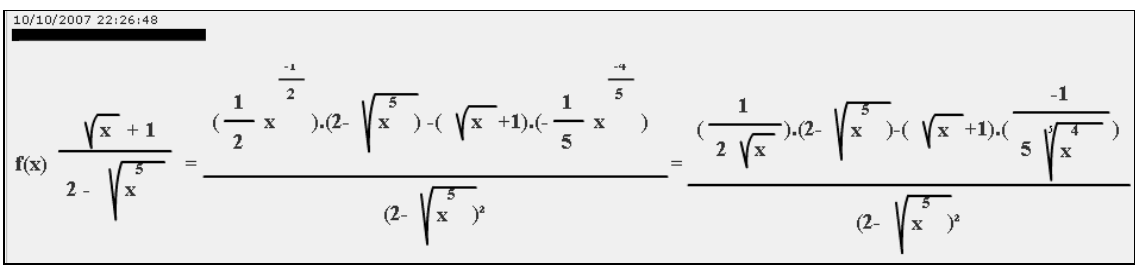


Figura 39. Edição de expressões complexas

Os alunos que não conseguiram utilizar a ferramenta por problemas de conexão, expuseram sua insatisfação e suas dificuldades na comunicação (Figura 40). Mostra-se assim que, em Matemática, os símbolos têm o papel de simplificar e facilitar a comunicação, trazendo clareza, objetividade e agilidade.

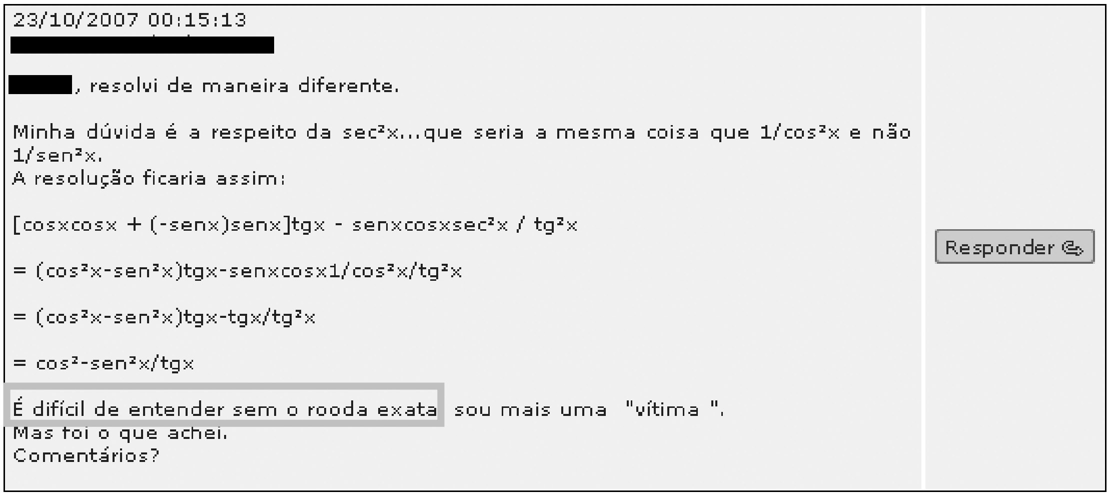


Figura 40. Dificuldade na comunicação

Este estudo-piloto mostrou, em linhas gerais, que a comunicação científica *on-line* é viável por meio do editor ROODA Exata e que sua utilização se faz necessária para promover de forma precisa um diálogo em Matemática. Por outro lado, esta primeira análise identificou a necessidade de uma moderação mais organizada por parte da autora nas interações ocorridas no ambiente de aprendizagem, de modo a instigar reflexões, argumentações e justificativas mais aprofundadas por parte dos alunos. Dessa forma, a seção a seguir apresenta um novo experimento, realizado de modo a contornar os problemas identificados no experimento-piloto.

5.4 Experimento Final

A partir do experimento-piloto, foram identificados problemas metodológicos, que foram repensados de modo a estabelecer objetivos e estratégias para a realização de um experimento definitivo que respondesse o problema de pesquisa.

Inicialmente, realizou-se uma pequena entrevista com a turma, para identificar características que pudessem influenciar na pesquisa, como por exemplo: faixa etária (sabe-se que alunos com faixa etária elevada tendem a apresentar dificuldades e resistência com a utilização da tecnologia, o que poderia alterar os dados do experimento) e ano de conclusão do ensino médio, pois alunos que estão há muitos anos sem estudar apresentam maior dificuldade de adaptação ao ritmo de estudos do ensino superior; entre outras.

As atividades propostas aos alunos foram repensadas, pois se verificou que algumas atividades não eram de fácil compreensão, o que poderia refletir em uma análise equivocada dos dados. Ainda, foi necessária a inclusão de novos problemas, que envolvessem interpretação teórica dos conceitos matemáticos, de modo a provocar nos alunos a necessidade de reflexões teóricas acerca do Cálculo Diferencial.

Com relação às intervenções realizadas pela autora, percebeu-se que estas devem ser mais problematizadoras, para que os alunos sintam-se provocados a argumentar e justificar suas ideias e concepções.

Ainda, com base no primeiro experimento, percebeu-se a necessidade de realização de entrevistas com os alunos participantes da pesquisa, para verificar a viabilidade da comunicação matemática *on-line*, assim como possíveis dificuldades e problemas enfrentados durante a utilização da ferramenta e sugestões para torná-la mais intuitiva e amigável.

O segundo experimento foi realizado no segundo semestre de 2008, em uma turma de Cálculo I da UNISINOS, oferecida aos alunos de graduação de Engenharia Elétrica. Como ocorrido no projeto-piloto, a autora desta pesquisa foi a ministrante da disciplina e o ambiente virtual de aprendizagem ROODA foi apresentado à turma como uma ferramenta de apoio e comunicação extraclasse, para trocas de informação, tira-dúvidas, resolução de problemas e avaliação via internet.

A participação dos alunos ao longo do semestre no ambiente virtual de aprendizagem ROODA constituiu a fonte de dados para a pesquisa. Suas colocações e participações nas atividades propostas caracterizaram as situações de aprendizagem analisadas, pois se acredita que suas contribuições revelem seus processos cognitivos.

A seguir, apresentam-se os detalhes da pesquisa.

5.4.1 Re-planejamento das Atividades

O planejamento das atividades realizadas ao longo da pesquisa foi pensado de modo a viabilizar a análise da ferramenta desenvolvida.

Como afirmado anteriormente, a disciplina de Cálculo I foi oferecida na modalidade presencial, tendo um encontro por semana e totalizando vinte encontros ao longo do semestre. Sabe-se que, se os alunos tiverem contato com o Cálculo Diferencial apenas uma vez por semana, fica muito difícil acompanhar o andamento do curso. É importante que os mesmos adquiram uma postura de estudo comprometida, dedicando uma frequência maior do que semanal aos estudos.

Dessa forma, apresentou-se à turma a possibilidade de manter um contato virtual entre alunos e professor ao longo da semana, por meio do ambiente virtual de aprendizagem ROODA. Assim, o ROODA foi sugerido como um ambiente de apoio extraclasse e um veículo de comunicação e interação entre os participantes da turma e a professora.

Como afirmado anteriormente, o ROODA conta com diversas funcionalidades que permitem a interação e comunicação entre professores e alunos de forma síncrona e assíncrona (listas de discussão, salas de bate-papo, fórum de discussão, diário de bordo, mensagens instantâneas, entre outras). Para a realização desta pesquisa, optou-se por utilizar o *fórum de discussão*, como um meio para a resolução de problemas matemáticos ao longo da semana. Os problemas foram propostos com frequência semanal, envolvendo conceitos matemáticos trabalhados na aula presencial da semana corrente.

Esta metodologia favorece o contado entre alunos e professor, assim como mantém a turma envolvida com a disciplina, não apenas em momentos de sala de aula, mas também em momentos extraclasse. O fórum de discussão, por ser uma ferramenta de debates assíncrona, permite que os alunos acessem o ambiente virtual em diferentes horários e locais, o que flexibiliza o acesso e favorece a participação de todos. Ainda, a proposta de atividades em ambientes virtuais de aprendizagem, mesmo em cursos presenciais, provoca a participação ativa dos alunos, o que contribui para a construção do conhecimento. Assim, apresentou-se à turma a mesma justificativa utilizada no estudo-piloto, conforme Quadro 5.

> *"Uma nova atividade será intergrada à disciplina de Cálculo I. Esta atividade consiste na participação de todos os alunos da turma em um ambiente virtual de aprendizagem (ROODA), que será um ambiente para comunicação, interação, trocas de informação, tira-dúvidas, resolução de problemas e avaliação via Internet. Esta atividade se justifica pelos seguintes motivos: já está provado que um aluno, quando precisa escrever sobre determinado problema ou conceito matemático, argumentando, justificando, explicando sua solução, exerce uma atividade de reflexão que contribui para o processo de aprendizagem e compreensão dos conceitos trabalhados. Assim, acredita-se que a utilização de um ambiente virtual venha a contribuir para o processo de aprendizagem do Cálculo. Ainda, com a contribuição de todos, podemos montar um banco de exercícios resolvidos e comentados, onde todos poderão consultar posteriormente. Por fim, o ambiente de aprendizagem será um veículo de comunicação extraclasse, onde dúvidas poderão ser solucionadas."*

Quadro 5. Mensagem de Apresentação da Proposta

A partir do experimento-piloto, percebeu-se que o período de uma semana é curto para abrir e encerrar uma discussão. Dessa forma, os problemas propostos tiveram um prazo mais flexível, o que tornou as discussões mais intensas e favoreceu a participação de um número maior de alunos.

As atividades iniciais propostas no ambiente ROODA foram pensadas com o objetivo de familiarizar a turma com o fórum de discussão e com o editor científico ROODA Exata. Assim, foram atividades que exigiram a utilização do editor para a resolução dos problemas propostos. A Figura 41 apresenta a primeira atividade apresentada à turma.

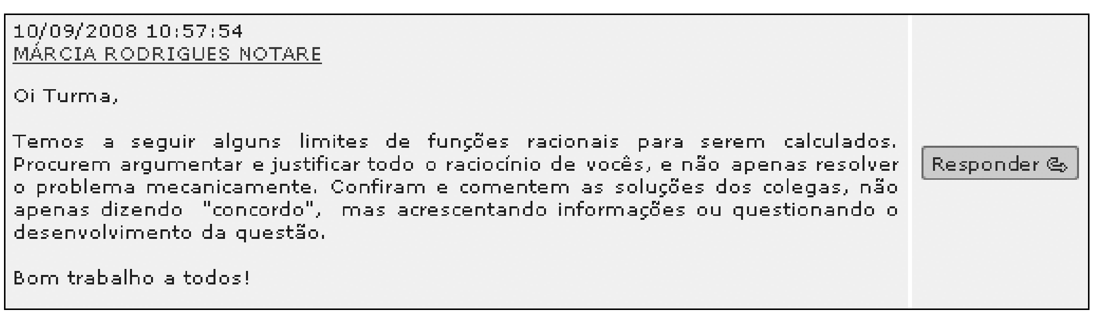


Figura 41. Primeira Atividade

Em todas as atividades propostas, foi incentivado o exercício da argumentação, justificativa e questionamento.

Com o andamento da disciplina, foi possível propor atividades em que a compreensão dos conceitos matemáticos até então trabalhados era necessária para a resolução dos problemas. A Figura 42 mostra um dos problemas apresentados à turma, que trata da interpretação do conceito de derivada. Este problema não foi utilizado no experimento inicial, mas, a partir do mesmo, pode-se perceber a necessidade de problemas de caráter mais teórico, para incentivar o exercício da argumentação e justificativa, assim como a análise das condições de aprendizagem dos alunos.

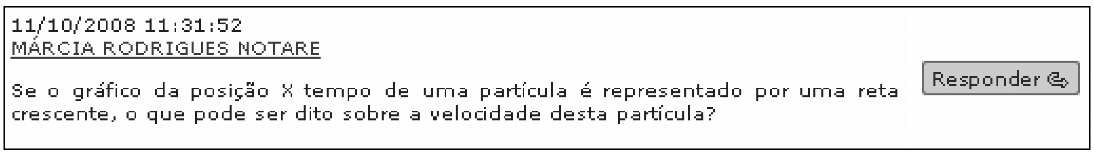

11/10/2008 11:31:52
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE
Se o gráfico da posição X tempo de uma partícula é representado por uma reta crescente, o que pode ser dito sobre a velocidade desta partícula?
Responder

Figura 42. Exemplo de Problema

Alguns problemas trabalhados no experimento-piloto foram repensados, pois se percebeu que, da forma como estavam apresentados, não promoveram boas reflexões. O problema apresentado na Figura 43 foi proposto aos alunos no primeiro experimento. Entretanto, nenhum aluno apresentou solução para o mesmo. Uma análise precipitada levou à conclusão equivocada de que os alunos não compreendem o conceito de derivada. Entretanto, verificou-se que a questão poderia estar mal formulada. Assim, para o segundo experimento, apresentou-se o mesmo problema com uma breve explicação (Figura 44 e Figura 45), o que levou a sua solução.

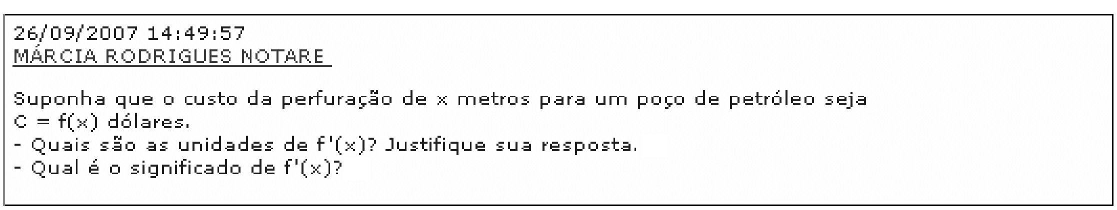
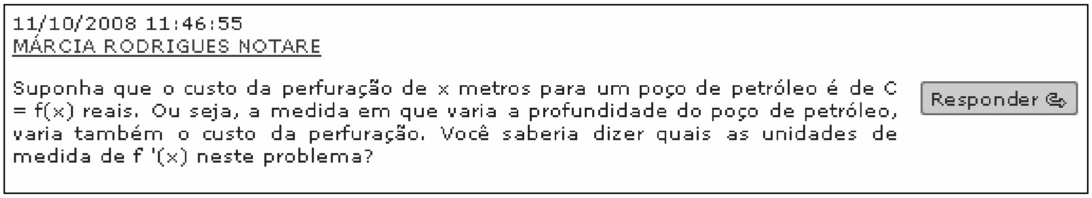

26/09/2007 14:49:57
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE
Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo seja
C = f(x) dólares.
- Quais são as unidades de f'(x)? Justifique sua resposta.
- Qual é o significado de f'(x)?

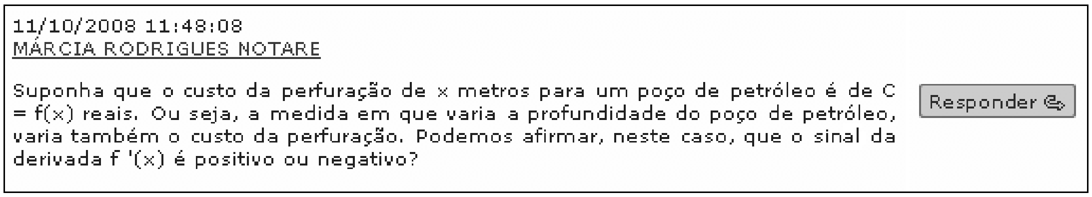
Figura 43. Problema inicial


11/10/2008 11:46:55
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo é de C = f(x) reais. Ou seja, a medida em que varia a profundidade do poço de petróleo, varia também o custo da perfuração. Você saberia dizer quais as unidades de medida de f '(x) neste problema?

Responder

Figura 44. Problema reformulado


11/10/2008 11:48:08
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo é de C = f(x) reais. Ou seja, a medida em que varia a profundidade do poço de petróleo, varia também o custo da perfuração. Podemos afirmar, neste caso, que o sinal da derivada f '(x) é positivo ou negativo?

Responder

Figura 45. Problema reformulado

Foram sete grandes temas que caracterizaram as atividades propostas, listadas a seguir:

- Atividade I: Cálculo de limites
- Atividade II: Taxas de Variação e Conceito de Derivada
- Atividade III: Regras de Diferenciação
- Atividade IV: Derivada de Funções Trigonométrica e Regra da Cadeia
- Atividade V: Crescimento e Decrescimento, Concavidade e Extremos Relativos
- Atividade VI: Problemas de Otimização
- Atividade VII: Problemas de Taxas Relacionadas

Para cada atividade acima listada, foram propostos diversos problemas, que poderiam ser solucionados por um ou mais alunos da turma, e comentados pelos demais colegas, de modo a provocar a participação ativa de todos neste processo. A lista completa dos problemas encontra-se no Apêndice B deste trabalho.

Verificou-se que as categorias de pesquisa definidas no experimento-piloto mostraram-se adequadas. Dessa forma, o capítulo a seguir apresenta a análise e discussão dos dados, mostrando as possibilidades de utilização dos recursos tecnológicos em Matemática. A análise está focada nas seguintes categorias de pesquisa: *comunicação e expressão matemática* e *aprendizagem de conceitos matemáticos*.

Da mesma forma que no experimento-piloto, a categoria *comunicação e expressão matemática* considerou as seguintes questões norteadoras:

- É possível realizar um diálogo a distância com o ROODA Exata?
- Há dificuldades de expressão matemática? Quais?
- Há dificuldades na utilização do ROODA Exata? Quais?
- Quais funcionalidades do ROODA Exata que são utilizadas na comunicação?

Para a análise da categoria *aprendizagem dos conceitos matemáticos,* foram consideradas as seguintes questões norteadoras:

- Há tomada de consciência dos conceitos matemáticos?
- Identificar os diferentes níveis de ação.
- Identificar os diferentes níveis de abstração.
- Os alunos compreendem o que fazem ou apenas escrevem e se comunicam?

A seguir, apresentam-se as análises realizadas.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

O presente capítulo tem o objetivo de analisar o editor de fórmulas ROODA Exata, verificando a viabilidade de comunicação matemática *on-line* por meio da ferramenta, e as possibilidades de construção do conhecimento dos conceitos matemáticos inerentes ao Cálculo Diferencial.

A análise dos dados é realizada com a finalidade de identificar os diferentes níveis de compreensão dos alunos ao longo de um semestre de atividades realizadas no ambiente virtual de aprendizagem ROODA, como veículo de apoio extraclasse às aulas de Cálculo Diferencial.

A participação dos alunos ao longo do semestre no ambiente virtual de aprendizagem ROODA constituiu a fonte de dados para a pesquisa. Suas colocações e participações nas atividades propostas caracterizaram as situações de aprendizagem analisadas. Acredita-se que suas contribuições, mesmo que muitas vezes possam parecer superficiais, revelem seus processos de aprendizagem.

As seções a seguir apresentam o perfil da turma, assim como a análise das categorias *aprendizagem de conceitos matemáticos* e *comunicação e expressão matemática*.

6.1 Perfil da Turma

A turma contou, inicialmente, com trinta e cinco alunos matriculados. Destes, vinte e nove alunos cadastraram-se no ambiente ROODA para participar das atividades extraclasse e acompanharam a disciplina ao longo do semestre.

Para conhecer melhor o perfil dos alunos, realizou-se uma pequena entrevista[8] inicial, conforme mostra o Quadro 6.

[8] O termo de consentimento dos alunos pode ser visualizado no Apêndice C deste trabalho.

Perfil do aluno
Nome Completo:____
Idade:____
Ano de conclusão do Ensino Médio :_______________________________
Ano de ingresso na Engenharia Elétri ca:_____________________________
Quantas vezes cursou Cálculo I:__________________________________

Quadro 6. Entrevista sobre Perfil do Aluno

A partir desta entrevista, pode-se identificar que:

- 76% dos alunos estavam cursando a disciplina de Cálculo I pela primeira vez;
- a média de idade dos alunos da turma foi de 20 anos, no qual o aluno mais jovem tinha 18 anos e o mais velho tinha 34 anos;
- 51% dos alunos concluíram o ensino médio nos últimos três anos (até 2005);
- 72% dos alunos ingressaram na universidade no ano de 2008.

Percebe-se, dessa forma, que a turma era predominantemente jovem, o que facilita o trabalho com as tecnologias da informação e comunicação. Isto porque os jovens de hoje estão acostumados a fazer pesquisas na internet, mandar mensagens pelo celular e participar de chats e fóruns de discussão *on-line*. A tecnologia recente favorece esta mobilidade: com o advento do wireless e o desenvolvimento de aparelhos portáteis, a rua torna-se uma extensão do universo privado. O celular e o laptop podem ser considerados, hoje, os portais de acesso ao mundo virtual.

Assim, no meio acadêmico, a inserção desta tecnologia não provoca insegurança e receios, mas sim boas expectativas e boa receptividade.

O fato de grande parte dos alunos ter ingressado na universidade no ano de 2008 revela que muitos alunos ainda não vivenciaram o ensino superior e, consequentemente, não possuem uma postura de estudo adequada ao Cálculo Diferencial. Assim, a metodologia de utilização do ambiente ROODA justifica-se por manter os alunos envolvidos com a disciplina mesmo em horários extraclasse (fator indispensável para um bom aproveitamento da disciplina).

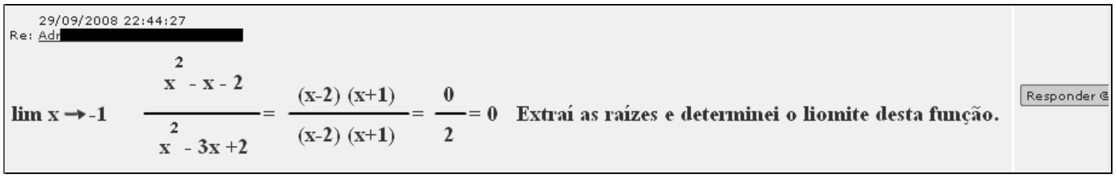
6.2 Aprendizagem de Conceitos Matemáticos

Para a análise desta categoria de pesquisa, tomou-se como fonte de dados a participação dos alunos no fórum de discussão do ambiente ROODA. A partir do experimento piloto, pode-se perceber que não é possível analisar as colocações dos alunos com total rigor matemático. O fórum de discussão representa para a turma um meio de comunicação e interação extraclasse onde, além de resolver problemas matemáticos, pode-se encontrar colegas e amigos virtualmente, trocar ideias e dialogar, de modo informal. Ainda, a linguagem matemática utilizada e o nível de rigor utilizado nas mensagens revelam o estágio de desenvolvimento do aluno e o nível de formalização dos conceitos envolvidos. Segundo Sauer (2004), ao adotar uma linguagem simplificada, no início do processo, é possível eliminar dificuldades, o que não impede seu tratamento com o devido rigor e formalismo, quando o aluno estiver em condições e tiver interesse em sua devida apreciação.

A primeira atividade proposta à turma foi relativa ao cálculo de limites de funções racionais. Dentre os limites propostos, podemos analisar o limite apresentado na Figura 46.

Figura 46. Limite de Funções Racionais

No cálculo de limite de funções racionais, muitas vezes tem-se uma situação de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, em que é preciso realizar a fatoração do numerador e denominador da função racional, para então simplificar a função e chegar à solução do problema. Entretanto, nem sempre é necessário realizar este procedimento. A função apresentada na Figura 46 não apresenta indeterminação quando a variável *x* tende a -1; logo, não é preciso escrever a função na forma fatorada para resolver o limite. Contudo, vamos observar a solução apresentada na Figura 47 pelo aluno ADR[9].

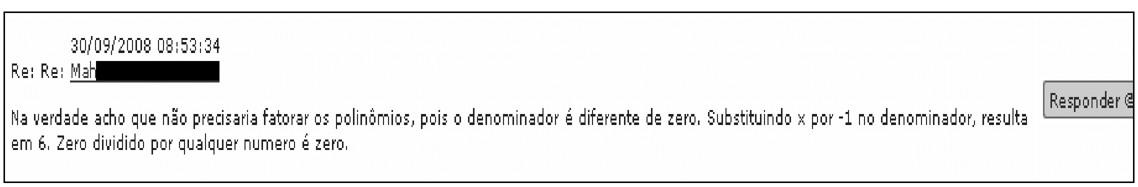

29/09/2008 22:44:27
Re: Adr[redacted]

$$\lim x \to -1 \quad \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)\,(x+1)}{(x-2)\,(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$ Extraí as raízes e determinei o liomite desta função.

Responder @

Figura 47. Solução para o Cálculo de Limite de Funções Racionais

O aluno ADR realiza a fatoração do numerador e denominador da função, simplifica a mesma, para então encontrar o resultado. A solução não está correta, pois o aluno equivocou-se ao identificar as raízes do trinômio do denominador. Entretanto, sua solução revela uma não compreensão dos motivos que levam ao procedimento de fatorar a função racional para encontrar seu limite. Percebe-se que o procedimento é realizado de forma mecânica, o que revela níveis elementares de abstração (ação sem conceituação). Entretanto, a Figura 48 mostra a intervenção do colega MAH. Este aluno mostra compreender os motivos que levam ao procedimento de fatorar as funções.


30/09/2008 08:53:34
Re: Re: Mah[redacted]

Na verdade acho que não precisaria fatorar os polinômios, pois o denominador é diferente de zero. Substituindo x por -1 no denominador, resulta em 6. Zero dividido por qualquer numero é zero.

Responder @

Figura 48. Intervenção do colega

O aluno MAH, ao resolver o limite apresentado na Figura 49, mostra claramente sua compreensão sobre o assunto (Figura 50). Evidencia que é necessário realizar a fatoração por identificar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Encontra as raízes, para então fatorar o polinômio, simplificar a função e, finalmente, encontrar o valor do limite solicitado. As colocações de MAH revelam que o mesmo é capaz de identificar diferentes situações, compará-las, identificando analogias ou diferenças, de modo a estabelecer a estratégia para a solução do

[9] Há um equívoco de escrita matemática cometido pelo aluno, ao igualar o símbolo de limite com a expressão algébrica, que não será considerado na análise.

problema. Percebe-se que as comparações realizadas por MAH atingem correspondências estruturais, e não apenas comparações funcionais (PIAGET, 1995).

Figura 49. Limite de Funções Racionais

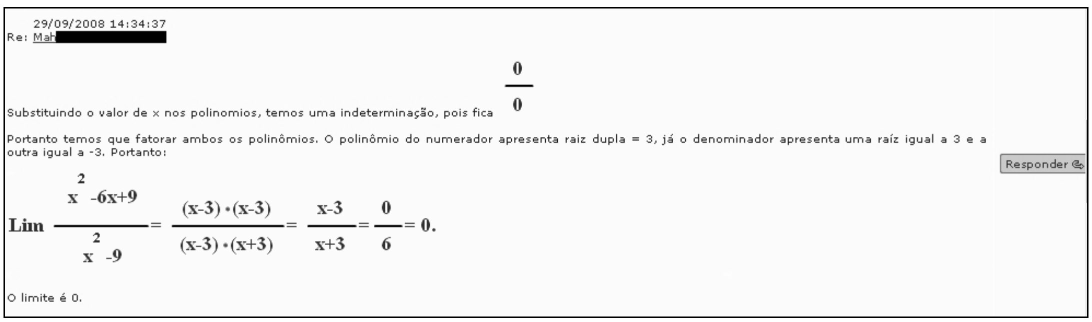


Figura 50. Solução Correta no Limite de Funções Racionais

Ainda, no que diz respeito ao cálculo de limite de funções racionais, é possível identificar diferentes soluções apresentadas por um mesmo aluno, TIA. Vamos analisar o limite apresentado na Figura 51. O aluno TIA, ao resolver inicialmente o problema, identificou a indeterminação $\frac{0}{0}$ (Figura 52). Logo, para eliminar esta indeterminação, percebeu que poderia realizar uma divisão de polinômios e, desta forma, resolveu o problema. Entretanto, há outras formas de proceder no cálculo deste limite. Assim, TIA foi incentivado a resolver o problema por meio de outros métodos, conforme Figura 53. Apesar de demonstrar certa insegurança, TIA resolveu corretamente o limite apresentado (Figura 54). Desta forma, percebe-se que um mesmo aluno foi capaz de apresentar diferentes percursos para solucionar um mesmo problema matemático. Isto mostra claramente que o aluno é capaz de flexibilizar o conhecimento matemático, transitar entre as diferentes formas de simplificação de funções racionais e identificar que ambas fazem parte de um todo coerente e inter-relacionado. E é a construção de relações sólidas e consistentes que permite ao sujeito transitar entre as diferentes representações (DREYFUS, 1991).

10/09/2008 11:01:48
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1}$$

Figura 51. Limite de Funções Racionais

15/09/2008 23:42:42
Re: Tia[redacted]

Boa noite a todos.

Analisando a divisão destes dois limites, se substituirmos o x na fração, obteremos um resultado $\frac{0}{0}$.

mas continuando, se dividir o numerado por sua raíz $(x+1)$ e colocar na forma fatorada na fração $\lim \frac{x^3 - x^2 + x^1 - 1 \bullet \left(x^1 + 1\right)}{x^1 + 1}$, torna possível cortar uma das raízes do numerador com o denominador.

Sendo assim a este divisão de limites passa a ser

$\lim x^3 - x^2 + x^1 - 1$, onde o x-> -1.

Portando substituindo os "x" por -1, obtemos o resultado -4.

espero ter conseguido alcançar o raciocínio correto dessa equação.

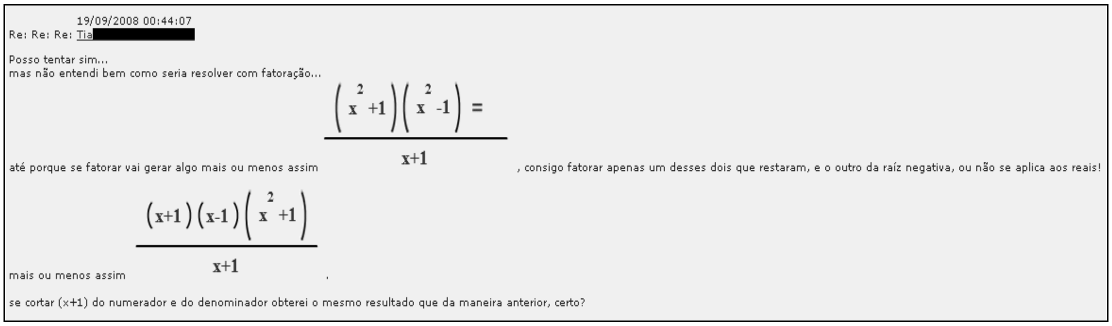
Figura 52. Primeira solução apresentada

16/09/2008 14:29:08
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Tia[redacted],

Teu raciocínio está correto. A forma de resolução que utilizaste foi divisão de polinômios, certo? Mas poderíamos ter resolvido este limite fatorando o numerador pela "diferença de quadrados ". Queres tentar resolver desta forma também?

Figura 53. Intervenção da professora


19/09/2008 00:44:07

Re: Re: Re: Tia[redacted]

Posso tentar sim...

mas não entendi bem como seria resolver com fatoração...

até porque se fatorar vai gerar algo mais ou menos assim $\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x+1} =$, consigo fatorar apenas um desses dois que restaram, e o outro da raíz negativa, ou não se aplica aos reais!

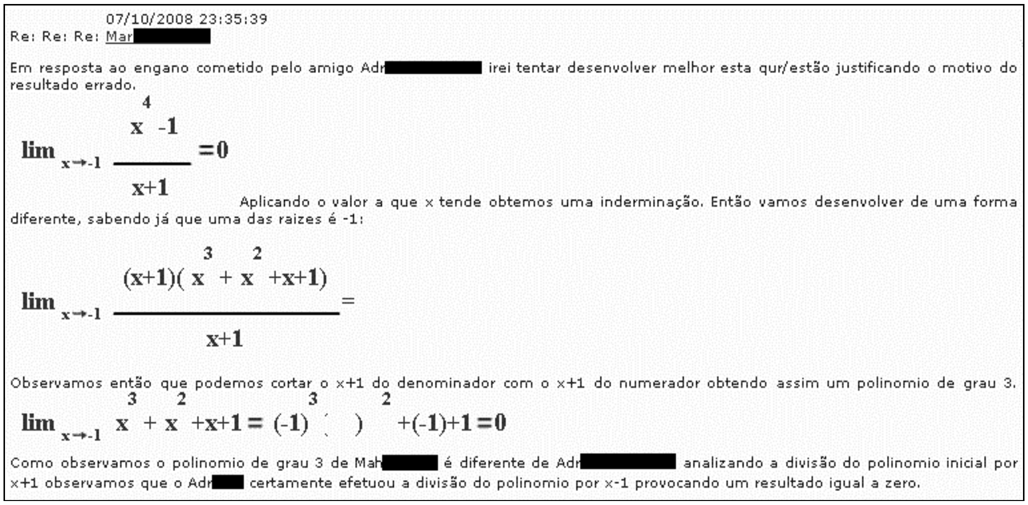
mais ou menos assim $\frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x+1}$.

se cortar (x+1) do numerador e do denominador obterei o mesmo resultado que da maneira anterior, certo?

Figura 54. Segunda solução apresentada

É interessante verificar que TIA aceitou enfrentar o desafio proposto e, ao longo de seu desenvolvimento, foi tomando consciência de suas ações. Inicialmente, declarou *"Posso tentar sim ..., mas não entendi bem como seria resolver com fatoração ..."*. Entretanto, o fato de argumentar sobre sua solução e expressar suas ideias fez com que ele estabelecesse relações entre os conceitos e, ao final do processo, compreendesse suas próprias ações. Em outras palavras, inicialmente, TIA não consegue observar (abstrair) a propriedade matemática senão na medida em que a compreende no decorrer das próprias ações. Assim, a própria ação de TIA continua e renova-se, o que assegura uma solidariedade maior entre suas coordenações e a leitura de seus resultados sobre o objeto modificado (PIAGET, 1995).

Com relação ao mesmo problema, é possível identificar os diferentes níveis de tomada de consciência estabelecidos. As Figuras 52 e 54 mostram que o aluno busca justificar seu raciocínio, e a identificação das razões que levam ao sucesso na solução do problema revelam a conceituação, ou seja, a compreensão dos conceitos empregados na sua resolução. Um outro aluno, MAR, evidencia sua compreensão sobre os conceitos envolvidos no cálculo de limites de funções racionais, ao resolver este mesmo problema, comparando diferentes soluções apresentadas por diferentes colegas (Figura 55). A capacidade de comparar diferentes soluções, assim como identificar as razões que levaram o colega ADR ao fracasso, mostra que MAR encontra-se no terceiro nível de tomada de consciência. Além disso, percebe-se que MAR encontra-se no patamar das comparações, que só é atingido por abstrações reflexionantes (PIAGET, 1995). Porém, a Figura 56 revela o primeiro nível de tomada de consciência, no qual o aluno apenas apresenta uma solução analítica para o problema, revelando compreender apenas em ação o cálculo de limites de função racional.


07/10/2008 23:35:39
Re: Re: Re: Mar[redacted]

Em resposta ao engano cometido pelo amigo Adr[redacted] irei tentar desenvolver melhor esta qur/estão justificando o motivo do resultado errado.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x+1} = 0$$

Aplicando o valor a que x tende obtemos uma inderminação. Então vamos desenvolver de uma forma diferente, sabendo já que uma das raizes é -1:

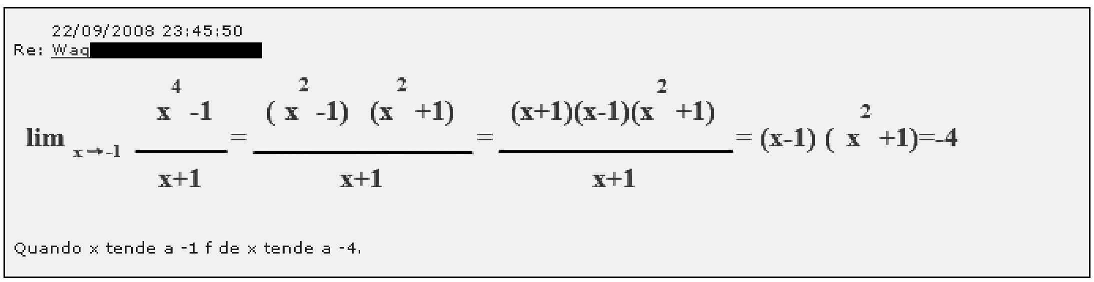
$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^3+x^2+x+1)}{x+1} =$$

Observamos então que podemos cortar o x+1 do denominador com o x+1 do numerador obtendo assim um polinomio de grau 3.

$$\lim_{x\to -1} x^3+x^2+x+1 = (-1)^3\ (\ )^2\ +(-1)+1=0$$

Como observamos o polinomio de grau 3 de Mah[redacted] é diferente de Adr[redacted] analizando a divisão do polinomio inicial por x+1 observamos que o Adr[redacted] certamente efetuou a divisão do polinomio por x-1 provocando um resultado igual a zero.

Figura 55. Terceiro nível de tomada de consciência


22/09/2008 23:45:50
Re: Waq[redacted]

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x+1} = \frac{(x^2-1)\ (x^2+1)}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x+1} = (x-1)\ (x^2+1)=-4$$

Quando x tende a -1 f de x tende a -4.

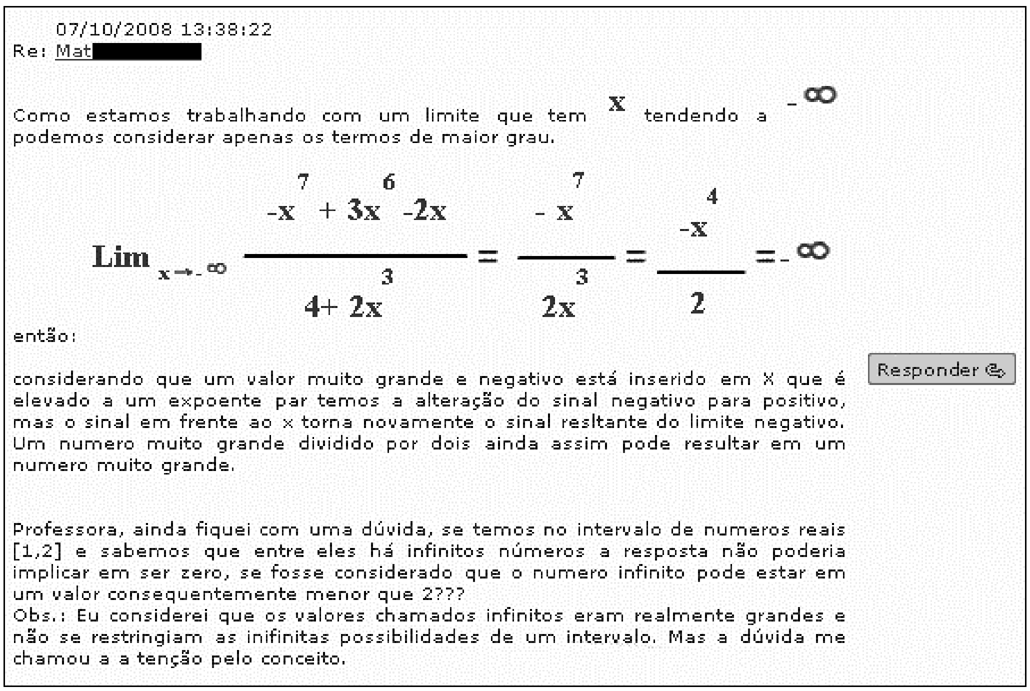
Figura 56. Primeiro nível de tomada de consciência

Um outro problema referente ao cálculo de limites no infinito[10] de funções racionais, apresentou uma reflexão interessante, conforme Figura 57. Percebe-se que a solução analítica do problema está correta, e que MAT fez uma análise para justificar o resultado encontrado. Não há dúvidas de que a compreensão do conceito de infinito[11] exige níveis elevados de abstração. O aluno conclui que o resultado do problema é $-\infty$, conjecturando que ∞ pode representar um valor "*muito grande*" que, ao ser divido pelo número dois, ainda resulta em um valor "*muito grande*". É interessante ressaltar que MAT afirma que o resultado, ao ser divido por dois, "*ainda assim <u>pode</u> resultar em um número muito grande*". O fato é que,

[10] Conforme Stewart (2009), pode-se definir, informalmente, limites no infinito como:
Seja f uma função definida em algum inter valo $(a,+\infty)$. Então, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ significa que os valores de *f(x)* podem ficar arbitrariamente próximos de L tomando-se x suficientemente grande e,
Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty,a)$. Então, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ significa que os valores de *f(x)* podem ficar arbitrariamente próximos de L tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

[11] Neste contexto, pode-se dizer que ∞ descreve o comportamento de uma função quando os valores em seu domínio ou imagem ultrapassam qualquer limitante (THOMAS, 2009).

certamente, este resultado será ∞, mas MAT parece acreditar que, dependendo do valor do denominador, pode-se encontrar um resultado diferente. Assim, percebe-se que a ideia de infinito não está bem construída por este aluno. Ainda, pela análise realizada por MAT, percebe-se que este manipula o infinito (no sentido epistemológico), como se este representasse um número real, o que dá indícios de que suas abstrações são empíricas e pseudo-empíricas; não há indícios de abstrações refletidas. Pode-se perceber também a dúvida que MAT expressa sobre o significado de infinito neste contexto. Ele acredita que infinito possa estar representado "*infinitas possibilidades*", ou seja, que a variável *x* pode assumir infinitos valores, o que permite diferentes soluções para o problema. Isto é um equívoco e revela a falta de compreensão da ideia de infinito no contexto do problema.



07/10/2008 13:38:22

Re: Mat[redacted]

Como estamos trabalhando com um limite que tem x tendendo a $-\infty$ podemos considerar apenas os termos de maior grau.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^7 + 3x^6 - 2x}{4 + 2x^3} = \frac{-x^7}{2x^3} = \frac{-x^4}{2} = -\infty$$

então:

considerando que um valor muito grande e negativo está inserido em X que é elevado a um expoente par temos a alteração do sinal negativo para positivo, mas o sinal em frente ao x torna novamente o sinal resltante do limite negativo. Um numero muito grande dividido por dois ainda assim pode resultar em um numero muito grande.

Professora, ainda fiquei com uma dúvida, se temos no intervalo de numeros reais [1,2] e sabemos que entre eles há infinitos números a resposta não poderia implicar em ser zero, se fosse considerado que o numero infinito pode estar em um valor consequentemente menor que 2???

Obs.: Eu considerei que os valores chamados infinitos eram realmente grandes e não se restringiam as inifinitas possibilidades de um intervalo. Mas a dúvida me chamou a a tenção pelo conceito.

Responder

Figura 57. Reflexão sobre infinito

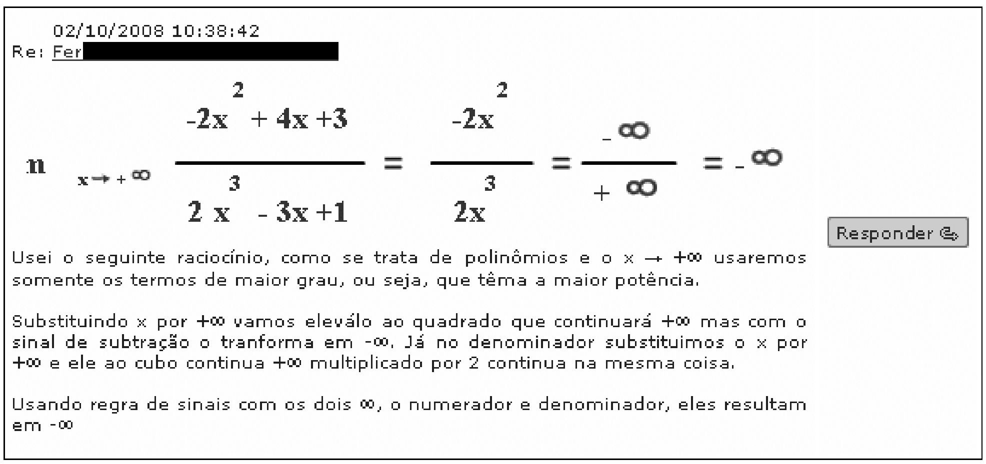
O conceito de infinito é extremamente abstrato. Dessa forma, frequentemente provoca equívocos no cálculo de limites. A Figura 59 mostra a solução apresentada por FER para o problema ilustrado na Figura 58. O aluno FER opera o infinito algebricamente, como se este representasse um número real, o que leva à solução incorreta do problema. Outro aluno, MAR, percebe o equívoco cometido pelo colega e resolve o problema a sua maneira (Figura 60). Apesar do resultado final do problema estar correto, seus argumentos não revelam compreensão clara sobre o assunto. Quando MAR afirma que *"um número muito grande* *dividido por outro número também grande pode resultar em um valor próximo de zero"*, fica evidente sua falta de compreensão sobre o comportamento de funções quando a variável *x* tende ao infinito.


10/09/2008 11:14:53
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+4x+3}{2x^3-3x+1}$$

Responder

Figura 58. Limite de Funções Racionais


02/10/2008 10:38:42
Re: Fer[redacted]

$$n_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+4x+3}{2x^3-3x+1} = \frac{-2x^2}{2x^3} = \frac{-\infty}{+\infty} = -\infty$$

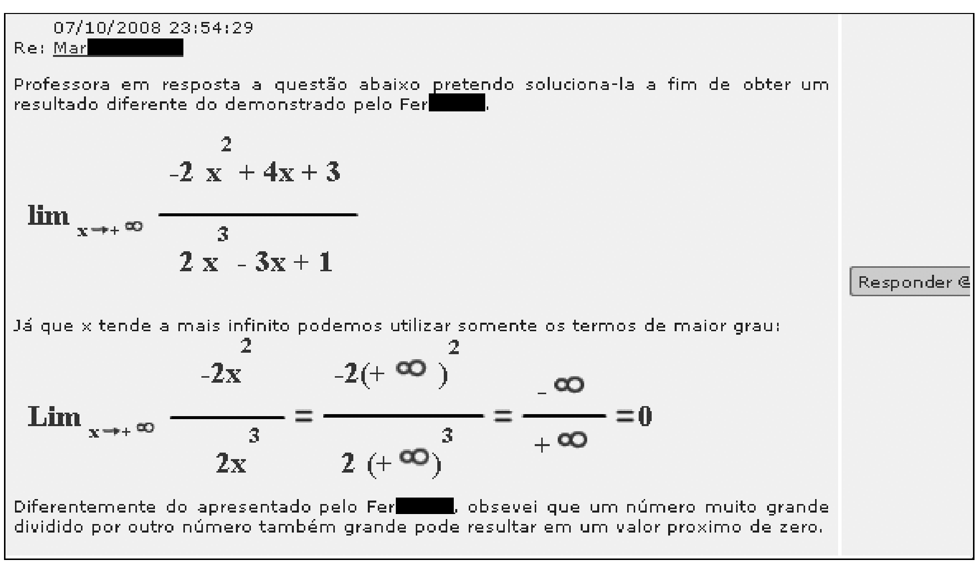
Responder

Usei o seguinte raciocínio, como se trata de polinômios e o x → +∞ usaremos somente os termos de maior grau, ou seja, que têma a maior potência.

Substituindo x por +∞ vamos eleválo ao quadrado que continuará +∞ mas com o sinal de subtração o tranforma em -∞. Já no denominador substituimos o x por +∞ e ele ao cubo continua +∞ multiplicado por 2 continua na mesma coisa.

Usando regra de sinais com os dois ∞, o numerador e denominador, eles resultam em -∞

Figura 59. Solução Apresentada


07/10/2008 23:54:29
Re: Mar[redacted]

Professora em resposta a questão abaixo pretendo soluciona-la a fim de obter um resultado diferente do demonstrado pelo Fer[redacted].

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+4x+3}{2x^3-3x+1}$$

Responder

Já que x tende a mais infinito podemos utilizar somente os termos de maior grau:

$$\mathrm{Lim}_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{2x^3} = \frac{-2(+\infty)^2}{2(+\infty)^3} = \frac{-\infty}{+\infty} = 0$$

Diferentemente do apresentado pelo Fer[redacted], obsevei que um número muito grande dividido por outro número também grande pode resultar em um valor proximo de zero.

Figura 60. Nova solução apresentada

Em problemas como este, pode-se dizer que alunos que operam o ∞ algebricamente ou o substituem por valores reais, mesmo que altos, ainda se encontram no nível das abstrações empíricas, uma vez que a manipulação algébrica com valores reais evidencia a necessidade de recorrer ao concreto, ao observável[12], para resolver a questão. No nível das abstrações refletidas, o aluno já é capaz de entender o infinito como uma ideia que descreve o comportamento de uma função quando os valores em seu domínio ou imagem ultrapassam qualquer limitante.

Mais adiante, MAR, ao corrigir o colega FER, que desenvolveu uma solução (Figura 62) para o problema da Figura 61, evidenciou os equívocos que podem ocorrer ao manipular o infinito algebricamente (Figura 63). O resultado deste limite não é igual a zero, mas sua generalização, que afirma que $\frac{\infty}{\infty} = 0$, levou-o a este resultado incorreto. Este aluno parece não compreender que conjuntos infinitos podem ter ordens de grandeza diferentes e que, desta forma, não podemos estabelecer uma regra geral, que possa ser aplicada em todos os casos. Ao comparar problemas em que $x \to \infty$, classificou-os todos em uma mesma classe de problemas, nos quais apresentam uma mesma solução. Por outro lado, FER também mostra inconsistência em sua solução, ao escrever que $\frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$. Observam-se aí, duas generalizações inconsistentes: por um lado, MAR generalizou que $\frac{\infty}{\infty} = 0$ e, por outro lado, FER generalizou que $\frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$. Ambos estão apoiando-se sobre casos particulares, repetições de uma solução já encontrada, mas que não pode ser aplicada em qualquer caso. Uma generalização que é fundada sobre a compreensão, busca encontrar a razão do procedimento operatório que conduz à solução. Entretanto, esta razão ainda está sendo construída por MAR e FER. Para Piaget (1978), a generalização não consiste em assimilar novos conteúdos a formas já constituídas, mas antes em engendrar novas formas e novos conteúdos, portanto novas organizações estruturais. MAR e FER estão ampliando a extensão de suas generalizações, assimilando novos conteúdos a formas que eles constituíram. Contudo, eles precisam ampliar a compreensão destas formas, diferenciando cada situação e reintegrando-as em estruturas de ordem superior, o que levará à elaboração de estruturas mais ricas em compreensão, porém de extensão mais restrita.

---

[12] Neste caso, pode-se entender como concreto e observável os números reais, que podem ser operados algebricamente, já que o infinito representa algo sem limites, sem fim.

Somente mais adiante, após a observação de soluções de outros problemas (o que evidencia a busca por uma regularidade empírica), e a intervenção da professora (Figura 64), FER apresentou a solução parcialmente correta (Figura 65), mas ainda revelando problemas de compreensão, ao questionar se $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

10/09/2008 11:16:06
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x}{3x^4 + x^3 + 1}$$

Responder

Figura 61. Limite de Funções Racionais

02/10/2008 10:43:54
Re: Fer[redacted]

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x}{3x^4 + x^3 + 1} = \frac{x^4}{3x^4} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$$

Mesma estória. Usamos os termos de maior grau. E substituindo-os terá +∞ pois a potência de x de ambos é positiva.

Responder

Figura 62. Solução incorreta

07/10/2008 23:58:39
Re: Re: Re: Mar[redacted]

Novamente encontrei o mesmo equivoco na solução do Colega Fer[redacted]. Creio que um nuúmero muito grande dividido por outro numero tambem muito grande resulte em zero principalmente quando se trata de limites.Um exemplo genérico abaixo:

$$\frac{\infty}{\infty} = 0$$

Responder

Figura 63. Incompreensão do infinito

06/10/2008 15:05:21
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Fer[redacted],

Simplifica a expressão antes de concluir o limite... não está correta a solução final. Vamos tentar refazer?

Responder

Figura 64. Intervenção da professora

15/10/2008 16:54:19
Re: Fer[redacted]

Bom se simplificar antes de substituir x, ficará $\frac{1}{3}$?
Eu acho q se usando em conta o racicionio do colega Mat[redacted], se os dois números forem iguais (tratando do caso $\frac{\infty}{\infty}$) se forem iguais o resultado não será 1?

Responder

Figura 65. Solução parcialmente correta

Já para o limite da Figura 66, MAH não resolve o limite corretamente (Figura 67), equivocando-se no resultado encontrado, assim como ao afirmar que “*Temos uma divisão de polinômios, então temos que usar os termos de maior grau*”. A professora intervém (Figura 68), na tentativa de mostrar o equívoco. Então, o colega MAT resolve o problema corretamente (Figura 69), apresentado uma argumentação que evidencia claramente as razões que levam à solução.

10/09/2008 11:18:53
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3 + x^2 - x + 1}{5x^5 - 3x}$$

Responder

Figura 66. Limite de Funções Racionais

28/09/2008 21:10:48
Re: Mah[redacted]

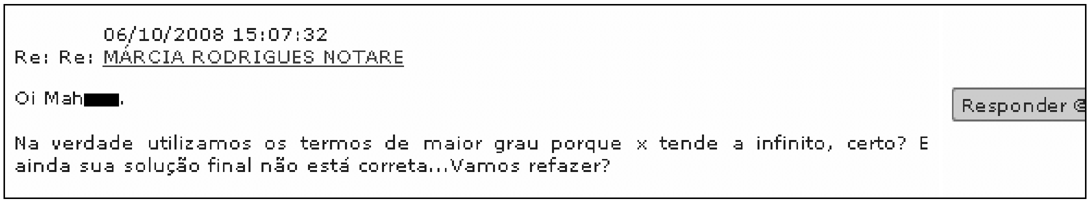
Temos uma divisão de polinômios, então temos que usar os termos de maior grau.

$$\text{Lim}\ \frac{-x^3 + x^2 - x + 1}{5x^5 - 3x} = \frac{-x^3}{5x^5} = \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Sendo que o x tende a $+\infty$

Responder

Figura 67. Solução com problemas de argumentação



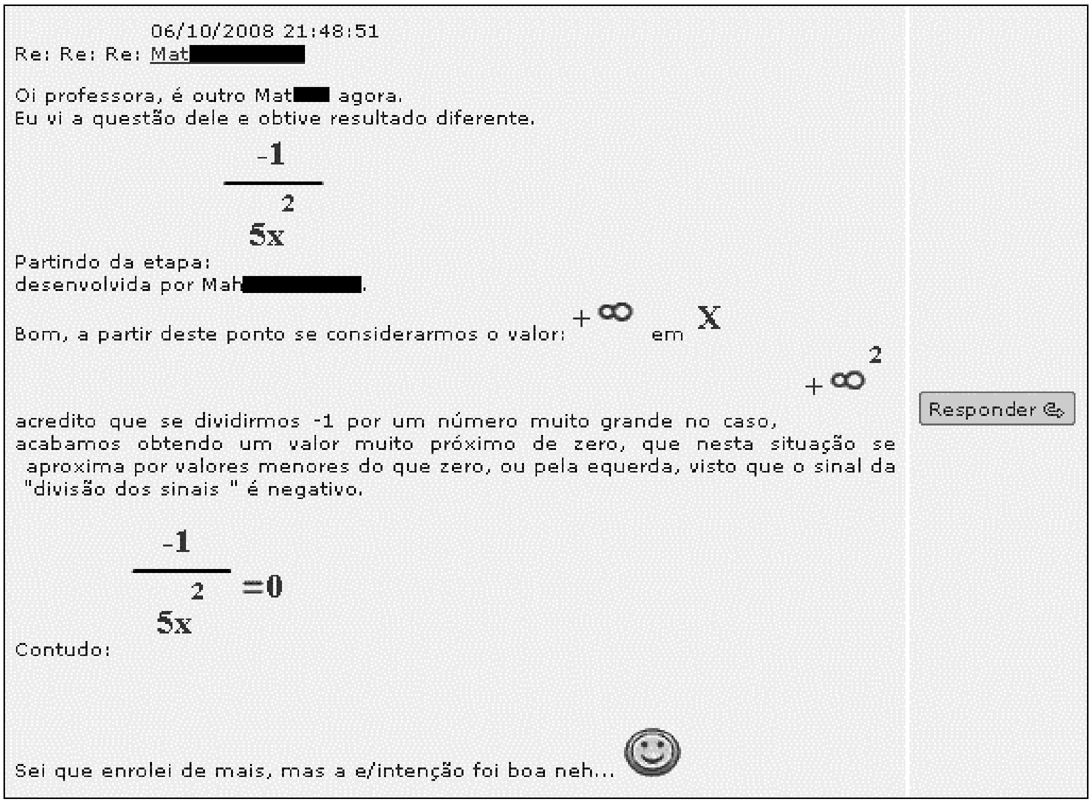
06/10/2008 15:07:32
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Mah[redacted].

Na verdade utilizamos os termos de maior grau porque x tende a infinito, certo? E ainda sua solução final não está correta...Vamos refazer?

Responder

Figura 68. Intervenção da professora



06/10/2008 21:48:51
Re: Re: Re: Mat[redacted]

Oi professora, é outro Mat[redacted] agora.
Eu vi a questão dele e obtive resultado diferente.

$$\frac{-1}{5x^2}$$

Partindo da etapa:
desenvolvida por Mah[redacted].

Bom, a partir deste ponto se considerarmos o valor: $+\infty$ em x

$$+\infty^2$$

acredito que se dividirmos -1 por um número muito grande no caso, acabamos obtendo um valor muito próximo de zero, que nesta situação se aproxima por valores menores do que zero, ou pela equerda, visto que o sinal da "divisão dos sinais " é negativo.

$$\frac{-1}{5x^2} = 0$$

Contudo:

Sei que enrolei de mais, mas a e/intenção foi boa neh...

Responder

Figura 69. Solução correta

As colocações a seguir referem-se às discussões ocorridas em torno da interpretação do conceito de derivada. Os problemas iniciais tratam da interpretação da derivada como uma taxa de variação, mais especificamente, como velocidade instantânea. Para o problema da Figura 70, diversas soluções foram apresentadas de imediato, como mostra a Figura 71. Fica evidente, nos relatos dos alunos, que, se a velocidade é constante, então a variação da posição em função do tempo ocorre de forma linear. Contudo, observa-se uma imprecisão na linguagem utilizada pelos alunos para descrever a situação apresentada, utilizando termos como "*reta diagonal*" ou "*reta inclinada perfeita*", o que revela uma ausência de rigor e formalização dos conceitos matemáticos envolvidos na situação.

11/10/2008 11:29:24
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Se uma partícula move-se com velocidade constante, o que pode ser dito sobre o gráfico da posição X tempo?

Responder

Figura 70. Problema de taxas de variação

12/10/2008 11:29:58
Re: Gui[redacted]

Em uma velocidade constante, o gráfico posição x tempo seria uma reta diagonal. Ou seja, a medida em que aumenta o tempo, a posição aumenta da mesma forma.

Responder

17/10/2008 20:27:05
Re: And[redacted]

O grafico da posição X tempo para uma particula em velocidade constante é uma reta crescente em diagonal. Uma vez que com o decorrer do tempo a posição aumenta proporcionalmente.

Responder

19/10/2008 15:45:55
Re: Wil[redacted]

O grafico da posição X tempo, resulta numa reta incli por ser Proporcinal a posição conforme o tempo, não existindo entao aceleração.

Responder

20/10/2008 22:18:19
Re: Mai[redacted]

Bom se uma particula mover-se em uma velocidade constante o gáfico da função será uma reta inclinada pefeita ou seja se a particula mover-se 10 mts em 10 seg percorerá 20 mts em 20 seg e assim por diande.

Responder

20/10/2008 22:47:44
Re: Adr[redacted]

Pode se dizer que o gráfico da posição de x no tempo é uma reta.

Responder

22/10/2008 12:32:51
Re: Sam[redacted]

Se a velocidade é constante, o grafico posição X tempo vai ser cortado por uma reta diagonal crescente, ou seja , a proporção que posição aumenta o tempo aumenta.

Responder

Figura 71. Soluções apresentadas

Da mesma forma ocorre com o problema ilustrado na Figura 72. Vários alunos responderam ao problema corretamente, evidenciando compreensão da situação apresentada (Figura 73). As colocações dos alunos revelam que os mesmos são capazes de compreender como a posição da partícula está variando em função da variação do tempo, em situações em que a velocidade da partícula é constante ou nula. Porém, novamente, percebe-se a utilização de uma linguagem imprecisa para descrever a situação apresentada, revelando uma ausência de rigor e formalismo.

11/10/2008 11:29:40
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Se uma partícula está em repouso, o que pode ser dito sobre o gráfico da posição X tempo?

Responder

Figura 72. Problema de taxas de variação

12/10/2008 11:31:36
Re: Guil[redacted]

O gráfico posição x tempo de uma partícula em repouso seria uma constante na horizontal. A medida em que o tempo(x) aumenta, a posição (y) não aumenta, caracterizando o repouso.

Responder

16/10/2008 20:32:02
Re: Mah[redacted]

Podemos dizer que o gráfico fica paralelo ao eixo x, ou seja, com o passar do tempo a distância percorrida continua a mesma.

Responder

17/10/2008 20:28:57
Re: And[redacted]

Com a particula em repouso o grafico será uma reta na horizontal, uma vez que não está ocorrendo movimento (alteração da posição) ao longo do tempo.

Responder

20/10/2008 22:21:17
Re: Mai[redacted]

Neste caso a partícula esta no mesmo local de partida mas com o tempo correndo, portanto teremos uma reta com um único ponto no eixo y (distância) e o ponto x (tempo) Variando

Responder

20/10/2008 22:49:50
Re: Adr[redacted]

Pode se dizer q o gráfico q caracteriza este caso é uma reta paralela ao eixo x, com variação de tempo e posição "s " constante.

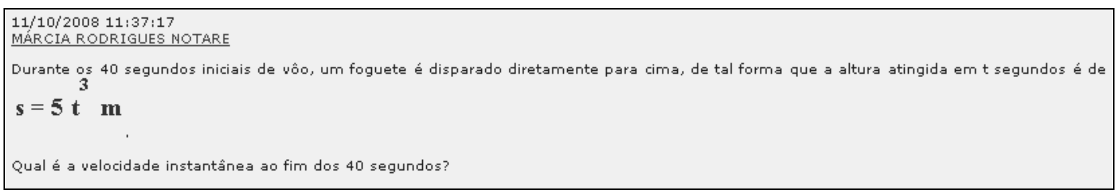
Responder

Figura 73. Soluções apresentadas

Entretanto, o problema apresentado na Figura 74 exige, além da interpretação geométrica da derivada como velocidade instantânea, sua análise e resolução algébrica. Observou-se que poucos alunos aventuraram-se a resolver esta classe de problemas. Isto evidencia que a interpretação geométrica (gráfica) de velocidade instantânea, exemplificadas nas Figuras 71 e 73, ocorre de forma mais natural, uma vez que a representação gráfica “concretiza” o pensamento do aluno e permite uma visualização da situação, fornecendo recursos para abstrações empíricas e pseudo-empíricas.

Na situação apresentada na Figura 74, não há observáveis (representação gráfica), mas uma situação-problema descrita por uma lei matemática, que exige o estabelecimento da relação entre inclinação de reta tangente com velocidade instantânea. Neste caso, são as coordenações das ações que permitem ao aluno solucionar o problema, por meio de abstrações reflexionantes.

Contudo, soluções bem organizadas foram desenvolvidas. A Figura 75 mostra a solução apresentada por AND. O aluno AND revela compreender que a velocidade instantânea é uma das interpretações que podemos dar à derivada de uma função, quando afirma que *“podemos calculá-la achando a inclinação da reta tangente...”*. Em seguida, resolve o problema corretamente, por meio da definição de derivada. Finalmente, AND apresenta uma interpretação para o resultado encontrado, quando afirma que *“Portanto, a velocidade instantânea do foguete em 40 s é de 24000 m/s”*. Apresentar uma interpretação para o resultado final de um problema matemático evidencia que as operações realizadas são significativas para o aluno, uma vez que o resultado final da derivada da função está relacionado à velocidade instantânea do foguete.


11/10/2008 11:37:17
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Durante os 40 segundos iniciais de vôo, um foguete é disparado diretamente para cima, de tal forma que a altura atingida em t segundos é de

$s = 5t^3$ m

Qual é a velocidade instantânea ao fim dos 40 segundos?

Figura 74. Problema de taxas de variação

20/10/2008 07:44:39
Re: And[redacted]

Tendo os pontos Xo e Yo, que são o tempo e altura a qual queremos saber a velocidade instantanea do foguete, podemos calcula-la, achando a inclinação da reta tangente que é igual a velocidade instantanea.

$$\mathbf{mtg} = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(h+x0) - f(x0)}{h}$$

Com o ponto (x0, y0) = (40, 320000) calculei entao a inclinação da reta tangente.

$$\mathbf{mtg} = \lim_{h \to 0} \frac{5 \bullet (h+40)^{3} - 320000}{h}$$

$$\textbf{Sendo}\ (h+40)^{3} = h^{3} + 80h^{2} + 1600h + 40h^{2} + 3200h + 64000$$

Substituindo na fórmula fica:

$$\mathbf{mtg} = \lim_{h \to 0} \frac{5\,h^{3} + 600\,h^{2} + 24000h + 320000 - 320000}{h}$$

Juntando os termos semelhantes:

$$\mathbf{mtg} = \lim_{-0}\ 5\,h^{2} + 600h + 24000$$

Como h tende a 0 (zero), o que sobra em nosso calculo é o termo 24000

Portanto a velocidade instantanea do foguete em 40s é de 24000 m / s.

Figura 75. Solução correta

Porém, este problema também pode ser resolvido por meio das regras de derivação. Uma intervenção da professora incentiva uma nova solução (Figura 76). FER apresenta a solução por meio das regras de derivação (Figura 77). Entretanto, sua solução foi apresentada de forma enxuta, sem argumentações que revelassem uma compreensão maior do problema e dos métodos adotados para sua solução. Contudo, de acordo com Piaget (1986), não é que FER não saiba nada de suas ações bem-sucedidas. Na verdade, ele compreende o essencial, mas compreende em ação, não em pensamento.

22/10/2008 11:33:56
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Muito bom! Agora que já sabemos encontrar a derivada pelas regras de derivação, podemos resolver esta questão de forma mais rápida... quem quer resolver pelas regras de derivação e comparar o resultado?

Figura 76. Intervenção da professora

10/11/2008 01:51:58
Re: Re: Re: Fer[redacted]

Seguindo pelas regras de derivação $f'(x) = n\,x^{n-1}$, fazemos:

$f'(t) = 15t^2$, substituindo o t por 40, encontramos 24000 m/s.

certo?

Figura 77. Solução pelas regras de derivação

O problema apresentado na Figura 78 exige uma interpretação do conceito de derivada como taxa de variação. Ora, sabendo que $f(x)$ representa o custo da perfuração de x metros, então $f'(x)$ deve representar a taxa de variação do custo (em reais) em função da profundidade (em metros). O aluno AND revela, em sua interpretação, compreender que a função derivada representa a variação da variável dependente em função da variação da variável independente (Figura 79).

11/10/2008 11:46:20
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo é de C = f(x) reais. Ou seja, a medida em que varia a profundidade do poço de petróleo, varia também o custo da perfuração. Você saberia explicar qual o significado de f '(x) neste problema?

Responder

Figura 78. Problema de interpretação

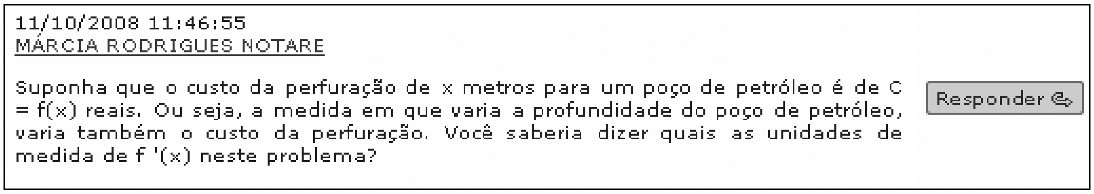
17/10/2008 20:56:16
Re: And[redacted]

Através de f '(x), podemos calcular a taxa de variação do custo [f(x)] em função da profundidade da perfuração (x) para qualquer profundidade que se queira saber o custo.

Responder

Figura 79. Interpretação correta

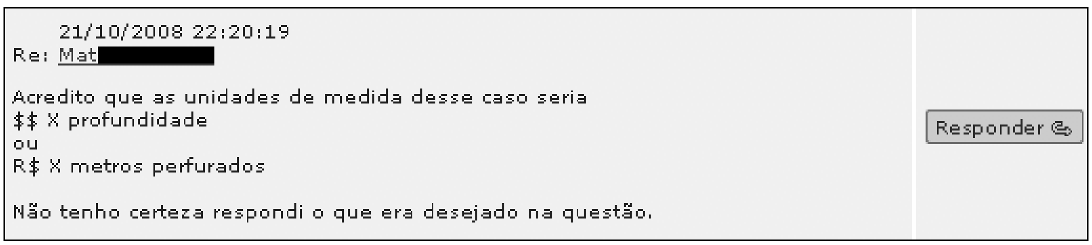
Dando continuidade aos problemas de interpretação do conceito de derivada, apresentou-se uma variação deste problema (Figura 80), que foi solucionado corretamente por MAT (Figura 81). Para identificar as unidades de medida da função $f'(x)$, é preciso que o aluno compreenda, antes, que a derivada pode ser entendida como uma taxa de variação para, depois então identificar quais grandezas estão variando neste contexto. O fato de MAT apresentar uma solução para o problema, revela sua compreensão no significado de $f'(x)$ na situação apresentada, uma vez que, o que foi apresentado no problema foi a função $C = f(x)$, e não sua derivada.


11/10/2008 11:46:55
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo é de C = f(x) reais. Ou seja, a medida em que varia a profundidade do poço de petróleo, varia também o custo da perfuração. Você saberia dizer quais as unidades de medida de f '(x) neste problema?

Responder

Figura 80. Variação do problema de interpretação


21/10/2008 22:20:19
Re: Mat[redacted]

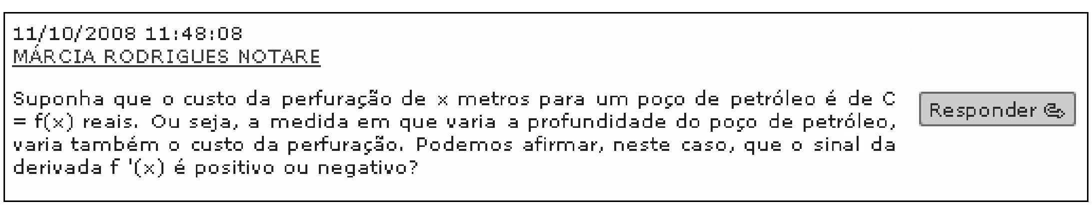
Acredito que as unidades de medida desse caso seria
$$ X profundidade
ou
R$ X metros perfurados

Não tenho certeza respondi o que era desejado na questão.

Responder

Figura 81. Solução correta

Ainda para a mesma situação apresentada, propôs-se o problema conforme Figura 82, que questiona sobre o sinal da função derivada neste contexto.

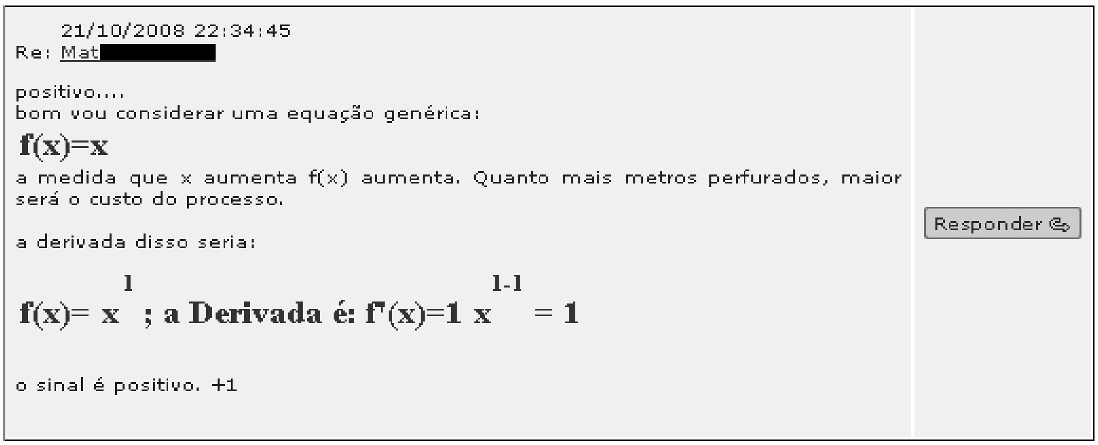

11/10/2008 11:48:08
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo é de C = f(x) reais. Ou seja, a medida em que varia a profundidade do poço de petróleo, varia também o custo da perfuração. Podemos afirmar, neste caso, que o sinal da derivada f '(x) é positivo ou negativo?

Responder

Figura 82. Novo problema de interpretação

MAT, para explicar sua solução, supõe uma função específica (apesar de dizer estar supondo uma função genérica), conforme mostra Figura 83. A partir da função escolhida, mostra que não há como o sinal da função derivada ser negativo. Sua interpretação está correta, quando afirma que *"Quanto mais metros perfurados, maior será o custo do processo"*. Contudo, recorrer a um exemplo revela sua necessidade de ainda apoiar-se em observáveis para justificar seu raciocínio. Mas isto não significa que MAT não compreendeu o conceito de derivada, apenas ainda não o formalizou. JUL também mostrou compreender a interpretação dada ao sinal da função derivada, ao afirmar que *"conforme aumenta a perfuração, aumenta também o preço, e para o preço ser maior, não há como o sinal ser negativo"* (Figura 84). Suas colocações deixam claro que uma taxa de variação positiva significa que conforme a grandeza independente aumenta, a grandeza dependente também deve aumentar.



21/10/2008 22:34:45
Re: Mat[redacted]

positivo....
bom vou considerar uma equação genérica:

f(x)=x

a medida que x aumenta f(x) aumenta. Quanto mais metros perfurados, maior será o custo do processo.

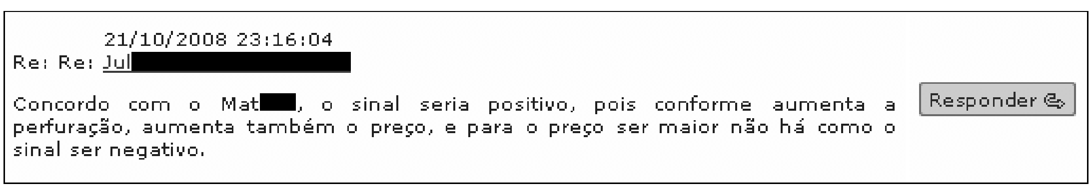
a derivada disso seria:

$$f(x)= x^{1} \;;\ \text{a Derivada é: } f'(x)=1\,x^{1-1} = 1$$

o sinal é positivo. +1

Responder

Figura 83. Solução correta



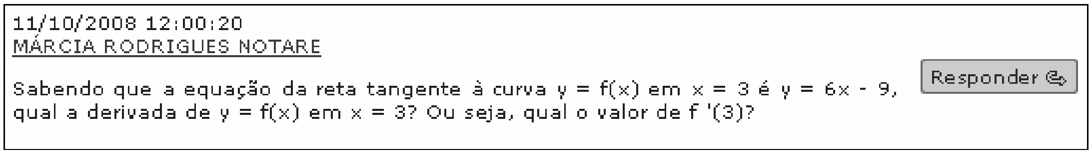
21/10/2008 23:16:04
Re: Re: Jul[redacted]

Concordo com o Mat[redacted], o sinal seria positivo, pois conforme aumenta a perfuração, aumenta também o preço, e para o preço ser maior não há como o sinal ser negativo.

Responder

Figura 84. Outra solução correta

O problema apresentado na Figura 85 refere-se, ainda, ao conceito de derivada. Porém, sua solução, apesar de imediata (no sentido de não necessitar de procedimentos algébricos), exige níveis mais elevados de abstração. Isto porque a derivada da função é apresentada sob a forma de inclinação de reta. Para resolvê-lo, o aluno precisa abstrair o conceito de derivada da equação de reta tangente dada.



11/10/2008 12:00:20
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Sabendo que a equação da reta tangente à curva y = f(x) em x = 3 é y = 6x - 9, qual a derivada de y = f(x) em x = 3? Ou seja, qual o valor de f '(3)?

Responder

Figura 85. Problema de inclinação de reta tangente

MAH equivoca-se, ao resolver o problema supondo que a equação da reta tangente $y = 6x - 9$ é a equação da derivada da função $y = f(x)$ (Figura 86). A professora intervém, incentivando o aluno a refazer a questão (Figura 87). MAH então revela claramente seu equívoco, quando afirma que *"a equação é a derivada da função..."* (Figura 88). Novamente a professora intervém, agora com o objetivo de apresentar argumentos que justifiquem o problema apresentado (Figura 89). Percebe-se, nesta situação, que os conceitos de derivada de uma função e de inclinação de reta tangente a uma função devem estar compreendidos e, mais do que isso, ambos devem estar inter-relacionados em um todo, de modo a formalizar o conceito de derivada de uma função. Para Piaget (1995), a compreensão de questões como esta requer a construção de uma forma que ultrapassa o conteúdo, ou seja, o conceito formal de derivada deve estar construído e suas diferentes interpretações fazem parte desta formalização. Perceber que o coeficiente angular da reta dada é, de fato, a derivada da função, exige níveis de abstração superiores do que, tendo uma função conhecida, chegar a sua derivada em determinado ponto. Ainda, o fato de não conhecermos a lei da função e da derivada desta função, torna o problema ainda mais complexo, exigindo abstrações refletidas, uma vez que não há observáveis para o aluno apoiar-se.

A compreensão do problema e a sua solução vêm da coordenação das ações do aluno. Piaget (1978a) explica a abstração reflexionante, afirmando que ela procede a partir, não dos objetos, mas da coordenação das ações que o sujeito exerce sobre eles, ou das operações em geral do sujeito. Assim, ela consiste, primeiramente, em refletir no sentido de um "reflexionamento" sobre um plano superior o que é tirado do inferior e, de outra parte, em refletir no sentido de uma "reflexão" mental cujo papel complementar é o de reconstruir sobre o novo plano o que é abstraído do precedente, de onde uma reorganização que exige uma estruturação nova.

O aluno MAH parece ter construído o conceito de derivada em um plano inferior, assim como o conceito de inclinação de reta tangente. Entretanto, MAH precisa reconstruir em um plano superior o que foi retirado deste plano inferior, de modo a construir uma nova estruturação, na qual estes conceitos devem estar inter-relacionados. Problemas como este permitem identificar o nível de compreensão dos alunos acerca do conceito de derivada.

20/10/2008 12:43:01
Re: Mah[redacted]

y=6x-9 é a equação da reta tangente, portanto

f '(3) = 6.3 - 9 = 9

Responder

Figura 86. Primeira solução apresentada

22/10/2008 15:54:06
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Mah[redacted],

Não está correto! Vamos refazer?

Responder

Figura 87. Primeira intervenção

23/10/2008 12:13:00
Re: Re: Re: Mah[redacted]

Não entedi, se a equação é a derivada da função e queres saber a f '(3), não seria somente substituir o x por 3 dentro da derivada?

Responder

Figura 88. Retorno do aluno

23/10/2008
16:31:49
Re: Re: Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES ...

Oi Mah[redacted],

A equação que dei não é a derivada da função...não sabemos qual a derivada da função. O que te dei foi a equação da reta tangente. Como derivada pode ser interpretada como inclinação da reta tangente, então a inclinação da reta dada é a derivada no ponto x = 3.

Ajudei?

Tenta resolver novamente...

Responder

Figura 89. Segunda intervenção

A situação a seguir refere-se a um diálogo acerca do cálculo de derivada por meio das regras de diferenciação, mais especificamente, com a utilização da regra do produto de duas funções, conforme mostra Figura 90. O aluno ANT apresenta uma solução para o problema

(Figura 91), mas sem justificar seu raciocínio, o que revela o primeiro nível de tomada de consciência ou, em outras palavras, a compreensão em ação (apoiada sobre observáveis) e não em pensamento (PIAGET, 1977). REN apresenta sua solução para o mesmo problema, chegando a um resultado diferente (Figura 92), pois não utilizou a regra do produto no processo de diferenciação. É interessante observar que REN teve a oportunidade de analisar a solução apresentada por ANT (uma vez que esta já estava publicada no ambiente de aprendizagem), perceber a diferença nos resultados encontrados, retomar sua própria solução, mas ainda assim publicá-la no ambiente de aprendizagem. É possível perceber que REN mostra certa insegurança sobre seu resultado, quando afirma que *“E agora, pq deu a diferença da minha resolução para o nosso colega ANT?”*. Nota-se que REN ainda não conhece as razões de suas ações, ou seja, age mesmo sem saber porque está agindo desta forma, sem saber se obteve êxito em sua solução. Por outro lado, sua participação revela que ele entende o ambiente de aprendizagem como um espaço para superar obstáculos, enfrentar os problemas e sanar suas dúvidas, ou seja, um espaço para a aprendizagem. O colega ADE compara as soluções apresentadas por ANT e REN e identifica o equívoco cometido por REN, conforme Figura 93. Percebe-se aqui, um espaço de construção coletiva, em que alunos, ao refletir sobre um mesmo problema, buscam explicações e justificativas que levem ao sucesso da solução do problema.

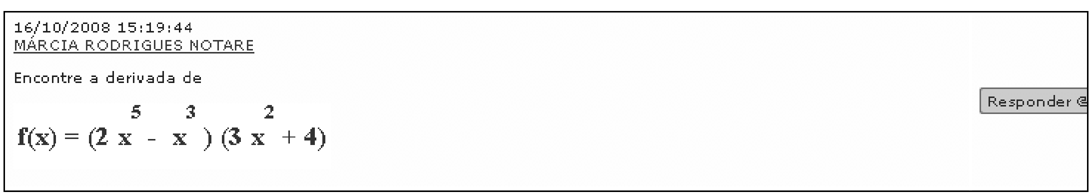


Figura 90. Problema sobre técnicas de diferenciação

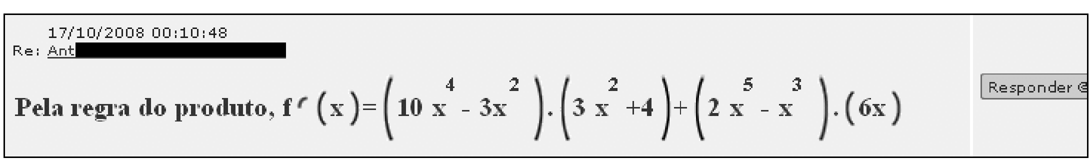


Figura 91. Solução sem argumentação

17/10/2008 20:55:58
Re: Ren[redacted]

Começamos resolvendo assim:

$$f'(x) = [2 \cdot (5)\; x^{5-1} - 3 \cdot (1)\; x^{3-1}] \cdot [3 \cdot (2)\; x^{3-1}]$$

Após resolver as multiplicações e subtrações teremos algo assim:

$$f'(x) = (10\; x^{4} - 3\; x^{2}) \cdot (6\; x)$$

Aqui ja temos o resultado, mas ainda podemos seguir adiante tendo como resultado:

$$f'(x) = 60\; x^{5} - 18\; x^{3}$$

Não tenho certeza se a multiplicação eu realizei corretamente.

E agora, pq deu a diferença da minha resolução para o nosso colega Ant[redacted]?

Responder

Figura 92. Solução equivocada

18/10/2008 23:53:26
Re: Re: ade[redacted]

o ren[redacted] acho que tu cometeu um erro ,pois tu fez a derivada dos dois termos,onde a fórmula é

$$f'(x)=f'g+fg'$$

eu acho que a resposta do ant[redacted] esta certa.

Responder

Figura 93. Comentário de um colega

A professora busca responder ao questionamento feito por REN, para incentivá-lo a refletir e rever sua solução (Figura 94). Após analisar os comentários realizados, REN reorganiza suas ideias, entende o equívoco cometido e mostra compreender a regra do produto, conforme Figura 95.

23/10/2008 16:34:05
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Ren[redacted],

Porque acho que não utilizaste a regra do produto para fazer tua derivada, certo?

Deves fazer pela regra do produto...

Responder

Figura 94. Comentário da professora

23/10/2008 19:16:31
Re: Re: Re: Ren[redacted]

Márcia, realmente eu acabei me confundindo ali, mas o certo seria como nosso colega abaixo resolveu: derivada de f multiplicada com g mais f multiplicado com a derivada de g. Correto?

Responder

Figura 95. Reflexão e superação

O aluno TIA resolve este mesmo problema de forma correta, conforme Figura 96, e ainda aventura-se a simplificar a expressão encontrada, de modo a apresentar uma solução final simplificada (Figura 97). MAH e JUL comentam a solução apresentada por TIA, conforme Figura 98 e Figura 99. Estas participações revelam que a turma publica suas soluções, não por obrigação, mas de modo a contribuir de fato com o processo de aprendizagem de todos, apresentando soluções diferentes para um mesmo problema (quando possível), simplificando soluções, comentando as soluções dos colegas, enfim, construindo coletivamente o conhecimento matemático.

20/10/2008 00:31:25
Re: Tia [redacted]

Utilizando o produto de duas funções iremos obter a seguinte derivada:

$$f' = (10x^4 - 3x^2)(3x^2 + 4) + (2x^5 - x^3)(6x)$$

Responder

Figura 96. Solução correta

20/10/2008 00:47:04
Re: Re: Tia [redacted]

bom, mas continuando o trabalho podemos obter algo como:

$$f'(x) = 30x^6 + 40x^4 - 9x^4 - 12x^2 + 12x^6 - 6x^4$$

ou

$$f'(x)\ 42x^6 + 25x^4 - 12x^2$$

e por ai podemos continuar derivando sucessivamente.

Responder

Figura 97. Simplificação da solução

21/10/2008 14:10:11
Re: Re: Re: Mah [redacted]

É, pode-se derivar mais vezes nesse caso. Se na prova pedir a segunda derivada (f''(x)), é assim que se faz...

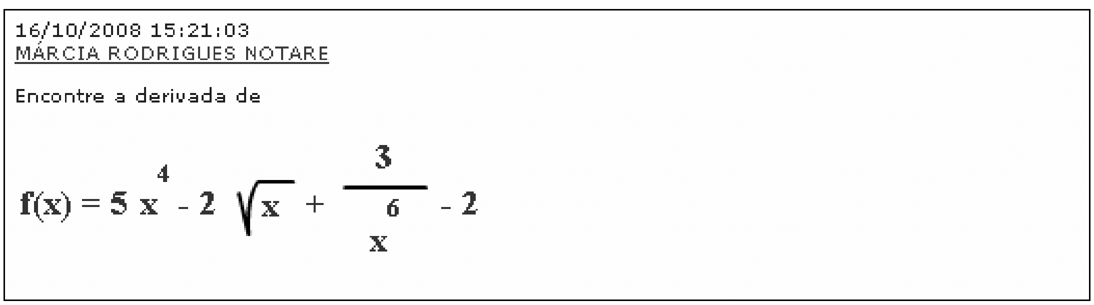
Responder

Figura 98. Comentário de MAH


22/10/2008 23:40:35
Re: Re: Re: Jul[redacted]
Simplificando (não sei se é esse o termo certo), encontrei o mesmo resultado que o Tia[redacted].
Responder @

Figura 99. Comentário de JUL

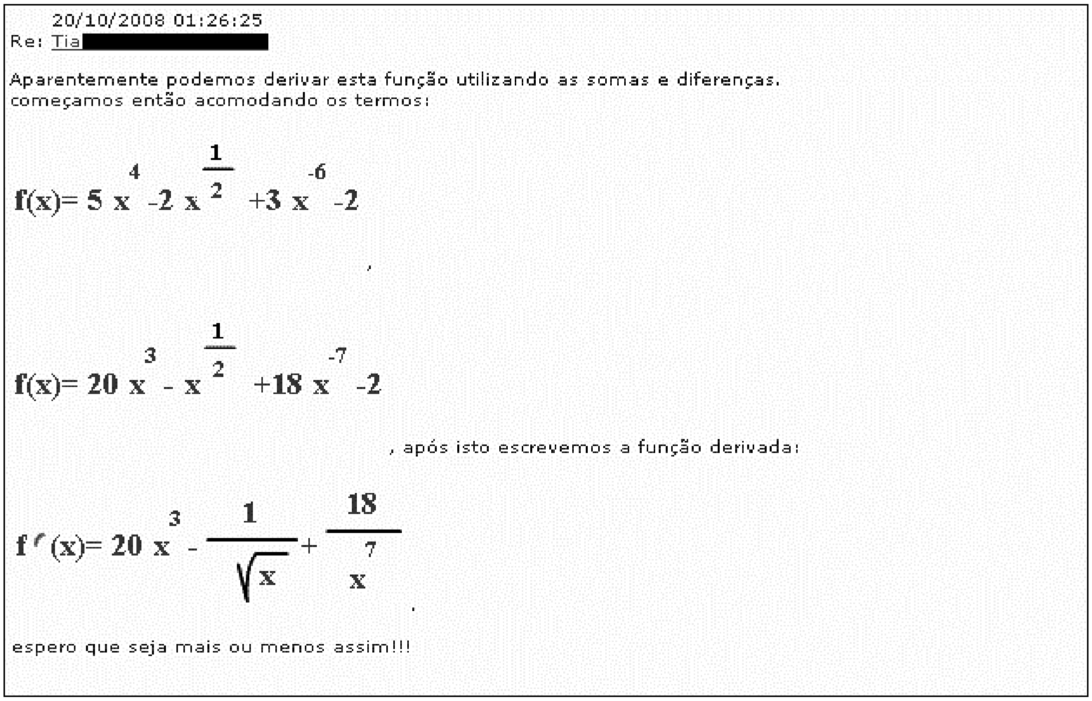
Os debates sobre as técnicas de diferenciação continuaram em outros problemas propostos. A Figura 100 apresenta uma nova função para ser derivada pelas técnicas de diferenciação. TIA apresenta sua solução, comentando alguns passos do desenvolvimento, mesmo que em uma linguagem informal (Figura 101). Percebe-se esta linguagem quando TIA afirma *"começamos então acomodando os termos"*, para explicar que vai escrever a função na forma de potências de *x*. É possível observar também, que TIA, em uma mesma etapa do desenvolvimento, reescreve alguns termos na forma de potência de *x* enquanto deriva outros termos, o que revela certa confusão no desenvolvimento do problema. Mas isto não significa que TIA não saiba resolver a derivada proposta, apenas não faz uso de uma notação adequada para tal.


16/10/2008 15:21:03
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^6} - 2$$

Figura 100. Problema sobre técnicas de diferenciação



20/10/2008 01:26:25

Re: Tia[redacted]

Aparentemente podemos derivar esta função utilizando as somas e diferenças.
começamos então acomodando os termos:

$$f(x)= 5x^{4} -2x^{\frac{1}{2}} +3x^{-6} -2$$

,

$$f(x)= 20x^{3} - x^{\frac{1}{2}} +18x^{-7} -2$$

, após isto escrevemos a função derivada:

$$f'(x)= 20x^{3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{18}{x^{7}}$$

.

espero que seja mais ou menos assim!!!

Figura 101. Solução apresentada

Após a publicação de sua solução, TIA identifica um erro cometido e insere um comentário, de modo a corrigir seu equívoco (Figura 102). Isto revela que, mesmo depois de publicada a solução, TIA continua pensando sobre os problemas propostos. E este é um dos objetivos desta metodologia de trabalho: manter os alunos envolvidos com o Cálculo Diferencial, mesmo em momentos extraclasse. Pelo fato das soluções estarem publicadas no ambiente virtual de aprendizagem, para o acesso de todos, há um compromisso social por parte dos alunos em desenvolver os problemas corretamente. Isto faz com que o processo seja encarado seriamente pela turma, incentivando a reflexão e a organização de ideias, de modo a formular uma resposta correta para ser publicada para a turma – e esta atitude exige um esforço intelectual e consiste em um processo valioso. Pelas contribuições observadas, percebe-se que isto vem sendo feito de forma prazerosa pelos alunos, que participam ativamente das atividades propostas.

21/10/2008 07:52:11
Re: Re: Tia[redacted]

a partir da segunda linha cometi um erro, não troquei o sinal de $-18\,x^{-7}$.

Portanto o final dessa equação, ou sua derivada fica: $f'(x) = 20\,x^{3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{18}{x^{7}}$.

Espero que esteja correto.

Figura 102. Percepção de erro cometido

Dando continuidade ao debate, JUL comenta a solução apresentada por TIA (Figura 103), fazendo observações sobre a utilização da notação correta. Sabe-se que entender Matemática é também dominar sua simbologia, e JUL mostra compreender claramente a notação de derivada neste problema, fazendo observações pertinentes e importantes. TIA responde aos comentários de JUL, concordando com suas colocações, e buscando justificar seu procedimento (Figura 104). A professora comenta sobre as colocações de JUL, incentivando este tipo de interação (Figura 105). Percebe-se, nas interações relatadas acima, o compromisso social e cognitivo dos alunos envolvidos no debate. Esta é a postura que se espera de alunos autônomos e comprometidos com seu processo de aprendizagem; são alunos que opinam, respondem aos colegas e compartilham ideias, fazendo do ambiente virtual de aprendizagem um espaço de construção coletiva.

22/10/2008 23:49:47
Re: Re: Jul[redacted]

Tia[redacted], como na segunda linha você já está derivando, deveria utilizar o $f'(x)$, e não deveria mais utilizar o ultimo termo -2, pois quando $f(x) = -2$, $f'(x) = 0$.

Pequenas observações, mas segundo o que a professora disse em aula, serão avaliadas na prova.

Figura 103. Comentário sobre notação utilizada

23/10/2008 11:54:31
Re: Re: Re: Tia[redacted]

Colocação super adequada jul[redacted], mas é que eu tenho mania de primeiro ir acomodando os termos para apenas no final definir como derivada, ou f ' (x).

Tomara que a professora releve isso na hora da prova.

mas o pior foi que lá em cima eu troquei uns dos sinais, falha de atenção mesmo!

Figura 104. Comentário de TIA

23/10/2008 16:40:12
Re: Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Adorei a observação, Jul[redacted]. Estás certíssima!

Figura 105. Comentário da professora.

O problema apresentado na Figura 106 refere-se à regra de derivação do quociente. Para encontrar a derivada da função apresentada, é preciso verificar que a mesma é escrita na forma de um quociente de duas funções, para então aplicar a técnica de derivação adequada. REN apresenta uma solução equivocada para o problema, conforme mostra a Figura 107, ignorando que a estrutura da função é um quociente, e derivando numerador e denominador separadamente. MAH percebe o equívoco cometido por REN e interage, inserindo um comentário acerca do assunto (Figura 108). O comentário de MAH é pertinente e correto, exceto pela falta de atenção cometida ao afirmar que *"o correto é usar a regra de diferenciação de produto"*. Ora, se MAH afirma termos uma divisão, fica evidente que a regra a ser utilizada deve ser a regra de diferenciação do quociente. Para esclarecer a situação, a professora elogia a participação de MAH, de modo a incentivar a interação entre os colegas, mas corrige seu pequeno equívoco, para evitar possíveis interpretações incorretas, conforme Figura 109. MAH, então, apresenta uma solução correta para o problema, apenas utilizando a regra, mas sem descrever ou justificar seu raciocínio (Figura 110). AND apresenta uma solução para este problema, descrevendo cada passo de sua solução, conforme Figura 111[13]. Porém, após a publicação no ambiente de aprendizagem, AND percebe que cometeu um deslize ao inserir a derivada de $g(x)$ no denominador, em lugar da própria função $g(x)$ (Figura 112). Novamente cabe salientar o compromisso social e cognitivo da turma, que se mostra envolvida com as atividades propostas, procurando resolver corretamente os problemas.

[13] Cabe salientar o equívoco de escrita matemática cometido pelo aluno, ao escrever $\left(\frac{f'}{g'}\right)$ em lugar de $\left(\frac{f}{g}\right)'$.

16/10/2008 15:21:55
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \frac{3x^{2} - 2x + 6}{2x^{4} - 6x + 1}$$

Responder

Figura 106. Problema envolvendo a regra do quociente

17/10/2008 21:15:32
Re: Re: Ren[redacted]

$$f'(x) = \frac{2.(3)\,x^{2-1} - 1.(2)\,x^{1-1}}{4.(2)\,x^{4-1} - 6\,x^{1-1}} = \frac{6x - 2}{8x^{3} - 6}$$

Responder

Figura 107. Solução equivocada

21/10/2008 14:12:43
Re: Re: Re: Mah[redacted]

Ren[redacted], não podemos resolver dessa forma, porque temos uma divisão, portanto o correto é usar a regra de diferenciação de produto.

Responder

Figura 108. Comentário de um colega

23/10/2008
16:42:15
Re: Re: Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES ...

Oi Mah[redacted],

Estás certo, temos que perceber que a função é uma divisão. Portanto, usamos a regra do quociente (não do produto).

Responder

Figura 109. Intervenção da professora

20/10/2008 12:00:23
Re: Mah[redacted]

$$f'(x) = \frac{(6x-2)(2x^{4}-6x+1) - (3x^{2}-2x+6)(8x^{3}-6)}{(2x^{4}-6x+1)^{2}}$$

Responder

Figura 110. Solução correta

20/10/2008 12:31:47
Re: And[redacted]

Para calcularmos a derivada de:

$$f(x) = \frac{3x^{2}-2x+6}{2x^{4}-6x+1}$$

temos que aplicar a regra do quociente:

$$\frac{f' \bullet g - f \bullet g'}{g^{2}}$$

tendo que a derivada de:

$$f' = 3(2)x^{2-1} - 2(1)x^{1-1}$$

$$g' = 2(4)x^{4-1} - 6(1)x^{1-1}$$

e de :

aplicando a regra do quociente fica:

$$\left(\frac{f'}{g'}\right) = \frac{(6x-2)(3x^{2}-2x+6) - (3x^{2}-2x+6)(8x^{3}-6)}{(8x^{3}-6)(8x^{3}-6)}$$

Responder

Figura 111. Solução com descrição das operações realizadas

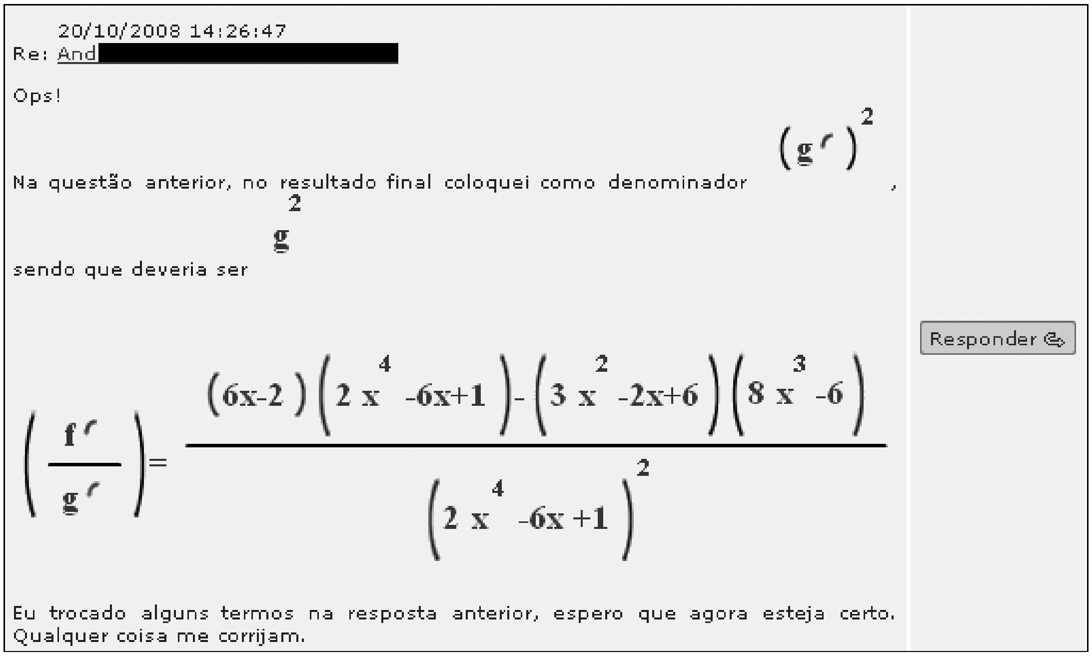


Figura 112. Correção do equívoco cometido

Vale salientar o progresso de REN nas atividades sobre técnicas de diferenciação. Nos problemas apresentados nas Figura 90 e Figura 106, que envolvem as regras de multiplicação e quociente, as soluções apresentadas por REN revelam que ele, inicialmente, não compreende a influência que a estrutura da função provoca na sua diferenciação, ignorando as regras que deveriam ser utilizadas. Porém, a partir das contribuições dos colegas e das observações realizadas no ambiente virtual, REN mostra um progresso neste sentido, ao resolver um problema que envolve ambas as regras de produto e quociente, conforme Figura 113. Percebe-se, neste problema, que é preciso identificar uma estrutura que envolve um quociente de duas funções, no qual o denominador é definido por um produto de duas funções. Desta forma, para encontrar a derivada desta função, é preciso utilizar, simultaneamente, as regras de quociente e produto. Conforme mostra Figura 114, REN resolve o problema com sucesso, descrevendo as operações realizadas[14]. Assim, nota-se claramente o avanço de REN, que revelou dificuldades no início das atividades sobre técnicas de diferenciação, mostrando não compreendê-las e, a partir das interações realizadas no ambiente virtual de aprendizagem, REN avançou no conhecimento matemático, identificando as estruturas das funções e compreendendo suas influências no cálculo de derivadas. Além disso, REN parece ter traçado um plano de desenvolvimento do problema, ao afirmar

[14] Cabe salientar que há um erro de escrita matemática na primeira expressão matemática de REN; a solução correta apresenta-se na segunda expressão matemática da mensagem publicada pelo aluno.

"Primeiro aplicamos a regra do produto" e em seguida *"Logo após de ser feito isso, daí sim podemos prosseguir aplicando a regra do quociente"*, o que revela uma capacidade de coordenar suas ações, antecipar o processo, de modo a definir o caminho a ser tomado. Em outras palavras, a conceituação influenciou a ação, tornando-o capaz de estabelecer um plano de resolução. Tais características revelam que REN está no terceiro nível de tomada de consciência, em que o sujeito sabe fazer e explicar o que fez. Piaget (1978) explica que a tomada de consciência fornece uma certa capacidade de antecipação e uma regulagem mais ativa, que possibilita a escolha entre diferentes meios, sem limitar-se mais às regulações automáticas por meio de simples correções compensadoras. Para resolver problemas como o apresentado acima, é preciso compreender a estrutura da função e as regras de diferenciação, uma vez que a necessidade de traçar um plano de resolução é indispensável para obter êxito, pois mais de uma regra de diferenciação precisa ser aplicada simultaneamente.

16/10/2008 15:31:17
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \frac{x^5 - 3x^4 + 2}{\left(-x^2 + 5x\right)\left(2x + 7\right)}$$

Figura 113. Regras do quociente e do produto

23/10/2008 19:51:07
Re: Ren[redacted]

Primeiro aplicamos a regra do produto embaixo, onde teremos como resultado :

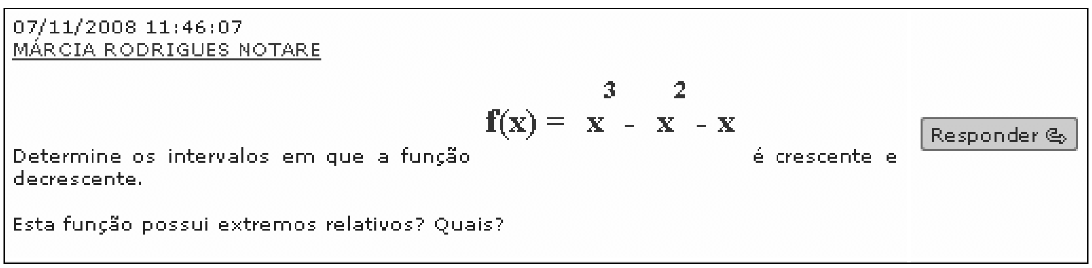
$$f'(x) = \frac{x^5 - 3x^4 + 2}{(-2x + 5) \bullet (2x+7) + (-x^2 + 5x) \bullet (2)}$$

Logo após de ser feito isso, dai sim podemos prosseguir aplicando a regra do quociente, que então ficaria:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 12x^3 \bullet \left[\left(-x^2 + 5x\right) \bullet (2x+7)\right] - \left(x^5 - 3x^4 + 2\right) \bullet \left[(-2x+5) \bullet (2x+7) + \left(-x^2 + 5x\right) \bullet (2)\right]}{\left[\left(-x^2 + 5x\right) \bullet (2x+7)\right]^2}$$

Figura 114. Solução correta

A questão analisada a seguir, conforme Figura 115, refere-se à aplicação de derivada no comportamento gráfico de funções. O primeiro aluno que resolveu a questão, ROB, apresentou-a de forma enxuta, sem explicar seu raciocínio nem apresentar detalhes do desenvolvimento da questão; apenas postou a resposta, conforme mostra a Figura 116. Sua participação nas atividades do ambiente ROODA estava iniciando neste momento e talvez ROB ainda não tenha percebido que o ambiente de aprendizagem seria muito mais do que apenas um espaço para publicação de "respostas finais". A professora, busca incentivar ROB (ou algum colega) a justificar seu raciocínio, conforme Figuras 117 e 118. TIA inicia, timidamente, suas contribuições sobre o assunto, conforme Figura 119. Percebe-se que seu raciocínio, mesmo que breve e parcial, está correto. Ele revela saber que o comportamento da função está relacionado com a inclinação das retas tangentes ao gráfico desta função. Porém, talvez por insegurança, TIA não aprofunda suas ideias. A professora concorda com TIA, mas as reticências sugerem que é possível explicar melhor o problema, conforme Figura 120. Então, o colega ANR apresenta sua explicação sobre o assunto (Figura 121), mostrando clareza e domínio da relação entre derivada e comportamento de funções.



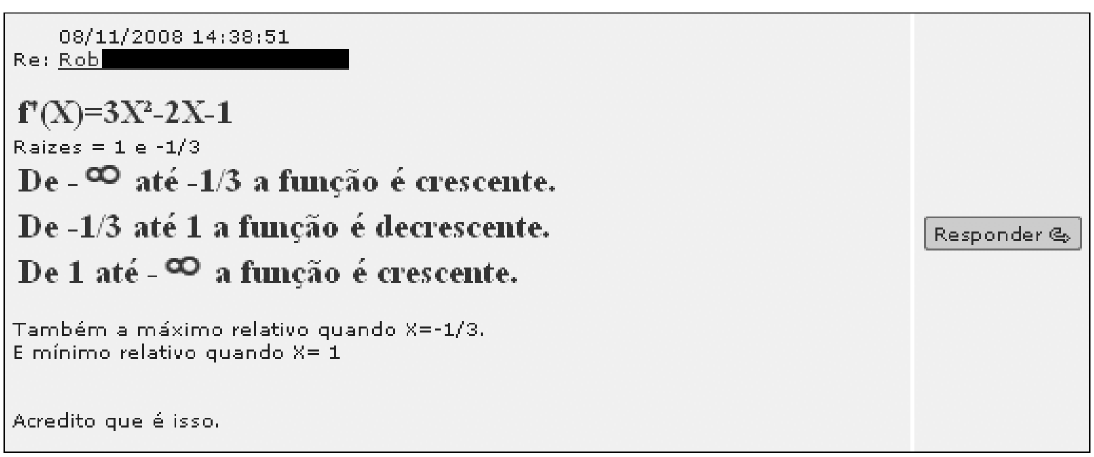
07/11/2008 11:46:07
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^3 - x^2 - x$ é crescente e decrescente.

Esta função possui extremos relativos? Quais?

Responder

Figura 115. Problema sobre comportamento gráfico de funções



08/11/2008 14:38:51
Re: Rob[redacted]

f'(X)=3X²-2X-1

Raizes = 1 e -1/3

De -∞ até -1/3 a função é crescente.

De -1/3 até 1 a função é decrescente.

De 1 até -∞ a função é crescente.

Também a máximo relativo quando X=-1/3.
E mínimo relativo quando X= 1

Acredito que é isso.

Responder

Figura 116. Primeira solução apresentada

10/11/2008 15:03:18
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Rob[redacted],

É isso, mas acho que explicaste pouco teu raciocínio e desenvolvimento.

Responder

Figura 117. Intervenção da professora

10/11/2008 15:15:45
Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Quem sabe me explicar PORQUE a função é crescente quando a derivada é positiva e descrescente quando a derivada é negativa?

Que análise podemos fazer?

Responder

Figura 118. Intervenção da professora

10/11/2008 19:11:16
Re: Re: Tia[redacted]

Seria porquê a inclinação da reta tangente é positiva??

Responder

Figura 119. Contribuição de TIA

11/11/2008 13:59:21
Re: Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

seria por aí...

Responder

Figura 120. Intervenção da professora

12/11/2008 15:29:18
Re: Re: Anr[redacted]

A função é crescente quando a derivada é positiva pq se desenharmos uma reta tg ao gráfico em cada um dos pontos do intervalo em que a função é crescente,a declive da reta vai ser positiva.

A função é descrescente quando a derivada é negativa porque se desenharmos uma reta tg ao gráfico em cada um dos pontos do intervalo em que a função é decrescente, a declive da
reta vai ser negativa.

Prof,não sei se é exatamente isso,mas foi a essa conclusão que cheguei.

Responder

Figura 121. Explicação de ANR

Nota-se, no debate estabelecido ao longo da solução deste problema, um progresso da compreensão da influência do sinal da derivada no comportamento das funções. Inicialmente, ROB revela saber resolver o problema, mas sem justificá-lo, mostrando dominar o assunto em ação, mas não em pensamento. É o primeiro nível de tomada de consciência, em que o sujeito sabe resolver o problema, mas não sabe justificar. Ele obtém êxito em ação (sabe calcular a derivada e identificar intervalos em que ela é crescente e decrescente), mas não compreende os meios que levam a tal sucesso (não domina em pensamento o significado da derivada). Em seguida, TIA dá indícios de compreender os conceitos envolvidos no problema, mas parece necessitar de uma confirmação para estabelecer efetivamente a relação entre sinal da derivada e comportamento de funções. TIA está em um nível intermediário de compreensão, mas encaminhando-se para a tomada de consciência deste conceito, pois já percebe que é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função que justifica seu comportamento crescente ou decrescente. Finalmente, ANR revela compreender em pensamento as relações existentes entre o sinal da derivada e o comportamento da função, uma vez que mostra compreender claramente que uma das interpretações para a derivada de uma função é inclinação de reta tangente ao gráfico da função e argumenta que é justamente a inclinação desta reta que determina o comportamento crescente ou decrescente da função.

São debates como este que promovem o crescimento coletivo da turma. É muito provável que tanto ROB quanto TIA tenham refletido sobre suas concepções acerca de inclinação de reta tangente e comportamento das funções, refinado suas hipóteses e reconstruído este conceito em uma nova estrutura, após a intervenção do colega ANR. É a participação ativa destes alunos nas atividades propostas que leva ao desenvolvimento cognitivo e à compreensão de conceitos matemáticos. Evidentemente, nem todos os alunos terão progresso significativo utilizando ambientes virtuais de aprendizagem em situações de ensino presencial, mas sim aqueles que se envolvem seriamente com este processo e são comprometidos com sua aprendizagem.

A questão apresentada na Figura 122 foi selecionada para análise para ilustrar a organização do desenvolvimento publicado pelo aluno AND. Percebe-se que AND traçou um plano de desenvolvimento do problema, e resolveu-o de forma clara e organizada, sem revelar dúvidas, inseguranças ou equívocos, conforme mostram as Figuras 123 e 124. AND, desde o início de seu desenvolvimento, destaca que, para analisar a concavidade da função, é preciso encontrar sua derivada segunda. Calcula a derivada segunda, encontra suas raízes, para então determinar os intervalos de análise de concavidade. Ainda, encontra os pontos de inflexão da função corretamente. Uma vez que sua solução foi apresentada de forma clara e detalhada, não surgiram dúvidas ou comentários por parte dos demais colegas.

A dedicação de AND na resolução deste problema revela seu nível de comprometimento com as atividades propostas e com seu processo de desenvolvimento. Percebe-se claramente que AND sabia aonde chegar, e que suas ações não foram tateadas. Para inserir este desenvolvimento no ambiente de aprendizagem, AND precisou resolver o problema, rever sua solução e organizar suas ideias. Este processo exige um esforço intelectual que auxilia na compreensão de conceitos e na tomada de consciência. O ato de descrever as operações realizadas e justificar o procedimento revela que AND compreende que a concavidade do gráfico de uma função é determinada pela derivada segunda desta função.

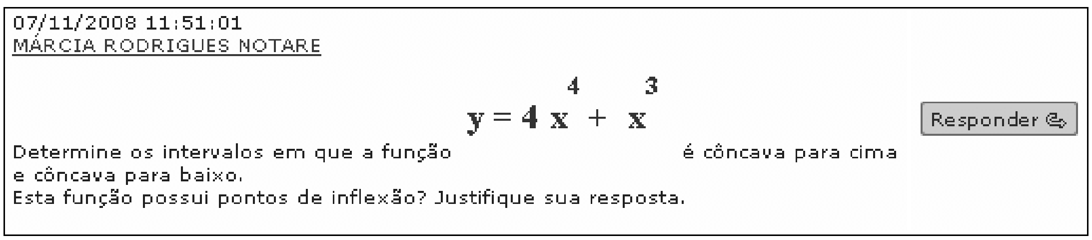


Figura 122. Concavidade de funções

10/11/2008 13:14:18
Re: And[redacted]

Para saber isso, temos que calcular a derivada 2a da função:

calculamos a 1a derivada

$$f' = 16x^3 + 3x^2$$

depois a 2a derivada:

$$f'' = 48x^2 + 6x$$

entao, tiramos as raizes da 2a derivada e teremos os intervalos para analise da concavidade:

Isola-se o termo em comum, 6x para facilitar o cálculo:

$$\text{raízes: } 6x(8x+1) = 0 \qquad x=0 \ \text{ e } 8x+1=0 \ \ x=-\frac{1}{8}$$

agora analisando os intervalos:

intervalos - 6x (8x+1) - f'' - f

$$\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right) = (-) \bullet (-) = + = \textbf{concavidade para cima}$$

Responder

$$\left(-\frac{1}{8}, 0\right) = (-) \bullet (+) = (-) = \textbf{concavidade para baixo}$$

$$(0, +\infty) = (+) \bullet (+) = (+) = \textbf{concavidade para cima}$$

A função possui pontos de inflexão, ja que a função troca de concavidade.

Substitui-se o valor x na função pelo x do ponto em que ela troca de concavidade.

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = 4\left(-\frac{1}{8}\right)^4 + \left(-\frac{1}{8}\right)^3$$

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{4096} - \frac{1}{512} = \frac{-1}{1024}$$

Figura 123. Solução organizada e completa

10/11/2008 13:23:35
Re: Re: And[redacted]

Continuando...

Os pontos de inflexão são:

$$\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{1024}\right) \text{e } (0,0)$$

Responder

Figura 124. Continuação da solução

O problema apresentado na Figura 125 refere-se à análise de extremos relativos para funções racionais. O conceito matemático envolvido neste problema é o mesmo utilizado para funções polinomiais. Entretanto, o cálculo da derivada envolve a regra do quociente e a análise dos pontos críticos da função deve considerar não apenas as raízes da mesma, mas também seus pontos de descontinuidade. Assim, o problema é caracterizado pelos alunos com um “problema mais difícil de resolver”. TIA começa sua participação, analisando o problema apresentado, conforme Figura 126, e destacando a necessidade de utilização do teste da derivada primeira ou teste da derivada segunda para identificação de extremos relativos.

07/11/2008 11:54:47
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

A função $y = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$ possui extremos relativos em x = 3 e x = -3? Justifique e argumente seu raciocínio.

Figura 125. Extremos relativos em funções racionais

10/11/2008 19:35:38
Re: Tia[redacted]

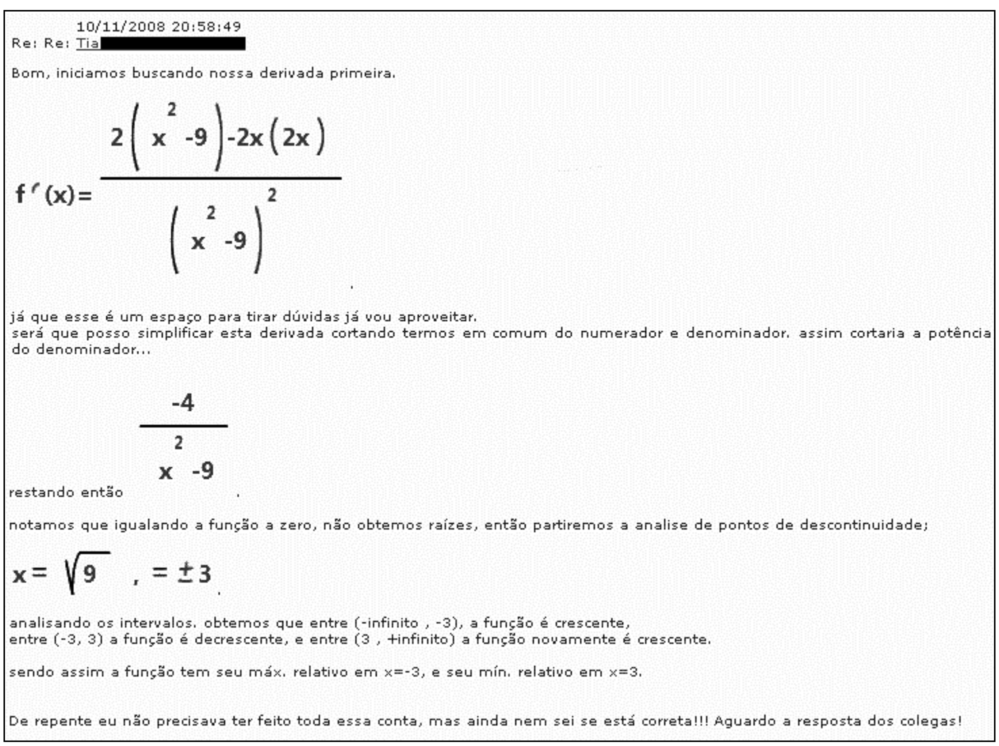
Bom para começar, não partimos da função de x para verificar os extremos, e sim da derivada primeira a partir das trocas de sinal, e / ou no teste da derivada segunda.
bom, precisamos de um estudo um pouco mais completo!

Figura 126. Solução de TIA

TIA prossegue seu desenvolvimento, iniciando o processo de derivação da função dada, como se pode verificar na Figura 127. É interessante observar que TIA aplica a regra de diferenciação do quociente corretamente, mas, ao simplificar a expressão encontrada, comete um equívoco. O aluno mostra sua incerteza no processo de simplificação, ao afirmar "*já que esse é um espaço para tirar dúvidas já vou aproveitar*". E prossegue, questionando "*será que posso simplificar esta derivada cortando termos em comum do numerador e denominador*". Evidentemente, a partir deste momento, sua solução não está mais correta, pois ao simplificar a função, TIA passa a analisar uma derivada incorreta. Entretanto, vale ressaltar a concepção de TIA sobre o ambiente de aprendizagem. Para ele, de fato, este é um espaço de aprendizagem e crescimento intelectual, em que é permitido publicar soluções corretas ou não, pois o objetivo principal não é um resultado final, e sim o processo de construção do mesmo. Não há o medo de errar, mas sim a vontade de aprender, de realizar trocas com os colegas, de construir coletivamente o conhecimento, sem julgamentos.

Com relação ao erro cometido por TIA, parece que o mesmo ainda não construiu corretamente as propriedades das operações elementares. Este é um problema comumente enfrentado em cursos superiores: os alunos chegam cada vez mais com dificuldades de matemática básica e tais problemas precisam ser superados juntamente com as dificuldades inerentes ao Cálculo Diferencial.

Dando continuidade ao debate, a professora responde ao questionamento de TIA e o incentiva a repensar sobre a questão, conforme Figura 128.



10/11/2008 20:58:49

Re: Re: Tia[redacted]

Bom, iniciamos buscando nossa derivada primeira.

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2 - 9\right) - 2x\left(2x\right)}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$

já que esse é um espaço para tirar dúvidas já vou aproveitar.
será que posso simplificar esta derivada cortando termos em comum do numerador e denominador. assim cortaria a potência do denominador...

restando então $\frac{-4}{x^2 - 9}$.

notamos que igualando a função a zero, não obtemos raízes, então partiremos a analise de pontos de descontinuidade;

$$x = \sqrt{9}\ , = \pm 3$$

analisando os intervalos. obtemos que entre (-infinito , -3), a função é crescente,
entre (-3, 3) a função é decrescente, e entre (3 , +infinito) a função novamente é crescente.

sendo assim a função tem seu máx. relativo em x=-3, e seu mín. relativo em x=3.

De repente eu não precisava ter feito toda essa conta, mas ainda nem sei se está correta!!! Aguardo a resposta dos colegas!

Figura 127. Continuação da solução de TIA

11/11/2008 14:08:57
Re: Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Tia[redacted],

A simplificação que fizeste não está correta... não podes cortar numerador e denominador se o termo não aparece em todas as parcelas do numerador... Tenta refazer...

Figura 128. Intervenção da professora

JUL entra na discussão, buscando resolver o equívoco cometido por TIA (Figuras 129 e 130). Continua sua solução, verificando que a função derivada não apresenta raízes reais e identificando seus pontos de descontinuidade. Faz a análise dos intervalos da função, e equivoca-se, ao afirmar que a função é crescente no intervalo $(-3,+3)$, pois a função apresentada é sempre decrescente. Entretanto, é possível perceber que JUL compreende que uma função racional pode apresentar troca de sinal não apenas em suas raízes, mas também em seus pontos de descontinuidade, quando afirma "*Então verificamos os pontos de descontinuidade, igualando o denominador a zero*". Contudo, sua conclusão final não está correta, pois o equívoco na análise do comportamento da função leva JUL a concluir a existência de extremos relativos, quando afirma que "*podemos verificar uma troca de sinal negativo para positivo em x=-3, ou seja, há um mínimo relativo em x=-3. E há uma troca de sinal positivo para negativo em x=+3, ou seja, há um máximo relativo em x=+3*". Vale ressaltar que os pontos $x=-3$ e $x=3$ são pontos em que a função não está definida e, consequentemente, não pertencem ao seu gráfico. Dessa forma, mesmo que houvesse uma troca de comportamento da função, a mesma não apresentaria extremos relativos nestes pontos.

14/11/2008 00:19:24
Re: Jul[redacted]

Sim, pois fazendo a derivada primeira teremos o seguinte resultado:

$$f'(x) = \frac{2(x^2-9) - 2x(2x)}{(x^2-9)^2} = \frac{2x^2 - 18 - 4x^2}{(x^2-9)^2}$$

Simplificando chegaremos ao seguinte resultado:

$$f'(x) = \frac{-18 - 2x^2}{(x^2-9)^2}$$

Logo após verificamos as raízes. Para encontrar as raízes, passarmos o denominador para o outro lado para ser multiplado por zero, neste caso teremos:

$$-18 - 2x^2 = 0$$

Essa equação nos dá como resultado uma raiz negativa, portanto NÃO EXISTE RAIZ para a função.

Então verificamos os pontos de descontinuidade, igualando o denominador a zero. Neste caso teremos como resultado os seguintes pontos de descontinuidade: **3 e -3**

Aplicando na tabelinha dos intervalos:

Intervalos:
$(-\infty, +3)$

Figura 129. Solução de JUL

14/11/2008 08:45:00
Re: Re: Jul[redacted]

Continuando... (DESCONSIDEREM A ÚLTIMA LINHA DO MEU ULTIMO POST, SEGUE ABAIXO OS INTERVALOS CORRETOS)

Aplicando na tabelinha dos intervalos:

Intervalos:
$(-\infty, -3)$
$(-3, +3)$
$(+3, +\infty)$

com f ', repectivamente: -,+,-

Portanto os intervalos serão, respectivamente, decrescente, crescente, decrescente.

Com isso podemos verificar uma troca de sinal negativo para postivo em x=-3, ou seja, há um mínimo relativo em x=-3.
E há uma troca de sinal positivo para negativo em x=+3, ou seja, há um máximo relativo em x=+3.

Sendo assim justifica-se a resposta de que realmente há um extremos relativos em x=3 e x=-3

Figura 130. Continuação da solução de JUL

O problema apresentado na Figura 131 refere-se à aplicação do conceito de derivada em problemas de otimização. Para resolver o problema, é preciso interpretá-lo, equacioná-lo e finalmente resolvê-lo. São problemas completos, que exigem uma compreensão de vários conceitos trabalhados ao longo do curso de Cálculo Diferencial. Um grupo de alunos apresentou a solução para este problema, de forma detalhada, justificada e argumentada, revelando compreender o conceito de derivada e sua aplicação em problemas de otimização, como se pode observar na Figura 132.

Percebe-se que o grupo, inicialmente, interpreta o problema e busca descrevê-lo, de modo a identificar a variável independente dentro do contexto apresentado. Em seguida, apresentam uma equação que representa a situação (observa-se um pequeno erro no termo final da equação – em lugar de 36 seria 24*x*, mas certamente é um erro de digitação, pois mais adiante a derivada foi calculada corretamente). É possível notar o nível de compreensão do grupo quando, ao encontrar as raízes da derivada, são capazes de excluir a raiz que esta fora do domínio do problema. Isto que revela, não apenas a aplicação mecânica de um procedimento, mas a compreensão das ações realizadas. Certamente, se não houvesse compreensão, em pensamento, das ações realizadas pelo grupo (cálculos que estão sendo realizados), todas as raízes da derivada seriam consideradas na análise final, evidenciando uma aplicação mecânica de regras e procedimentos.

Entretanto, algumas explicações foram omitidas pelo grupo. Com o objetivo de identificar o nível de compreensão do grupo acerca dos conceitos matemáticos envolvidos na solução do problema, a professora encaminha alguns questionamentos, conforme Figura 133.

19/11/2008 11:27:36
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Problema II

Uma caixa aberta deve ser feita com uma folha de papelão de 3 por 8 cm, cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Ache o volume máximo que uma caixa dessas pode ter.

Responder

Figura 131. Problema de otimização

01/12/2008 00:00:18
Re: Jul[redacted]

Por Jul[redacted], Mau[redacted], Ped[redacted] e Ver[redacted].

Como temos uma folha de papelão retangular de 3 por 8 cm, e devemos cortar e dobrar quadrados iguais nos quatro cantos para obter uma caixa aberta. Primeiramente devemos definir a variável referente ao lado do quadrado do canto, para definir qual será a área da base (Ab).

Neste caso, denominamos a variável como "x".

Para encontrar o volume máximo, aplicamos a fórmula: $\mathbf{V = Ab.h}$
onde:
V= volume
Ab= área da base
h= altura

Como pretendemos encontrar V(x), e ainda não temos o valor da área da base, aplicamos a variável x juntamente com uma subtração e multiplicação dos lads que definem a área da base. Teremos então a seguinte equação:

$$V(x) = (8\text{-}2x).(3\text{-}2x).x$$

Resolvendo a equação acima chegaremos ao seguinte resultado:

$$V(x) = 4x^3 - 22x^2 + 36$$

A partir dessa equação e de uma análise de caso, podemos definir o domínio da função, que será: $D\ [0, \frac{3}{2}]$

Responder

Logo após, devemos encontrar a devivada de V(x), que será:

$$V'(x) = 12x^2 - 44x + 24$$

Para determinar o volume máximo, devemos encontrar as raízes da derivada acima, que serão:

$$x' = 3$$

$$x'' = \frac{2}{3}$$

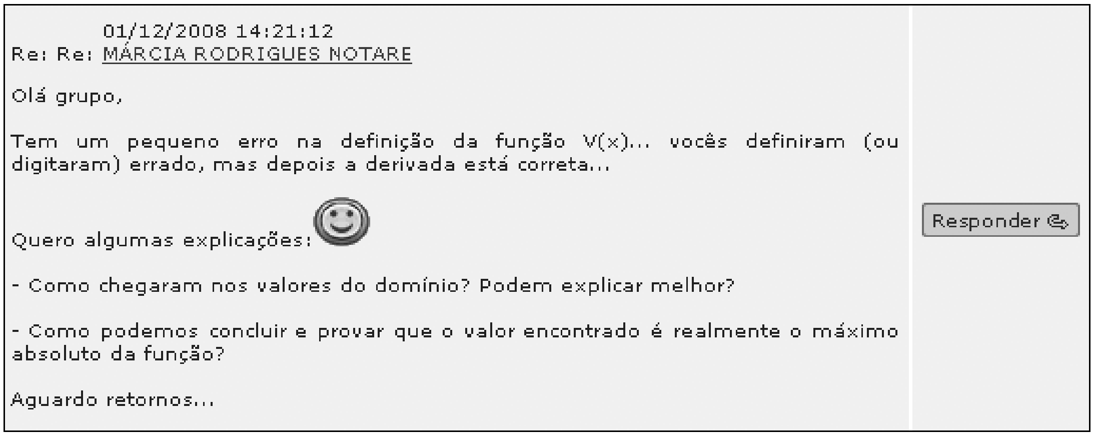
Como 3 é maior que o domínio da função, não devemos considerar essa raiz.

Portanto iremos considerar apenas a raiz: $x'' = \frac{2}{3}$

Fazendo uma análise para verificar com qual dos valores de domínio e da raiz encontrada teremos o maior volume, verificamos que será através do valor $\frac{2}{3}$

Substituindo esse valor pelos x da função teremos como resultado o valor do máximo volume da caixa: $\frac{200}{27}\,cm^3$ ou $7{,}4074\ cm^3$

Figura 132. Solução correta



01/12/2008 14:21:12
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Olá grupo,

Tem um pequeno erro na definição da função V(x)... vocês definiram (ou digitaram) errado, mas depois a derivada está correta...

Quero algumas explicações:

- Como chegaram nos valores do domínio? Podem explicar melhor?

- Como podemos concluir e provar que o valor encontrado é realmente o máximo absoluto da função?

Aguardo retornos...

Responder

Figura 133. Questionamentos feitos pela professora

A Figura 134 mostra o retorno do grupo aos questionamentos realizados pela professora. Percebe-se que a identificação do domínio da função no contexto do problema apresentado está clara para o grupo, no momento em que afirmam "*Como o menor lado do retângulo corresponde a 3cm, consideramos para o domínio o valor referente a metade deste lado*". O grupo percebe que valores de x maiores que $\frac{3}{2}$ não fazem sentido para o problema, pois não poderão ser cortados de todos os cantos do retângulo para a confecção da caixa. Isto revela uma compreensão da situação apresentada, e não uma aplicação de procedimentos mecânicos para encontrar valores extremos para qualquer valor de x. Ainda, na solução inicial, ficou omitido porque o volume máximo ocorreria para $x = \frac{2}{3}$. Então, o grupo foi capaz de relatar que os possíveis valores de máximo da função podem ocorrer nos extremos do intervalo ou nas raízes da derivada, ao verificar a imagem de $V(x)$ para $x = 0, x = \frac{2}{3}$ e $x = \frac{3}{2}$.

A resolução de problemas como este exige níveis elevados de abstração. Para estabelecer o domínio da função no problema apresentado, é preciso analisar a situação, estudar os casos extremos, ou seja, situações limites permitidas para a confecção da caixa. Isto exige abstrações reflexionantes, pois não podem se apoiar sobre observáveis, uma vez que o aluno não está manipulando o papelão, cortando quadrados de seus quatro cantos, nem mesmo confeccionando diversas caixas de modo a identificar as possíveis medidas para o tamanho do quadrado a ser recortado. São as coordenações das ações que permitem ao aluno chegar ao domínio da função; são as reflexões realizadas que levam à solução desta questão. Ainda, compreender que o volume máximo da caixa será dado a partir da derivada da função *volume* exige a compreensão do conceito de extremo absoluto de uma função, sua relação com a derivada e sua aplicação no contexto do problema apresentado. Percebe-se a relação entre diversos conceitos matemáticos sendo utilizados simultaneamente para a solução de um mesmo problema. Para que isso ocorra, é necessário que o aluno tenha tomado consciência destes conceitos, de modo a aplicá-los em diferentes situações-problema.

02/12/2008 18:06:14

Re: Re: Re: Jul[redacted]

Olá professora!

Respondendo aos seus questionamentos:

- Como chegaram nos valores do domínio? Podem explicar melhor?

Como o menor lado do retângulo corresponde a 3cm, consideramos para o domínio o valor referente a metade deste lado, ou seja ($\frac{3}{2}$), que o valor máximo que poderemos utilizar para a altura da caixa (x).

- Como podemos concluir e provar que o valor encontrado é realmente o máximo absoluto da função?

Podemos concluir e provar que o valor encontrado é o máximo absoluto da função, através da substituição dos valores de domínio, e dos valores das raízes, pelos "x" da equação encontrada. Através desta substituição, verificamos que:

$$V(0) = 0$$

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{200}{27}\,cm^3 \text{ ou } 7{,}4047\,cm^3$$

$$V\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

Portanto, concluímos e provamos que $\frac{200}{27}\,cm^3$ (ou $7{,}4047\,cm^3$) é o volume máximo que a caixa pode ter.

É isso!

Está certa a nossa resolução e linha de raciocínio, professora??

Responder

Figura 134. Retorno do grupo

A Figura 135 traz um outro problema de otimização, também proposto a um grupo de alunos da turma.

19/11/2008 11:28:33
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Problema V

Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2000 cm^3. Ache as dimensões do recipiente de menor custo.

Responder

Figura 135. Problema de otimização

O grupo encarregado do problema apresenta uma solução para o mesmo, revelando compreender alguns conceitos envolvidos na sua resolução, mas negligenciando outros, como se pode observar nas Figuras 136 e 137.

24/11/2008 00:58:49
Re: Rob[redacted]

Quando o problema fala de menor custo temos que saber que estamos procurando um mínimo relativo.
Para acha-lo temos que obter a equação geral do que se pede.

Primeiro temos que saber a áea do quadrado que é A = b . h (base vezes altura).
Temos que a base o paralelepipedo é um quadrado, se a base é um quadrado sabemos que a superficie também é um quadrado.

```
+--------------+
| .|
| BASE .|
| .| vamos chamar esse lado de: a
| .|
| .|
+--------------+
```
também vamos vamos chamar esse lado de: a

Temos entao que A = b . h , sendo a = a base e a = altura : A = a . a => A = a²
Sabemos também que existe a base e a superficie então temos duas vezes a base.
Logo temos: 2a²
Falta saber das laterais do paralelepipedo.

```
+-------------+
| .|
| LATERAL .|
| .|
| .| vamos chamar esse lado de b
| .|
| .|
| .|
| .|
+-------------+
```
e este lado é a, pois convencionamos na fórmula do quadrado, sendo que este lado é o mesmo do quadrado visto acima.

Temos nessa figura um retângulo que sua fórmula de area é A = b . h.
Então temos que A = a . b é a fómula para se calcular a área de um dos quatro retângulos iguais que há em um paralelepipedo.
Sendo a fómula geral dos quatro retângulos: A = 4 . ab

Assim chegamos na nossa equação.
Temos que somar todas as areas para saber a total entao temos: A = 2a² + 4ab, apartir dessa fómula que vamos descobrir oque queremos nesse problema.

O problema nos da que Volume = 2000cm³ também qua a fómula de volume de um paralelepipedo é: V = a² . b, então temos que a² . b = 2000, isolando o b temos:
b = 2000/a². Isolamos o b para que possamos fazer as devidas substituições na equação: A = 2a² + 4ab.
Substituindo temos:

$$A = 2a^2 + 4ab \Rightarrow A = 2a^2 + 4a\left(\frac{2000}{a^2}\right)$$

$A = 2a^2 + 4\left(\frac{2000}{a}\right)$ **aqui houve o corte de a² e 4a**

Responder @

Temos:

$A = 2a^2 + \frac{8000}{a}$ **esta é a euqção de a**

Ja achado a equação de a temos agora que saber onde é o minimo relativo, isso só é possivel derivando e achando onde a derivada troca de sinal para saber onde é o extremo relativo.

$A' = 4a - 8000a^{-2}$ **derivada.**

Para achar os extremso temos que achar as raízes de derivada, então:

Figura 136. Solução para o probl ema

$4a - 8000\,a^{-2} = 0 > 4a = 8000\,a^{-2} > a = \dfrac{8000\,a^{-2}}{4} > a = 2000\,a^{-2}\quad a\,.\,a^{2} = 2000$

$a^3 = 2000 > a = \sqrt[3]{2000} \quad > a = 10\,\sqrt[3]{2}$

Ja achamos o a agora para achar o b é substituir na fórmula do volume:

$b = \dfrac{2000}{a^2} > \dfrac{2000}{\left(10\,\sqrt[3]{2}\right)^2} > \dfrac{2000}{\left(10^2\right).\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}$

$b = \dfrac{20}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} > b = \dfrac{20\,\sqrt[3]{2}}{2} = 10\,\sqrt[3]{2}$

Achado o valor de a e b.

Agora temos que provar que é um mínimo relativo.
Temos que pegar 2 valores um menor do que o achado e outro maior.
Escolhemos o 1 e o 1000 para substituir na formula de a e b.
Então:

Com o 1==> $4 \,.\, 1 - 8000.\ 1^{-2}$ ira dar un valor negativo.

Agora o 1000 ==> $4 \,.\, 1000 - \dfrac{8000}{1000^2}$ > ira dar un valor positivo.

Se a derivada troca de valor de negativo para positivo quer dizer que existe um mínimo relativo.

Dupla: Rob[redacted] e Eve[redacted].
Acreditamos que é isso.

Figura 137. Continuação da solução do problema

De imediato, o grupo relaciona o problema apresentado ao processo de encontrar o valor mínimo de uma função. Porém, o grupo acredita que a solução do problema ocorrerá ao encontrar um mínimo relativo para a função, enquanto na verdade, precisa-se encontrar o mínimo absoluto da mesma. Isto revela que o grupo ainda não diferenciou extremo relativo de extremo absoluto. Contudo, o processo de tomada de consciência está relacionado com o processo de diferenciação de conceitos, ou seja, o progresso da conceituação caminha da não-diferenciação para a diferenciação de conceitos. Isto significa que os conceitos de extremos relativos e absolutos ainda não estão totalmente compreendidos pelo grupo.

Para solucionar o problema apresentado, é preciso mostrar que, dentro de um determinado intervalo, neste caso o domínio da função, existirá aquele que será o menor de todos os valores que a função poderá assumir. E isto consiste em encontrar o mínimo absoluto desta função neste intervalo. Entretanto, no momento em que o grupo afirma "*Quando o problema fala de menor custo temos que saber que estamos procurando um mínimo relativo*", verifica-se uma ausência de compreensão do conceito de extremo absoluto e uma não-diferenciação entre extremos absoluto e relativo. Evidentemente, em termos práticos, o grupo chega à solução correta do problema, o que revela um saber fazer, mas sem necessariamente compreender. Piaget (1978) afirma que a passagem dessa forma prática de conhecimento para o pensamento se efetua por meio de tomadas de consciência, consistindo em uma conceituação propriamente dita, isto é, em uma transformação dos esquemas de ação em operações. Assim, a tomada de consciência consiste em uma conceituação que conduz da ação à explicação. Ou em outras palavras, compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto fazer é somente utilizá-las com sucesso (PIAGET, 1978). O grupo chega ao resultado correto, mas ainda não descreve a razão que leva a este sucesso.

Dando continuidade ao desenvolvimento da solução do problema, o grupo encaminha-se para o equacionamento do mesmo, buscando descrever de forma detalhada o raciocínio utilizado para chegar à equação. Equacionar o problema exige níveis de abstrações que vão além de abstrações empíricas, pois para tal é necessário encontrar uma equação matemática que descreva a situação apresentada, abstraindo do enunciado do problema as informações relevantes, identificando as regularidades e propriedades matemáticas envolvidas e considerando as restrições físicas inerentes ao mesmo. A atividade de encontrar uma equação que descreva uma situação-problema envolve o processo de considerar todas as possibilidades para a situação, de modo a descrevê-las por meio de uma lei matemática. Conforme Piaget (1978), "[...] estender a pesquisa das razões ao mundo infinito dos possíveis exige, seguramente, uma ultrapassagem da ação".

Após encontrar a equação para o problema, o grupo passa a buscar o valor mínimo da função, estabelecendo sua relação com a derivada da mesma. Percebem-se alguns equívocos a partir deste momento: o grupo afirma que os possíveis pontos de mínimo relativo da função poderão ocorrer nas raízes da derivada. Porém, tem-se como derivada uma função racional, no qual os pontos de descontinuidade também devem ser considerados, desde que pertençam ao domínio da função inicial (e isto precisa ser analisado). Depois de encontrada a raiz da derivada, é preciso provar que de fato nela ocorre o valor mínimo absoluto da função. Contudo, o grupo mostrou a existência de um mínimo relativo, como comentado anteriormente. Para incentivar o grupo a refletir sobre o assunto, a professora comentou a solução apresentada, como mostra a Figura 138.

24/11/2008 17:05:20
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Olá Rob[redacted] e Eve[redacted],

A solução de vocês está muito boa. Vocês só precisam mostrar que há um mínimo ABSOLUTO, e não um RELATIVO. Podem fazer isto?

Responder

Figura 138. Intervenção da professora

O grupo retorna aos questionamentos da professora, afirmando a necessidade do cálculo de limites para mostrar que de fato aquele é um ponto de mínimo absoluto (Figura 139). Entretanto, ele ainda revela certos equívocos relativos a este assunto, pois busca calcular o limite por meio da função *área* em termos de a e b, para a variável $a \to -\infty$. Isto não faz sentido, pois a representa a aresta de um paralelepípedo, logo não pode se aproximar de valores negativos. A professora, identificando o equívoco cometido pelo grupo, novamente intervém, salientando a necessidade de identificação de um domínio para a função *área* (Figura 140). Mas o grupo ainda não é capaz de compreender a situação, ignorando a dica e calculando o limite para $b \to -\infty$ novamente (Figura 141). Percebe-se aqui que a ideia de definir um domínio para a função *área* e provar a existência de mínimo absoluto dentro deste domínio ainda não tem significado para o grupo. O grupo revelou tomar consciência sobre o conceito de extremo absoluto, ao afirmar que "*para achar os extremos absolutos é necessário fazer limites na fórmula principal*". Contudo, não foi capaz de aplicar este conceito no contexto do problema apresentado.

24/11/2008 22:00:28
Re: Re: Rob[redacted]

Para achar os extremos absolutos é necessário fazer limites na fómula principal então temos:

$$\frac{\lim}{a\text{->}-\infty}\ 2a^2 + 4ab = +\infty$$

e

$$\frac{\lim}{a\text{->}+\infty}\ 2a^2 + 4ab = +\infty$$

Por esses resultados constatamos que existe um mínimo absoluto.

Responder

Figura 139. Retorno do grupo

25/11/2008 15:30:34
Re: Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Rob[redacted],

Quase lá!

Na verdade, devemos sim provar a existência do mínimo absoluto através do cálculo de limites, mas o limite da função a(b) que vocês encontraram, para b tentendo aos extremos do intervalo que define o domínio...

$$a(b) = 2\,b^2 + \frac{8000}{b}$$

Vamos arrumar?

Responder

Figura 140. Nova intervenção

30/11/2008
22:34:31
Re: Re: Re: Re: Rob[redacted]

Certo.........
Então fazendo os limites tendendo ao + infinito e ao - infinito de:

$$\lim 2\,b^2 + \frac{8000}{b}$$

Temos que os dois calculos irão dar + infinito na sua resposta isso quer dizer que existe um minimo absoluto.

Responder

Figura 141. Retorno do grupo

No contexto do problema apresentado, o aluno precisa identificar qual intervalo numérico determina o domínio da função, para utilizar este intervalo na prova da existência de um extremo absoluto. Entender que o domínio da função que descreve o problema acima apresentado é o intervalo $(0,+\infty)$ é uma atividade que exige níveis de abstração elevados. É preciso analisar os possíveis valores que a variável *a* poderá assumir, levando em consideração um volume fixo de 2000 cm^3 para o recipiente. E isto implica em considerar casos extremos, em que a altura deste recipiente tende a zero, ou em que a base deste recipiente tende a zero, improváveis de serem confeccionados empiricamente, mas importantes para a análise matemática da questão. São recipientes “teóricos”, que só existem na mente do sujeito, a título de prova matemática de que o valor mínimo para a área deste recipiente de 2000 cm^3 de volume, de fato, existe.

Pode-se observar o progresso destes alunos, que mesmo não chegando a um nível de conceituação elevado, revelaram compreender muitos conceitos matemáticos trabalhados ao longo do semestre.

A utilização do ambiente virtual de aprendizagem possibilitou aos alunos assumirem uma postura mais ativa, em que foi necessário participar das discussões, elaborar soluções, refletir sobre os conceitos trabalhados, trabalhar em conjunto com os demais colegas, comparando soluções, corrigindo equívocos e organizando ideias. Evidentemente, não há uma unanimidade no bom aproveitamento do ambiente e das atividades propostas. Mas certamente, aqueles que se comprometeram seriamente com este trabalho, puderam avançar no seu conhecimento matemático.

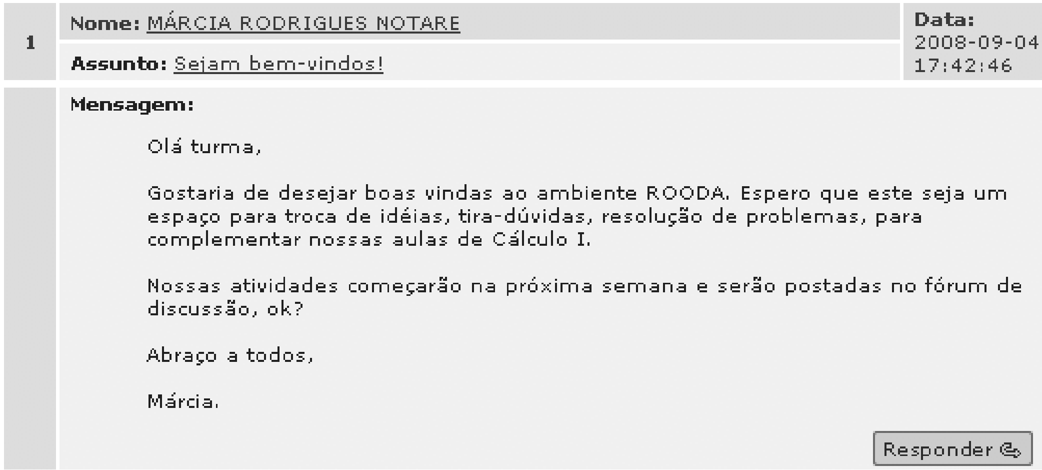
6.3 Comunicação e Expressão Matemática

Esta categoria de pesquisa tem como objetivo central investigar se é possível ou não estabelecer um diálogo matemático a distância por meio do editor de notação científica ROODA Exata.

Para a análise desta categoria de pesquisa, novamente tomou-se como fonte de dados a participação e interação dos alunos no fórum de discussão do ambiente ROODA ao longo do semestre.

Vale salientar que os alunos realizaram os cadastros no ambiente ROODA e iniciaram sua utilização sozinhos, pois as aulas de Cálculo I não ocorrem em laboratório de informática. Assim, o processo de familiarização com o ambiente ocorreu de forma individual, em momentos extraclasse. Contudo, foi comentado com a turma sobre a ferramenta ROODA Exata, para que todos pudessem utilizá-la quando sentissem necessidade.

Por meio da ferramenta *lista de discussão*, disponível no ambiente ROODA, foram enviadas duas mensagens iniciais para os alunos da turma (*Sejam bem-vindos!* e *Vamos começar os trabalhos?*), conforme Figuras 142 e 143.



1	**Nome:** MÁRCIA RODRIGUES NOTARE **Assunto:** Sejam bem-vindos!	**Data:** 2008-09-04 17:42:46

Mensagem:

Olá turma,

Gostaria de desejar boas vindas ao ambiente ROODA. Espero que este seja um espaço para troca de idéias, tira-dúvidas, resolução de problemas, para complementar nossas aulas de Cálculo I.

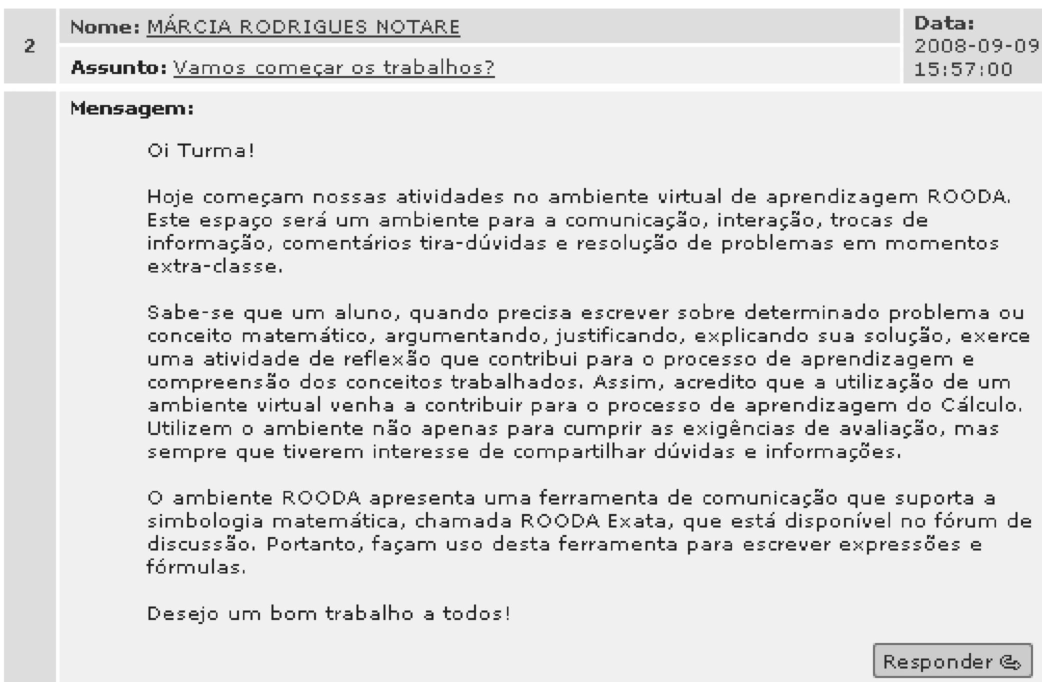
Nossas atividades começarão na próxima semana e serão postadas no fórum de discussão, ok?

Abraço a todos,

Márcia.

Responder

Figura 142. Mensagem de Boas Vindas



2	**Nome:** MÁRCIA RODRIGUES NOTARE **Assunto:** Vamos começar os trabalhos?	**Data:** 2008-09-09 15:57:00

Mensagem:

Oi Turma!

Hoje começam nossas atividades no ambiente virtual de aprendizagem ROODA. Este espaço será um ambiente para a comunicação, interação, trocas de informação, comentários tira-dúvidas e resolução de problemas em momentos extra-classe.

Sabe-se que um aluno, quando precisa escrever sobre determinado problema ou conceito matemático, argumentando, justificando, explicando sua solução, exerce uma atividade de reflexão que contribui para o processo de aprendizagem e compreensão dos conceitos trabalhados. Assim, acredito que a utilização de um ambiente virtual venha a contribuir para o processo de aprendizagem do Cálculo. Utilizem o ambiente não apenas para cumprir as exigências de avaliação, mas sempre que tiverem interesse de compartilhar dúvidas e informações.

O ambiente ROODA apresenta uma ferramenta de comunicação que suporta a simbologia matemática, chamada ROODA Exata, que está disponível no fórum de discussão. Portanto, façam uso desta ferramenta para escrever expressões e fórmulas.

Desejo um bom trabalho a todos!

Responder

Figura 143. Mensagem para dar início aos trabalhos

Na atividade proposta na primeira semana de trabalho, pode-se perceber que alguns alunos tentaram uma comunicação sem a utilização do ROODA Exata. Talvez por ser o primeiro contato da turma com o ambiente e com a ferramenta. É fato que os alunos não estão habituados a escrever expressões matemáticas por meio de editores científicos, o que justifica uma resistência inicial. Contudo, a dificuldade de compreensão de mensagens que não utilizam o ROODA Exata é inegável, como se pode verificar na Figura 144. Apesar da expressão matemática ser de estrutura simples (faz uso somente de frações e potências), seu entendimento fica prejudicado e confuso.

Para incentivar a utilização do editor ROODA Exata, a professora enviou uma mensagem, conforme Figura 145. As contribuições seguintes passaram, em sua grande maioria, a fazer uso do ROODA Exata. Acredita-se que é natural que ocorra um processo gradual de familiarização com a ferramenta. Assim, algumas mensagens iniciais não fizeram uso da mesma mas, aos poucos, todos foram descobrindo suas potencialidades e facilidades.

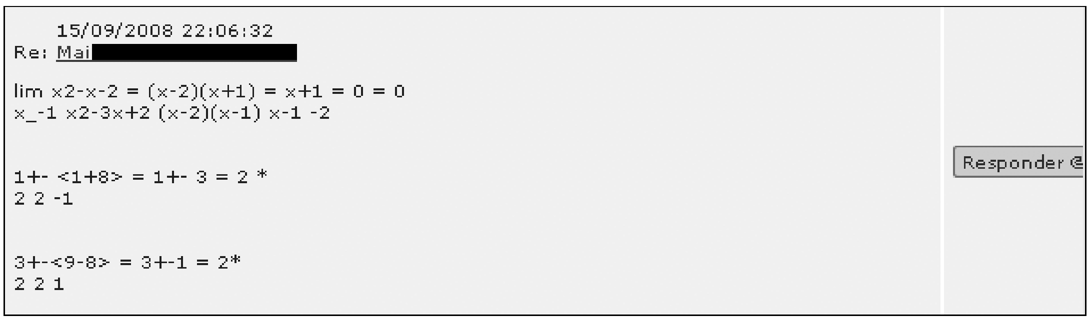


Figura 144. Mensagem sem a utilização do ROODA Exata

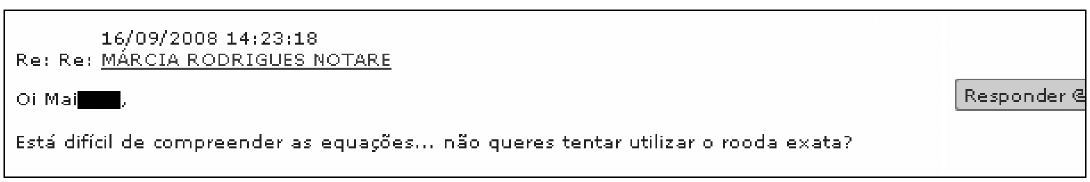


Figura 145. Incentivo para utilização do ROODA Exata

Umas das questões norteadoras desta categoria de pesquisa foi investigar se é possível realizar um diálogo matemático a distância por meio do editor científico ROODA Exata. Ao longo das atividades, foram percebidos verdadeiros diálogos sendo estabelecidos entre os colegas da turma. Contudo, muitos deles já foram ilustrados na seção anterior deste capítulo, o que revela que o processo de aprendizagem e a construção do conhecimento se dão também por meio de trocas e interações entre colegas.

A Figura 90 trouxe um problema de diferenciação pela regra do produto, que motivou um debate entre vários colegas da turma. Pode-se perceber uma sequência de contribuições que levaram à solução correta do problema e, mais do que isso, à tomada de consciência da regra do produto por REN, que inicialmente mostrou não compreender o problema apresentado, mas ao acompanhar e participar do debate estabelecido, superou suas dificuldades.

A Figura 92 mostra a solução incorreta apresentada por REN. O colega ADE percebe o equívoco cometido por REN, e posta sua contribuição (Figura 93), dando início aos debates. REN percebe os comentários inseridos no ambiente e retorna (Figura 95), revelando perceber o equívoco cometido. O colega ADR entra na discussão (Figura 146), comparando sua solução com a do colega REN, de forma educada, como se pode observar na afirmação “*Se eu estiver equivocado na minha colocação, me corrija por favor.*”. Isto reflete o respeito estabelecido entre os colegas da turma, aliado à vontade de interagir e contribuir com os debates.

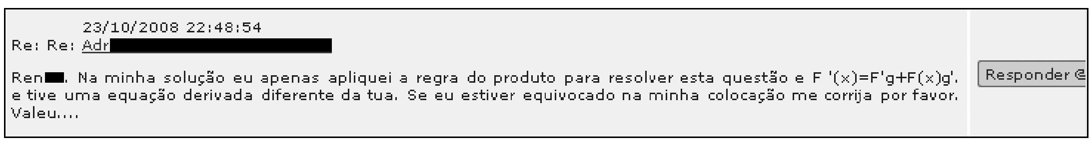


Figura 146. Participação de ADR no debate

O debate sobre este problema continua, e TIA apresenta uma solução correta e enxuta para o problema (Figura 96), e avança na solução ao simplificar a resposta final (Figura 97). Mais uma vez percebe-se os colegas interagindo em torno da solução de um mesmo problema, pois MAH e JUL comentam a simplificação realizada por TIA, conforme Figuras 98 e 99, respectivamente. Isto caracteriza a aprendizagem colaborativa, sustentada no diálogo e no trabalho em conjunto.

Percebe-se, a partir destas contribuições, que é possível realizar um diálogo matemático a distância, de modo a estabelecer uma construção coletiva, em que os participantes interagem em busca de um objetivo comum: a compreensão das regras de diferenciação. Dessa forma, é inegável o quanto estes diálogos estabelecidos no ambiente virtual de aprendizagem ROODA podem contribuir para a construção do conhecimento matemático. Contudo, vale salientar que este diálogo foi viabilizado pelo uso do editor científico ROODA Exata, que possibilitou a edição e publicação de expressões matemáticas de forma clara e transparente.

A necessidade de utilização do editor científico ROODA Exata pode ser verificada na grande maioria das mensagens publicadas no ambiente. Um exemplo de debate que, certamente, seria prejudicado sem a ferramenta ROODA Exata, foi desencadeado pelo problema apresentado na Figura 147.

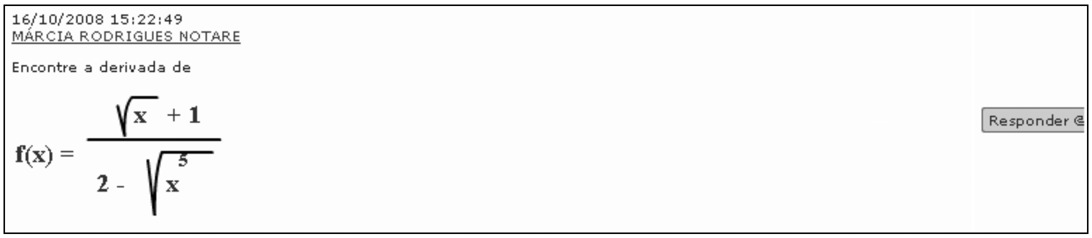


Figura 147. Necessidade de utilização do ROODA Exata

A solução[15] apresentada por MAH faz uso de estruturas como fração, potenciação e radiciação, compostas em uma mesma expressão matemática (Figura 148). Sem a utilização do ROODA Exata, esta mensagem seria expressa de forma confusa, complexa, de difícil compreensão, ou até mesmo, inviabilizada.

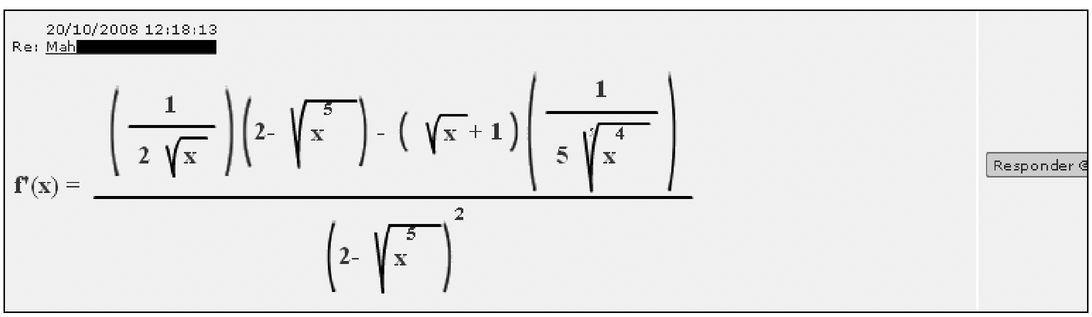


Figura 148. Necessidade de utilização do ROODA Exata

Ainda, para o mesmo problema, o aluno SAM apresenta sua solução, conforme Figura 149, de modo a corrigir o equívoco cometido pelo colega MAH. Fica mais uma vez evidenciada a relevância do ROODA Exata na comunicação matemática *on-line*, pois a publicação desta solução exige a utilização de notação científica. Na mensagem enviada por SAM, cabe destacar a utilização da aba *Fórmulas* do editor ROODA Exata, que agiliza a edição de algumas expressões matemáticas, como a regra de derivação do quociente, neste caso.

---

[15] Vale salientar que a solução de MAH não está correta. Sua utilização como exemplo diz respeito à edição da expressão matemática e utilização do ROODA Exata

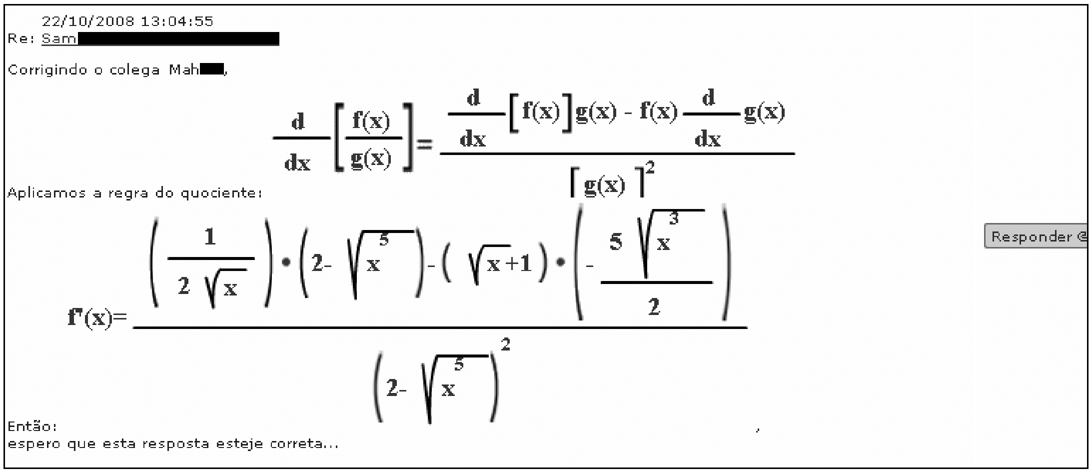


Figura 149. Necessidade de utilização do ROODA Exata

O colega JUL contribui para o desenvolvimento deste problema, apresentado uma solução que, inicialmente, "*modifica a forma de expressar os termos*", conforme o próprio autor afirma (Figura 150). Novamente, a mensagem de JUL não teria sido viabilizada sem o editor ROODA Exata.

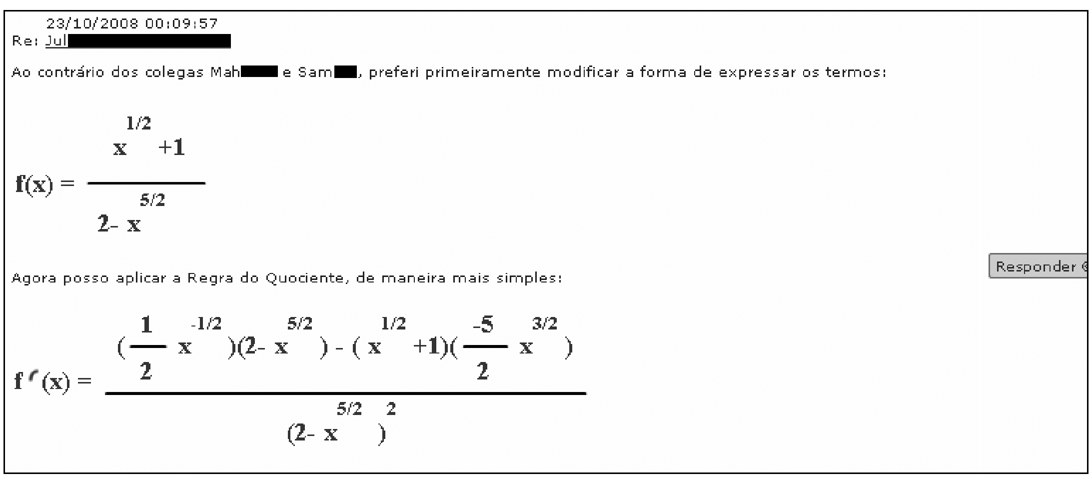


Figura 150. Necessidade de utilização do ROODA Exata

É importante destacar que a solução coletiva *on-line* do problema descrito acima seria inviabilizada sem a utilização do editor de notação científica ROODA Exata. Sem a utilização do mesmo, provavelmente sua solução faria uso de algum editor de fórmulas *off-line.* Contudo, esta opção exige a utilização de arquivos anexos, o que prejudica a naturalidade da comunicação e a análise das contribuições como um todo. Conforme Smith e Fegurson (2005), esta forma de comunicação é exaustiva e pouco amigável, consumindo tempo excessivo de professores e alunos, o que acaba desencorajando os alunos em participar do processo de comunicação e interação.

Com relação à utilização da aba *Fórmulas*, acima mencionada, observou-se que vários alunos fizeram uso da mesma. Alguns apenas utilizaram a fórmula, com as variáveis originais inseridas pela ferramenta, como já ilustrado na Figura 149. Porém, outros alunos editaram a fórmula original, aproveitando sua estrutura para inserir o conteúdo desejado, como pode ser percebido na Figura 151. A utilização desta aba confirma sua relevância no editor científico ROODA Exata. Sabe-se que sua utilização não ocorreu de forma unânime mas, como em qualquer outra ferramenta de informática, os usuários desenvolvem hábitos individuais de utilização, em que aquilo que se torna natural para alguns, pode não ser utilizado por outros.

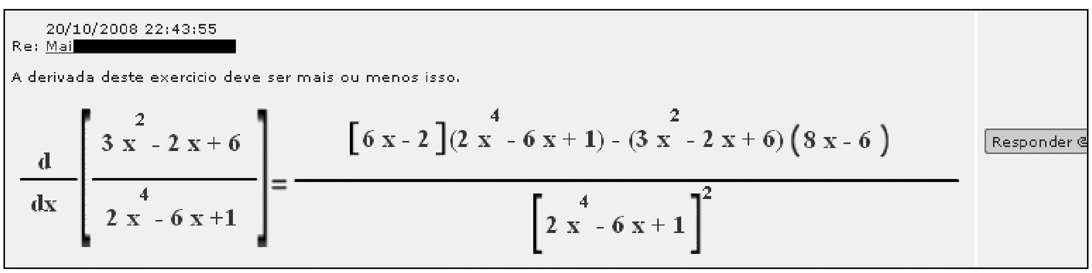
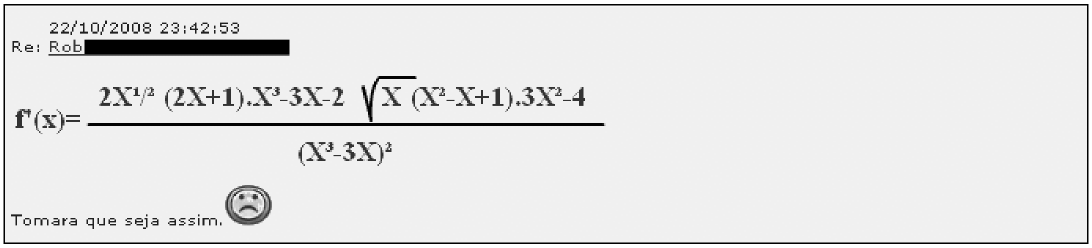


Figura 151. Utilização da aba Fórmulas

Entretanto, a utilização do ambiente ROODA nem sempre foi entendida como um ambiente para a aprendizagem e construção do conhecimento. Muitos alunos comunicam-se naturalmente em ambientes virtuais, enquanto outros pouco participam dos debates, permanecendo como observadores. O aluno ROB, na Figura 152, revela sua insegurança em expor-se no ambiente[16]. Percebe-se esta situação ao analisar a frase "*Tomara que seja assim*" acompanhada de um *smile* triste.

---

[16] A solução apresentada por ROB refere-se ao cálculo da derivada da função $f(x) = \frac{2\sqrt{x}\left(x^2 - x + 1\right)}{x^3 - 3x}$

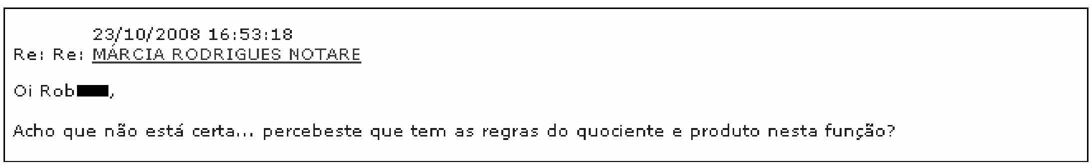

22/10/2008 23:42:53
Re: Rob[redacted]

$$f'(x)=\frac{2X^{1/2}\ (2X+1).X^3-3X-2\ \sqrt{X}\ (X^2-X+1).3X^2-4}{(X^3-3X)^2}$$

Tomara que seja assim.

Figura 152. Insegurança de ROB

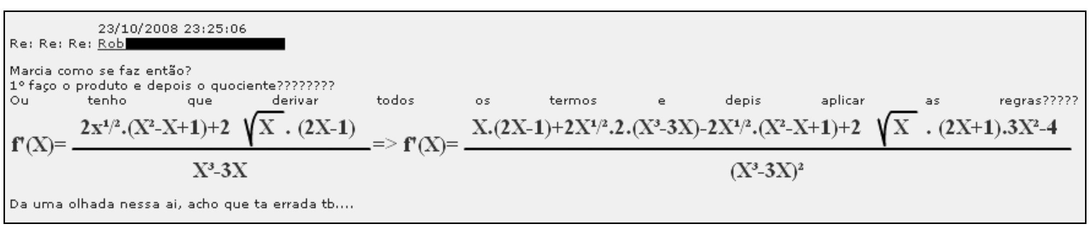
A solução apresentada por ROB não está correta, pois o mesmo negligenciou o fato da função ter a estrutura de um quociente com produto no numerador. A professora busca incentivar ROB a refletir sobre o equívoco, conforme Figura 153. O retorno de ROB confirma seu desconforto em expor-se no ambiente virtual de aprendizagem, como mostra a Figura 154. O excesso de interrogações e suas colocações revelam o fato.


23/10/2008 16:53:18
Re: Re: MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Rob[redacted],

Acho que não está certa... percebeste que tem as regras do quociente e produto nesta função?

Figura 153. Intervenção da professora


23/10/2008 23:25:06
Re: Re: Re: Rob[redacted]

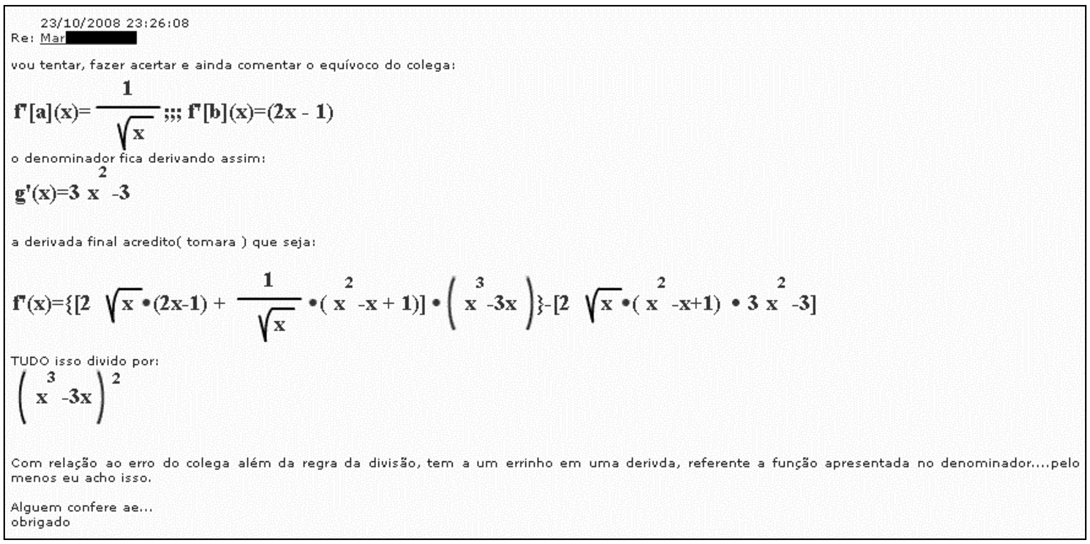
Marcia como se faz então?
1º faço o produto e depois o quociente????????
Ou tenho que derivar todos os termos e depis aplicar as regras?????

$$f'(X)=\frac{2x^{1/2}.(X^2-X+1)+2\ \sqrt{X}\ .\ (2X-1)}{X^3-3X} \Rightarrow f'(X)=\frac{X.(2X-1)+2X^{1/2}.2.(X^3-3X)-2X^{1/2}.(X^2-X+1)+2\ \sqrt{X}\ .\ (2X+1).3X^2-4}{(X^3-3X)^2}$$

Da uma olhada nessa ai, acho que ta errada tb....

Figura 154. Desconforto e insegurança

O colega MAR entra na conversa, para corrigir a solução apresentada por ROB (Figura 155). Sua solução está correta e foi descrita de forma detalhada, para justificar a solução final apresentada. Contudo, devido à complexidade e extensão da expressão matemática, MAR não representou a resposta final em uma única expressão, como se pode verificar na afirmação “*TUDO isso divido por:*”. De fato, no momento da edição da expressão matemática, a divisão deve ser prevista inicialmente. Certamente, MAR iniciou sua edição pelo numerador, descuidando-se do fato de se tratar de uma fração. Para não digitar toda a expressão novamente, optou por expressar-se desta forma. Contudo, esta atitude não comprometeu, de forma alguma, a compreensão da expressão matemática e agilizou o processo de edição, o que é valorizado na comunicação a distância. Mais uma vez, é possível observar uma troca entre os colegas se estabelecendo no ambiente virtual de aprendizagem, troca essa que dificilmente ocorre em momentos de aula presencial. É bem provável que estes colegas nem mesmo interajam na sala de aula, mas o ambiente virtual de aprendizagem proporcionou uma construção coletiva.


23/10/2008 23:26:08
Re: Mar[redacted]

vou tentar, fazer acertar e ainda comentar o equívoco do colega:

$$f'[a](x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \;;;;\; f'[b](x)=(2x - 1)$$

o denominador fica derivando assim:

$$g'(x)=3\,x^{2}\;-3$$

a derivada final acredito(tomara) que seja:

$$f'(x)=\{[2\;\sqrt{x}\bullet(2x-1)+\frac{1}{\sqrt{x}}\bullet(\,x^{2}\;-x+1)]\bullet\left(x^{3}\;-3x\right)\}-[2\;\sqrt{x}\bullet(\,x^{2}\;-x+1)\;\bullet\;3\,x^{2}\;-3]$$

TUDO isso divido por:

$$\left(x^{3}\;-3x\right)^{2}$$

Com relação ao erro do colega além da regra da divisão, tem a um errinho em uma derivda, referente a função apresentada no denominador....pelo menos eu acho isso.

Alguem confere ae...
obrigado

Figura 155. Contribuição de MAR

A forma de utilização e comunicação no ROODA foi vivenciada pelos alunos da turma de maneiras diferentes. Isto pode ser evidenciado nas contribuições apresentadas a seguir. O aluno EVE publicou apenas o resultado final da solução de um problema[17], conforme Figura 156. Isto revela que EVE entende o ambiente como um espaço para consultar respostas, e não como um espaço para construção coletiva do conhecimento. Entretanto, JUL, entendendo que o ambiente de aprendizagem ROODA consiste em um espaço para construção do conhecimento (e não apenas para publicação de respostas), enviou uma mensagem relatando sua insatisfação com a contribuição de EVE (Figura 157). Fica evidente que JUL está interessado no processo, no desenvolvimento do problema, enquanto EVE preocupa-se com o resultado final. Infelizmente, EVE não retornou à mensagem de JUL,

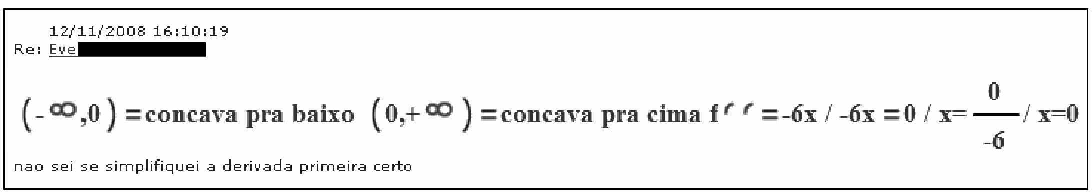
---

[17] O problema consiste em analisar a concavidade da função $y=\frac{2x}{x^2-9}$

assim como nenhum outro colega, finalizando um debate que poderia ter contribuído para o processo de aprendizagem de todos.

Assim, percebe-se que os alunos envolvem-se de forma diferente nas atividades propostas e, certamente, o comprometimento e a concepção que cada um tem sobre aprendizagem, refletem no aproveitamento final. Contudo, o nível de participação dos alunos depende do perfil de cada um, levando em consideração características como maturidade, autonomia, motivação, comprometimento, tempo disponível e facilidade de acesso.

Para Paloff e Pratt (2004), para que um aluno tenha sucesso em situações de EAD, é preciso gostar de trabalhar em conjunto, pois a colaboração ajuda os alunos a atingir níveis mais profundos de construção de conhecimento. Ainda, afirmam que a colaboração se sustenta quando o diálogo, a crítica e o trabalho em conjunto são estimulados. JUL mostrou ter perfil e disposição para o diálogo e o trabalho em conjunto, enquanto EVE parece não estar disposto a compartilhar e trocar com os colegas.

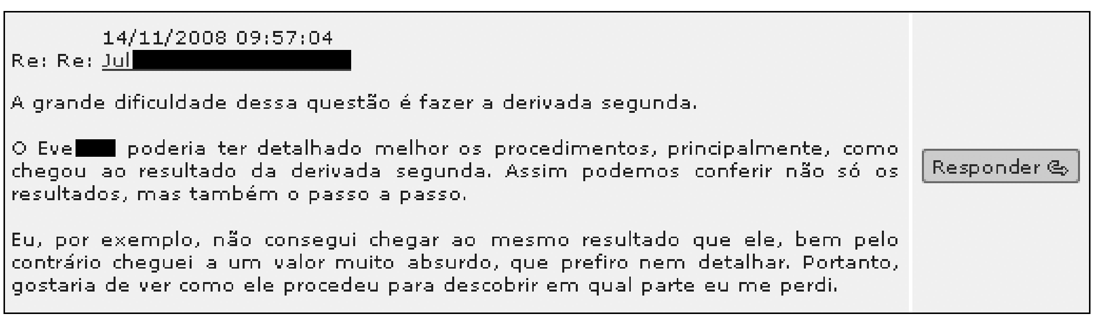


12/11/2008 16:10:19
Re: Eve[redacted]

$\left(-\infty,0\right)$ = concava pra baixo $\left(0,+\infty\right)$ = concava pra cima $f'' = -6x$ / $-6x = 0$ / $x = \frac{0}{-6}$ / $x=0$

nao sei se simplifiquei a derivada primeira certo

Figura 156. Publicação da resposta final



14/11/2008 09:57:04
Re: Re: Jul[redacted]

A grande dificuldade dessa questão é fazer a derivada segunda.

O Eve[redacted] poderia ter detalhado melhor os procedimentos, principalmente, como chegou ao resultado da derivada segunda. Assim podemos conferir não só os resultados, mas também o passo a passo.

Eu, por exemplo, não consegui chegar ao mesmo resultado que ele, bem pelo contrário cheguei a um valor muito absurdo, que prefiro nem detalhar. Portanto, gostaria de ver como ele procedeu para descobrir em qual parte eu me perdi.

Responder

Figura 157. Insatisfação de JUL

Uma outra questão que se propôs investigar está relacionada às possíveis dificuldades de utilização do editor científico ROODA Exata. Desde a primeira semana de atividades no ROODA, observou-se a utilização do editor científico pela grande maioria dos alunos da turma, que não expressaram dificuldades em seu manuseio. Contudo, o aluno WIL, na quinta atividade proposta à turma, expressou sua insatisfação ao tentar utilizar o ROODA Exata, como mostra a Figura 158. Certamente, WIL dedicou um bom tempo na edição da fórmula mas possivelmente sua conexão caiu, não salvando sua contribuição. Assim, é possível compreender sua frustração, claramente expressa na mensagem que enviou. Entretanto, WIL não desistiu, e alguns minutos depois, publicou sua mensagem, de forma clara, como mostra a Figura 159. Verifica-se que WIL utilizou o editor científico com desenvoltura, e sua satisfação em conseguir publicar uma mensagem clara é percebida pela afirmação "*Acho que dessa maneira conseguimos entender*" seguida de um *smile* sorriso.

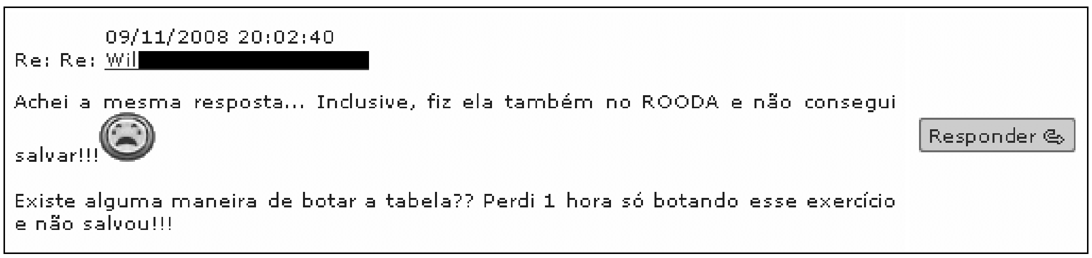
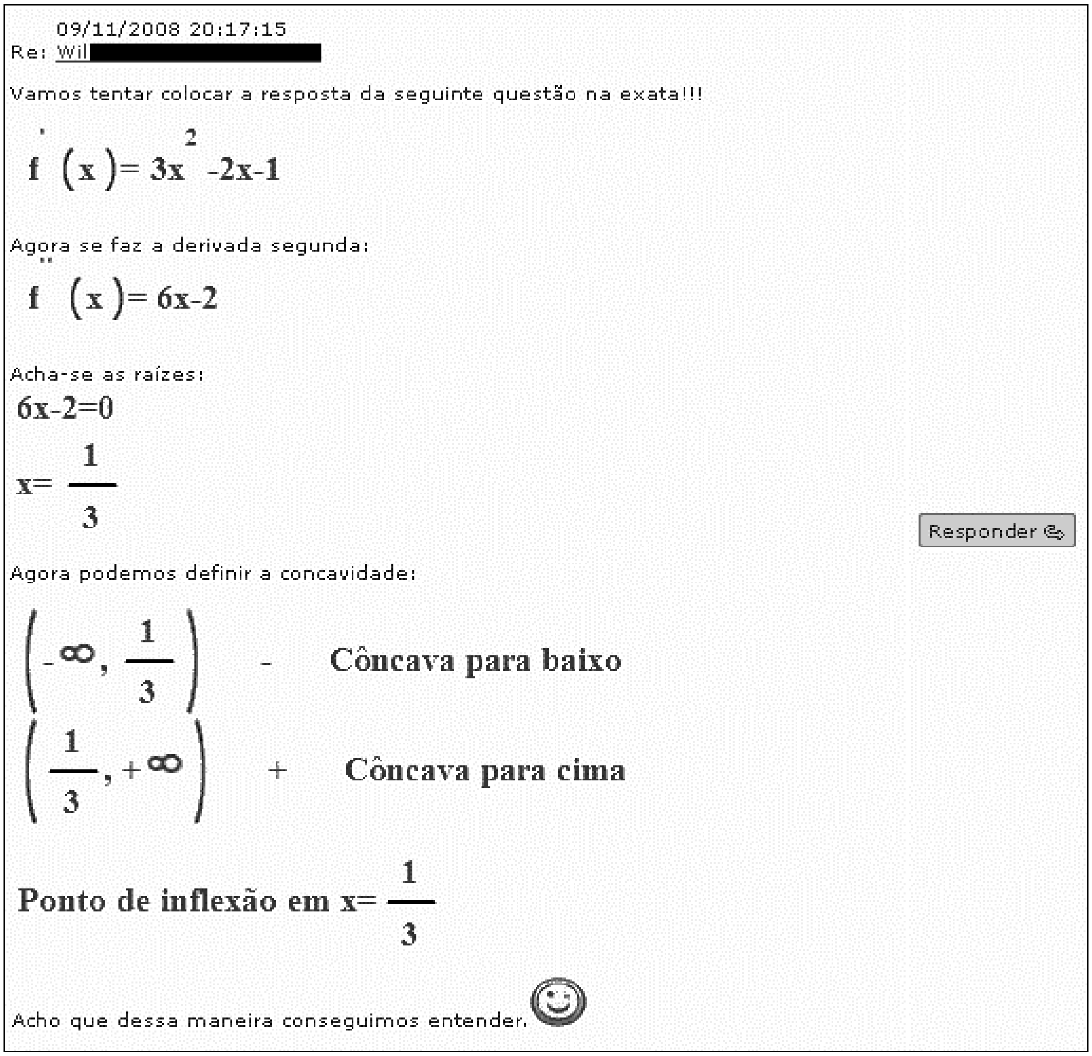


Figura 158. Insatisfação ao utilizar o ROODA Exata



09/11/2008 20:17:15
Re: Wil[redacted]

Vamos tentar colocar a resposta da seguinte questão na exata!!!

$$f'(x)= 3x^2 -2x-1$$

Agora se faz a derivada segunda:

$$f''(x)= 6x-2$$

Acha-se as raízes:

$$6x-2=0$$

$$x= \frac{1}{3}$$

Responder

Agora podemos definir a concavidade:

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ - **Côncava para baixo**

$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ + **Côncava para cima**

Ponto de inflexão em $x= \frac{1}{3}$

Acho que dessa maneira conseguimos entender.

Figura 159. Satisfação de WIL

Foi possível observar também, que os alunos utilizaram o ROODA não apenas para resolver as atividades propostas, mas para esclarecer dúvidas relacionadas a conceitos matemáticos do Cálculo Diferencial. A Figura 160 mostra ROB questionando a professora sobre o significado de pontos estacionários. Porém, antes mesmo que a professora respondesse ao seu questionamento, o colega TIA colaborou, buscando esclarecer a dúvida de ROB, conforme Figura 161.

Destaca-se nesta situação a disposição de TIA em colaborar e ajudar o colega, inclusive recomendando uma leitura para aprofundar sua compreensão. Mas vale salientar o progresso de ROB em participar mais ativamente dos debates no ROODA, pois em aproximadamente vinte dias atrás, revelou desconforto e insegurança, e agora o utiliza para esclarecer dúvidas com os colegas. De fato, alguns alunos precisam de um tempo maior para se sentirem parte de um processo de construção do conhecimento coletiva. A individualidade e o tempo de cada um devem ser respeitados e compreendidos: não há como forçar a participação ativa de um aluno se o mesmo não se sente acolhido, à vontade e confiante para participar do processo.

10/11/2008 16:05:54
Re: Rob[redacted]

Professora oq são pontos estacionários?
Grato...

Responder

Figura 160. Dúvidas de ROB

11/11/2008 01:49:56
Re: Re: Tia[redacted]

Cara... seguinte!

Os extremos relativos de uma função, se existem, ocorrem em pontos críticos.

"...Ás vezes, desejamos distinguir os pontos críticos nos quais F '(x)=0 daqueles onde f é não diferenciável. Então chamaremos os pontos onde f '(x)=0 de pontos estacionários de f. "

Anton, H.

página 300 do livro velho!!!

recomendo a leitura do parágrafo todo, acima citado!

Uma coisa para cuidar, extremos relativos ocorrem em pontos críticos, mas não necessariamente todo ponto crítico terá um extremo relativo!!!

espero ter ajudado!

Responder

Figura 161. Colaboração de TIA

Assim, foi possível verificar que o ambiente virtual de aprendizagem ROODA mostrou-se como um meio para a interação, o diálogo e a comunicação matemática. Neste processo, observou-se a participação ativa dos alunos, que interagiram para aprender. O editor científico ROODA Exata mostrou-se eficaz e viabilizou a comunicação matemática *on-line*, dando oportunidade para uma experiência de educação matemática presencial apoiada pelas tecnologias da comunicação e informação.

6.4 Análise dos Alunos

Para verificar a percepção dos alunos sobre as atividades realizadas no ROODA e sobre a utilização do editor científico ROODA Exata, foi aplicado um questionário à turma, que pode ser verificado no Quadro 7, no final do semestre letivo.

1. Nas atividades que realizamos no ambiente virtual ROODA, você sentiu necessidade de utilizar o Editor de fórmulas ROODA Exata?
2. Você sentiu necessidade de utilizar símbolos e fórmulas que não estão presentes no ROODA Exata?
3. Você encontrou dificuldades para utilizar o editor de fórmulas ROODA Exata? Quais?
4. Você acha que seria possível realizar estas atividades na internet sem a utilização do editor de fórmulas ROODA Exata? Como?
5. Você acha que estas atividades contribuíram para o seu processo de aprendizagem do Cálculo I?
6. Você acha a comunicação e interação via internet importante para possibilitar trocas extraclasse?

Quadro 7. Questionário aplicado aos alunos

Para a questão 1 - *Nas atividades que realizamos no ambiente virtual ROODA, você sentiu necessidade de utilizar o Editor de fórmulas ROODA Exata?* – dos alunos que responderam ao questionário, apenas um manifestou-se de forma contrária, afirmando não ter sentido a necessidade de utilização do ROODA Exata. Todos os demais afirmaram que o ROODA Exata se fez necessário para viabilizar a comunicação matemática *on-line*. Seguem algumas das colocações dos alunos relativas a esta questão: "*O ROODA Exata foi uma ferramenta indispensável.*"; "*Com certeza, pois facilita o uso de equações*."; "*O editor possibilita expressar radicais, racionalização, potências de forma simplificada. As imagens nele geradas facilitam o entendimento*."; "*Ali estavam todas as fórmulas que foi preciso para responder as atividades.*". A Figura 162 ilustra o percentual relativo a esta questão.

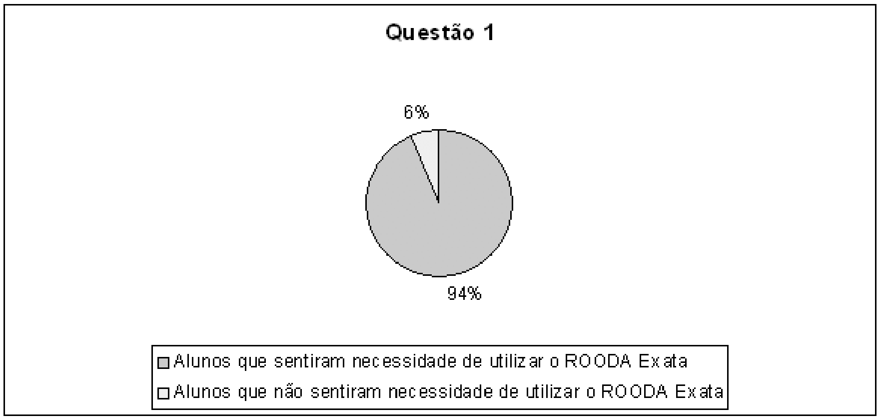


Figura 162. Gráfico da Questão 1

Dessa forma, confirma-se que o uso de um editor de notação científica na comunicação matemática *on-line* se faz necessário. Pelas respostas da turma, verifica-se que o ROODA Exata viabiliza esta comunicação e, mais do que isso, torna-se indispensável quando é necessária a utilização de expressões matemáticas complexas.

Para a questão 2 - *Você sentiu necessidade de utilizar símbolos e fórmulas que não estão presentes no ROODA Exata?* – a grande maioria mostrou-se satisfeita com os símbolos oferecidos pelo ROODA Exata, como ilustra a Figura 163. Contudo, alguns alunos manifestaram a necessidade de utilização de outros símbolos, mas devido à formulação da pergunta (que não questionou *quais*), não exemplificaram.

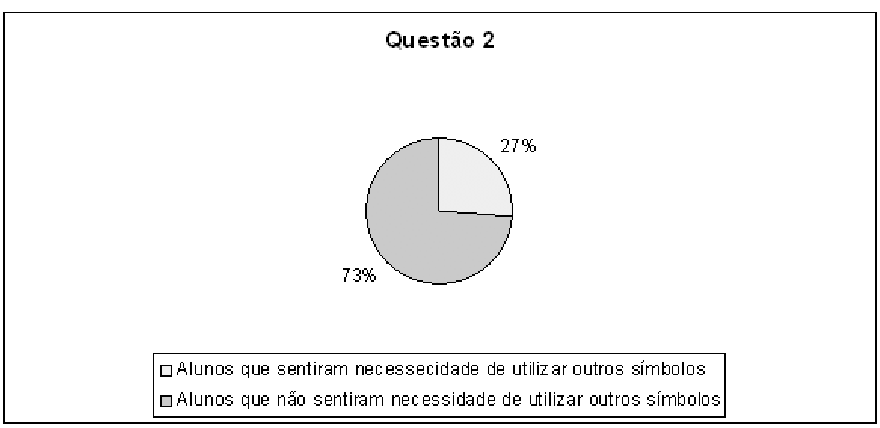


Figura 163. Gráfico da Questão 2

Com relação às dificuldades enfrentadas na utilização do ROODA Exata, conforme questão 3 - *Você encontrou dificuldades para utilizar o editor de fórmulas ROODA Exata? Quais?* – grande parte dos alunos revelou sentir dificuldades iniciais de utilização, mas que, com o tempo, foram superadas, conforme comentários selecionados a seguir: “*A dificuldade foi apenas no primeiro impacto com a ferramenta, mas com a construção de mais fórmulas, percebe-se que é simples e útil para efetuar expressões.*”; “*No começo tive problemas para entender como funcionava.*”; “*Sim, não tinha visto nada parecido na Internet antes. Mas é só questão de costume.*”; “*Começar a utilizar o ROODA Exata não é muito simples. Mas após um período certo de uso a ferramenta se torna bastante útil.*”. A Figura 164 ilustra os resultados da pesquisa relativos a esta questão.

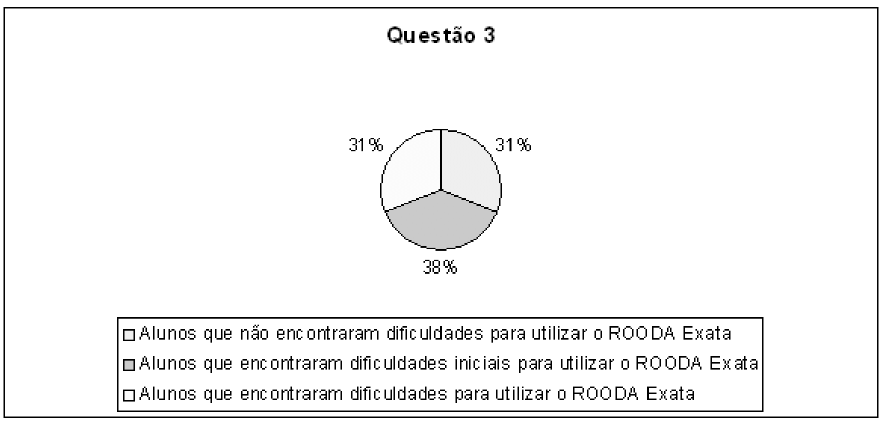


Figura 164. Gráfico da Questão 3

De fato, esta dificuldade inicial de utilização do ROODA Exata foi constatada e analisada na seção anterior. Parece natural que um primeiro contato com a ferramenta ofereça uma certa dificuldade, até porque os alunos não estão habituados a editar expressões matemáticas rotineiramente. Contudo, percebe-se que, em pouco tempo, seu manuseio torna-se natural.

Vale ressaltar que vários alunos relataram a dificuldade em utilizar a tecla *Enter* durante a edição de uma fórmula, para inserir uma nova linha na caixa de edição do ROODA Exata. De fato, o ROODA Exata ainda não permite a inserção de uma nova linha por meio da tecla *Enter*. Contudo, considerando que vários alunos expressaram a necessidade deste recurso, será considerada a possibilidade de sua implementação em uma próxima versão.

A questão 4 - *Você acha que seria possível realizar estas atividades na Internet sem a utilização do editor de fórmulas ROODA Exata? Como?* – evidencia que a utilização do ROODA Exata facilita a visualização das expressões matemáticas e faz-se necessário para uma comunicação matemática *on-line* eficiente, pois grande parte alunos destacou a necessidade do ROODA Exata nas atividades realizadas, como ilustra a Figura 165. Algumas colocações revelam a posição dos alunos: "*Não, o ROODA se mostrou eficiente.*"; "*Acho que apenas cálculos mais simples, onde existe um cálculo mais complexo, fica complicada a utilização sem ele.*"; "*Seria possível, mas porém de difícil entendimento.*"; "*Até seria possível, mas algumas contas ou soluções seriam de difícil visualização.*"; "*Não, pois os símbolos do teclado são limitados e muitas fórmulas não se consegue fazer.*".

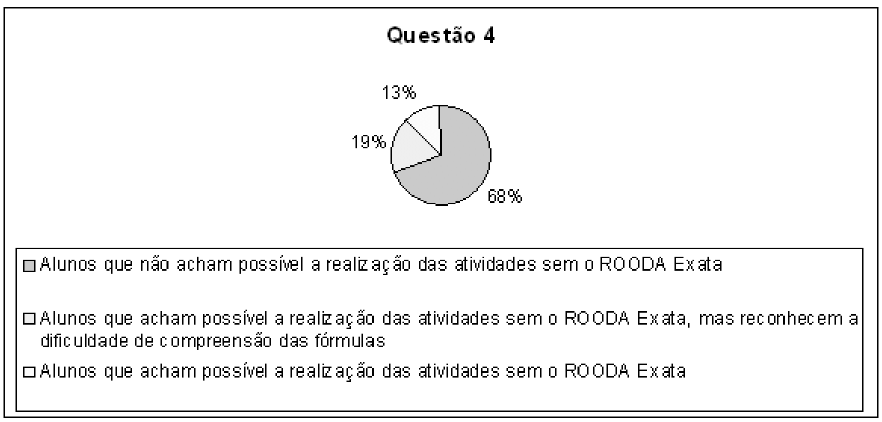


Figura 165. Gráfico da Questão 4

Com relação ao processo de aprendizagem de Matemática, as respostas apresentadas para a questão 5 - *Você acha que estas atividades contribuíram para o seu processo de aprendizagem do Cálculo I?* – revelaram que as atividades contribuíram para a aprendizagem dos alunos, conforme Figura 166.

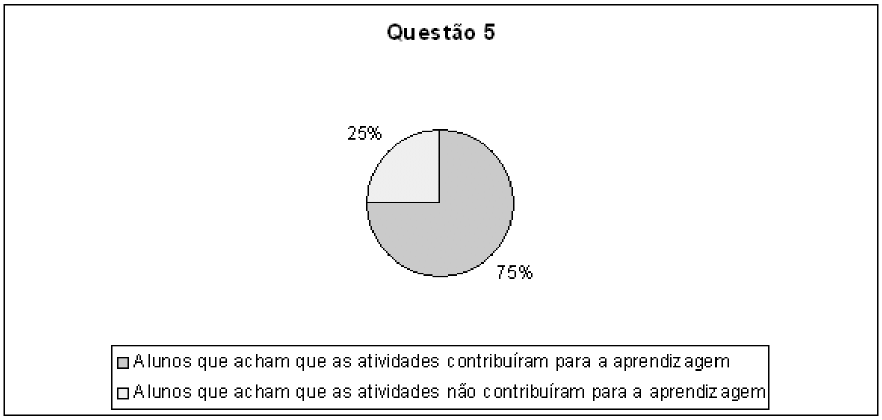


Figura 166. Gráfico da Questão 5

A grande maioria mostrou-se satisfeita com a metodologia adotada, como é possível observar nos seguintes comentários: "*Sim, muito. Gostei muito da iniciativa da professora. As atividades ajudaram a ter mais comprometimento e a esclarecer dúvidas.*"; "*Sim, ajudou a exercitar e tirar possíveis dúvidas.*"; "*Acho que ajuda a tirar algumas dúvidas que surgem quando se está estudando em casa.*"; "*Sim, pela troca de informações.*"; "*Sim, pois é uma iniciativa ao estudo.*". Percebe-se que alguns viram no ambiente uma oportunidade para tirar dúvidas, enquanto outros se sentiram mais comprometidos com os estudos e ainda, outros enfatizaram a troca de informações. Em poucas palavras, fica evidenciado que a percepção dos alunos acerca da metodologia adotada, que utiliza um ambiente virtual de aprendizagem como apoio às aulas presenciais, foi positiva.

Para a questão 6 - *Você acha a comunicação e interação via internet importante para possibilitar trocas extraclasse?* – foi unânime entre os alunos afirmarem a importância das trocas extraclasse. Algumas colocações: "*Sim, além de se comunicar com o professor também é possível se comunicar com os colegas.*"; "*Sim, sem o ROODA, dificilmente me comunicaria com vários colegas.*"; "*Acho que sim, principalmente quando se tem apenas uma aula por semana. Ela ajuda a manter a comunicação com a turma e com o professor.*"; "*Claro, pois é uma boa maneira de trocar ideias sobre a matéria.*".

Contudo, vale ressaltar que dois alunos expuseram seus problemas com horários, como se pode verificar nas seguintes colocações: "*Sim, porém alguns aspectos devem ser considerados, como a disponibilidade de horários dos alunos.*" e "*Depende do tempo que a pessoa tem durante o dia ou durante a semana para realizar as atividades.*". Percebe-se que estes alunos não participaram com a dedicação que desejariam, por problemas indisponibilidade de tempo. Muitos alunos que frequentam universidades particulares, estudam a noite e trabalham durante o dia, ficando restrito o tempo de dedicação extraclasse ao curso universitário. Entretanto, mesmo sem a utilização de um ambiente virtual de aprendizagem, a dedicação e o comprometimento com o curso são indispensáveis para um bom aproveitamento e para o processo de aprendizagem.

A partir deste questionário, foi possível evidenciar a importância do editor científico ROODA Exata na comunicação matemática *on-line*. Mais do que isso, percebeu-se que a utilização de ambientes virtuais de aprendizagem como apoio ao ensino presencial contribui para o processo de aprendizagem de Matemática. Isto porque esta metodologia faz com que os alunos se comprometam com o curso, estabelecendo uma postura ativa e participativa, responsáveis pelos seus processos de construção de conhecimento.

Evidentemente, nem todos os alunos obtiveram boas experiências nesta metodologia. Alguns nem mesmo acessaram o ambiente durante o semestre, outros o fizeram de forma descomprometida com a aprendizagem. Mas não se deve esperar unanimidade nesta experiência, pois se sabe que alunos apresentam perfis diferentes, alguns mais maduros, responsáveis e comprometidos, outros nem tanto e, assim como em uma sala de aula presencial, não se consegue atingir a todos positivamente. Porém, aqueles que se comprometeram seriamente com as atividades propostas, participando ativamente dos debates ocorridos no ambiente, certamente apresentaram progresso na construção do conhecimento matemático.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo tem o objetivo de apresentar uma reflexão sobre a trajetória deste estudo, apontando possibilidades para a comunicação e aprendizagem de Matemática *on-line*. Também são delineadas algumas perspectivas de investigação na área.

A presente tese investigou a viabilidade de utilização das tecnologias da informação e comunicação na Educação Matemática. Nesta perspectiva, buscou-se estudar indicadores envolvidos na aprendizagem de Matemática, subsidiado pela teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget.

Ainda, para o desenvolvimento desta pesquisa, foi investigado como as tecnologias vêm sendo utilizadas em contexto educacional e, mais especificamente, como apoiam o processo de aprendizagem de Matemática. Percebeu-se a carência de suporte à comunicação matemática *on-line* e, consequentemente, a necessidade do desenvolvimento de ferramentas que viabilizassem esse processo.

Visando oferecer alternativas de solução para o problema da comunicação matemática *on-line*, este trabalho se propôs a projetar e desenvolver o editor de notação científica ROODA Exata. O ROODA Exata foi pensado de modo a atender às principais necessidades que viabilizam a comunicação matemática *on-line*, contendo os símbolos e estruturas mais utilizados na área.

Para avaliar seu funcionamento e sua usabilidade, bem como analisar o processo de aprendizagem a partir da participação dos alunos, foi utilizado o ambiente virtual de aprendizagem ROODA, como um meio de apoio extraclasse em turmas de Cálculo Diferencial.

Ao longo do trabalho, buscou-se fundamentação teórica em dois grandes eixos norteadores: a construção do conhecimento matemático, entendida à luz da teoria piagetiana; e a educação presencial apoiada nas tecnologias da informação e comunicação. Esta última auxiliou a pensar na proposta metodológica de utilização do ROODA nas turmas de Cálculo Diferencial. Assim, a utilização do ROODA buscou privilegiar a participação dos alunos, baseada na argumentação e justificativa do raciocínio, por meio de resolução de problemas que foram propostos durante o semestre letivo.

A teoria da construção do conhecimento de Piaget e as questões relativas à aprendizagem da Matemática forneceram subsídios para analisar os processos cognitivos desencadeados a partir das interações no ROODA.

Assim, o experimento realizado serviu como fonte de dados para avaliar a ferramenta desenvolvida. Mais do que isso, este experimento permitiu analisar os processos cognitivos e a aprendizagem da Matemática ao longo das participações no ambiente virtual.

A partir da análise realizada, algumas considerações podem ser feitas:

- A utilização de um ambiente virtual de aprendizagem como apoio a disciplinas presenciais mostrou-se eficiente, uma vez que favorece o exercício da comunicação e expressão em Matemática. A partir das soluções apresentadas pelos alunos, os mesmos precisaram justificar os meios que levaram aos resultados obtidos. Este exercício de argumentação leva à reflexão de suas ações, conduzindo à tomada de consciência dos conceitos envolvidos na resolução do problema. As interações ocorridas no ambiente desencadearam diálogos que, muitas vezes, permitiram aos alunos avançarem no conhecimento matemático, superando dificuldades, identificando equívocos, refletindo sobre suas concepções e construindo novas estruturas cognitivas que permitiram a compreensão de conceitos matemáticos. Assim, fica evidenciada a importância da socialização das ideias, que pode levar à construção do conhecimento. Muitos dos alunos que participaram ativamente no ROODA, não conversavam com os colegas na sala de aula presencial, nem mesmo participavam das aulas, expondo suas dúvidas, dificuldades ou contribuindo para a construção de algum conceito. Entretanto, nas atividades virtuais, foram alunos que participaram intensamente e contribuíram para o processo de construção do conhecimento de todos.
- Contudo, para que estas participações ocorressem, o editor científico ROODA Exata mostrou-se necessário para viabilizá-las e potencializá-las. Ficou evidenciado, a partir desta tese, que o ROODA Exata pode promover debates matemáticos *on-line*, com a utilização de símbolos e fórmulas, que facilitam a comunicação e expressão em Matemática. Sem o editor científico, muitas das discussões teriam se tornado inviáveis, pela complexidade das expressões matemáticas utilizadas, difíceis de serem descritas em linguagem natural, apenas com a utilização do teclado. Consequentemente, pode-se dizer que o ROODA

Exata viabilizou a comunicação matemática *on-line* e auxiliou a construção do conhecimento matemático.

- A partir das contribuições da turma na avaliação da ferramenta desenvolvida, verificou-se que ainda faltam recursos para que esta se torne mais amigável ao usuário. A possibilidade de trocar de linha por meio da tecla Enter foi levantada por vários alunos da turma. Isto revela que este recurso é importante para tornar o ROODA Exata mais intuitivo, eficiente e amigável, facilitando e agilizando a comunicação matemática. Um outro recurso que precisa ser implementado, é a criação de um novo botão na aba *Símbolos*, relativo à notação de Limite, tal como $\lim_{x \to a} f(x)$, para agilizar a edição de expressões que envolvam o cálculo de limites. Certamente, estes recursos serão implementados em uma nova versão do ROOA Exata, para torná-lo mais eficiente.

É importante salientar que o sucesso em situações de ensino e aprendizagem de Matemática a distância, seja em modalidade presencial ou totalmente a distância, não está garantido pela simples utilização do editor científico ROODA Exata. Pensar em metodologias de utilização que valorizem a participação ativa do aluno, assim como repensar os papéis do professor e do aluno neste contexto, são fundamentais para que esse sucesso ocorra.

Nesta pesquisa, pode-se perceber que, ao realizar as atividades propostas no ROODA, os alunos permaneceram envolvidos com os estudos do Cálculo Diferencial em momentos fora da sala de aula, intensificando o comprometimento com a disciplina. Disciplinas como o Cálculo Diferencial necessitam de dedicação e comprometimento por parte dos alunos, para que avancem na tomada de consciência dos conceitos matemáticos estudados. A metodologia de utilização de um ambiente virtual para comunicação extraclasse favoreceu este envolvimento e motivou os alunos a estudarem ao longo da semana, e não apenas para as avaliações, como estão habituados. Contudo, ficou evidenciado que nem todos os alunos reconhecem os benefícios de sua participação nas atividades propostas no ROODA. Isto mostra que, para que estes benefícios sejam alcançados, é necessária uma mudança, não só no papel do professor, mas principalmente no papel do aluno, que deve entender a aprendizagem como um processo desencadeado pelas suas ações, e não apenas a partir de uma boa aula expositiva do professor. Alunos que se envolveram com as atividades, resolveram os problemas propostos, argumentaram, justificaram, debateram com os colegas, tiraram suas dúvidas, expuseram suas dificuldades, refletiram sobre suas ações e concepções, certamente avançaram no conhecimento matemático. Consequentemente, construíram novas estruturas cognitivas que permitiram a tomada de consciência, mesmo que parcial, dos conceitos estudados.

Ainda, percebeu-se que o professor deve, cada vez mais, assumir um papel de mediador, no sentido de estar atento às participações dos alunos, identificar os problemas conceituais que estes revelam, para realizar intervenções, por meio de dicas e questionamentos, que conduzam o aluno a uma reflexão. Isto não significa que a aula expositiva deva ser totalmente abandonada. Mas novas metodologias devem ser utilizadas de forma complementar, para centralizar o processo de construção do conhecimento nas ações dos alunos. Esta mudança de perfil, evidentemente, não ocorre de imediato. A cada novo semestre, é possível aperfeiçoar a prática docente, identificando metodologias que obtiveram êxito, revendo aquilo que não deu certo, de modo a caminhar para um ensino e aprendizagem de Matemática que não enfatize apenas regras, técnicas e procedimentos, mas a verdadeira compreensão de seus conceitos.

Além disso, a aprendizagem da Matemática é um processo que não envolve apenas a comunicação e expressão algébrica. O trabalho com as diferentes representações de um mesmo objeto matemático é indispensável neste processo.

Assim, acredita-se que, como trabalhos futuros, o projeto e desenvolvimento de uma ferramenta para a construção de gráficos, integrada ao ROODA, seja extremamente importante para a construção do conhecimento matemático em ambiente virtual. Muitas atividades que foram propostas neste trabalho, teriam sido enriquecidas e, certamente, teriam desencadeado novas discussões, se acompanhadas de análises gráficas. Ainda, o projeto e desenvolvimento de uma ferramenta capaz de efetuar cálculos, tais como derivadas e integrais, traçar retas tangentes ao gráfico de funções, esboçar a área entre curvas, entre outros, também contribuiria para a aprendizagem de Matemática. Estes projetos representam perspectivas futuras, que certamente contribuiriam ainda mais para a utilização das tecnologias da informação e comunicação na Educação Matemática.

As análises dos dados realizadas na presente pesquisa permitiram compreender como a aprendizagem de Matemática ocorre. Diferentes níveis de conceituação existem, e as interações e colaborações ocorridas no ambiente ROODA permitiram, em primeiro lugar, identificar estes diferentes níveis, com fundamentação na epistemologia genética e, em segundo lugar, observar o progresso de determinados alunos que, a partir da participação nas atividades propostas, progrediram, de um patamar inferior, a um novo patamar, enriquecido por novas construções.

Como já afirmado anteriormente, as análises realizadas nesta tese focaram-se na dimensão cognitiva do sujeito. Entretanto, acredita-se que estas ainda poderiam contemplar duas outras dimensões: afetiva e social. Assim, entende-se que estes caminhos podem ser trilhados como trabalhos futuros, a partir dos resultados já alcançados nesta pesquisa, complementado-os, de modo a compreender melhor as participações e trocas ocorridas no ROODA. Isto porque o processo de ensino e aprendizagem de Matemática envolve, necessariamente, estes três aspectos. Os ambientes virtuais de aprendizagem constituem espaços de convivência social, e são os diálogos e as trocas ocorridas neste espaço que possibilitam a construção do conhecimento matemático.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para a Educação Matemática e para o desenvolvimento de novas metodologias de ensino e aprendizagem, que entendam que a construção do conhecimento matemático não se resume ao conhecimento de conteúdos. É preciso compreender como este processo ocorre, para criar meios que auxiliem na aprendizagem. Mais do que isso, espera-se que este estudo contribua para a realização de disciplinas de Matemática a distância, viabilizadas pelas trocas ocorridas no meio virtual, viabilizadas pelo editor científico ROODA Exata. Ficou evidenciado que as interações desencadeadas na área de Matemática ocorrem de maneira intuitiva e natural por meio da utilização do ROODA Exata, melhorando a qualidade da EAD na área da Matemática.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard et al. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookmann, 2007, vol.1.

BECKER, Fernando. **Da ação à operação: o caminho da aprendizagem**. Rio de Janeiro: DP&A, 1997.

BECKER, Fernando. **Educação e Construção do Conhecimento**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BEHAR, Patricia et al. ROODA/UFRGS: uma articulação técnica, metodológica e epistemológica. In: BARBOSA, Rommel Melgaço (Org.). **Ambientes Virtuais de Aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2005, p. 51-70.

BEHAR, Patricia et al. **Modelos Pedagógicos em Educação a Distância**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

BEHAR, Patricia et al. Capacitando professores para o uso do ROODA: uma plataforma voltada para a construção de conhecimento. In: V Congresso Brasileiro de Educação Superior a Distância (ESUD) e 6º Seminário Nacional de Educação a Distância (SENAED), 2008, Gramado. **Anais...** V ESUD e 6 SENAEAD. São Paulo: ABED, 2008.

CUYPERS, H. et al. **State of the Art in Mathematical E-Learning**. 2005. Disponível em: <http://webalt.math.helsinki.fi/content/e16/e301/e304/D1.1._State_of_the_Art_in_mathematical_e-learning.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2006.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, David (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Norwell: Kluver Academic Publishers, 1991, p. 25 – 40.

DUBINSKY, Ed. Reflective Abstraction in Advanced Mathemathical Thinking. In: Tall, David (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Norwell: Kluver Academic Publishers, 1991, p. 95 – 123.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, 5, IREM de Strasbourg, 1993, p. 37-65.

ENGELBRETCHT, J.; HARDING, A. **Technologies involved in the teaching of undergraduate mathematics on the web**. 2004. Disponível em: <http://ridcully.up.ac.za/muti/technologies.pdf >. Acesso em: 15 jun. 2006.

FERRACIOLI, L. **Aspectos da Construção do Conhecimento e da Aprendizagem na Obra de Piaget**. Caderno Catarinense do Ensino de Física, UFSC, v.16,n.2, ago. 1999. Disponível em: <http://www.fsc.ufsc.br/cbef/port/16 -2/artpdf/a5.pdf> Acesso em: 20 fev. 2009.

FERREIRA, L.; RANGEL, A.C.; BERCHT, M. A educação matemática e a construção do número pela criança, mediada pela tecnologia digital. **Revista Renote**, v.3, n.1, maio de 2005.

FLEMMING, D. **Desenvolvimento de Material Didático para Educação a Distância no Contexto da Educação Matemática**. 2005. Disponível em: <http://www.abed.org.br/publique/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?UserActiveTemplate=4abed&infoid=171&sid=105>. Acesso em: 07 set. 2005.

HARASIM, Linda et al. **Redes de aprendizagem: um guia para ensino e aprendizagem *on-line***. São Paulo: Editora Senac, 2005.

KLÜSENER, Renita. Ler, escrever e compreender a matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos. In: Neves, I. C. B. (org) **Ler e escrever: compromisso de todas as áreas**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1998, p. 177-191.

LEVENTHALL, Lyn. Requirements for Online Maths Tutoring. In: Second European Workshop on MathML and Scientific e-Contents Workshop. **Proceedings…**, Kuopio Finland, 2004.

LEVENTHALL, Lyn. **Bridging the gap between face to face and online maths tutoring**. 2004a. Disponível em: <http://dircweb.king.ac.uk/papers/Leventhall_L.H.2004_242915/leventhall_ICME10.pdf >. Acesso em: 31 jul. 2007.

LEVENTHALL, Lyn. **The Problem Of Scientific Communications In Learning Management Systems**. 2006. Disponível em: <http://www4mail.org/mathml2002/Lynda_Leventhall/Scientific-Communications-in-LMS.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2006.

LÉVY, Pierre. **As Tecnologias da Inteligência**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LÉVY, Pierre. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34, 1999.

LÉVY, Pierre. **A inteligência coletiva**. 4. ed. São Paulo: Edições Loyola, 1998.

MACHADO, S. (Org.). **Aprendizagem em Matemática. Registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna: analise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990.

MAZZOCATO, S. **Design de Interação em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: Avaliação da Interface Gráfica do ROODA/UFRGS**. Porto Alegre: Trabalho de Conclusão de Curso, UFRGS, 2005.

MONTAGERO, J.; MAURICE-NAVILLE, D. **Piaget ou a Inteligência em Evolução**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

MORAES, Roque. Análise de Conteúdo. **Revista Educação**. Porto Alegre, n. 37, Março 1999.

MORAN, José Manuel. Novas tecnologias e o re-encantamento do mundo. **Revista Tecnologia Educacional**. Rio de Janeiro, vol. 23, n.126, setembro-outubro 1995, p. 24-26.

MORAN, José Manuel. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias. **Revista Informática na Educação: Teoria & Prática**. Porto Alegre, vol. 3, n.1, UFRGS, 2000, pág. 137-144.

MORAN, José Manuel. **Educação inovadora presencial e a distância**. 2003. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/inov_1.htm>. Acesso em: 31 abr. 2007.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BEHAR, Patricia. ROODA Exata – Editor de Fórmulas Científicas Integrado a uma Plataforma de Educação a Distância. In: TALLER INTERNACIONAL DE SOFTWARE EDUCATIVO (TISE), 12, 2007, Santiago de Chile, **Memórias...** Santiago de Chile: LOM Ediciones S.A., 2007. p. 230-249.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BEHAR, Patricia. ROODA Exata – Editor de Fórmulas Científicas Integrado a uma Plataforma de Educação a Distância. In: **TICS PARA EL APRENDIZAJE DE LA INGENERÍA** – TICAI 2007, Madrid: IEEE, Sociedad de Educación: Capítulos Español, Portugués y Colombiano, 2007a. cap. 21, p. 143-150.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BEHAR, Patricia. A Comunicação Científica On-line Através do ROODA Exata. In: Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância – ESUD, 5, 2008, Gramado, **Anais...** São Paulo: ABED, 2008.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BEHAR, Patricia. A Comunicação Matemática On-line por meio do ROODA Exata. In: Behar, Patricia. **Modelos Pedagógicos em Educação a Distância**. Porto Alegre: Artmed, 2009. cap. 7, p. 179-203.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BEHAR, Patricia. O Editor Científico ROODA Exata. In: Workshop sobre Informática na Escola (WIE), 15, 2009a, Bento Gonçalves.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BEHAR, Patricia. Mathematics Learning in Virtual Learning Environments. In: Interactive Computer Aided Learning (ICL), 2009b, Villach, Austria.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BEHAR, Patricia. Aprendizagem de Matemática em Ambientes Virtuais: o ROODA Exata como Possibilidade. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 16-27, jul. 2009.

PALLOFF, Rena M.; PRATT, Keith. **O Aluno Virtual – Um guia para trabalhar com estudantes *on-line***. Porto Alegre: Artmed, 2004.

PIAGET, Jean. **Psicologia da Inteligência**. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1958.

PIAGET, Jean. **A Tomada de Consciência**. São Paulo: Melhoramentos, Editora da Universidade de São Paulo, 1977.

PIAGET, Jean. **Fazer e Compreender**. São Paulo: Melhoramentos, Editora da Universidade de São Paulo, 1978.

PIAGET, Jean. **Recherches sur la généralisation**. Paris: Presses Universitaries de France, 1978a.

PIAGET, Jean. **A Epistemologia Genética**. São Paulo: Abril Cultural, Coleção Os Pensadores, 1983.

PIAGET, Jean. **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PREECE, J.; ROGERS, Y.; SHARP, H. **Design de Interação: além da interação homem-computador**. Porto Alegre: Bookman, 2005.

RADFAHRER, L. **Design / Web / Design**. São Paulo: Market Press, 2001.

SANTOS, Reginaldo. **Introdução ao Latex**. 2005. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi/topicos/intlat.html>. Acesso em: 1 ago. 2007.

SAUER, Laurete Zanol. **O Diálogo Matemático e o Processo de Tomada de Consciência da Aprendizagem em Ambientes Telemáticos**. Porto Alegre, Tese de Doutorado, UFRGS, 2004.

SMITH, G.; FERGUSON, D. **Student attrition in mathematics e-leaning**. 2005. Disponível em: <http://www.ascilite.org.au/ajet/ajet 21/smith.html>. Acesso em: 31 jul. 2007.

SMITH, G.; GRACKIN, J.; FERGUSON, D.; IZUBUCHI, R. **Math and Distance Learning threaded discussions**. 2006. Disponível em: <http://www.link-systems.com/ext_PNqUdT9CiqIAADkeBh4/GlennSmithEDMedia42902.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2006.

SOUSA, P.M.L. **O Ensino da Matemática: Contributos Pedagógicos de Piaget e Vygotsky**. 2005. Disponível em: <http://www. psicologia.com.pt/artigos/textos/A0258.pdf >. Acesso em: 17 fev. 2009.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

TALL, David. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, David (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Norwell: Kluver Academic Publishers, 1991, p. 3 – 21.

THOMAS, George. **Cálculo**. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

APÊNDICE A – PESQUISA REALIZADA

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Pós-Graduação em Informática na Educação

Questionário de Pesquisa - ROODAExata

Márcia Rodrigues Notare

Nome:____________________________ _______________________________

Instituição:____________________________ ___________________________

1. Qual sua área de atuação?
( ) Matemática ( ) Física ( ) Química ( ) Outra

2. Você trabalha ou já trabalhou com ambientes virtuais de aprendizagem?
( ) Sim ( ) Não

3. Você considera importante a utilização destes ambientes como apoio a disciplinas presenciais?
( ) Sim ( ) Não
Por que?

4. Você considera importante as interações (virtuais ou não) no processo de aprendizagem?
( ) Sim ( ) Não

5. Se você atua na área das ciências exatas, sente necessidade de uma ferramenta que permita a edição e publicação de fórmulas e símbolos científicos on-line?
( ) Sim ( ) Não

6. Você conhece uma ferramenta que permita esta interação on-line? Qual?

7. Em quais funcionalidades de um ambiente virtual você sente esta necessidade?
( ) Fórum de discussão
( ) Bate-papo
( ) Correio Eletrônico
( ) Mensagens Instantâneas
( ) Diário de bordo
( ) Editor de textos colaborativo/coletivo

8. Esta pesquisa tem como objetivo desenvolver um Editor de Fórmulas para Web, que contemple símbolos e fórmulas da área de Matemática, Física e Química. Para que o editor vá ao encontro das reais necessidades de cada um, gostaríamos que você listasse a seguir os símbolos que você julga importante para o editor.

APÊNDICE B – ATIVIDADES PROPOSTAS NO ROODA

Atividade I: Cálculo de Limites

10/09/2008 10:57:54
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Turma,

Temos a seguir alguns limites de funções racionais para serem calculados. Procurem argumentar e justificar todo o raciocínio de vocês, e não apenas resolver o problema mecanicamente. Confiram e comentem as soluções dos colegas, não apenas dizendo \"concordo\", mas acrescentando informações ou questionando o desenvolvimento da questão.

Bom trabalho a todos!

Responder

10/09/2008 10:59:31
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

Responder

10/09/2008 11:00:22
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

Responder

10/09/2008 11:00:58
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x}$$

Responder

10/09/2008 11:01:48
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1}$$

Responder

10/09/2008 11:02:55
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 2x - 3}$$

Responder

10/09/2008 11:04:36
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}$$

Responder

10/09/2008 11:05:34
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3}$$

Responder

10/09/2008 11:06:41
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Responder

10/09/2008 11:07:17
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x}{x}$$

Responder

10/09/2008 11:08:03
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{2x - 1}{x - 5}$$

Responder

10/09/2008 11:09:02
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x + 4}{x^2 + x}$$

Responder

10/09/2008 11:09:40
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4}{1 - x}$$

Responder

10/09/2008 11:10:23
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+4}{x^2-4x+4}$$

Responder

10/09/2008 11:10:55
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x}{x+1}$$

Responder

10/09/2008 11:11:43
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+4}{2x+1}$$

Responder

10/09/2008 11:12:48
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^7+3x^6-2x}{4+2x^3}$$

Responder

10/09/2008 11:13:59
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{8x^9-7x^8+x^4}{5-3x+2x^9}$$

Responder

10/09/2008 11:14:53
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2+4x+3}{2x^3-3x+1}$$

Responder

10/09/2008 11:16:06
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4-2x^3+5x^2-x}{3x^4+x^3+1}$$

Responder

Atividade II: Taxas de Variação e Derivada

11/10/2008 11:28:08 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Olá Turma! Segue mais uma seqüência de atividades. Todos devem resolver pelo menos um problema e comentar a solução de um colega. Lembrem-se: sempre justificando e argumentado seu raciocínio. Bom trabalho a todos!	Responder
11/10/2008 11:29:24 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Se uma partícula move-se com velocidade constante, o que pode ser dito sobre o gráfico da posição X tempo?	Responder
11/10/2008 11:29:40 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Se uma partícula está em repouso, o que pode ser dito sobre o gráfico da posição X tempo?	Responder
11/10/2008 11:31:52 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Se o gráfico da posição X tempo de uma partícula é representado por uma reta crescente, o que pode ser dito sobre a velocidade desta partícula?	Responder
11/10/2008 11:32:06 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Se o gráfico da posição X tempo de uma partícula é representado por uma reta horizontal, o que pode ser dito sobre a velocidade desta partícula?	Responder
11/10/2008 11:33:46 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Uma pedra é deixada cair de uma altura de 576 m em direção à Terra. Em t segundos, a distância percorrida pela pedra é $s = 16\,t^2$. Quantos segundos após o início da queda a pedra atinde o solo?	Responder
11/10/2008 11:34:31 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Uma pedra é deixada cair de uma altura de 576 m em direção à Terra. Em t segundos, a distância percorrida pela pedra é $s = 16\,t^2$. Qual a velocidade instantânea da pedra quando ela atinde o solo?	Responder
11/10/2008 11:36:19 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Durante os 40 segundos iniciais de vôo, um foguete é disparado diretamente para cima, de tal forma que a altura atingida em t segundos é de $s = 5\,t^3$ m. Qual é a altura atingida pelo foguete em 40 segundos?	Responder

11/10/2008 11:37:17 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Durante os 40 segundos iniciais de vôo, um foguete é disparado diretamente para cima, de tal forma que a altura atingida em t segundos é de $s = 5t^3$ m. Qual é a velocidade instantânea ao fim dos 40 segundos?	Responder
11/10/2008 11:39:21 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Uma partícula move-se sobre uma reta de tal forma que, após t horas, ela está a $s = 3t^2 + t$ quilômetros de sua posição inicial. Qual é a velocidade instantânea após 1 hora de percurso?	Responder
11/10/2008 11:39:38 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Uma partícula move-se sobre uma reta de tal forma que, após t horas, ela está a $s = 3t^2 + t$ quilômetros de sua posição inicial. Qual é a velocidade instantânea após 3 horas de percurso?	Responder
11/10/2008 11:39:49 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Uma partícula move-se sobre uma reta de tal forma que, após t horas, ela está a $s = 3t^2 + t$ quilômetros de sua posição inicial. Qual é a velocidade instantânea após t horas de percurso?	Responder
11/10/2008 11:46:20 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo é de C = f(x) reais. Ou seja, a medida em que varia a profundidade do poço de petróleo, varia também o custo da perfuração. Você saberia explicar qual o significado de f '(x) neste problema?	Responder
11/10/2008 11:46:55 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo é de C = f(x) reais. Ou seja, a medida em que varia a profundidade do poço de petróleo, varia também o custo da perfuração. Você saberia dizer quais as unidades de medida de f '(x) neste problema?	Responder
11/10/2008 11:48:08 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo é de C = f(x) reais. Ou seja, a medida em que varia a profundidade do poço de petróleo, varia também o custo da perfuração. Podemos afirmar, neste caso, que o sinla da derivada f '(x) é positivo ou negativo?	Responder
11/10/2008 11:53:23 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Escreva, com suas palavras, qual o significado de uma função ser diferenciável.	Responder
11/10/2008 11:53:33 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Escreva, com suas palavras, qual o significado de uma função ser não-diferenciável.	Responder

11/10/2008 11:54:46
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Mostre que a função $y = \sqrt{x}$ é não-diferenciável em x = 0.

Responder

11/10/2008 11:55:10
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Mostre que a função $y = \dfrac{1}{x}$ é não-diferenciável em x = 0.

Responder

11/10/2008 12:00:20
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Sabendo que a equação da reta tangente à curva y = f(x) em x = 3 é y = 6x - 9, qual a derivada de y = f(x) em x = 3? Ou seja, qual o valor de f '(3)?

Responder

11/10/2008 12:00:45
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Sabendo que a equação da reta tangente à curva y = f(x) em x = 2 é y = -4x, qual a derivada de y = f(x) em x = 2? Ou seja, qual o valor de f '(2)?

Responder

11/10/2008 12:01:35
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Qual a derivada de $f(x) = 4x^2$?

Responder

11/10/2008 12:02:19
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Qual a derivada de $f(x) = x^2 - 2$?

Responder

11/10/2008 12:03:05
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Sabendo que $f(x) = x^2 - 3x + 1$, encontre f '(1).

Responder

Atividade III: Regras de Diferenciação

16/10/2008 15:18:24
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Turma,

Seguem algumas derivadas para calcular através das regras de diferenciação. Cada um deve resolver pelo menos um exercício e comentar a solução de um colega.

Bom trabalho a todos!

Responder

16/10/2008 15:19:44
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = (2x^5 - x^3)(3x^2 + 4)$$

Responder

16/10/2008 15:21:03
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^6} - 2$$

Responder

16/10/2008 15:21:55
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 6}{2x^4 - 6x + 1}$$

Responder

16/10/2008 15:22:49
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{2 - \sqrt{x^5}}$$

Responder

16/10/2008 15:24:36
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = (\sqrt{x^3} - 4x)(2x + \frac{1}{x})$$

Responder

16/10/2008 15:25:40
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = (2x - 1)\left(\frac{3x^2 + x}{-x - 4}\right)$$

Responder

16/10/2008 15:27:09
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}\,(x^2 - x + 1)}{x^3 - 3x}$$

Responder

16/10/2008 15:28:07
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{3}{x} + x\right)$$

Responder

16/10/2008 15:28:51
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,(x^3 + 4x + 4)}{2x + 1}$$

Responder

16/10/2008 15:29:57
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \left(\frac{3x^2 + x - 2}{5x - 1}\right)(6x^2 + 4x)$$

Responder

16/10/2008 15:31:17
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Encontre a derivada de

$$f(x) = \frac{x^5 - 3x^4 + 2}{\left(-x^2 + 5x\right)(2x + 7)}$$

Responder

16/10/2008 15:32:21 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Encontre $f'(1)$ se $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 - 4$	Responder
16/10/2008 15:35:12 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Encontre $f'(-2)$ se $f(x) = \frac{1}{(8x+5)(x^3 - 2x - 2)}$	Responder

Atividade IV: Derivada de Funções Trigonométricas e Regra da Cadeia

24/10/2008 14:38:13
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Turma,

Esta semana temos atividades sobre a derivada das funções trigonométricas e regra da cadeia. Resolvam pelo menos uma derivada e comentem as soluções dos colegas.

Bom trabalho a todos!

Responder

24/10/2008 14:38:59
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \frac{sen(x)}{sec(x)}$

Responder

24/10/2008 14:39:35
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \frac{sen(x) \cdot cos(x)}{tg(x)}$

Responder

24/10/2008 14:40:07
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = tg(sen(x))$

Responder

24/10/2008 14:41:05
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $\frac{1}{\left(x^2 + 3x + 2\right)^{15}}$

Responder

24/10/2008 14:41:57
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{3x^4 + x^3}$

Responder

24/10/2008 14:42:33
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = 2\cos^4(x)$

Responder

24/10/2008 14:43:07
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = sen^2(x) + x + 1$

Responder

24/10/2008 14:43:44
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \text{cossec}\left(5x^2 + 3x\right)$

Responder

24/10/2008 14:44:20
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{\text{sen}^2(x)}{\cos(x)}$

Responder

24/10/2008 14:45:08
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \text{tg}^3(x) \cdot \left(2x^2 + 4x\right)$

Responder

24/10/2008 14:45:50
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \left(\dfrac{2x+4}{x^2+1}\right)^{10}$

Responder

24/10/2008 14:46:35
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{1}{\text{cotg}^3(x)}$

Responder

24/10/2008 14:47:01
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \sec\left(\text{tg}(x)\right)$

Responder

24/10/2008 14:47:33
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = -3\,\text{tg}^2(x)$

Responder

24/10/2008 14:48:32
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \left(x^5 - 5x\right)^7 \cdot \left(2x^2 - 4\right)^8$

Responder

24/10/2008 14:49:45
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x\,\text{sen}(x)}$

Responder

Atividade V: Crescimento, Decrescimento, Concavidade e Extremos Relativos

07/11/2008 11:44:38
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Oi Turma,

Seguem as atividades desta semana! Cada um deve resolver e argumentar um problema, e comentar a solução de outro colega.

Bom trabalho a todos!

Responder

07/11/2008 11:46:07
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^3 - x^2 - x$ é crescente e decrescente.

Esta função possui extremos relativos? Quais?

Responder

07/11/2008 11:46:55
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^3 - x^2 - x$ é côncava para cima e côncava para baixo. Possui pontos de inflexão?

Responder

07/11/2008 11:47:55
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

A função $y = \dfrac{4}{x+1}$ possui um extremo relativo em x = -1? Justifique sua resposta.

Responder

07/11/2008 11:49:14
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Determine os intervalos em que a função $y = \dfrac{4}{x+1}$ é côncava para cima e côncava para baixo.

Esta função possui ponto de inflexão? Justifique sua resposta.

Responder

07/11/2008 11:50:31
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Determine os intervalos em que a função $y = 4x^4 + x^3$ é crescente e decrescente.

Esta função possui extremos relativos? Justifique sua resposta.

Responder

07/11/2008 11:51:01
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Determine os intervalos em que a função $y = 4x^4 + x^3$ é côncava para cima e côncava para baixo.
Esta função possui pontos de inflexão? Justifique sua resposta.

Responder

07/11/2008 11:52:26
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Quais os extremos relativos da função $f(x) = x^3 + x^2 + 2$? Justifique e argumente seu raciocínio.

Responder

07/11/2008 11:53:33
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Quais os intervalos emque a função $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ é côncava para cima e côncava para baixo? Ela possui pontos de inflexão?

Responder

07/11/2008 11:54:47
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

A função $y = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$ possui extremos relativos em x = 3 e x = -3? Justifique e argumente seu raciocínio.

Responder

07/11/2008 11:55:51
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Determine os intervalos em que a função $y = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$ é côncava para cima e côncava para baixo.

Ela possui pontos de inflexão? Justifique e argumente seu raciocínio.

Responder

07/11/2008 11:57:15
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Quais os extremos relativos de $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$. Justifique e argumente seu raciocínio.

Responder

07/11/2008 11:58:09
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Quais os intervalos em que $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$ é côncava para cima e côncava para baixo. Ela possui pontos de inflexão?

Responder

Atividade VI: Problemas de Otimização	
19/11/2008 11:26:54 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Nesta atividade, cada grupo deverá resolver um problema de otimização. Para isso, - fazer uma análise e descrição qualitativa do problema, estabelecendo a relação entre as variáveis e analisando as diferentes situações possíveis. Faça estimativas, procure compreender o problema e a função que o modela, explore a situação! - resolver analiticamente o problema, de forma clara e explicativa, para que outro colega possa ler e compreender em detalhes sua explicação.	Responder
19/11/2008 11:27:14 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Problema I Uma folha de papelão quadrada com 12 por 12 cm é usada para fazer uma caixa aberta, retirando quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é o tamanho dos quadrados que resulta na caixa com o maior volume possível?	Responder
19/11/2008 11:27:36 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Problema II Uma caixa aberta deve ser feita com uma folha de papelão de 3 por 8 cm, cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Ache o volume máximo que uma caixa dessas pode ter.	Responder
19/11/2008 11:27:59 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Problema III Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 25 cm3. Ache as dimensões do recipiente de menor custo.	Responder
19/11/2008 11:28:16 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Problema IV Uma lata cilíndrica aberta no topo deve conter 500 cm3 de líquido. Ache a altura e o raio que minimizam a quantidade de material necessário para confeccionar a lata.	Responder
19/11/2008 11:28:33 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Problema V Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2000 cm3. Ache as dimensões do recipiente de menor custo.	Responder
19/11/2008 11:28:50 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Problema VI Um fazendeiro tem 2400 km de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?	Responder
19/11/2008 11:29:07 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Problema VII Uma área retangular de 288 m2 deve ser cercada. Em dois lados opostos será usada uma cerca que custa R$ 1,00 o metro, enquanto que os dois lados restantes recebem uma cerca que custa R$ 2,00 o metro. Quais são as dimensões do terreno com o menor custo?	Responder

19/11/2008 11:29:27
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Problema VIII

A janela de uma igreja consiste de um retângulo com semicírculo em cima e deve ter um perímetro de 200m. Ache o raio do semicírculo para que a área da janela seja máxima.

Responder

19/11/2008 11:29:46
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Problema IX

Um campo deve ter o formato de um triângulo retângulo, com a hipotenusa ao longo de um rio reto e uma cerca limitando os dois catetos do campo. Encontre as dimensões do campo de maior área que pode ser cercado com 1000 m de cerca.

Responder

19/11/2008 11:30:02
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Problema X

As bordas de cima e de baixo de um pôster têm 6 cm, e as bordas laterais medem 4 cm. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384 cm2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

Responder

Atividade VII: Problemas de Taxas Relacionadas

27/11/2008 14:03:44 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE Este espaço é para colocar as soluções dos problemas da lista, de forma clara e explicadando o raciocínio.	Responder
27/11/2008 14:04:26 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 1. Uma pedra jogada em um lago emite ondas circulares, cujo raio cresce a uma taxa constante de 3 m/s. Com que rapidez estará variando a área englobada pela onda crescente ao final de 10 segundos?	Responder
27/11/2008 14:05:28 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 2. Pela ruptura de um tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo, cuja área cresce a uma taxa constante de 6 km2/h. Com que rapidez estará variando o raio da mancha crescente quando a área for de 9 km2?	Responder
27/11/2008 14:05:42 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 3. Um balão esférico é inflado de tal forma que o volume cresce a taxa de 3 m3/min. Com que rapidez o diâmetro do balão estará crescendo quando o raio dor de 1 m?	Responder
27/11/2008 14:05:59 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 4. Uma escada de 17 m está apoiada em uma parede. Se a base da escada for puxada ao longo do chão, afastando-se da parede a uma taxa constante de 5 m/s, com que rapidez o topo da escada estará movendo-se para baixo na parede quando ela estiver 8 m acima do solo?	Responder
27/11/2008 14:06:16 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 5. Um foguete subindo verticalmente é acompanhado por uma estação de radar no solo a 5 km da rampa de lançamento. Com que rapidez o foguete estará subindo quando a sua altura for 4 km e a sua distância da estação do radar estiver crescendo a uma taxa de 2000 km/h?	Responder
27/11/2008 14:06:30 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 6. Uma câmera foi montada em um ponto a 3000 m da base da rampa de lançamento de um foguete. O foguete sobre verticalmente e a câmera tira uma serie de fotos dele. Como o foguete está subindo, o ângulo de elevação da câmera terá que variar segundo uma certa taxa para manter o foguete à vista. Com que taxa estará variando a distância entre a câmera e o foguete, quando ele estiver a 4000 m de altura e subindo verticalmente a 880m/s?	Responder
27/11/2008 14:06:44 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 7. Um tanque cônico com o vértice para baixo e com água tem um raio de 10 m no topo e uma altura de 24 m. Se a água fluir dentro do tanque a uma taxa de 20 m3/min, com que velocidade a profundidade da água estará crescendo quando ela tiver 16 m de profundidade?	Responder
27/11/2008 14:06:58 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 8. Grãos caem de uma calha de escoamento a uma taxa de 8 m3/min, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre o dobro do seu raio. Com que rapidez a altura da pilha está crescendo no momento em que a altura é de 6 m.	Responder
27/11/2008 14:07:14 MÁRCIA RODRIGUES NOTARE 9. Um homem, com 6 pés de altura, está caminhando a uma taxa de 3 pés por segundo em direção a um poste de iluminação, com 18 pés de altura. Com que taxa está variando o comprimento da sombra?	Responder

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO

Termo de Consentimento

O Núcleo de Tecnologias Digitais Aplicada à Educação (NUTED) coordenado pela Prof[a]. Dr[a]. Patricia Alejandra Behar está realizando uma pesquisa sobre as possibilidades de comunicação e aprendizagem de matemática em ambientes virtuais de aprendizagem.

O editor científico ROODA Exata foi desenvolvido com o objetivo de possibilitar a comunicação matemática *on-line*. Assim, para validar sua utilização, bem como analisar a comunicação matemática *on-line* e as possibilidades de construção do conhecimento matemático por meio da utilização de ambientes virtuais de aprendizagem, o ROODA será sugerido como um meio de apoio extraclasse na disciplina de Cálculo I. Dessa forma, a participação e interação dos alunos ao longo das atividades propostas será a fonte de dados para a análise.

O sigilo dos nomes dos alunos será preservado, com a substituição dos mesmos por siglas.

Desde já agradecemos sua colaboração.

Prof[a]. Dr[a]. Patricia Alejandra Behar – Coordenadora do NUTED

Prof[a]. Márcia Rodrigues Notare – Pesquisadora

Eu, ____, autorizo a análise de minhas participações ao longo das atividades propostas no ambiente virtual de aprendizagem ROODA na disciplina de Cálculo I.

Concordo Discordo