Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Álgebras de Hopf quase cocomutativas e quasitriangulares

Dissertação de Mestrado

Vanusa Moreira Dylewski

Porto Alegre, 23 de fevereiro de 2018

Dissertação submetida por Vanusa Moreira Dylewski[1] , como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Profª. Dra Bárbara Seelig Pogorelsky

Banca examinadora:
Profª. Dra. Andrea Morgado (UFPel)
Profª. Dra. Carolina Noele Renz (UFPel)
Profª. Dra. Thaisa Tamusiunas (UFRGS)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico(CNPq)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por me iluminar e não me deixar desanimar ao longo dessa trajetória.

Dedico esse trabalho aos meus pais Paulo e Branca, aos meus irmãos Itamar e Jardel, e agradeço por todo amor, carinho, incentivo e confiança que sempre depositaram em mim. O apoio de vocês foi fundamental.

Aos amigos que sempre tiveram presentes, mesmo que fisicamente longe. Em especial, ao amigo Gui que se tornou um irmão e, nas horas de desespero e desânimo, estava sempre me apoiando, me fazendo rir e sempre acreditou na minha capacidade. Obrigada pela compreensão e pelo companheirismo sempre.

Agradeço à minha orientadora Bárbara por toda dedicação, incentivo, por todos os ensinamentos e paciência ao longo da orientação. Agradeço também por ter me aceitado como sua primeira aluna de Doutorado.

Aos professores da UFPel que fizeram parte da minha formação e sempre me incentivaram. Em especial aos professores: Athayde, Lisandra, Giovanni, Andrea e Camila.

E por fim, agradeço, às professoras que aceitaram fazer parte da minha banca, que foi uma banca 100% feminina.

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo de álgebras, coálgebras e álgebras de Hopf, introduzindo estas noções e algumas de suas propriedades e exemplos. Além disso, aprofundamos o estudo apresentando as álgebras de Hopf quase cocomutativas e quasitriangulares, demonstrando que a antípoda dessas álgebras cumpre certas condições.

Abstract

In this work we present a study of algebras, coalgebras and Hopf algebras, introducing examples and some of its properties. Also, we expand this study presenting almost cocommutative and quasitriangular Hopf algebras, showing that the antipode of these algebras satisfies determined conditions.

Índice

Introdução

Uma álgebra de Hopf H é uma álgebra sobre um corpo k que satisfaz uma série de condições que serão detalhadas ao longo do trabalho. As álgebras de Hopf cocomutativas constituem todos os exemplos iniciais de álgebras de Hopf, como as álgebras de grupo e as envolventes de álgebras de Lie. Estas álgebras apresentam diversas propriedades muito fortes, como por exemplo, o fato de sempre possuírem antípoda bijetiva com $S^{-1} = S$. No entanto, estas álgebras já foram caracterizadas pelo seguinte resultado:

Teorema (Cartier-Kostant-Milnor-Moore): Se H é uma álgebra de Hopf cocomutativa sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, então H é isomorfa a $U(P(H))\#kG(H)$.

Em outras palavras, o teorema diz que as álgebras de Hopf cocomutativas são sempre "combinações" de álgebras de grupo com envolventes de álgebras de Lie.

Com este importante resultado concluímos que os exemplos de álgebras de Hopf cocomutativas já são bem conhecidos. A partir disso, numa tentativa de generalizar esta noção, mas mantendo parte de suas propriedades, surgiram as álgebras de Hopf quasitriangulares, ou uma generalização ainda maior, as álgebras de Hopf quase cocomutativas.

As álgebras de Hopf quasitriangulares possuem ainda uma grande importância por se tratarem de grupos quânticos. Esta noção foi definida por Drinfeld na década de 1980, e possui uma conexão importante com a Física Quântica e as equações de Yang-Baxter.

Neste trabalho, que foi dividido em três capítulos, vamos estudar as álgebras de Hopf quase cocomutativas e quasitriangulares, bem como exemplos e propriedades da antípoda dessas álgebras de Hopf.

O primeiro capítulo contém definições básicas de (co)álgebras e (co)módulos, algumas propriedades e resultados importantes. Neste capítulo, optamos por definir álgebras e módulos por meio de diagramas para podermos dualizá-los e obtermos os conceitos de coálgebras e comódulos, respectivamente. Definimos ainda álgebras comutativas e coálgebras cocomutativas.

No segundo capítulo introduzimos os conceitos de álgebras e módulos de Hopf e uma introdução a ações e coações de álgebras de Hopf. Apresentamos, neste capítulo, uma propriedade importante sobre a antípoda de álgebras de Hopf comutativas e cocomutativas que diz que se H é uma álgebra de Hopf comutativa ou cocomutativa, então $S^2 = id_H$. Os conceitos e resultados apresentados nos dois primeiros capítulos podem ser encontrados nas referências [1], [2], [5] e [7].

No terceiro capítulo, que é o principal da dissertação, generalizamos a noção de álgebras de Hopf cocomutativas, obtendo as definições de álgebra de Hopf quase cocomutativa e álgebra de Hopf quasitriangular. Uma álgebra de Hopf quase cocomutativa é uma álgebra de Hopf H que possui antípoda bijetiva e um elemento invertível $R \in H \otimes H$ tal que $\tau \circ \Delta = R\Delta R^{-1}$, onde τ é a aplicação twist e Δ é a comultiplicação de H. Já uma álgebra de Hopf quasitriangular é uma álgebra de Hopf quase cocomutativa, via R que cumpre determinadas condições. Estas noções podem ser encontradas nas referências [3], [4], [5] e [6].

Ainda neste capítulo apresentamos resultados e propriedades importantes sobre a antípoda das álgebras de Hopf quase cocomutativas e quasitriangulares. Enquanto que em uma álgebra de Hopf cocomutativa temos que $S^2 = id_H$, em uma álgebra de Hopf quase cocomutativa temos o seguinte resultado: sejam $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ e $u = \sum_i S(b_i)a_i$, então u é invertível em H e para todo $h \in H$, temos $S^2(h) = uhu^{-1} = (S(u))^{-1}h(S(u))$.

Para álgebras de Hopf quasitriangulares, temos uma propriedade importante da antípoda, que é o teorema que encerra a dissertação. O resultado é o seguinte: se H é uma álgebra de Hopf quasitriangular, então $S^4(h) = ghg^{-1}$, para todo $h \in H$, onde $g = u(S(u))^{-1}$ é um elemento grouplike de H, ou seja, $\Delta(g) = g \otimes g$.

Ao longo deste trabalho, k será um corpo qualquer. O produto tensorial de dois k-espaços vetorias $M \otimes_k N$ será denotado apenas por $M \otimes N$.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo damos definições básicas sobre (co)álgebras e (co)módulos, além de algumas propriedades e exemplos que foram escolhidos com intuito de serem usados ao longo deste trabalho. Esses conceitos serão importantes para o próximo capítulo, o qual será sobre álgebras e módulos de Hopf.

1.1 Álgebras e Coálgebras

Definição 1.1.1. *Uma k-*álgebra *é uma tripla (A, m, u), onde A é um k-espaço vetorial, $m : A \otimes A \longrightarrow A$ e $u : k \longrightarrow A$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id_A"] \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "u \otimes id_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes k \arrow[ul, "id_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Desde que o corpo k esteja fixado, dizemos simplesmente que A é uma álgebra.

Denotamos $m(a \otimes b) := ab$, para quaisquer $a, b \in A$, e $u(1_k) = 1_A$. As aplicações m e u são chamadas de multiplicação e unidade da álgebra, respectivamente.

Notemos que a comutatividade do primeiro diagrama é a associatividade da multiplicação da álgebra. De fato, por um lado temos:

$$m \circ (id_A \otimes m)(a \otimes b \otimes c) = m(a \otimes m(b \otimes c)) = m(a \otimes (bc)) = a(bc).$$

Por outro lado,

$$m \circ (m \otimes id_A)(a \otimes b \otimes c) = m(m(a \otimes b) \otimes c) = m((ab) \otimes c) = (ab)c.$$

Observamos também que pelo segundo diagrama 1_A é a unidade em A. De fato, pelo lado esquerdo do diagrama temos

$$(m \circ (u \otimes id_A))(1_k \otimes a) = a, \text{ ou seja, } m(u(1_k) \otimes a) = m(1_A \otimes a) = 1_A a = a$$

e pelo lado direito do segundo diagrama temos $a = a1_A$ e, portanto, 1_A é a unidade de A.

Exemplo 1.1.2. *Seja G um grupo multiplicativo. A álgebra kG é o k-espaço vetorial com base G, cujos elementos são somas finitas da forma $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ com $(\alpha_g)_{g \in G}$ uma família de elementos de k. Podemos ver os elementos $g \in G$ em kG como $g = 1_k g$ e, assim, definimos a multiplicação em kG nos elementos da base, pela aplicação $m(g \otimes h) = gh, \quad \forall g, h \in G$. A unidade é definida por $u(1_k) = e$, onde e é a unidade em G. Estendendo linearmente ambas as aplicações obtemos que kG é uma álgebra com m e u, chamada de* álgebra de grupo.

Exemplo 1.1.3. *Assuma que a característica do corpo k seja diferente de 2. Considere o k-espaço vetorial*

$$H_4 = k < g, x \mid g^2 = 1, \quad x^2 = 0, \quad gx = -xg > .$$

O conjunto H_4 é uma álgebra com dimensão 4, onde a sua base como k-espaço vetorial é $\{1, g, x, gx\}$. A álgebra H_4 é chamada de álgebra de Sweedler.

Observação 1.1.4. *Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) álgebras. O produto tensorial $A \otimes B$ é uma álgebra com multiplicação*

$$m_{A\otimes B}((a \otimes b) \otimes (c \otimes d)) := ac \otimes bd,$$

onde $a, c \in A$ e $b, d \in B$, e unidade dada por

$$u_{A\otimes B}(1_k) := u_A(1_k) \otimes u_B(1_k) = 1_A \otimes 1_B.$$

Definição 1.1.5. *Dizemos que uma álgebra A, com multiplicação m e unidade u, é* comutativa *se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ & A \end{tikzcd}$$

onde $\tau : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ é a aplicação twist definida por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Em outras palavras, A é comutativa se $m(a \otimes b) = (m \circ \tau)(a \otimes b)$, o que é equivalente a $ab = ba$, $\forall a, b \in A$.

Observação 1.1.6. *Se G é um grupo abeliano então a álgebra de grupo kG é uma álgebra comutativa.*

Definição 1.1.7. *Sejam A e B duas álgebras com multiplicações m_A e m_B e com unidades u_A e u_B, respectivamente. Dizemos que a aplicação $f : A \longrightarrow B$ é um* morfismo de álgebras *se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

A comutatividade dos diagramas é equivalente a $f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in A$ e $f(1_A) = 1_B$.

Dizemos, ainda, que f é um *isomorfismo de álgebras* se f é bijetiva e é um morfismo de álgebras.

Através da definição de uma álgebra via diagramas é possível definir uma coálgebra dualizando estes diagramas.

Definição 1.1.8. *Uma* k-coálgebra *é uma tripla* (C, Δ, ε)*, onde* C *é um* k*-espaço vetorial,* $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ *e* $\varepsilon : C \longrightarrow k$ *são morfismos de* k*-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id_C"] \\
C \otimes C \arrow[r, "id_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[r, "id_C \otimes \varepsilon"'] & C \otimes k
\end{tikzcd}$$

Se o corpo k *está fixado dizemos, apenas, que* C *é uma* coálgebra*. Os morfismos* Δ *e* ε *são chamados de comultiplicação e counidade da coálgebra* C*.*

Notação 1.1.9. ***(Notação de Sweedler)*** *Observemos que a imagem de um elemento* $c \in C$ *por* Δ *é*

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{i_1} \otimes c_{i_2}, \quad \text{onde} \quad c_{i_1}, c_{i_2} \in C$$

que denotaremos por

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Essa notação é conhecida como notação de Sweedler *ou notação sigma.*

Usando a notação de Sweedler temos, pela comutatividade do primeiro diagrama, que para todo $c \in C$:

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(c) &= ((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) \\
(\Delta \otimes id_C)(c_1 \otimes c_2) &= (id_C \otimes \Delta)(c_1 \otimes c_2) \\
\Delta(c_1) \otimes id_C(c_2) &= id_C(c_1) \otimes \Delta(c_2) \\
c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 &= c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}.
\end{aligned}$$

Como $c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}$, usamos $c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$ para denotar ambos os lados da igualdade. Nesse caso, dizemos que C é coassociativa.

Além disso, pelo lado direito do segundo diagrama, temos para todo $c \in C$

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta(c) &= c \otimes 1_k \\
(id_C \otimes \varepsilon)(c_1 \otimes c_2) &= c \otimes 1_k \\
c_1 \otimes \varepsilon(c_2) &= c \otimes 1_k.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon(c_2) \in k$, obtemos que $(c_1\varepsilon(c_2) - c) \otimes 1_k = 0$. Logo, $c_1\varepsilon(c_2) - c = 0$ pois $1_k \neq 0$, ou seja, $c_1\varepsilon(c_2) = c$.

Analogamente, pelo outro lado do diagrama concluímos que $\varepsilon(c_1)c_2 = c$.

Exemplo 1.1.10. *kG é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε definidas por $\Delta(g) = g \otimes g$, e $\varepsilon(g) = 1_k$, $\forall g \in G$.*

Exemplo 1.1.11. *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Definimos C^{cop} como sendo o conjunto C com comultiplicação $\Delta' := \tau \circ \Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, onde τ é a aplicação twist definida na* Definição 1.1.5. *Notemos que $(C^{cop}, \Delta', \varepsilon)$ é uma coálgebra. C^{cop} é chamada de* coálgebra co-oposta *e nos será útil mais adiante.*

Exemplo 1.1.12. *A álgebra de Sweedler é uma coálgebra com comultiplicação e counidade definidos por:*

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1, \quad \Delta(gx) = \Delta(g)\Delta(x),$$

$$\varepsilon(g) = 1_k \quad e \quad \varepsilon(x) = 0.$$

Observação 1.1.13. *Se* $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *e* $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ *são duas coálgebras, então o produto tensorial* $C \otimes D$ *é uma coálgebra com comultiplicação*

$$\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) = (id_C \otimes \tau \otimes id_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D)(c \otimes d) = c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2,$$

e counidade dada por

$$\varepsilon_{C\otimes D}(c \otimes d) := \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d),$$

para quaisquer $c \in C$ *e* $d \in D$*.*

Agora, como sabemos, em uma álgebra temos a propriedade chamada associatividade generalizada, em que podemos associar um número finito de elementos como queremos. A propriedade dual no caso de coálgebras é chamada de *coassociatividade generalizada*, que será provada na proposição seguinte.

Seja C uma coálgebra. Definimos recursivamente a sequência de aplicações $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ como segue:

$$\Delta_1 = \Delta, \quad \Delta_n : C \longrightarrow C^{n+1},$$

$$\Delta_n = (\Delta \otimes id^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}, \quad \forall n \geq 2,$$

onde $C^{n+1} = C \otimes C \otimes ... \otimes C$ (C aparece $n+1$ vezes),
$id = id_C$ e $id^{n-1} = id \otimes ... \otimes id$ (id aparece $n-1$ vezes).

Proposição 1.1.14. *Seja* C *uma coálgebra. Então para qualquer* $n \geq 2$ *e para qualquer* $p \in \{0, 1, ..., n-1\}$*, vale a seguinte igualdade*

$$\Delta_n = (id^p \otimes \Delta \otimes id^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}.$$

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução em n.

Para $n = 2$ temos $\Delta_2 = (id^0 \otimes \Delta_1 \otimes id^1) \circ \Delta_1 = (id^1 \otimes \Delta_1 \otimes id^0) \circ \Delta_1$ que é exatamente a propriedade de coassociatividade de Δ,

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Suponha que a igualdade é verdadeira para n. Vamos mostrar que vale para $n+1$, ou seja,

$$\Delta_{n+1} = (id^p \otimes \Delta \otimes id^{(n+1)-1-p}) \circ \Delta_n = (id^p \otimes \Delta \otimes id^{n-p}) \circ \Delta_n.$$

Seja $p \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Para $p = 0$ temos que $\Delta_{n+1} = (\Delta \otimes id^n) \circ \Delta_n$, que é verdade pois é a definição de Δ_{n+1}. Vamos supor que a igualdade vale para $p-1$. Temos então

$$\begin{aligned}
(id^p \otimes \Delta \otimes id^{n-p}) \circ \Delta_n &= (id^p \otimes \Delta \otimes id^{n-p}) \circ (id^{p-1} \otimes \Delta \otimes id^{n-1-(p-1)}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id^p \otimes \Delta \otimes id^{n-p}) \circ (id^{p-1} \otimes \Delta \otimes id^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id^{p-1} \otimes ((id \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes id^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id^{p-1} \otimes ((\Delta \otimes id) \circ \Delta) \otimes id^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id^{p-1} \otimes \Delta \otimes id^{n+1-p}) \circ (id^{p-1} \otimes \Delta \otimes id^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id^{p-1} \otimes \Delta \otimes id^{n+1-p}) \circ \Delta_n \\
&= \Delta_{n+1}.
\end{aligned}$$

A última igualdade vem do fato que a afirmação é válida para $p-1$. $\square$

Definição 1.1.15. *Uma coálgebra C, com comultiplicação Δ e counidade ε, é* cocomutativa *se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\tau"] \\
& C \otimes C
\end{tikzcd}$$

Em outras palavras, C é cocomutativa se $c_1 \otimes c_2 = c_2 \otimes c_1$.

Em geral, kG é uma coálgebra cocomutativa, visto que $\Delta(g) = g \otimes g$ e $(\tau \circ \Delta)(g) = \tau(g \otimes g) = g \otimes g$.

Definição 1.1.16. *Sejam C e D duas coálgebras com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ε_C e ε_D, respectivamente. Dizemos que $g : C \longrightarrow D$ é um* morfismo de coálgebras *se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g\otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Para todo $c \in C$, a comutatividade do primeiro diagrama pode ser escrita como $\Delta_D(g(c)) = ((g \otimes g) \circ \Delta_C)(c)$, o que significa que $g(c)_1 \otimes g(c)_2 = g(c_1) \otimes g(c_2)$. Já a comutatividade do segundo diagrama é equivalente a $\varepsilon_D(g(c)) = \varepsilon_C(c)$.

Dizemos que g é um *isomorfismo de coálgebras* se g é bijetiva e é um morfismo de coálgebras.

Sejam X, Y k-espaços vetoriais, $X^* = Hom(X, k)$, $Y^* = Hom(Y, k)$ e uma aplicação k-linear $v : X \longrightarrow Y$. Vamos denotar por $v^* : Y^* \longrightarrow X^*$ a aplicação definida por $v^*(f) = f \circ v$, $\forall f \in Y^*$.

Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Definimos as aplicações $M^* : C^* \otimes C^* \longrightarrow C^*$, onde $M^*(f \otimes g) = f * g$ é o *produto convolução* definido por $(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2)$, e $u^* : k \longrightarrow C^*$ dada por $u^*(\alpha)(c) = \alpha\varepsilon(c)$, para quaisquer $\alpha \in k$ e $c \in C$.

Proposição 1.1.17. (C^*, M^*, u^*) *é uma álgebra.*

Demonstração. Sejam $f, g, h \in C^*$ e $c \in C$. Vamos verificar a associatividade do produto convolução:

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(c) &= (f*g)(c_1)h(c_2)\\ &= (f(c_{11})g(c_{12}))h(c_2)\\ &= f(c_1)g(c_2)h(c_3)\\ &= f(c_1)(g*h)(c_2)\\ &= (f*(g*h))(c).\end{aligned}$$

Além disso, se $f \in C^*$, segue da counidade de C que, para todo $c \in C$

$$(u^*(1_k)*f)(c) = u^*(1_k)(c_1)f(c_2) = 1_k\varepsilon(c_1)f(c_2) = f(\varepsilon(c_1)c_2) = f(c),$$

ou seja, $u^*(1_k)*f = f$.

Portanto, C^* é uma álgebra. $\square$

A álgebra C^* é chamada de *álgebra dual* da coálgebra C.

Exemplo 1.1.18. *Seja S conjunto não vazio e kS a coálgebra com estrutura dada no* Exemplo 1.1.10. *Então a álgebra dual é $(kS)^* = Hom(kS,k)$ com multiplicação definida por $(f*g)(s) = f(s)g(s)$, $\forall f,g \in (kS)^*$ e $s \in S$.*

Agora, seja (A,m,u) uma álgebra de dimensão finita. Definimos as aplicações $\Delta^* : A^* \longrightarrow A^* \otimes A^*$ e $\varepsilon^* : A^* \longrightarrow k$ por $\Delta^*(f) = f_1 \otimes f_2$, onde $f(ab) = f_1(a)f_2(b)$ para quaisquer $a,b \in A$ e $f \in A^*$, e $\varepsilon^*(f) = f(1_A)$, para todo $f \in A^*$.

Proposição 1.1.19. *$(A^*,\Delta^*,\varepsilon^*)$ é uma coálgebra.*

Demonstração. Vamos verificar a coassociatividade de Δ^*. Seja $f \in A^*$, por um lado temos:

$$\begin{aligned}(\Delta^*\otimes id_{A^*})\circ\Delta^*(f) &= (\Delta^*\otimes id_{A^*})(f_1\otimes f_2)\\ &= f_{11}\otimes f_{12}\otimes f_2 \qquad (1.1)\end{aligned}$$

onde $f_{11}, f_{12}, f_2 \in A^*$.

Já por outro, temos:

$$\begin{aligned}(id_{A^*} \otimes \Delta^*) \circ \Delta^*(f) &= (id_{A^*} \otimes \Delta^*)(f_1 \otimes f_2) \\ &= f_1 \otimes f_{21} \otimes f_{22}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $f_1, f_{21}, f_{22} \in A^*$.

Seja $\theta : A^* \otimes A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A \otimes A)^*$ a aplicação tal que

$$\theta(u \otimes v \otimes w)(a \otimes b \otimes c) = u(a)v(b)w(c),$$

para $u, v, w \in A^*$ e $a, b, c \in A$.

Sabemos da álgebra linear que θ é injetora. Aplicando θ na *Equação (1.1)*, temos:

$$\begin{aligned}\theta(f_{11} \otimes f_{12} \otimes f_2)(a \otimes b \otimes c) &= f_{11}(a)f_{12}(b)f_2(c) \\ &= f_1(ab)f_2(c) \\ &= f((ab)c) \\ &= f(abc).\end{aligned}$$

Agora, aplicando θ na *Equação (1.2)*, temos:

$$\begin{aligned}\theta(f_1 \otimes f_{21} \otimes f_{22})(a \otimes b \otimes c) &= f_1(a)f_{21}(b)f_{22}(c) \\ &= f_1(a)f_2(bc) \\ &= f(a(bc)) \\ &= f(abc).\end{aligned}$$

Devido à injetividade de θ temos que $f_{11} \otimes f_{12} \otimes f_2 = f_1 \otimes f_{21} \otimes f_{22}$, logo Δ^* é coassociativo.

Seja $a \in A$, temos que $(\varepsilon^*(f_1)f_2)(a) = f_1(1_A)f_2(a) = f(1_A a) = f(a)$. Logo $\varepsilon^*(f_1)f_2 = f$. Similarmente, temos $f_1\varepsilon^*(f_2) = f$.

Portanto, A^* é uma coálgebra chamada de *coálgebra dual* da álgebra A. $\square$

A construção de (co)álgebra dual descrita acima também pode ser usada para morfismos de (co)álgebras e será provada na proposição seguinte.

Proposição 1.1.20.

(i) Se $f : C \longrightarrow D$ *é um morfismo de coálgebras, então* $f^* : D^* \longrightarrow C^*$ *é um morfismo de álgebras.*

(ii) Se $f : A \longrightarrow B$ *é um morfismo de álgebras de dimensão finita, então* $f^* : B^* \longrightarrow A^*$ *é um morfismo de coálgebras.*

Demonstração.

(i) Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras. Pela *Proposição 1.1.17*, temos que C^* e D^* são álgebras com multiplicações dadas pelo produto convolução e unidades dadas por $u^*_{C^*} = \varepsilon_C$ e $u^*_{D^*} = \varepsilon_D$, respectivamente.

Pela hipótese, f é um morfismo de coálgebras, ou seja, $f(c)_1 \otimes f(c)_2 = f(c_1) \otimes f(c_2)$, onde $c \in C$, e $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$.

Precisamos mostrar que $f^*(d^* * e^*) = f^*(d^*) * f^*(e^*)$ e $f^*(u^*_{D^*}) = u^*_{C^*}$. De fato, sejam $d^*, e^* \in D^*$ e $c \in C$, então:

$$\begin{aligned}
f^*(d^* * e^*)(c) &= (d^* * e^*)(f(c)) \\
&= d^*(f(c)_1)e^*(f(c)_2) \\
&= d^*(f(c_1))e^*(f(c_2)) \\
&= (d^* \circ f)(c_1)(e^* \circ f)(c_2) \\
&= (f^*(d^*) * f^*(e^*))(c).
\end{aligned}$$

Logo, temos a primeira igualdade.

A segunda igualdade decorre diretamente de $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$, pois:

$$f^*(u^*_{D^*}) = f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C = u^*_{C^*}.$$

(ii) Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) álgebras de dimensão finita. Pela *Proposição 1.1.19*, temos que A^* e B^* são coálgebras com comultiplicações dadas por $\Delta_{A^*}(a^*) = a_1^* \otimes a_2^*$, onde $a^*(ab) = a_1^*(a)a_2^*(b)$, $\forall a, b \in A$ e $a^* \in A^*$, e $\Delta_{B^*}(b^*) = b_1^* \otimes b_2^*$. As counidades são dadas por $\varepsilon_{A^*}(a^*) = a^*(1_A)$ e $\varepsilon_{B^*}(b^*) = b^*(1_B)$, para quaisquer $a^* \in A^*$, $b^* \in B^*$, respectivamente.

Por hipótese temos que $f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in A$, e $1_B = f(1_A)$. Vamos mostrar que $\Delta_{A^*} \circ f^* = (f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}$ e $\varepsilon_{B^*} = \varepsilon_{A^*} \circ f^*$.

Seja $\rho : A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A)^*$ a aplicação injetiva dada por $\rho(v \otimes w)(a \otimes b) = v(a)w(b)$. Para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, temos:

$$\begin{aligned}
\rho((\Delta_{A^*} \circ f^*)(b^*))(a \otimes b) &= \rho(\Delta_{A^*}(f^*(b^*)))(a \otimes b) \\
&= \rho((f^*(b^*))_1 \otimes (f^*(b^*))_2)(a \otimes b) \\
&= (f^*(b^*))_1(a)(f^*(b^*))_2(b) \\
&= f^*(b^*)(ab) \\
&= (b^* \circ f)(ab).
\end{aligned}$$

Note que para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, temos:

$$\begin{aligned}
(f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}(b^*) &= (f^* \otimes f^*) \circ (b_1^* \otimes b_2^*) \\
&= f^*(b_1^*) \otimes f^*(b_2^*) \\
&= b_1^* \circ f \otimes b_2^* \circ f.
\end{aligned}$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
\rho((f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}(b^*))(a \otimes b) &= \rho(b_1^* \circ f \otimes b_2^* \circ f)(a \otimes b) \\
&= (b_1^*(f(a))(b_2^*(f(b)) \\
&= b^*(f(a)f(b)) \\
&= b^*(f(ab)) \\
&= (b^* \circ f)(ab).
\end{aligned}$$

Pela injetividade da ρ, temos $\Delta_{A^*} \circ f^* = (f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}$.

Vamos provar a segunda igualdade:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{A^*} \circ f^*)(b^*) &= \varepsilon_{A^*}(b^* \circ f) \\
&= (b^* \circ f)(1_A) \\
&= b^*(f(1_A)) \\
&= b^*(1_B) \\
&= \varepsilon_{B^*}(b^*).
\end{aligned}$$

Portanto, f^* é um morfismo de coálgebras. $\square$

Encerramos esta seção com a definição de elemento grouplike que será importante mais adiante no nosso trabalho.

Definição 1.1.21. *Um elemento c de uma coálgebra C é chamado* elemento grouplike *se $c \neq 0$ e $\Delta(c) = c \otimes c$. O conjunto dos elementos grouplike da coálgebra C é denotado por $G(C)$.*

A propriedade da counidade mostra que $\varepsilon(c) = 1$, $\forall c \in G(C)$, pois $\varepsilon(c_1)c_2 = \varepsilon(c)c = c$.

Exemplo 1.1.22. *Seja A uma álgebra de dimensão finita e A^* a coálgebra dual de A. O conjunto dos elementos grouplike de A^* são os morfimos de álgebras de A em k, $G(A^*) = Alg(A, k)$.*

1.2 Módulos e Comódulos

Nesta seção vamos definir módulos via diagramas para obter a noção dual de comódulos, como foi feito na seção anterior para álgebras e coálgebras. Além disso, damos exemplos e propriedades importantes para continuar nosso estudo.

Definição 1.2.1. *Seja (A, m, u) uma álgebra. Um A-*módulo à esquerda *é um par (X, μ), onde X é um k-espaço vetorial e $\mu : A \otimes X \longrightarrow X$ é um morfismo de k-espaços vetoriais, tal que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes X \arrow[r, "id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "m \otimes id_X"'] & A \otimes X \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes X \arrow[r, "u \otimes id_X"] \arrow[dr, "\simeq"'] & A \otimes X \arrow[d, "\mu"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Similarmente, podemos definir um A-módulo à direita com estrutura da forma $\mu : X \otimes A \longrightarrow X$.

Denotamos $\mu(a \otimes x) := a \cdot x$ e dizemos que $\cdot$ é uma *ação* de A em X.

A comutatividade do primeiro diagrama é equivalente a

$$\mu \circ (id_A \otimes \mu)(a \otimes b \otimes x) = \mu \circ (m \otimes id_X)(a \otimes b \otimes x)$$

$$\mu(a \otimes \mu(b \otimes x)) = \mu(ab \otimes x)$$

$$\mu(a \otimes b \cdot x) = (ab) \cdot x$$

$$a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$$

para $a, b \in A$ e $x \in X$.

Já a comutatividade do segundo diagrama equivale a $\mu \circ (\varepsilon \otimes id_X)(1_k \otimes x) = x$, ou seja, $x = \mu(\varepsilon(1_k) \otimes x) = \mu(1_A \otimes x) = 1_A \cdot x$.

Exemplo 1.2.2. *Toda álgebra A é um A-módulo à esquerda com estrutura dada pela multiplicação m.*

Observação 1.2.3. *Sejam X e Y dois A-módulos à esquerda com ações μ_X e μ_Y, respectivamente. O produto tensorial $X \otimes Y$ é um A-módulo à esquerda com ação dada por $a \cdot (x \otimes y) = a_1 \cdot_X x \otimes a_2 \cdot_Y y$, onde $a \in A$, $x \in X$, $y \in Y$, $a_1 \cdot_X x = \mu_X(a_1 \otimes x)$ e $a_2 \cdot_Y y = \mu_Y(a_2 \otimes y)$.*

Vamos fazer um abuso de notação usando $\cdot$ para denotar ambas as ações, a ação de A em X e de A em Y.

Definição 1.2.4. *Sejam A uma álgebra, (X, ν) e (Y, μ) dois A-módulos à esquerda. A aplicação k-linear $f : X \longrightarrow Y$ é um* morfismo de A-módulos *se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} A \otimes X \arrow[r, "id_A \otimes f"] \arrow[d, "\nu"'] & A \otimes Y \arrow[d, "\mu"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dizemos que f é um *isomorfismo de A-módulos* se f é bijetiva e é um morfismo de A-módulos.

Notemos que a comutatividade do diagrama equivale a dizer que f é um morfismo de A-módulos à esquerda se:

$$\mu \circ (id_A \otimes f)(a \otimes x) = f \circ \nu(a \otimes x)$$

$$\mu(a \otimes f(x)) = f(a \cdot x)$$

$$a \cdot f(x) = f(a \cdot x).$$

Lembrando que a ação do lado esquerdo da igualdade é em Y e a do lado direito em X.

Definição 1.2.5. *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Chamamos de C-*comódulo à direita *um par (M, ρ), onde M é um k-espaço vetorial e $\rho : M \longrightarrow M \otimes C$ um morfismo de k-espaços vetoriais, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\simeq"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \varepsilon"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd}$$

Analogamente definimos comódulo à esquerda sobre uma coálgebra C, onde $\rho : M \longrightarrow C \otimes M$. Chamamos ρ de *coação.*

A notação de Sweedler também é usada para comódulos. Seja (M, ρ) um C-comódulo à direita, então a imagem de um elemento $m \in M$ pelo morfismo ρ é dada por

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)},$$

onde $m_{(0)} \in M$ e $m_{(1)} \in C$.

Se M é um C-comódulo à esquerda com estrutura $\rho : M \longrightarrow C \otimes M$, denotamos $\rho(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$, onde $m_{(-1)} \in C$ e $m_{(0)} \in M$.

Da comutatividade dos diagramas, usando a notação de Sweedler, temos:

$$(m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2,$$

$$\varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = m.$$

A primeira fórmula nos permite estender a notação de somatório, como no caso de coálgebras, por:

$$m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} = (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2.$$

Exemplo 1.2.6. *Toda coálgebra C é um comódulo à direita e à esquerda sobre si mesma. A aplicação que dá estrutura de comódulo em ambos os casos é a comultiplicação $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$.*

Definição 1.2.7. *Sejam C uma coálgebra, (M, ρ) e (N, ϕ) dois C-comódulos à direita. Então a aplicação k-linear $g : M \longrightarrow N$ é um* morfismo de C-comódulos *se o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\ M \otimes C \arrow[r, "g \otimes id_C"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

Dizemos que g é um *isomorfismo de C-comódulos* se g é bijetiva e é um morfismo de C-comódulos.

Podemos escrever a comutatividade do diagrama como

$$\phi(g(m)) = g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)},$$

pois $\phi(g(m)) = (g \otimes id_C) \circ \rho(m) = (g \otimes id_C)(m_{(0)} \otimes m_{(1)}) = g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}$.

Encerramos esse capítulo fazendo uma proposição com a noção análoga à (co)álgebra dual, vista nas *Proposições 1.1.17 e 1.1.19*, para (co)módulos que será usada na demonstração da *Proposição 2.4.10*.

Sejam C uma coálgebra e C^* a álgebra dual. Considere M um k-espaço vetorial e $\omega : M \longrightarrow M \otimes C$ k-linear dada por $\omega(m) = m \otimes c$, $\forall m \in M$ e $\forall c \in C$, definimos $\psi_\omega : C^* \otimes M \longrightarrow M$ por $\psi_\omega(c^* \otimes m) = c^*(c)m$.

Proposição 1.2.8. *(M, ω) é um C-comódulo à direita se, e somente se, (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda.*

Demonstração. A prova dessa proposição é análoga as demonstrações das *Proposições 1.1.17 e 1.1.19* e pode ser encontrada em [2]. $\square$

Capítulo 2

Álgebras e módulos de Hopf

Neste capítulo vamos dar as definições de álgebras e módulos de Hopf, algumas de suas propriedades e resultados importantes, bem como uma introdução a ações e coações de álgebras de Hopf.

2.1 Biálgebras

Nesta seção vamos combinar as noções de álgebras e coálgebras, para obter a definição de uma biálgebra. Como feito antes, os exemplos são escolhidos de acordo com o que será usado mais à frente.

Definição 2.1.1. *Uma* biálgebra *é um k- espaço vetorial H com estrutura de álgebra (H, m, u) e estrutura de coálgebra (H, Δ, ε), tais que Δ e ε são morfismos de álgebras.*

Na notação de Sweedler, as condições em que Δ e ε são morfismos de álgebras são dadas por:

$$\Delta(hg) = h_1 g_1 \otimes h_2 g_2 = \Delta(h)\Delta(g), \quad \varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g),$$

$$\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H \quad e \quad \varepsilon(1_H) = 1_k.$$

A condição de Δ e ε serem morfismos de álgebras, da definição de biálgebra, é equivalente a m e u serem morfismos de coálgebras.

Dizemos que uma biálgebra tem uma propriedade P se sua estrutura de álgebra ou de coálgebra tem a propriedade P. Assim, podemos falar em biálgebra comutativa se sua estrutura de álgebra for comutativa, ou cocomutativa se sua estrutura de coálgebra for cocomutativa.

Exemplo 2.1.2. *Seja G um grupo e kG a álgebra de grupo. Já vimos que kG tem estrutura de coálgebra dada por:*

$$\Delta(g) = g \otimes g \text{ } e \text{ } \varepsilon(g) = 1_k.$$

Verifiquemos que kG é uma biálgebra. De fato, Δ e ε são morfismos de álgebras, pois

$$\Delta(hg) = hg \otimes hg = (h \otimes h)(g \otimes g) = \Delta(h)\Delta(g)$$

$$e \text{ } \varepsilon(hg) = 1_k = \varepsilon(h)\varepsilon(g).$$

Exemplo 2.1.3. *Seja H uma biálgebra. A coálgebra co-oposta H^{cop} mantém a estrutura de álgebra de H e tem estrutura de coálgebra co-oposta $(H^{cop}, \Delta', \varepsilon)$. Vamos verificar que Δ' é um morfismo de álgebras:*

$$\begin{aligned}
\Delta'(hg) &= \tau \circ \Delta(hg) \\
&= \tau(h_1 g_1 \otimes h_2 g_2) \\
&= (h_2 g_2 \otimes h_1 g_1) \\
&= (h_2 \otimes h_1)(g_2 \otimes g_1) \\
&= \Delta'(h)\Delta'(g).
\end{aligned}$$

Portanto, H^{cop} é uma biálgebra.

Exemplo 2.1.4. *A álgebra de Sweedler H_4 é uma biálgebra. Já vimos que H_4 tem a estrutura de coálgebra dada por:*

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x_1 \otimes x_2 = g \otimes x + x \otimes 1, \quad \Delta(gx) = \Delta(g)\Delta(x),$$

$$\varepsilon(g) = 1_k \quad e \quad \varepsilon(x) = 0.$$

O fato de Δ e ε serem morfismos de álgebras decorre da própria definição de H_4.

Uma possível maneira de construir uma nova biálgebra é considerar o dual de uma biálgebra de dimensão finita.

Proposição 2.1.5. *Seja H uma biálgebra de dimensão finita. Então H^* com a estrutura de álgebra dual da coálgebra H e com a estrutura de coálgebra dual da álgebra H é uma biálgebra, chamada* biálgebra dual *de H.*

Demonstração. Sejam Δ e ε a comultiplicação e a counidade de H. Denotemos por Δ^* e ε^* a comultiplicação e a counidade de H^*.

Notemos que para $h^* \in H^*$, temos $\Delta^*(h^*) = h_1^* \otimes h_2^*$, onde $h^*(hg) = h_1^*(h)h_2^*(g)$, $\forall h, g \in H$, e $\varepsilon^*(h^*) = h^*(1_H)$. Vamos mostrar que Δ^* e ε^* são morfismos de álgebras.

Para facilitar os cálculos, escrevemos $h^* * g^* = h^* g^*$, para $h^*, g^* \in H^*$.

Primeiro mostraremos que Δ^* é morfismo de álgebras, ou seja, $\Delta^*(h^* g^*) = \Delta^*(h^*)\Delta^*(g^*)$.

Sejam $h^*, g^* \in H^*$ e $h, g \in H$. Temos:

$$\begin{aligned} (h^* g^*)(hg) &= h^*(h_1 g_1) g^*(h_2 g_2) \\ &= h_1^*(h_1) h_2^*(g_1) g_1^*(h_2)_2^*(g_2) \\ &= (h_1^* g_1^*)(h)(h_2^* g_2^*)(g). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\Delta^*(h^*g^*) = h_1^*g_1^* \otimes h_2^*g_2^*$. Por outro lado, temos:

$$\Delta^*(h^*)\Delta^*(g^*) = (h_1^* \otimes h_2^*)(g_1^* \otimes g_2^*) = h_1^*g_1^* \otimes h_2^*g_2^*.$$

Temos, ainda, que $\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$, $\forall h, g \in H$, então $\Delta^*(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$. Logo, Δ^* é um morfismo de álgebras.

Agora vamos mostrar que ε^* é um morfismo de álgebras, ou seja, $\varepsilon^*(h^*g^*) = \varepsilon^*(h^*)\varepsilon^*(g^*)$.

Temos que $\varepsilon^*(h^*g^*) = (h^*g^*)(1_H) = h^*(1_H)g^*(1_H) = \varepsilon^*(h^*)\varepsilon^*(g^*)$ e $\varepsilon^*(\varepsilon) = \varepsilon(1_H) = 1_k$, o que prova que ε^* é um morfismo de álgebras.

Portanto, H^* é uma biálgebra. $\square$

Definição 2.1.6. *Sejam H e L duas biálgebras. Uma aplicação k-linear $f : H \longrightarrow L$ é um* morfismo de biálgebras *se é simultaneamente um morfismo de álgebras e um morfismo de coálgebras.*

2.2 Álgebras de Hopf

Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, u) uma álgebra. Definimos no conjunto $Hom(C, A)$ uma estrutura de álgebra na qual a multiplicação denotada por $*$ é dada por: se $f, g \in Hom(C, A)$, então

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2), \quad \forall c \in C.$$

Com um cálculo análogo ao da *Proposição 1.1.17*, temos que essa multiplicação é associativa.

A unidade da álgebra $Hom(C, A)$ é $u \circ \varepsilon \in Hom(C, A)$. De fato, $\forall c \in C$,

$$(f * (u \circ \varepsilon))(c) = f(c_1)(u \circ \varepsilon)(c_2) = f(c_1)u(1_k)\varepsilon(c_2) = f(c_1\varepsilon(c_2)) = f(c).$$

Consequentemente $f * (u \circ \varepsilon) = f$ e, similarmente, $(u \circ \varepsilon) * f = f$.

Notemos que se $A = k$, então $*$ é o produto convolução definido antes. No caso de A ser uma álgebra arbitrária, também chamamos $*$ de produto convolução.

Consideremos um caso especial da construção anterior.

Seja H uma biálgebra. Denotamos por H^a a estrutura de álgebra de H e H^c a estrutura de coálgebra de H. Nessas condições, $Hom(H^c, H^a)$ é uma álgebra. Notemos que a identidade $id_H : H \longrightarrow H$ é um elemento de $Hom(H^c, H^a)$.

Definição 2.2.1. *Seja H uma biálgebra. Uma aplicação k-linear $S : H \longrightarrow H$ é chamada de* antípoda *da biálgebra H se S é o inverso da identidade id_H com respeito ao produto convolução em $Hom(H^c, H^a)$.*

Definição 2.2.2. *Uma bialgebra H contendo uma antípoda é chamada de* álgebra de Hopf.

Em uma álgebra de Hopf a antípoda é única. O fato de que $S : H \longrightarrow H$ é antípoda equivale a $S * id_H = id_H * S = u \circ \varepsilon$. Usando a notação de Sweedler, temos:

$$S(h_1)h_2 = h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H, \quad \forall h \in H.$$

Exemplo 2.2.3. *Já vimos que a álgebra de grupo kG é uma biálgebra no* Exemplo 2.1.2*. Definindo a aplicação $S : kG \longrightarrow kG$ por $S(g) = g^{-1}, \forall g \in G$ e estendendo linearmente, temos que S é uma antípoda para kG, pois:*

$$S(g_1)g_2 = S(g)g = g^{-1}g = 1_{kG} = \varepsilon(g)1_{kG}.$$

e, de maneira similar, $g_1 S(g_2) = \varepsilon(g)1_{kG}$.

Notemos que, no exemplo anterior, se G for um monóide, ou seja, for associativo e possuir um elemento neutro, então kG é biálgebra, mas não é álgebra de Hopf.

Exemplo 2.2.4. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S bijetora. Então temos que H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1}.*

Exemplo 2.2.5. *A álgebra de Sweedler H_4 é uma álgebra de Hopf com antípoda dada por:*

$$S(g) = g^{-1} = g, \quad \textit{pois } g^2 = 1 \quad \textit{e} \quad S(x) = -gx.$$

Definição 2.2.6. *Sejam H e L duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_L, respectivamente. Dizemos que $f : H \longrightarrow L$ é um* morfismo de álgebras de Hopf *se for um morfismo de biálgebras.*

A próxima proposição mostra que um morfismo de álgebras de Hopf preserva antípodas.

Proposição 2.2.7. *Sejam H e L duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_L. Se $f : H \longrightarrow L$ é um morfismo de álgebras de Hopf, então $S_L \circ f = f \circ S_H$.*

Demonstração. Consideremos a álgebra $Hom(H, L)$ com o produto convolução e os elementos $f \circ S_H$ e $S_L \circ f$ dessa álgebra. Vamos mostrar que ambos os elementos são invertíveis e que possuem o mesmo inverso f, então segue a igualdade. De fato, por um lado temos:

$$\begin{aligned} ((S_L \circ f) * f)(h) &= (S_L \circ f)(h_1)f(h_2) \\ &= S_L(f(h)_1)f(h)_2 \\ &= u \circ \varepsilon_L(f(h)) \\ &= \varepsilon_L(f(h))1_L \\ &= \varepsilon_H(h)1_L. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
(f*(f\circ S_H))(h) &= f(h_1)(f\circ S_H)(h_2) \\
&= f(h_1 S_H(h_2)) \\
&= f(\varepsilon_H(h)1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)1_L.
\end{aligned}$$

Consequentemente f é invertível e seu inverso à direita e à esquerda devem coincidir. Logo, temos o resultado. $\square$

Veremos agora algumas propriedades importantes da antípoda.

Proposição 2.2.8. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então:*

(i) $S(hg) = S(g)S(h)$, *para quaisquer* $h, g \in H$.

(ii) $S(1_H) = 1_H$.

(iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$.

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

As propriedades *(i)* e *(ii)* querem dizer que S é um *antimorfismo de álgebras*, e as propriedades *(iii)* e *(iv)* significam que S é um *antimorfismo de coálgebras*.

Demonstração.

(i) Consideremos $H \otimes H$ com a estrutura de coálgebra dada por $\Delta_{H\otimes H}$ e $\varepsilon_{H\otimes H}$, e H com a estrutura de álgebra dada por M e u. Seja a álgebra $Hom(H\otimes H, H)$, com a multiplicação dada pela convolução. A unidade dessa álgebra é dada por $u \circ \varepsilon_{H\otimes H} : H \otimes H \longrightarrow H$.

Sejam $F, G, J : H \otimes H \longrightarrow H$ definidos por:

$$F(h \otimes g) = S(g)S(h), \quad G(h \otimes g) = S(hg) \quad e \quad J(h \otimes g) = hg, \forall h, g \in H.$$

Vamos mostrar que J é um inverso à esquerda de F e é um inverso à direita de G, com respeito à convolução.

$$\begin{aligned}
(J * F)(h \otimes g) &= J((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) \\
&= J(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) \\
&= h_1 g_1 S(g_2)S(h_2) \\
&= h_1 \varepsilon_H(g) 1_H S(h_2) \\
&= h_1 S(h_2)\varepsilon(g)1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H \\
&= \varepsilon_{H \otimes H}(hg)1_H \\
&= u \circ \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g).
\end{aligned}$$

Assim, J é inverso à esquerda de F. Agora vamos provar que J é inverso à direita de G e, portanto, seguirá que $F = G$.

De fato, para todo $h, g \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
(G * J)(h \otimes g) &= G(h_1 \otimes g_1)J(h_2 \otimes g_2) \\
&= S(h_1 g_1)h_2 g_2 \\
&= S((hg)_1)(hg)_2 \\
&= \varepsilon(hg)1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H \\
&= u \circ \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g).
\end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue do fato que H é uma álgebra de Hopf e, então, ε é um morfismo de álgebras de Hopf.

Consequentemente, $F = G$, ou seja, $S(g)S(h) = S(hg)$.

(ii) Aplicando a definição de antípoda no elemento 1_H, temos $S(1_H)1_H = \varepsilon(1_H)1_H = 1_k 1_H = 1_H$. Logo $S(1_H) = 1_H$.

(iii) Consideremos H com a estrutura de coálgebra dada por Δ e ε, e $H \otimes H$ com a estrutura de álgebra tensorial, dada por $M_{H\otimes H}$ e $u_{H\otimes H}$. Defina a álgebra $Hom(H, H \otimes H)$ com o produto convolução. A unidade dessa álgebra é $u_{H\otimes H} \circ \varepsilon : H \longrightarrow H \otimes H$.

Sejam $F, G : H \longrightarrow H \otimes H$, definidos por:

$$F(h) = \Delta(S(h)) \quad e \quad G(h) = S(h_2) \otimes S(h_1), \forall h \in H.$$

Vamos mostrar que Δ e um inverso à esquerda de F e um inverso à direita de G, com respeito ao produto convolução, e então teremos $F = G$.

De fato, para todo $h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
(\Delta * F)(h) &= \Delta(h_1)F(h_2) \\
&= \Delta(h_1)\Delta(S(h_2)) \\
&= \Delta(h_1 S(h_2)) \\
&= \Delta(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_H \otimes 1_H \\
&= u_{H\otimes H} \circ \varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Logo, Δ é um inverso à esquerda de F.

Agora, temos ainda, para todo $h \in H$:

$$\begin{aligned}
(G*\Delta)(h) &= G(h_1)\Delta(h_2)\\
&= (S((h_1)_2)\otimes S((h_1)_1))((h_2)_1\otimes (h_2)_2)\\
&= (S(h_2)\otimes S(h_1))(h_3\otimes h_4)\\
&= S(h_2)h_3\otimes S(h_1)h_4\\
&= S((h_2)_1)(h_2)_2\otimes S(h_1)h_3\\
&= \varepsilon(h_2)1_H\otimes S(h_1)h_3\\
&= 1_H\otimes S(h_1)\varepsilon(h_2)h_3\\
&= 1_H\otimes S(h_1)\varepsilon((h_2)_1)(h_2)_2\\
&= 1_H\otimes S(h_1)h_2\\
&= 1_H\otimes \varepsilon(h)1_H\\
&= u_{H\otimes H}\circ\varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Logo, Δ é um inverso à direita de G. Portanto $F = G$ e, então, a afirmação (iii) é verdadeira.

(iv) Aplicando ε em $h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$ temos:

$$\varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2)) = \varepsilon(h)\varepsilon(1_H).$$

Como S e ε são lineares, temos:

$$\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(S(\varepsilon(h_1)h_2)) = \varepsilon(h).$$

Portanto, $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$. $\square$

Quando a antípoda S de uma álgebra de Hopf H é bijetora, ou seja, quando S possui inversa S^{-1}, temos um resultado análogo para S^{-1}.

Proposição 2.2.9. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S bijetora. Então:*

(i) $S^{-1}(hg) = S^{-1}(g)S^{-1}(h)$, *para quaisquer* $h, g \in H$.

(ii) $S^{-1}(1_H) = 1_H$.

(iii) $\Delta(S^{-1}(h)) = S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1)$.

(iv) $\varepsilon(S^{-1}(h)) = \varepsilon(h)$.

Demonstração. Usando a *Proposição 2.2.8* e a propriedade de que S é bijetora, temos:

(i) Notemos que $hg = S(S^{-1}(h))S(S^{-1}(g)) = S(S^{-1}(g)S^{-1}(h))$. Aplicando S^{-1} de ambos os lados da igualdade, temos:

$$S^{-1}(hg) = S^{-1}(g)S^{-1}(h).$$

(ii) Aplicando S^{-1} no item (ii) da proposição anterior, temos $S^{-1}(1_H) = 1_H$.

(iii) Notemos que $h_1 \otimes h_2 = \Delta(h) = \Delta(S(S^{-1}(h))) = S(S^{-1}(h)_2) \otimes S(S^{-1}(h)_1)$. Assim, $h_1 \otimes h_2 = S(S^{-1}(h)_2) \otimes S(S^{-1}(h)_1)$. Aplicando $\tau \circ (S^{-1} \otimes S^{-1})$ de ambos os lados da igualdade, onde τ é a aplicação twist, temos:

$$\tau(S^{-1}(h_1) \otimes S^{-1}(h_2)) = \tau(S^{-1}(h)_2) \otimes S^{-1}(h)_1),$$

e disso segue que

$$S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1) = S^{-1}(h)_1 \otimes S^{-1}(h)_2.$$

Logo, $\Delta(S^{-1}(h)) = S^{-1}(h)_1 \otimes S^{-1}(h)_2 = S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1)$.

(iv) Escrevendo $h = S(S^{-1}(h))$ e aplicando ε nesta igualdade, temos que $\varepsilon(h) = \varepsilon(S(S^{-1}(h)))$. Agora, aplicando o item (iv) da proposição anterior, temos que:

$$\varepsilon(h) = \varepsilon(S^{-1}(h)).$$

□

Ainda, da propriedade da antípoda $S * id_H = u \circ \varepsilon = id_H * S$, temos que: $S^{-1}(h_2)h_1 = h_2S^{-1}(h_1) = \varepsilon(h)1_H$.

Exemplo 2.2.10. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora S, então a biálgebra H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1}.*

Proposição 2.2.11. *Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ uma álgebra de Hopf. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H, \forall h \in H$.

(ii) $h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1_H, \forall h \in H$.

(iii) $S^2 = id_H$, *onde* $S^2 = S \circ S$.

Demonstração. Primeiro provaremos que (i) implica em (iii). Sabemos que id_H é o inverso de S com respeito ao produto convolução, vamos provar que S^2 é inverso à direita de S e, por unicidade, $S^2 = id_H$. Seja $h \in H$, temos:

$$\begin{aligned} (S * S^2)(h) &= S(h_1)S^2(h_2) \\ &= S(S(h_2)h_1) \\ &= S(\varepsilon(h)1_H) \\ &= \varepsilon(h)1_h \\ &= u \circ \varepsilon(h). \end{aligned}$$

Logo, S^2 é um inverso à direita de S. Portanto, $S^2 = id_H$.

Agora vamos mostrar que (iii) implica em (ii). Sabemos que $h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$. Aplicando S na equação, temos:

$$S^2(h_2)S(h_1) = \varepsilon(h)1_H.$$

Como $S^2 = id_H$, então:

$$h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1_H.$$

Para provar que (ii) implica em (iii) vamos verificar que S^2 é inverso à esquerda de S, com respeito ao produto convolução. De fato,

$$\begin{aligned}
(S^2 * S)(h) &= S^2(h_1)S(h_2) \\
&= S(h_2S(h_1)) \\
&= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_H \\
&= u \circ \varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Assim, S^2 é inverso à esquerda de S e, portanto, $S^2 = id_H$.

Por último, mostraremos que (iii) implica em (i). Aplicando S na igualdade $S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$, temos:

$$S(h_2)S^2(h_1) = \varepsilon(h)1_H.$$

Como $S^2 = id_H$, segue que

$$S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H.$$

□

O corolário seguinte contém uma propriedade importante de álgebras de Hopf comutativas ou cocomutativas. Mais adiante este corolário servirá para fazer uma comparação com álgebras de Hopf quasitriangulares, que será o assunto final deste trabalho.

Corolário 2.2.12. *Seja H uma álgebra de Hopf comutativa ou cocomutativa. Então $S^2 = id_H$.*

Demonstração. Se H é comutativa, então da propriedade da antípoda $S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$, segue que $h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$, ou seja, o item (ii) da *Proposição 2.2.11* vale. Logo $S^2 = id_H$.

Se H é cocomutativa, então $h_1 \otimes h_2 = h_2 \otimes h_1$. Aplicando $M \circ (S \otimes id_H)$, nessa igualdade, temos $S(h_1)h_2 = S(h_2)h_1$. Como $S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$, segue que $S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$, ou seja, vale o item (i) da *Proposição 2.2.11*. Assim $S^2 = id_H$. $\square$

Observação 2.2.13. *Sejam H uma álgebra de Hopf e $G(H)$ o conjunto de elementos grouplike de H. Vimos que para $g \in G(H)$ temos $\varepsilon(g) = 1_H$. Assim,*

$$S(g_1)g_2 = S(g)g = \varepsilon(g)1_H = 1_H, \forall g \in G(H).$$

Portanto, $S(g) = g^{-1}, \forall g \in G(H)$.

Na *Proposição 2.1.5* vimos que se H é uma biálgebra de dimensão finita, então seu dual é uma biálgebra. O próximo resultado mostra que isso vale se H for uma álgebra de Hopf de dimensão finita.

Proposição 2.2.14. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, com antípoda S. Então a biálgebra H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*.*

Demonstração. Usando a *Proposição 2.1.5*, temos que H^* é uma biálgebra, resta provar que tem antípoda. Sejam $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ álgebra de Hopf de dimensão finita e $(H^*, M^*, u^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ a biálgebra dual de H. Vamos mostrar que $S^*(h_1^*)h_2^* = \varepsilon^*(h^*)1_{H^*}$ e $h_1^*S^*(h_2^*) = \varepsilon^*(h^*)1_{H^*}$, onde $1_{H^*} = \varepsilon$.

Para todo $h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
(S^*(h_1^*)h_2^*)(h) &= S^*(h_1^*)(h_1)h_2^*(h_2) \\
&= h_1^*(S(h_1))h_2^*(h_2) \\
&= h^*(S(h_1)h_2) \\
&= h^*(\varepsilon(h)1_H) \\
&= h^*(1_H)\varepsilon(h) \\
&= \varepsilon^*(h^*)\varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Logo, $S^*(h_1^*)h_2^* = \varepsilon^*(h^*)1_{H^*}$. De maneira análoga, temos $h_1^* S^*(h_2^*) = \varepsilon^*(h^*)1_{H^*}$ e, portanto, H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*. $\square$

Observação 2.2.15. *Sejam H e L duas biálgebras. O produto tensorial $H \otimes L$ é uma biálgebra se consideramos a estrutura de produto tensorial de álgebras e de coálgebras. O mesmo vale quando H e L são álgebras de Hopf, ou seja, $H \otimes L$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S_H \otimes S_L$, onde S_H e S_L são as antípodas de H e L, respectivamente.*

2.3 Módulos de Hopf

Nesta seção provaremos o Teorema fundamental de módulos de Hopf. Aqui, H sempre denotará uma álgebra de Hopf.

Já vimos que se A é uma álgebra e V e W são dois A-módulos à esquerda, então o produto tensorial $V \otimes W$ também é um A-módulo à esquerda. Também, vimos que se C é uma coálgebra e M e N são dois C-comódulos à direita, então o produto tensorial $M \otimes N$ também é um C-comódulo à direira. As definições, a seguir, decorrem desses resultados.

Definição 2.3.1. *Sejam H uma álgebra de Hopf, V e W dois H-módulos à esquerda. Então o produto tensorial $V \otimes W$ é um H-módulo à esquerda com ação dada por:*

$$h \cdot (v \otimes w) = (h_1 \cdot v) \otimes (h_2 \cdot w), \forall h \in H, v \in V, w \in W.$$

Similarmente, o produto tensorial de dois H-módulos à direita também é um H-módulo à direita.

Podemos reescrever a ação dada na *Definição 2.3.1* da seguinte maneira: sejam $\mu_V : H \otimes V \longrightarrow V$ e $\mu_W : H \otimes W \longrightarrow W$ as ações de H em V e de H em W, então

$\mu_{V\otimes W} : H \otimes V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$, que é a ação de H em $V \otimes W$, é definida por:

$$\mu_{V\otimes W} = (\mu_V \otimes \mu_W) \circ (id_H \otimes \tau \otimes id_W) \circ (\Delta \otimes id_V \otimes id_W),$$

onde $\tau : H \otimes V \longrightarrow V \otimes H$ é a aplicação twist e Δ é a comultiplicação em H.

Quando a álgebra de Hopf H é cocomutativa, ou seja, $\tau(\Delta(h)) = \Delta(h), \forall h \in H$, temos que $V \otimes W \cong W \otimes V$ como H-módulos à esquerda. De fato, definindo $\phi : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ por:

$$\phi(v \otimes w) = w \otimes v,$$

para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$, temos para todo $h \in H$:

$$\begin{aligned}
\phi(h \cdot (v \otimes w)) &= \phi((\mu_V \otimes \mu_W) \circ (id_H \otimes \tau \otimes id_W) \circ (\Delta \otimes id_V \otimes id_W)(h \otimes v \otimes w)) \\
&= ((\mu_V \otimes \mu_W) \circ (id_H \otimes \tau \otimes id_W) \circ ((\tau \circ \Delta) \otimes id_V \otimes id_W)(h \otimes v \otimes w)) \\
&= \phi(h_2 \cdot v \otimes h_1 \cdot w) \\
&= h_1 \cdot w \otimes h_2 \cdot v \\
&= h \cdot \phi(v \otimes w).
\end{aligned}$$

Logo, temos que ϕ é um morfismo de H-módulos. E, é fácil verificar que ϕ é bijetora com inversa $\phi^{-1} : W \otimes V \longrightarrow V \otimes W$ dada por $\phi^{-1}(w \otimes v) = v \otimes w$. Portanto $V \otimes W \cong W \otimes V$.

Agora, dualizando a definição anterior, temos a seguinte definição:

Definição 2.3.2. *Sejam H uma álgebra de Hopf, V e W H-comódulos à direita com coações ρ_V e ρ_W, respectivamente. O produto tensorial $V \otimes W$ é um H-comódulo à direita com coação dada por:*

$$\rho_{V\otimes W} = (id_V \otimes id_W \otimes m) \circ (id_V \otimes \tau \otimes id_H) \circ (\rho_V \otimes \rho_W) : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W \otimes H,$$

onde $\tau : H \otimes W \longrightarrow W \otimes H$ é a aplicação twist e m é a multiplicação em H.

Em termos dos elementos, temos que $\rho_{V\otimes W}(v\otimes w) = v_{(0)}\otimes w_{(0)}\otimes v_{(1)}w_{(1)}$.

Assim como uma álgebra de Hopf é simultaneamente álgebra e coálgebra, temos que um módulo de Hopf é um módulo e um comódulo. Vejamos a definição a seguir.

Definição 2.3.3. *Seja H uma álgebra de Hopf. Um H-*módulo de Hopf à direita *é um k-espaço vetorial M tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) M é um H-módulo à direita, com ação denotada por $m\cdot h, \forall m\in M, h\in H$;

(ii) M é um H-comódulo à direita, via coação $\rho: M\longrightarrow M\otimes H$;

(iii) ρ e $\cdot$ satisfazem a seguinte condição de compatibilidade:

$$\rho(m\cdot h) = m_{(0)}\cdot h_1\otimes m_{(1)}h_2, \forall m\in M, h\in H.$$

De maneira análoga podemos definir um H-módulo de Hopf à esquerda.

Exemplo 2.3.4. *Uma álgebra de Hopf H é um H-módulo de Hopf com coação $\rho=\Delta$ e ação dada pela multiplicação m.*

Exemplo 2.3.5. *Sejam H uma álgebra de Hopf e V um k-espaço vetorial. Definimos em $V\otimes H$ uma estrutura de H-módulo à direita por*

$$(v\otimes h)\cdot g = v\otimes hg, \forall h,g\in H, v\in V,$$

e uma estrutura de H-comódulo à direita dada pela aplicação $\rho: V\otimes H\longrightarrow V\otimes H\otimes H$ tal que

$$\rho(v\otimes h) = v\otimes h_1\otimes h_2,$$

para quaisquer $v\in V, h\in H$.

Temos que $V\otimes H$ é um módulo de Hopf com essas estruturas. Precisamos, ainda, verificar a relação de compatibilidade do item (iii) da Definição 2.3.3. *De* *fato, para quaisquer $h, g \in H$ e $v \in V$, temos:*

$$\begin{aligned}
\rho((v \otimes h) \cdot g) &= \rho(v \otimes hg) \\
&= v \otimes (hg)_1 \otimes (hg)_2 \\
&= v \otimes h_1 g_1 \otimes h_2 g_2 \\
&= ((v \otimes h_1) \cdot g_1) \otimes h_2 g_2 \\
&:= (v \otimes h)_{(0)} \cdot g_1 \otimes (v \otimes h)_{(1)} g_2.
\end{aligned}$$

Logo, $V \otimes H$ é um H-módulo de Hopf à direita.

Vamos mostrar que os exemplos de H-módulos de Hopf à direita são todos isomorfos como módulos de Hopf a $V \otimes H$. Este resultado é conhecido como *Teorema fundamental dos módulos de Hopf.* Antes de provarmos este teorema vamos definir um morfismo de H-módulos de Hopf.

Definição 2.3.6. *Sejam M e N dois módulos de Hopf à direita. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é um* morfismo de H-módulos de Hopf *à direita se for, simultaneamente, um morfismo de H-módulos à direita e um morfismo de H-comódulos à direita.*

Temos, ainda, que este k-espaço vetorial V, do *Exemplo 2.3.5* é um subespaço de H, que é chamado dos subespaço de coinvariantes, que será definido a seguir.

Definição 2.3.7. *Seja M um H-comódulo à direita com coação dada pela aplicação $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$. O conjunto*

$$M^{coH} = \{m \in M | \rho(m) = m \otimes 1_H\}$$

é um subespaço de M que é chamado de subespaço dos coinvariantes de M.

Teorema 2.3.8. ***(Teorema fundamental dos módulos de Hopf)***
Sejam H uma álgebra de Hopf e M um H-módulo de Hopf à direita. A aplicação

$f : M^{coH} \otimes H \longrightarrow M$, definida por $f(m \otimes h) = m \cdot h$, para quaisquer $m \in M^{coH}$ e $h \in H$, é um isomorfismo de H-módulos de Hopf à direita.

Em $M^{coH} \otimes H$ vamos considerar a estrutura de H-módulo de Hopf à direita dada no *Exemplo 2.3.5* para o k-espaço vetorial M^{coH}.

Demonstração. Seja $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$ a estrutura de H-comódulo à direita, onde $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}, \forall m \in M$. Consideramos a aplicação $g : M \longrightarrow M$ definida por $g(m) = m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})$, para qualquer $m \in M$. Vamos mostrar que $g(M) \subseteq M^{coH}$, ou seja, $\rho(g(m)) = g(m) \otimes 1_H$, $\forall m \in H$. Antes disso, vamos lembrar de algumas propriedades que utilizaremos nos cálculos.

Temos pelo fato de M um ser módulo de Hopf à direita que:

$$\rho(m \cdot h) = m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)} h_2, \forall m \in M, h \in H. \tag{2.1}$$

Da propriedade da antípoda S ser um antimorfismo de coálgebras, temos:

$$(S(h))_1 \otimes (S(h))_2 = S(h_2) \otimes S(h_1), \forall h \in H. \tag{2.2}$$

Pela propriedade da antípoda, para qualquer $h \in H$ temos:

$$S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = h_1 S(h_2). \tag{2.3}$$

A propriedade da counidade nos dá:

$$\varepsilon(h_1)h_2 = h = h_1\varepsilon(h_2), \forall h \in H. \tag{2.4}$$

Usaremos, também, a notação de Sweedler para comódulos, ou seja, para qualquer $m \in M$, temos:

$$(m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2 = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}. \tag{2.5}$$

Para todo $m \in M$, temos:

$$\begin{aligned}
\rho(g(m)) &= \rho(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) \\
&= (m_{(0)})_{(0)} \cdot (S(m_{(1)}))_1 \otimes (m_{(0)})_{(1)}(S(m_{(1)}))_2 \quad \text{(por 2.1)} \\
&= (m_{(0)})_{(0)} \cdot (S(m_{(1)_2})) \otimes (m_{(0)})_{(1)}(S(m_{(1)_1})) \quad \text{(por 2.2)} \\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(3)}) \otimes m_{(1)}S(m_{(2)}) \quad \text{(por 2.5)} \\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(2)}) \otimes (m_{(1)})_1 S((m_{(1)})_2) \quad \text{(por 2.5)} \\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(2)}) \otimes \varepsilon(m_{(1)})1_H \quad \text{(por 2.3)} \\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(2)}\varepsilon(m_{(1)})) \otimes 1_H \\
&= m_{(0)} \cdot S((m_{(1)})_2\varepsilon(m_{(1)})_1) \otimes 1_H \quad \text{(por 2.5)} \\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes 1_H \quad \text{(por 2.4)} \\
&= g(m) \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar, agora, que f é um isomorfismo. Definimos a aplicação $F : M \longrightarrow M^{coH} \otimes H$ por $F(m) = g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}$, para qualquer $m \in M$, e provaremos que F é a inversa de f. De fato, para $m \in M^{coH}$, ou seja,

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} = m \otimes 1_H, \tag{2.6}$$

e $h \in H$, temos:

$$\begin{aligned}
(F \circ f)(m \otimes h) &= F(m \cdot h) \\
&= g((m \cdot h)_{(0)}) \otimes (m \cdot h)_{(1)} \\
&= g(m_{(0)} \cdot h_1) \otimes m_{(1)}h_2 \quad \text{(por 2.1)} \\
&= (g \otimes id_H)(m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)}h_2) \\
&= (g \otimes id_H)(m \cdot h_1 \otimes h_2) \quad \text{(por 2.6)} \\
&= g(m \cdot h_1) \otimes h_2.
\end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$\begin{aligned}
g(m \cdot h_1) \otimes h_2 &= (m \cdot h_1)_{(0)} S((m \cdot h_1)_{(1)}) \otimes h_2 \\
&= m_{(0)} \cdot (h_1)_1 S(m_{(1)}(h_1)_2) \otimes h_2 \quad \text{(por 2.1)} \\
&= m \cdot (h_1)_1 S((h_1)_2) \otimes h_2 \quad \text{(por 2.6)} \\
&= m\varepsilon(h_1) \otimes h_2 \quad \text{(por 2.3)} \\
&= m \otimes \varepsilon(h_1) h_2 \\
&= m \otimes h.
\end{aligned}$$

Assim segue que $(F \circ f)(m \otimes h) = m \otimes h$. Logo, temos que $F \circ f = id_{M^{coH} \otimes H}$. Analogamente, se $m \in M$, então:

$$\begin{aligned}
(f \circ F)(m) &= f(g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}) \\
&= f(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) m_{(2)} \\
&= m_{(0)} \cdot S((m_{(1)})_1)(m_{(1)})_2 \quad \text{(por 2.5)} \\
&= m_{(0)} \varepsilon(m_{(1)}) \quad \text{(por 2.3)} \\
&= m.
\end{aligned}$$

Assim, $f \circ F = id_M$. Portanto F é o inverso de f.

Para terminarmos a demonstração do teorema, falta mostrar que f é um morfismo de H-módulos de Hopf à direita, ou seja, que f é um morfismo de H-módulos à direita e um morfismo de H-comódulos à direita. A verificação de que f é um morfismo de H-módulos à direita é imediata, pois dados $m \in M^{coH}, h, h' \in H$, temos:

$$f((m \otimes h) \cdot h') = f(m \otimes hh') = m \cdot (hh') = (m \cdot h) \cdot h' = f(m \otimes h) \cdot h'.$$

Provemos, agora, que f é um morfismo de H-comódulos à direita, ou seja, que f satisfaz a igualdade $\rho \circ f = (f \otimes id_H) \circ (id_{M^{coH}} \otimes \Delta)$, onde $id_{M^{coH}} \otimes \Delta$ dá a estrutura de H-comódulo para $M^{coH} \otimes H$. De fato, se $m \in M^{coH}$ e $h \in H$ então:

$$\begin{aligned}
(\rho \circ f)(m \otimes h) &= \rho(m \cdot h) \\
&= (m \cdot h)_{(0)} \otimes (m \cdot h)_{(1)} \\
&= m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)} h_2 \\
&= m \cdot h_1 \otimes h_2 \quad \text{(por 2.6)} \\
&= f(m \otimes h_1) \otimes h_2 \\
&= (f \otimes id_H)(m \otimes h_1 \otimes h_2) \\
&= (f \otimes id_H) \circ (id_{M^{coH}} \otimes \Delta)(m \otimes h).
\end{aligned}$$

Portanto, f é um isomorfismo de H-módulos de Hopf. $\square$

2.4 Ações e coações de álgebras de Hopf em álgebras

Nesta seção introduziremos a noção de ações e coações de álgebras de Hopf. Aqui H denotará uma álgebra de Hopf com antípoda S.

Definição 2.4.1. *Dizemos que A é um H-*módulo álgebra à esquerda*, ou que H* age na álgebra A*, se as seguintes condições valem:*

(i) A é um H-módulo à esquerda, com ação de $h \in H$ em $a \in A$ denotada por $h \cdot a$.

(ii) $h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b), \forall h \in H \quad e \quad a \in A$.

(iii) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A, \forall h \in H$.

De maneira análoga podemos definir um H-módulo álgebra à direita.

Seja A uma álgebra que também é um H-módulo à esquerda com estrutura dada por:

$$\mu : H \otimes A \longrightarrow A, \ \mu(h \otimes a) = h \cdot a.$$

Sabemos da propriedade de adjunção do produto tensorial que existe uma correspondência natural bijetiva $Hom(H \otimes A, A) \longrightarrow Hom(A, Hom(H, A))$. Denotamos por $\varphi : A \longrightarrow Hom(H, A)$ a aplicação correspondendo a μ pela bijeção, ou seja, $h \cdot a = \mu(h \otimes a) = \varphi(a)(h), \forall h \in H$ e $a \in A$. Temos, então, os seguintes resultados:

Proposição 2.4.2. *Com as notações acima, temos que A é um H-módulo álgebra se, e somente se, φ é um morfismo de álgebras.*

Demonstração. Já provamos que $Hom(H, A)$ é uma álgebra com multiplicação dada pelo produto convolução: $(f * g)(h) = f(h_1)g(h_2)$.

Vamos provar que φ é um morfismo de álgebras, ou seja, $\varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b)$ e $\varphi(1_A) = 1_{Hom(H,A)}$.

Por hipótese, A é um H-módulo álgebra, então vale a condição (ii) da *Definição 2.4.1*, ou seja,

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b), \forall h \in H \text{ e } a \in A.$$

Mas, isso equivale a dizer que:

$$\varphi(ab)(h) = \varphi(a)(h_1)\varphi(b)(h_2), \forall h \in H \text{ e } a \in A.$$

Notemos ainda que $\varphi(a)(h_1)\varphi(b)(h_2) = (\varphi(a) * \varphi(b))(h)$, logo

$$\varphi(ab)(h) = (\varphi(a) * \varphi(b))(h).$$

Assim a primeira igualdade está provada.

Temos, ainda, da condição (iii) da *Definição 2.4.1*:

$$h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A, \forall h \in H,$$

ou seja,

$$\varphi(1_A)(h) = \varepsilon(h)1_A = u^*(1_A)(h),$$

onde u^* é a unidade de $Hom(H,A)$ e $u^*(1_A) = 1_{Hom(H,A)}$. Logo,

$$\varphi(1_A) = 1_{Hom(H,A)}.$$

Reciprocamente, a demonstração de que A é um H-módulo álgebra, sabendo que φ é um morfismo de álgebras, é imediata. $\square$

Proposição 2.4.3. *Seja A uma álgebra, que também é um H-módulo à esquerda, tal que a condição (ii) da* Definição 2.4.1 *vale. Então:*

(i) $(h \cdot a)b = h_1 \cdot (a(S(h_2) \cdot b))$, *para quaisquer $h \in H$ e $a, b \in A$.*

(ii) Se S é bijetiva, então:

$$a(h \cdot b) = h_2((S^{-1}(h_1) \cdot a)b), \forall h \in H \quad e \quad a, b \in A.$$

Demonstração. Lembramos que de A ser um H-módulo à esquerda temos que $(hg) \cdot a = h \cdot (g \cdot a)$, $\forall h, g \in H$ e $a \in A$. Temos ainda, da condição (ii) da *Definição 2.4.1*, que $h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$, para quaisquer $h \in H$ e $a, b \in A$.

(i) Usando as observações acima, para quaisquer $h \in H$ e $a, b \in A$ segue que:

$$\begin{aligned}
h_1 \cdot (a(S(h_2) \cdot b)) &= (h_{11} \cdot a)(h_{12} \cdot (S(h_2) \cdot b)) \\
&= (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot (S(h_3) \cdot b)) \\
&= (h_1 \cdot a)(h_2 S(h_3) \cdot b) \\
&= (h_1 \cdot a)(\varepsilon(h_2) b) \\
&= ((h_1 \varepsilon(h_2)) \cdot a) b \\
&= (h \cdot a) b.
\end{aligned}$$

Logo, provamos a igualdade.

(ii) Novamente, usando as observações anteriores para $h \in H$ e $a, b \in A$, temos:

$$\begin{aligned} h_2((S^{-1}(h_1) \cdot a)b) &= (h_{21} \cdot (S^{-1}(h_1) \cdot a))(h_{22} \cdot b) \\ &= (h_2 \cdot (S^{-1}(h_1) \cdot a))(h_3 \cdot b) \\ &= (h_2 S^{-1}(h_1) \cdot a)(h_3 \cdot b) \\ &= (\varepsilon(h_1)a)(h_2 \cdot b) \\ &= a((\varepsilon(h_1)h_2) \cdot b) \\ &= a(h \cdot b). \end{aligned}$$

Portanto, $a(h \cdot b) = h_2((S^{-1}(h_1) \cdot a)b)$. □

Vejamos agora alguns exemplos de álgebras de Hopf agindo em álgebras.

Exemplo 2.4.4. *Seja G um grupo finito agindo por automorfismos em uma k-álgebra A. Consideremos a álgebra de Hopf $H = kG$, com comultiplicação, counidade e antípoda dadas por:*

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1_H \quad e \quad S(g) = g^{-1}, \forall g \in G.$$

Definimos a ação de H em A por $g \cdot a = g(a) = a^g, \forall a \in A \quad e \quad g \in G$. Com essas notações, é fácil verificar que A é um H-módulo álgebra à esquerda.

Exemplo 2.4.5. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então H^* é um H-módulo álgebra à esquerda (e à direita) com ações, denotadas por $\rightharpoonup$ (e $\leftharpoonup$), definidas por:*

$$(h \rightharpoonup h^*)(g) = h^*(gh) \quad (e \quad (h^* \leftharpoonup h)(g) = h^*(hg)), \forall h, g \in H, h^* \in H^*.$$

Agora introduziremos a noção de coação de uma álgebra de Hopf em uma álgebra.

Definição 2.4.6. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma k-álgebra. Dizemos que A é um* H-comódulo álgebra à direita*, ou que H* coage à direita em A*, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) A é um H-comódulo à direita, com coação dada por $\rho : A \longrightarrow A \otimes H$, $\rho(a) = a_{(0)} \otimes a_{(1)}, \forall a \in A$;

(ii) $(ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)} = a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}, \forall a, b \in A$;

(iii) $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

A noção de H-comódulo álgebra à esquerda é definida similarmente.

Exemplo 2.4.7. *Toda álgebra de Hopf H é um H-comódulo álgebra, à esquerda e à direita, com estrutura de comódulo dada pela comultiplicação Δ.*

Vejamos uma proposição importante sobre coações de álgebras de Hopf em álgebras.

Proposição 2.4.8. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma k-álgebra, que também é um H-comódulo à direita com estrutura $\rho : A \longrightarrow A \otimes H$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) A é um H-comódulo álgebra à direita.

(ii) ρ é um morfismo de álgebras.

(iii) A multiplicação de A, denotada por m_A, é um morfismo de comódulos à direita e a unidade de A, denotada por u_A, é um morfismo de comódulos à direita.

Demonstração. Suponha que A é um H-comódulo álgebra à direita. Vamos mostrar que ρ é um morfismo de álgebras, ou seja, $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ e $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$, para quaisquer $a, b \in A$.

Por hipótese, temos que A é um H-comódulo álgebra, ou seja, pela condição (iii) da *Definição 2.4.6* temos a segunda igualdade para que ρ seja morfismo de álgebras. Sejam $a, b \in A$, temos então:

$$\begin{aligned}
\rho(ab) &= (ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)} \\
&= a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)} \\
&= (a_{(0)} \otimes a_{(1)})(b_{(0)} \otimes b_{(1)}) \\
&= \rho(a)\rho(b).
\end{aligned}$$

Logo, ρ é um morfismo de álgebras e, portanto, temos que (i) implica em (ii).

Vamos mostrar agora que $m_A : A \longrightarrow A \otimes A$ é um morfismo de comódulos à direita, ou seja, $\rho \circ m_A = (m_A \otimes id_H) \circ \varrho$, onde $\varrho : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A \otimes H$, $\varrho(a \otimes b) = a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}$, dá a estrutura de H-comódulo à direita de $A \otimes A$. Por hipótese, temos que $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$, pois ρ é um morfismo de álgebras. Assim para quaisquer $a, b \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
(\rho \circ m_A)(a \otimes b) &= \rho(ab) \\
&= \rho(a)\rho(b) \\
&= (a_{(0)} \otimes a_{(1)})(b_{(0)} \otimes b_{(1)}) \\
&= a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)} \\
&= (m_A \otimes id_H)(a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}) \\
&= ((m_A \otimes id_H) \circ \varrho)(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Precisamos, ainda, mostrar que $u_A : k \longrightarrow A$ também é um morfismo de comódulos à direita, ou seja, $\rho \circ u_A = (u_A \otimes id_H) \circ \psi$, onde $\psi : k \longrightarrow k \otimes H$ é definida por $\psi(1_k) = 1_k \otimes 1_H$ e dá estrutura de H-comódulo à direita para k. Por hipótese, temos que $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$, pois ρ é um morfismo de álgebras. Então:

$$\begin{aligned}
(\rho \circ u_A)(1_k) &= \rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H \\
&= (u_A \otimes id_H)(1_k \otimes 1_H) \\
&= ((u_A \otimes id_H) \circ \psi)(1_k).
\end{aligned}$$

Portanto, m_A e u_A são morfismos de comódulos à direita. Assim, temos que (ii) implica em (iii).

Suponha agora que m_A e u_A são morfismos de comódulos à direita. Precisamos mostrar que A é um H-comódulo álgebra à direita, ou seja, falta mostrar que as condições (ii) e (iii) da *Definição 2.4.6* são satisfeitas, pois A é um H-comódulo à direita.

Por hipótese, temos que m_A é um morfismo de comódulos à direita, assim

$$\rho \circ m_A = (m_A \otimes id_H) \circ \varrho.$$

Por um lado dessa igualdade temos:

$$(\rho \circ m_A)(a \otimes b) = \rho(ab) = (ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)}, \forall a, b \in A.$$

Já, por outro lado temos:

$$\begin{aligned} (m_A \otimes id_H) \circ \varrho)(a \otimes b) &= (m_A \otimes id_H)(a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}) \\ &= a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}, \forall a, b \in A. \end{aligned}$$

Logo, temos a condição (ii).

Pelo fato de que u_A é morfismo de comódulos temos a condição (iii). Portanto, A é um H-comódulo álgebra. Assim, (iii) implica em (i). $\square$

No caso em que H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, temos uma conexão entre ações e coações de álgebras de Hopf em álgebras. Antes de enunciarmos este resultado, vamos definir a álgebra de invariantes.

Definição 2.4.9. *Seja A um H-módulo álgebra. Dizemos que o conjunto*

$$A^H = \{a \in A | h \cdot a = \varepsilon(h)a, \forall h \in H\}$$

é a álgebra dos invariantes *de A.*

Proposição 2.4.10. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A uma k-álgebra. Então A é um H-comódulo álgebra à direita se, e somente se, A é um H^*-módulo álgebra à esquerda. Além disso, nesse caso temos que $A^{H^*} = A^{coH}$.*

Demonstração. Sejam n a dimensão de H sobre o corpo k e $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subseteq H$, $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\} \subseteq H^*$ bases duais, ou seja, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, onde $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j, \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j, \end{cases}$$

que é chamado de *delta de Kronecker*.

Vamos assumir que A é um H-comódulo álgebra à direita e mostrar que A torna-se um H^*-módulo álgebra à esquerda com ação dada por:

$$f \cdot a = a_0 f(a_1), \forall a \in A \text{ e } f \in H^*.$$

Já sabemos, pela *Proposição 1.2.8*, que se A é um H-comódulo à direita, então A é um H^*-módulo à esquerda. Vamos verificar os itens (ii) e (iii) da *Definição 2.4.1*. Para todos $a, b \in A$ e $f \in H^*$, temos:

$$\begin{aligned} f \cdot (ab) &= (ab)_0 f((ab)_1) \\ &= a_0 b_0 f(a_1 b_1) \\ &= a_0 b_0 f_1(a_1) f_2(b_1) \\ &= a_0 f_1(a_1) b_0 f_2(b_1) \\ &= (f_1 \cdot a)(f_2 \cdot b). \end{aligned}$$

E, ainda, temos:

$$\begin{aligned} f \cdot 1_A &= (1_A)_0 f((1_A)_1) \\ &= f(1_A) 1_A \\ &= \varepsilon(f) 1_A. \end{aligned}$$

Logo, temos que A é um H^*-módulo álgebra à esquerda.

Reciprocamente, vamos mostrar que se A é um H^*-módulo álgebra à esquerda, então A é um H-comódulo álgebra à direita com estrutura dada por:

$$\rho : A \longrightarrow A \otimes H,\ \rho(a) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot a \otimes e_i.$$

Já temos que A é um H-comódulo à direita, vamos mostrar agora as condições (ii) e (iii) da *Definição 2.4.6*.

Para todo $f \in H^*$, temos:

$$\begin{aligned}
(id_A \otimes f)(\rho(ab)) &= (id_A \otimes f)(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot (ab) \otimes e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot (ab) \otimes f(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (e_i^* f(e_i)) \cdot (ab) \otimes 1_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f \circ e_i^*)(e_i) \cdot (ab) \otimes 1_k \\
&= f \cdot (ab) \otimes 1_k \\
&= (f_1 \cdot a)(f_2 \cdot b) \otimes 1_k \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} ((e_i^* f_1(e_i)) \cdot a)((e_j^* f_2(e_j)) \cdot b) \otimes 1_k \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (e_i^* \cdot a)(e_j^* \cdot b) \otimes f_1(e_i) f_2(e_j) \\
&= (id_A \otimes f)(\sum_{i,j=1}^{n} (e_i^* \cdot a)(e_j^* \cdot b) \otimes e_i e_j) \\
&= (id_A \otimes f)(\rho(a)\rho(b)).
\end{aligned}$$

Logo, temos a condição (ii) da *Definição 2.4.6* $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$.

Temos também:

$$\begin{aligned}
\rho(1_A) &= \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot 1_A \otimes e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_A e_i^*(1_{H^*}) \otimes e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_A \otimes e_i^*(1_H) e_i \\
&= 1_A \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que A é um H-comódulo álgebra à direita.

Para terminar a demonstração da proposição, precisamos mostrar que $A^{H^*} = A^{coH}$. De fato,

$$\begin{aligned}
A^{H^*} &= \{a \in A | f \cdot a = \varepsilon(f)a, \forall f \in H^*\} \\
&= \{a \in A | f \cdot a = f(1_H)a, \forall f \in H^*\} \\
&= \{a \in A | (id_A \otimes f)(\rho(a)) = (id_A \otimes f)(a \otimes 1_H), \forall f \in H^*\} \\
&= \{a \in A | \rho(a) = a \otimes 1_H\} \\
&= A^{coH}.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Álgebras de Hopf quase cocomutativas e quasitriangulares

Neste último capítulo vamos generalizar a definição de álgebras de Hopf cocomutativas, obtendo os conceitos de álgebras de Hopf quase cocomutativas e quasitriangulares, que podem ser encontrados em [5]. Apresentamos, ainda, alguns exemplos e resultados importantes sobre a antípoda de tais álgebras de Hopf.

3.1 Álgebras de Hopf quase cocomutativas

Nesta seção vamos definir álgebras de Hopf quase cocomutativas, que são uma generalização de álgebras de Hopf cocomutativas, dar exemplos e algumas propriedades importantes dessas álgebras.

Seja H uma álgebra de Hopf. Sabemos, do capítulo anterior, que H é cocomutativa quando $\tau \circ \Delta = \Delta$, onde Δ é a comultiplicação e τ é a aplicação twist. Vamos generalizar este conceito com a seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Uma álgebra de Hopf H é dita* quase cocomutativa *se a antípoda*

S for bijetiva e se existe um elemento invertível $R \in H \otimes H$ tal que para todo $h \in H$,

$$\tau(\Delta(h)) = R\Delta(h)R^{-1},$$

onde τ é a aplicação twist.

Na notação de Sweedler, a igualdade $\tau(\Delta(h)) = R\Delta(h)R^{-1}$ significa que

$$h_2 \otimes h_1 = R(h_1 \otimes h_2)R^{-1}.$$

Exemplo 3.1.2. *Toda álgebra de Hopf cocomutativa H é quase cocomutativa. De fato, pelo Corolário 2.2.12, S é bijetiva. Tomando $R = 1_H \otimes 1_H$, temos:*

$$\begin{aligned}
R\Delta(h)R^{-1} &= (1_H \otimes 1_H)(h_1 \otimes h_2)(1_H \otimes 1_H)^{-1} \\
&= h_1 \otimes h_2 \\
&= h_2 \otimes h_1 \\
&= \tau(\Delta(h)).
\end{aligned}$$

Assim, temos que a álgebra de grupo kG é uma álgebra de Hopf quase cocomutativa, pois é cocomutativa.

Exemplo 3.1.3. *Já vimos que se H é uma álgebra de Hopf com antípoda S bijetora, então H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1} e sua comultiplicação é dada por $\Delta' = \tau \circ \Delta$, onde Δ é a comultiplicação de H. Vamos verificar que se H é uma álgebra de Hopf quase cocomutativa via $R = \sum_i a_i \otimes b_i$, então H^{cop} também é quase cocomutativa via $B = \tau(R) = \sum_i b_i \otimes a_i$.*

De fato, para todo $h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
\tau(\Delta'(h))B &= \tau(\tau(\Delta(h)))B \\
&= \sum_i h_1 b_i \otimes h_2 a_i \\
&= \tau(\sum_i h_2 a_i \otimes h_1 b_i) \\
&= \tau((\tau(\Delta(h)))R) \\
&= \tau(R\Delta(h)). \\
&= \tau(\sum_i a_i h_1 \otimes b_i h_2) \\
&= \sum_i b_i h_2 \otimes a_i h_1 \\
&= B\Delta'(h).
\end{aligned}$$

Logo H^{cop} é uma álgebra de Hopf quase cocomutativa.

Vejamos agora um exemplo de álgebra de Hopf quase cocomutativa que possui R não trivial. Este exemplo aparece em [5].

Exemplo 3.1.4. *A álgebra de Sweedler $H_4 = \langle g, x | g^2 = 1, x^2 = 0 \quad e \quad xg = -gx\rangle$ é um exemplo de álgebra de Hopf quase cocomutativa com R não trivial, que é dado por:*

$$R_\alpha = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) + \frac{\alpha}{2}(x \otimes x - x \otimes gx + gx \otimes x + gx \otimes gx),$$

onde $\alpha \in k$.

Lembrando que $g^2 = 1$, $x^2 = 0$, $xg = -gx$, $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1$, vamos verificar as igualdades:

$$\tau(\Delta(g))R_\alpha = R_\alpha \Delta(g) \quad e \quad \tau(\Delta(x))R_\alpha = R_\alpha \Delta(x).$$

Verifiquemos a primeira igualdade, ou seja, $\tau(\Delta(g))R_\alpha = R_\alpha \Delta(g)$.

Por um lado, temos:

$$\begin{aligned}
\tau(\Delta(g))R_\alpha &= (g\otimes g)R_\alpha \\
&= \frac{1}{2}(g\otimes g + g\otimes g^2 + g^2\otimes g - g^2\otimes g^2) \\
&\quad +\frac{\alpha}{2}(gx\otimes gx - gx\otimes g^2x + g^2x\otimes gx + g^2x\otimes g^2x) \\
&= \frac{1}{2}(g\otimes g + g\otimes 1 + 1\otimes g - 1\otimes 1) \\
&\quad +\frac{\alpha}{2}(gx\otimes gx - gx\otimes x + x\otimes gx + x\otimes x).
\end{aligned}$$

Pelo outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
R_\alpha\Delta(g) &= R_\alpha(g\otimes g) \\
&= \frac{1}{2}(g\otimes g + g\otimes g^2 + g^2\otimes g - g^2\otimes g^2) \\
&\quad +\frac{\alpha}{2}(xg\otimes xg - xg\otimes gxg + gxg\otimes xg + gxg\otimes gxg) \\
&= \frac{1}{2}(g\otimes g + g\otimes 1 + 1\otimes g - 1\otimes 1) \\
&\quad +\frac{\alpha}{2}(gx\otimes gx - gx\otimes g^2x + g^2x\otimes gx + g^2x\otimes g^2x) \\
&= \frac{1}{2}(g\otimes g + g\otimes 1 + 1\otimes g - 1\otimes 1) \\
&\quad +\frac{\alpha}{2}(gx\otimes gx - gx\otimes x + x\otimes gx + x\otimes x).
\end{aligned}$$

Agora vamos verificar a segunda igualdade, ou seja, $\tau(\Delta(x))R_\alpha = R_\alpha\Delta(x)$.

Por um lado, temos:

$$\begin{aligned}
\tau(\Delta(x))R_\alpha &= \tau(g\otimes x + x\otimes 1)R_\alpha \\
&= (x\otimes g)R_\alpha + (1\otimes x)R_\alpha \\
&= (\frac{1}{2}(x\otimes g + x\otimes g^2 + xg\otimes g - xg\otimes g^2) \\
&\quad +\frac{\alpha}{2}(x^2\otimes gx - x^2\otimes g^2x + xgx\otimes gx + xgx\otimes g^2x)) \\
&\quad +(\frac{1}{2}(1\otimes x + 1\otimes xg + g\otimes x - g\otimes xg) \\
&\quad +\frac{\alpha}{2}(x\otimes x^2 - x\otimes xgx + gx\otimes x^2 + gx\otimes xgx)).
\end{aligned}$$

Simplificando a equação, temos:

$$\begin{aligned}
\tau(\Delta(x))R_\alpha &= \frac{1}{2}(x\otimes g+x\otimes 1-gx\otimes g+gx\otimes 1+1\otimes x-1\otimes gx+g\otimes x+g\otimes gx)\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}(-gx^2\otimes gx-gx^2\otimes x+x\otimes gx^2-gx\otimes gx^2)\\
&= \frac{1}{2}(x\otimes g+x\otimes 1-gx\otimes g+gx\otimes 1+1\otimes x-1\otimes gx+g\otimes x+g\otimes gx).
\end{aligned}$$

Agora, por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
R_\alpha\Delta(x) &= R_\alpha(g\otimes x)+R_\alpha(x\otimes 1)\\
&= (\frac{1}{2}(g\otimes x+g\otimes gx+g^2\otimes x-g^2\otimes gx)\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}(xg\otimes x^2-xg\otimes gx^2+gxg\otimes x^2+gxg\otimes gx^2))\\
&\quad+(\frac{1}{2}(x\otimes 1+x\otimes g+gx\otimes 1-gx\otimes g)\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}(x^2\otimes x-x^2\otimes gx+gx^2\otimes x+gx^2\otimes gx))\\
&= \frac{1}{2}(g\otimes x+g\otimes gx+1\otimes x-1\otimes gx+x\otimes 1+x\otimes g+gx\otimes 1-gx\otimes g).
\end{aligned}$$

Logo, temos que $(\tau\circ\Delta)R_\alpha = R_\alpha\Delta$ e, portanto, H_4 é quase cocomutativa.

Vimos que quando H é uma álgebra de Hopf cocomutativa e V e W dois H-módulos à esquerda, temos que $V\otimes W\cong W\otimes V$ como H-módulos à esquerda. Este fato será generalizado para álgebras de Hopf quase cocomutativas no seguinte lema:

Lema 3.1.5. *Sejam H uma álgebra de Hopf quase cocomutativa, V e W dois H-módulos à esquerda. Então $V\otimes W\cong W\otimes V$ como H- módulos à esquerda.*

Demonstração. Já vimos que a estrutura de H-módulo à esquerda para $V\otimes W$ é dada pela ação:

$$h\cdot(v\otimes w)=h_1\cdot v\otimes h_2\cdot w, \forall h\in H, v\in V \ \text{ e } \ w\in W.$$

Definimos $\phi: V\otimes W\longrightarrow W\otimes V$ tal que $\phi(v\otimes w)=R^{-1}(w\otimes v)$. Vamos mostrar que ϕ é um isomorfismo de H-módulos à esquerda.

Para todo $h \in H$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(h \cdot (v \otimes w)) &= \phi(h_1 \cdot v \otimes h_2 \cdot w) \\ &= R^{-1}(h_2 \cdot w \otimes h_1 \cdot v) \\ &= R^{-1}\tau(\Delta(h))(w \otimes v) \\ &= \Delta(h)R^{-1}(w \otimes v) \\ &= h \cdot \phi(v \otimes w). \end{aligned}$$

Logo, ϕ é um morfismo de H-módulos à esquerda.

Seja $\varphi : W \otimes V \longrightarrow V \otimes W$ dada por $\varphi(w \otimes v) = \tau(R)(v \otimes w)$, onde $R = \sum_i a_i \otimes b_i \in H \otimes H$. Denotamos $R^{-1} = \sum_i c_i \otimes d_i \in H \otimes H$ e definimos a ação de $H \otimes H$ em $W \otimes V$ por $R^{-1}(w \otimes v) = \sum_i c_i \cdot w \otimes d_i \cdot v$. Vamos mostrar que φ é a aplicação inversa de ϕ.

De fato, para todo $v \in V$ e $w \in W$, temos:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \phi)(v \otimes w) &= \varphi(R^{-1}(w \otimes v)) \\ &= \varphi((\sum_i c_i \otimes d_i)(w \otimes v)) \\ &= \varphi(\sum_i c_i \cdot w \otimes d_i \cdot v) \\ &= \tau(R)(\sum_i d_i \cdot v \otimes c_i \cdot w) \\ &= \tau(R)\tau(R^{-1})(v \otimes w) \\ &= v \otimes w. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que $RR^{-1} = 1_H \otimes 1_H$, assim $\tau(R)\tau(R^{-1}) = 1_H \otimes 1_H$.

Logo, $\varphi \circ \phi = id_{V \otimes W}$. Analogamente, temos que $\phi \circ \varphi = id_{W \otimes V}$. Portanto, $V \otimes W \cong W \otimes V$ como H-módulos à esquerda. $\square$

Temos pelo *Corolário 2.2.12* que se H é uma álgebra de Hopf cocomutativa então $S^2 = id_H$, onde $S^2 = S \circ S$. Esta propriedade pode ser generalizada para álgebras de Hopf quase cocomutativas.

Proposição 3.1.6. *Seja H uma álgebra de Hopf quase cocomutativa. Então S^2 é um automorfismo interior de H. Mais precisamente, escrevendo $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ e $u = \sum_i S(b_i)a_i$. Então u é invertível em H e, para todo $h \in H$, temos*

$$S^2(h) = uhu^{-1} = (S(u))^{-1}h(S(u)).$$

Consequentemente, $uS(u)$ é um elemento do centro de H, ou seja,

$$uS(u)h = huS(u), \quad \forall h \in H.$$

Demonstração. Primeiro mostraremos que $S^2(h)u = uh, \forall h \in H$.

Pelo fato de H ser uma álgebra de Hopf quase cocomutativa, temos que

$$(h_2 \otimes h_1)R = R(h_1 \otimes h_2),$$

assim seque que:

$$(R \otimes 1_H)(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) = (h_2 \otimes h_1 \otimes h_3)(R \otimes 1_H),$$

ou seja,

$$\sum_i a_i h_1 \otimes b_i h_2 \otimes h_3 = \sum_i h_2 a_i \otimes h_1 b_i \otimes h_3.$$

Aplicando $(m \circ \tau) \circ ((m \circ \tau) \otimes id_H) \circ (id_H \otimes S \otimes S^2)$ de ambos os lados da equação acima, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\sum_i S^2(h_3)S(b_ih_2)a_ih_1 &= \sum_i S^2(h_3)S(h_1b_i)h_2a_i; \\
\sum_i S^2(h_3)S(h_2)S(b_i)a_ih_1 &= \sum_i S^2(h_3)S(b_i)S(h_1)h_2a_i; \\
\sum_i S(h_2S(h_3))S(b_i)a_ih_1 &= \sum_i S^2(h_2)S(b_i)\varepsilon(h_1)a_i; \\
\sum_i S(\varepsilon(h_2))S(b_i)a_ih_1 &= \sum_i S^2(h_2\varepsilon(h_1))S(b_i)a_i;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i S(1_H)\varepsilon(h_2)S(b_i)a_ih_1 &= \sum_i S^2(h)S(b_i)a_i \\
\sum_i 1_H S(b_i)a_ih_1\varepsilon(h_2) &= \sum_i S^2(h)S(b_i)a_i; \\
\sum_i S(b_i)a_ih &= \sum_i S^2(h)S(b_i)a_i; \\
uh &= S^2(h)u.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que u é invertível.

Escrevendo $R^{-1} = \sum_j c_j \otimes d_j$ e $v = \sum_j S^{-1}(d_j)c_j$ e usando o resultado anterior, temos que v é o inverso de u. De fato,

$$\begin{aligned}
uv &= \sum_j uS^{-1}(d_j)c_j \\
&= \sum_j S^2(S^{-1}(d_j))uc_j \\
&= \sum_j S(d_j)uc_j \\
&= \sum_j S(d_j)(\sum_i S(b_i)a_i)c_j \\
&= \sum_{i,j} S(b_id_j)a_ic_j.
\end{aligned}$$

Mas, temos que $\sum_{i,j} a_ic_j \otimes b_id_j = RR^{-1} = 1_H \otimes 1_H$ e aplicando $(m \circ \tau) \circ (id_H \otimes S)$ nessa igualdade, segue que $\sum_{i,j} S(b_id_j)a_ic_j = 1_H$. Assim, $uv = 1_H$.

Portanto, u é invertível e $S^2(h) = uhu^{-1}, \quad \forall h \in H$.

Por último, vamos mostrar que $S^2(h) = (S(u))^{-1}h(S(u))$. Para isto, aplicaremos S na expressão $S^2(h) = uhu^{-1}$ e, como S é bijetora, trocaremos $S(h)$ por h, como segue:

$$S(S^2(h)) = S(uhu^{-1})$$

$$S^2(S(h)) = S(u^{-1})S(h)S(u)$$

$$S^2(h) = (S(u))^{-1}h(S(u)).$$

Logo, $uS(u)$ é elemento do centro de H, pois u e $S(u)$ são invertíveis. $\square$

3.2 Álgebras de Hopf quasitriangulares

Nesta seção vamos definir uma álgebra de Hopf quasitriangular, que é um caso particular de álgebra de Hopf quase cocomutativa, além de dar exemplos e propriedades importantes da antípoda dessas álgebras de Hopf.

Definição 3.2.1. *Uma álgebra de Hopf H é* quasitriangular (QT) *se H é quase cocomutativa, via $R = \sum_i a_i \otimes b_i \in H \otimes H$, e cumpre as seguintes igualdades:*

$$(\Delta \otimes id_H)R = R^{13}R^{23} \tag{3.1}$$

$$(id_H \otimes \Delta)R = R^{13}R^{12}, \tag{3.2}$$

onde $R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1_H$, $R^{13} = \sum_i a_i \otimes 1_H \otimes b_i$ e $R^{23} = \sum_i 1_H \otimes a_i \otimes b_i$.

Na notação de somatório, as equações (3.1) e (3.2) equivalem a:

$$\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j \quad \text{e}$$

$$\sum_i a_i \otimes b_{i1} \otimes b_{i2} = \sum_{i,j} a_i a_j \otimes b_j \otimes b_i,$$

respectivamente.

Definição 3.2.2. *Uma álgebra de Hopf H será chamada de* triangular *se, além de ser quasitriangular, $R^{-1} = \tau(R)$.*

Exemplo 3.2.3. *Se H é uma álgebra de Hopf quasitriangular via R, então H^{cop} é quasitriangular via $B = \tau(R)$.*

Pelo Exemplo 3.1.3 *temos que H^{cop} é quase cocomutativa, falta verificar as igualdades* 3.1 *e* 3.2 da Definição 3.2.1.

Temos, então:

$$\begin{aligned}
(\Delta' \otimes id_{H^{cop}})(B) &= \sum_i b_{i2} \otimes b_{i1} \otimes a_i \\
&= \sum_i \tau(\Delta(b_i)) \otimes a_i \\
&= \sum_i \tau(a_i \otimes \tau(\Delta(b_i))) \\
&= \sum_i (\tau \circ (id_H \otimes \tau))(a_i \otimes \Delta(b_i)) \\
&= (\tau \circ ((id_H \otimes \tau))(id_H \otimes \Delta))(R) \\
&= \tau \circ (id_H \otimes \tau) R^{13} R^{23} \\
&= \sum_{i,j} b_i \otimes b_j \otimes a_i a_j \\
&= B^{13} B^{23}.
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos que $(id_{H^{cop}} \otimes \Delta')B = B^{13}B^{12}$.

Portanto H^{cop} *é quasitriangular.*

Exemplo 3.2.4. *A álgebra de Sweedler* H_4 *é quasitriangular com* $R = R_\alpha$ *dado no* Exemplo 3.1.4.

De fato, basta verificar as igualdades 3.1 e 3.2 da Definição 3.2.1.

Lembrando que em H_4 *temos as relações:* $g^2 = 1$, $x^2 = 0$, $xg = -gx$, $\Delta(g) = g \otimes g$ *e* $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, *vamos verificar a primeira condição.*

Por um lado temos:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id_{H_4})(R_\alpha) &= \frac{1}{2}(\Delta \otimes id_{H_4})(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g) \\
&+ \frac{\alpha}{2}(\Delta \otimes id_{H_4})(x \otimes x - x \otimes gx + gx \otimes x + gx \otimes gx)) \\
&= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g) \\
&+ \frac{\alpha}{2}((x \otimes 1 + g \otimes x) \otimes x - (x \otimes 1 + g \otimes x) \otimes gx \\
&+ (g \otimes g)(x \otimes 1 + g \otimes x) \otimes x + (g \otimes g)(x \otimes 1 + g \otimes x) \otimes gx)).
\end{aligned}$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id_{H_4})(R_\alpha) &= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g) \\ &+ \frac{\alpha}{2}(x \otimes 1 \otimes x + g \otimes x \otimes x - x \otimes 1 \otimes gx - g \otimes x \otimes gx \\ &+ gx \otimes g \otimes x + g^2 \otimes gx \otimes x + gx \otimes g \otimes gx + g^2 \otimes gx \otimes gx) \\ &= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g) \\ &+ \frac{\alpha}{2}(x \otimes 1 \otimes x + g \otimes x \otimes x - x \otimes 1 \otimes gx - g \otimes x \otimes gx \\ &+ gx \otimes g \otimes x + 1 \otimes gx \otimes x + gx \otimes g \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes gx).\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular $R_\alpha^{13} R_\alpha^{23}$. Note que temos:

$$\begin{aligned}R_\alpha^{13} &= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + g \otimes 1 \otimes 1 - g \otimes 1 \otimes g) \\ &+ \frac{\alpha}{2}(x \otimes 1 \otimes x - x \otimes 1 \otimes gx + gx \otimes 1 \otimes x + gx \otimes 1 \otimes gx)),\end{aligned}$$

e temos ainda:

$$\begin{aligned}R_\alpha^{23} &= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g) \\ &+ \frac{\alpha}{2}(1 \otimes x \otimes x - 1 \otimes x \otimes gx + 1 \otimes gx \otimes x + 1 \otimes gx \otimes gx)).\end{aligned}$$

Fazendo a multiplicação das duas equações, temos que:

$$R_\alpha^{13} R_\alpha^{23} = A + B + C,$$

onde os termos A, B e C são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{4}(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes 1 - 1 \otimes g \otimes g + 1 \otimes 1 \otimes g \\ &+ 1 \otimes 1 \otimes g^2 + 1 \otimes g \otimes g - 1 \otimes g \otimes g^2 + g \otimes 1 \otimes 1 + g \otimes 1 \otimes g \\ &+ g \otimes g \otimes 1 - g \otimes g \otimes g - g \otimes 1 \otimes g - g \otimes 1 \otimes g^2 - g \otimes g \otimes g + g \otimes g \otimes g^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\alpha}{4}(1\otimes x\otimes x - 1\otimes x\otimes gx + 1\otimes gx\otimes x + 1\otimes gx\otimes gx + 1\otimes x\otimes gx \\
&- 1\otimes x\otimes g^2x + 1\otimes gx\otimes gx + 1\otimes gx\otimes g^2x + g\otimes x\otimes x - g\otimes x\otimes gx \\
&+ g\otimes gx\otimes x + g\otimes gx\otimes gx - g\otimes x\otimes gx + g\otimes x\otimes g^2x - g\otimes gx\otimes gx \\
&- g\otimes gx\otimes g^2x + x\otimes 1\otimes x + x\otimes 1\otimes xg + x\otimes g\otimes x - x\otimes g\otimes xg \\
&- x\otimes 1\otimes gx - x\otimes 1\otimes gxg - x\otimes g\otimes gx + x\otimes g\otimes gxg + gx\otimes 1\otimes x \\
&+ gx\otimes 1\otimes xg + gx\otimes g\otimes x - gx\otimes g\otimes xg + gx\otimes 1\otimes gx + gx\otimes 1\otimes gxg \\
&+ gx\otimes g\otimes gx - gx\otimes g\otimes gxg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\alpha^2}{4}(x\otimes x\otimes x^2 - x\otimes x\otimes xgx + x\otimes gx\otimes x^2 + x\otimes gx\otimes xgx - x\otimes x\otimes gx^2 \\
&+ x\otimes x\otimes gxgx - x\otimes gx\otimes gx^2 - x\otimes gx\otimes gxgx + gx\otimes x\otimes x^2 \\
&- gx\otimes x\otimes xgx + gx\otimes gx\otimes x^2 + gx\otimes gx\otimes xgx + gx\otimes x\otimes gx^2 \\
&- gx\otimes x\otimes gxgx + gx\otimes g\otimes gx^2 + gx\otimes gx\otimes gxgx).
\end{aligned}$$

Substituindo as relações $g^2 = 1, x^2 = 0$, $xg = -gx$ *e simplificando as equações temos que:*

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}(2(1\otimes 1\otimes 1) + 2(1\otimes 1\otimes g) + 2(g\otimes g\otimes 1) - 2(g\otimes g\otimes g)) \\
&= \frac{1}{2}(1\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes g + g\otimes g\otimes 1 - g\otimes g\otimes g),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\alpha}{4}(2(x\otimes 1\otimes x) + 2(g\otimes x\otimes x) - 2(x\otimes 1\otimes gx) - 2(g\otimes x\otimes gx) \\
&+ 2(gx\otimes g\otimes x) + 2(1\otimes gx\otimes x) + 2(gx\otimes g\otimes gx) + 2(1\otimes gx\otimes gx)) \\
&= \frac{\alpha}{2}(x\otimes 1\otimes x + g\otimes x\otimes x - x\otimes 1\otimes gx - g\otimes x\otimes gx \\
&+ gx\otimes g\otimes x + 1\otimes gx\otimes x + gx\otimes g\otimes gx + 1\otimes gx\otimes gx),
\end{aligned}$$

e $C = 0$.

Logo, temos que $R_\alpha^{13}R_\alpha^{23} = A + B + C = (\Delta\otimes id_{H_4})(R_\alpha)$. *De forma análoga, verifica-se que* $(id_{H_4}\otimes\Delta)(R_\alpha) = R_\alpha^{13}R_\alpha^{12}$. *Portanto, temos que a álgebra de Sweedler* H_4 *é quasitriangular.*

Vejamos agora uma proposição com algumas propriedades de álgebras de Hopf quasitriangulares.

Proposição 3.2.5. *Se H é uma álgebra de Hopf quasitriangular via R, então valem as seguintes propriedades:*

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12} \tag{3.3}$$

$$(S \otimes id_H)R = R^{-1} = (id_H \otimes S^{-1})R, \quad e \quad (S \otimes S)R = R \tag{3.4}$$

$$(\varepsilon \otimes id_H)R = 1_H \otimes 1_H = (id_H \otimes \varepsilon)R \tag{3.5}$$

A equação (3.3) é conhecida como *equação quântica de Yang-Baxter (QYBE)* em mecânica estatística.

Demonstração. Inicialmente vamos provar a igualdade 3.3.

$$\begin{aligned}
R^{12}R^{13}R^{23} &= R^{12}(\Delta \otimes id_H)R \\
&= (\sum_j a_j \otimes b_j \otimes 1_H)(\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i) \\
&= \sum_{i,j} a_j a_{i1} \otimes b_j a_{i2} \otimes b_i \\
&= \sum_{i,j} (a_j \otimes b_j)\Delta(a_i) \otimes b_i \\
&= \sum_i R\Delta(a_i) \otimes b_i.
\end{aligned}$$

Como H é quasitriangular, em particular quase cocomutativa, temos que $\sum_i R\Delta(a_i) = \sum_i \tau(\Delta(a_i))R$. Logo,

$$\begin{aligned}
R^{12}R^{13}R^{23} &= \sum_i R\Delta(a_i) \otimes b_i \\
&= \sum_i \tau(\Delta(a_i))R \otimes b_i \\
&= \sum_{i,j} a_{i2}a_j \otimes a_{i1}b_j \otimes b_i \\
&= (\sum_i a_{i2} \otimes a_{i1} \otimes b_i)R^{12}.
\end{aligned}$$

Ainda, por H ser quasitriangular, temos que vale a equação (3.1), ou seja,

$$\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j.$$

Aplicando $\tau \otimes id_H$ nessa igualdade, temos que

$$\sum_i a_{i2} \otimes a_{i1} \otimes b_i = \sum_i a_j \otimes a_i \otimes b_i b_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\sum_i a_{i2} \otimes a_{i1} \otimes b_i)R^{12} &= (\sum_i a_j \otimes a_i \otimes b_i b_j)R^{12} \\
&= (\sum_i 1_H \otimes a_i \otimes b_i)(\sum_j a_j \otimes 1_H \otimes b_j) \\
&= R^{23}R^{13}R^{12}.
\end{aligned}$$

Logo $R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$.

Agora, provaremos a igualdade (3.5) para usá-la na prova da equação (3.4).

Por H ser quasitriangular temos que $(\Delta \otimes id_H)R = R^{13}R^{23}$, ou seja, $\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j$. Aplicando $\varepsilon \otimes id_H^2$, onde $id_H^2 = id_H \otimes id_H$, na equação, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{gathered}
\sum_i \varepsilon(a_{i1}) \otimes a_{i2} \otimes b_i = \sum_{i,j} \varepsilon(a_i) \otimes a_j \otimes b_i b_j \\
\sum_i 1_H \otimes \varepsilon(a_{i1}) a_{i2} \otimes b_i = \sum_{i,j} 1_H \otimes \varepsilon(a_i) a_j \otimes b_i b_j \\
\sum_i 1_H \otimes a_i \otimes b_i = \sum_{i,j} 1_H \otimes (\varepsilon(a_i) \otimes b_i)(a_j \otimes b_j)
\end{gathered}$$

Assim, $1_H \otimes R = 1_H \otimes (\varepsilon(a_i) \otimes b_i)R$. Logo, $(\varepsilon(a_i) \otimes b_i) = 1_H \otimes 1_H$, ou seja, $(\varepsilon \otimes id_H)R = 1_H \otimes 1_H$.

De forma análoga, aplicando $id_H^2 \otimes \varepsilon$ na igualdade 3.2 temos que $(id_H \otimes \varepsilon)R = 1_H \otimes 1_H$.

Para finalizar, provaremos que $(S \otimes id_H)R = R^{-1} = (id_H \otimes S^{-1})R$.

Por um lado, temos:

$$\begin{aligned}
R(S \otimes id_H)R &= R(S \otimes id_H)(\sum_i a_i \otimes b_i) \\
&= R(\sum_i S(a_i) \otimes b_i) \\
&= (\sum_j a_j \otimes b_j)(\sum_i S(a_i) \otimes b_i) \\
&= \sum_{i,j} a_j S(a_i) \otimes b_j b_i \\
&= (m \otimes id_H)(\sum_{i,j} a_j \otimes S(a_i) \otimes b_j b_i) \\
&= (m \otimes id_H)(id_H \otimes S \otimes id_H)(\sum_{i,j} a_j \otimes a_i \otimes b_j b_i).
\end{aligned}$$

Note que $\sum_{i,j} a_j \otimes a_i \otimes b_j b_i = R^{13}R^{23} = (\Delta \otimes id_H)R$. Assim,

$$\begin{aligned}
R(S \otimes id_H)R &= (m \otimes id_H)(id_H \otimes S \otimes id_H)(\Delta \otimes id_H)R \\
&= (m \otimes id_H)(id_H \otimes S \otimes id_H)(\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i) \\
&= (m \otimes id_H)(\sum_i a_{i1} \otimes S(a_{i2}) \otimes b_i) \\
&= \sum_i a_{i1} S(a_{i2}) \otimes b_i \\
&= \sum_i \varepsilon(a_i) \otimes b_i \\
&= (\varepsilon \otimes id_H)R \\
&= 1_H \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Logo, $(S \otimes id_H)R = R^{-1}$.

Para provar o outro lado da igualdade, usaremos o fato de H^{cop} ser uma álgebra de Hopf quasitriangular com antípoda S^{-1}, via $B = \tau(R)$. Assim, temos que:

$$(S^{-1} \otimes id_{H^{cop}})(B) = B^{-1},$$

ou seja,

$$B(S^{-1} \otimes id_{H^{cop}})(B) = 1_{H^{cop}} \otimes 1_{H^{cop}} = 1_H \otimes 1_H.$$

Aplicando τ em ambos os lado desta equação, temos as igualdades:

$$\begin{aligned}
&\tau(B(S^{-1} \otimes id_{H^{cop}})(B)) = \tau(1_H \otimes 1_H)\\
&\tau(\sum_{i,j} b_i S^{-1}(b_j) \otimes a_i a_j) = 1_H \otimes 1_H\\
&\sum_{i,j} a_i a_j \otimes b_i S^{-1}(b_j) = 1_H \otimes 1_H\\
&R(id_H \otimes S^{-1})(R) = 1_H \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Logo, $(id_H \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$.

Para concluir a demonstração da proposição, falta mostrar que $(S \otimes S)(R) = R$.

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
(S \otimes S)(R) &= (id_H \otimes S)(S \otimes id_H)(R)\\
&= (id_H \otimes S)(R^{-1})\\
&= R
\end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que $(id_H \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$. Aplicando $id_H \otimes S$ de ambos os lados da equação, seguem as igualdades:

$$\begin{aligned}
&(id_H \otimes S)(id_H \otimes S^{-1})(R) = (id_H \otimes S)(R^{-1})\\
&(id_H \otimes (S \circ S^{-1}))(R) = (id_H \otimes S)(R^{-1})\\
&(id_H \otimes id_H)(R) = (id_H \otimes S)(R^{-1})\\
&R = (id_H \otimes S)(R^{-1}).
\end{aligned}$$

$\square$

Para álgebras de Hopf quasitriangulares temos uma propriedade muito forte para a antípoda. Essa propriedade é dada pelo próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [3] e [5], e é este que encerra nosso trabalho.

Teorema 3.2.6. *Se H é uma álgebra de Hopf quasitriangular via R, então $\forall h \in H$ temos*

$$S^4(h) = ghg^{-1},$$

onde $g = u(S(u))^{-1}$ é um elemento grouplike de H.

Demonstração. Vamos mostrar que g é um elemento grouplike de H, ou seja, $\Delta(g) = g \otimes g$. Para isso, primeiro mostraremos alguns itens que serão usados na prova.

Mostraremos inicialmente que para $u = \sum_i S(b_i)a_i$, temos:

$$\Delta(u) = (BR)^{-1}(u \otimes u) = (u \otimes u)(BR)^{-1} \tag{3.6}$$

onde $B = \tau(R)$.

Pelo fato de H e H^{cop} serem álgebras de Hopf quasitriangulares, temos que:

$$\tau(\Delta(u))R = R\Delta(u) \quad \text{e} \quad \tau(\Delta'(u))B = B\Delta'(u),$$

onde $\Delta' = \tau \circ \Delta$. Assim, $\tau(\Delta'(u))BR = B\Delta'(u)R$.

Desenvolvendo o lado esquerdo dessa igualdade, temos:

$$\begin{aligned} \tau(\Delta'(u))BR &= \tau((\tau \circ \Delta(u)))BR \\ &= \Delta(u)BR. \end{aligned}$$

Pelo lado direito da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} B\Delta'(u)R &= B\tau(\Delta(u))R \\ &= BR\Delta(u). \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\Delta(u)BR = BR\Delta(u), \tag{3.7}$$

então é suficiente mostrar que $\Delta(u)BR = u \otimes u$.

Para $u = \sum_i S(b_i)a_i$, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta(u) &= \Delta(\sum_i S(b_i)a_i) \\
&= \sum_i \Delta(S(b_i))\Delta(a_i) \\
&= \sum_i (S(b_{i2}) \otimes S(b_{i1}))\Delta(a_i) \\
&= \sum_i ((S \otimes S)(\Delta'(b_i))\Delta(a_i).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta(u)BR &= \sum_i ((S \otimes S)(\Delta'(b_i))\Delta(a_i)BR \\
&= \sum_i ((S \otimes S)(\Delta'(b_i))BR\Delta(a_i) \quad \text{(por 3.7)}.
\end{aligned}$$

Considere agora $H \otimes H = H^{\otimes 2}$ como um $H^{\otimes 4}$-módulo definindo a ação:

$$(h \otimes k) \bullet (x \otimes y \otimes z \otimes w) = S(z)hx \otimes S(w)ky, \quad \forall h, k, x, y, z, w \in H.$$

Denotaremos por $R'^{kl} \in H^{\otimes 4}, k, l = \{1, 2, 3, 4\}$, o produto tensorial de 4 elementos que possui a_i na posição k, b_i na posição l e os elementos das demais posições são 1_H.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta(u)BR &= \sum_i ((S \otimes S)(\Delta'(b_i))BR\Delta(a_i) \\
&= \sum_i ((S \otimes S)(b_{i2} \otimes b_{i1}))(\sum_{j,k} b_k a_j \otimes a_k b_j)(\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2}) \\
&= \sum_{i,j,k} S(b_{i2})b_k a_j a_{i1} \otimes S(b_{i1})a_k b_j a_{i2}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{i,j,k} S(b_{i2})b_k a_j a_{i1} \otimes S(b_{i1})a_k b_j a_{i2} = (\sum_k b_k \otimes a_k) \bullet (\sum_{i,j} a_j a_{i1} \otimes b_j a_{i2} \otimes b_{i2} \otimes b_{i1}).$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned}
\Delta(u)BR &= B \bullet ((\sum_j a_j \otimes b_j \otimes 1_H \otimes 1_H)(\sum_i \Delta(a_i) \otimes \Delta'(b_i))) \\
&= B \bullet (R'^{12}(\Delta \otimes \Delta')(\sum_i a_i \otimes b_i)) \\
&= B \bullet (R'^{12}(\Delta \otimes \Delta')(R)).
\end{aligned}$$

Note que $(\Delta \otimes \Delta')(R) = (\Delta \otimes id_H^2)(id_H \otimes \Delta')(R)$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
R'^{12}(\Delta \otimes \Delta')(R) &= R'^{12}(\Delta \otimes id_H^2)(id_H \otimes \Delta')(R) \\
&= R'^{12}(\Delta \otimes id_H^2)(id_H \otimes \tau)(id_H \otimes \Delta)(R) \\
&= R'^{12}(\Delta \otimes id_H^2)(id_H \otimes \tau)R^{13}R^{12} \\
&= R'^{12}(\Delta \otimes id_H^2)(id_H \otimes \tau)(\sum_{i,j} a_i a_j \otimes b_j \otimes b_i) \\
&= R'^{12}(\Delta \otimes id_H^2)(\sum_{i,j} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j) \\
&= R'^{12}(\sum_{i,j} \Delta(a_i a_j) \otimes b_i \otimes b_j) \\
&= R'^{12}(\sum_{i,j} a_{i1} a_{j1} \otimes a_{i2} a_{j2} \otimes b_i \otimes b_j) \\
&= R'^{12}(\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i \otimes 1_H)(\sum_j a_{j1} \otimes a_{j2} \otimes 1_H \otimes b_j).
\end{aligned}$$

Mas, temos que:

$$\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i = (\Delta \otimes id_H)(R) = R^{13}R^{23} = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j,$$

pois H é quasitriangular. Assim,

$$\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i \otimes 1_H = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j \otimes 1_H \quad \text{e}$$

$$\sum_j a_{j1} \otimes a_{j2} \otimes 1_H \otimes b_j = \sum_{k,l} a_k \otimes a_l \otimes 1_H \otimes b_k b_l.$$

Então, usando essas igualdades, temos que:

$$\begin{aligned}
R'^{12}(\Delta \otimes \Delta')(R) &= R'^{12}(\sum_i a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes b_i \otimes 1_H)(\sum_j a_{j1} \otimes a_{j2} \otimes 1_H \otimes b_j) \\
&= R'^{12}(\sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j \otimes 1_H)(\sum_{k,l} a_k \otimes a_l \otimes 1_H \otimes b_k b_l) \\
&= R'^{12} R'^{13} R'^{23} R'^{14} R'^{24} \\
&= R'^{23} R'^{13} R'^{12} R'^{14} R'^{24}.
\end{aligned}$$

A última igualdade segue da equação (3.3) da *Proposição 3.2.5*.

Assim,

$$\Delta(u)BR = B \bullet (R'^{23} R'^{13} R'^{12} R'^{14} R'^{24}).$$

Temos tambéms que:

$$\begin{aligned}
B \bullet R'^{23} &= (\sum_i b_i \otimes a_i) \bullet (\sum_j 1_H \otimes a_j \otimes b_j \otimes 1_H) \\
&= \sum_{i,j} S(b_j) b_i \otimes S(1_H) a_i a_j \\
&= \sum_{i,j} S(b_j) b_i \otimes a_i a_j \\
&= (S \otimes id_H)(\sum_{i,j} S^{-1}(b_i) b_j \otimes a_i a_j) \\
&= (S \otimes id_H)(\sum_i S^{-1}(b_i) \otimes a_i)(\sum_j b_j \otimes a_j).
\end{aligned}$$

Pela *Proposição 3.2.5*, temos que $R^{-1} = (id_H \otimes S^{-1})(R) = \sum_i a_i \otimes S^{-1}(b_i)$. Temos ainda que se $R^{-1}R = 1_H \otimes 1_H$, então $\tau(R^{-1}R) = 1_H \otimes 1_H$. Assim, segue que:

$$
\begin{aligned}
B \bullet R'^{23} &= (S \otimes id_H)(\sum_i S^{-1}(b_i) \otimes a_i)(\sum_j b_j \otimes a_j) \\
&= (S \otimes id_H)(\tau(R^{-1})\tau(R)) \\
&= (S \otimes id_H)(\tau(R^{-1}R)) \\
&= (S \otimes id_H)(1_H \otimes 1_H) \\
&= 1_H \otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

Logo, temos que:

$$
\begin{aligned}
B \bullet (R'^{23}R'^{13}) &= (B \bullet R'^{23}) \bullet R'^{13} \\
&= (1_H \otimes 1_H) \bullet R'^{13} \\
&= (1_H \otimes 1_H) \bullet (\sum_i a_i \otimes 1_H \otimes b_i \otimes 1_H) \\
&= \sum_i S(b_i)a_i \otimes 1_H \\
&= u \otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

Ainda temos:

$$
\begin{aligned}
B \bullet (R'^{23}R'^{13}R'^{12}R'^{14}) &= (u \otimes 1_H) \bullet (R'^{12}R'^{14}) \\
&= (u \otimes 1_H) \bullet ((\sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1_H \otimes 1_H)(\sum_j a_j \otimes 1_H \otimes 1_H \otimes b_j)) \\
&= (u \otimes 1_H) \bullet (\sum_{i,j} a_i a_j \otimes b_i \otimes 1_H \otimes b_j) \\
&= \sum_{i,j} S(1_H)ua_i a_j \otimes S(b_j)1_H b_i \\
&= \sum_{i,j} ua_i a_i \otimes S(b_j)b_i.
\end{aligned}
$$

Note que, pela *Proposição 3.2.5*, temos que $(id_H \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$, ou seja, $(id_H \otimes S^{-1})(R)R = 1_H \otimes 1_H$. Assim,

$$
(\sum_i a_i \otimes S^{-1}(b_i))(\sum_j a_j \otimes b_j) = 1_H \otimes 1_H,
$$

ou seja,

$$\sum_{i,j} a_i a_j \otimes S^{-1}(b_i) b_j = 1_H \otimes 1_H.$$

Aplicando $id_H \otimes S$ na última igualdade, temos que:

$$\sum_{i,j} a_i a_j \otimes S(b_j) b_i = 1_H \otimes 1_H.$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
B \bullet (R'^{23} R'^{13} R'^{12} R'^{14}) &= \sum_{i,j} u a_i a_i \otimes S(b_j) b_i \\
&= (u \otimes 1_H)(\sum_{i,j} a_i a_i \otimes S(b_j) b_i) \\
&= (u \otimes 1_H)(1_H \otimes 1_H) \\
&= (u \otimes 1_H).
\end{aligned}$$

Finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
B \bullet (R'^{23} R'^{13} R'^{12} R'^{14} R'^{24}) &= (u \otimes 1_H) \bullet R'^{24} \\
&= (u \otimes 1_H) \bullet (\sum_i 1_H \otimes a_i \otimes 1_H \otimes b_i) \\
&= \sum_i S(1_H) u 1_H \otimes S(b_i) 1_H a_i \\
&= \sum_i u \otimes S(b_i) a_i \\
&= (u \otimes 1_H)(1_H \otimes \sum_i S(b_i) a_i) \\
&= (u \otimes 1_H)(1_H \otimes u) \\
&= u \otimes u.
\end{aligned}$$

Logo, $\Delta(u) BR = u \otimes u$.

Agora, vamos mostrar que $\Delta(S(u)) = (S(u) \otimes S(u))(BR)^{-1}$.

Note que $(RB)^{-1} = B^{-1}R^{-1}$ e $(BR)^{-1} = R^{-1}B^{-1}$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta(S(u)) &= S(u)_1 \otimes S(u)_2 \\
&= S(u_2) \otimes S(u_1) \\
&= (S \otimes S)(\tau(\Delta(u))) \\
&= (S \otimes S)(\tau((BR)^{-1}(u \otimes u)) \\
&= (S \otimes S)(\tau((BR)^{-1})\tau(u \otimes u)) \\
&= (S \otimes S)(\tau(R^{-1}B^{-1})(u \otimes u)) \\
&= (S \otimes S)((RB)^{-1}(u \otimes u)) \\
&= (S \otimes S)(u \otimes u)(S \otimes S)((RB)^{-1}) \\
&= (S(u) \otimes S(u))(S \otimes S)((RB)^{-1}).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $(S \otimes S)((RB)^{-1}) = (BR)^{-1}$ e, então, temos o resultado desejado.

Lembremos que, pela *Proposição 3.2.5*,

$$B^{-1} = (S^{-1} \otimes id_H)(B) \quad \text{e} \quad R^{-1} = (id_H \otimes S^{-1})(R),$$

ou seja,

$$B^{-1} = \sum_j S^{-1}(b_j) \otimes a_j \quad \text{e} \quad R^{-1} = \sum_i a_i \otimes S^{-1}(b_i).$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
(BR)^{-1} &= R^{-1}B^{-1} \\
&= (S \otimes id_H)(R)(id_H \otimes (S^{-1})^{-1})(B) \\
&= (\sum_i S(a_i) \otimes b_i)(\sum_j b_j \otimes S(a_j)) \\
&= \sum_{i,j} S(a_i)b_j \otimes b_i S(a_j).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
(S \otimes S)((RB)^{-1}) &= (S \otimes S)(B^{-1}R^{-1}) \\
&= (S \otimes S)((\sum_j S^{-1}(b_j) \otimes a_j)(\sum_i a_i \otimes S^{-1}(b_i))) \\
&= (S \otimes S)(\sum_{i,j} S^{-1}(b_j)a_i \otimes a_j S^{-1}(b_i)) \\
&= \sum_{i,j} S(S^{-1}(b_j)a_i) \otimes S(a_j S^{-1}(b_i)) \\
&= \sum_{i,j} S(a_i)b_j \otimes b_i S(a_j).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(S(u)) = (S(u) \otimes S(u))(BR)^{-1}$.

Agora, usando o que foi provado, vamos mostrar que $\Delta(g) = g \otimes g$, onde $g = u(S(u))^{-1}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= \Delta(u(S(u))^{-1}) \\
&= \Delta(u)\Delta((S(u))^{-1}) \\
&= (u \otimes u)(BR)^{-1}\Delta(S(u))^{-1} \\
&= (u \otimes u)(BR)^{-1}((S(u) \otimes S(u))(BR)^{-1})^{-1} \\
&= (u \otimes u)(BR)^{-1}(BR)(S(u) \otimes S(u))^{-1} \\
&= (u \otimes u)((S(u))^{-1} \otimes (S(u))^{-1}) \\
&= u(S(u))^{-1} \otimes u(S(u))^{-1} \\
&= g \otimes g.
\end{aligned}$$

Portanto, g é um elemento grouplike.

Para terminar a prova do teorema falta mostrar que $S^4(h) = ghg^{-1}$. Para isso, vamos relembrar algumas propriedades.

Defina $z = uS(u) = S(u)u$. Note que como g é grouplike, então:

$$S(g) = g^{-1}. \tag{3.8}$$

Pela *Proposição 3.1.6*, temos que:

$$S^2(h) = uhu^{-1} = (S(u))^{-1}h(S(u)), \tag{3.9}$$

de onde segue que, para $v = u^{-1}$, temos:

$$S^2(v)u = 1_H. \tag{3.10}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
g^{-1}S^4(h) &= S(g)S^2(S^2(h)), \quad \text{(por 3.8)} \\
&= S(g)S^2(uhu^{-1}), \quad \text{(por 3.9)} \\
&= S(u(S(u))^{-1})S^2(u)S^2(h)S^2(u^{-1}) \\
&= S(S(u)u(S(u))^{-1})S^2(h)S^2(u^{-1}) \\
&= S(z(S(u))^{-1})S^2(h)S^2(v) \\
&= S(u)(S(u))^{-1}h(S(u))S^2(v), \quad \text{(por 3.9)} \\
&= h(S(u))u^{-1}, \quad \text{(por 3.10)} \\
&= hg^{-1}.
\end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de que $g = u(S(u))^{-1}$, assim $g^{-1} = (u(S(u))^{-1}) = (S(u))u^{-1}$.

Portanto, $S^4(h) = ghg^{-1}$ e, assim, terminamos a demonstração do teorema.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge University Press 74, cambridge, 2004.

[2] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu e Ş. Raianu, *Hopf Algebras: An Introduction*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 235, Marcel Dekker, 2001.

[3] V. Drinfeld, *Almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Mathematical Journal 1: 321-342, 1990.

[4] V. Drinfeld, *Quantum Groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians: 798-820, 1987.

[5] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 82, Providence, 1993.

[6] D. Radford, *On the antipode of a quasitriangular Hopf algebra*, Journal of Algebra 151: 1-11, 1992.

[7] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.