Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Cadernos de Matemática e Estatística
Série B: Trabalho de Apoio Dodático

NOTAS DA 1a: OFICINA DE MATEMATICA DA UFRGS

Elisa Haag
Loiva Cardoso de Zeni
Maria Alice Gravina
Vera Clotilde Carneiro

Série B, nº 8, JAN/92
Porto Alegre, janeiro de 1992

Esta Oficina tem como proposta a resolução de problemas com ênfase em conceitos e idéias matemáticas; os aspectos computacionais surgem como necessidade natural e não como algo importante em si mesmo. Os problemas, todos no contexto de aplicação da Matemática nas diversas áreas do conhecimento, envolvem a análise de funções elementares de variável real sob os seguintes aspectos: linearidade, taxas de crescimento e decrescimento, periodicidade, e comportamento exponencial.

Este trabalho, realizado conjuntamente por professores dos 2º e 3º graus, é o início de uma proposta no Instituto de Matemática da Universidade Federal Rio Grande do Sul de desenvolvimento de conteúdos matemáticos de 2º grau a partir de situações-problema, abordando-se nas soluções tanto os aspectos qualitativos como os quantitativos.

```
     +----------------+                          +----------------+
    /    MUNDO       /|                         /    MUNDO       /|
   /                / |                        /                / |
  +----------------+  |                       +----------------+ M|
  | +----------+   | R|CONSTANTES X VARIAVEIS | +----------+   | A|
  | |PROBLEMA|     |  |---------------------->| |PROBLEMA|     | T|
  | +----------+   |  |  RELAÇOES FUNCIONAIS  | +----------+   | E|
  |      |         | E|                       |      |         | M|
  |      |         |  |                       |      |         | A|
  |      |         |  |                       |      |         | T|
  |      |         | A|                       |      |         | I|
  |      |         |  |                       |      |         | C|
  | +---------+    |  |    INTERPRETAÇAO      | +---------+    | O|
  | |SOLUÇAO|      | L|<----------------------| |SOLUÇAO|      |  |
  | +---------+    |  +                       | +---------+    |  +
  |                | /                        |                | /
  +----------------+                          +----------------+
```

Esta 1.a Oficina de Matemática tem seu desenvolvimento esquematizado no quadro acima, qual seja: dado um PROBLEMA do MUNDO REAL, através da determinação das CONSTANTES E VARIAVEIS do problema e das EXPRESSOES ANALITICAS das RELAçOES FUNCIONAIS que existem entre tais grandezas, obtidas a partir dos dados e do conhecimento cientifico que se dispõe, a questão se transforma num PROBLEMA DO MUNDO MATEMATICO. Através das operações matematicas que se efetuam sobre tais expressões, obtém-se a SOLUÇAO MATEMATICA. Pela INTERPRETAÇAO das soluções encontradas à luz da Ciência na qual se insere o problema, busca-se a SOLUçAO do PROBLEMA DO MUNDO REAL, completando-se assim o diagrama acima.

VARIAVEIS

Chama-se de VARIAVEL ao simbolo cujos valores podem trocar ao longo de uma determinada situação-problema. Aqueles valores que NÃO se alteram em QUALQUER situação, são ditos CONSTANTES.

Nas CIENCIAS EXPERIMENTAIS, as variáveis, isto é, os simbolos cujos valores podem trocar no curso do experimento, são ditas OBSERVAVEIS. Aqueles valores que NAO se alteram em QUALQUER experimento são ditos CONSTANTES e os que NAO se alteram em um PARTICULAR experimento, chamados PARAMETROS.

A ideia de VARIAVEL é DISTINTA da idéia de INCOGNITA ; por exemplo:
x e um numero do conjunto { 1,2,3,4,5 } (x é VARIAVEL)

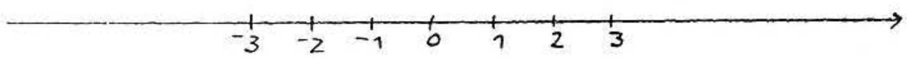
3*x - 5 = 2*x + 1 (x é INCOGNITA)

Chama-se de VARIAVEL NUMERICA REAL a variável matemática que assume valores num subconjunto de números reais. Admite a seguinte classificação:

CONTINUA :quando o dominio da variável real é um INTERVALO ou uma UNIAO DE INTERVALOS DE NUMEROS REAIS.

DISCRETA :quando o domínio da variável real é um CONJUNTO ENUMERAVEL.

REPRESENTAÇAO GRAFICA DA VARIAVEL NUMERICA REAL



RELAÇOES FUNCIONAIS

Dadas duas variaveis x e y, chama-se de RELAÇAO FUNCIONAL qualquer DEPENDENCIA entre essas variaveis.

```
+-------------+                         +-------------+
|  variável   |        RELAÇAO          |  variável   |
|     x       |<----------------------->|     y       |
+-------------+       FUNCIONAL         +-------------+
```

FUNÇOES

Dadas x e y variaveis cujos domínios são X e Y respectivamente , diz-se que y é FUNÇAO de x , se existe uma RELAÇAO FUNCIONAL entre os valores de x e y tal que, a cada valor de x (INPUT) , corresponde um UNICO valor de y (OUTPUT). Se isso ocorre para TODOS os valores de x em X , diz-se que se tem uma FUNÇAO DEFINIDA EM X e QUE TOMA VALORES EM Y ou, mais simplesmente ,uma FUNÇAO DE X EM Y.

Mais simplesmente ainda: uma FUNÇAO DE X EM Y é uma CORRESPONDENCIA que, a todo e qualquer valor x em X, ASSOCIA um UNICO valor y em Y.

```
+-----------+                 +-----------+
¦   INPUT   ¦     FUNÇAO      ¦  OUTPUT   ¦
¦     x     ¦---------------->¦     y     ¦
+-----------+        f        +-----------+
```

(Compare o sentido da seta com aquele da relação funcional)

```
    +-----------+                  +------------+
   /   INPUT   /¦                 /    OUTPUT  /¦
  +--- --------+ ¦   FUNÇAO      +------------+ ¦
  ¦Para todo e¦ + ------------->¦ existe e   ¦ +
  ¦qualquer x ¦/    f:X--->Y     ¦ é único y  ¦/
  +-----------+                  +------------+
```

(Observe que uma funcão é uma relação funcional UNIVOCA em y)

Nas CIENCIAS EXPERIMENTAIS,x é o OBSERVAVEL cujos valores são CONTROLADOS pelo experimentador e y, o OBSERVAVEL MEDIDO a partir dos valores atribuidos a x.

Chama-se de FUNÇAO REAL DE VARIAVEL REAL a função cujos INPUT e OUTPUT assumem valores em SUBCONJUNTOS DE NUMEROS REAIS.

Denominam-se de EXPRESSOES ANALITICAS as expressões matematicas constituídas de variáveis e constantes cujos valores se podem determinar por meio das operações do Cálculo. A lista de tais operações aplicadas ao INPUT x para obter o OUTPUT y, da-se o nome de FLUXOGRAMA.

ATIVIDADE-MODELO

Considere:

```
+------------------------------------------------------------------+
| C=circulo (qualquer e fixo) no plano de raio 3                    |
|                                                                   |
| P=Familia dos polígonos regulares convexos inscritos em C         |
|                                                                   |
+------------------------------------------------------------------+
```

Tome as seguintes grandezas:

```
+---------------------------------------------------------------------+
|R=medida do raio do círculo                                           |
|n=número   de  lados  do  polígono                                    |
|L=medida do lado do poligono                                          |
|a=ângulo oposto ao lado do poligono e determinado por dois            |
|  raios   (ângulo central)                                            |
+---------------------------------------------------------------------+
```

Liste:

```
+-------------------------+    +---------------------------------------+
|CONSTANTES:              |    |VARIAVEIS DISCRETAS:                   |
|                         |    |                                       |
|VARIAVEIS E DOMINIOS:    |    |VARIAVEIS CONTINUAS:                   |
+-------------------------+    |                                       |
                               |VARIAVEL INDEPENDENTE ou INPUT:        |
                               |                                       |
                               |VARIAVEL DEPENDENTE ou OUTPUT:         |
                               +---------------------------------------+
```

Determine as EXPRESSOES ANALITICAS das RELAÇOES FUNCIONAIS entre as variáveis do problema. Tais relações são FUNÇOES ?

Obtenha o FLUXOGRAMA relativo às EXPRESSOES ANALITICAS das FUNÇOES.

Expressão Analítica a=2*pi/n

```
+---------------+
| INPUT  n      |
+---------------+
       ↓
+------------+ NAO +-------+
| E n>= 3 ? |----->| FIM   |
+------------+     +-------+
       |S
       |I
       ↓M
+-----------------+
|Tome o inverso  |
|multiplicativo  |
+-----------------+
       ↓
+--------------+
|Multiplique  |
|por 2*pi     |
+--------------+
       ↓
+-----------+
|OUTPUT a`|
+-----------+
```

Expressão Analítica

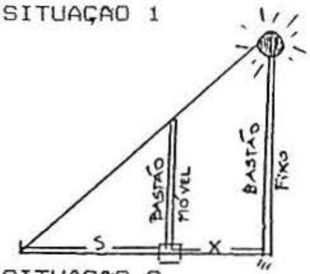
$L=R*\sqrt{2}*\sqrt{1-cos\ 2*pi/n}$

```
+-------------+
| INPUT  n  |
+-------------+
      ↓
+------------+  NAO  +-------+
| E n>= 3 ? |------>| FIM   |
+------------+       +-------+
      |S
      |I
      ↓M
 +---------------+
 |Tome o inverso|
 |multiplicativo|
 +---------------+
       ↓
 +-------------+
 |Multiplique |
 |por 2*pi    |
 +-------------+
       ↓
 +---------------+
 |Tome o cosseno|
 +---------------+
       ↓
 +------------------+
 |Tome o simétrico|
 |aditivo          |
 +------------------+
       ↓
 +------------+
 |Adicione 1 |
 +------------+
       ↓
 +---------------+
 |Extraia a raiz|
 |quadrada      |
 +---------------+
       ↓
 +----------------------+
 |Multiplique por R*√2|
 +----------------------+
       ↓
 +-------------+
 | OUTPUT  L  |
 +-------------+
```

ATIVIDADES: EM CADA UMA DAS SITUAÇOES ABAIXO:

1. IDENTIFIQUE AS VARIAVEIS E CONSTANTES.
2. DE UMA EXPRESSAO ANALITICA PARA AS FUNÇOES PEDIDAS.
3. CONSTRUA OS FLUXOGRAMAS DAS EXPRESSOES ANALITICAS DAS RELAÇOES FUNCIONAIS ENTRE AS VARIAVEIS DETERMINADAS EM 2.

SITUAÇAO 1



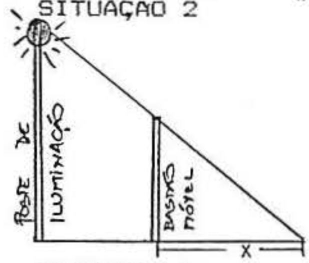
$s=s(x)$=comprimento da sombra s do bastão móvel em função de sua distância horizontal x ao bastão fixo m.

DADOS: d_1 =comprimento do bastão fixo

d_2 =comprimento do bastão móvel; $d_2 < d_1$

RESPOSTA: $s(x)=d_2/(d_1-d_2)*x$

SITUAÇAO 2



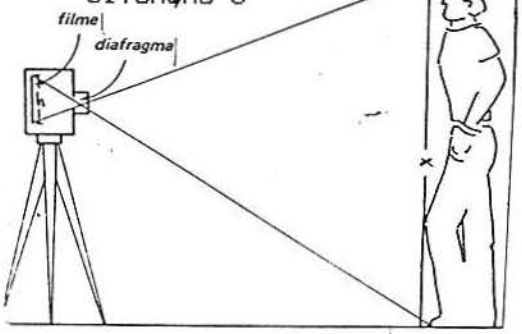
$h=h(x)$=altura de um bastão móvel em função do comprimento x m. de sua sombra

DADOS: h_1 =altura do poste de iluminação

d_1 =distância horizontal do bastão móvel ao poste de iluminação

RESPOSTA: $h(x)=h_1*x/(d_1+x)$

SITUAÇAO 3



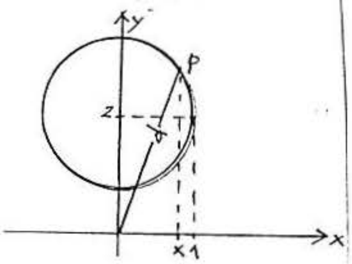
$h=h(x)$=altura da imagem fotográfica da pessoa em função de sua altura real x m.

DADOS: d_1 =distância horizontal da pessoa à máquina fotográfica (diafragma)

l_1 =distância horizontal do filme ao diafragma

RESPOSTA: $h(x)=l_1/d_1*x$

SITUAÇAO 4

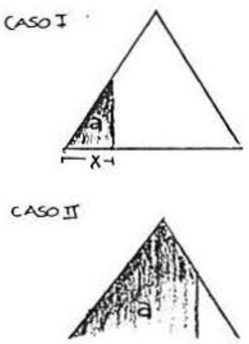


$d=d(x)$=distância da origem ao ponto P, com Pa descrevendo o círculo da figura. a

DADOS: equação do círculo: $x^2+(y-2)^2=1$ 1

RESPOSTA: $d(x)=\begin{cases}\sqrt{5+4*\sqrt{1-x^2}}, \text{ se } 2\le y\\ \sqrt{5-4*\sqrt{1-x^2}}, \text{ se } y\le 2\end{cases}$

SITUAÇAO 5



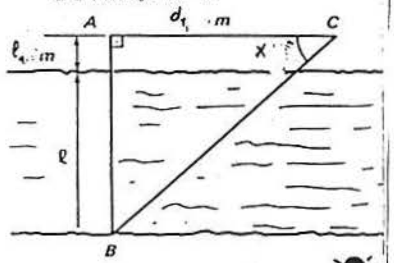
$a=a(x)$=área da região sombreada em função da medida x do lado do polígono da figura

DADOS: b_1 =base do triângulo isósceles

h_1 =altura do triângulo isósceles

RESPOSTA: $a(x)=\begin{cases} h_1/b_1*x^2, \text{ se } x\le b_1/2\\ -h_1/b_1*x^2+2*h_1*x-h_1*b_1/2, \text{ se } b_1/2\le x\end{cases}$

SITUAÇÃO 6



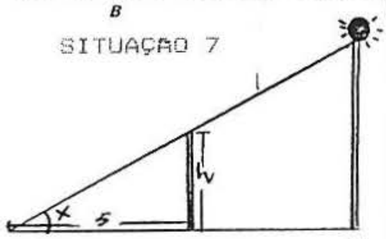
$l=l(x)$=largura de um córrego, medida sem atravessá-lo ,a partir de um ponto A até um ponto B na margem oposta , tomado perpendicularmente a A, em função do angulo x rd. entre o segmento AC e o segmento CB , onde C é o ponto onde se encontra o observador.

DADOS : l_1 =distância entre A e a margem

d_1 =distância de A até C

RESPOSTA : $l(x) = d_1 * tg\ x - l_1$

SITUAÇÃO 7

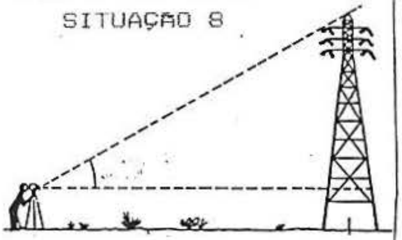


$s=s(x)$=comprimento da sombra do poste em função do ângulo x rd. de elevação da fonte luminosa

DADOS: h=altura do poste

RESPOSTA: $s(x)=h * cot(x)$

SITUAÇÃO 8



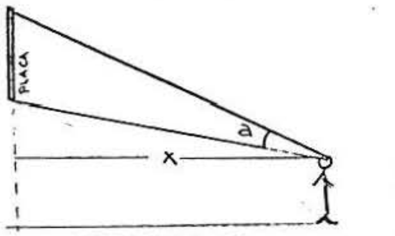
$h=h(x)$=altura de uma torre em função do ângulo x rd. medido pelo topógrafo

DADOS: h_1 = altura da luneta

d_1 = distância horizontal da luneta à torre

RESPOSTA : $h=h(x)=d_1 * tg\ x + h_1$

SITUAÇÃO 9



$a=a(x)$=ângulo subententido pela placa observada, em função da distância horizontal x do observador à placa

DADOS: h=distância vertical da parte inferior da placa aos olhos do observador

t=altura da placa

RESPOSTA: $a(x)=arc\ tg(x*t/(x^2 +h*(t+h)))$

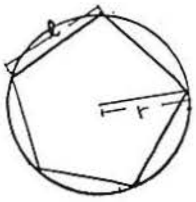
SITUAÇÃO 10

$r=r(x)$=raio do círculo inscrito no polígono regular convexo, em função do número x de lados do polígono

DADOS: l=comprimento do lado do polígono

RESPOSTA: $r(x)=l/2 * ctg(\pi/x)$

SITUAÇÃO 11

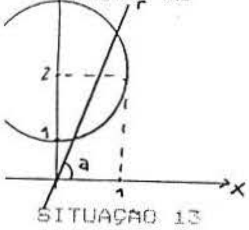


$r=r(x)$=raio do círculo circunscrito ao polígono regular convexo, em função do número x de lados do polígono

DADOS: l=comprimento do lado do polígono

RESPOSTA: $r(x)=l/2 * csc(\pi/x)$

SITUAÇÃO 12



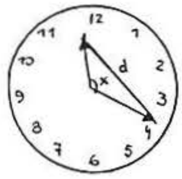
$n=n(a)$=número de pontos de intersecção da reta r com o círculo C da figura

DADOS : equação cartesiana de r: $y=(\text{tg } a)*x$

equação cartesiana de C: $x^2+(y-2)^2=1$

RESPOSTA: $n(a)=\begin{cases} 0, & \text{se } 0\leq a<\pi/3 \text{ ou } 2*\pi/3<a\leq\pi \\ 1, & \text{se } a=\pi/3 \text{ ou } a=2*\pi/3 \\ 2, & \text{se } \pi/3<a<2*\pi/3 \end{cases}$

SITUAÇÃO 13



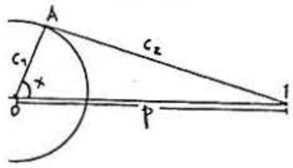
$d=d(x)$=distância entre os "bicos " dos ponteiros do relógio, em função do ângulo x rd. entre eles

DADOS: c_1 =comprimento do ponteiro das horas

c_2 =comprimento do ponteiro dos minutos

RESPOSTA: $d(x)=\sqrt{(c_1^2+c_2^2-2*c_1*c_2*\cos x)}$

SITUAÇÃO 14



$p=p(x)$=posição do ponto P, um função do ângulo x rd., como na figura

DADOS: c_1 =comprimento do braço mecânico OA

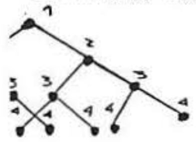
c_2 =comprimento do braço mecânico AP

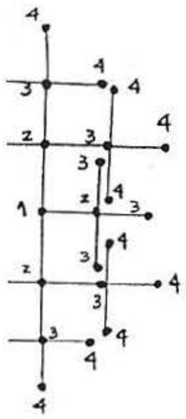
O=ponto fixo

A,P=pontos móveis

RESPOSTA: $p(x)=c_1*\cos x+\sqrt{(c_2^2-c_1^2*\text{sen}^2 x)}$

SITUAÇÃO 15





a) $p=p(n)$=população de uma cultura de bactérias em função do número de periodos de geração T
DADOS: T="periodo de geração"= tempo necessário para que uma bacteria se multiplique
2=taxa como que uma bactéria se multiplica a cada período T (duplica -se)
p_o =população inicial
RESPOSTA: $p(n)=p_o*2^{n*T}$

b) $p=p(n)$=população de uma cultura de bactérias em função do número de periodos de geração T
DADOS: T="período de geração"= tempo necessário para que uma bactéria se multiplique
3=taxa como que uma bactéria se multiplica a cada período T (triplica -se)
p_o =população inicial
RESPOSTA: $p(n)=p_o*3^{n*T}$

c) $p=p(n)$=população de uma cultura de bactériass em função do número de períodos de geração T
DADOS: T="periodo de geração"= tempo necessá--rio para que uma bactéria se multiplique
k=taxa como que uma bactéria se-multiplica a cada período T
p_o =população inicial
RESPOSTA: $p(n)=p_o*k^{n*T}$

(Loiva cardoso de Zeni)

AS FUNÇÕES LINEAR E AFIM

EXPERIÊNCIA PRÁTICA

TAREFA 1:

OBJETIVO:

Observar a variação da elongação A (acréscimo de comprimento) de uma mola em função de uma força F aplicada sobre ela.

PROCEDIMENTO:

a) Preparar o equipamento

b) Colocar os pesos, um a um, na mola e anotar para cada um dos pesos a elongação correspondente da mola na tabela abaixo:

PESO	MASSA (g)	ELON. TOTAL A (cm)	F (N)	A(cm)/F(N)	VARIAÇÃO NA ELONG. (ΔA)	VARIAÇÃO NA FORÇA (ΔF)	RAZÃO ENTRE VARIAÇÕES $\Delta A / \Delta F$
1	10	0.5	0.1	5	—	—	—
2	20	1	0.2	5	0.5	0.1	5
3	30	1.5	0.3	5	0.5	0.1	5
4	40	2	0.4	5	0.5	0.1	5
5	50	2.5	0.5	5	0.5	0.1	5

c) Completar a 3ª coluna da tabela, considerando que $F = ma$, isto é, a força F (medida em Newtons) aplicada sobre a mola é conseguida multiplicando a massa (em kg) pela aceleração da gravidade (em m/s^2). Usar $g \cong 10\ m/s^2$.

d) Dividir os valores da elongação A pela respectiva força F na tabela. Completar a 4ª coluna. Que se pode observar?

Este valor será denominado constante da mola.

e) Comparar o valor da constante da mola encontrado em seu grupo com o valor encontrado pelos outros grupos.

f) Que se pode concluir?

g) Completar as outras colunas. Analisá-las.

Nota: Os valores encontrados na tabela podem ser outros, dependendo dos pesos e da mola utilizados.

TAREFA 2:

OBJETIVO: Construir e analisar gráfico.

PROCEDIMENTO:

a) Na tabela anterior, as variáveis utilizadas foram:

a_1) variável dependente: elongação

a_2) variável independente: pesos

b) Usando os dados da tabela anterior, construir o gráfico A(cm)*F(N).

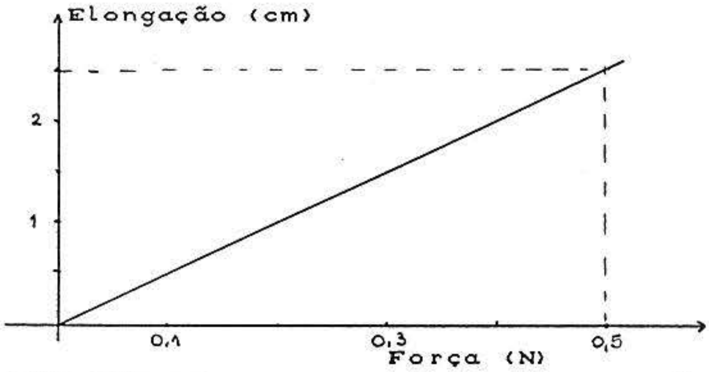


GRÁFICO DA ELONGAÇÃO SOFRIDA POR UMA MOLA EM FUNÇÃO DA FORÇA EXERCIDA SOBRE ELA.

c) Completar, de acordo com o gráfico:

A cada aumento no peso de ________ N corresponde um aumento de ______________ cm na elongação.

d) Qual a forma do gráfico?

e) Experimentalmente verificou-se que $\frac{\Delta A}{\Delta F}$ é constante. Como pode-se chegar a este valor através do gráfico?

f) Como se pode relacionar o processo de descoberta da constante via gráfico e via tabela?

g) Qual a equação desta reta?

Def. 1. - A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = ax$ ($a \neq 0$) chama-se função linear.

Então:

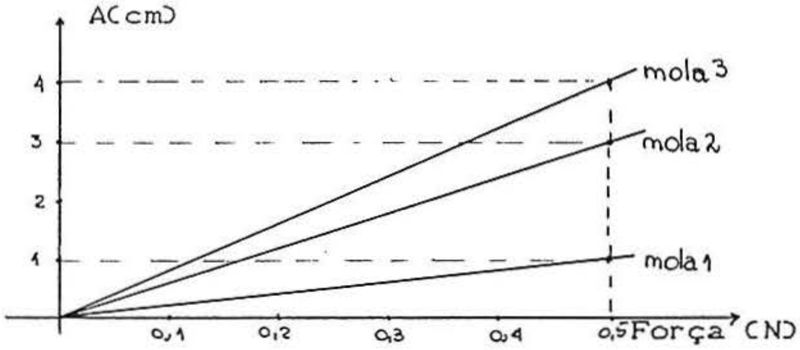
Quando duas grandezas x e y se relacionam linearmente por $y = ax$ $(a \neq 0)$, a razão das variações $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é constante e igual a "a".

TAREFA 3:

Objetivo:

Verificar a efetiva compreensão do conceito através da resolução de situações-problema.

1- Abaixo são representados os gráficos que fornecem os alongamentos, em cm, de 3 molas, em função das forças, em Newton, exercidas em suas extremidades



a) Qual é a mola mais fraca (ou seja, aquela que se alonga mais facilmente)? Mola 3

b) Qual é a lei de cada uma destas funções?

Mola 1: A = 40 N

Mola 2: A = 60 N

Mola 3: A = 80 N

2- A uma temperatura fixa, a massa e o volume de uma substância estão relacionados: conhecido o valor de um deles, podemos determinar o valor do outro. Abaixo são apresentados os gráficos da massa em função do volume para álcool e para ferro, ambos a temperatura de 0 ºC.

Nesta temperatura:

a) Determinar a massa de $10cm^3$ de álcool e de $10cm^3$ de ferro;

Massa 10 cm^3 $\begin{cases} \text{álcool: 8 g} \\ \text{Ferro: 80 g} \end{cases}$

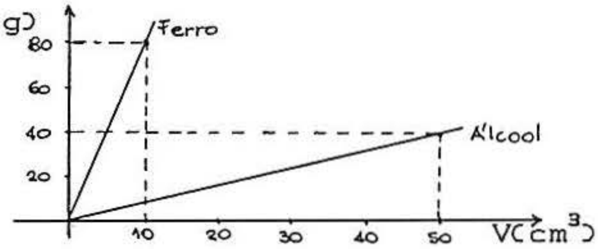
b) Determinar o volume de 40 g de álcool e de 40 g de ferro;

$$\text{Volume } 40 \text{ g} \begin{cases} \text{álcool: } 50 \text{ cm}^3 \\ \text{Ferro: } 5 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

c) Determinar a lei das duas funções que tiveram seus gráficos apresentados.

Ferro: $m = 8V$

Álcool: $m = 0.8V$



Def. 2- Quando duas grandezas variáveis estão relacionadas por uma função linear, dizemos que estas grandezas são diretamente proporcionais.

Então podemos dizer que, dentro de certos limites,

* A força exercida por uma mola é proporcional ao alongamento a ela aplicado.
* A massa de uma substância é proporcional ao seu volume, numa temperatura fixa.

3 - Se duas grandezas são proporcionais, triplicando-se o valor de uma delas, o que ocorrerá com o valor da outra?

TAREFA 4:

OBJETIVO:

Constatar a existência de grandezas que crescem (ou decrescem) simultaneamente, sem que sejam proporcionais.

PROCEDIMENTO

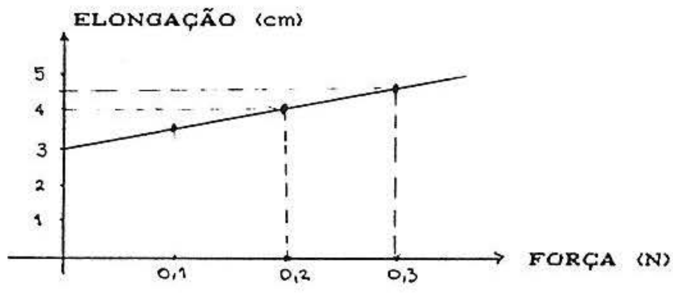
Supor que, ao realizar a tarefa 1, determinado grupo tenha por distração iniciado a experiência já com a mola marcando 3 cm. Caso esta mola fosse idêntica a sua, após a colocação de um peso, qual seria a elongação correspondente?

E após a colocação de dois pesos?

b) Preencha a nova tabela:

PESOS	MASSA (g)	ELON. TOTAL A(cm)	F(N)	A(cm)/F(N)	VARIAÇÃO NA ELONG. (ΔA)	VARIAÇÃO NA FORÇA(ΔF)	RAZÃO ENTRE VARIAÇÕES ΔA/Δ
-	-	3	-	-	-	-	-
1	10	3.5	0.1	35	0.5	-	-
2	20	4.0	0.2	20	0.5	0.1	5
3	30	4.5	0.3	15	0.5	0.1	5
4	40	5.0	0.4	12	0.5	0.1	5
5	50	5.5	0.5	11	0.5	0.1	5

c) Construir o gráfico A(cm)*F(N)



d) Comparar este gráfico com o da tarefa 1. Quais as principais semelhanças e diferenças?

e) Qual a equação desta reta? y = 5 x +3

f) Esta é uma função linear? (Verificar se atende as condições impostas da def. 1.) Não

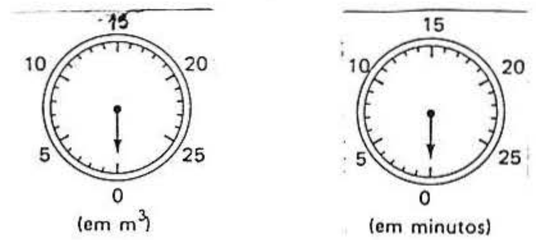
Def. 2- A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = ax + b$ (a e b constantes, $(a \neq 0)$ chama-se função afim.

A razão das variações $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é constante.

TAREFA 5:

OBJETIVO

O mesmo da tarefa 3.



O abastecimento de combustível para aviões é controlado e registrado por meio de um dispositivo provido de dois "relógios marcadores" um deles para o **tempo de abastecimento** em minutos; o outro para a **quantidade** de combustível transferida ao tanque do avião, em hectolitros. A cada 5 minutos a partir do início do abastecimento (minuto zero), é registrada a quantidade de combustível no tanque. Deste modo, obtém-se a seguinte tabela:

tempo em minutos a partir do início do abastecimento	0	5	10	15	20	(t)
quantidade de combustível no tanque (em hectolitros)	3	5,5	8	10,5	13	(v)

a) Qual a quantidade de combustível no tanque no início do reabastecimento? 3 hl

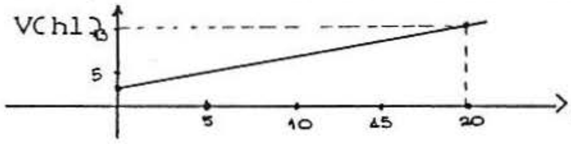
b) Quantos hectolitros de combustível são **transferidos** ao tanque em 15 minutos? Em 5 minutos? Em 1 minuto?

15 min ⟶ 7.5 hl

5 min ⟶ 2.5 hl

1 min ⟶ 0.5 hl

c) Esboçar um gráfico do abastecimento, considerando a quantidade V de hectolitros no tanque como **função** do tempo t em minutos, a partir do início do abastecimento.



d) Calcular a partir dos dados, qual a quantidade de hectolitros no tanque, 12 minutos após o início do abastecimento. 9 hl

Comparar o resultado com o ponto do gráfico cuja abscissa é $t = 12$.

e) Estabelecer uma **fórmula** (uma sentença aberta) que exprima V como função de t. $y = 1/2\ x + 3$

2 - O comprimento de um fio de cobre pode variar de acordo com a variação da temperatura. Experimentalmente pode-se verificar que, dentro de certos limites, esta é uma função afim.

Assim um fio de cobre com 100 m de comprimento à temperatura de 0ºC, terá, à temperatura de TºC um comprimento L que, em m, será dado por:

$$L = 0.0017T + 100$$

Para temperaturas de 0ºC a 100ºC esta função pode ser assim apresentada:

$f: [0\ ,\ 100] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = 0.0017x + 100$

Então, qual será o aumento no comprimento do fio quando a temperatura passar de 0ºC a 20ºC? $\Delta c = 0.034$ m

Finalizando,

Em 1660 o inglês Robert Hooke descobriu experimentalmente que, dentro de certos limites, tem-se que $F(N)/A(cm) = k$, ou então, $F = Ak$. A constante k é, por esta razão, denominada "constante de elasticidade" da mola.

Bibliografia;

TROTTA, Fernando et alii. Matemática Aplicada (Segundo grau). São Paulo: Ed. Moderna, 1979.

GUELLI, Cid et alii, Matemática (Segundo grau). São Paulo: Marco, 1979.

ÁLVARES, Beatriz e Luz, Antonio Curso de Física (Segundo grau). São Paulo: Harbra, 1986.

(Elisa Haag)

FUNÇÕES PERIÓDICAS

Os objetivos das atividades aqui propostas são:

ATIVIDADE I- introduzir as funções periódicas com variável angular, através da análise de material concreto que envolve movimento oscilatório; usar o conceito de velocidade angular para introduzir função periódica com variável tempo; traduzir gràficamente diferentes situações de movimento oscilatório.

ATIVIDADE II - usar material concreto para construir o modelo matemático senoidal adequado para situações periódicas harmônicas.

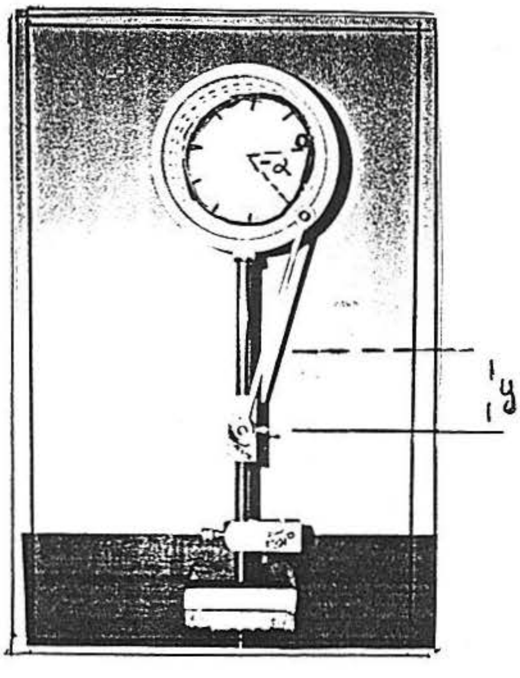
ATIVIDADE III - apresentar o modelo senoidal generalizado para traduzir as diferentes situações gráficas observadas anteriormente.

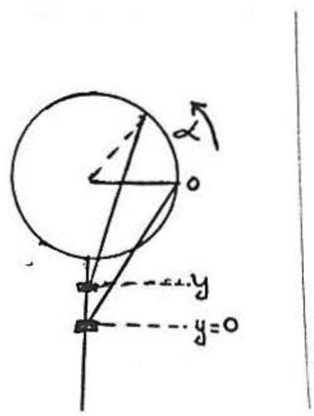
ATIVIDADE IV - modelar matematicamente situações periódicas que ocorrem em diversas áreas do conhecimento.

ATIVIDADE V - modelar matematicamente movimentos no plano que envolvem períodos.

ATIVIDADE I = <u>CONSTRUÇÃO A PARTIR DO CONCRETO.</u>

O artefato abaixo consiste num pistão que se move com a rotação de uma roda de raio R (=7,5 cm).

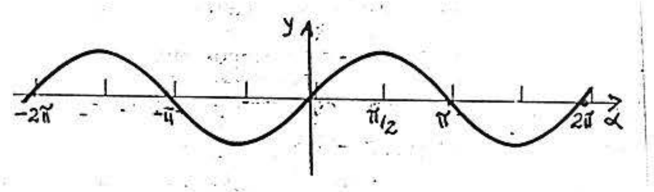




O ângulo de rotação α varia positivamente no sentido anti-horário de rotação e causa uma elongação y no pistão, de tal modo que $y = 0$ corresponde a $\alpha = 0$ (conforme figura).

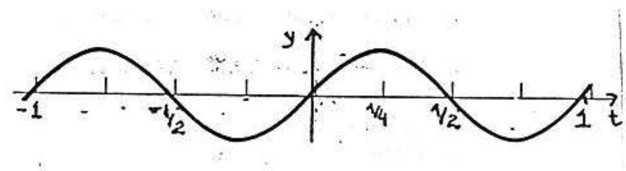
O ângulo α é a variável independente e y é função de α.

1) Expresse graficamente uma possível relação para y e α, considerando α em radianos e y em centímetros e supondo [$\alpha = 0 \Rightarrow y = 0$]

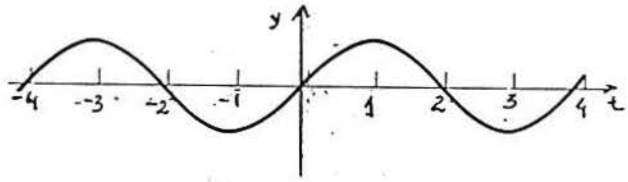


2- Suponha que a roda acima gire com velocidade angular constante de ω rad/seg sendo $\omega = 2\pi/T$ onde T é o tempo necessário para um giro completo, isto é, T é o período. Suponha que o movimento se inicie no ponto correspondente a $\alpha = 0$ e [$t = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ e $y = o$]

a) Faça o gráfico para y em função do tempo t quando $\omega = 2\pi$ rad/seg. Note que o período é $T = 1$ segundo.

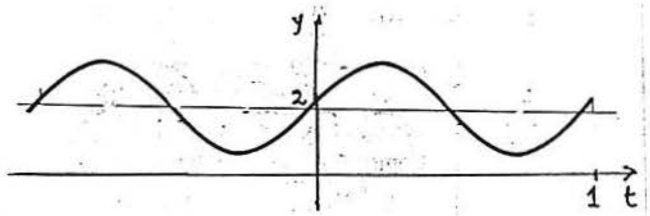


b) quando $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad (seg). Note que o período é T = 4 segundos.



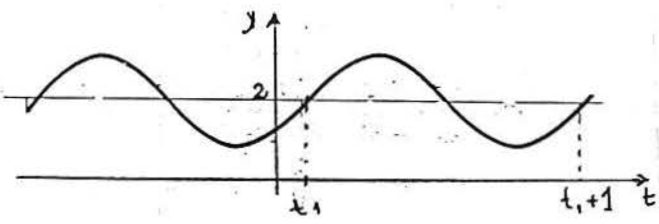
3 - Suponha que a alavanca que prende o pistão seja encurtada de modo que a posição de repouso passe do ponto y = 0 para o ponto y = 2 isto é [$t = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ e $y = 2$].

Faça o gráfico para o caso $\omega = 2\pi$ rad/seg .



4 - Suponha que já tenham decorridos t_1 segundos de observação quando o pistão passou pelo ponto O, isto é [$t = 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ e $y \neq 0$] .

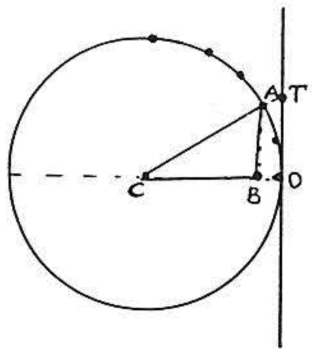
Faça o gráfico para o caso $\omega = 2\pi$ rad/seg



ATIVIDADE II: UM RECURSO DIDATICO PARA CONSTRUIR A FUNÇÃO SENO

O material usado neste momento consiste numa peça de madeira na qual está colado um círculo de raio R centímetros (feito com auxílio de transferidor) com taxinhas marcando as extremidades dos ângulos centrais sobre o círculo de 15 em 15 graus, a partir de uma origem O, (onde $\alpha = 0$) e os pontos correspondentes aos ângulos, sobre o diâmetro.

Acompanha esta tábua alguns atilhos de borracha e uma régua flexivel (cartolina) que mede R cm e que representa a unidade de medida. Esta régua está dividida em 10 partes e corresponde a 1 unidade raio, isto é, 1 radiano.



Divide-se o disco em quadrantes.

Faz-se a convenção de sinais apropriada para o círculo trigonométrico.

O estudante, com um atilho enlaçando os pontos C, A e B (da figura), obtem as medidas dos segmentos usando a régua-unidade. Portanto essas medidas são relativas ao tamanho do raio. Este é o momento de relacionar graus e radianos como medida de ângulos e relembrar o número Π.

Assim define-se seno do arco OA como $\overline{AB}$ se OA é de I ou II Quadrante e $-\overline{AB}$ se OA é de III ou IV quadrante; o cosseno do Arco $\overline{OA}$ como $\overline{CB}$ se OA é de I ou IV quadrante e $-\overline{CB}$ se OA é de II ou III quadrante.

Pode-se elaborar tabelas de medidas, construir os gráficos (usando a mesma unidade de medida para os eixos x e y) para $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$.

Usando uma reta vertical passando por O e marcando com taxas os pontos T da reta que correspondem à extensão do raio CA define-se tangente de OA como o valor de medida $\overline{OT}$ se OA é de I ou III quadrante e $-\overline{OT}$ se OA é de II ou IV quadrante.

Verifica-se: $\overline{OT} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$

Com esta tábua usando dois atilhos, podem ser verificadas as propriedades das funções trigonométricas, tais como:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\text{sen } (x + \pi) = - \text{sen } x$$
$$\text{sen } (-x + \pi/2) = \cos x$$
$$\text{sen } (-x) = - \text{sen } x$$
$$\text{sen } (\pi - x) = \text{sen } x$$

etc

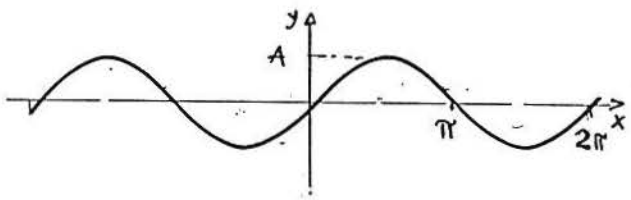
Obs1: É importante usar a régua para dar as medidas em graus e radianos de diversos ângulos.

É imprescindível lembrar as relações de semelhança de triângulos para observar que as funções seno e cosseno estão bem definidas, isto é, independem do raio do círculo.

ATIVIDADE III - AS CARACTERíSTICAS DE UM MODELO SENOIDAL GENERALIZADO

1 - Os modelos $y = A * \text{sen } x$ e $y = A \text{ sen } (\omega t)$

a) Gráfico de $y = A * \text{sen } x$



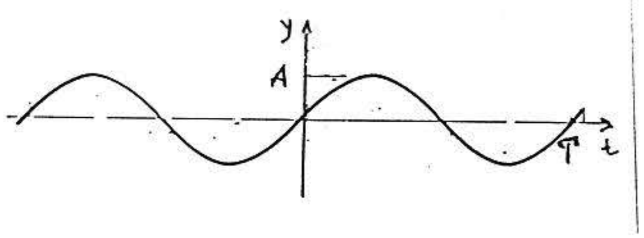
O período da função $y = A * \text{sen } x$ é 2π radianos, pois $\text{sen }(x + 2\pi) = \text{sen } x$

b) Suponha um movimento oscilatório harmônico.

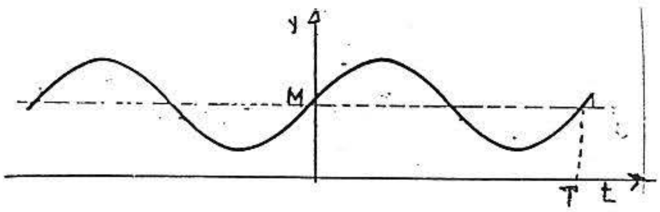
Define-se $\omega = \frac{2\pi}{T}$ como a velocidade angular, em radianos por unidade de tempo, onde T é o período.

$y = \text{sen } \omega\,(t + T) = \text{sen }(\omega t + \omega T) = \text{sen }(\omega t + 2\pi) = \text{sen } \omega t$

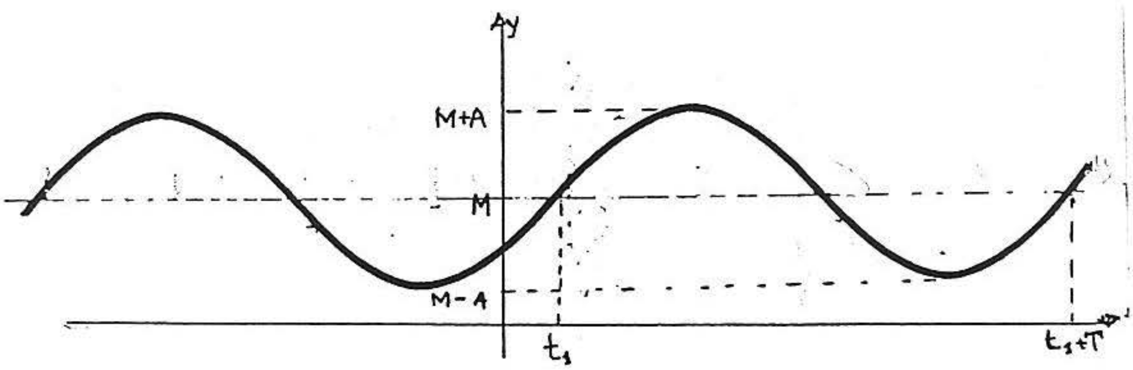
Gráfico: $y = A * \text{sen } \omega\, t$



2 - Variação do gráfico e consequências na expressão matemática:



$y = A \text{ sen } \omega t + M$



$$\boxed{y = A \text{ sen } \omega\,(t - t_1) + M}$$

MODELO SENOIDAL GENERALIZADO

3 - Elementos: T = Período

A = Amplitude

ω = Velocidade Angular = $\frac{2\pi}{T}$

M = Nível Médio = média entre valores máximo e mínimo.

t_1 = Tempo inicial da onda

OBSERVAÇÃO:

O movimento do pistão aqui analisado foi útil para motivar e dar uma visualização concreta para as funções periódicas, mas cabe salientar que a relação entre a elongação y e o ângulo α não é senoidal, do tipo acima.

O movimento do pistão não é harmônico. Se acoplarmos ao material uma régua vemos que a elongação máxima de y é aproximadamente +6 cm e a mínima é de aproximadamente -9 cm, quando esperávamos valores iguais a ±7,5 cm.

Pode-se mostrar usando a regra dos cossenos, que:

$$y = R * \text{sen}\ \alpha + \sqrt{l^2 - R^2} - \sqrt{l^2 - R^2 \cos^2 \alpha}$$

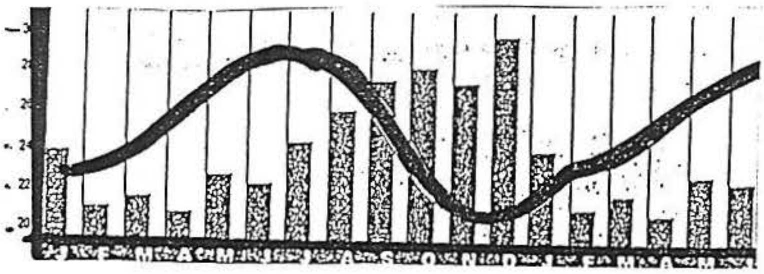
Repare que $y(0) = 0$; $y(\pi/2) \simeq 6$ e $y(3\pi/2) \simeq -9$

(l é o comprimento da biela)

ATIVIDADE IV - APLICAÇÕES

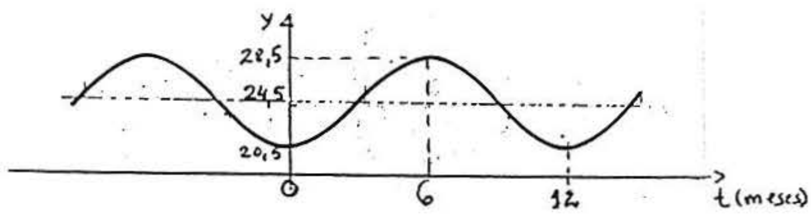
1 - O nível de um rio durante o ano retratado pelo gráfico abaixo pode ser modelado por uma função senoidal.

Faça isso.



Calcule o nível do rio no inicio de janeiro, no inicio de maio e no fim de maio.

A pesca comercial, em toneladas, no mesmo rio, também pode ser expressa de forma senoidal. Faça isso para calcular quantas toneladas de peixe são pescados nos meses de maio, de novembro e de dezembro.



Respostas:

R = Nível do rio

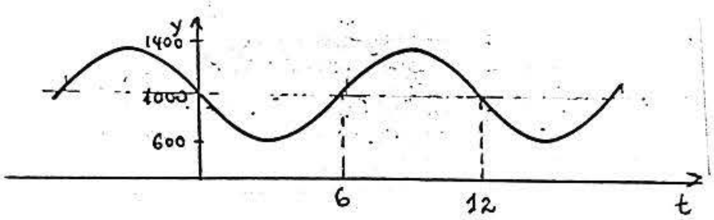
$$\begin{cases} M = \dfrac{28,5 + 20,5}{2} = \dfrac{49}{2} = 24,5 \\ A = 28,5 - 24,5 = 4 \\ T = 12 \\ t_1 = 3 \end{cases}$$

R: $y = 4 \text{ sen } \left[\dfrac{\pi}{6}(t - 3)\right] + 24,5$

$y(4) = 4 \text{ sen } \pi/6 + 24,5 = 26,5 \text{ m}$

$y(5) = 4 \text{ sen } \pi/3 + 24,5 = 27,7 \text{ m}$

PESCA



$$\begin{cases} M = \dfrac{600 + 1400}{2} = 1000 \\ A = 400 \\ T = 12 \\ t_1 = 6 \end{cases}$$

$y = 400 \text{ sen } \left[\dfrac{\pi}{6}(t - 6)\right] + 1000$ ou $y = 400 \text{ sen } \pi/6(t+6) + 1000 = 1200$

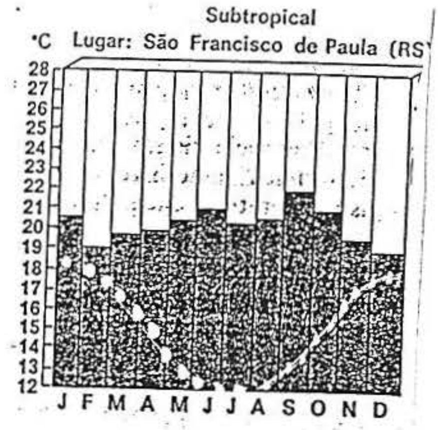
$y(11) \simeq 1200$

$y(12) \simeq 1000$

$y\,(5) \simeq 800$ toneladas métricas de peixe

2 - No grafico ao lado é representada a evolução da temperatura em ºC na cidade de São Francisco de Paula (RS) Analise o gráfico e identifique os elementos: período, amplitude, nível médio e tempo inicial padrão.

Dê uma expressão matemática para temperatura T em função do tempo t.



Respostas:

$$\begin{cases} M = \dfrac{12 + 18}{2} = 15 \\ A = 3 \\ T = 12 \\ t_1 = 9{,}5 \text{ ou } (-2{,}5) \end{cases}$$

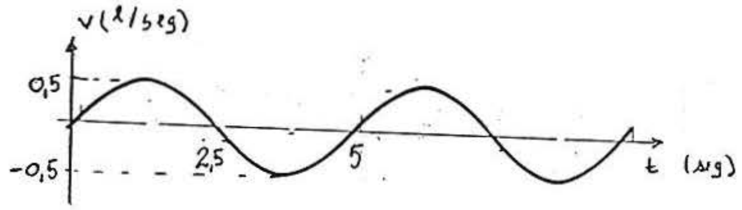
$$y = 3 \text{ sen } \left[\frac{2\pi}{12}(t + 2{,}5)\right] + 15$$

$$y(1) = 3 \text{ sen } \left(\frac{7\pi}{12}\right) + 15 \cong 17{,}9 \text{ ºC}$$

$$y(5) = 3 \text{ sen } \left(\frac{15\pi}{12}\right) + 15 \cong 12{,}9 \text{ ºC}$$

Calcule a temperatura do final de janeiro e do final de maio. (Observe que t = 0 no inicio de janeiro)

3 - Nossa respiração é cíclica, com períodos alternados de expiração e inspiração. A duração de uma respiração completa é em torno de 5 segundos para um adulto em condições normais. Fisiologistas mediram a velocidade do fluxo de ar, em l/seg.
A curva abaixo descreve esta velocidade durante um ciclo respiratório.

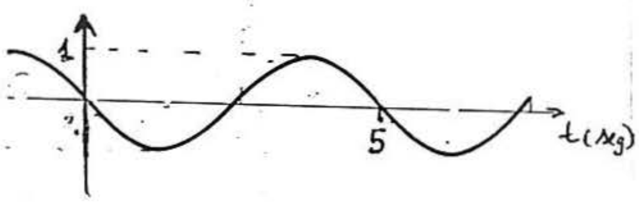


Encontre o modelo senoidal para este fenômeno. Calcule v(1) e v(3) e explique estes resultados.

R: $v = 0.5 \text{ sen } \left[\frac{2\pi}{5} t\right]$

$v(1) = 0.5 \text{ sen } \frac{2\pi}{5} \cong 0,47$ l/seg $v(3) = 0.5 \text{ sen } \frac{6\pi}{5} = -0,29$ l/seg

4 - Durante a respiração, a pressão exercida pelo ar dentro dos pulmões oscila periodicamente de acordo com a velocidade. Esta pressão é medida com relação a uma dada pressão atmosférica, que pode ser arbitrada como zero. A pressão versus tempo é representada pelo gráfico abaixo. expresse essa relação matematicamente.

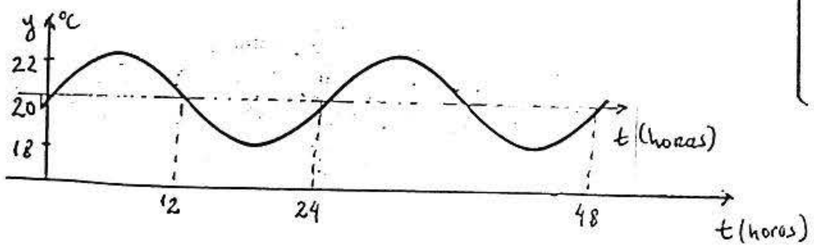


R: $P = \text{sen } \left[\frac{2\pi}{5} (t - 2.5)\right] = \text{sen } \left[\frac{2\pi}{5} t - \pi \right] =$

$= - \text{sen } \left[\frac{2\pi}{5} t\right]$

5 - O gráfico abaixo nos fornece a temperatura a temperatura y no decorrer de 2 dias de observação, em função do tempo de observação t, de tal modo que t = 0 às 6 horas da manhã do 1º dia. Calcule a temperatura às 10h, às 12h e às 15h deste dia.

$$\begin{cases} M = \dfrac{250}{2} = 125 \\ A = 75 \\ T = 12 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$



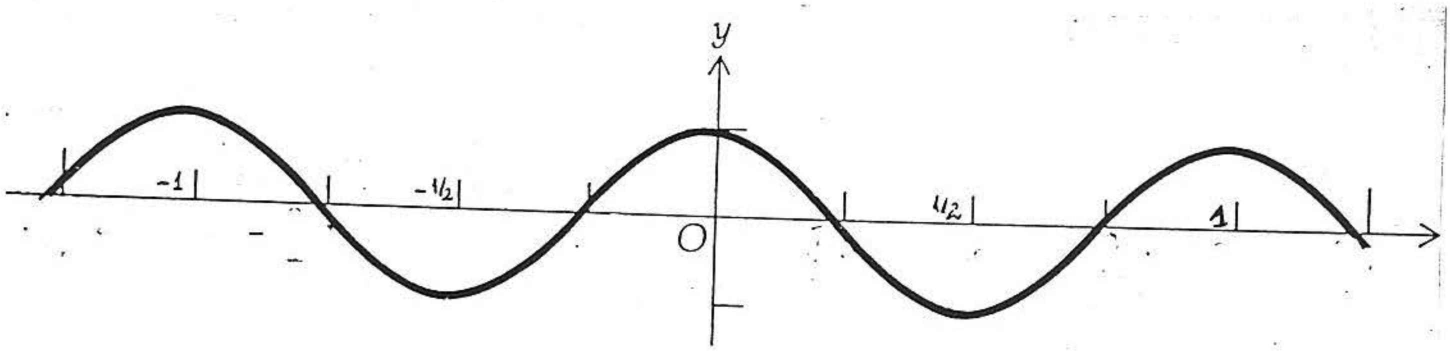
$$y = 2 \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{24} t \right) + 20$$

10 h $\longrightarrow$ t = 4 $\quad$ $y(4) \simeq 21,7$

12 h $\longrightarrow$ t = 6 $\quad$ $y(6) \simeq 22$

15 h $\longrightarrow$ t = 9 $\quad$ $y(9) \simeq 21,4$

6 - A função $y = \cos(2\pi\ t)$ e seu gráfico



Faça o gráfico da função $y = \text{sen}\left[2\pi\,(t + 1/4)\right]$ e verifique a igualdade: $\cos\,(2\pi\, t) = \text{sen}\left[2\pi\,(t + 1/4)\right]$, isto é, $\cos x = \text{sen}\left[x + \frac{\pi}{2}\right]$

Isto justifica nossa concentração em exercícios com modelo senoidal.

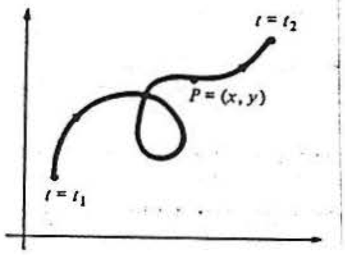
ATIVIDADE V: MOVIMENTOS QUE ENVOLVEM PERÍODOS

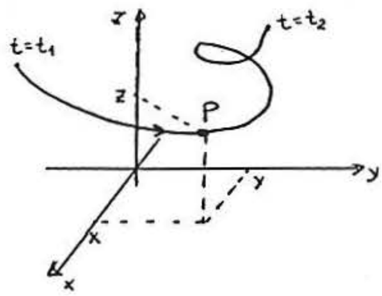
Em problemas de movimento, consideramos um ponto P móvel cuja posição varia com o tempo t .

"P" descreve uma trajetória curvilínea.

Modelar um movimento no plano é dar as equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$ que expressam as coordenadas x e y de P no instante $t \in [a,b]$.

Se o movimento se dá no espaço temos as equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$.

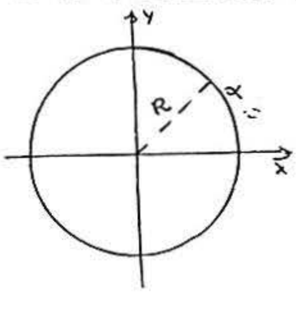




Problema 1-

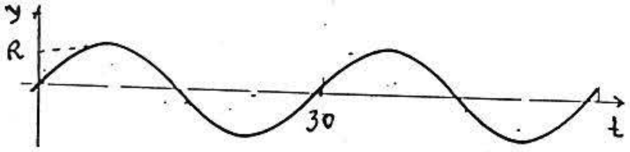
A Lua descreve uma trajetória praticamente plana e circular, tendo o centro da Terra como centro, raio R = 380 mil Km e período de 30 dias, aproximado. Modele o movimento, escolhendo um sistema referencial cartesiano com origem arbitrária.

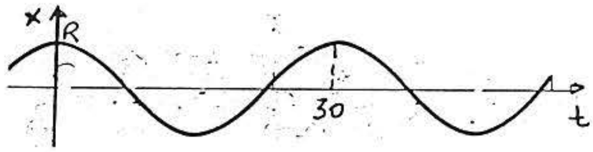
Faça um esboço do gráfico de $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para $t \geq 0$. Posicione a Lua no 10º dia e no 15º dia, sobre sua órbita.



Respostas:

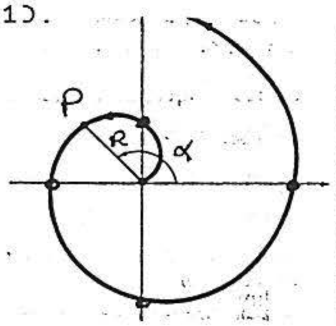
$$\begin{cases} x = 3{,}8 * 10^5 \cos \alpha \\ y = 3.8 * 10^5 \text{ sen } \alpha \end{cases} \qquad \alpha = \frac{2\pi}{30}\ t = \frac{\pi}{15}\ t$$





Problema 2-

"A medida que passa através do hidrogênio líquido, o elétron deixa um rastro visível, semelhante à trilha de vapor deixada no ar por avião a jato à grande altura"(PSSC - Física Vol 1).



Suponha a trajetória espiral ao lado, dotada de um sistema referencial dado.

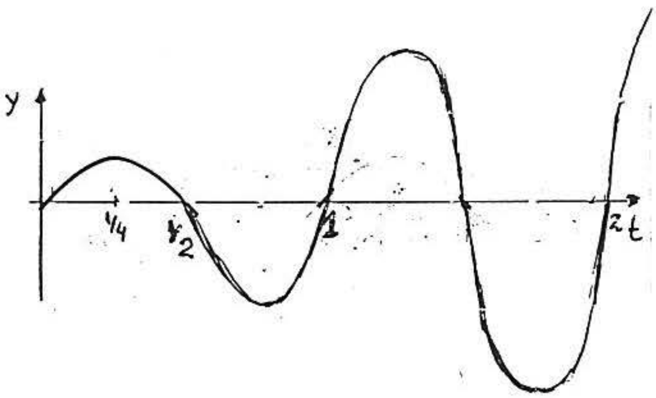
Modele o movimento supondo que a velocidade angular é constante $\omega = 2\pi$ rad/seg e velocidade linear de afastamento do centro é constante v = 1cm/seg .

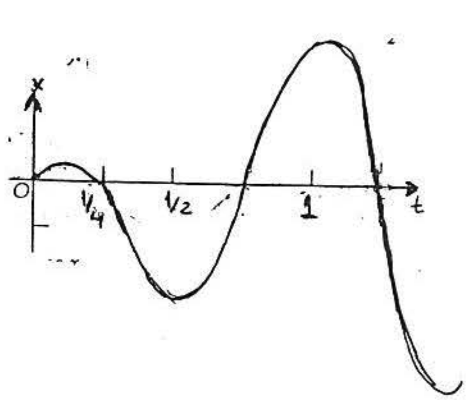
Faça um esboço do gráfico de $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para $t \geq 0$.

Posicione a partícula nos tempos 0.25; 0.5; 0.75; e 1 segundo sobre a trajetória.

Respostas: $x = R \cos \alpha = t * \cos (2\pi t)$

$y = R \text{ sen } \alpha = t * \text{sen } (2\pi t)$



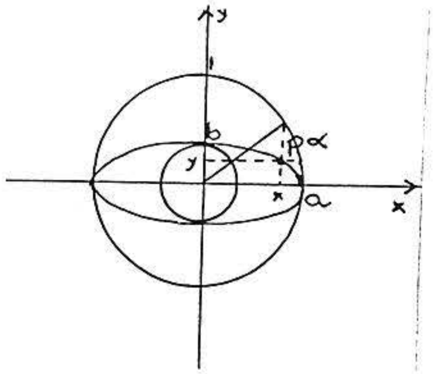


Problema 3-

As órbitas dos planetas de nosso sistema são elípticas tendo o sol como um dos focos.

Suponha que uma partícula em movimento sobre a elipse abaixo cujo eixo maior mede 3 e o eixo menor mede 2cm com velocidade angular constante $\omega = 2\pi$ rad/seg

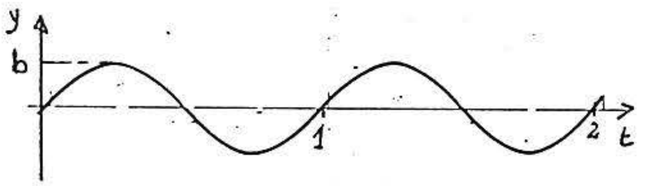
Modele o movimento e faça os gráficos de $x = f(t)$ e $y = g(t)$.

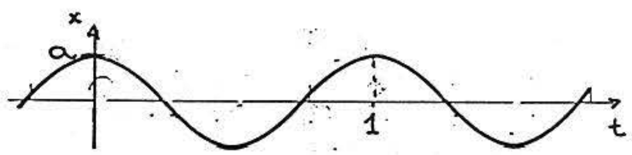


Respostas:

$x = a \cos \alpha = 3 \cos (2\pi t)$

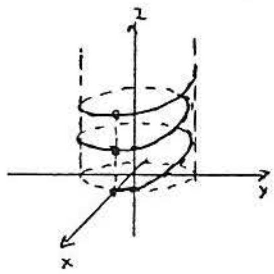
$y = b \text{ sen } \alpha = 2 \text{ sen } (2\pi t)$





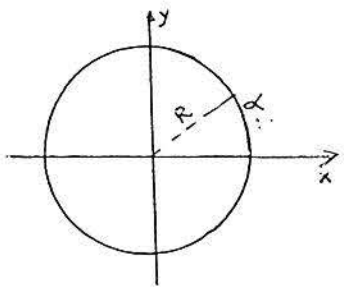
Problema 4-

A excentricidade da órbita da Terra é muito pequena, de modo que pode ser considerada praticamente circular, em torno do Sol. Como a galáxia também se move no espaço, esta órbita descreve uma trajetória helicoidal.



Suponha uma partícula movendo-se no espaço, descrevendo a trajetória helicoidal de raio raio 2m, ao lado, com velocidade angular constante 2π rad/seg e vertical $v = 4$ m/s Modele o movimento.

Projeção no plano xy



Respostas:

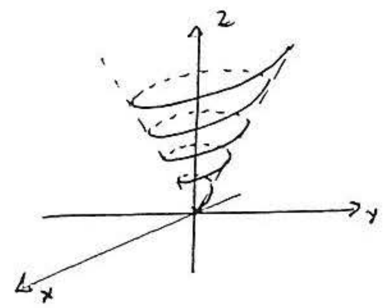
$x = 2\cos(2\pi t)$

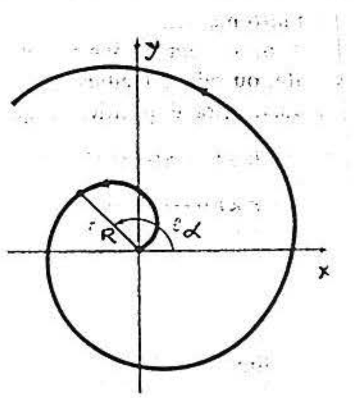
$y = 2\,\mathrm{sen}\,(2\pi t)$

$z = 4\,t$

Localize, no desenho, a posição da partícula após 1, 2, 3 e 4 segundos.

Problema 5: Suponha uma partícula movendo-se no espaço, descrevendo a hélice cônica esboçada abaixo, com velocidade angular constante $\omega = 2\pi$ rad/seg , velocidade radial constante v = 1 m/seg e velocidade vertical constante v' = 4 m/seg.





Modele o movimento. Localize nos desenhos, a posição da partícula após 1, 2, 3 e 4 segundos.

Respostas: $\begin{cases} x = t \cos(2\pi t) \\ y = t \text{ sen } (2\pi t) \\ z = 4t \end{cases}$

Bibliografia

Waks, "Incorporating technological aspects in a Math course", Int. journal of Math, Educ. science and tech.(Vol 18, nº 3)

Simmon's, George - Cálculo com Geometria Análitica - Mc. Graw Hill, São Paulo, !987 (vol 2)

Carneiro, Vera - Elementos de Cálculo para Biologia - UFRGS - Cadernos de Matemática e Estatística - Série B - Trabalho de Apoio Didático - nº 6 - Agosto 91.

(Vera Clotilde Carneiro)

FUNÇÕES ALGÉBRICAS

OBJETIVOS E PROPOSTA DE TRABALHO

Nosso objetivo no que segue é a resolução de problemas envolvendo as ditas funções algébricas que são funções do tipo:

a) Polinômio

b) Raízes

c) Soma, diferença, multiplicação,divisão e composição das funções de a) e b)

Nosso trabalho está dividido em duas partes, cada uma delas com uma proposta bem definida, a saber:

PARTE A: Estabelecer relação entre o tipo de crescimento ou decrescimento da função (se rápido ou lento) e a forma de seu gráfico. Visando isto, os problemas estão orientados da seguinte forma:

a) Análise qualitativa do crescimento ou decrescimento da função.

b) Esboço do gráfico

c) Obtenção de expressão analítica para a função.

PARTE B: Obtenção de soluções ótimas para certas situações-problema. Queremos trabalhar nestes problemas usando somente conteudos matemáticos que fazem parte dos programas de 2º grau, e assim sendo as soluções ótimas devem ser determinadas sem o uso do cálculo diferencial.

Por isso, na medida do possível, os problemas foram orientados da seguinte forma:

a) resolução em casos "bastante simples"

b) intuir a partir do "caso simples" a solução ótima do caso "complicado"

c) obter expressão analítica da função que modela o problema, esboçar seu gráfico e localizar o ponto ótimo.

d) mostrar que a solução intuída é de fato ótima

As soluções dos problemas, seguindo o roteiro apresentado, estão no final de cada uma das secções.

Particularmente acreditamos que a proposta de trabalho aqui apresentada possa ser implementada dentro dos programas de matemática de 2º grau. Os problemas enfatizam conceitos e idéias matemáticas, e os aspectos computacionais (cálculo, fórmulas, etc..) surgem como necessidade natural e não como algo importante em si mesmo.

PARTE A

TIPO DE CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO

X

FORMA DO GRAFICO

PROBLEMA I

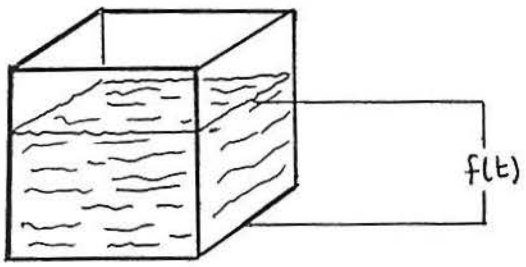
1ª PARTE

É dado um reservatório de forma cúbica com caoacidade igual a V m^3 de água. Tem-se uma torneira enchendo este resernatório e vamos admitir que a vazão de água é K m^3 por minuto. Queremos estudar o comportamento do nível de água no decorrer do tempo. Para isto seja:

T: tempo necessário para encher o reservatório (quem é T?)

A: altura do reservatório (quem é A?)

y = f(t) : altura do nível de água no instante t.



a) Observando que a altura do nível da àgua no instante t é proporcional à t, esboce o gráfico de y = f(t)

b) Obtenha a expressão analítica para f

c) Como é a velocidade com que sobe o nível da àgua?

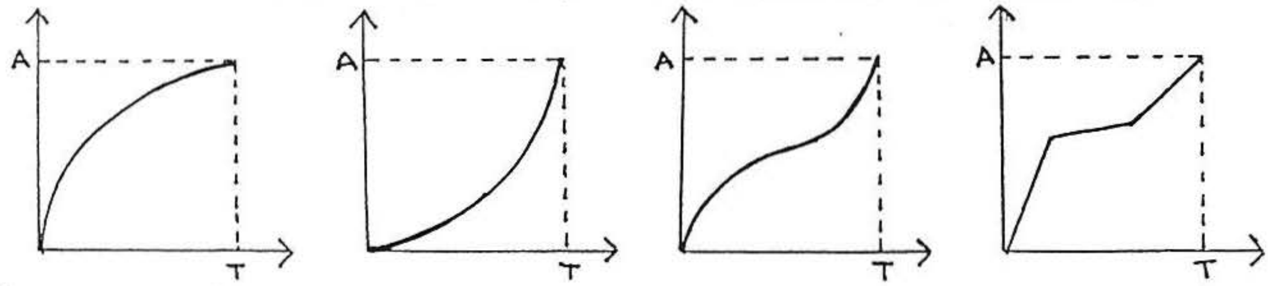
d) Faça num mesmo sistema de coordenadas os gráficos das alturas em função do tempo, para diversos valores de k.

Estabeleça relação entre os coeficientes angulares das retas gráficos e a vazão de k.

2ª PARTE

a) Os gráficos abaixo correspondem a variação do nível de agua no decorrer do tempo, no mesmo reservatório cúbico acima.

Determine, qualitativamente, como foi a entrada de água em cada situação; isto é, como é a velocidade com que sobe o nível de àgua no decorrer do tempo:



b) Para cada situação esboce o gráfico da velocidade em função do tempo.

PROBLEMA II

1ª PARTE

É dado um reservatório cônico com capacidade igual a Vm^3 de água. Tem-se uma torneira enchendo este reservatório e vamos admitir que a vazão de água é $K\ m^3$ por minuto. Queremos estudar o comportamento do nível de água no decorrer do tempo.

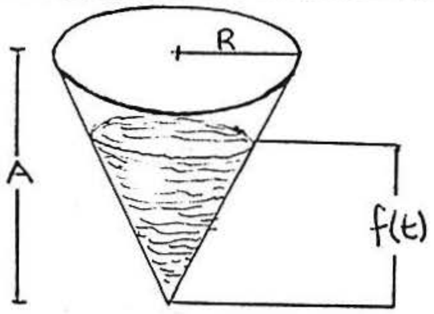
Para isto seja:

T: tempo necessário para encher o reservatório (quem é T?)

A: altura do reservatório (quem é A?)

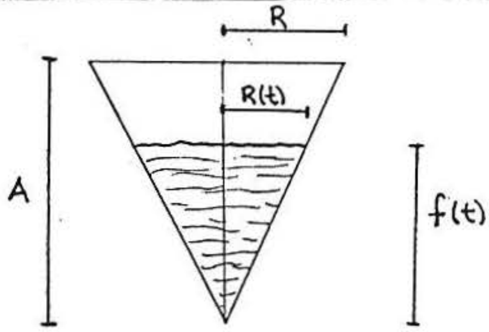
R: raio do reservatório (quem é R?)

$y = f(t)$: altura do nível de água no instante t.



a) Observando que no início do processo o nível de água sobe mais rapidamente que ao final, esboce o gráfico de $y = f(t)$

b) Abaixo temos um corte longitudinal no reservatório:



b_1) Usando semelhança de triângulos obtenha relação entre $R(t)$ e $f(t)$.

b_2) Sabendo que o volume do cone de água é:

$$V(t) = \frac{1}{3}\Pi\left[R(t)\right]^2 * f(t)$$

e que por outro lado $V(t) = 1*t$ (lembre-se que a vazão é $1m^3/min$), obtenha expressão analítica para f.

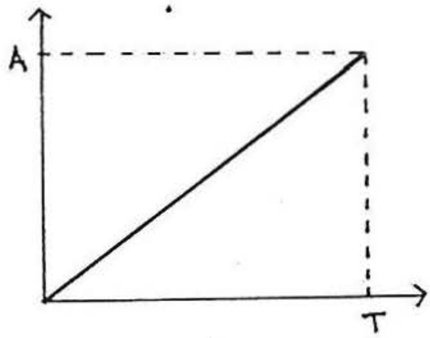
c) Como é a velocidade com que sobe o nível de água? Esboce o gráfico da velocidade em função do tempo.

2ª PARTE

a) Considere no problema anterior a vazão de água igual a k m^3/min. .Num mesmo sistema de coordenadas represente os gráficos da altura do nível de água no decorrer do tempo, para diversos valores de k.

b) Ainda no reservatório cônico é possível obter para altura do nível de água no decorrer do tempo o gráfico abaixo.

Neste caso como é qualitativamente a vazão de água? Esboce o gráfico para a vazão no decorrer do tempo.



3ª PARTE

Dado que os gráficos abaixo correspondem a altura do nível de água em função do tempo, em reservatórios com mesma capacidade e altura, sendo a vazão de água constante e igual para todos, descreva qualitativamente a forma dos reservatórios.

PROBLEMA III

1ª PARTE

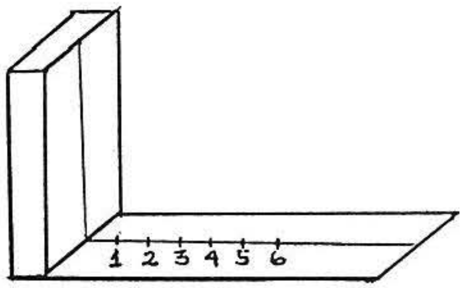
Tem-se uma escada de 6 m de comprimento encostada em uma parede vertical. A extremidade inferior da escada começa a mover-se horizontalmente com velocidade constante de V = 1 m/min e a extremidade superior desliza na parede vertical. Queremos determinar qualitativamente como é a velocidade com que se move a extremidade superior da escada.

Para isto seja:

T: tempo necessário para a escada atingir a posição horizontal (quem é T?)

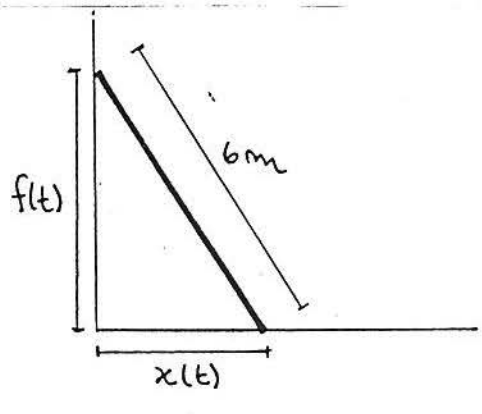
y = f(t): altura em que se encontra a extremidade superior no instante t.

a) Represente numa mesma figura as diversas posições de escada nos tempos 0, 1, 2, 3, ...



b) Esboce o gráfico de y = f(t)

c) A partir da figura abaixo e usando o Teorema de Pitágoras obtenha expressão analítica para y = f(t) e faça o seu gráfico.



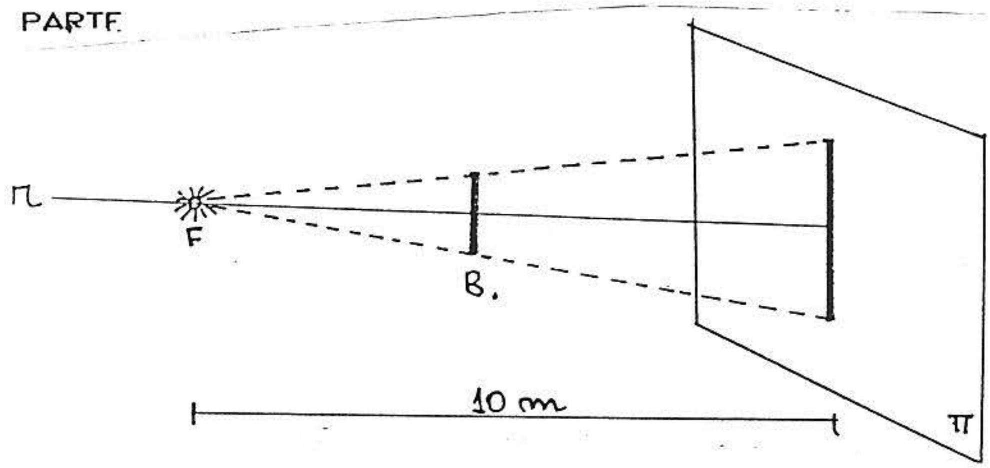
d) Como é a velocidade com que se move a extremidade superior da escada no decorrer do tempo? Esboce o gráfico da velocidade.

2ª PARTE

Tomando no problema anterior v = 2m/min e v = 0,5 m/min represente no mesmo sistema de coordenadas os gráficos da altura da extremidade superior em função do tempo

PROBLEMA IV

1ª PARTE



Na figura acima temos;

Π : plano

B : bastão de comprimento d

F : foco luz à 10m de distância do plano Π

r : reta passando por F e perpendicular á Π

Dado que o bastão se afasta do foco de luz ao longo da reta r, paralelamente ao plano π com velocidade de 1m/min, queremos estudar o comportamento do tamanho da sombra no plano Π no decorrer do tempo.

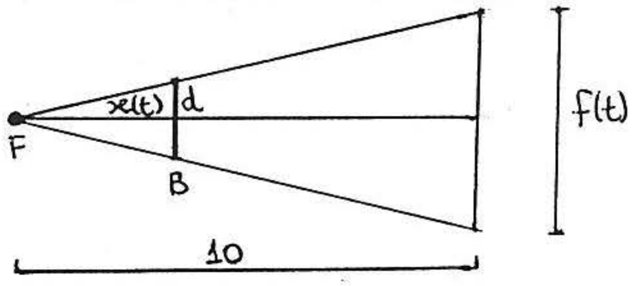
Para isto seja:

T :tempo necessário para o bastão ir de F a Π (quem éT?)

y = f(t) comprimento da sombra no instante de tempo t

a) Analise o tamanho da sombra nos instantes de tempo T = 1, 2, 3, ..., e apartir disso esboce o gráfico de y = f(t)

b) Dado que a distância do bastão ao foco de luz no instante t é x(t) = 1*t (lembre que o bastão se afasta com velocidade de 1m/min), usando semelhança de triângulos na figura abaixo, obtenha expressão analítica para f.



c) Como é a velocidade com que diminui o tamanho da sombra no decorrer do tempo? Esboce o gráfico da velocidade.

2ª PARTE

Considere o problema anterior modificado:

a) O bastão esta fixo à 5m do plano Π

b) O foco de luz se afasta do bastão ao longo da reta r com velocidade de 1m/min. (Desconsidere a hipótese do foco de luz estar à 10m do plano π)

Estude o comportamento da sombra do bastão no decorrer do tempo, para isto usando o roteiro apresentado na 1ª parte.

PROBLEMA V

1ª PARTE

Um carro vem andando com velocidade constante igual a 22 m/seg. Num dado instante, que vamos considerar $t = 0$, com a finalidade de realizar ultrapassagem começa a acelerar e após 12 segundos atinge a velocidade de 34 m/seg. Admitindo que a aceleração é constante queremos analisar a distância percorrida no decorrer do tempo, durante a ultrapassagem, a partir de $t = 0$.

Para isto seja:

$[0, 12]$ intervalo de tempo, em segundos, necessário para que ocorra a ultrapassagem

$y = v(t)$ velocidade no instante de tempo t expressa em m/s, $t \in [0,12]$,

$y = d(t)$ distância percorrida no intervalo de tempo $[0, t]$, expressa em metros, para $t \in [0, 12]$

a) Esboce o gráfico da velocidade em função do tempo e obtenha sua expressão analítica.

b) Analisando, intuitivamente, a distância percorrida em intervalos de tempo de mesmo tamanho ao longo da ultrapassagem, esboce o gráfico de $y = d(t)$

c) Para obter expressão analítica da distância começamos fixando um instante de tempo t_o e dividindo o intervalo $[0, t_o]$ em subintervalos de mesmo comprimento, comprimento este que vamos representar por Δt:

$[0, \Delta t], [\Delta t, 2\Delta t], ..., [t_o - \Delta t, t_o]$

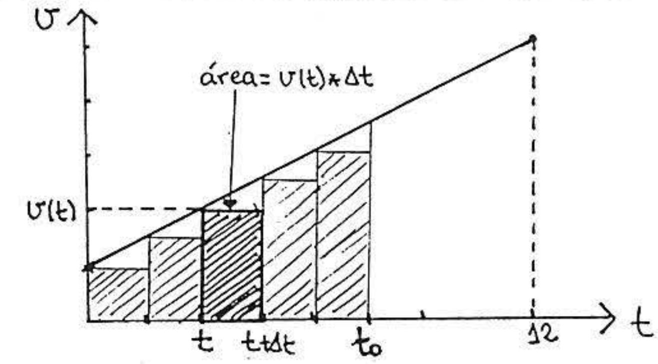
Se Δt é muito pequeno temos que num intervalo genérico $[t, t+\Delta t]$, a distância percorrida é aproximadamente: $v(t) * \Delta t$.
Isto é $d(t + \Delta t) - d(t)$ e aproximadamente $v(t) * \Delta t$.

Por outro lado:

$$d(t_o) = \left[d(\Delta t) - d(0)\right] + \left[d(2\Delta t) - d(\Delta t_1)\right] + \ldots + \left[d(t_o) - d(t_o - \Delta t)\right]$$

já que $f(0) = 0$ e parcelas acima se cancelam, restando a direita da igualdade somente $f(t_o)$

Apartir das informações dadas acima e mais a informação gráfica abaixo, veja que $f(t)$ = área sob o gráfico de v no intervalo $[0, t_o]$



d) Obtenha expressão analítica para d

2ª PARTE

Um carro vem andando com velocidade constante igual a 24 m/seg. Num dado instante, que vamos considerar $t = 0$, com a finalidade de parar no acostamento começa a desacelerar e após 12 segundos pára. Admintindo que a desaceleração é constante, isto é, a velocidade esta diminuindo uniformemente, analise a distância percorrida no intervalo de tempo $[0 , t]$, para $t \in [0 , 12]$.

Use para isto o roteiro da 1ª parte.

3ª PARTE

Dado que os carros de uma certa fábrica saem ajustados de tal forma que no momento que os freios são acionados a velocidade começa a reduzir uniformemente numa taxa de 3 m/s, por segundo (isto é 3 m/s^2)

a) Obtenha expressão analítica para a distância percorrida durante a freagem até parar em função da velocidade que se encontra o carro no momento que os freios são acionados.

b) Seja y = f(v) a função do ítem a).

Faça o gráfico de f

c) Se t é o tempo necessário para o carro parar a partir do momento que os freios foram acionados, estando ele com velocidade v, obtenha t em função de v.

d) Seja t = g(v) a função do ítem c)

Faça o gráfico de g

e) Conclua que:

— a distância percorrida durante a freagem é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade que se encontra o carro quando os freios são acionados.

— o tempo decorrido entre os instantes de freagem e a parada do carro é diretamente proporcional a velocidade que se encontra o carro quando os freios são acionados.

TRABALHO ELABORADO POR:

MARIA ALICE GRAVINA

PARTE A
SOLUCOES DOS PROBLEMAS

PROBLEMA I

1ª PARTE

a) Sendo a altura do nível de água no instante t proporcional à t, temos que o gráfico é uma reta passando pela origem.

b) No instante t o volume de água é:

v(t) = k t (k = vazão)

v(t) = a t (a = área da base do reservatório)

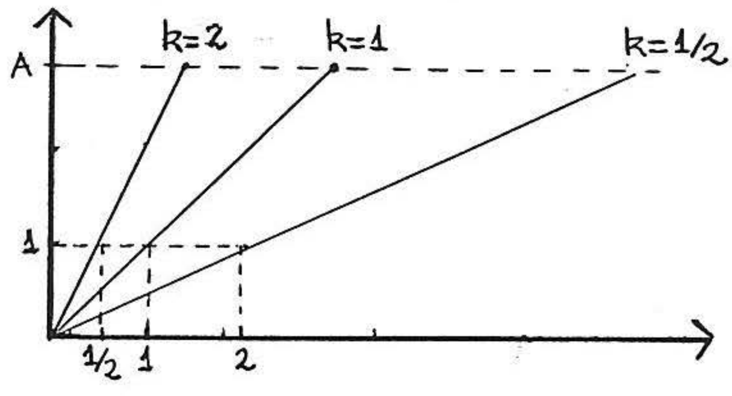
Assim k t = a * f(t) donde $f(t) = \frac{k}{a} t$

c) Intuitivamente vemos que a velocidade é constante já que a vazão e a área da superfície do nível de água são constantes.

De outra forma:

num intervalo de tempo $[t,\ t+\Delta t]$ a velocidade média é $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{(k/a)(t+\Delta t) - (k/a)\,t}{\Delta t} = \frac{k}{a}$, e isto acontece num intervalo tão pequeno quanto se queira (pense em Δt se aproximando de zero). Assim é constante a velocidade com que sobe o nível de água, e igual a k/a m/seg.

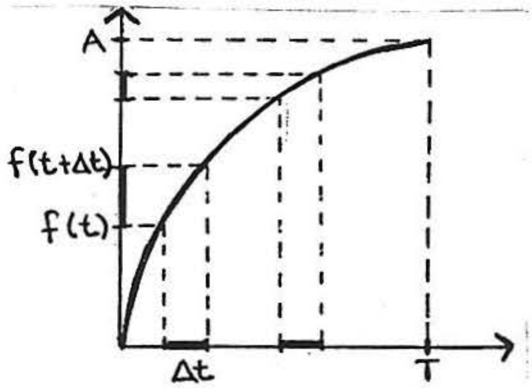
d)



Quando menor é a vazão, menor é a inclinação do segmento de reta que corresponde a altura em função do tempo.

2ª PARTE

1ª Situação: Considere intervalos de tempo $[t, t+\Delta t]$ ao longo do processo (isto é, tomar diferentes t e mesmo Δt). A variação do nível de água num intervalo, $f(t+\Delta t) - f(t)$, conforme nos mostra o gráfico abaixo, diminui a medida que o processo avança:



Conclui-se que a velocidade com que sobe o nível de água diminui ao longo do processo.

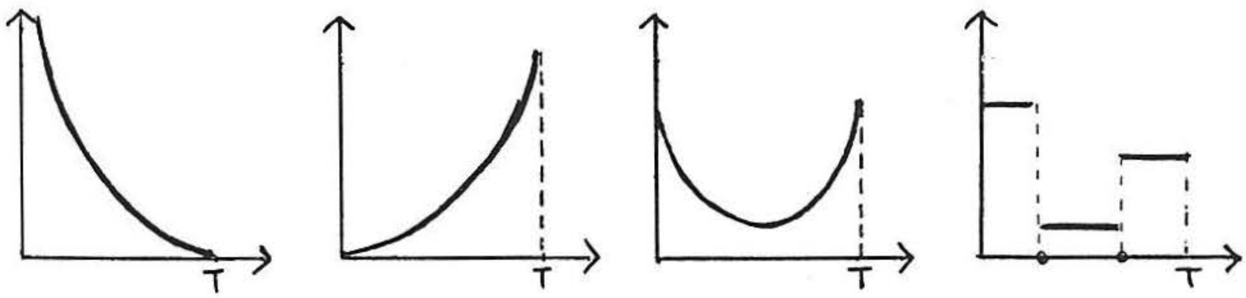
Fazendo análise similar nas demais situações concluimos:

2ª Situação: A velocidade aumenta no decorrer do processo

3ª Situação: Até a metade do processo a velocidade diminui e depois começa aumentar.

4ª Situação: A velocidade é grande e constante no início do processo, depois torna-se pequena e constante, e finalmente constante num valor intermediário.

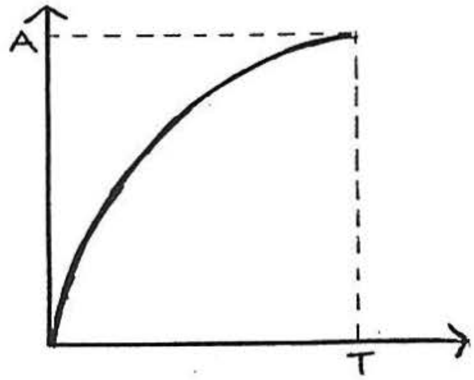
Possíveis gráficos das velocidades nas diversas situações:



PROBLEMA II

1ª PARTE

a)



b_1) Por semelhança de triângulos temos que $\frac{f(t)}{R(t)} = \frac{A}{R}$

e portanto $R(t) = \frac{R}{A} * f(t)$

b_2) $V(t) = \frac{1}{3} \Pi \left(\frac{R}{A}\right)^2 f(t)^2 * f(t)$ e

$V(t) = K\ t$ (k é a vazão)

Assim $k\ t = \frac{1}{3} \Pi \left(\frac{R}{A}\right)^2 f(t)^3$ donde $f(t) = C\ \sqrt[3]{t}$ com

$$C = \sqrt{\frac{3A^2\ k}{\Pi\ R^2}}$$

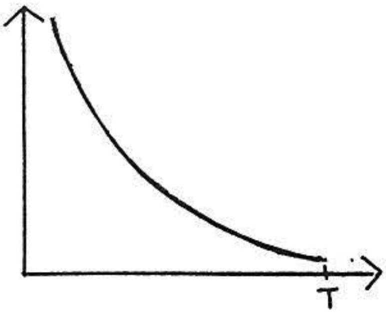
c) Intuitivamente vemos que a velocidade com que sobe o nível de água diminui ao longo do processo.

Se quizermos informação numérica sobre a velocidade devemos analisar a velocidade média no intervalo de tempo $[t,\ t+\Delta]$ (e tanto menor Δt melhor é a informação). Ou seja, devemos analisar o comportamento de:

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{c\ \sqrt[3]{t+\Delta t} - c\ \sqrt[3]{t}}{\Delta t}$$

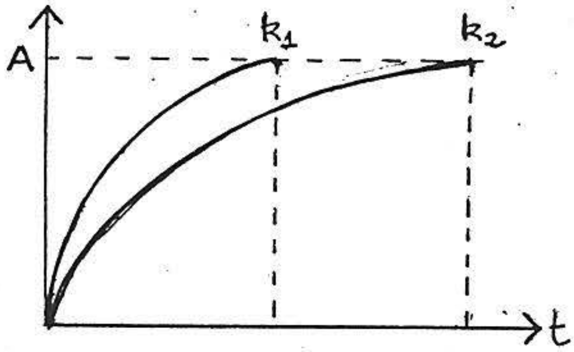
isto para frações de tempo Δt cada vez menores. Esta analise requer alguma técnica, e o leitor interessado pode obter resposta para isto em livros de Cálculo Diferencial e Integral.

Esboço do gráfico da velocidade:



2ª PARTE

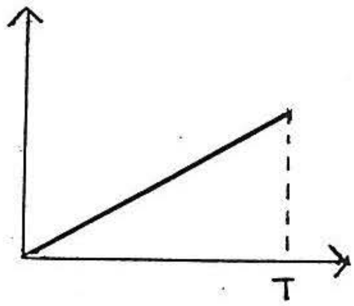
a)



$k_1 > k_2$

b) A altura sobe uniformemente no decorrer do tempo. Para que isto aconteça a vazão de água no início é pequena e deve ir aumentando cada vez mais.

Esboço de um possível gráfico para a vezão:



3ª PARTE

1ª Situação: Reservatório cônico com vértice para baixo.

2ª Situação: Reservatório cônico com vértice para cima.

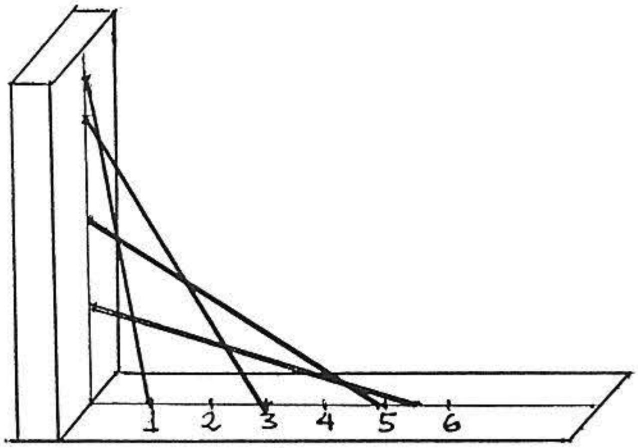
3ª Situação: Reservatório com secção mediana menor em relação à base e a tampa, pensando esta iguais.

4ª Situação: Sobreposição de tres reservatórios de mesma forma com áreas das bases diferentes, sendo o primeiro reservatório o de base menor, o segundo de base maior, e o terceiro com base intermediária.

PROBLEMA III

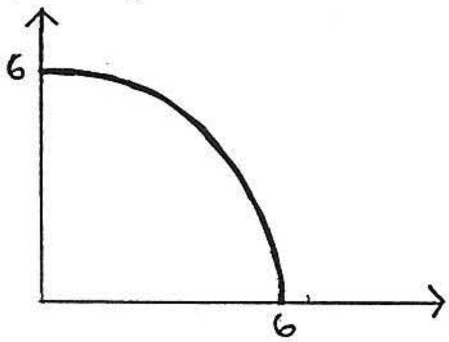
1ª PARTE

a)



b) Em a) vemos que em intervalos de tempo $[t, t+\Delta t]$, de mesmo comprimento, conforme avançamos no processo a extremidade superior da escada percorre distâncias maiores, isto é, $f(t+\Delta t) - f(t)$ aumenta em valor absoluto (Observe que $y = f(t)$ decresce no decorrer do tempo e portanto a diferença acima é negativa).

Esboço do gráfico de f:



c) Usando o teorema de Pitágoras temos que $\left[x(t)\right]^2 + \left[f(t)\right]^2 = 36$. Mas $x(t) = 1*t$ (já que a extremidade inferior se desloca 1m/min), donde $t^2 + (f(t))^2 = 36$.

Observe que $(t, f(t))$ está no círculo de centro $(0,0)$ e raio 6. Assim $f(t) = \sqrt{36 - t^2}$ e o seu gráfico é de fato um pedaço de círculo.

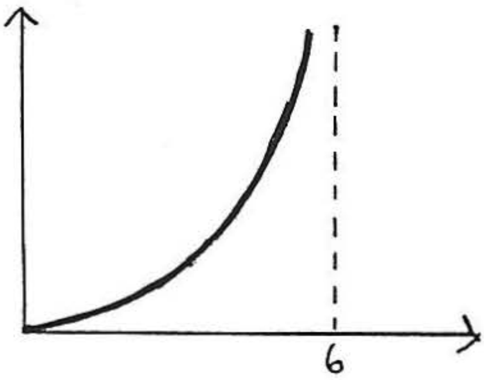
d) Do observado em b), vemos intuitivamente que a velocidade com que se move a extremidade superior aumenta, em valor absoluto, ao longo do processo.

Se quisermos informação numérica sobre a velocidade devemos analisar a velocidade média no intervalo [t, t+Δt] (e tanto menor Δt melhor a informação) ou seja, devemos analisar o comportamento de:

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\sqrt{36 - (t+\Delta t)^2} - \sqrt{36 - t}}{\Delta t}$$

isto para frações de tempo cada vez menores. Esta análise requer alguma técnica e o leitor interessado pode obter esta informação em livros de Cálculo Diferencial e Integral.

Esboço do gráfico da velocidade, <u>em valor absoluto</u>:



2ª PARTE

Para v = 2m/min temos $(2t)^2 + (f(t))^2 = 36$ e portanto $f(t) = \sqrt{36 - 4t^2}$, e seu gráfico é uma quarta parte de elipse

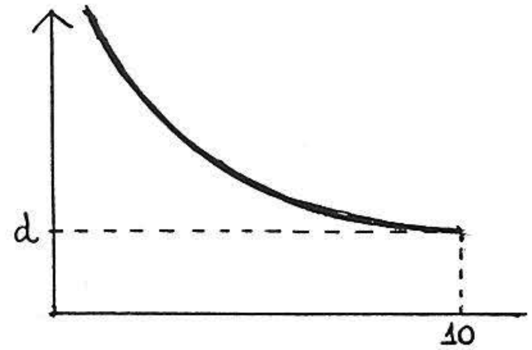
Para v = 0.5m/min temos $(0.5t)^2 + (f(t))^2 = 36$ e portanto $f(t) = \sqrt{36 - 0.25t^2}$, e seu gráfico é uma quarta parte da elipse.

PROBLEMA IV

1ª PARTE

a) No início do processo a sombra é muito grande e diminui no decorrer do tempo, chegando ao tamanho do bastão.

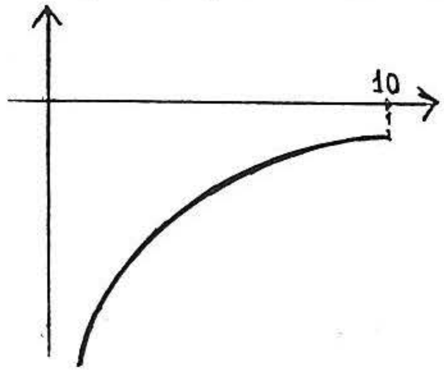
Esboço do gráfico:



b) Da semelhança de triângulos temos que $\frac{f(t)}{b} = \frac{10}{x(t)}$ e como $x(t) = 1 * t$ temos que $f(t) = 10\ b * \frac{1}{t}$

c) Temos que no início do processo a sombra dimunui rapidamente, depois já não mais tão rápido, e quando o bastão está próximo do plano diminui muito devagar.

Esboço do gráfico da velocidade:

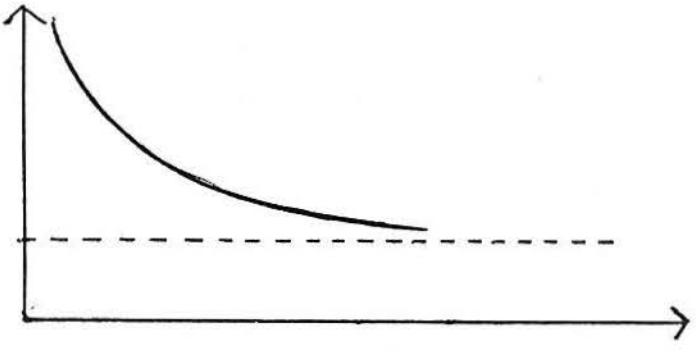


Se queremos informação numérica sobre a derivada devemos analisar o quociente $\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ que nos dá a velocidade média no intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$. Esta análise pode ser encontrada em livros de Cálculo Diferencial e Integral.

2ª PARTE

a) No início do processo a sombra é muito grande e diminui no decorrer do tempo aproximando-se do tamanho do bastão.

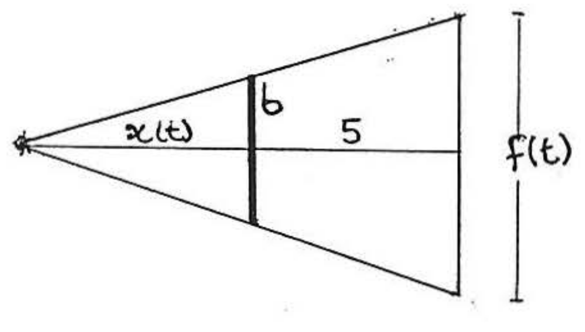
Esboço do gráfico:



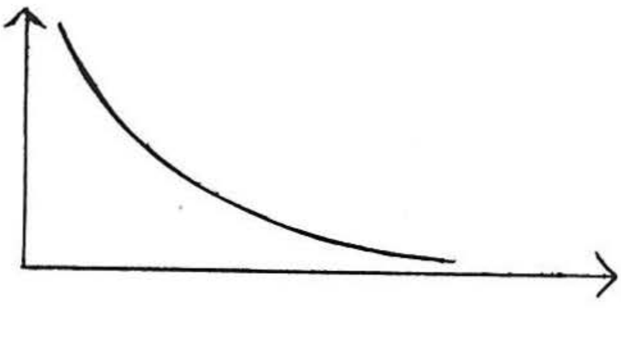
b) Por semelhança de triângulos temos conforme figura abaixo que

$$\frac{f(t)}{x(t)\ +5} = \frac{b}{x(t)} \text{ e portanto } f(t) = b\ \frac{x(t)\ +5}{x(t)} = b * \frac{t\ +5}{t}$$

já que $x(t) = 1 * t$



c) Esboço do gráfico da velocidade, em <u>valor</u> <u>absoluto</u>

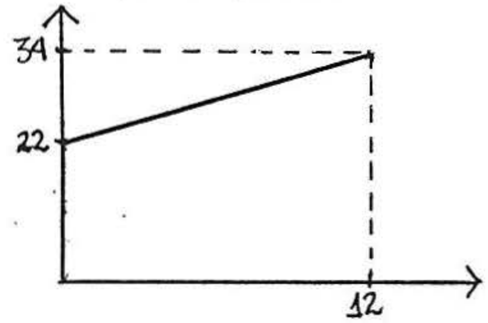


PROBLEMA V

1ª PARTE

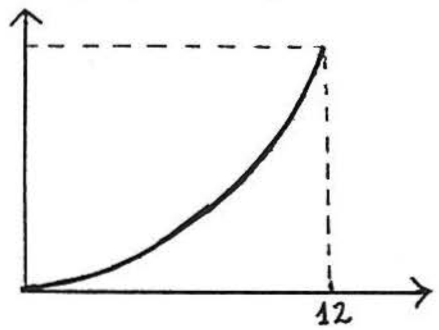
a) Como a velocidade aumenta uniformemente seu gráfico é o segmento de reta com pontos extremos (0, 22) e (12, 34) que tem como equação y = t + 22. Assim v(t) = y +22

Esboço do gráfico:



b) A velocidade média em intervalos de tempo, de mesmo tamanho, ao longo do processo, aumenta. Portanto a distância percorrida em intervalos de tempo de mesmo tamanho, aumenta conforme avançamos no tempo.

Esboço para o gráfico da distância:



c) Como $d(t_0) = (d(\Delta t) - d(0)) + (d(k\Delta t) - (d(\Delta t) + \ldots$
$\ldots + d(t_0) - d(t_0 - \Delta t))$

e $d(t + \Delta t) - d(t)$ é aproximadamente $v(t) * \Delta t$ segue que $f(t_0)$ é aproximadamente $v(0)*\Delta t + v(\Delta t)*\Delta t + v(2\Delta t)*\Delta t + \ldots + v(t_0 - \Delta t)*\Delta t$

Na figura vemos que cada uma dessas parcelas corresponde a área de um retângulo de base Δt e altura $v(t)$. Tomando-se Δt mais e mais próximo de zero vemos que a área da região formada pelos retângulos aproxima-se mais e mais da área do trapézio determinado pelo gráfico de v no intervalo $[0, t_o]$. Assim $d(t_o)$ é igual a área sob o gráfico de v no intervalo $[0, t_o]$

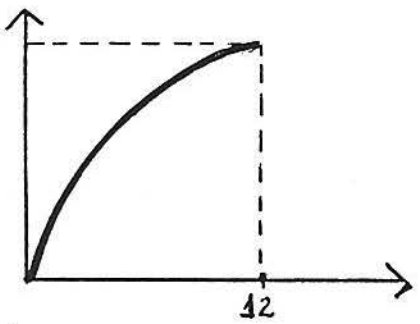
d) Usando a fórmula da área do trapézio, $A = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) h$ obtemos $A = \left[\frac{(t + 22) + 22}{2}\right] t = \frac{t^2}{2} + 22t$. Assim temos que $d(t) = \frac{t^2}{2} + 22\,t$

2ª PARTE

a) Como a velocidade reduz uniformemente seu gráfico é o segmento de reta (0, 24) e (12, 0) que tem como equação $y = -2x + 24$. Assim $v(t) = -2t + 24$

b) A velocidade média em intervalos de tempo de mesmo tamanho, ao longo do processo diminui. Portanto a distância percorrida em intervalos de tempo de mesmo tamanhom diminui, conforma avançamos no tempo.

Esboço do gráfico da distância:



c) Raciocinando de maneira análoga ao que foi feito na 1ª parte obtemos que d(t) = área sobre o gráfico de v no intervalo [0, t]. Assim $d(t) = \left[\frac{24 + (-2t + 24)}{2}\right] * t$ e portanto $d(t) = -t^2 + 24t$

3ª PARTE

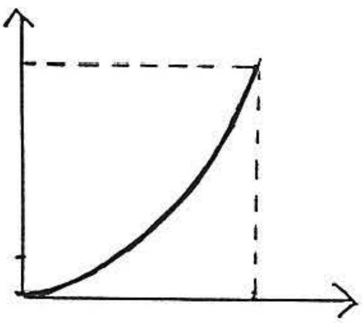
a) Seja v_o a velocidade de um certo carro no instante que os freios são acionados. Como a velocidade começa a reduzir uniformemente numa taxa de 3m/seg, por segundo, obtemos que a velocidade deste carro num dado instante t é $v(t) = v_o - 3t$ e o carro para no instante $t = \dfrac{v_o}{3}$

Como anteriormente obtemos que a distância percorrida até o instante t correspondente a área sob o gráfico de v no intrevalo [0, t]. Assim $d(t) = v_o t - \dfrac{3t^2}{2}$ e portanto

$$d\left(\frac{v_o^2}{3}\right) = \frac{v_o^2}{3} - \frac{v_o^2}{6} = \frac{v_o^2}{6}$$

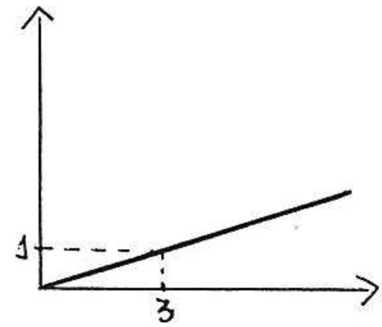
Assim a distância percorrida durante a freagem em função da velocidade que se encontra o carro no momento que os freios são acionados é $f(v) = \dfrac{v^2}{6}$

b)



c) Na parte a obtemos $t = \dfrac{v_o}{3}$ onde t é o tempo necessário para o carro parar e v_o é a velocidade que se encontra o carro no momento em que os freios foram acionados. Assim, $g(v) = \dfrac{v}{3}$

d)



PARTE B

PROBLEMAS DE MAXIMOS E MINIMOS

PROBLEMA I

Tem-se n ripas de madeira com 1 metro de comprimento cada. Usando-se todas as ripas, sem quebrar nenhuma, quer-se delimitar uma região retangular de tal forma que a área seja a maior possível.

Vamos começar resolvendo o problemas em casos particulares e a partir disso teremos uma indicação de quem é a melhor solução no caso geral.

1) Resolva o problema para N = 8 e N = 18, para isto representanto todas as regiões possíveis no papel quadriculado e calculando as respectivas áreas. Quem é a região retangular ótima em cada caso?

2) Se aumentamos o valor de N o método usado em 1) é desanimador. Já temos uma forte indicação para a melhor solução, e é disto que vamos nos convencer no que segue:

2.1) Observe que as condições do problema estabelecem relação funcional entre as variáveis que representam as dimensões da região retangular. Estabeleça esta relação.

2.2) Obtenha a área da região retangular em função de um dos lados.

2.3) Seja y = f(x) a função obtida em 2.2), determine o domínio de f.

2.4) Deixando de lado por um momento o contexto em que surgiu f considere sua variavel independente contínua e faça o gráfico de f . Localize graficamente o ponto que dá a melhor solução para o problema.

2.5) Resolva o problema para N = 600 e N = 830

2.6) Conclua que:

a) N deve ser número par para que o problema tenha solução

b) Se N é divisível por 4 a melhor solução é região retangular que usa N/4 ripas em cada lado.

c)Se N não é divisível por 4 a melhor solução é a região retangular que usa nos lados respectivamente $\frac{N}{4} - \frac{1}{2}$ e $\frac{N}{4} + \frac{1}{2}$ ripas.

PROBLEMA II

Quer-se fazer um pomar em forma retangular com N pés de árvores. As árvores devem ser plantadas à uma distância de 1 metro tanto na horizontal quanto na vertical. Deseja-se minimizar a quantidade de cerca necessária para delimitar este pomar. Como devemos dimensioná-lo?

Vamos começar resolvendo o problema em casos particulares e a partir disto teremos uma indicação de quem é a melhor solução no caso geral.

a) Resolva o problema para $N = 16$ e $N = 32$ para isto, representando todos os pomares possíveis no papel quadriculado e calculando os respectivos perímetros. Quem é o pomar ótimo em cada caso?

b) Se aumentarmos o valor de N o método usado em a) é desanimador. Já temos uma forte indicação para a melhor solução, e é disto que vamos nos convencer no que segue:

b.1) Observe que as condições do problema estabelecem relação funcional entre as variáveis que representam as dimensões do pomar. Estabeleça esta relação.

b.2) Obtenha o perímetro P do pomar em função de um dos lados, e de tal forma que P seja um quociente de dois polinômios.

b.3) Seja $y = P(x)$ a função obtida em 2.2.
Determine o domínio de P

b.4) Deixando de lado por um momento o contexto em que surgiu P, considere sua variável independente contínua. Queremos esboçar o gráfico de f. Para isto:

1- Encontre os zeros de P, isto é, os x tais que $P(x) = 0$

2- Analise o comportamento de P nas proximidades de valores que não estão no domínio de P

3- Analise o comportamento de P quando o valor absoluto de x é arbitrariamente grande.

4- Usando as informações acima esboce o gráfico de P.

b.5) Localize graficamente o ponto $(x_o , P(x_o))$ que dá a solução ótima para o problema.

A partir do ítem a) podemos intuir que a solução ótima é quando $x_o = \sqrt{N}$. Mostre que de fato ela é ótima.

b.6) Resolva o problema para N = 400 e N = 600

b.7) Levando em consideração que a solução ótima x_o deve ser um número natural, conclua como obtê-la no caso geral.

PROBLEMA III

O custo de construção de um tanque é dado em função de sua área total. Tem-se recursos para construir-se o tanque com $80m^2$ de área. Estude a função volume do tanque e determine graficamente o ponto que fornece o tanque de volume máximo. Considere o tanque fechado e com base quadrada.

Para isto:

a) Observe que a as condições do problema determina relação funcional entre as variáveis que representam as dimensões do tanque. Estabeleça esta relação.

b) Obtenha o volume do tanque em função do comprimento de uma das arestas do tanque. Faça isto de tal forma que a expressão analítica da função seja do tipo polinômio.

c) Seja $y = f(x)$ a função obtida em b) e tome para domínio de f o conjunto dos números reais. Queremos esboçar o gráfico de f, para isto:

c.1) Determine os zeros de f, isto é, x tal que $f(x) = 0$

c.2) Analise o sinal de f nas proximidades dos zeros.

c.3) Reescreva a expressão analítica de f colocando em evidência a maior potência de x, e use esta expressão para determinar o comportamento de f quando o valor absoluto de x é arbitrariamente grande.

c.4) Usando as informações acima esboce o gráfico de f

d) Localize graficamente o ponto que nos dá a solução ótima do problema.

Observação: O valor numérico do ponto ótimo no problema acima é obtido facilmente com técnicas do cálculo diferencial, conteúdo este não faz parte dos programas de 2º grau.

Será que tal conteúdo não deveria ser incluído no 2º grau? Sobre isto, leia o artigo "O Ensino do Cálculo no 2º Grau", de Geraldo Ávila na RPM nº 18.

PARTE B

SOLUCÃO DOS PROBLEMAS

PROBLEMA I

1) Para $N = 8$ obtemos para possíveis regiões um retângulo 1×3 e um quadrado 2×2, sendo o quadrado a solução ótima.

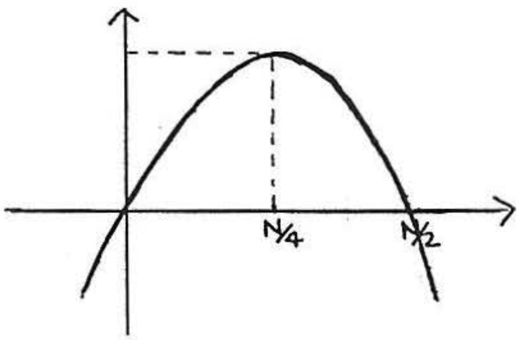
Para $n = 18$ obtemos para possíveis regiões retangular de dimensões 1×8, 2×7, 3×6, 4×5 sendo o último deles o de maior área, e este é o que mais se aproxima de um quadrado.

2.1) Sendo x = número de ripas usadas na horizontal e y = número de ripas usadas na vertical temos de $2x + 2y = n$

2.2) $A(x) = \dfrac{x\,(N - 2x)}{2}$

2.3) No problema devemos ter $1 \leq x \leq \dfrac{N}{2} - 1$

2.4) $y = A(x)$ é uma parábola voltada para baixo com vértice em $x = \dfrac{N}{4}$



2.5) Se $N = 600$ a solução ótima é $x = 150$

Se $N = 830$ a solução ótima é $x = 207$

2.6) a) Sendo $2x + 2y = N$ segue que N é par

b) No vértice da parábola temos um ponto de máximo para a função área. Mas a coordenada x do vértice pode ser ou não um número inteiro. Já sabemos que $x = \dfrac{N}{4}$. Assim se N é divisível por 4 temos que x é inteiro e portanto é a solução ótima.

c) Se N não é divisível por 4 a solução ótima é o maior inteiro mais próximo da coordenada x do vértice. E este inteiro é $\frac{N}{4} - \frac{1}{2}$ ou $\frac{N}{4} + \frac{1}{2}$

PROBLEMA II

Por uma questão de simplificação nos cálculos vamos admitir a quantidade de metros de cerca a ser usado é igual a duas vezes o número de árvores numa carreira horizontal mais duas vezes o número de árvores numa carreira vertical.

a) Se N = 16 as disposições posíveis de árvore em forma retangular são 1x16, 2x8, 4x4, sendo a quantidade de cerca necessária em cada caso, respectivamente 34, 20, 16, e portanto 4x4 é a solução ótima.

Se N = 32 as disposições possíveis de árvores em forma retangular são 1x32, 2x16, 4x8, sendo a quantidade de cerca necessária em cada caso, respectivamente 66, 36, 24, e portanto 4x8 é a solução ótima. Esta solução é a que mais se aproxima de um quadrado.

b_1) Sendo x = número de árvores na horizontal e y = número de árvores na vertical temos que x * y = N

b_2) Temos que o perímetro é igual a duas vezes o número de árvores na vertical mais duas vezes o número de árvores na horizontal.

Assim $P(x) = 2x + 2 \frac{N}{x}$ ou seja $P(x) = 2 \left[\frac{x^2 + N}{x} \right]$

b_3) No problema temos que o domínio de P e o conjunto dos x naturais tais que $1 \leq x \leq N$

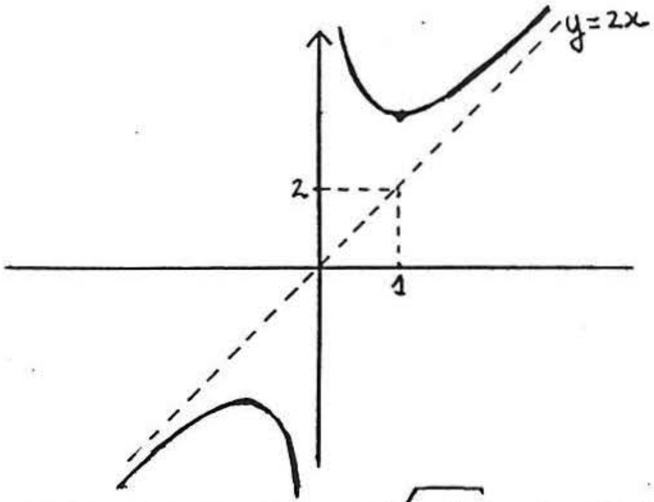
b_4)

1. A função P nunca se anula

2. Quando x se aproxima de zero com excesso temos que P(x) aumenta sem limitação, quando x se aoroxima de zero com falta temos que P(x) é negativo e diminui sem limitação.

3. Sendo $P(x) = 2 \left[x + \frac{N}{x} \right]$ vemos que quando x aumenta sem limitação, P(x) também aumenta sem limitação e o valor P(x) é muito parecido com 2x já que $\frac{N}{x}$ esta cada vez mais próximo de zero. E quando x é cada vez mais negativo, o mesmo acontece com P(x) sendo este valor, como antes, parecido com 2x

4.



b_5) Vamos mostrar que $p(\sqrt{N}) \leq P(x)$ qualquer que seja $x > 0$. De fato:

$$P(\sqrt{N}) \leq P(x) \iff 2\left[\frac{(\sqrt{N})^2 + N}{\sqrt{N}}\right] \leq 2\left(\frac{x^2+N}{x}\right) \iff$$

$$\frac{2N}{\sqrt{N}} \leq \frac{x^2+N}{x} \iff 2\sqrt{N}\, x \leq x^2 + N \iff x^2 - 2x\sqrt{N} + N \geq 0$$

$\iff (x - \sqrt{N})^2 \geq 0$, e esta última igualdade sempre se verifica.

b_6) Para $N = 400$ a solução ótima é $x = \sqrt{400}$, ou seja, é o pomar 20x20.

b_7) Para $N = 600$ a solução ótima é um dos valores;

o Maior inteiro menor ou igual a $\sqrt{N}$ ou o menor inteiro maior ou igual a $\sqrt{N}$; determina-se o ótimo calculando-se o perímetro nestes dois valores e tomando-se dentre eles o que fornece o menor perímetro.

PROBLEMA III

a) Seja x = comprimento da aresta da base e seja y = altura do tanque. Temos $2x^2 + 4xy = 80$

b) Como volume do tanque é area da base x altura temos

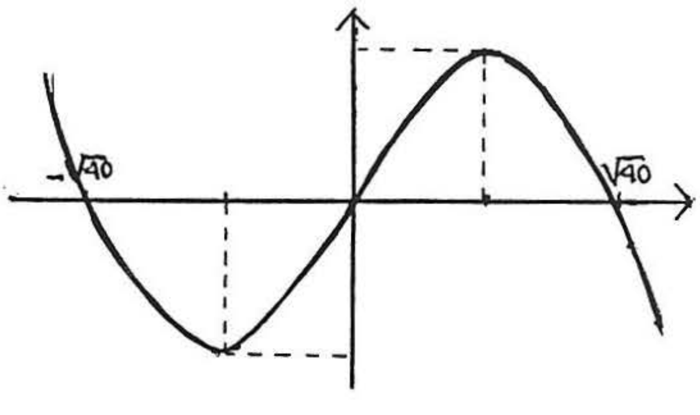
$$V(x) = x^2 \left[\frac{80 - 2x^2}{4x} \right] = \frac{1}{4} \; x \; (80 - 2x^2)$$

c_1) Temos $V(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x \pm \sqrt{40}$

c_2) V muda de sinal a direita e a esquerda dos zeros

c_3) Escrevendo $v(x) = -\frac{1}{4} \; x^3 \left[\frac{80}{x^2} - 2 \right]$ vemos que para x arbitrariamente grande em valor absoluto o valor de $V(x)$ é muito parecido com $-\frac{x^3}{2}$ já que $\frac{80}{x^2} - 2$ é muito parecido com -2

c_4)



d) O ponto que dá a solução ótima é o ponto de máximo no intervalo $[0, \sqrt{40}\,]$.

TRABALHO ELABORADO POR:
MARIA ALICE GRAVINA

A FUNÇÃO EXPONENCIAL DE VARIAVEL DISCRETA
CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO
ATIVIDADE 1
Observe a tabela abaixo :
POPULAÇÃO DOS ESTADOS UNIDOS
(adaptado de New York Times Encyclopedic Almanac -1970)

n=enésima coleta de dados	t=tempo (anos)	P= população (milhões)	P(t+Δt)/ P(t)
0	1790	3,93	1,3511450...
1	1800	5,31	1,3634651...
2	1810	7,24	1,3314917...
3	1820	9,64	1,3350622...
4	1830	12,87	1,326340...
5	1840	17,07	1,3585237...
6	1850	23,19	1,3557567...
7	1860	31,44	-

Os dados apresentam alguma(s) REGULARIDADE(s) ? Em caso positivo, IDENTIFIQUE-A(S).

ATIVIDADE 2
Observe a tabela abaixo:
TEMPERATURA DA AGUA COLOCADA NUM RECIPIENTE FECHADO,OBTIDA APOS AQUECIMENTO ALGUNS GRAUS ACIMA DA TEMPERATURA AMBIENTE A=25° C

n= enésima coleta de dados	t=tempo (min)	T=temperatura (graus centígrados)	T(t)-A	[T(t+Δt)-A]/[T(t)-A]
0	0	35,2	10,2	0,794117...
1	10	33,1	8,1	0,802469...
2	20	31,5	6,5	0,769230...
3	30	30,0	5,0	0,760000...
4	40	28,8	3,8	0,68410...
5	50	27,6	2,6	-

Os dados apresentam alguma(s) REGULARIDADE(s) ? Em caso afirmativo IDENTIFIQUE-A(S).

ATIVIDADE 3 - DESCRIÇAO DO MODELO MATEMATICO

As grandezas P e T que aparecem nas ATIVIDADES 1 e 2 respectivamente seguem o MODELO MATEMATICO:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t+\Delta t)/y(t) = c, \\ \text{com } t=t_0+n*\Delta t, n=0,1,2,3,\ldots \end{array}}$$

onde y representa P e T, uma de cada vez.

TEOREMA:

Se y satisfaz o modelo matematico

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t+\Delta t)/y(t) = c, \\ \text{com } t=t_0+n*\Delta t \text{ e} \\ n=0,1,2,3,\ldots\ldots \\ \\ y(t_0)=y_0 \end{array}}$$

para alguma constante c, então y tem expressão analítica da forma

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t_0+n*\Delta t) = y(n)=y_0*c^n, \\ \text{com } n=0,1,2,3,\ldots \end{array}}$$

E reciprocamente.

PROVA POR INDUÇAO:

$\boxed{\rightarrow}$ Para n=0: $y(t_0+n*\Delta t) = y(t_0)= y_0 =y_0*c^0 = y_0*c^n$

Para n=1: $y(t_0+n*\Delta t) = y(t_0+\Delta t)=c*y(t_0) =y_0*c^1 = y_0*c^n$

Supondo que a tese vale para n, mostremos que ela tambem será valida para n+1. Com efeito:

$$y(t_0+(n+1)*\Delta t) = c*y(t_0+n*\Delta t) = c*y_0*c^n = y_0*c^{n+1}$$

$\boxed{\leftarrow}$ Para n=0: $y(t_0) = y(t_0+0*\Delta t) = y_0*c^0 = y_0$

$y(t_0+\Delta t)/y(t_0) = y_0*c/y_0 = c$

Supondo que a tese vale para n, mostremos que ela tambem será valida para n+1. Com efeito:

$$y((t_0+n*\Delta t)+ t) / y(t_0+n*\Delta t) = y((t_0+(n+1)*\Delta t) / y(t_0+n*\Delta t)$$

$$=y_0*c^{n+1} / y_0*c^n = c$$

ATIVIDADE 4 - IDENTIFICAÇÃO DO MODELO MATERMATICO

Considere o modelo matemático

$y(n+1)/y(n)=c$, com $n=0,1,2,3,...$; $y(0)=1$	<-------->	$y(n)=c^n$, com $n=0,1,2,3,...$

1. Identifique:

constantes:.......
variáveis:........

2. Define-se a função de INPUT n e OUTPUT y como a FUNÇÃO EXPONENCIAL (DE VARIAVEL DISCRETA) DE BASE c, cuja expressão analitica e dada por $y(n) = c^n$.

	função	
INPUT n	EXPONENCIAL ------------> DE BASE c	OUTPUT y; $y(n)= c^n$

3. O INPUT n é dito o LOGARITMO do OUTPUT y NA BASE c e anotado por:

$$\boxed{n=\log_c y}$$

APLICAÇÃO DO MODELO MATEMATICO AS DEMAIS CIENCIAS

ATIVIDADE 1

A "lei natural de decomposição" de uma substância radioativa diz que a razão entre a quantidade da substancia em cada instante e a quantidade do instante anterior e constante. Tome Q_o para a quantidade de substancia no instante inicial e c, para a constante.

Determine uma expressão analitica para a quantidade de substancia radioativa $Q=Q(n)$, onde n e a enesima etapa da coleta de dados realizada a intervalos regulares.

SOLUÇAO: 1. FORMULAÇAO MATEMATICA DOS DADOS VERBAIS DO PROBLEMA:

" n e a enesima etapa da coleta de dados realizada a intervalos regulares" EQUIVALE A:

n assume os valores $t_o, t_o+\Delta t, t_o+2*\Delta t, t_o+3*\Delta t, ...$ com Δt constante

"a razão entre a quantidade da substancia em cada instante e a quantidade do instante anterior e constante " EQUIVALE A:

$$Q(n+1)/Q(n) = c$$

ISTO E: $Q(t_o+n*\Delta t+\Delta t)/Q(t_o+n*\Delta t)=c$

OU AINDA: $Q(t+\Delta t)/Q(t) = c$, para $t=t_o, t_o+\Delta t, t_o+2*\Delta t, t_o+3*\Delta t...$

2. DETERMINAÇAO DA RESPOSTA:

Pelo TEOREMA anterior , a expressão analitica da relação funcional entre as variáveis Q e n é da forma:

$$Q(n)=Q(t_0+n*\Delta t)=Q_0*c^n \text{ , para } n=0,1,2,3......$$

RESPOSTA: $Q(n)=Q_0*c^n$

ATIVIDADE 2

O desenvolvimento das populações na Biologia se processa, inicialmente, de modo que a razão entre as populações, avaliadas em intervalos de tempo regulares e tomados sucessivamente, é constante, até que fatores limitantes de meio ambiente, alimentação, epidemias, etc., comecem a alterar esse comportamento.

Considere uma população de bactérias que,em condições ideais cresce de modo que cada celula se divide em duas, num periodo de T minutos, dito "periodo de geração da bactéria". Por exemplo, o periodo T de geração da bacteria "escherichia-coli" num meio nutriente é de 20 minutos.A "biomassa" N após cada periodo T é o número de bactérias existentes, com N_0 denotando a biomassa para o instante $t=t_0$.

Determine uma expressão analitica para N=N(n), se n é a enesima etapa da coleta de dados, realizada ao final de cada "periodo de geração" fora da interferência de fatores limitantes do meio ambiente.

SOLUÇAO: 1. FORMULAÇAO MATEMATICA DOS DADOS VERBAIS DO PROBLEMA:

" n é a enesima etapa da coleta de dados, realizada ao final de cada "periodo de geração"" EQUIVALE A:

n assume os valores t_0 ,t_0 +T,t_0 +2*T,t_0 +3*T,.....

"a razão entre as populações, avaliadas em intervalos de tempo regulares e tomados sucessivamente, é constante" EQUIVALE A:

$$N(t + T)/ N(t) = c$$

" uma população de bacterias que,em condições ideais cresce de modo que cada celula se divide em duas, num periodo de T minutos, dito "periodo de geração da bacteria"" EQUIVALE A:

$$N(n + 1) = 2*N(n)$$

Juntando-se as informações, tem-se:

$$N(t_0+n*T+T)/N(t_0+n*T) = 2, \text{ para } n=0,1,2,3....$$

ISTO E: $N(t+\Delta t)/N(t)=2$, para $t=t_0+n*\Delta t$, $n=0,1,2,3...$ e $\Delta t=T$

2. DETERMINAÇAO DA RESPOSTA:

Pelo TEOREMA anterior , a expressão analitica da relação funcional entre as variáveis N e n é da forma:

$$N(n)=N(t_0+n*\Delta t)=N_0*2^n \text{ , para } n=0,1,2,3......$$

RESPOSTA: $N(n)=N_0*2^n$

ATIVIDADE 3

Experiências em laboratório mostram que se um corpo é aquecido a uma temperatura superior à temperatura ambiente (constante), a diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente em cada instante de medição é diretamente proporcional a essa diferença no instante anterior. Anote por A, a temperatura a que esta submetido um corpo , T_o a temperatura do corpo no instante t=0 e c, a constante de proporcionalidade.

Determine uma expressão analitica para a temperatura T=T(n) do corpo em cada instante, onde n é a enésima etapa da coleta de dados, realizada a intervalos regulares de tempo.

RESPOSTA: $T(n)= T_o * c^n + A$

ATIVIDADE 4

Experiencias mostram que, administrada uma certa quantidade Q_o de uma droga em um individuo, por via intravenosa, a quantidade Q que permanece no sistema circulatorio em cada instante é diretamente proporcional à quantidade que existia no instante anterior. Tome c para a constante de proporcionalidade.

Determine uma expressão analitica para Q=Q(n), onde n indica é a enesima etapa da coleta de dados, realizada a intervalos regulares.

RESPOSTA: $Q(n)=Q_o * c_n$

UTILIZAÇAO DO MODELO MATEMATICO PARA OBTENÇAO DE RESULTADOS

ATIVIDADE 1

Suponha que todas as grandezas abaixo seguem a "lei natural de crescimento (ou decrescimento) $y(t)=y_0*10^{k*t}$, com $k>0$(ou $k<0$)"

1. Seja C_0 moles/litro a concentração inicial de uma droga administrada em uma pessoa por via intravenosa. Suponha que, em 10 minutos, a concentração da droga se reduz a 2/3 da inicial. A que percentual da concentração inicial se reduz a droga após meia hora ? Quanto tempo é necessário para se ter apenas 1% da concentração inicial ?

SOLUÇAO: 1. FORMULAÇAO MATEMATICA DOS DADOS VERBAIS DO PROBLEMA:

Seja $C(t)$ a concentração da droga na corrente sanguinea, t minutos após ser administrada.

"Suponha que todas as grandezas abaixo seguem a "lei natural de crescimento(ou decrescimento) $y(t)=y_0*10^{k*t}$, com $k>0$(ou $k<0$)""

EQUIVALE A: $C(t)=C_0*10^{k*t}$, com $k<0$ (por que $k<0$?)

"Suponha que, em 10 minutos, a concentração da droga se reduz a 2/3 da inicial" EQUIVALE A: $C(10)= 2/3*C_0$

Juntando-se as informações:

$C(10)=C_0*10^{k*10}$

$C(10)= 2/3*C_0$

ISTO E: $10^{k} =(2/3)^{1/10}$

OU SEJA: $C(t)=C_0*(2/3)^{t/10}$

2. DETERMINAÇAO DAS RESPOSTAS:

"A que percentual da concentração inicial se reduz a droga após meia hora ?" EQUIVALE A:

Qual o valor de $C(30)/C_0$?

RESPOSTA: APROXIMADAMENTE 88 %

" Quanto tempo e necessario para se ter apenas 1% da concentraçao inicial ? " EQUIVALE A:

Qual o valor de t que resolve a equacão exponencial

$C_0*(2/3)^{t/10} = C_0/100$?

RESPOSTA: $t=20/\log(3/2)$

2. Compostos de fosfato agem como um poderoso fertilizante para algas. Estes agentes, colocados em detergentes caseiros, tem sido um dos responsaveis pelo grande crescimento de algas em lagos e fontes de agua quando aí lançados. Suponha que existam 10 plantas de algas presentes em certa area de um lago no instante $t=0$, e que 2 horas mais tarde existam 20 plantas. Estime o número de algas presentes em 8 horas. Estime o número de algas presentes ao final de um dia (24 horas). Estime o tempo necessario para se ter a presença de 100 plantas. Há quantas horas passadas havia apenas uma planta de alga no lago ? Em algum momento, não havia algas no lago ?

SOLUÇAO: 1. FORMULAÇAO MATEMATICA DOS DADOS VERBAIS DO PROBLEMA:
Seja $Q(t)$ o mumero de algas presentes na área do lago, após t minutos.

"Suponha que todas as grandezas abaixo seguem a "lei natural de crescimento (ou decrescimento) $y(t)=y_0*10^{k*t}$, com $k>0$ (ou $k<0$)""

EQUIVALE A: $Q(t)=Q_0*10^{k*t}$, com $k>0$ (por que $k>0$?)

"Suponha que existam 10 plantas de algas presentes na área do lago no instante $t=0$" EQUIVALE A:

$$Q(0)=Q_0=10$$

"2 horas mais tarde existam 20 plantas" EQUIVALE A:

$$Q(2)=20. \text{ ISTO E: } 20=Q_0*10^{k*2}$$

Juntando-se as informações: $20=10*10^{2*k}$. ISTO E: $10^{k}=2^{1/2}$.

OU SEJA: $Q(t)=10*2^{t/2}$

2. DETERMINAÇAO DAS RESPOSTAS:

" Estime o número de algas presentes em 8 horas" EQUIVALE A:
Qual o valor de $Q(8)$?
RESPOSTA: $Q(8)=160$

" Estime o número de algas presentes ao final de um dia (24 horas)" EQUIVALE A:
Qual o valor de $Q(24)$?
RESPOSTA: $Q(24)=40960$

"Estime o tempo necessario para se ter a presença de 100 plantas" EQUIVALE A:

Qual o valor de t que resolve a equação exponencial $10=2^{t/2}$?
RESPOSTA: $t=2/\log 2$

" Ha quantas horas passadas havia apenas uma planta de alga no lago ? " EQUIVALE A:

Qual o valor de t que resolve a equação exponencial $1/10=2^{t/2}$?
RESPOSTA: $t=-2/\log 2$, onde o sinal "-" responde pela palavra "passadas"

"Em algum momento, não havia algas no lago ? EQUIVALE A:

Existe valor de t que resolve a equação exponencial $0=10*2^{t/2}$?
RESPOSTA: NAO (não ocorre a geração expontanea de algas).

ATIVIDADE 2

Considere uma substância que se decompõe segundo a "lei de decrescimento $y(t)=y_0*10^{k*t}$, com $k<0$ ".

A MEIA-VIDA da substancia e definida como a quantidade de tempo T necessaria para a decomposição de exatamente METADE da substância.

1.De uma expressão analitica para T.

2." Se uma substância radioativa tem meia-vida de 1800 anos, apos 3600 anos toda a substancia terá sido decomposta." V ou F ?

3.A meia-vida do elemento radio e de 1656 anos. Se uma amostra de rádio pesa agora 50 kg, quantas gramas restarão da amostra daqui a 100 anos ? Quanto tempo levara para uma amostra de 50 kg reduzir-se a 5 kg ?

4.O cobalto-60, que e utilizado no tratamento de pacientes com câncer, tem meia-vida de 5,26 anos. Qual a quantidade inicial da substância se, passados 10 anos, ela está reduzida a 200 mg ?

5.Se apos 25 anos, a quantidade de rádio decresce para 4,948 g e, apos mais 25 anos, cai para 4,896 g, quantas gramas estavam presentes no inicio do processo ?

6.O radioisotopo R_a^{228} perde 9,8% de sua intensidade de radiação por ano. Se I_0 e a intensidade original, qual o valor da sua meia-vida ?

7.A meia-vida da morfina é de 3 horas. Encontre a constante segundo a qual se dá a sua eliminação da corrente sanguínea.

8.A meia-vida da nicotina e de 2 horas. Depois de 6 horas de sua ingestão, que fração dela permanece no sistema circulatório ?

RESPOSTAS:

1.T= -log 2/k

2.FALSO,pois $y(3600) = y_0/4$

3.$y(100)=50*2^{-100/1656}$

t=1656/log 2

4.$y_0 = 200*2^{1000/526}$

5.aproximadamente 5 g

6.T= -log 2/log 0,902

7.k= (-log 2)/3

8.1/8

E COMO SURGE O NÚMERO e ?

MOTIVAÇÃO

ATIVIDADE 1

Observe a tabela abaixo :

POPULAÇÃO DOS ESTADOS UNIDOS
(New York Times Encyclopedic Almanac -1970)

t=tempo (anos)	P=população (milhões)	$P=P(t+\Delta t)-P(t)$	$(\Delta P/\Delta t)/P$
1790	3,93	-	-
1800	5,31	0,138	0,0351145
1810	7,24	0.193	0,0363465
1820	9,64	0,240	0,0331491
1830	12,87	0,323	0,0335062
1840	17,07	0,420	0,0326340
1850	23,19	0,612	0,0358523
1860	31,44	0,825	0,0355756

Os dados apresentam alguma(s) REGULARIDADE(s) ? Em caso positivo, IDENTIFIQUE-A(S).

ATIVIDADE 2

Observe a tabela abaixo:

TEMPERATURA DA AGUA COLOCADA NUM RECIPIENTE FECHADO,OBTIDA APOS AQUECIMENTO ALGUNS GRAUS ACIMA DA TEMPERATURA AMBIENTE $A=25^{o}$ C

n=enésima coleta de dados	t=tempo (min)	T=temperatura (^{o} C)	$\Delta[T(t)-A]$	$\{\Delta[T(t)-A]/\Delta t\} / [T(t)-A]$
0	0	35,2	-2,1	-0,0205882...
1	10	33,1	-1,6	-0,0197530...
2	20	31,5	-1,5	-0,0230769...
3	30	30,0	-1,2	-0,0240000...
4	40	28,8	-1,2	-0,0315789...
5	50	27,6	-	-

Os dados apresentam alguma(s) REGULARIDADE(s)? Em caso afirmativo IDENTIFIQUE-A(S).

CONSTRUÇAO DO MODELO MATEMATICO

ATIVIDADE 1

As grandezas P e T que aparecem nas ATIVIDADES 1 e 2 respectivamente seguem o MODELO MATEMATICO:

$$\boxed{(\Delta y / \Delta t)/y(t) = c, \quad \text{com } t=t_0+n* t, n=0,1,2,3,..}$$

onde y representa P e T, uma de cada vez.

TEOREMA:

Se y satisfaz o modelo matemático

$$\boxed{\begin{array}{l}(\Delta y / \Delta t)/y(t) = c, \\ \text{com } t=t_0+n*\Delta t \text{ e} \\ n=0,1,2,3,...... \\ y(t_0)=y_0\end{array}}$$

para alguma constante c, então y tem expressão analítica da forma

$$\boxed{\begin{array}{l}y(t_0+n*\Delta t)=y(n)=y_0*(1+c\Delta t)^n, \\ \text{com } n=0,1,2,3,..\end{array}}$$

. E reciprocamente.

PROVA POR INDUÇAO:

REDUZA AO TEOREMA ANTERIOR ESCREVENDO:

$$(\Delta y/\Delta t)/y(t) = c \Longleftrightarrow \Delta y= c*y(t)*\Delta t \Longleftrightarrow y(t+\Delta t)/y(t)=(1+c*\Delta t)$$

ATIVIDADE 2

Considere o modelo matemático:

$$\boxed{\begin{array}{l}[y(t+\Delta t) - y(t)]/\Delta t/y(t) = 1 \\ \text{com } t=n*\Delta t \text{ e } n=0,1,2,3,... \\ \\ y(0) = 1\end{array}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}y(n*\Delta t)=(1+\Delta t)^n \\ \text{com } n=0,1,2,3,...\end{array}}$$

Observe a tabela que se segue, obtida a partir do modelo anterior para valores particulares de n e de Δt

Δt	$(1+\Delta t)^n$						
	$1+\Delta t$	$(1+\Delta t)^2$	$(1+\Delta t)^{10}$	$(1+\Delta t)^{20}$	$(1+\Delta t)^{100}$	$(1+\Delta t)^{200}$	$(1+\Delta t)^{1000}$
1	2	4	1024	1048576	$1,26*10^{30}$	$1,60*10^{60}$	-
1/2	1,5	2,25	57,665	3325,256	$4,06*10^{17}$	$1,65*10^{35}$	-
1/10	1,1	1,21	2,5937	6,7275	$1,37*10^{4}$	$1,89*10^{8}$	$2,46*10^{41}$
1/20	1,05	1,1025	1,6289	2,6533	$1,31*10^{2}$	$1,72*10^{4}$	$1,54*10^{21}$
1/100	1,01	1,0201	1,1046	1,2202	2,7048	7,3160	$2,09*10^{4}$
1/200	1,005	1,01	1,0511	1,1049	1,6467	2,7115	$1,46*10^{2}$
1/1000	1,001	1,002	1,01	1,0202	1,1051	1,2213	2,7169

Existe uma notável informação na tabela ! (Tente descobri-la ihando para a sua "diagonal principal")

Com efeito: COPIE abaixo os valores tais que $n*\Delta t = 1$

$\Delta t = 1/n$	$(1+\Delta t)^n = (1+1/n)^n$

Observe que, à medida que n cresce (ou que Δt se torna ada vez menor), os valores de $(1+\Delta t)^n = (1+1/n)^n$ cetém dígitos guais na mesma posição. Este processo determina um único úmero decimal infinito não-periódico (isto é, um número rracional) anotado pela letra "e".

e = 2.718281828...

UMA APLICAÇÃO DO NÚMERO e

Considere um capital de C_o cruzeiros aplicado a uma taxa anual nominal de 100% (bastante irreal, porém facilitará nossos cálculos). Observe:

FREQUENCIA DA APLICAÇAO (CAPITALIZAÇAO)	MONTANTE MONTANTE PARCIAL	 MONTANTE ANUAL
anualmente (1 vez ao ano)	$C_o+100\%*C_o=C_o+100/100*C_o=C_o*(1+1)$	$C_o*(1+1)$
semestralmente (2 vezes ao ano)	Ao final do 1.º semestre : $C_o+(100\%/2)*C_o=C_o+50\%*C_o=C_o*(1+1/2)$ Ao final do 2.º semestre : $C_o*(1+1/2)\ +100\%/2*C_o*(1+1/2)=$ $C_o*(1+1/2)\ +1/2*C_o*(1+1/2)=C_o*(1+1/2)^2$	$C_o*(1+1/2)^2$
trimestralmente (4 vezes ao ano)	Ao final do 1.º trimestre : $C_o+(100\%/4)*C_o=C_o+25\%*C_o=C_o*(1+1/4)$ Ao final do 2.º trimestre : $C_o*(1+1/4)+100\%/4*C_o*(1+1/4)=$ $C_o*(1+1/4)^2$ Ao final do 3.º trimestre : $C_o*(1+1/4)^2+100\%/4*C_o*(1+1/4)^2=$ $C_o*(1+1/4)^3$ Ao final do 4.º trimestre : $C_o*(1+1/4)^3+100\%/4*C_o*(1+1/4)^3=$ $C_o*(1+1/4)^4$	$C_o*(1+1/4)^4$
mensalmente (12 vezes ao ano)	Ao final do 1.º mês : $C_o+100\%/12*C_o=C_o*(1+1/12)$ Ao final do 2.º mês : $C_o*(1+1/12)+100\%/12*C_o*(1+1/12)=$ $C_o+1/12)^2$ .... Ao final do 12.º mês : $C_o*(1+1/12)^{11}+100\%/12*C_o*(1+1/12)^{11}=$ $C_o*(1+1/12)^{12}$	$C_o*(1+1/12)^{12}$
semanalmente (52 vezes ao ano)	Ao final da 1.ª semana: $C_o+100\%/52*C_o=C_o*(1+1/52)$ Ao final da 2.ª semana: $C_o*(1+1/52)+100\%/52*C_o*(1+1/52)=$ $C_o*(1+1/52)^2$ .... Ao final da 52.ª semana: $C_o*(1+1/52)^{51}+100\%/52*C_o*(1+1/52)^{51}=$ $C_o*(1+1/52)^{52}$	$C_o*(1+1/52)^{52}$
diariamente (365 vezes ao ano)	Ao final do 1.º dia: $C_o+100\%/365*C_o=C_o*(1+1/365)$ .... Ao final do 365.º dia: $C_o*(1+1/365)^{364}+100\%/365*C_o*(1+1/365)^{364}$ $C_o*(1+1/365)^{365}$	$C_o*(1+1/365)^{365}$

Da tabela anterior obtém-se os resultados do MONTANTE ACUMULADO C, AO FINAL DE UM ANO , A PARTIR DE UM CAPITAL INICIAL C_o , INVESTIDO A TAXA NOMINAL DE 100% , COM DIFERENTES FREQUENCIAS DE APLICAÇAO (CAPITALIZAÇAO):

FREQUENCIA DA APLICAÇAO (CAPITALIZAÇAO)	MONTANTE
1 vez ao ano	$C*(1+1)$
2 vezes ao ano	$C*(1+1/2)^{2}$
4 vezes ao ano	$C*(1+1/4)^{4}$
12 vezes ao ano	$C*(1+1/12)^{12}$
52 vezes ao ano	$C*(1+1/52)^{52}$
365 vezes ao ano	$C*(1+1/365)^{365}$
n vezes ao ano	$C*(1+1/n)^{n}$

A medida que n cresce, o MONTANTE ACUMULADO C aproxima-se do valor C_o*e, valor chamado de MONTANTE ACUMULADO AO FINAL DE UM ANO, A TAXA DE 100% AO ANO , APLICADA CONTINUAMENTE.

ATIVIDADE 1
Reflita sobre o seguinte enunciado:

O MONTANTE ACUMULADO C, A PARTIR DE UM CAPITAL INICIAL C_o , A TAXA NOMINAL DE 100*r% AO ANO, APLICADA n VEZES AO ANO, AO FINAL DE UM ANO e dado por:

$$\boxed{C=C_o*(1+r/n)^{n}}$$

ATIVIDADE 2
Reflita sobre o seguinte enunciado:

O MONTANTE ACUMULADO C, A PARTIR DE UM CAPITAL INICIAL C_o , A TAXA NOMINAL DE 100*r% AO ANO, APLICADA continuamente, AO FINAL DE UM ANO, e dado por:

$$\boxed{C=C_o*e^{r}}$$

ATIVIDADE 3
utilizando os dois enunciados anteriores, prove o seguinte TEOREMA:

O MONTANTE ACUMULADO C, A PARTIR DE UM CAPITAL INICIAL C_o , A TAXA NOMINAL DE 100*r% AO ANO, APLICADA continuamente, AO FINAL DE t ANOS, e dado por:

$$C(t)=C*e^{r*t}$$

APLICAÇAO DA FUNÇAO EXPONENCIAL DE BASE e AS DEMAIS CIENCIAS PARA OBTENÇAO DE RESULTADOS

ATIVIDADE 1

A quantidade de correspondência que um funcionário dos Correios classifica é uma função do tempo de experiência do funcionario. Estima-se que o funcionário após t meses de experiência, consiga clasificar $Q(t)=700-400*e^{-0,5*t}$ cartas por hora.

1. Quantas cartas um funcionário recem admitido conseguirá classificar por hora ?
2. Quantas cartas um funcionario com 6 meses de trabalho classificará por hora?
3. "A medida que o tempo passa ,o funcionário tende a se tornar mais eficiente". V ou F ? Justifique matematicamente a resposta.
4. A medida que o tempo passa indefinidamente, qual o número de cartas (no máximo) classificará um funcionário ?
5. Que tempo (aproximadamente) levará um funcionário para classificar 400 cartas por hora ? E 700 cartas por hora ?
6. Compute o valor $\{\Delta[Q-700] / \Delta t]\} / [Q-700]$, para Δt arbitrariamente pequenos. Interprete-o.

RESPOSTAS:

1. 300 cartas

2. $700 - 400*e^{-3}$ cartas

3. Verdadeiro, pois Q(t) e função crescente com t.

4. ao $t \to \infty$ tem-se $Q(t) \to 700$

5. $t= (-\log 0,75)/0,5$

6. -0,5. A quantidade $1+(-0,5)*\Delta t$ é o 2.º termo da equação que define o modelo matemático do segundo TEOREMA do texto, isto é, e a taxa de variação relativa da grandeza Q ao longo do tempo t , tomado a intervalos regulares (constantes) de valor Δt.

ATIVIDADE 2

Os psicólogos acreditam que, quando e fornecido um conjunto de fatos para um indivíduo memorizar, o número de fatos lembrados pelo indivíduo apos t minutos que eles ocorrem é dado por $N(t)=A*(1-e^{-k*t})$, onde k é uma constante positiva e A é o número de fatos relevantes ao indivíduo.

1. A medida que o tempo passa indefinidamente, qual o número de fatos (no maximo) recordados pelo indivíduo ?
2. Compute o valor $\{\Delta[N-A] / \Delta t\} / [N-A]$, para Δt arbitrariamente pequenos. Interprete-o.

RESPOSTAS:

1. A=número de fatos relevantes ao indivíduo

2. -k . A quantidade $1+(-k)*\Delta t$ é o 2^{o} termo da equação que define o modelo matemático do segundo TEOREMA do texto, isto é, é a taxa de variação relativa da grandeza Q ao longo do tempo t , tomado a intervalos regulares (constantes) de valor Δt.

ATIVIDADE 3

Um editor de livros acredita que, quando os professores relacionam os livros-textos para seus cursos, é comum que a seleção se faça entre os livros que possuem e, por essa razão, envia cópias de livros novos gratuitamente aos professores. Estima que, se n milhares cópias de livros foram distribuídas entre os professores de uma comunidade, a venda de um novo livro de Matemática será de aproximadamente $V(n)= 20-15*e^{-0,2*n}$ milhares de cópias.

1. Quantas cópias o editor conseguirá vender se não forem distribuídas cópias entre os professores da comunidade ?
2. Quantas cópias espera o editor vender se distribuir 1000 copias entre os professsores ?
3. Para o editor vender cerca de 10 milhares de cópias do livro,quantas cópias terá que distribuir entre os professores ?
4. Se a hipótese do editor for correta, qual a estimativa mais otimista quanto ao número de cópias vendidas ?
5. Compute o valor $\{\Delta[V-20]/\Delta n\}/[V-20]$, para Δn arbitrariamente pequenos. Interprete-o.

RESPOSTAS:

1. 5 milhares de cópias
2. $20 - 15*e^{-0,2}$
3. aproximadamente $5*\log_{e}(3/2)$
4. 20 milhares de cópias
5. -0,2. A quantidade $1+(-0,2)*\Delta t$ é o 2^{o} termo da equação que define o modelo matemático do segundo TEOREMA do texto, isto é, é a taxa de variação relativa da grandeza V ao longo do número de cópias n tomado a intervalos regulares (constantes) de valor Δn.

(Loiva Cardoso de Zeni)

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série B: Trabalho de Apoio Didático

1. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89.
2. Jaime B. Ripoll - Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções de Uma Variável Real - OUT/89.
3. Edmund R. Puczylowski - Dimension of Modular Lattices - JUN/90
4. Marcos Sebastiani - Geometrias Não Euclidianas - JUL/90
5. Sandra R. C. Pizzato - Cálculo Numérico - AGO/91
6. Vera Clotilde G. Carneiro - Elementos de Cálculo para Biologia - AGO/91
7. Elsa Mundstock - Iniciaç ao ao SPSS/PC - SET/91
8. Elisa Haag, Loiva C. de Zeni, Maria Alice Gravina e Vera Clotilde - Notas da 1a. Oficina de Matemática da UFRGS - JAN/92
9. Paulo Werlang de Oliveira, Elisabete Rambo, Suzana Lima dos Santos, Coordenaç ao: Profa. Maria Alice Gravina - A Tartaruga no Espaço Tridimensional - FEV/92

Universidade Federal do Rio Grande Sul
Reitor: Professor Tuiskon Dick

Instituto de Matemática
Diretor: Professor Aron Taitelbaum
Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Coordenador: Professor Jaime Bruck Ripoll
Secretária: Faraildes Beatriz da Silva

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:
Série A: Trabalho de Pesquisa
Série B: Trabalho de Apoio Didático
Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS
Série D: Trabalho de Graduação
Série E: Dissertações de Mestrado
Série F: Trabalho de Divulgação
Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:
NAEC - Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Instituto de Matemática - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91.500 - Agronomia - POA/RS
Telefone: 336.98.22 ou 339.13.55 Ramal: 6176