Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Cadernos de Matemática e Estatística
Série B: Trabalho de Apoio Didático

Números Índices

Dinara W. Xavier Fernandez

Série B, nº 11,
Porto Alegre, outubro de 1992

APRESENTAÇÃO

NÚMEROS ÍNDICES faz parte dos conteúdos trabalhados na disciplina Estatística Descritiva do curso de Bacharelado em Estatística da UFRGS. Por tratar-se de um assunto simples , de grande atualidade e aplicação prática, os alunos tem manifestado crescente interesse , o que nos motivou a organizar esse material.

Agradecemos ao Prof. Nelson Emilio Michel que colaborou conosco transmitindo sua experiência nessa área.

A autora.

NÚMEROS ÍNDICES

NÚMEROS ÍNDICES

Número índice é um relativo percentual pelo qual uma medida num dado período é expressa por meio de uma razão com a medida num período-base fixado. As medidas podem se referir a quantidade, preço ou valor, bem como variáveis de natureza não econômica tais como mortalidade, nascimentos, etc. A comparação a ser estabelecida não é necessariamente em relação ao tempo, podendo ser entre regiões de um mesmo país, cidades ou ainda entre categorias.

Inicialmente, os números índices de preços foram utilizados para medir a desvalorização da moeda. Posteriormente, ampliou-se o uso de números índices para custo de produção, emprego, salários, custo de vida, etc, assim como para medir as diferenças nos níveis de produção, consumo ou venda dos volumes físicos (índices de quantidade).

Os números índices podem ser simples (índice relativo simples) ou compostos (índice agregado).

1. ÍNDICE RELATIVO SIMPLES

1.1. ÍNDICE RELATIVO SIMPLES DE BASE FIXA

Este índice visa acompanhar a evolução do preço (quantidade ou valor) de um determinado produto. É uma relação percentual entre o preço de um produto num determinado período com o preço do mesmo produto num período escolhido como base. É a matéria prima para os números índices.

Seja t_o, t_1, ..., t_t o conjunto dos valores da unidade de tempo(igualmente espaçado) e x_o, x_1,..., x_t os valores de uma mesma variável observados para cada unidade de tempo. Assim:

Tempo	Valores da variável
t_0	x_0
t_1	x_1
$\vdots$	$\vdots$
t_t	x_t

Definimos relativo simples da época t em relação à época zero por

$$R_{0,t} = \frac{x_t}{x_0} \times 100$$

Desta forma, a época zero, escolhida por conveniência, foi tomada como BASE; então:

$$R_{0,0} = \frac{x_0}{x_0} \times 100 = 100$$

Isto é, atribui-se ao valor da série escolhido como BASE o valor 100.

EXEMPLO 1:

1-Determinar os relativos simples de preços para NOV/91 e OUT/91 dos tres produtos, usando DEZ/90 como mes-base:

Produto	U.M.	Preço médio $p_0=0$	$p_1=1$	$p_2=2$	Consumo per capta (mensal)		
		DEZ/90	OUT/91	NOV/91	DEZ/90	OUT/91	NOV/91
Leite natural Tipo C	ℓl	54,47	197,00	265,00	35	30	28
Pão frances d'água	500g	68,64	255,40	358,13	3,7	3,8	4,0
Ovos de granja	dz	84,81	430,05	454,40	1,0	1,5	1,6

Fonte: Preços/IEPE-UFRGS; Consumo/Fictícios.

Para o leite:

$$R^{p}_{0,1} = \frac{p_1}{p_0} \times 100 = \frac{197,00}{54,47} \times 100 = 361,67$$

$$R^{p}_{0,2} = \frac{p_2}{p_0} \times 100 = \frac{265,00}{54,47} \times 100 = 486,51$$

O relativo de 361,67 para OUT/91 indica que o preço do leite aumentou 261,67% relativamente a DEZ/90.

Para o pão:

$$R^{p}_{0,1} = \frac{p_1}{p_0} \times 100 = \frac{255,40}{68,64} \times 100 = 372,09$$

$$R^{p}_{0,2} = \frac{p_2}{p_0} \times 100 = \frac{358,13}{68,64} \times 100 = 521,75$$

Para os ovos:

$$R^{p}_{0,1} = \frac{p_1}{p_0} \times 100 = \frac{430,05}{84,81} \times 100 = 507,07$$

$$R^{p}_{0,2} = \frac{p_2}{p_0} \times 100 = \frac{454,40}{84,81} \times 100 = 535,79$$

Resumindo:

Relativos simples de preços

Produto	DEZ/90	OUT/91	NOV/91
Leite	100	361,67	486,51
Pão	100	372,09	521,75
Ovos	100	507,07	535,79

2-Determinar os relativos simples de quantidades para NOV/91 e OUT/91 dos tres produtos, usando DEZ/90 como mes-base.

Para o leite:

$$R^{q}_{0,1} = \frac{q_1}{q_0} \times 100 = \frac{30}{35} \times 100 = 85,71$$

$$R^{q}_{0,2} = \frac{q_2}{q_0} \times 100 = \frac{28}{35} \times 100 = 80,00$$

Para o pão:

$$R^{q}_{0,1} = \frac{q_1}{q_0} \times 100 = \frac{3,8}{3,7} \times 100 = 102,70$$

$$R^{q}_{0,2} = \frac{q_2}{q_0} \times 100 = \frac{4,0}{3,7} \times 100 = 108,11$$

Para os ovos:

$$R^{q}_{0,1} = \frac{q_1}{q_0} \times 100 = \frac{1,5}{1,0} \times 100 = 150,00$$

$$R^{q}_{0,2} = \frac{q_2}{q_0} \times 100 = \frac{1,6}{1,0} \times 100 = 160,00$$

Resumindo:

Relativos simples de quantidade

Produto	DEZ/90	OUT/91	NOV/91
Leite	100	87,71	80,00
Pão	100	102,70	108,11
Ovos	100	150,00	160,00

3-Determinar os relativos simples de valor para NOV/91 e OUT/91 dos tres produtos, usando DEZ/90 como mes-base.

Para o leite:

$$\overset{v}{R}_{0,1} = \frac{p_1\ q_1}{p_0\ q_0} \times 100 = \frac{(197)(30)}{(54,47)(35)} \times 100 = 310,00$$

$$\overset{v}{R}_{0,2} = \frac{p_2\ q_2}{p_0\ q_0} \times 100 = \frac{(265)(28)}{(54,47)(35)} \times 100 = 389,21$$

Para o pão:

$$\overset{v}{R}_{0,1} = \frac{p_1\ q_1}{p_0\ q_0} \times 100 = \frac{(255,4)(3,8)}{(68,64)(3,7)} \times 100 = 382,14$$

$$\overset{v}{R}_{0,2} = \frac{p_2\ q_2}{p_0\ q_0} \times 100 = \frac{(358,13)(4,0)}{(68,64)(3,7)} \times 100 = 564,06$$

Para os ovos:

$$\overset{v}{R}_{0,1} = \frac{p_1\ q_1}{p_0\ q_0} \times 100 = \frac{(430,05)(1,5)}{(84,81)(1,0)} \times 100 = 760,61$$

$$\overset{v}{R}_{0,2} = \frac{p_2\ q_2}{p_0\ q_0} \times 100 = \frac{(454,40)(1,6)}{(84,81)(1,0)} \times 100 = 857,26$$

Resumindo:

Relativos simples de valor

Produto	DEZ/90	OUT/91	NOV/91
Leite	100	310,00	389,21
Pão	100	382,14	564,06
Ovos	100	760,61	857,26

1.2. INDICE RELATIVO SIMPLES DE BASE MÓVEL OU RELATIVO EM CADEIA

São índices para os quais a base é sempre o período precedente. Representa uma comparação percentual com o período anterior. São úteis para fazer comparações ano a ano, mas não são convenientes para comparações a longo prazo. Assim:

$$R_{t-1,t} = \frac{x_t}{x_{t-1}} \times 100 = L_{t-1,t}$$

EXEMPLO 2: Vendas,em milhões de dólares, Ford Moto Company 1970-1975

Ano	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Vendas	14980	16433	20194	23015	23621	24009
Relativ os em cadeia	-	109,7	122,9	114,0	102,6	101,6

O relativo em cadeia de 102,6 para 1974 indica que as vendas em dólares para 1974 foram 2,6% mais elevadas do que as vendas em dólares no ano anterior, 1973.

1.3. CONVERSÃO DE RELATIVO EM CADEIA (BASE MÓVEL) PARA RELATIVO EM BASE FIXA

Dados os relativos em cadeia e escolhido o ano-base, a obtenção dos relativos de base fixa dependem de sua localização relativamente ao ano-base. Temos:

(a) Para cada ano **anterior** ao ano-base:

$$R_{o,t-1} = \frac{R_{o,t}}{R_{t-1,t}} \times 100$$

onde O é o ano-base;

$R_{o,t-1}$ é o relativo para o ano precedente ao ano para o qual o relativo $R_{o,t}$ é conhecido;

$R_{t-1,t}$ é o índice em cadeia para o último ano.

Temos:

$$R_{o,t-1} = \frac{R_{o,t}}{R_{t-1,t}} \times 100 = \frac{\dfrac{x_t}{x_o}}{\dfrac{x_t}{x_{t-1}}} \times 100 = \frac{x_{t-1}}{x_o} \times 100$$

EXEMPLO 3:

Calcular os relativos simples utilizando 1972 como ano-base a partir dos relativos em cadeia:

Ano	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Relativos em cadeia	-	109,7	122,9	114,0	102,6	101,6

0=ano-base= 1972

Para os anos de 1971 e 1970, que são anos anteriores ao ano-base (1972), temos:

$$t=1971 \therefore R_{72,71} = \frac{R_{72,72}}{R_{71,72}} \times 100 = \frac{100}{122,9} \times 100 = 81,4$$

$$t=1970 \therefore R_{72,70} = \frac{R_{72,71}}{R_{70,71}} \times 100 = \frac{81,4}{109,7} \times 100 = 74,2$$

(b) Para cada ano posterior ao ano-base:

$$R_{0,t} = \frac{R_{0,t-1}\ R_{t-1,t}}{100}$$

pois

$$R_{0,t} = \frac{R_{0,t-1}\ R_{t-1,t}}{100} = \frac{\frac{x_{t-1}}{x_0}\ \frac{x_t}{x_{t-1}}}{100} = \frac{x_t}{x_0} \times 100$$

Complementando o EXEMPLO 3,para os anos de 1973, 1974 e 1975, anos posteriores ano ano-base (1972), temos:

0=1972

$$t=1973 \therefore R_{72,73} = \frac{R_{72,72}\ R_{72,73}}{100} = \frac{100 \times 114}{100} = 114,0$$

$$t=1974 \therefore R_{72,74} = \frac{R_{72,73}\ R_{73,74}}{100} = \frac{114,0 \times 102,6}{100} = 117,0$$

$$t=1975 \therefore R_{72,75} = \frac{R_{72,74}\ R_{74,75}}{100} = \frac{117,0 \times 101,6}{100} = 118,9$$

Esta é uma aplicação da Propriedade Fundamental dos Relativos Simples:

$$R_{0,t} = \frac{R_{0,1}}{100} \times \frac{R_{1,2}}{100} \times \frac{R_{2,3}}{100} \times \dots \times \frac{R_{t-1,t}}{100} \times 100$$

1.4. MUDANÇA DE PERÍODO-BASE

Frequentemente muda-se a base de uma série de um número índice para um ano mais recente, de tal forma que comparações correntes possam ser mais significativas.

Utiliza-se:

$$R_{o',t} = \frac{R_{o,t}}{R_{o,o'}} \times 100$$

onde o'= novo ano-base; o = ano-base antigo;

$R_{o',t}$ é o índice alterado;

$R_{o,t}$ é o índice antigo e

$R_{o,o'}$ é o relativo antigo do novo ano-base, pois:

$$R_{o',t} = \frac{R_{o,t}}{R_{o,o'}} \times 100 = \frac{\dfrac{x_t}{x_o}}{\dfrac{x_{o'}}{x_o}} \times 100 = \frac{x_t}{x_{o'}} \times 100$$

EXEMPLO 4: Mudar a base dos relativos de 1972 para 1974.

O=1972 O'=1974

Ano	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Índice de 1972 (=100)	74,2	81,4	100,0	114,0	117,0	118,9
Índice de 1974 (=100)	63,4	69,6			100,0	

$$R_{74,70} = \frac{R_{72,70}}{R_{72,74}} \times 100 = \frac{74,2}{117,0} \times 100 = 63,4$$

$$R_{74,71} = \frac{R_{72,71}}{R_{72,74}} \times 100 = \frac{81,4}{117,0} \times 100 = 69,6$$

2. ÍNDICES AGREGADO DE PREÇOS

Esses índices podem ser simples ou ponderados.

2.1. ÍNDICE ARITMÉTICO SIMPLES

É a média aritmética dos relativos simples.

$$I_{o,t}^{AS} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{p_t^j}{p_o^j} \times 100$$

EXEMPLO 5: Considerando os dados do Exemplo 1, construa a índice aritmético simples para NOV/91 tendo por base DEZ/90.

O= DEZ/90 t=NOV/91

j=1,2,3 sendo j=1=leite; j=2=pão e j=3=ovos

$$I_{o,t}^{AS} = \frac{1}{3} (486,51 + 521,75 + 535,79) = 514,68$$

2.2. ÍNDICE AGREGATIVO SIMPLES

Este índice é uma relação percentual entre o somatório dos preços de um conjunto de bens em um determinado período ($\Sigma\ p_t^j$), comparada com o mesmo somatório num período escolhido como base ($\Sigma\ p_o^j$).

$$I_{o,t}^{AG} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_t^j}{\sum_{j=1}^{m} p_o^j} \times 100$$

onde j=1,...,m refere-se aos ítens.

EXEMPLO 6: Considerando os dados do EXEMPLO 1, construa o índice agregativo simples para NOV/91 tendo por base DEZ/90.

$$I_{o,t}^{AG} = \frac{(265,00)(358,13)(454,40)}{(54,40)(68,64)(84,81)} \times 100 = 518,42$$

Os índices simples apresentam o inconveniente de que, na sua determinação, todos os produtos são considerados como de igual importância. Os índices ponderados evitam esse incoveniente, permitindo que cada produto tenha uma influência adequada no índice de preços, de acordo com o valor consumido ou produzido. São geralmente ponderados segundo as quantidades q dos artigos pois se considerarmos apenas os preços dos artigos não levaríamos em conta o peso implícito de cada ítem.

Os índices ponderados consistem basicamente de médias ponderadas de índices relativos de preços. O valor total da mercadoria é o elemento de ponderação, ou seja, devemos considerar os valores totais no período básico ou em outros períodos. Os métodos de ponderação mais usados são:

2.3. ÍNDICE DE LASPEYRES

Esse índice adota uma base fixa de ponderação. Os preços dos produtos são ponderados pelas quantidades associadas com o período-base antes de serem somadas.

$$I^{L}_{o,t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p^{j}_{t}\, q^{j}_{o}}{\sum_{j=1}^{m} p^{j}_{o}\, q^{j}_{o}} \times 100$$

Desta forma, o índice de Laspeyres estabelece uma comparação entre os preços p^{m}_{t} e p^{m}_{o} ponderados pelas quantidades do ano-base q^{m}_{o}, isto é, compara os preços dos m produtos no ano t com os m produtos no ano O, admitindo que as quantidades consumidas permanecem as mesmas do ano O.

EXEMPLO 7: Calcular o índice de Laspeyres para NOV/91 e OUT/91 para os tres produtos, usando DEZ/90 como mes-base:

O=DEZ/90 1=OUT/91

$$I^{L}_{o,1} = \frac{(197)(35) + (255,4)(3,7) + (430,05)(1,0)}{(54,47)(35) + (68,64)(3,7) + (84,81)(1,0)} \times 100 = 357,01$$

O=DEZ/90 1=NOV/91

$$I^{L}_{o.1} = \frac{(265)(35) + (358,13)(3,7) + (454,40)(1,0)}{(54,47)(35) + (68,64)(3,7) + (84,81)(1,0)} \times 100 = 482,96$$

2.4. ÍNDICE DE PAASCHE

Este método adota uma base móvel de ponderação.Os fatores de ponderação dos índices relativos de preços são os valores dos produtos no período para o qual estamos calculando o índice, aos preços do período-base,isto é $p_o^m q_t^m$ para os diversos produtos. Isto é, no índice de Paasche são consideradas as quantidades do período-dado.

$$I_{o,t}^{P} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_t^j \, q_t^j}{\sum_{j=1}^{m} p_o^j \, q_t^j} \times 100$$

EXEMPLO 8:Calcular o índice de Paasche para NOV/91 e OUT/91, com os dados do EXEMPLO1, considerando DEZ/90 como mes-base.

0=DEZ/90 1=OUT/91

$$I_{o,1}^{P} = \frac{(197)(30) + (255,4)(3,8) + (430,05)(1,5)}{(54,47)(30) + (68,64)(3,8) + (84,81)(1,5)} \times 100 = 353,70$$

0=DEZ/90 1=NOV/91

$$I_{o.1}^{L} = \frac{(265)(28) + (358,13)(4,0) + (454,40)(1,6)}{(54,47)(28) + (68,64)(4,0) + (84,81)(1,6)} \times 100 = 480,54$$

Observação: Tanto o índice de Laspeyres como o índice de Paasche consistem em índices agregados ponderado de preços ou índice aritmético ponderado da époce t em relação à época 0.

$$I_{o,t}^{AP} = \frac{\sum \left(\frac{p_t^j}{p_o^j} \right) . w^j}{\sum w^j} \times 100$$

onde são as ponderações para cada produto.

Isto é, o relativo simples de preços para cada produto é ponderado pelo valor w^j que pode se referir ao período-base ou ao período-dado.

O índice ponderado que utiliza

$$w_o^j = \frac{p_o^j \, q_o^j}{\sum p_o^j \, q_o^j}$$

é equivalente ao Laspeyres. E se fizermos

$$w^j = \frac{p_o^j \, q_t^j}{\sum p_o^j \, q_t^j}$$

isto é, os valores do período-dado como ponderações, obteremos o índice de Paasche.

O índice de Laspeyres é mais utilizado na prática porque só o preço muda; a quantidade permanece inalterada.

2.5. ÍNDICE DE MARSHALL-EDGEWORTH

Utiliza como ponderação a média aritmética simples das quantidades do período-base e da época atual.

$$I^{ME}_{o,t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p^j_t \,(q^j_t + q^j_o)}{\sum_{j=1}^{m} p^j_o \,(q^j_t + q^j_o)} \times 100$$

EXEMPLO 9: Calcular o índice de Marshall-Edgeworth com os para NOV/91 com os dados do EXEMPLO 1, considerando DEZ/90 como mes-base:

$$I^{ME}_{o,t} = \frac{[265{,}00(28+35)+(358{,}3(4+3{,}7)\ +454{,}40(1{,}6+1{,}0)]}{[54{,}47(28+35)+(68{,}6(4+3{,}7)+\ 84{,}81(1{,}6+1{,}0)]} \times 100$$

$$= \frac{8538{,}21}{1771{,}72} \times 100 = 481{,}92$$

2.6. ÍNDICE IDEAL DE FISHER

É a média geométrica dos índices de preços de Laspeyres e de Paasche:

$$I^{IF}_{o,t} = \sqrt{I^{L}_{o,t} \cdot I^{P}_{o,t}}$$

EXEMPLO 10: Calcular o índice ideal de Fisher com os dados do EXEMPLO 1 para NOV/91 considerando DEZ/90 como mes-base:

$$I^{IF}_{o,t} = \sqrt{482{,}96 \times 480{,}54} = 481{,}75$$

3. CRITÉRIOS DE FISHER

Os critérios de Fisher pelos quais uma fórmula de número-índice deve passar são:

(a) Critério da Identidade: O índice é igual à unidade para t=0, isto é: $I_{o,o} = 1$

(b) Critério de Reversibilidade: O índice do período-base com relação ao do período atual, tomado como base de comparação, deve ser igual ao inverso do índice que representa o período atual com relação ao período-base:

$$I_{o,t} \times I_{t,o} = 1$$

(c) Critério Circular: O índice do período 2 com relação ao período-base deve ser igual ao produto do índice do período 1 relacionado ao perÍido-base pelo índice do período 2 relacionado ao período 1.

$$I_{o,2} = I_{o,1} \times I_{1,2}$$

(d) Critério da Homogeneidade: O valor do índice não deve ser influenciado pela mudança das unidades de medida.

(e) Critério da Proporcionalidade: Se todos os relativos de preços. que compõem o índice, tem o mesmo valor, o índice deve ser igual a esse valor comum.

(f) Critério da Determinação: O índice não pode tornar-se nulo, infinito ou indeterminado, caso uma quantidade ou um preço seja zero.

PROPOSTA: Verifique quais dos índices estudados satisfazem aos critérios de Fisher.

4. PRINCIPAIS ÍNDICES DE PREÇOS PUBLICADOS NO BRASIL

4.1. INDICE DE PREÇOS AO CONSUMIDOR (IPC/PA-IEPE)

O IPC é um estimador do custo de vida.

(A) CONCEITOS: Para melhor entendermos o significado do IPC, vamos fixar alguns conceitos:

Custo de vida: é o total de despesas necessárias para manter um certo padrão de vida referidas à cesta mais barata dentre aquelas que caracterizam o mesmo padrão de vida.

Padrão de vida: é o grau de intensidade com que um indivíduo utiliza os produtos e serviços (bens) existentes no mercado. Sob o ponto de vista exclusivamente econômico, é uma função da renda, isto é, quanto maior a renda maior deve ser o padrão de vida.

Índice do custo de vida: mede o acréscimo que deve sofrer a renda de um indivíduo para mantê-lo no mesmo padrão de vida de um período a outro.

Índice de preços ao consumidor: é uma estimativa do verdadeiro índice do custo de vida, pois mede apenas os acréscimos de preços a que um indivíduo está sujeito, e não os acréscimos de renda. Além disso, considera apenas uma cesta de bens e não aquelas equivalentes a um mesmo "padrão de vida".

(B) ÓRGÃO RESPONSÁVEL: IEPE/UFRGS

Para a construção do IPC é necessário estabelecer os pesos que cada produto e serviço tem dentro do orçamento familiar, por isso, é realizada uma pesquisa.

(C) PESQUISA BASE: Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF).

A primeira POF foi realizada em 1954, seguida por 1960, 1970, 1975 e 1983. Na última POF, foram incluídos na amostra 9 dos 14 municípios de Porto Alegre. Dos 1800 questionários aplicados, foram aproveitados 1223, perguntando-se sobre o hábito de consumo das famílias.

(D)METODOLOGIA (CONSTRUÇÃO DO ÍNDICE):

A partir dos resultados obtidos na amostra, constrói-se uma Matriz de Quantidades:

Consumidor \ Ítens	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	
A_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1j}	...	q_{1m}	$q_{1.}$
A_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2j}	...	q_{2m}	$q_{2.}$
$\vdots$							
A_i	q_{i1}	q_{i2}	...	q_{ij}	...	q_{im}	$q_{i.}$
$\vdots$							
A_n	q_{n1}	q_{n2}	...	q_{nj}	...	q_{nm}	$q_{n.}$
	$q_{.1}$	$q_{.2}$	...	$q_{.j}$	...	$q_{.m}$	$q_{..}$

q_{ij} são as quantidades consumidas pela família A_i no ítem y_j

Substituindo q_{ij} por p_{ij} obtemos a Matriz de Preços Unitários.

Multiplicando q_{ij} por p_{ij} obtemos o Gasto Total: $p_{ij}\, q_{ij}$

A soma de cada coluna é o gasto total de todas as famílias na aquisição do bem y_j : $p_{.j}\, q_{.j}$

A soma de cada linha é o gasto total da família A_i : $p_{i.} q_{i.}$

Para a escolha dos ítens que vão entrar na construção do índice, devemos levar em conta a frequência de compra de cada ítem, isto é, número de famílias que compram cada ítem. Por exemplo:

f_1 = 1100 (1100 famílias consomem o ítem 1)

f_2 = 15 (15 famílias consomem o ítem 2)

f_3 = 538 (538 famílias consomem o ítem 3)

e, nesse caso, poderíamos excluir o ítem 2 do nosso índice.

Define-se então a estrutura do índice, estabelecendo os ítens que irão participar do cálculo. Considera-se principalmente a importância de cada ítem que é dada por:

$$\frac{\text{gasto total das famílias com cada ítem}}{\text{gasto total}} = \frac{\sum_i p_{ij}\, q_{ij}}{\sum_{i,j} p_{ij} q_{ij}}$$

que são as ponderações, também notadas por:

$$w_o^j = \frac{p_o^j \; q_o^j}{\sum_{j=1}^{m} p_o^j \; q_o^j} \qquad \text{onde} \quad \Sigma\, w_o^j = 1$$

Visto que as quantidades são determinadas a partir da pesquisa e o preço médio de cada ítem é avaliado num dado momento (semana ou mes) a partir de vários estabelecimentos comerciais, na realidade o que temos no numerador é o preço médio do ítem j multiplicado pelo consumo total das famílias com esse ítem e no denominador o total dos gastos de todas as famílias com todos os itens.

(E) FÓRMULA: Laspeyres.

$$I_{o,t}^{L} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_t^j \; q_o^j}{\sum_{j=1}^{m} p_o^j \; q_o^j} \times 100$$

Observemos que nesta fórmula, o denominador é calculado a partir dos preços e quantidados no ano em que foi realizada a pesquisa, permanecendo portanto inalterado. O que é atualizado mensal ou semanalmente são os preços dos produtos que irão participar do numerador.

(F) CESTO BÁSICO: O IEPE fornece um indicador de variação de preços de 48 produtos que constitutem o Cesto Básico, pois constatou-se, nas 5 pesquisas familiares realizadas, que 20 produtos e serviços representam 70% do orçamento.

4.2. ÍNDICE DE PREÇOS AO CONSUMIDOR (IPC/RJ)

(A) PESQUISA BASE: Estudo dos orçamentos familiares de 306 famílias residentes em conjuntos habitacionais da COHAB, na Guanabara, cuja renda mensal era de 1 a 5,24 salários mínimos, num período de 3 meses durante o ano de 1973, relativamente ao consumo alimentar. Os pesos dos demais grupos de despesas foram adaptados a partir de pesquisa realizada em 1967/68.

(B) METODOLOGIA:Coleta de preços semanal,no Rio de Janeiro, relativamente a alimentação(com 19 subdivisões e 163 ítens), vestuário, habitação, residência, saúde e higiene, serviços pessoais, serviços públicos.

(C) FÓRMULA: Laspeyres

4.3. ÍNDICE DE PREÇOS POR ATACADO (IPA/FGV)

(A) CONCEITOS:

Preço por Atacado: é o preço imediatamente anterior ao das etapas de transformação ou uso final.

Oferta Global: é o valor da produção multiplicado pelo coeficiente do valor adicionado em cada etapa do processo produtivo, mais a importação.

Disponibilidade Interna: é o valor da produção menos a exportação, multiplicado pelo coeficiente do valor adicionado em cada etapa do processo produtivo, mais a importação.

A Oferta Global e a Disponibilidade Interna geram dois índices.

(B) ÓRGÃO RESPONSÁVEL: Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro.

(C) PESQUISA BASE: As ponderações foram estabelecidas a partir da estrutura produtiva do país no triênio 1972-1974, consultando o IBGE, CACEX/BB e o MF (Ministério da Fazenda).

(D) METODOLOGIA: A coleta de preços é mensal e é realizada em algumas capitais baseada em 1100 informantes.

(E) FÓRMULA: Laspeyres

(F) DECOMPOSIÇÃO DO ÍNDICE:

- IPA
  - O.G.
    - Produtos agrícolas (com 8 subítens)
    - Produtos industriais (extrativo mineral, etc)
  - D.I.
    - Bens de consumo
      - Imóveis (com 2 subítens)
      - Não imóveis (com 2 subítens)
    - Bens de produção (com vários subítens)
  - D.I. expurgado de variações estacionais (acidentais)

O IPA é publicado mensalmente na Revista Conjuntura Econômica , da FGV.

4.4. ÍNDICE NACIONAL DE CUSTO DA CONSTRUÇÃO CIVIL(INCC/RJ)

É um indicador representativo do custo das edificações residenciais no Brasil.

(A) ÓRGÃO RESPONSÁVEL: FGV

(B) METODOLOGIA: Baseia-se em padrões de edificações considerados mais representativos no Brasil, quais sejam de 1, 4, 8 e 12 pavimentos.

A coleta de preços é mensal e realizada em 9 capitais brasileiras.

Na ponderação geral, os materiais entram com 52,6% e a mão-de-obra participa com 47,4%.

4.5. ÍNDICE GERAL DE PREÇOS (IGP/FGV)

É um dos indicadores utilizados como medida de inflação no Brasil, sendo composto pelo IPA, IPC/RJ e INCC. Por tratar-se de um indicador muito amplo, não deve ser usado em situações particulares.

(A) ÓRGÃO RESPONSÁVEL: FGV

(B) METODOLOGIA: São calculados dois IGP; um refere-se à Oferta Global e outro à Disponibilidade Interna. Ambos os índices utilizam a ponderação abaixo, substituindo, respectivamente, IPA por IPA_{OG} ou IPA_{DI}, conforme o caso.

$$IGP = [(IPA \times 6) + (IPC/RJ \times 3) + (INCC \times 1)] : 10$$

4.6. ÍNDICE NACIONAL DE PREÇOS AO CONSUMIDOR (INPC/IBGE)

É o indicador oficial da variação do custo de vida no Brasil sendo utilizado para corrigir salários desde 1979, conforme Lei 6708 de 30 de outubro.

(A) ÓRGÃO RESPONSÁVEL: IBGE

(B) PESQUISA BASE: Estudo Nacional de Pesquisa Familiar (ENDEF) realizado pela FIBGE de agosto de 1974 a agosto de 1975, abrangendo todas as classes sócio-econômicas, num total de 55000 domicílios.

A partir do ENDEF foi organizada uma cesta-padrão de consumo familiar para cada região metropolitana.

Quando se considera a estrutura de pesos para a faixa de renda familiar de 1 a 5 salários mínimos, obtemos o INPC-RESTRITO , que foi utilizado como base para as correções salariais até o mes de novembro de 1985. Se estrutura de pesos envolve a faixa de renda de 1 a 30 salários mínimos calculamos o INPC-AMPLO (IPCA) que a partir de 1985 tornou-se o único indexador de salários.

Tanto o INPC-RESTRITO como o IPCA são obtidos através da agregação dos IPC das regiões metropolitanas. No caso do INPC, os índices metropolitanos são ponderados pelas respectivas populações urbanas e, no caso no IPCA, pela participação da despesa total corrente na região metropolitana no total geral da despesa corrente.

5. OUTRAS APLICAÇÕES DOS ÍNDICES DE PREÇOS

5.1. PODER AQUISITIVO DA MOEDA (PAM)

É necessário estabelecer o tempo a partir do qual se deseja saber a perda do poder aquisitivo da moeda e escolher um IP (índice de preços).

$$PAM_{o,t} = \frac{100}{IP_{o,t}}$$

PAM < 1 ∴ PAM está baixando pois IP está crescendo

5.2. DEFLACIONAMENTO

Consiste em estabelecer o valor correspondente em Cruzeiros de hoje para o valor de Cruzeiros de ontem.

$$V_o = V_t \times PAM_{o,t}$$

onde V_o é o valor em Cr$ no tempo 0 (ontem) e

V_t é o valor em Cr$ no tempo t (hoje).

EXEMPLO 11:

Período	IP
JAN 1991	100
JAN 1992	566

$$PAM = \frac{100}{566}$$

$$V_o = 500 \times \frac{100}{566} = 88,34$$

Significa que se emprestei Cr$ 88,34 em janeiro de 1991, tenho que receber agora Cr$ 500,00.

5.3. CORREÇÃO MONETÁRIA

Aplicando o coeficiente de correção monetária (CCM) ao valor no tempo 0 (ontem), obtém-se o valor atual da dívida.

$$CCM = \frac{1}{PAM_{o,t}}$$

$$V_t = V_o \times \frac{1}{PAM_{o,t}}$$

onde O é a época base (ontem) e t é a época atual (hoje).

Para uma época k qualquer entre O e t , temos:

$$PAM_{k,t} = \frac{IP_{o,k}}{IP_{o,t}}$$

EXEMPLO 12:

Período	IP
O= JAN 1991	100
k= AGO 1991	240
t= JAN 1992	566

Perda do Poder Aquisitivo da moeda entre AGO/91 e JAN/92 :

$$PAM_{k,t} = \frac{IP_{o,k}}{IP_{o,t}} = \frac{240}{566} = 0,4240$$

.Um valor atual de Cr$ 500,00, quanto valia em AGO/91 ?

$$V_k = V_t \times PAM_{k,t} = 500 \times \frac{240}{566} = 212$$

Se apliquei Cr$ 200,00 em AGO/91, quanto devo receber agora?

$$V_t = V_k \times \frac{1}{PAM_{k,t}} = 200 \times \frac{1}{240/566} = 471,70$$

6. UMA PROPOSTA PRÁTICA

A fim de realizar um exercício prático, propusemos aos alunos de MAT271/91 construir um IPC para OUT/91 a partir dos gastos de suas famílias com os seguintes ítens: arroz,feijão,batata,carne,ovos,leite,pão,considerando DEZ/90 como mes-base e admitindo que o consumo corresponde ao período base. Os preços obtidos no Boletim Informativo do IEPE de Novembro/1991 foram, respectivamente para cada produto, em DEZ/90: Cr$ 122,81; Cr$ 113,97; Cr$ 86,48; Cr$ 280,00; Cr$ 84,80; Cr$ 54,47 e Cr$ 68,64 . E para OUT/91:Cr$ 432,55; Cr$ 391,94, Cr$ 158,56; Cr$ 1586,00;

Cr$ 430,05; Cr$ 197,00 e Cr$ 255,00.

Inicialmente, foi feito o levantamento das quantidades mensais consumidas pelas famílias, resultando no seguinte quadro:

fam.(i)	nº pess	arroz	feijão	batata	carne	ovos	leite	pão
		ítens (j)						
1	4	3	4	8	20	8	44	20
2	5	12	4	12	16	4	40	35
3	2	–	–	2	10	2	2	2
4	2	5	2	6	12	3	10	7
5	4	12	5	15	28	3	60	14
6	5	10	8	8	20	4	60	15
7	2	4	2	–	4	2	56	8
8	4	7	2	4	15	3	32	8
cons. méd. mens. per capta		2,1	1,0	2,1	4,5	1,1	11,0	3,6

Calculou-se o peso de cada ítem no orçamento familiar tomando por base os preços de OUT/91 (IEPE):

$$w^j = \frac{\sum_i p_{ij} q_{ij}}{\sum_{i,j} p_{ij} q_{ij}} \qquad \begin{array}{l} j=1,2,3,4,5,6,7 \\ i=1,2,3,4,5,6,7,8 \end{array}$$

ítens	arroz	feijão	batata	carne	ovos	leite	pão
q	2,1	1,0	2,1	4,5	1,1	11,0	3,6
p	122,81	113,97	86,48	320,00	84,80	54,47	68,64
p.q	257,90	113,97	181,61	1440,00	93,28	599,17	247,10
w	0,0879	0,0389	0,0619	0,4910	0,0318	0,2043	0,0842

Desta forma, verificou-se que os ítens que mais pesam no orçamento dessas famílias são a carne e o leite. Poderíamos, então, eliminar os ítens que tem participação menos importante para o cálculo do IPC, bem como desconsiderar os ítens que não participam do orçamento de todas as famílias, tais como arroz, feijão, batata. Em nosso índice, não levamos em conta esses aspectos e calculamos o IPC com todos os ítens, através da fórmula de Laspeyres para OUT/91 tomando DEZ/90 como ano-base:

itens	p_0	p_1	q_0	$p_0\ q_0$	$p_1\ q_0$
arroz	122,81	431,55	2,1	257,90	906,26
feijão	113,97	391,94	1,0	113,97	391,94
batata	86,48	158,56	2,1	181.61	332,98
carne	320,00	1586,00	4,5	1440,00	7137,00
ovos	84,80	430,05	1,1	93,28	473,06
leite	54,47	197,00	11,0	599,17	2167,00
pão	68,64	255,40	3,6	247,10	919,44
Σ				2933,03	12327,68

$$I^{L}_{o,t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p^{j}_{t}\, q^{j}_{o}}{\sum_{j=1}^{m} p^{j}_{o}\, q^{j}_{o}} \times 100 = \frac{12327,68}{2933,03} = 420,30$$

6. EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1. Os preços médios do kg de mel nos últimos 6 meses de 1991 estão dados a seguir:

JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
593,70	745,38	980,80	1163,86	1455,14	1620,12

1.1. Adotado o mes de JUL como base, determine os preços relativos correspondentes aos demais meses.

1.2. Considere os meses de JUL e AGO como base e determine os preços relativos correspondentes a todos os meses.

(Dica: Tome a média aritmética dos preços dos meses de JUL e AGO como preço base).

2. Prove que: a) $R_{a,b} \times R_{b,c} = R_{a,c}$; b) $R_{a,b} \times R_{b,a} = 1$

3. Em 1986, o preço médio de um produto era 20% superior ao de 1985; 20% inferior ao de 1984 e 50% superior ao de 1987. Reduzir os dados a preços relativos, adotando como base os anos de: a) 1985; b) 1986; c) de 1984 a 1985.

4. Produção brasileira anual de tratores

1976-1982

Anos	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
Tratores	71713	59419	55874	64511	69993	47022	37566

Fonte: Conjuntura Econômica

Calcular as quantidades relativas utilizando como base o ano de 1979.

5. Os relativos em cadeia de 1986 a 1990 de certo artigo são 125, 120, 135, 150 e 175, respectivamente.

a) Determinar o relativo de 1987 com o ano de 1985 como base.

b) Calcular os relativos tomando 1986 como ano base.

6. A tabela a seguir apresenta os valores do salário mínimo vigente na cidade do Rio de Janeiro, bem como os valores do índice de Preços ao Consumidor naquela cidade para o mes de dezembro, calculados pela Fundação Getúlio Vargas. Determinar a respectiva série de salários míminos reais comparando-os com o de 1975.

Anos	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
S.M.	532,8	768,0	1106,4	1560,0	2933,8	5788,8	11928,0	23568,0
IPC	55,4	80,2	114,8	158,6	279,1	520,1	1043,3	2105,5

Fonte: Boletim do Banco Central e Conjuntura Econômica

7. Utilizar o IPC do exercício anterior para determinar o poder aquisitivo do cruzeiro nos diversos anos, com referência a 1975.

8. A tabela a seguir apresenta os preços e as quantidades consumidas de vários metais não-ferrosos, nos anos de 1969, 1976 e 1977. Tomando o ano de 1969 como base, calcular índices abaixo para os anos de 1976 e 1977:

a) aritmético simples

b) agregativo simples

c) Laspeyres

d) Paasche

e) Marshall-Edgeworth

f) ideal de Fisher

Preços				Quantidades		
Metais	1969	1976	1977	1969	1976	1977
Alumínio	17,00	26,01	27,52	1357	3707	2698
Cobre	19,36	41,88	29,99	2144	2734	2478
Chumbo	15,18	15,81	14,46	1916	2420	2276
Estanho	99,32	101,26	96,17	161	202	186
Zinco	12,15	13,49	11,40	1872	2018	1424

g) Mostrar que os índices de Laspeyres e de Paasche não satisfazem ao critério de reversibilidade.

h) Mostrar que o índice ideal de Fisher não satisfaz ao teste circular.

Resolva os exercícios a seguir utilizando o programa MINITAB ou uma Planilha eletrônica.

9. População residente em Porto Alegre - 1989

Mes	População
JAN	2 908 712
FEV	2 916 251
MAR	2 923 797
ABR	2 931 339
MAI	2 938 886
JUN	2 946 448
JUL	2 954 007
AGO	2 961 572
SET	2 969 142
OUT	2 976 709
NOV	2 984 291
DEZ	2 991 876

Fonte: Estatísticas Básicas/ PME/1982-89/IBGE

Calcule os índices relativos simples, tomando o mes de janeiro como base.

10. População em idade ativa e economicamente ativa no mes de Dezembro em Porto Alegre - 1982-1989

Ano	População	
	em idade ativa	economicamente ativa
1982	1 676 540	1 076 674
1983	1 729 605	1 072 528
1984	1 765 410	1 131 275
1985	1 807 147	1 117 359
1986	1 878 534	1 180 471
1987	1 953 940	1 215 937
1988	2 032 025	1 291 319
1989	2 102 764	1 300 262

a) Calcule os índices relativos simples para a população em idade ativa considerando 1982 como ano-base.

b) Calcule os índices relativos simples para a população economicamente ativa considerando 1982 como ano-base e compare com os índices obtidos em a).

7. RESPOSTAS:

3. a)

84	85	86	87
150	100	120	80

$$120 - 80 \qquad x - 100 \qquad x = \frac{120.100}{80} = 150$$

$$120 - 150 \qquad x - 100 \qquad x = \frac{120 \,.\, 100}{150} = 80$$

b) Divide-se tudo por 120 que é o índice da nova base:

84	85	86	87
125	83,3	100	66,7

c) Pela tabela de a) obtém-se a média dos relativos de 84 e 85: 125 e divide-se cada relativo por esse valor.

84	85	86	87
120	80	96	64

4.

111,2	92,1	86,6	100,0	108,5	72,3	58,2

5. a) $R_{85,87} = \frac{R_{85,86}\ R_{86,87}}{100} = \frac{125 \,.\, 120}{100} = 150$

b) $R_{86,85} = \frac{1}{R_{85,86}} = \frac{1}{125} \,.\, 100 = 80$

$R_{86,86} = 100 \qquad R_{86,87} = 120$

$R_{86,88} = R_{86,87}\ R_{87,88} = 120 \,.\, 135 = 162$

$R_{86,89} = R_{86,87}\ R_{87,88}\ R_{88,89} = 243$

$R_{86,90} = R_{86,87}\ R_{87,88}\ R_{88,89}\ R_{89,90} = 425$

6. Calcula-se primeiramente a nova série de índice de preços com base em 1975, dividindo-se cada índice por 55,4.

Divide-se então o valor do salário mínimo pelo respectivo índice de preços obtido anteriormente. Esta é a série de salários mínimos reais referida a 1975.

Anos	75	76	77	78	79	80	81	82
índice	100,0	144,8	207,2	286,3	503,8	938,8	1883,2	3800,5
SMreal	532,8	530,39	533,98	544,88	582,14	616,62	633,39	620,13

7. Divide-se 100 pelo índice de preço da tabela anterior. Interpreta-se: 0,48 aignifica que um cruzeiro em 1977 poderia comprar apenas 48% do que comprava em 1975.

Ano	75	76	77	78	79	80	81	82
PAM	1,00	0,69	0,48	0,35	0,20	0,11	0,05	0,03

8. a) 1976: 137,3   b) 1977: 120,5

b)

c) 148,7   125,5

d) 150,5   134,2

e) 149,8   130,5

f) 149,6   129,8

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BUSSAB, W. & MORETTIN, P. **Métodos quantitativos para economistas e administradores.** Atual Editora, 1981.

ENDO, S.K. **Números Índices.** Atual Editora, 1986.

ENGLER, J.J.C. & HOFFMANN, R. Números índices e suas aplicações na economia rural. Série Didática nº 15. ESALQ, USP, Piracicaba, 1971.

KAZMIER, L.J. **Estatística Aplicada à Economia e Administração.** McGraw-Hill, 1982.

MICHEL, N.E. A teoria da preferência revelada: uma análise empírica do bem-estar de um conjunto de consumidores. **Textos para discussão/12.** Ed. Universidade, 1983.

PEREIRA, R.S. **A Estatística e suas aplicações.** Grafosul, 1979.

SPIEGEL, M.R. **Estatística.** McGraw-Hill, 1985.

STEVENSON, W.J. **Estatística Aplicada à Administração.** Harbra, 1981.

TOLEDO, G.L. & OVALLE, I.I. **Estatística Básica.** 1985.

FORMULÁRIO

$$R_{o,t} = \frac{x_t}{x_o} \times 100 \qquad R_{t-1,t} = \frac{x_t}{x_{t-1}} \times 100 = L_{t-1,t}$$

$$R_{o,t-1} = \frac{R_{o,t}}{R_{t-1,t}} \times 100 \qquad R_{o,t} = \frac{R_{o,t-1}\ R_{t-1,t}}{100}$$

$$R_{o,t} = \frac{R_{o,1}}{100} \times \frac{R_{1,2}}{100} \times \frac{R_{2,3}}{100} \times \dots \times \frac{R_{t-1,t}}{100} \times 100$$

$$R_{o',t} = \frac{R_{o,t}}{R_{o,o'}} \times 100$$

$$I^{AS}_{o,t} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{p^j_t}{p^j_o} \times 100 \qquad I^{AG}_{o,t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p^j_t}{\sum_{j=1}^{m} p^j_o} \times 100$$

$$I^{L}_{o,t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p^j_t\ q^j_o}{\sum_{j=1}^{m} p^j_o\ q^j_o} \times 100 \qquad I^{P}_{o,t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p^j_t\ q^j_t}{\sum_{j=1}^{m} p^j_o\ q^j_t} \times 100$$

$$I^{AP}_{o,t} = \frac{\sum \left(\frac{p^j_t}{p^j_o} \right) . w^j}{\sum w^j} \times 100 \qquad I^{IF}_{o,t} = \sqrt{I^{L}_{o,t} \ . \ I^{P}_{o,t}}$$

$$I^{ME}_{o,t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p^j_t\ (q^j_t + q^j_o)}{\sum_{j=1}^{m} p^j_o\ (q^j_t + q^j_o)} \times 100 \qquad PAM_{o,t} = \frac{100}{IP_{o,t}}$$

$$V_o = V_t \times PAM_{o,t}$$

$$CCM = \frac{1}{PAM_{o,t}} \qquad V_t = V_o \times \frac{1}{PAM_{o,t}}$$

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série B: Trabalho de Apoio Didático

1. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89.
2. Jaime B. Ripoll - Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções de Uma Variável Real - OUT/89.
3. Edmund R. Puczylowski - Dimension of Modular Lattices - JUN/90
4. Marcos Sebastiani - Geometrias Não Euclidianas - JUL/90
5. Sandra R. C. Pizzato - Cálculo Numérico - AGO/91
6. Vera Clotilde G. Carneiro - Elementos de Cálculo para Biologia - AGO/91
7. Elsa Mundstock - Iniciação ao SPSS/PC - SET/91
8. Elisa Haag, Loiva C. de Zeni, Maria Alice Gravina e Vera Clotilde - Notas da 1ª Oficina de Matemática da UFRGS - JAN/92
9. Paulo Werlang de Oliveira, Elisabete Rambo, Suzana Lima dos Santos. Coordenação: Profa. Maria Alice Gravina - A Tartaruga no Espaço Tridimensional - FEV/92
10. Silvio Possoli - Análise Multivariada - JUL/92
11. Dinara W. Xavier Fernandez - Números Índices - OUT/92.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRACURRICULARES

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa

Série B: Trabalho de Apoio Didático

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

Série D: Trabalho de Graduação

Série F: Trabalho de Divulgação

Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRACURRICULARES
INSTITUTO DE MATEMATICA - UFRGS
AV. BENTO GONÇALVES, 9500 - PRÉDIO 43111
CEP 91509 - 900 AGRONOMIA - POA/RS
FONE: 336 92 22 OU 339 13 55 OU 228 16 33
RAMAL 6197
FAX: 336 15 12