Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

O Problema de Dirichlet para a Equação das Superfícies de Curvatura Média Constante em Domínios Planares não Necessariamente Convexos.

Tese de Doutorado

por

LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER

Porto Alegre, agosto de 2009

Tese submetida por Lisandra de Oliveira Sauer[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador: Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Eric Toubiana (Université Paris 7)
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)
Prof. Dr. Marcos Dajczer (IMPA)

Data da defesa: 06 de agosto de 2009.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes, no período de outubro de 2006 a janeiro de 2009.

Para o Giovanni.

Somos quem podemos ser...
Sonhos que podemos ter...
-Humberto Gessinger-

AGRADECIMENTOS

Sem dúvida esta é uma parte muito difícil de escrever, por que não existem palavras suficientes para expressar minha gratidão a tantas pessoas que tornaram este trabalho possível.

Agradeço a Deus e a virgem Maria pela luz que me deram em todos estes anos.

Ao professor Jaime que, pacientemente, me orientou tanto no mestrado quanto no doutorado e pelo exemplo de profissional e de pessoa a ser seguido.

Aos meus pais, Alda e Miguel, pelos ensinamentos de vida, principalmente: honestidade e coragem. A minha avó Ana e ao avô Otacílio (agora em memória), por terem me ajudado sempre. A minha irmã Fernanda, aos meus cunhados Rodrigo, Edison e Adilson, aos meus sogros Marilene e Elço, a minha concunhada Kátia, pelos momentos alegres. Agradeço também, ao João Pedro (Pedrinho), a Lóren e a Larissa por me lembrar, freqüentemente, do quanto é bom ser criança.

A tia Lurdez, as minhas primas e primos por terem me acolhido freqüentemente e de forma tão agradável em sua casa. Agradeço também, a minha dinda Jurema e ao restante de meus familiares.

Aos amigos Flávia, Alexandre, Marilaine, Alvino, Rosvita, Mara e Nara pelo apoio, torcida e por sua amizade.

Aos colegas de pós- graduação pela convivência agradável, em especial a Carmen e ao Edson. E também a Cinthya, por ter se tornado minha amiga e pelas conversas e estudos.

Agradeço a todos os professores da pós-graduação que contribuiram para a minha formação.

A Rosane, secretária da pós, pela atenção e conversas agradáveis regadas a chimarrão.

Aos colegas do departamento de Matemática e Estatística da UFPEL pelo apoio recebido, em particular, a Márcia Simch e a Daniela Buske. E de forma especial, ao Maurício de Paula pelo suporte de informática essencial para fazer "a figura" e ao Elismar por ter assistido seminários sobre a tese.

Ao Giovanni, por ser meu amor e companheiro, pelo incentivo, apoio, paciência, carinho e por me dar força e coragem sempre. Sem o teu apoio, esse trabalho teria virado apenas um sonho.

A todos acima e aos demais que torceram por mim, meu muito obrigado e um abraço que lhes chegue ao coração. Cumprimos esta etapa.

Resumo

Neste trabalho provamos três teoremas sobre a existência e unicidade de soluções para o Problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante H sobre domínios Ω limitados do plano não necessariamente convexos com hipóteses relacionando a condição do círculo exterior de Ω, a norma C^2 do dado do bordo e H.

Abstract

In this work we prove three theorems on the existence and uniqueness of solutions to the Dirichlet Problem for the constant mean curvature H surface equation on a bounded not necessarily convex domain Ω of the plane from hypothesis relating the exterior circle condition of Ω, the C^2 norm of a the bounded date and H.

Índice

1 Introdução

Um dos problemas clássicos da teoria de Equações Diferenciais Parciais Elípticas, que tem sua origem na Geometria Diferencial, é o problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante (CMC) em $\mathbb{R}^3$. Lembramos que esse problema, no caso de dados suaves no bordo, consiste em determinar, dados $H \geq 0$, um domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de classe $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, a existência e a unicidade de solução do problema

$$\begin{cases} Q_H(u) = \left(1 + |Du|^2\right)\Delta u - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} D_i u D_j u D_{ij} u + 2H\left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \end{cases} \tag{1}$$

onde D é o gradiente em $\mathbb{R}^2$. Se u é uma solução de (1) então o gráfico de u em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície de CMC H com relação ao vetor normal η tal que $\langle \eta, (0,0,1) \rangle \leq 0$.

O Problema de Dirichlet para a Equação das Superfícies de curvatura média constante em domínios abertos e limitado vem sendo estudado por muitos matemáticos ao longo de décadas. No caso mínimo ($H = 0$), gostaríamos de destacar o trabalho de R. Finn [F] que, em 1954, mostrou que a convexidade do domínio é uma condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema (1) para qualquer dado no bordo. Um contra-exemplo simples e interessante para a necessidade da hipótese da convexidade neste teorema de Finn é o conhecido tetraedo de Radó [RD], uma superfície mínima compacta que tem como bordo parte das arestas de um tetraedro.

Quando tratamos do Problema de Dirichlet para a equação das superfícies de CMC H, diferentemente do que ocorre no caso das mínimas, a convexidade do domínio não implica na existência de solução para o problema (1), nem mesmo para o caso $\varphi = 0$. Em 1968, J. Serrin [S] obteve uma condição, muito conhecida atualmente, para a solução do problema para qualquer dado no bordo de um domínio convexo, condição esta envolvendo a curvatura do bordo de Ω, H e a dimensão do espaço (no caso do espaço Euclidiano de dimensão 3, que é o que trataremos nesta tese, a condição é de que a curvatura k do bordo seja maior ou igual a $2H$). Contudo, é bastante conhecido que em muitos casos existe solução para certos valores dados no bordo mesmo que a condição de Serrin não seja satisfeita, inclusive em domínios não convexos. Exemplos explícitos podem ser construídos usando partes de superfícies de Delaunay; mas também pode-se mostrar a existência de soluções mediante outras condições: por exemplo, se $k \geq H$ então existe solução para $\varphi = 0$ (veja [R] tanto para os exemplos de Delaunay quanto para este último resultado).

Surge então o seguinte problema natural: determinar condições relacionando o domínio, o dado no bordo e a curvatura média que garantam a existência de soluções para o problema (1) quando o domínio não satisfaz a condição de Serrin.

Notamos que uma tal condição tem necessariamente que existir pois sabe-se que se a condição de Serrin não é satisfeita, então existem dados no bordo para os quais o problema (1) não tem solução.

Em nosso trabalho obtemos condições de existência envolvendo a norma C^2 do dado no bordo, H e o raio exterior de Ω.

Lembramos que Ω satisfaz a condição do círculo exterior de raio r se, para todo $p \in \partial\Omega$ existe um círculo C_p de raio r tangente a $\partial\Omega$ em p e contido em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$.

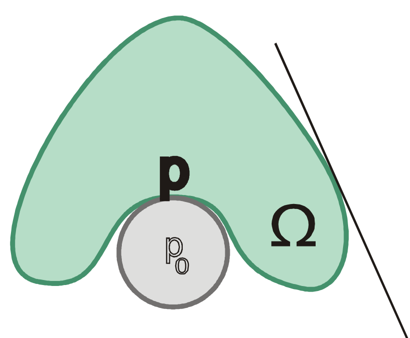

Figura 1: Condição do Círculo exterior de raio r

Para enunciarmos os resultados principais desta tese precisamos introduzir alguma notação.

Seja Ω um domínio aberto, limitado, de classe $C^{2,\alpha}$, satisfazendo a condição do círculo exterior de raio r. Dada $\varphi \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, seja

$$\begin{aligned}
&M = \max_{x\in\overline{\Omega}} \varphi(x) - \min_{x\in\overline{\Omega}} \varphi(x) \\
&B = \sup_{x\in\Omega} |D\varphi(x)| \\
&A = \sup_{x\in\Omega} \left|D^2\varphi(x)\right| \\
&C = \max\{A, B\}
\end{aligned} \tag{2}$$

onde

$$\left|D^2\varphi\right| = |D_{11}\varphi| + |D_{22}\varphi| + |D_{12}\varphi| .$$

Os principais resultados da tese são:

Teorema 1.1 *Se*

$$r \geq \max\left\{2\left(e^{6M\left(3C^3+3C^2+4C+1\right)} - 1\right), 1\right\} \tag{3}$$

então o problema (1) possui uma única solução quando $H = 0$.

Teorema 1.2 *Seja $H \geq 0$ e seja Ω um domínio limitado satisfazendo a condição do círculo exterior de raio r. Seja R_Ω o raio do menor disco contendo Ω. Suponha que*

$$H \leq \frac{1}{R_\Omega} \tag{4}$$

e que

$$He^{\phi\left(M+h_{\Omega,H}\right)} \leq 1, \tag{5}$$

onde

$$\begin{aligned}
\phi \;=\;& 64\left(C^3+C^2+C+1\right)H^3 + 16\left(8C^3+9C^2+10C+7\right)H^2 \\
&+12\left(7C^3+8C^2+10C+5\right)H + 6\left(3C^3+3C^2+4C+1\right).
\end{aligned}$$

e

$$h_{\Omega,H} = \frac{R_\Omega^2 H}{1+\sqrt{1-\left(R_\Omega H\right)^2}}.$$

Suponha ademais que

$$r \geq \max\left\{2\left(e^{\phi\left(M+h_{\Omega,H}\right)} - 1\right), 1\right\}. \tag{6}$$

Então o problema de Dirichlet (1) admite uma única solução.

Observamos que como a propriedade de ser mínima é invariante por homotetias, nós podemos aplicar o Teorema 1.1 para tratar o caso $0 < r < 1$ depois de re-escalonar o problema pelo fator $1/r$.

Se Ω é convexo então podemos tomar $r = \infty$ de modo que o Teorema 1.1 recupera o resultado clássico de existência de R. Finn (veja [F]) para dados suaves no bordo.

Como explicamos após sua prova, o Teorema 1.2 implica no Teorema 1.1. Enunciamos o Teorema 1.1 separadamente pois ele tem interesse independente.

Obtemos também um resultado de existência de soluções do problema (1) com hipóteses relacionando o diâmetro do domínio, a norma C^2 de φ, o raio exterior de Ω e H (Teorema 2.1).

Observamos que o Teorema 1.1 é similar a um resultado que demonstramos anteriormente, a ser publicado na Matemática Contemporânea (veja [RS]). Enunciamos e demonstramos este resultado ao final da tese (Teorema 2.2).

2 Prova dos teoremas

As notações e condições mencionadas na introdução relativas a Ω e φ serão mantidas em toda a tese.

Para demonstrar os resultados da tese fazemos uso do conhecido método da continuidade de EDP ([GT]).

O ingrediente fundamental para a aplicabilidade do método é o de barreira local. Embora esta seja uma tradicional noção de EDP, as definições dadas em diferentes textos podem diferir em algumas condições. Para deixar claro as condições que estamos assumindo enunciamos, a seguir, esta definição em detalhes.

Seja $p \in \partial\Omega$. Dizemos que o problema (1) admite barreiras locais inferior e superior em p se existe uma vizinhança $\mathcal{N}_p$ de p em $\overline{\Omega}$ e funções $w^-, w^+ \in C^2(\overline{\mathcal{N}_p})$ tais que

$$w^-(p) = \varphi(p) = w^+(p),$$

$$Q_H\left[w^+\right] \leq 0 \text{ e } Q_H\left[w^-\right] \geq 0 \text{ em } \mathcal{N}_p$$

e, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução de (1), então

$$w^-(x) \leq u(x) \leq w^+(x), \forall x \in \partial\left(\mathcal{N}_p\right).$$

Prova do Teorema 1.1. Suponha que $\min_{\overline{\Omega}} \varphi = 0$. Escolha $p \in \partial\Omega$. Seja $p_0 = (p_1, p_2)$ o centro do círculo tangente a $\partial\Omega$ em p, com raio r e contido em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$, e seja

$$d(x) = d(x, \partial B_r) = |x - p_0| - r.$$

Observe que $d(p) = 0$,

$$\nabla d = Dd = \left(\frac{\partial d}{\partial x_1}, \frac{\partial d}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{x_1 - p_1}{|x - p_0|}, \frac{x_2 - p_2}{|x - p_0|}\right) \Rightarrow |Dd| = 1.$$

e que $\Delta d(x) = \dfrac{1}{|x - p_0|}$.

Considere $x_0 \in \Omega$ qualquer mas fixo. Tomemos uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $e_2 = Dd(x_0)$ e e_1 é unitário e ortogonal a e_2. Sejam

$$D_i = \frac{\partial}{\partial e_i}, \quad D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial e_i \partial e_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Note então que, em x_0:

$$\begin{aligned} D_{11} d(x_0) &= \frac{1}{|x_0 - p_0|} = \Delta d(x_0) \\ D_{ij} d(x_0) &= 0 \text{ outros casos.} \end{aligned} \tag{7}$$

Definindo

$$w(x) = \varphi(x) + \psi(d(x)), \quad x \in \Omega,$$

onde

$$\psi(s) = \delta \ln\left(bs + 1\right), \quad s \geq 0, \tag{8}$$

iremos provar que w é uma barreira superior local em p para escolhas adequadas das constantes δ e b.

Afim de estabelecermos uma estimativa para $Q_0\left[w\right]$, observe que

$$\begin{aligned} &\left(1 + |Dw|^2\right) \triangle w - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} w \\ = &\sum_{i,j=1}^{2} \left[\left(1 + |Dw|^2\right) \delta_{ij} - D_i w D_j w\right] \left(\psi'' D_i d D_j d + \psi'(d) D_{ij} d + D_{ij} \varphi\right) \end{aligned}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{2}\left[\left(1+|Dw|^2\right)\delta_{ij}-D_iwD_jw\right]\left(\psi'' D_idD_jd+\psi'(d)D_{ij}d+D_{ij}\varphi\right)\\
=\quad&\left[\left(1+|Dw|^2\right)-\left(D_1w\right)^2\right]\left(\psi''\left(D_1d\right)^2+\psi'(d)D_{11}d+D_{11}\varphi\right)\\
&-D_1wD_2w\left(\psi'' D_1dD_2d+\psi'(d)D_{12}d+D_{12}\varphi\right)\\
&-D_2wD_1w\left(\psi'' D_2dD_1d+\psi'(d)D_{21}d+D_{21}\varphi\right)\\
&+\left[\left(1+|Dw|^2\right)-\left(D_2w\right)^2\right]\left(\psi''\left(D_2d\right)^2+\psi'(d)D_{22}d+D_{22}\varphi\right)\\
=\quad&\left(1+|Dw|^2\right)\left(D_{11}\varphi+D_{22}\varphi\right)-\left(D_1w\right)^2D_{11}\varphi-2D_1wD_2wD_{12}\varphi\\
&-\left(D_2w\right)^2D_{22}\varphi+\left(1+|Dw|^2\right)\left(\psi''\left(D_1d\right)^2+\psi'(d)D_{11}d+\psi''\left(D_2d\right)^2+\psi'(d)D_{22}d\right)\\
&-\left(D_1w\right)^2\left(\psi''\left(D_1d\right)^2+\psi'(d)D_{11}d\right)-2D_1wD_2w\left(\psi'' D_1dD_2d+\psi'(d)D_{12}d\right)\\
&-\left(D_2w\right)^2\left(\psi''\left(D_2d\right)^2+\psi'(d)D_{22}d\right).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\left(1+|Dw|^2\right)\triangle w-\sum_{i,j=1}^{2}D_iwD_jwD_{ij}w\\
=\quad&\left(1+|Dw|^2\right)\Delta\left(\varphi+\psi(d)\right)-\left[\left(D_1w\right)^2D_{11}w+2D_1wD_2wD_{12}w+\left(D_2w\right)^2D_{22}w\right]\\
=\quad&\left(1+|Dw|^2\right)\left(D_{11}\varphi+D_{22}\varphi\right)+\left(1+|Dw|^2\right)\left(D_{11}\psi(d)+D_{22}\psi(d)\right)\\
&-\Big[\left(D_1w\right)^2\left(D_{11}\varphi+D_{11}\psi(d)\right)+2D_1wD_2w\left(D_{12}\varphi+D_{12}\psi(d)\right)\\
&+\left(D_2w\right)^2\left(D_{22}\varphi+D_{22}\psi(d)\right)\Big]\\
=\quad&\left(1+|Dw|^2\right)\left(D_{11}\varphi+D_{22}\varphi\right)+\left(1+|Dw|^2\right)\Big(\psi''(d)\left(D_1d\right)^2+\psi'(d)D_{11}d\\
&\psi''(d)\left(D_2d\right)^2+\psi'(d)D_{22}d\Big)-\left(D_1w\right)^2D_{11}\varphi-2D_1wD_2wD_{12}\varphi-\left(D_2w\right)^2D_{22}\varphi\\
&-\left(D_1w\right)^2\left(\psi''\left(D_1d\right)^2+\psi'(d)D_{11}d\right)-2D_1wD_2w\left(\psi'' D_1dD_2d+\psi'(d)D_{12}d\right)\\
&-\left(D_2w\right)^2\left(\psi''\left(D_2d\right)^2+\psi'(d)D_{22}d\right).
\end{aligned}
$$

Logo, pondo

$$A_{ij}=\left[\left(1+|Dw|^2\right)\delta_{ij}-D_iwD_jw\right]$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_0\left[w\right] &= \sum_{i,j=1}^{2}\left[\left(1+|Dw|^2\right)\delta_{ij}-D_iwD_jw\right]\left(\psi''(d)D_idD_jd+\psi'(d)D_{ij}d+D_{ij}\varphi\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\left(\psi''(d)D_idD_jd+\psi'(d)D_{ij}d+D_{ij}\varphi\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\psi''(d)D_idD_jd+\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\psi'(d)D_{ij}d+\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}D_{ij}\varphi\\
&= \psi''(d)\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}D_idD_jd+\psi'(d)\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}D_{ij}d+\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}D_{ij}\varphi
\end{aligned}
$$

Temos também que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\xi_i\xi_j &= A_{11}\left(\xi_1\right)^2+A_{21}\xi_1\xi_2+A_{12}\xi_2\xi_1+A_{22}\left(\xi_2\right)^2\\
&= \left[\left(1+|Dw|^2\right)-\left(D_1w\right)^2\right]\left(\xi_1\right)^2-D_1wD_2w\xi_1\xi_2\\
&\quad -D_2wD_1w\xi_2\xi_1+\left[\left(1+|Dw|^2\right)-\left(D_2w\right)^2\right]\left(\xi_2\right)^2\\
&= \left(\xi_1\right)^2+\left(\xi_2\right)^2+\left(D_2w\right)^2\left(\xi_1\right)^2-2D_1wD_2w\xi_1\xi_2+\left(D_1w\right)^2\left(\xi_2\right)^2\\
&= \left(\xi_1\right)^2+\left(\xi_2\right)^2+\left(D_2w\xi_1-D_1w\xi_2\right)^2.
\end{aligned}
$$

Logo, podemos afirmar que

$$
\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\xi_i\xi_j\geq\left(\xi_1\right)^2+\left(\xi_2\right)^2=|\xi|^2, \forall\xi=\left(\xi_1,\xi_2\right)\in\mathbb{R}^2.
$$

Portanto,

$$
\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}D_idD_jd\geq|Dd|^2.
$$

Como $|Dd|=1$ e $\psi''(d)\leq 0$ tem-se

$$
\psi''(d)\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}D_idD_jd\leq\psi''(d),
$$

donde obtemos

$$Q_0[w] \leq \psi''(d) + \psi'(d) \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} d + \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} \varphi.$$

Note também que

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} \varphi = \sum_{i,j=1}^{2} \left[\left(1 + |Dw|^2\right) \delta_{ij} - D_i w D_j w \right] D_{ij} \varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(1 + |Dw|^2\right) - (D_1 w)^2 \right] D_{11}\varphi - 2 D_1 w D_2 w D_{12} \varphi \\
&\quad + \left[\left(1 + |Dw|^2\right) - (D_2 w)^2 \right] D_{22} \varphi \\
&= \left(1 + (D_2 w)^2\right) D_{11}\varphi - 2 D_1 w D_2 w D_{12}\varphi + \left(1 + (D_1 w)^2\right) D_{22}\varphi \\
&\leq \left(1 + (D_2 w)^2\right) |D_{11}\varphi| + 2 |D_1 w| \, |D_2 w| \, |D_{12}\varphi| \\
&\quad + \left(1 + (D_1 w)^2\right) |D_{22}\varphi| \\
&\leq \left(1 + |Dw|^2\right) (|D_{11}\varphi| + |D_{22}\varphi|) + 2 |D_1 w| \, |D_2 w| \, |D_{12}\varphi|
\end{aligned}$$

Como $(|D_1 w| - |D_2 w|)^2 \geq 0$ então $|D_1 w|^2 - 2 |D_1 w| \, |D_2 w| + |D_2 w|^2 \geq 0$. Logo, $|Dw|^2 \geq 2 |D_1 w| \, |D_2 w|$. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} \varphi &\leq \left(1 + |Dw|^2\right) |D_{11}\varphi| + |Dw|^2 |D_{12}\varphi| + \left(1 + |Dw|^2\right) |D_{22}\varphi| \\
&\leq \left(1 + |Dw|^2\right) |D_{11}\varphi| + \left(1 + |Dw|^2\right) |D_{12}\varphi| + \left(1 + |Dw|^2\right) |D_{22}\varphi| \\
&\leq \left(1 + |Dw|^2\right) (|D_{11}\varphi| + |D_{12}\varphi| + |D_{22}\varphi|) \\
&= \left(1 + |Dw|^2\right) \left|D^2 \varphi\right|.
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$Q_0[w] \leq \psi''(d) + \psi'(d) \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} d + \left(1 + |Dw|^2\right) \left|D^2\varphi\right|.$$

Note agora que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} d &= \sum_{i,j=1}^{2} \left[\left(1+|Dw|^2\right)\delta_{ij} - D_i w D_j w \right] D_{ij} d \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} \left[\left(1+|Dw|^2\right)\delta_{ij} \right] D_{ij} d - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} d \\
&= \left(1+|Dw|^2\right)(D_{11}d + D_{22}d) - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} d \\
&= \left(1+|Dw|^2\right)(\Delta d) - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} d.
\end{aligned}
$$

Vamos calcular $\sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} d$. Note que $D_i w = D_i \varphi + \psi'(d) D_i d$. Daí

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} d &= \sum_{i,j=1}^{2} \left(D_i\varphi + \psi'(d) D_i d\right)\left(D_j\varphi + \psi'(d) D_j d\right) D_{ij} d \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} \left(\psi'^2 D_i d + 2\psi' D_i \varphi\right) D_j d D_{ij} d + \sum_{i,j=1}^{2} D_i\varphi D_j \varphi D_{ij} d \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} D_i\varphi D_j \varphi D_{ij} d
\end{aligned}
$$

pois $|Dd| = 1 \Rightarrow \langle d(Dd)_x(\xi), Dd(x)\rangle = 0 \ \forall \xi, x \in \mathbb{R}^2$ e, em particular

$$
\langle d(Dd)_x(e_i), Dd(x)\rangle = \sum_{j=1}^{2} D_j d D_{ij} d = 0.
$$

Segue-se que

$$
\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} d = \left(1+|Dw|^2\right)(\Delta d) - \sum_{i,j=1}^{2} D_i\varphi D_j \varphi D_{ij} d.
$$

As estimativas anteriores são válidas em qualquer ponto de Ω. Daqui para a frente todas as expressões envolvidas serão avaliadas em x_0. De (7) obtemos:

$$
-\sum_{i,j=1}^{2} D_i\varphi D_j \varphi D_{ij} d = -\left(D_1\varphi\right)^2 \left(\frac{1}{|x-p_0|}\right) \leq 0.
$$

Portanto,

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} d \leq \left(1 + |Dw|^2\right)(\Delta d)$$

e

$$Q_0[w] \leq \psi'' + \psi' \left(1 + |Dw|^2\right)(\Delta d) + \left(1 + |Dw|^2\right)\left|D^2\varphi\right|.$$

Note que

$$Dw = D\left(\varphi + \psi(d)\right) \Rightarrow |Dw| = |D\varphi + D\psi(d)| \leq |D\varphi| + |D\psi(d)| = |D\varphi| + \psi'$$

Daí,

$$\begin{aligned} |Dw|^2 &\leq \left(|D\varphi| + \psi'\right)^2 \\ &= |D\varphi|^2 + 2\psi' |D\varphi| + \left(\psi'\right)^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} Q_0[w] \quad &\leq \quad \psi'' + \psi' \left(1 + |D\varphi|^2 + 2\psi' |D\varphi| + \left(\psi'\right)^2\right)(\Delta d) \\ &\quad + \left(1 + |D\varphi|^2 + 2\psi' |D\varphi| + \left(\psi'\right)^2\right)\left|D^2\varphi\right| \\ &\leq \quad \psi'' + \left(\psi'\right)^3 (\Delta d) + \left(2|D\varphi|(\Delta d) + \left|D^2\varphi\right|\right)\left(\psi'\right)^2 \\ &\quad + \left((\Delta d) + |D\varphi|^2 (\Delta d) + 2|D\varphi|\left|D^2\varphi\right|\right)\psi' \\ &\quad + \left|D^2\varphi\right| + |D\varphi|^2\left|D^2\varphi\right| \\ &\leq \quad \psi'' + \left(\psi'\right)^3 (\Delta d) + \left(2C(\Delta d) + C\right)\left(\psi'\right)^2 \\ &\quad + \left((\Delta d) + C^2(\Delta d) + 2C^2\right)\psi' + C + C^3 \end{aligned}$$

Como $|x_0 - p_0| \geq r$ então

$$\Delta d(x_0) = \frac{1}{|x_0 - p_0|} \leq \frac{1}{r}.$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned} Q_0[w] \quad &\leq \quad \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right)\left(\psi'\right)^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right)\left(\psi'\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\left(1 + C^2\right)}{r} + 2C^2\right)\psi' + C + C^3. \end{aligned} \tag{9}$$

De (8) temos

$$
\begin{aligned}
Q_0[w] \quad \leq \quad & -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\delta^3 b^3}{(bd+1)^3} + \left(\frac{2C}{r} + C\right) \frac{\delta^2 b^2}{(bd+1)^2} \\
& + \left(\frac{\left(1+C^2\right)}{r} + 2C^2\right) \frac{\delta b}{bd+1} + C + C^3.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta^3 b^3}{(bd+1)^3} \\
= \quad & -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} \left[1 - \frac{1}{r} \frac{\delta^2 b}{bd+1}\right]
\end{aligned}
$$

e que esta expressão é não positiva se

$$
1 - \frac{1}{r} \frac{\delta^2 b}{bd+1} \geq 0,
$$

ou seja,

$$
\frac{b}{bd+1} \leq \frac{r}{\delta^2}.
$$

Tome $b = \frac{r}{2\delta^2}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta^3 b^3}{(bd+1)^3} = \\
& -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} \left[1 - \frac{1}{r} \frac{\delta^2 b}{bd+1}\right] \\
= \quad & -\frac{\delta}{\left(\frac{r}{2\delta^2} d + 1\right)^2} \frac{r^2}{4\delta^4} \left[1 - \frac{1}{r} \frac{\delta^2}{\frac{r}{2\delta^2} d + 1} \frac{r}{2\delta^2}\right] \\
= \quad & -\frac{\delta r^2}{\left(rd + 2\delta^2\right)^2} \left[1 - \frac{\delta^2}{rd + 2\delta^2}\right] \\
= \quad & -\frac{\delta r^2}{2\left(rd + 2\delta^2\right)^2} \left[2 - \frac{2\delta^2}{rd + 2\delta^2}\right] \\
\leq \quad & -\frac{\delta r^2}{2\left(rd + 2\delta^2\right)^2},
\end{aligned}
$$

pois

$$2-\frac{2\delta^2}{rd+2\delta^2}\geq 1.$$

Logo

$$\begin{aligned}
Q_0\left[w\right] &\leq -\frac{\delta r^2}{2\left(rd+2\delta^2\right)^2}+\left(\frac{2C}{r}+C\right)\frac{\delta^2 r^2}{\left(rd+2\delta^2\right)^2}\\
&\quad+\left(\frac{1+C^2}{r}+2C^2\right)\frac{\delta r}{rd+2\delta^2}+C+C^3\\
&= \frac{1}{2\left(2\delta^2+dr\right)^2}\left[2C^3d^2r^2+8C^3dr\delta^2+8C^3\delta^4+4C^2dr^2\delta\right.\\
&\quad+2C^2dr\delta+8C^2r\delta^3+4C^2\delta^3+2Cd^2r^2+8Cdr\delta^2+2Cr^2\delta^2\\
&\quad\left.+4Cr\delta^2+8C\delta^4+2dr\delta-r^2\delta+4\delta^3\right].
\end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão entre colchetes como um polinômio quadrático em d, tem-se que $Q_0[w]\leq 0$ se

$$\begin{aligned}
&\left(2C^3r^2+2Cr^2\right)d^2+\left(8C^3r\delta^2+4C^2r^2\delta+2C^2r\delta+8Cr\delta^2+2r\delta\right)d\\
&+8C^3\delta^4+8C^2r\delta^3+4C^2\delta^3+2Cr^2\delta^2+4Cr\delta^2+8C\delta^4-r^2\delta+4\delta^3\leq 0.
\end{aligned}$$

Para $0\leq d\leq\delta$ temos

$$\begin{aligned}
&\left(2C^3r^2+2Cr^2\right)d^2+\left(8C^3r\delta^2+4C^2r^2\delta+2C^2r\delta+8Cr\delta^2+2r\delta\right)d\\
&+8C^3\delta^4+8C^2r\delta^3+4C^2\delta^3+2Cr^2\delta^2+4Cr\delta^2+8C\delta^4-r^2\delta+4\delta^3\\
\leq\ &\left(2C^3r^2+2Cr^2\right)\delta^2+\left(8C^3r\delta^2+4C^2r^2\delta+2C^2r\delta+8Cr\delta^2+2r\delta\right)\delta\\
&+8C^3\delta^4+8C^2r\delta^3+4C^2\delta^3+2Cr^2\delta^2+4Cr\delta^2+8C\delta^4-r^2\delta+4\delta^3
\end{aligned}$$

Reescrevendo esta última expressão como um polinômio em δ e fatorando δ vemos que ela é igual a

$$\begin{aligned}
&\delta\left[\left(8C^3+8C\right)\delta^3+\left(8C^2r+8C^3r+8Cr+4C^2+4\right)\delta^2\right.\\
&\left.+\left(2C^3r^2+4C^2r^2+2C^2r+4Cr^2+4Cr+2r\right)\delta-r^2\right].
\end{aligned}$$

Assim, escolhendo $\delta\leq 1$ obtemos $Q_0[w]\leq 0$ para $0\leq d\leq\delta$ se

$$\begin{aligned}
&\left(8C^3+8C\right)\delta^3+\left(8C^2r+8C^3r+8Cr+4C^2+4\right)\delta^2\\
&+\left(2C^3r^2+4C^2r^2+2C^2r+4Cr^2+4Cr+2r\right)\delta-r^2\\
\leq\ &\left(8C^3+8C\right)\delta+\left(8C^2r+8C^3r+8Cr+4C^2+4\right)\delta\\
&+\left(2C^3r^2+4C^2r^2+2C^2r+4Cr^2+4Cr+2r\right)\delta-r^2\\
\leq\ &0
\end{aligned}$$

Reescrevendo o coeficiente de δ como um polinômio quadrático em r e isolando δ vemos que $Q_0[w] \leq 0$ para $0 \leq d \leq \delta$ se

$$\delta \leq \frac{r^2}{\left(2C^3+4C^2+4C\right)r^2+\left(8C^3+10C^2+12C+2\right)r+8C^3+4C^2+8C+4}$$

Observe que a função

$$f(r) = \frac{r^2}{\left(2C^3+4C^2+4C\right)r^2+\left(8C^3+10C^2+12C+2\right)r+8C^3+4C^2+8C+4}$$

é crescente. Então temos

$$\frac{1}{18C^3+18C^2+24C+6} = f(1) \leq f(r), \text{ para } r \geq 1.$$

Logo, temos $Q_0[w] \leq 0$ se $0 \leq d \leq \delta$ para

$$\delta = \frac{1}{18C^3+18C^2+24C+6}. \tag{10}$$

Em resumo, definindo δ por (10), tomando

$$b = \frac{r}{2\delta^2},$$

temos que $Q_0[w] \leq 0$ em $\mathcal{N}_p$, onde

$$\mathcal{N}_p = \{x \in \Omega \mid 0 \leq d(x) \leq \delta\}.$$

Portanto, para garantir que w é uma barreira superior local para Q_0 em $\mathcal{N}_p$ basta agora provar que esta função satisfaz a estimativa a priori de altura

$$w|_{\partial\mathcal{N}_p} \geq u|_{\partial\mathcal{N}_p}, \tag{11}$$

onde u é uma solução de $Q_0[u] = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Note que com as escolhas acima temos

$$\psi(d) = \frac{\ln\left(\frac{r\left(18C^3+18C^2+24C+6\right)^2}{2}d+1\right)}{18C^3+18C^2+24C+6}.$$

Em $\partial\mathcal{N}_p \cap \partial\Omega$, temos que $u = \varphi$ de modo que (11) é satisfeita nesses pontos. Pelo princípio do máximo,temos

$$\sup_{\Omega} |u| \leq M.$$

Assim em $\partial\mathcal{N}_p \backslash \partial\Omega$, temos

$$w(x) = \psi(\delta) + \varphi(x) \geq \psi(\delta).$$

Logo (11) é satisfeito em $\partial\mathcal{N}_p \backslash \partial\Omega$ se $\psi(\delta) \geq M$, ou seja,

$$\frac{\ln\left(\frac{r\left(18C^3+18C^2+24C+6\right)^2}{2}\frac{1}{18C^3+18C^2+24C+6}+1\right)}{18C^3+18C^2+24C+6} \geq M,$$

o que é garantido por

$$r \geq 2\left(e^{6M\left(3C^3+3C^2+4C+1\right)}-1\right).$$

Note que tomando $w = \varphi - \psi$, para a mesma ψ acima, obtemos uma barreira inferior em p. Podemos então aplicar o método da continuidade para concluir com a prova do Teorema 1.1. Para isso, observamos que se a condição (3) é satisfeita para uma dada φ então ela também é satisfeita para $t\varphi$ para todo $t \in [0,1]$. Assim, pondo

$$V = \{t \in [0,1] \mid \exists u_t \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ tal que } Q_0\left[u_t\right] = 0,\ u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}$$

temos $V \neq \varnothing$ já que $t = 0 \in V$, pois $u \equiv 0$ quando $t = 0$; além disso V é aberto pelo teorema da função implícita. Das barreira locais obtemos estimativas uniformes C^1, a priori, para a familia de problemas de Dirichlet $Q_0\left[u_t\right] = 0$, $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$. Da teoria de EDP elípticas decorre que V é fechado ([GT]), ou seja, $V = [0,1]$.

A unicidade da solução é uma conseqüência do princípio do máximo para a diferença de duas soluções de (1). ∎

Prova do Teorema 1.2. Primeiro notamos que, de (6), tem-se

$$r \geq 2\left(e^{\phi\left(M+h_{\Omega,H}\right)}-1\right).$$

E como

$$2\left(e^{\phi\left(M+h_{\Omega,H}\right)}-1\right) \geq 2\left(e^{6M\left(3C^3+3C^2+4C+1\right)}-1\right)$$

temos, pelo Teorema 1.1, que existe uma solução $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_0 = 0$ em Ω tal que $v|_{\partial\Omega} = \varphi$. E, como

$$\begin{aligned} Q_H(v) &= Q_0[v] + 2H\left(1+|Dv|^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 2H\left(1+|Dv|^2\right)^{\frac{3}{2}} \geq 0, \end{aligned}$$

decorre que v é uma barreira inferior global (ou seja, válida em todos os pontos de $\partial\Omega$) para Q_H.

As barreiras superiores que vamos constuir são locais, dependendo cada uma do ponto do bordo considerado. Para isto suponha que $\min_{\overline{\Omega}} \varphi = 0$. Fixemos então um ponto $p \in \partial\Omega$. Seja $p_0 = (p_1, p_2)$ o centro do círculo tangente ao $\partial\Omega$ em p, com raio r e contido em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ e seja a função $d : \overline{\Omega} \to [0, \infty)$, dada por:

$$d(x) = d(x, \partial B_r) = |x - p_0| - r.$$

Defina, também,

$$w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},$$

por

$$w(x) = \varphi(x) + \psi(d(x)),$$

onde

$$\psi(d) = \delta \ln (bd + 1), \tag{12}$$

onde δ e b são constantes positivas a serem determinadas.

Observe que

$$\begin{aligned} Q_H(w) &= \left(1 + |Dw|^2\right) \Delta w - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} w + 2H \left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= Q_0[w] + 2H \left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

De (9) temos

$$\begin{aligned} Q_0[w] \leq\ & \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right) (\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right) (\psi')^2 \\ & + \left(\frac{(1 + C^2)}{r} + 2C^2\right) \psi' + C + C^3. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Q_H(w) \quad \leq \quad & \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right)(\psi')^2 \\
& + \left(\frac{(1+C^2)}{r} + 2C^2\right)\psi' \\
& + C + C^3 + 2H\left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} \\
= \quad & \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right)(\psi')^2 \\
& + \left(\frac{(1+C^2)}{r} + 2C^2\right)\psi' + C + C^3 \\
& + 2H\left(1 + |Dw|^2\right)\left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + |Dw|.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
Q_H(w) \quad \leq \quad & \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right)(\psi')^2 \\
& + \left(\frac{(1+C^2)}{r} + 2C^2\right)\psi' + C + C^3 \\
& + 2H\left(1 + |Dw|^2\right)(1 + |Dw|).
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
|Dw| \quad &= \quad |D\varphi + D\psi(d)| \\
&\leq \quad |D\varphi| + |D\psi(d)| = |D\varphi| + \psi' \\
&\leq \quad C + \psi'.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|Dw|^2 &\leq \left(C + \psi'\right)^2 \\
&\leq C^2 + 2\psi' C + (\psi')^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} Q_H(w) &\leq \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right)(\psi')^2 \\ &+ \left(\frac{\left(1+C^2\right)}{r} + 2C^2\right)\psi' + C + C^3 \\ &+ 2H\left(1 + C^2 + 2\psi' C + (\psi')^2\right)\left(1 + C + \psi'\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Q_H(w) &\leq \psi'' + \left(\frac{1}{r} + 2H\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C + 2H + 6HC\right)(\psi')^2 \\ &+ \left(\frac{\left(1+C^2\right)}{r} + 2C^2 + 2H + 6HC^2 + 4HC\right)\psi' \\ &+ \left(1+C^2\right)\left(C + 2H(1+C)\right) \end{aligned}$$

Assim de (12) obtemos

$$\begin{aligned} Q_H(w) &\leq -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left(\frac{1}{r} + 2H\right)\frac{\delta^3 b^3}{(bd+1)^3} \\ &+ \left(\frac{2C}{r} + C + 2H + 6HC\right)\frac{\delta^2 b^2}{(bd+1)^2} \\ &+ \left(\frac{\left(1+C^2\right)}{r} + 2C^2 + 2H + 6HC^2 + 4HC\right)\frac{\delta b}{bd+1} \\ &+ \left(1+C^2\right)\left(C + 2H(1+C)\right) \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left(\frac{1}{r} + 2H\right)\frac{\delta^3 b^3}{(bd+1)^3} \\ &= -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2}\left[1 - \left(\frac{1}{r} + 2H\right)\frac{\delta^2 b}{bd+1}\right] \end{aligned}$$

e que esta expressão é não positiva se

$$1 - \left(\frac{1}{r} + 2H\right)\frac{\delta^2 b}{bd+1} \geq 0,$$

ou seja,

$$\frac{b}{bd+1} \leq \frac{1}{\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}.$$

Tome

$$b = \frac{1}{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
I = -&\frac{\left[1-\left(\frac{1}{r}+2H\right)\dfrac{\delta^2}{\frac{1}{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}d+1}\dfrac{1}{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}\right]}{\left(\dfrac{1}{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}d+1\right)^2 4\delta^3\left(\frac{1}{r}+2H\right)^2} \\
= & \quad \frac{-\delta}{\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)^2}\left[1-\frac{\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}{\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)}\right] \\
= & \quad \frac{-\delta}{2\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)^2}\left[2-\frac{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}{\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)}\right] \\
\leq & \quad \frac{-\delta}{2\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)^2},
\end{aligned}$$

pois

$$2-\frac{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}{\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)} \geq 1$$

Daí, obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_H(w) \leq\; & -\frac{\delta}{2\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)^2} \\
& +\left(\frac{2C}{r}+C+2H+6HC\right)\delta^2\frac{r^2}{\left(dr+2\delta^2+4H\delta^2 r\right)^2} \\
& +\left(\frac{\left(1+C^2\right)}{r}+2C^2+2H+6HC^2+4HC\right)\frac{\delta r}{dr+2\delta^2+4H\delta^2 r} \\
& +\left(1+C^2\right)\left(C+2H\left(1+C\right)\right) \\
=\; & \frac{1}{2\left(2\delta^2+dr+4Hr\delta^2\right)^2}\left[\left(2Cr^2+4Hr^2+2C^3r^2+4CHr^2\right.\right. \\
& \left.+4C^2Hr^2+4C^3Hr^2\right)d^2+\left[32C^3H^2r^2\delta^2+16C^3Hr^2\delta^2\right. \\
& +16C^3Hr\delta^2+8C^3r\delta^2+32C^2H^2r^2\delta^2+12C^2Hr^2\delta \\
& +16C^2Hr\delta^2+4C^2r^2\delta+2C^2r\delta+32CH^2r^2\delta^2 \\
& +16CHr^2\delta^2+8CHr^2\delta+16CHr\delta^2+8Cr\delta^2 \\
& \left.+32H^2r^2\delta^2+4Hr^2\delta+16Hr\delta^2+2r\delta\right]d \\
& +64C^3H^3r^2\delta^4+32C^3H^2r^2\delta^4+64C^3H^2r\delta^4 \\
& +32C^3Hr\delta^4+16C^3H\delta^4+8C^3\delta^4 \\
& +64C^2H^3r^2\delta^4+48C^2H^2r^2\delta^3+64C^2H^2r\delta^4 \\
& +16C^2Hr^2\delta^3+32C^2Hr\delta^3+16C^2H\delta^4 \\
& +8C^2r\delta^3+4C^2\delta^3+64CH^3r^2\delta^4+32CH^2r^2\delta^4 \\
& +32CH^2r^2\delta^3+64CH^2r\delta^4+12CHr^2\delta^2 \\
& +32CHr\delta^4+16CHr\delta^3+16CH\delta^4+2Cr^2\delta^2 \\
& +4Cr\delta^2+8C\delta^4+64H^3r^2\delta^4+16H^2r^2\delta^3+64H^2r\delta^4 \\
& \left.+4Hr^2\delta^2+16Hr\delta^3+16H\delta^4-r^2\delta+4\delta^3\right]
\end{aligned}
$$

Logo teremos $Q_H(w) \leq 0$ se

$$\begin{aligned}
& \left(2Cr^2 + 4Hr^2 + 2C^3r^2 + 4CHr^2 + 4C^2Hr^2 + 4C^3Hr^2\right) d^2 \\
& + \left[32C^3H^2r^2\delta^2 + 16C^3Hr^2\delta^2 + 16C^3Hr\delta^2 + 8C^3r\delta^2\right. \\
& +32C^2H^2r^2\delta^2 + 12C^2Hr^2\delta + 16C^2Hr\delta^2 + 4C^2r^2\delta \\
& +2C^2r\delta + 32CH^2r^2\delta^2 + 16CHr^2\delta^2 + 8CHr^2\delta + 16CHr\delta^2 \\
& \left.+8Cr\delta^2 + 32H^2r^2\delta^2 + 4Hr^2\delta + 16Hr\delta^2 + 2r\delta\right] d \\
& +64C^3H^3r^2\delta^4 + 32C^3H^2r^2\delta^4 + 64C^3H^2r\delta^4 + 32C^3Hr\delta^4 \\
& +16C^3H\delta^4 + 8C^3\delta^4 + 64C^2H^3r^2\delta^4 + 48C^2H^2r^2\delta^3 \\
& +64C^2H^2r\delta^4 + 16C^2Hr^2\delta^3 + 32C^2Hr\delta^3 + 16C^2H\delta^4 \\
& +8C^2r\delta^3 + 4C^2\delta^3 + 64CH^3r^2\delta^4 + 32CH^2r^2\delta^4 \\
& +32CH^2r^2\delta^3 + 64CH^2r\delta^4 + 12CHr^2\delta^2 + 32CHr\delta^4 \\
& +16CHr\delta^3 + 16CH\delta^4 + 2Cr^2\delta^2 + 4Cr\delta^2 + 8C\delta^4 \\
& +64H^3r^2\delta^4 + 16H^2r^2\delta^3 + 64H^2r\delta^4 + 4Hr^2\delta^2 \\
& +16Hr\delta^3 + 16H\delta^4 - r^2\delta + 4\delta^3 \\
\leq \; & 0
\end{aligned}$$

Assim para $0 \leq d \leq \delta$ temos

$$
\begin{aligned}
& \left(2Cr^2 + 4Hr^2 + 2C^3r^2 + 4CHr^2 + 4C^2Hr^2 + 4C^3Hr^2\right) d^2 \\
& + \left[32C^3H^2r^2\delta^2 + 16C^3Hr^2\delta^2 + 16C^3Hr\delta^2 + 8C^3r\delta^2\right. \\
& +32C^2H^2r^2\delta^2 + 12C^2Hr^2\delta + 16C^2Hr\delta^2 + 4C^2r^2\delta \\
& +2C^2r\delta + 32CH^2r^2\delta^2 + 16CHr^2\delta^2 + 8CHr^2\delta + 16CHr\delta^2 \\
& \left.+8Cr\delta^2 + 32H^2r^2\delta^2 + 4Hr^2\delta + 16Hr\delta^2 + 2r\delta\right] d \\
& +64C^3H^3r^2\delta^4 + 32C^3H^2r^2\delta^4 + 64C^3H^2r\delta^4 + 32C^3Hr\delta^4 \\
& +16C^3H\delta^4 + 8C^3\delta^4 + 64C^2H^3r^2\delta^4 + 48C^2H^2r^2\delta^3 \\
& +64C^2H^2r\delta^4 + 16C^2Hr^2\delta^3 + 32C^2Hr\delta^3 + 16C^2H\delta^4 \\
& +8C^2r\delta^3 + 4C^2\delta^3 + 64CH^3r^2\delta^4 + 32CH^2r^2\delta^4 \\
& +32CH^2r^2\delta^3 + 64CH^2r\delta^4 + 12CHr^2\delta^2 + 32CHr\delta^4 \\
& +16CHr\delta^3 + 16CH\delta^4 + 2Cr^2\delta^2 + 4Cr\delta^2 + 8C\delta^4 \\
& +64H^3r^2\delta^4 + 16H^2r^2\delta^3 + 64H^2r\delta^4 + 4Hr^2\delta^2 \\
& +16Hr\delta^3 + 16H\delta^4 - r^2\delta + 4\delta^3 \\
\leq \ & \left(2Cr^2 + 4Hr^2 + 2C^3r^2 + 4CHr^2 + 4C^2Hr^2 + 4C^3Hr^2\right) \delta^2 \\
& + \left[32C^3H^2r^2\delta^2 + 16C^3Hr^2\delta^2 + 16C^3Hr\delta^2 + 8C^3r\delta^2\right. \\
& +32C^2H^2r^2\delta^2 + 12C^2Hr^2\delta + 16C^2Hr\delta^2 + 4C^2r^2\delta \\
& +2C^2r\delta + 32CH^2r^2\delta^2 + 16CHr^2\delta^2 + 8CHr^2\delta + 16CHr\delta^2 \\
& \left.+8Cr\delta^2 + 32H^2r^2\delta^2 + 4Hr^2\delta + 16Hr\delta^2 + 2r\delta\right] \delta \\
& +64C^3H^3r^2\delta^4 + 32C^3H^2r^2\delta^4 + 64C^3H^2r\delta^4 + 32C^3Hr\delta^4 \\
& +16C^3H\delta^4 + 8C^3\delta^4 + 64C^2H^3r^2\delta^4 + 48C^2H^2r^2\delta^3 \\
& +64C^2H^2r\delta^4 + 16C^2Hr^2\delta^3 + 32C^2Hr\delta^3 + 16C^2H\delta^4 \\
& +8C^2r\delta^3 + 4C^2\delta^3 + 64CH^3r^2\delta^4 + 32CH^2r^2\delta^4 \\
& +32CH^2r^2\delta^3 + 64CH^2r\delta^4 + 12CHr^2\delta^2 + 32CHr\delta^4 \\
& +16CHr\delta^3 + 16CH\delta^4 + 2Cr^2\delta^2 + 4Cr\delta^2 + 8C\delta^4 \\
& +64H^3r^2\delta^4 + 16H^2r^2\delta^3 + 64H^2r\delta^4 + 4Hr^2\delta^2 \\
& +16Hr\delta^3 + 16H\delta^4 - r^2\delta + 4\delta^3
\end{aligned}
$$

Reescrevendo a última expressão como um polinômio em δ e fatorando

δ ela se torna igual a

$$\delta\left\{\left[64C^3H^3r^2+32C^3H^2r^2+64C^3H^2r+32C^3Hr+16C^3H+8C^3\right.\right.$$
$$+64C^2H^3r^2+64C^2H^2r+16C^2H+64CH^3r^2+32CH^2r^2+64CH^2r$$
$$\left.+32CHr+16CH+8C+64H^3r^2+64H^2r+16H\right]\delta^3+\left[32C^3H^2r^2\right.$$
$$+16C^3Hr^2+16C^3Hr+8C^3r+80C^2H^2r^2+16C^2Hr^2+48C^2Hr$$
$$+8C^2r+4C^2+64CH^2r^2+16CHr^2+32CHr+8Cr+48H^2r^2$$
$$\left.+32Hr+4\right]\delta^2+\left[2r+4Cr^2+2C^2r+12Hr^2+4C^2r^2+2C^3r^2\right.$$
$$\left.\left.+4Cr+24CHr^2+16C^2Hr^2+4C^3Hr^2\right]\delta-r^2\right\}$$

Assim, escolhendo $\delta\leq 1$ obtemos $Q_H\left(w\right)\leq 0$ para $0\leq d\leq\delta$ se

$$\begin{aligned}
&\left[64C^3H^3r^2+32C^3H^2r^2+64C^3H^2r+32C^3Hr+16C^3H+8C^3\right.\\
&+64C^2H^3r^2+64C^2H^2r+16C^2H+64CH^3r^2+32CH^2r^2+64CH^2r\\
&\left.+32CHr+16CH+8C+64H^3r^2+64H^2r+16H\right]\delta^3+\left[32C^3H^2r^2\right.\\
&+16C^3Hr^2+16C^3Hr+8C^3r+80C^2H^2r^2+16C^2Hr^2+48C^2Hr\\
&+8C^2r+4C^2+64CH^2r^2+16CHr^2+32CHr+8Cr+48H^2r^2\\
&\left.+32Hr+4\right]\delta^2+\left[2r+4Cr^2+2C^2r+12Hr^2+4C^2r^2+2C^3r^2\right.\\
&\left.+4Cr+24CHr^2+16C^2Hr^2+4C^3Hr^2\right]\delta-r^2\\
\leq\ &\left[64C^3H^3r^2+32C^3H^2r^2+64C^3H^2r+32C^3Hr+16C^3H+8C^3\right.\\
&+64C^2H^3r^2+64C^2H^2r+16C^2H+64CH^3r^2+32CH^2r^2+64CH^2r\\
&\left.+32CHr+16CH+8C+64H^3r^2+64H^2r+16H\right]\delta+\left[32C^3H^2r^2\right.\\
&+16C^3Hr^2+16C^3Hr+8C^3r+80C^2H^2r^2+16C^2Hr^2+48C^2Hr\\
&+8C^2r+4C^2+64CH^2r^2+16CHr^2+32CHr+8Cr+48H^2r^2\\
&\left.+32Hr+4\right]\delta+\left[2r+4Cr^2+2C^2r+12Hr^2+4C^2r^2+2C^3r^2\right.\\
&\left.+4Cr+24CHr^2+16C^2Hr^2+4C^3Hr^2\right]\delta-r^2\leq 0
\end{aligned}$$

Reescrevendo o coeficiente de δ como um polinômio quadrático em r e isolando δ segue que $Q_H\left(w\right)\leq 0$ para $0\leq d\leq\delta$ se

$$\delta\leq\frac{r^2}{\alpha r^2+\beta r+\gamma},$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha\ =\ &\left(64C^3+64C^2+64C+64\right)H^3+\left(64C^3+80C^2+96C+48\right)H^2\\
&+\left(20C^3+32C^2+40C+12\right)H+\left(2C^3+4C^2+4C\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \left(64C^3+64C^2+64C+64\right)H^2+\left(48C^3+48C^2+64C+32\right)H \\ &\quad +\left(8C^3+10C^2+12C+2\right)\end{aligned}$$

e

$$\gamma = \left(16C^3+16C^2+16C+16\right)H+\left(8C^3+4C^2+8C+4\right).$$

Considere a função

$$f(r)=\frac{r^2}{\alpha r^2+\beta r+\gamma}.$$

Observe que f é crescente, em particular para $r\geq 1$. Tome então

$$\begin{aligned}\delta &= f(1)=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma} \\ &= \frac{1}{\phi},\end{aligned} \tag{13}$$

onde

$$\begin{aligned}\phi &= 64\left(C^3+C^2+C+1\right)H^3+16\left(8C^3+9C^2+10C+7\right)H^2 \\ &\quad +12\left(7C^3+8C^2+10C+5\right)H+6\left(3C^3+3C^2+4C+1\right).\end{aligned}$$

Em resumo, definindo δ por (13), tomando

$$b=\frac{1}{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)},$$

temos que $Q_H(w)\leq 0$ sobre $\mathcal{N}_p$, onde

$$\mathcal{N}_p=\left\{x\in\Omega \mid 0\leq d(x)\leq\delta\right\}.$$

Portanto, para garantir que w é uma barreira superior local para Q_H em $\mathcal{N}_p$ basta mostrar que função satisfaz a estimativa a priori de altura

$$w|_{\partial\mathcal{N}_p}\geq u|_{\partial\mathcal{N}_p}, \tag{14}$$

onde u é uma solução de $Q_H=0$ e $u|_{\partial\Omega}=\varphi$. Note que com as escolhas acima temos

$$\psi(d)=\frac{1}{\phi}\ln\left(\frac{\phi^2}{2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}d+1\right).$$

Em $\partial\mathcal{N}_p\cap\partial\Omega$ temos $u=\varphi$ então (14) é satisfeita nesses pontos.

Note agora que $\sup_\Omega |u(x)| \le M + h_{\Omega,H}$. De fato, supondo que D, o disco de raio R_Ω contendo Ω, seja centrado em (a,b), a calota esférica de curvatura média H e bordo ∂D é gráfico da função

$$v(x_1,x_2) := \sqrt{\frac{1}{H^2} - (x_1-a)^2 - (x_2-b)^2} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - R_\Omega^2},$$

$$(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 \le R_\Omega^2,$$

que é uma supersolução para Q_H em Ω. Logo, pelo princípio do máximo,

$$\sup_\Omega |u(x)| \le M + \max_D v = M + \sqrt{\frac{1}{H^2}} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - R_\Omega^2} = M + h_{\Omega,H}.$$

Por outro lado, em $\partial\mathcal{N}_p \backslash \partial\Omega$ temos

$$w(x) = \psi(\delta) + \varphi(x) \ge \psi(\delta).$$

Então (14) é satisfeita em $\partial\mathcal{N}_p \backslash \partial\Omega$ se $\psi(\delta) \ge M + h_{\Omega,H}$, ou seja, se

$$\psi(\delta) = \frac{1}{\phi} \ln\left(\frac{\phi^2}{2\left(\frac{1}{r} + 2H\right)} \frac{1}{\phi} + 1\right) \ge M + h_{\Omega,H},$$

o que é implicado por

$$r \ge 2\left(e^{\phi\left(M + h_{\Omega,H}\right)} - 1\right)$$

e

$$He^{\phi\left(M + h_{\Omega,H}\right)} \le 1.$$

Notando agora que se as condições do Teorema 1.2 são satisfeitas para H elas também são satisfeitas para tH a prova do Teorema 1.2 é concluida aplicando-se o método da continuidade, como no Teorema 1.1.

A unicidade da solução é uma conseqüência do princípio do máximo para a diferença de duas soluções de (1). ■

Observação. Note que, quando $H = 0$ temos

$$h_{\Omega,H} = \frac{R_\Omega^2 H}{1 + \sqrt{1 - (R_\Omega H)^2}} = 0.$$

Além disso, as condições (4) e (5) são trivialmente satisfeitas quando $H = 0$. Também é fácil de ver que, quando $H = 0$ a condição (6) se reduz à condição

(3). Assim, fica comprovado que o Teorema 1.2, quando $H = 0$, implica no Teorema 1.1.

No próximo resultado, obtemos uma condição relacionando a norma C^2 de φ, a curvatura média H, o raio exterior e o diâmetro de Ω para que o problema (1) admita solução.

Denotemos por D o diâmetro de Ω:

$$D = \sup\{|p-q|\,;\, p, q \in \Omega\}.$$

Teorema 2.1 *Seja Ω um domínio limitado $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ que satisfaz a condição do círculo exterior de raio r. Dado $\varphi \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ seja*

$$E = \max\left\{2A\left(1+B^2\right), 9 + 12B^2 + 4B^4\right\} \tag{15}$$

onde A e B estão definidas em (2). Se

$$E \leq \frac{r}{8D\left[(H+1)\,r+1\right]}, \tag{16}$$

então o problema (1) possui uma única solução.

Prova. Seja $p \in \partial\Omega$. Mostraremos a existência de sub e supersoluções $z_p, w_p \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ para Q_H, respectivamente, tais que

$$w_p(p) = z_p(p) = \varphi(p)$$

com

$$z_p \leq \varphi \leq w_p$$

em Ω e tais que

$$\max\left\{\max_{p\in\partial\Omega}|\nabla z_p|\,, \max_{p\in\partial\Omega}|\nabla w_p|\right\} < \infty.$$

Para isto, seja $p_0 = (p_1, p_2)$ o centro do círculo tangente ao $\partial\Omega$ em p, com raio r e contido em $\mathbb{R}^2\backslash\Omega$ e seja a função $d : \overline{\Omega} \to [0, \infty)$, dada por:

$$d(x) = d(x, \partial B_r) = |x - p_0| - r.$$

Defina, também,

$$w = w_p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},$$

por:

$$w(x) = \varphi(x) + \psi(d(x)),$$

onde

$$\psi(d) = D \ln \left(\frac{1}{D} d + 1 \right), \ d \geq 0. \tag{17}$$

Note que $w \geq \varphi$, pois $\psi \geq 0$ e que $w(p) = \varphi(p)$. De

$$Q_H(w) = \left(1 + |Dw|^2\right) \Delta w - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} w + 2H \left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

obtemos

$$\begin{aligned} Q_H(w) &= \left(1 + |Dw|^2\right) (\Delta\varphi + \Delta\psi(d)) + 2H \left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - \left((D_1 w)^2 D_{11} w + 2 D_1 w D_2 w D_{12} w + (D_2 w)^2 D_{22} w \right) \\ &= \left(1 + |Dw|^2\right) \Delta\varphi + 2H \left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \left(1 + |Dw|^2\right) \Delta\psi(d) \\ &\quad - \left((D_1 w)^2 D_{11} \varphi + 2 D_1 w D_2 w D_{12} \varphi + (D_2 w)^2 D_{22} \varphi \right) \\ &\quad - \left((D_1 w)^2 D_{11} \psi(d) + 2 D_1 w D_2 w D_{12} \psi(d) + (D_2 w)^2 D_{22} \psi(d) \right). \end{aligned}$$

Como

$$D_i \psi(d(x)) = \psi'(d(x)) \frac{x_i - p_i}{|x - p_0|}$$

e

$$\Delta\psi(d(x)) = \psi''(d(x)) + \frac{\psi'(d(x))}{|x - p_0|}$$

então segue que

$$
\begin{aligned}
Q_H(w) \;=\;& \left(1+(D_1w)^2+(D_2w)^2\right)(D_{11}\varphi+D_{22}\varphi)+2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}}\\
&+\left(1+|Dw|^2\right)\left(\psi''(d))+\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)\\
&-\left((D_1w)^2D_{11}\varphi+2D_1wD_2wD_{12}\varphi+(D_2w)^2D_{22}\varphi\right)\\
&-\left((D_1w)^2D_{11}\psi(d)+2D_1wD_2wD_{12}\psi(d)+(D_2w)^2D_{22}\psi(d)\right)\\
=\;& D_{11}\varphi+D_{22}\varphi+(D_1w)^2D_{11}\varphi+(D_1w)^2D_{22}\varphi\\
&+(D_2w)^2D_{11}\varphi+(D_2w)^2D_{22}\varphi+2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}}\\
&+\left(1+|Dw|^2\right)\left(\psi''(d))+\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)\\
&-\left((D_1w)^2D_{11}\varphi+2D_1wD_2wD_{12}\varphi+(D_2w)^2D_{22}\varphi\right)\\
&-\left[(D_1w)^2\left(\psi''(d)\frac{(x_1-p_1)^2}{|x-p_0|^2}+\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\left(1-\frac{(x_1-p_1)^2}{|x-p_0|^2}\right)\right)\right.\\
&+2D_1wD_2w\left(\psi''(d)\frac{(x_1-p_1)(x_2-p_2)}{|x-p_0|^2}-\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\frac{(x_1-p_1)(x_2-p_2)}{|x-p_0|^2}\right)\\
&\left.+(D_2w)^2\left(\psi''(d)\frac{(x_2-p_2)^2}{|x-p_0|^2}+\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\left(1-\frac{(x_2-p_2)^2}{|x-p_0|^2}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Também segue que,

$$
\begin{aligned}
Q_H(w) &= D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1 w)^2 D_{22}\varphi + (D_2 w)^2 D_{11}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi \\
&\quad +2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \left(1+|Dw|^2\right)\left(\psi''(d) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
&\quad - \left[(D_1 w)^2 \frac{(x_1-p_1)^2}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) + (D_1 w)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right. \\
&\quad +2D_1 w D_2 w \frac{(x_1-p_1)(x_2-p_2)}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
&\quad \left. + (D_2 w)^2 \frac{(x_2-p_2)^2}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) + (D_2 w)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right] \\
&= D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1 w)^2 D_{22}\varphi + (D_2 w)^2 D_{11}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi \\
&\quad +2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \psi''(d)) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + |Dw|^2 \psi''(d) \\
&\quad + (D_1 w)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + (D_2 w)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \\
&\quad - \left[(D_1 w)^2 \frac{(x_1-p_1)^2}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)\right. \\
&\quad + (D_1 w)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + 2D_1 w D_2 w \frac{(x_1-p_1)(x_2-p_2)}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
&\quad + (D_2 w)^2 \frac{(x_2-p_2)^2}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
&\quad \left. + (D_2 w)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right]
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
Q_H(w) &= D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1w)^2 D_{22}\varphi + (D_2w)^2 D_{11}\varphi - 2D_1wD_2wD_{12}\varphi \\
&\quad +2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + |Dw|^2\psi''(d) + \psi''(d) \\
&\quad -\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)\left[(D_1w)^2\frac{(x_1-p_1)^2}{|x-p_0|^2} + \right. \\
&\quad \left. 2D_1wD_2w\frac{(x_1-p_1)(x_2-p_2)}{|x-p_0|^2} + (D_2w)^2\frac{(x_2-p_2)^2}{|x-p_0|^2}\right] \\
&= D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1w)^2 D_{22}\varphi + (D_2w)^2 D_{11}\varphi - 2D_1wD_2wD_{12}\varphi \\
&\quad +2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \psi''(d)) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + |Dw|^2\psi''(d) \\
&\quad -\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)\left\langle (D_1w, D_2w), \left(\frac{x_1-p_1}{|x-p_0|}, \frac{x_2-p_2}{|x-p_0|}\right)\right\rangle^2
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\left\langle (D_1w, D_2w), \left(\frac{x_1-p_1}{|x-p_0|}, \frac{x_2-p_2}{|x-p_0|}\right)\right\rangle = Dw\frac{x-p_0}{|x-p_0|}
$$

e

$$
\left| Dw\frac{x-p_0}{|x-p_0|}\right| \leq |Dw|,
$$

onde, como sempre, Dw é o gradiente de w. Daí, temos

$$
\left\langle (D_1w, D_2w), \left(\frac{x_1-p_1}{|x-p_0|}, \frac{x_2-p_2}{|x-p_0|}\right)\right\rangle^2 \leq |Dw|^2
$$

e como

$$
\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \leq 0
$$

então obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_H(w) \;\le\;& D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1 w)^2 D_{22}\varphi + (D_2 w)^2 D_{11}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi \\
& +2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \psi''(d) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \\
& + |Dw|^2 \psi''(d) - \left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)|Dw|^2 \\
=\;& D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1 w)^2 D_{22}\varphi + (D_2 w)^2 D_{11}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi \\
& +2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \psi''(d) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}|Dw|^2 \\
=\;& D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1 w)^2 D_{22}\varphi + (D_2 w)^2 D_{11}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi \\
& +2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \psi''(d) + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \\
=\;& \left(1+(D_2 w)^2\right)D_{11}\varphi + \left(1+(D_1 w)^2\right)D_{22}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi \\
& +2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \psi''(d) + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}.
\end{aligned}
$$

Além disso, através da desigualdade triangular temos

$$
\begin{aligned}
Q_H(w) \;\le\;& \Big|\left(1+|Dw|^2\right)D_{11}\varphi + \left(1+|Dw|^2\right)D_{22}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi \\
& + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\Big| + 2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \psi''(d) \\
\le\;& \left(1+|Dw|^2\right)|D_{11}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)|D_{22}\varphi| + 2\,|D_1 w|\,|D_2 w|\,|D_{12}\varphi| \\
& + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + 2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} + \psi''(d).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
2\,|D_1 w|\,|D_2 w| \le |Dw|^2 .
$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
Q_H(w) &\le \left(1+|Dw|^2\right)|D_{11}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)|D_{22}\varphi| + |Dw|^2\,|D_{12}\varphi| + \\
&\quad \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + \psi''(d) + 2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} \\
&\le \left(1+|Dw|^2\right)|D_{11}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)|D_{22}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)|D_{12}\varphi| + \\
&\quad \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + \psi''(d) + 2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} \\
&\le \left(1+|Dw|^2\right)\left(|D_{11}\varphi| + |D_{22}\varphi| + |D_{12}\varphi| + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
&\quad +\psi''(d) + 2H\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\left(1+|Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} \le \left(1+|Dw|^2\right)^2.$$

Por outro lado, também temos

$$\begin{aligned}
(D_i w)^2 &= (D_i\varphi + D_i\psi(d))^2 \\
&= (D_i\varphi)^2 + 2D_i\varphi\psi'(d(x))\frac{x_i-p_i}{|x-p_0|} + \psi'(d)^2\frac{(x_i-p_i)^2}{|x-p_0|^2}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$1+|Dw|^2 = 1+|D\varphi|^2 + 2\psi'(d)\left\langle D\varphi, \frac{x-p_0}{|x-p_0|}\right\rangle + \psi'(d)^2.$$

E como

$$\left\langle D\varphi, \frac{x-p_0}{|x-p_0|}\right\rangle \le \left|\left\langle D\varphi, \frac{x-p_0}{|x-p_0|}\right\rangle\right| \le |D\varphi|$$

então

$$\begin{aligned}
1+|Dw|^2 &\le 1+|D\varphi|^2 + 2\psi'(d)\,|D\varphi| + \psi'(d)^2 \\
&= 1+\left(|D\varphi| + \psi'(d)\right)^2 \le 1+2\,|D\varphi|^2 + 2\psi'(d)^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
Q_H(w) &\leq \left(1+2|D\varphi|^2+2\psi'(d)^2\right)\left(|D_{11}\varphi|+|D_{22}\varphi|+|D_{12}\varphi|+\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)\\
&\quad +\psi''(d)+2H\left(1+4|D\varphi|^2+4\psi'(d)^2+4|D\varphi|^4\right.\\
&\quad \left.+8|D\varphi|^2\psi'(d)^2+4\psi'(d)^4\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{2}+|D\varphi|^2+\psi'(d)^2\right)(|D_{11}\varphi|+|D_{22}\varphi|+|D_{12}\varphi|)\\
&\quad +\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\left(1+2|D\varphi|^2+2\psi'(d)^2\right)+\psi''(d)\\
&\quad +2H\left(1+4|D\varphi|^2+4\psi'(d)^2+4|D\varphi|^4\right.\\
&\quad \left.+8|D\varphi|^2\psi'(d)^2+4\psi'(d)^4\right)\\
&\leq 2\left(1+|D\varphi|^2+\psi'(d)^2\right)(|D_{11}\varphi|+|D_{22}\varphi|+|D_{12}\varphi|)\\
&\quad +\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\left(1+2|D\varphi|^2\right)+2\frac{\psi'(d)^3}{|x-p_0|}+\psi''(d)\\
&\quad +2H+8H|D\varphi|^2+8H\psi'(d)^2+8H|D\varphi|^4\\
&\quad +16H|D\varphi|^2\psi'(d)^2+8H\psi'(d)^4
\end{aligned}$$

Como $|x-p_0|\geq r$ então

$$\begin{aligned}
Q_H(w) &\leq 2\left(1+|D\varphi|^2+\psi'(d)^2\right)(|D_{11}\varphi|+|D_{22}\varphi|+|D_{12}\varphi|)\\
&\quad +\frac{\psi'(d)}{r}\left(1+2|D\varphi|^2\right)+2\frac{\psi'(d)^3}{r}+\psi''(d)\\
&\quad +2H+8H|D\varphi|^2+8H\psi'(d)^2+8H|D\varphi|^4\\
&\quad +16H|D\varphi|^2\psi'(d)^2+8H\psi'(d)^4
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
Q_H(w) &\leq 2A\left(1+B^2\right)+2A\psi'(d)^2+\frac{\psi'(d)}{r}\left(1+2B^2\right) \qquad (18)\\
&\quad +2\frac{\psi'(d)^3}{r}+\psi''(d)+2H+8HB^2+8H\psi'(d)^2\\
&\quad +8HB^4+16HB^2\psi'(d)^2+8H\psi'(d)^4
\end{aligned}$$

Usando (17) em (18) obtemos

$$\begin{aligned}
Q_H(w) &\leq 2A\left(1+B^2\right)+2A\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{D}d+1}\frac{1}{r}\left(1+2B^2\right) \\
&+\frac{2}{r}\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^3}-\frac{1}{D}\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2}+2H+8HB^2+8H\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2} \\
&+8HB^4+16HB^2\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2}+8H\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^4} \\
&\leq \left(\frac{1}{D}d+1\right)^2\left[2A\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{D}d+1}\frac{1}{r}\left(1+2B^2\right)\right. \\
&+\frac{2}{r}\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^3}+8H\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2}+16HB^2\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2} \\
&\left.+8H\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^4}\right]+2A\left(1+B^2\right)+2H+8HB^2+8HB^4-\frac{1}{D}\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2} \\
&= 2A\left(1+B^2\right)+2A+\frac{1}{r}\left(1+2B^2\right)\left(\frac{1}{D}d+1\right)+\frac{2}{r}\frac{1}{\frac{1}{D}d+1}+8H+16HB^2 \\
&+8H\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2}+2H+8HB^2+8HB^4-\frac{1}{D}\frac{1}{\left(\frac{1}{D}d+1\right)^2}
\end{aligned}$$

Como $d \leq D$ então obtemos

$$Q_H(w) \leq 2A\left(1+B^2\right)+2A+\frac{2}{r}\left(2+2B^2\right)+2H\left(9+12B^2+4B^4\right)-\frac{1}{4D}.$$

Agora, assumindo que φ satisfaz (16) e (15) segue que

$$\begin{aligned}
Q_H(w) &\leq 2E\left[\frac{(H+1)r+1}{r}\right]-\frac{1}{4D} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Portanto, w é uma supersolução para Q_H. Agora, defina $z = z_p$ por

$$z(x) = \varphi(x) - \psi(d(x)), \tag{19}$$

onde ψ é dado por (17). Dos cálculos acima, temos

$$\begin{aligned}
Q_H(z) \geq -&\left[2A\left(1+B^2\right)+2A\psi'(d)^2+\psi''(d)+\frac{\psi'(d)}{r}\left(1+2B^2\right)\right. \\
&+\frac{2\psi'(d)^3}{r}+2H+8HB^2+8H\psi'(d)^2 \\
&\left.+8HB^4+16HB^2\psi'(d)^2+8H\psi'(d)^4\right].
\end{aligned}$$

Note que o lado direito desta última expressão tem o sinal oposto ao de (18) de modo que

$$Q_H(z) \geq 0.$$

De (19) temos que $z(p) = \varphi(p)$ e $z \leq \varphi$. O teorema então segue do método da continuidade.

A unicidade da solução é uma conseqüência do princípio do máximo para a diferença de duas soluções de (1). ■

Teorema 2.2 *Se*

$$r \geq \max\left\{e^{4M\left(52A+50AB^2+10B^2+5\right)} - 1, 1\right\} \tag{20}$$

então o problema (1) possui uma única solução quando $H = 0$.

Prova. Suponha que $\min \varphi = 0$. Escolha $p \in \partial\Omega$. Seja $p_0 = (p_1, p_2)$ o centro do círculo tangente a $\partial\Omega$ em p, com raio r e contido em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$, e seja

$$d(x) = d(x, \partial B_r) = |x - p_0| - r.$$

Observe que, $d(p) = 0$. Defina

$$w(x) = \varphi(x) + \psi(d(x)),$$

onde

$$\psi(d) = \delta \ln(bd + 1), \tag{21}$$

onde δ, b são constantes positivas a serem determinadas. Nós iremos provar que w é uma barreira superior local em p para alguma escolha de δ e b. Para a barreira inferior, note que se w é uma barreira superior para Q_0 em p, então $w = \varphi - \psi$ é uma barreira inferior para Q_0 em p. Afim de estabelecermos uma estimativa para $Q_0[w]$, segue que:

$$D_i d(x) = \frac{x_i - p_i}{|x - p_0|},$$

$$D_{ij} = \frac{1}{|x - p_0|}\left(\delta_{ij} - \frac{(x_i - p_i)(x_j - p_j)}{|x - p_0|^2}\right),$$

$$\begin{aligned} \Delta d(x) &= D_{11}d(x) + D_{22}d(x) \\ &= \frac{1}{|x - p_0|}. \end{aligned}$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$D_i\psi(d(x)) = \psi'(d(x))\frac{x_i - p_i}{|x - p_0|},$$

$$\begin{aligned} D_{ij}\psi(d(x)) &= \psi''(d(x))\frac{(x_i - p_i)(x_j - p_j)}{|x - p_0|^2} \\ &\quad + \frac{\psi'(d(x))}{|x - p_0|}\left(\delta_{ij} - \frac{(x_i - p_i)(x_j - p_j)}{|x - p_0|^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi(d(x)) &= \operatorname{div}(D_1\psi, D_2\psi) = D_{11}\psi + D_{22}\psi \\ &= \psi''(d(x)) + \frac{\psi'(d(x))}{|x - p_0|}. \end{aligned}$$

Daí, substituindo em $Q_0[w]$, temos:

$$\begin{aligned} Q_0[w] &= \left(1 + |Dw|^2\right)(\Delta\varphi + \Delta\psi(d)) \\ &\quad - \left((D_1w)^2 D_{11}w + 2D_1wD_2wD_{12}w + (D_2w)^2 D_{22}w\right) \\ &= \left(1 + |Dw|^2\right)\Delta\varphi + \left(1 + |Dw|^2\right)\Delta\psi(d) \\ &\quad - \Big((D_1w)^2 (D_{11}\varphi + D_{11}\psi(d)) + 2D_1wD_2w(D_{12}\varphi + D_{12}\psi(d)) \\ &\quad + (D_2w)^2(D_{22}\varphi + D_{22}\psi(d))\Big) \\ &= \left(1 + (D_1w)^2 + (D_2w)^2\right)(D_{11}\varphi + D_{22}\varphi) \\ &\quad + \left(1 + |Dw|^2\right)\left(\psi''(d)) + \frac{\psi'(d)}{|x - p_0|}\right) \\ &\quad - \left((D_1w)^2 D_{11}\varphi + 2D_1wD_2wD_{12}\varphi + (D_2w)^2 D_{22}\varphi\right) \\ &\quad - \left((D_1w)^2 D_{11}\psi(d) + 2D_1wD_2wD_{12}\psi(d) + (D_2w)^2 D_{22}\psi(d)\right) \end{aligned}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
Q_0\left[w\right] = {} & D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + \left(D_1 w\right)^2 D_{11}\varphi + \left(D_1 w\right)^2 D_{22}\varphi + \left(D_2 w\right)^2 D_{11}\varphi \\
& + \left(D_2 w\right)^2 D_{22}\varphi + \left(1 + |Dw|^2\right)\left(\psi''(d)) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
& - \left(\left(D_1 w\right)^2 D_{11}\varphi + 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi + \left(D_2 w\right)^2 D_{22}\varphi\right) \\
& - \left[\left(D_1 w\right)^2 \left(\psi''(d)\frac{\left(x_1-p_1\right)^2}{|x-p_0|^2} + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\left(1 - \frac{\left(x_1-p_1\right)^2}{|x-p_0|^2}\right)\right)\right. \\
& + 2D_1 w D_2 w \left(\psi''(d)\frac{\left(x_1-p_1\right)\left(x_2-p_2\right)}{|x-p_0|^2}\right. \\
& \left. - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\frac{\left(x_1-p_1\right)\left(x_2-p_2\right)}{|x-p_0|^2}\right) \\
& \left. + \left(D_2 w\right)^2 \left(\psi''(d)\frac{\left(x_2-p_2\right)^2}{|x-p_0|^2} + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\left(1 - \frac{\left(x_2-p_2\right)^2}{|x-p_0|^2}\right)\right)\right] \\
= {} & D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + \left(D_1 w\right)^2 D_{22}\varphi + \left(D_2 w\right)^2 D_{11}\varphi \\
& - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi + \left(1 + |Dw|^2\right)\left(\psi''(d) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
& - \left[\left(D_1 w\right)^2 \frac{\left(x_1-p_1\right)^2}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) + \left(D_1 w\right)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right. \\
& + 2D_1 w D_2 w \frac{\left(x_1-p_1\right)\left(x_2-p_2\right)}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
& \left. + \left(D_2 w\right)^2 \frac{\left(x_2-p_2\right)^2}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) + \left(D_2 w\right)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right] \\
= {} & D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + \left(D_1 w\right)^2 D_{22}\varphi + \left(D_2 w\right)^2 D_{11}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi \\
& + \psi''(d) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + |Dw|^2 \psi''(d) + \left(D_1 w\right)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \\
& + \left(D_2 w\right)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} - \left[\left(D_1 w\right)^2 \frac{\left(x_1-p_1\right)^2}{|x-p_0|^2}\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)\right. \\
& + \left(D_1 w\right)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + 2D_1 w D_2 w \frac{\left(x_1-p_1\right)\left(x_2-p_2\right)}{|x-p_0|^2} \\
& \left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) + \left(D_2 w\right)^2 \frac{\left(x_2-p_2\right)^2}{|x-p_0|^2} \\
& \left.\left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) + \left(D_2 w\right)^2 \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right]
\end{aligned}
$$

E

$$
\begin{aligned}
Q_0\left[w\right] &= D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + \left(D_1 w\right)^2 D_{22}\varphi + \left(D_2 w\right)^2 D_{11}\varphi \\
&\quad -2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi + \psi''(d)) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + |Dw|^2 \psi''(d) \\
&\quad - \left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \left[\left(D_1 w\right)^2 \frac{\left(x_1-p_1\right)^2}{|x-p_0|^2} \right. \\
&\quad \left. +2D_1 w D_2 w \frac{\left(x_1-p_1\right)\left(x_2-p_2\right)}{|x-p_0|^2} + \left(D_2 w\right)^2 \frac{\left(x_2-p_2\right)^2}{|x-p_0|^2} \right] \\
&= D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + \left(D_1 w\right)^2 D_{22}\varphi + \left(D_2 w\right)^2 D_{11}\varphi \\
&\quad -2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi + \psi''(d)) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + |Dw|^2 \psi''(d) \\
&\quad - \left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \left\langle \left(D_1 w, D_2 w\right), \left(\frac{x_1-p_1}{|x-p_0|}, \frac{x_2-p_2}{|x-p_0|}\right) \right\rangle^2
\end{aligned}
$$

Como

$$
\left\langle \left(D_1 w, D_2 w\right), \left(\frac{x_1-p_1}{|x-p_0|}, \frac{x_2-p_2}{|x-p_0|}\right) \right\rangle \leq |Dw|
$$

então, obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_0[w] &\leq D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1w)^2 D_{22}\varphi + (D_2w)^2 D_{11}\varphi \\
&\quad -2D_1wD_2wD_{12}\varphi + \psi''(d) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \\
&\quad + |Dw|^2 \psi''(d) - \left(\psi''(d) - \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)|Dw|^2 \\
&= D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1w)^2 D_{22}\varphi + (D_2w)^2 D_{11}\varphi \\
&\quad -2D_1wD_2wD_{12}\varphi + \psi''(d) + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \\
&\quad + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}|Dw|^2 \\
&= D_{11}\varphi + D_{22}\varphi + (D_1w)^2 D_{22}\varphi + (D_2w)^2 D_{11}\varphi \\
&\quad -2D_1wD_2wD_{12}\varphi + \psi''(d) \\
&\quad + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \\
&= \left(1+(D_2w)^2\right)D_{11}\varphi + \left(1+(D_1w)^2\right)D_{22}\varphi \\
&\quad -2D_1wD_2wD_{12}\varphi + \psi''(d) \\
&\quad + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$
\begin{aligned}
Q_0[w] &\leq \left(1+|Dw|^2\right)|D_{11}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)|D_{22}\varphi| \\
&\quad +2|D_1w||D_2w||D_{12}\varphi| \\
&\quad + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + \psi''(d).
\end{aligned}
$$

Como $(|D_1w| - |D_2w|)^2 \geq 0$ então $|D_1w|^2 - 2|D_1w||D_2w| + |D_2w|^2 \geq 0$.

Logo,$|Dw|^2 \geq 2\,|D_1 w|\,|D_2 w|$. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
Q_0\,[w] &\leq \left(1+|Dw|^2\right)|D_{11}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)|D_{22}\varphi| \\
&\quad + |Dw|^2\,|D_{12}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} + \psi''(d) \\
&\leq \left(1+|Dw|^2\right)|D_{11}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)|D_{22}\varphi| \\
&\quad + \left(1+|Dw|^2\right)|D_{12}\varphi| + \left(1+|Dw|^2\right)\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|} \\
&\quad + \psi''(d) \\
&\leq \left(1+|Dw|^2\right)\left(|D_{11}\varphi| + |D_{22}\varphi| + |D_{12}\varphi| + \frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right) \\
&\quad + \psi''(d).
\end{aligned}$$

Po outro lado, temos

$$\begin{aligned}
(D_i w)^2 &= (D_i\varphi + D_i\psi(d))^2 \\
&= (D_i\varphi)^2 + 2D_i\varphi\psi'(d(x))\frac{x_i-p_i}{|x-p_0|} \\
&\quad + \psi'(d)^2\frac{(x_i-p_i)^2}{|x-p_0|^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|Dw|^2 &= (D_1\varphi)^2 + (D_2\varphi)^2 + 2D_1\varphi\psi'(d)\frac{x_1-p_1}{|x-p_0|} \\
&\quad + 2D_2\varphi\psi'(d)\frac{x_2-p_2}{|x-p_0|} + \psi'(d)^2\frac{(x_1-p_1)^2}{|x-p_0|^2} \\
&\quad + \psi'(d)^2\frac{(x_2-p_2)^2}{|x-p_0|^2}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
1+|Dw|^2 &= 1+|D\varphi|^2 \\
&\quad + 2\psi'(d)\left(D_1\varphi\frac{x_1-p_1}{|x-p_0|} + D_2\varphi\frac{x_2-p_2}{|x-p_0|}\right) \\
&\quad + \psi'(d)^2\left(\frac{(x_1-p_1)^2}{|x-p_0|^2} + \frac{(x_2-p_2)^2}{|x-p_0|^2}\right) \\
&= 1+|D\varphi|^2 + 2\psi'(d)\left\langle D\varphi, \frac{x-p_0}{|x-p_0|}\right\rangle + \psi'(d)^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\left\langle D\varphi, \frac{x-p_0}{|x-p_0|}\right\rangle &\leq \left|\left\langle D\varphi, \frac{x-p_0}{|x-p_0|}\right\rangle\right| \\ &= \left|D\varphi\frac{x-p_0}{|x-p_0|}\right| \leq |D\varphi|\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}1+|Dw|^2 &\leq 1+|D\varphi|^2+2\psi'(d)\,|D\varphi|+\psi'(d)^2 \\ &= 1+\big(|D\varphi|+\psi'(d)\big)^2.\end{aligned}$$

Pela Identidade do Paralelogramo, temos

$$2\,|D\varphi|^2+2\psi'(d)^2=\big(|D\varphi|+\psi'(d)\big)^2+\big(|D\varphi|-\psi'(d)\big)^2\geq\big(|D\varphi|+\psi'(d)\big)^2.$$

Logo,

$$1+|Dw|^2\leq 1+2\,|D\varphi|^2+2\psi'(d)^2$$

Segue que,

$$\begin{aligned}Q_0\,[w] &\leq \left(1+2\,|D\varphi|^2+2\psi'(d)^2\right) \\ &\quad \left(|D_{11}\varphi|+|D_{22}\varphi|+|D_{12}\varphi|+\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\right)+\psi''(d) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}+|D\varphi|^2+\psi'(d)^2\right)\left(|D_{11}\varphi|+|D_{22}\varphi|+|D_{12}\varphi|\right) \\ &\quad +\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\left(1+2\,|D\varphi|^2+2\psi'(d)^2\right)+\psi''(d) \\ &\leq 2\left(1+|D\varphi|^2+\psi'(d)^2\right)\left(|D_{11}\varphi|+|D_{22}\varphi|+|D_{12}\varphi|\right) \\ &\quad +\frac{\psi'(d)}{|x-p_0|}\left(1+2\,|D\varphi|^2\right)+2\frac{\psi'(d)^3}{|x-p_0|}+\psi''(d).\end{aligned}$$

Como $|x-p_0| \geq r$ então

$$\begin{aligned}
Q_0[w] &\leq 2\left(1+|D\varphi|^2+\psi'(d)^2\right)\left(|D_{11}\varphi|+|D_{22}\varphi|+|D_{12}\varphi|\right)\\
&\quad +\frac{\psi'(d)}{r}\left(1+2|D\varphi|^2\right)+2\frac{\psi'(d)^3}{r}+\psi''(d)\\
&\leq 2\left|D^2\varphi\right|\left(1+|D\varphi|^2+\psi'(d)^2\right)+\frac{\psi'(d)}{r}\left(1+2|D\varphi|^2\right)\\
&\quad +2\frac{\psi'(d)^3}{r}+\psi''(d)\\
&\leq 2A\left(1+B^2+\psi'(d)^2\right)+\frac{\psi'(d)}{r}\left(1+2B^2\right)\\
&\quad +2\frac{\psi'(d)^3}{r}+\psi''(d)
\end{aligned}$$

De (21) obtemos

$$\begin{aligned}
Q_0[w] &\leq 2A\left(1+B^2+\delta^2\frac{b^2}{(bd+1)^2}\right)+\frac{\delta b}{r(bd+1)}\left(1+2B^2\right)\\
&\quad +\frac{2\delta^3 b^3}{r(bd+1)^3}-\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2}\\
&\leq 2A\left(1+B^2+\delta^2\frac{b^2}{(bd+1)^2}\right)+\frac{\delta b}{r(bd+1)}\left(1+2B^2\right)\\
&\quad -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2}\left[1-\frac{2\delta^2 b}{r(bd+1)}\right]
\end{aligned}$$

Observe que o último termo acima é não positivo se, e somente se

$$1-\frac{2\delta^2 b}{r(bd+1)} \geq 0.$$

O que implica

$$\frac{b}{bd+1} \leq \frac{r}{2\delta^2}.$$

Note que esta última desigualdade é satisfeita se $b=\frac{r}{4\delta^2}$. Além disso, para essa escolha de b temos

$$\begin{aligned}
& -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2}\left[1-\frac{2\delta^2 b}{r(bd+1)}\right] \\
= \quad & -\frac{1}{16\delta^3}\frac{r^2}{\left(\frac{1}{4\delta^2}dr+1\right)^2}\left[1-\frac{1}{2\left(\frac{1}{4\delta^2}dr+1\right)}\right] \\
= \quad & -\frac{1}{32\delta^3}\frac{r^2}{\left(\frac{1}{4\delta^2}dr+1\right)^2}\left[2-\frac{1}{\left(\frac{1}{4\delta^2}dr+1\right)}\right] \\
\leq \quad & -\frac{1}{32\delta^3}\frac{r^2}{\left(\frac{1}{4\delta^2}dr+1\right)^2},
\end{aligned}$$

pois

$$2-\frac{1}{\left(\frac{1}{4\delta^2}dr+1\right)} \geq 1.$$

Logo, para essa escolha b obtemos

$$\begin{aligned}
Q_0[w] \quad \leq \quad & 2A\left(1+B^2+\frac{1}{16\delta^2}\frac{r^2}{\left(\frac{1}{4\delta^2}dr+1\right)^2}\right) \\
& +\frac{1}{4\delta}\frac{1}{\frac{1}{4\delta^2}dr+1}\left(1+2B^2\right)-\frac{1}{32\delta^3}\frac{r^2}{\left(\frac{1}{4\delta^2}dr+1\right)^2} \\
= \quad & \frac{1}{2\left(4\delta^2+dr\right)^2}\left(4AB^2d^2r^2+32AB^2dr\delta^2+4B^2dr\delta\right. \\
& +64AB^2\delta^4+16B^2\delta^3+4Ad^2r^2+32Adr\delta^2+2dr\delta \\
& \left.+4Ar^2\delta^2-r^2\delta+64A\delta^4+8\delta^3\right)
\end{aligned}$$

Logo, teremos $Q_0[w] \leq 0$ se

$$\begin{aligned}
& 4AB^2d^2r^2+32AB^2dr\delta^2+4B^2dr\delta+64AB^2\delta^4+16B^2\delta^3+4Ad^2r^2 \\
& +32Adr\delta^2+2dr\delta+4Ar^2\delta^2-r^2\delta+64A\delta^4+8\delta^3 \\
= \quad & \left(4AB^2r^2+4Ar^2\right)d^2+\left(32ArB^2\delta^2+4rB^2\delta+32Ar\delta^2+2r\delta\right)d \\
& +64AB^2\delta^4+16B^2\delta^3+4Ar^2\delta^2-r^2\delta+64A\delta^4+8\delta^3 \leq 0
\end{aligned}$$

Para $0 \leq d \leq \delta$ temos

$$\begin{aligned}
& \left(4AB^2r^2 + 4Ar^2\right) d^2 + \left(32ArB^2\delta^2 + 4rB^2\delta + 32Ar\delta^2 + 2r\delta\right) d \\
& +64AB^2\delta^4 + 16B^2\delta^3 + 4Ar^2\delta^2 - r^2\delta + 64A\delta^4 + 8\delta^3 \\
\leq \; & \left(4AB^2r^2 + 4Ar^2\right) \delta^2 + \left(32ArB^2\delta^2 + 4rB^2\delta + 32Ar\delta^2 + 2r\delta\right) \delta \\
& +64AB^2\delta^4 + 16B^2\delta^3 + 4Ar^2\delta^2 - r^2\delta + 64A\delta^4 + 8\delta^3 \\
= \; & \left(64AB^2 + 64A\right) \delta^4 + \left(32Ar + 16B^2 + 32AB^2r + 8\right) \delta^3 \\
& + \left(4AB^2r^2 + 4B^2r + 8Ar^2 + 2r\right) \delta^2 + \left(-r^2\right) \delta \\
= \; & \delta \left[\left(64AB^2 + 64A\right) \delta^3 + \left(32Ar + 16B^2 + 32AB^2r + 8\right) \delta^2 \right. \\
& \left. + \left(4AB^2r^2 + 4B^2r + 8Ar^2 + 2r\right) \delta + \left(-r^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta \leq 1$, obtemos que $Q_0[w] \leq 0$ para $0 \leq d \leq \delta$ se

$$\begin{aligned}
& \left(64AB^2 + 64A\right) \delta^3 + \left(32Ar + 16B^2 + 32AB^2r + 8\right) \delta^2 \\
& + \left(4AB^2r^2 + 4B^2r + 8Ar^2 + 2r\right) \delta + \left(-r^2\right) \\
\leq \; & \left(64AB^2 + 64A\right) \delta + \left(32Ar + 16B^2 + 32AB^2r + 8\right) \delta \\
& + \left(4AB^2r^2 + 4B^2r + 8Ar^2 + 2r\right) \delta - r^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Logo, segue que $Q_0[w] \leq 0$ para $0 \leq d \leq \delta$ se

$$\delta \leq \frac{r^2}{\left(4AB^2 + 8A\right) r^2 + \left(32A + 32AB^2 + 4B^2 + 2\right) r + 64A + 64AB^2 + 16B^2 + 8}.$$

Note que a função

$$f(r) = \frac{r^2}{\left(4AB^2 + 8A\right) r^2 + \left(32A + 32AB^2 + 4B^2 + 2\right) r + 64A + 64AB^2 + 16B^2 + 8}$$

é crescente em r. Daí temos

$$\frac{1}{104A + 100AB^2 + 20B^2 + 10} = f(1) \leq f(r), r \geq 1$$

Então temos que $Q_0\left[w\right] \leq 0$ se $0 < d \leq \delta$ para

$$\delta = \frac{1}{104A + 100AB^2 + 20B^2 + 10}. \tag{22}$$

Em resumo: definindo δ por (22) e tomando $b = r/\left(4\delta^2\right)$, temos que $Q_0[w] \leq 0$ em $\mathcal{N}_p$ onde

$$\mathcal{N}_p = \left\{x \in \Omega \mid 0 \leq d(x) \leq \delta\right\}.$$

Portanto, para garantir que w é uma barreira local superior para Q_0 em $\mathcal{N}_p$ a função w deve satisfazer a condição da altura a priori

$$w|_{\partial\mathcal{N}_p} \geq u|_{\partial\mathcal{N}_p} \tag{23}$$

onde u é solução de $Q_0[u] = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Observe que com as escolhas acima temos

$$\psi(d) = \frac{\ln\left(\frac{r\left(104A+100AB^2+20B^2+10\right)^2 d}{4} + 1\right)}{104A + 100AB^2 + 20B^2 + 10}.$$

Em $\partial\mathcal{N}_p \cap \partial\Omega$ temos $u = \varphi$ então (23) é satisfeita nesses pontos.

Por outro lado, pelo princípio do máximo temos $\sup|u| \leq M$. Então, em $\partial\mathcal{N}_p\backslash\partial\Omega$ temos

$$w(x) = \psi(\delta) + \varphi(x) \geq \psi(\delta) - M.$$

Logo, (23) é satisfeita em $\partial\mathcal{N}_p\backslash\partial\Omega$ se $\psi(\delta) \geq 2M$, ou seja,

$$\frac{\ln\left(\frac{r\left(104A+100AB^2+20B^2+10\right)^2}{4}\frac{1}{104A+100AB^2+20B^2+10} + 1\right)}{104A + 100AB^2 + 20B^2 + 10} \geq 2M.$$

O que é garantido por

$$r \geq e^{4M\left(52A+50AB^2+10B^2+5\right)} - 1$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} & e^{4M\left(52A+50AB^2+10B^2+5\right)} - 1 \\ \geq \quad & \frac{4\left(e^{4M\left(52A+50AB^2+10B^2+5\right)} - 1\right)}{104A + 100AB^2 + 20B^2 + 10}. \end{aligned}$$

Logo, então (23) é satisfeita em $\partial\mathcal{N}_p\backslash\partial\Omega$.

Observe agora que se a condição (20) é satisfeita para um dado φ ela também é satisfeita para $t\varphi$ para $t \in [0,1]$, assim concluímos a prova do teorema usando o método da continuidade. Definindo

$$V = \{t \in [0,1] \mid \exists u_t \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ such that } Q_0\left[u_t\right] = 0,\ u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\},$$

temos que $V \neq \varnothing$, pois $t = 0 \in V$. Além disso, V é aberto pelo teorema da função implícita. Das barreiras acima, obtemos uma estimativa uniforme C^1 a priori para a família de problemas de Dirichlet $Q_0\left[u_t\right] = 0$, $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$, garantindo que V é fechado ([GT]). Portanto, $V = [0,1]$.

A unicidade da solução é uma conseqüência do princípio do máximo para a diferença de duas soluções de (1). ■

3 Referências Bibliográficas

[F] Finn, R. "*On Equations of Minimal Surface Type",* Annals of Mathematics, 60, 397-416, 1954.

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger,"*elliptic partial differential equation of second order"*, Springer-Verlag, 2^{nd} edition, 1998.

[R] J. Ripoll, *"Some characterization, uniqueness and existence results for Euclidean graphs of constant mean curvature with planar boundary"*, Pacific Journal of Math., Vol 198, No. 1, 2001.

[RD] T. Radó, *"Contributions to the theory of minimal surfaces",* Acta Litt. Sci. Univ. Szeged, 6, 1-20, 1932.

[RS] J.Ripoll, L.Sauer, "*A Note on the Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Nonconvex Planar Domains." a ser publicado na Revista Matemática Contemporânea, Vol 34, 2008.*

[S] J. Serrin, *"The Dirichlet problem for surfaces of constant mean curvature",* Proc. of London Math. Society, (3) 21, 361-384,1970.