Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
E-mail: dest@mat.ufrgs.br

Trabalho de Conclusão de Curso

Comparação de adequação de modelos dinâmicos para séries temporais limitadas sob especificação incorreta do processo gerador

Matias Segelis Vieira

27 de janeiro de 2018

Matias Segelis Vieira

Comparação de adequação de modelos dinâmicos para séries temporais limitadas sob especificação incorreta do processo gerador

Trabalho de Conclusão apresentado à comissão de Graduação do Departamento de Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Pumi

Porto Alegre
Janeiro de 2018

Matias Segelis Vieira

Comparação de adequação de modelos dinâmicos para séries temporais limitadas sob especificação incorreta do processo gerador

Este Trabalho foi julgado adequado para obtenção dos créditos da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso em Estatística e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador:________________________________
Prof. Dr. Guilherme Pumi, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cleber Bisognin, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre, RS

Prof. Dr. Marcio Valk, UNICAMP
Doutor pela Universidade Estadual de Campinas - Campinas, SP

Porto Alegre
Janeiro de 2018

Agradecimentos

Agradeço a todos que me acompanharam nesta caminhada de quase 6 anos. Agradeço aos meus pais por todo o amor e acolhimento usual, pela ajuda em todos os momentos cruciais e não cruciais, por todas as jantas e almoços, por todo o tempo que me ajudaram a poupar quando não dispunha do mesmo. Obrigado Nerilda e Hernan.

Obrigado Luana, não é possível colocar em palavras o quanto nos apoiamos desde que nos conhecemos e principalmente neste derradeiro e pesado semestre. Sem tua ajuda nada seria possível, que bom que entraste na minha vida por meio deste curso.

Obrigado ao meu orientador Guilherme Pumi pelos ensinamentos, pela paciência e pelo apoio, saiba que além de um grande profissional és um grande ser humano, por saber compreender o aluno também como o ser humano que ele é.

Por último e não menos importante, obrigado a todos amigos e amigas que me ajudaram e me acompanharam durante o curso e durante a vida, e um agradecimento especial a Eduardo, Rodrigo, Cristiano, Camila, Alice e Danielle, sem vocês o trabalho não seria possível, literalmente.

Resumo

O presente trabalho aborda modelos dinâmicos baseados em modelos de regressão generalizados para séries temporais limitadas. Alguns dos modelos mais utilizados na literatura são discutidos. O objetivo do trabalho é a comparação, via simulações de Monte Carlo, desses modelos em um cenário de especificação incorreta do processo gerador visando analisar seus desempenhos. Os resultados obtidos apontam para a existência de intersecções práticas entre os modelos estudados, mesmo sendo eles diferentes na teoria. Além disso, um dos modelos se sobressai perante os outros em nossas análises. Trabalhos futuros são também discutidos.

Palavras-Chave: Séries temporais limitadas, modelos dinâmicos, modelos lineares generalizados, simulação de Monte Carlo.

Abstract

In the present work we study dynamic models based on generalized linear models for bounded time series. Some of the most commonly applied models in the literature are discussed. Our main objective is the comparison of these models, through Monte Carlo simulations, in the context of misspecified data generating process, aiming towards the analysis of their performance in these contexts. Our results show evidence of practical intersections between the studied models, even though they are very different in theory. The results also show that one of the models stands out from the others. Some possible future works are also presented.

Keywords: Bounded time series, dynamic models, generalized linear models, Monte Carlo simulation study.

Sumário

Lista de Tabelas

1 Introdução

Modelos de regressão para séries temporais vêm sendo uma parte integral da análise de séries temporais por um bom tempo, datando para mais de cem anos atrás, com o trabalho de Schuster (1898) sobre regressões senoidais, que levou à invenção do periodograma. Modelos de regressão estruturais para séries temporais também figuram há bastante tempo na literatura, principalmente na área de Econometria e Finanças (Fokianos e Kedem, 2002). Porém, para séries temporais limitadas pouco ainda é conhecido.

A utilização da distribuição Beta em séries temporais cujos valores são restritos ao intervalo unitário é ampla nos campos da hidrologia e meteorologia dada a restrição natural observada nos dados, como por exemplo taxas de umidade relativa ou níveis de reservatórios, que podem variar ao longo do tempo. Desde os trabalhos de Benjamin et al. (2003) e, em particular, Ferrari e Cribari-Neto (2004), apresentando a Regressão Beta, diversos autores começaram a trabalhar com a ideia da utilização da estrutura de modelos de regressão generalizadas incorporando um termo formado a partir da teoria clássica de séries temporais, ideia da qual surgiram os modelos βARMA (Rocha e Cribari-Neto, 2009), βARFIMA (Pumi et al., 2018) e KARMA (Bayer et al., 2017).

No trabalho Ferrari e Cribari-Neto (2004) é apresentado o modelo de Regressão Beta, sendo pioneiro na utilização da distribuição Beta para modelagem de séries temporais limitadas. A ideia geral é modelar a média de uma série temporal que tem distribuição Beta, variando no tempo através de covariáveis. É apresentada a estimação dos parâmetros do modelo via máxima verossimilhança, medidas de diagnóstico e por fim uma aplicação real.

Em Rocha e Cribari-Neto (2009), o modelo βARMA é apresentado. O modelo expande a Regressão Beta permitindo não apenas covariáveis na modelagem da média condicional, mas também uma estrutura ARMA. A estimação de parâmetros é construída via máxima verossimilhança condicional, sendo que os autores provêm formas fechadas para a matriz de informação de Fisher e para o vetor Score. O modelo βARFIMA (Pumi et al., 2018) é proposto como uma generalização do βARMA, permitindo que a média condicional apresente ainda uma estrutura de longa dependência não comportado pelo modelo βARMA. A estimação de parâmetros se dá via máxima verossimilhança parcial, outra diferença em relação ao βARMA.

Por fim, no trabalho Bayer et al. (2017) o modelo KARMA é introduzido. Neste caso, é modelada a mediana condicional e utiliza-se a distribuição Kumaraswamy, para dados restritos a um intervalo (a, b).

Tendo em mente as diferenças entre os modelos apresentados, algumas questões a se verificar vão desde se há bom ajuste para um modelo KARMA (que modela a mediana condicional) quando se gera um βARMA (que modela a média condicional) e vice-versa, a verificar se o modelo βARFIMA consegue ajustar algum dos outros dois casos e também se os outros dois modelos, que não acomodam longa dependência nas suas especificações condicionais, apresentam um bom ajuste de uma série gerada com longa dependência. Em vista disso, algumas das perguntas a serem respondidas neste trabalho são: dado que na prática nunca sabemos exatamente qual modelo utilizar, poderíamos utilizar qualquer um dos três modelos citados? Seria algum deles universalmente "melhor" em algum sentido?

Em outras palavras, gostaríamos de estudar o desempenho de cada um dos modelos quando confrontados com séries temporais seguindo especificações diferentes das suas. Por exemplo, será que uma série temporal seguindo um modelo βARMA pode ser adequadamente modelada utilizando um modelo KARMA ou um βARFIMA? Será que que existem "intersecções" práticas entre esses modelos teoricamente tão distintos? Neste trabalho nos propomos a responder, ainda que parcialmente, algumas destas questões. Para atingir este objetivo, primeiramente apresentaremos brevemente alguns modelos dinâmicos para séries temporais limitadas disponíveis na ainda incipiente literatura do assunto. Em um segundo momento, através de simulações de Monte Carlo, analisaremos o desempenho de cada um dos modelos apresentados (a saber, KARMA, βARMA e βARFIMA) sob especificações incorretas do processo gerador, tanto do ponto de vista de potencial adequação de ajuste (intersecções práticas entre os modelos) quanto do ponto de vista de seleção de modelos.

O trabalho está estruturado da seguinte maneira: o próximo capítulo fornece os conceitos preliminares e apresenta os modelos estudados. O capítulo 3 apresenta o processo de geração de dados utilizado para a obtenção do objetivo do trabalho. O capítulo 4 fornece a discussão sobre os resultados. O capítulo 5 fornece a conclusão, enquanto o último capítulo apresenta as considerações finais e futuros trabalhos.

2 Preliminares

O capítulo a seguir tem como objetivo a apresentação dos modelos utilizados no trabalho, bem como as distribuições envolvidas em tais modelos. O primeiro tópico a ser abordado é a Regressão Beta seguida pelos modelos βARMA e βARFIMA. Após isso apresentamos a distribuição Kumaraswamy que é ainda pouco conhecida no meio estatístico embora amplamente utilizada na hidrologia e por fim, o modelo KARMA.

2.1 Regressão Beta

A distribuição Beta é utilizada para modelar experimentos nos quais a variável de interesse é contínua e se distribui no intervalo $(0, 1)$, como por exemplo taxas e proporções. Caso a variável não assuma valores no intervalo unitário, ou seja, $a \neq 0$ e $b \neq 1$, pode-se usar a transformação $Y_i = (X_i - a)/(b - a)$ com $i = 1, 2, ..., n$, onde Y_i representa a resposta transformada, X_i a resposta observada e n é o tamanho amostral. Assim, a variável assumirá valores no intervalo $(0, 1)$, tornando possível sua modelagem sob a distribuição Beta.

Ferrari e Cribari-Neto (2004) propuseram a classe de modelos de Regressão Beta, em que a variável resposta segue uma distribuição Beta e a média é modelada através de um modelos de regressão. Sabe-se destes modelos que os parâmetros são interpretáveis em termos da média da resposta e o modelo aceita assimetrias.

Para facilitar a utilização da distribuição Beta no contexto de séries temporais limitadas, utiliza-se uma parametrização baseada na média da distribuição. Seja $\{y_t\}_{t=1}^{n}$ uma série temporal de interesse, assume-se que a densidade de y_t é dada por

$$f(y_t; \mu_t, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_t\phi)\Gamma((1-\mu_t)\phi)} y_t^{\mu_t\phi-1}(1-y_t)^{(1-\mu_t)\phi-1}, \tag{2.1}$$

para $0 < y_t < 1$, onde $\mu_t = \mathbb{E}(y_t) \in (0, 1)$ e $\phi > 0$. O modelo enfim é obtido assumindo que a média de y_t pode ser escrita como:

$$g(\mu_t) = \sum_{i=1}^{k} x_{ti}\beta_i, \tag{2.2}$$

onde g é uma função de ligação, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)'$ é um vetor desconhecido de parâmetros de regressão e $\boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^k$ são observações para as k covariáveis no tempo t.

A estimação de parâmetros é efetuada via máxima verossimilhança. No artigo ainda são apresentadas medidas de diagnóstico que podem ser utilizadas para verificar o bom ajuste do modelo. Os autores apresentam estatísticas de teste baseadas em teoria assintótica e também maneiras de realizar inferências em grandes amostras, porém não são apresentadas as condições nem as provas para a validade de teoria assintótica.

São apresentados dois exemplos, o primeiro com o interesse de modelar a proporção de óleo cru convertido em gasolina após destilação e fracionação, o segundo se refere à proporção de gastos com comida em lares como uma função de renda e número de moradores.

2.2 Modelo βARMA

Baseado no modelo de Regressão Beta, Rocha e Cribari-Neto (2009), propuseram o modelo βARMA com o objetivo de permitir não apenas a presença de covariáveis na dinâmica da média do processo, mas também a presença de uma estrutura ARMA.

Seja $\mathscr{F}_t$ a sigma-álgebra representando todo o conhecimento disponível sobre o modelo até o tempo t e $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ uma função de ligação monótona e duas vezes continuamente diferenciável. No modelo βARMA, a distribuição da variável y_t condicionada a $\mathscr{F}_{t-1}$ é parametrizada por (2.1) enquanto que a média condicional de y_t dado $\mathscr{F}_{t-1}$, μ_t, assume a forma:

$$g(\mu_t) = \eta_t = \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \tau_t, \quad t = 1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

onde $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)'$ representam parâmetros desconhecidos e τ_t é um componente ARMA (para mais detalhes sobre modelagem ARMA, recomenda-se Brockwell e Davis (1991)).

Considerando um modelo ARMA(p, q) como uma função do termo ξ_t, tal que $\xi_t = g(y_t) - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta}$ temos:

$$\xi_t = \alpha + \sum_{i=1}^{p} \varphi \xi_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j r_{t-j} + r_t, \tag{2.4}$$

onde r_t denota um erro aleatório e $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante. Apesar de r_t não estar definido, é assumido que r_t é $\mathscr{F}_{t-1}$-mensurável e $\mathbb{E}(r_t|\mathscr{F}_{t-1}) = 0$. Tomando a esperança condicional com respeito à $\mathscr{F}_{t-1}$, obtemos o seguinte modelo aproximado:

$$\tau_t = \alpha + \sum_{i=1}^{p} \varphi \xi_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j r_{t-j}.$$

Como ξ_{t-i} é $\mathscr{F}_{t-1}$-mensurável e $\mathbb{E}(\xi_t|\mathscr{F}_{t-1}) \approx \tau_t$, obtemos a seguinte expressão para τ_t:

$$\tau_t = \alpha + \sum_{i=1}^{p} \varphi (g(y_{t-i}) - \boldsymbol{x}_{t-i}'\boldsymbol{\beta}) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j r_{t-j},$$

onde $\boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^k$, $k < n$ e $p, q \in \mathbb{N}$ são, respectivamente, a ordem autoregressiva e de média móvel, φ e θ são, respectivamente, os parâmetros autoregressivo e de média móvel e r_t é um termo de erro, $\mathscr{F}_{t-1}$-mensurável. Por fim, dado que $\tau_t = g(y_t) - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta}$, propõe-se o modelo geral para a média condicional μ_t:

$$g(\mu_t) = \alpha + \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^{p} \varphi(g(y_{t-i}) - \boldsymbol{x}_{t-i}'\boldsymbol{\beta}) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j r_{t-j}. \tag{2.5}$$

Assim, o modelo βARMA é definido por (2.1) e (2.5). É fácil ver que os valores ajustados e mesmo previsões fora da amostra pertencerão ao intervalo unitário padrão.

A estimação em modelos βARMA é feita via máxima verossimilhança condicional (CMLE). A ideia do CMLE é escrever a função de verossimilhança a partir da densidade dos dados condicionada à sigma-álgebra gerada pela informação disponível até o tempo t, para todos os valores de t observados. No CMLE os valores das covariáveis presentes dos modelos devem ser conhecidas de antemão em todos os tempos t, isto é, devem ser determinísticas. Covariáveis que satisfazem este critério geralmente são escritas como uma função $h(t)$ para h conhecida. Uma variável que **não satisfaz** esta condição seria a inflação, que é conhecida apenas até o presente momento, sendo desconhecida em qualquer momento futuro.

No artigo Rocha e Cribari-Neto (2009) são apresentadas formas fechadas para o vetor Score e a Matriz de Informação Condicional de Fisher e discute-se informalmente a teoria assintótica. Testes de hipóteses baseados em tais resultados são apresentados, porém nenhuma condição para a validade da teoria assintótica nem provas são apresentadas pelos autores. Finalmente, uma aplicação a dados referentes à taxa de desemprego devido à condições de trabalho abaixo do padrão é apresentada.

2.3 Modelo βARFIMA

O modelo βARFIMA, introduzido por Pumi et al. (2018), é uma generalização do modelo βARMA permitindo que τ_t comporte um termo apresentando longa dependência, que é caracterizada por um decaimento muito lento da covariância à medida em que o lag entre as variáveis aumenta. No modelo βARFIMA, τ_t segue um modelo ARFIMA(p, d, q), introduzido por Granger e Joyeux (1980) e Honsking (1981).

Assumindo que $\{g(y_t) - \boldsymbol{x}_{t-1}'\boldsymbol{\beta}\}_{t=1}^{\infty}$ é um processo ARFIMA(p, d, q) estacionário de média zero, escrevemos:

$$g(y_t) = \boldsymbol{x}_{t-1}'\boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(g(y_{t-j}) - \boldsymbol{x}_{t-1}'\boldsymbol{\beta}) + r_t + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_{t-k}, \tag{2.6}$$

onde c_k são os coeficientes da expansão de Laurent de $(1-z)^{-d}\theta(z)$, a saber:

$$c_0 = 1, \quad \text{e} \quad c_k = \sum_{i=0}^{\min(k,q)} \theta_i \pi_{k-i},\ k > 0, \tag{2.7}$$

onde definimos $\theta_k = 0$ para $k > q$ e r_t é um termo de erro $\mathscr{F}_{t-1}$-mensurável que satisfaz $\mathbb{E}(r_t|\mathscr{F}_{t-1}) = 0$, para todo $t > 1$. Tomando a esperança condicional com respeito à $\mathscr{F}_{t-1}$ em (2.6) e notando que $\mathbb{E}(g(y_t) - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta}|\mathscr{F}_{t-1}) \approx \tau_t$ obtemos o modelo aproximado:

$$\tau_t = \sum_{j=1}^{p} \varphi(g(y_{t-j}) - \boldsymbol{x}_{t-j-1}'\boldsymbol{\beta}) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_{t-k},$$

onde, substituindo $\tau_t = g(y_t) - \boldsymbol{x}_{t-1}'\boldsymbol{\beta}$ e adicionando um intercepto $\alpha \in \mathbb{R}$ para $g(\mu_t)$, segue:

$$\eta_t = g(\mu_t) = \alpha + \boldsymbol{x}_{t-1}'\boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^{p} \varphi(g(y_{t-j}) - \boldsymbol{x}_{t-j-1}'\boldsymbol{\beta}) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_{t-k}, \tag{2.8}$$

com c_k definido em (2.7). As especificações (2.1) e (2.8) juntas definem o modelo βARFIMA(p, d, q).

Para os modelos βARFIMA a estimação de parâmetros é feita via máxima verossimilhança parcial (PMLE). A estimação via PMLE é parecida com a estimação via CMLE, porém permite que as covariáveis consideradas no modelo sejam tanto predeterminadas, como no CMLE, quanto aleatórias. Neste caso a verossimilhança condicional considera toda a informação que temos das variáveis e covariáveis determinísticas até o tempo t permitindo que, para covariáveis aleatórias, incorporemos no modelo a informação até o tempo $t-1$ apenas. A informação futura completa para variáveis após o tempo t é desnecessária. Para previsão, permite-se que as observações futuras de covariáveis aleatórias sejam substituídas por previsões da mesma, sem alteração nas propriedades da previsão.

Em Pumi et al. (2018), formas fechadas para a matriz de informação e vetor de escore parciais são apresentados bem como uma rigorosa teoria assintótica é desenvolvida. Desta forma, sendo o βARMA um caso particular do βARFIMA, indiretamente o artigo Pumi et al. (2018) fornece uma teoria assintótica rigorosa para o βARMA, ausente no artigo original Rocha e Cribari-Neto (2009).

2.4 Distribuição Kumaraswamy

A distribuição Kumaraswamy foi introduzida por Kumaraswamy (1980) para a modelagem de processos aleatórios duplamente limitados. A distribuição Kumaraswamy é muito flexível, podendo assumir diversas formas, tais como unimodal, crescente, decrescente, constante, etc.

Dizemos que uma variável aleatória Y segue uma distribuição Kumaraswamy com parâmetros de forma $\phi > 0$ e $\delta > 0$ e suporte em (a, b), denotada $Y \sim K(\delta, \phi, a, b)$, se sua função densidade de probabilidade é dada por (Mitnik, 2013):

$$f(y; \phi, \delta) = \frac{\phi\delta}{b-a}\left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{\phi-1}\left[1 - \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{\phi}\right]^{\delta-1}, \tag{2.9}$$

para $a < y < b$. A média e a variância de Y são dadas por:

$$\mathbb{E}(Y) = a + (b-a)\delta B\left(1 + \frac{1}{\phi}, \delta\right) \tag{2.10}$$

e

$$\text{Var}(Y) = (b-a)^2 \left\{ \delta B\left(1 + \frac{2}{\phi}, \delta\right) - \left[\delta B\left(1 + \frac{1}{\phi}, \delta\right)\right]^2 \right\}, \tag{2.11}$$

onde $B(\cdot, \cdot)$ é a função Beta (Gupta e Nadarajah, 2004).

A falta de uma expressão tratável para sua média diminui a aplicabilidade da distribuição Kumaraswamy no contexto de modelos de regressão generalizados. Porém, a mediana da distribuição Kumaraswamy apresenta uma forma mais simples:

$$\text{med}(Y) = a + (b-a)\left(1 - 0.5^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\frac{1}{\phi}}. \tag{2.12}$$

Considerando que as suposições dos modelos Gaussianos acabam por ser muito restritivas em relação à dados limitados, a distribuição Kumaraswamy surge como opção para a modelagem desse tipo de dados.

2.5 Modelo KARMA

No trabalho Bayer et al. (2017) é introduzida a classe de modelos KARMA, um modelo dinâmico para séries temporais que assumem valores no intervalo (a, b) seguindo a distribuição Kumaraswamy. No modelo proposto, a mediana condicional é modelada por uma estrutura dinâmica contendo termos autoregressivos e de média móvel, regressores, parâmetros desconhecidos e uma função de ligação.

Seja $\{\bar{Y}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo tal que $\bar{Y}_t \in (a, b)$ com probabilidade 1, para todo $t \in \mathbb{Z}$ e a, b fixos, e seja $\mathscr{F}_{t-1}$ a σ-álgebra gerada pela informação observada até o tempo $t-1$. Considerando uma parametrização similar a Mitnik e Baek (2013), onde $\delta = \frac{\log(0.5)}{\log(1-\mu^{\phi})}$, a densidade condicional de $\bar{Y}_t$ dado $\mathscr{F}_{t-1}$ é dada pela seguinte parametrização:

$$f_{\mu_t}(y_t|\mathscr{F}_{t-1}) = \left(\frac{1}{b-a}\right) \frac{\phi \log(0.5)}{\log(1-\mu_t^{\phi})} y_t^{\phi-1} (1-y_t^{\phi})^{\frac{\log(0.5)}{\log(1-\mu_t^{\phi})}-1}, \; 0 < \mu_t < 1 \;, \; \phi > 0, \tag{2.13}$$

para $0 < y_t < 1$, onde $y_t = \frac{\bar{y}_t - a}{b-a}$ e $\mu_t = \frac{\bar{\mu}_t - a}{b-a}$, sendo $\bar{y}_t$ a e $\bar{\mu}_t$ a série original e a média original, respectivamente.

Sendo $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ uma função de ligação estritamente monótona e duas vezes continuamente diferenciável com inversa $g^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ também duas vezes continuamente diferenciável, é proposta a seguinte especificação para a mediana condicional μ_t:

$$\eta_t = g(\mu_t) = \alpha + \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(g(y_{t-i}) - \boldsymbol{x}_{t-i}'\boldsymbol{\beta}) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j r_{t-j}, \tag{2.14}$$

onde η_t é o preditor linear, $\boldsymbol{x}_t$ é o vetor de covariáveis, $\boldsymbol{\beta}'$ o vetor de parâmetros associados as covariáveis e φ e θ os coeficientes AR e MA, respectivamente. Resultados relacionados a $\bar{\mu}_t$ e $\bar{y}_t$, tais como valores preditos e intervalos de confiança, podem ser obtidos a partir de $\bar{\mu}_t = \mu_t(b-a)+a$ e $\bar{y}_t = y_t(b-a)+a$. As especificações (2.13) e (2.14) juntas definem o modelo KARMA(p,q).

A estimação em modelos KARMA é feita via máxima verossimilhança condicional, assim como no βARMA, sendo que são apresentadas pelos autores formas fechadas para o vetor Score e a Matriz de Informação Condicional de Fisher. A Teoria Assintótica é bem desenvolvida, havendo a prova que estabelece a consistência forte e normalidade assintótica do CMLE para o modelo KARMA(p,q). Por fim, uma aplicação à dados de taxa de umidade relativa do ar da cidade de Brasília é apresentada em Bayer et al. (2017). Foram ajustados modelos KARMA e βARMA e o modelo KARMA apresentou melhores resultados.

3 Geração de dados

Utilizou-se o software livre R versão 3.4.3 (R Core Team, 2017) para a simulação e para o ajuste das séries temporais dos modelos abordados no trabalho. Foram geradas séries βARMA e KARMA com as seguintes ordens: $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e βARFIMA nas ordens $(0,d,1)$, $(1,d,0)$, $(1,d,1)$.

Foram geradas 1000 replicações de cada série (exceto para os modelos βARFIMA, onde o número de replicações varia devido ao custo computacional - veja Capítulo 4), com o tamanho da série fixado em 506 observações - reservando-se os últimos 6 valores de cada série para a obtenção do erro quadrático médio de previsão - e a cada uma ajustou-se cada combinação das ordens para os 3 modelos: $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $\ldots$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$. Os parâmetros ϕ, θ e d foram fixados respectivamente em 0.5, 0.5 e 0.25. Utilizou-se também um burn-in[1] de 500. A função de ligação utilizada foi a *logit*.

Os critérios para retenção de modelos foram a obtenção de todos os coeficientes significativos e a não rejeição da hipótese nula no teste de Ljung-Box (Ljung e Box, 1978), ou seja, os resíduos do modelo devem ser um processo não correlacionado. Em todos os testes, utilizou-se um nível de significância de 5% e para o teste de Ljung-Box, utilizou-se 20 defasagens na hipótese nula. Modelos que atenderam aos critérios, foram posteriormente selecionados pelo critério de informação de Akaike (AIC, Akaike, 1973) e menor erro quadrático médio de previsão (daqui em diante denotado por EQM). A escolha destes dois critérios deu-se pela sua enorme diferença conceitual, já que o AIC é um estimador da qualidade relativa de um modelo em relação a um conjunto de dados enquanto o critério de minimização do EQM visa a selecionar modelos com melhor poder preditivo. A comparação entre estes dois critérios é interessante por si só. Em cada replicação, dentre todos os modelos que ajustaram à série simulada foi escolhido o que apresentou menor AIC bem como o que apresentou menor EQM.

Para gerar uma série de tamanho n, utilizamos o seguinte algoritmo. Primeiramente, define-se $r_t = 0$ e $\mu_t = g^{-1}(\alpha)$, para $t = 1, \ldots, m$. Em seguida, para $t = m+1$, obtém-se η_t de (2.5), (2.14) ou (2.8) (dependendo de qual modelo se quer gerar), e define-se $\mu_t = g^{-1}(\eta_t)$. Por fim, y_t é gerado independentemente a partir de (2.1) ou (2.13) com média ou mediana condicional μ_t, dependendo de qual distribuição se

[1]Burn-in é o termo que descreve a prática de descartar algumas iterações no começo de uma simulação de Monte Carlo, nas quais ainda não se alcançou convergência.

quer gerar, utilizando algum método adequado. Neste trabalho foi utilizado o método da transformada inversa para amostrar das distribuições Beta e Kumaraswamy.

4 Resultados

Nesta seção são apresentados os principais resultados obtidos no processo de simulação. Esses resultados são apresentados divididos em tabelas contendo o percentual de modelos que ajustaram aos modelos simulados e também os modelos selecionados via AIC e EQM. As tabelas estão divididas para cada modelo que foi ajustado. Para fins de otimização de espaço nas tabelas, βARMA, KARMA e βARFIMA estão codificados como βA, KA e βF, respectivamente.

4.1 Percentuais de ajuste

Nas tabelas abaixo são apresentadas as proporções de vezes que um determinado modelo (representado nas linhas) ajustou cada um dos modelos simulados (colunas). Relembrando que para considerarmos que um modelo ajustou uma série este deve apresentar todos os coeficientes significativos e o resíduo do modelo deve ser um processo não correlacionado, o que é verificado via teste de Ljung-Box. Em todos os casos utilizamos nível de significância de 5%.

A Tabela 4.1 apresenta os percentuais de ajuste dos modelos βARMA aos modelos simulados. Como esperado, obteve-se bom ajuste em relação aos modelos simulados βARMA nas três ordens $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$, com 90%, 96,2% e 90,1%, respectivamente, pelos modelos de ordens correspondentes. Não houve grande percentual de ajuste dos modelos βARMA aos modelos KARMA simulados, chegando a no máximo 50,9% pelo modelo βARMA$(0, 2)$ quando simulado o KARMA$(1, 0)$. Dada a flexibilidade de ambas distribuições, tais ocorrências exaltam o fato de que a modelagem da média e da mediana condicional produzem resultados bastante diferentes em termos de dinâmica de dependência. Por último, em relação ao βARFIMA, destaca-se o modelo de ordem $(1, d, 0)$, que foi bem ajustado em 96,3% dos casos pelo modelo βARMA$(1, 0)$, além de 80,6% das vezes pelo modelo βARMA$(0, 2)$.

Tabela 4.1: Percentual de ajuste dos Modelos βARMA

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	β**F**$(0,d,1)$	β**F**$(1,d,0)$	β**F**$(1,d,1)$
β**A(0,1)**	**90,0%**	10,7%	0,0%	**7,4%**	9,6%	0,0%	0,0%	8,9%	0,0%
β**A(0,2)**	4,5%	**80,8%**	**42,8%**	0,2%	**50,9%**	**7,6%**	4,7%	**80,6%**	0,0%
β**A(0,3)**	0,7%	50,6%	**82,7%**	0,0%	**27,6%**	**11,0%**	**15,3%**	**51,9%**	0,1%
β**A(1,0)**	16,5%	**96,2%**	0,0%	0,9%	**46,1%**	0,0%	1,4%	**96,3%**	**49,5%**
β**A(2,0)**	**79,1%**	4,0%	**47,8%**	7,6%	2,0%	5,7%	**47,0%**	3,4%	**16,3%**
β**A(3,0)**	41,5%	0,4%	**75,3%**	1,9%	0,2%	4,9%	**26,0%**	0,7%	4,6%
β**A(1,1)**	5,0%	5,1%	**90,1%**	0,2%	2,6%	**7,6%**	**36,9%**	5,2%	**13,7%**
β**A(1,2)**	10,2%	0,6%	4,3%	0,2%	0,1%	0,0%	10,4%	1,1%	0,9%
β**A(1,3)**	0,9%	2,0%	0,4%	0,3%	1,6%	0,1%	0,2%	2,9%	0,1%
β**A(2,1)**	2,7%	9,1%	5,0%	0,1%	5,5%	0,3%	5,7%	9,8%	1,1%
β**A(2,2)**	1,3%	1,4%	7,0%	0,5%	0,9%	1,5%	1,7%	1,2%	0,4%
β**A(2,3)**	**24,8%**	4,3%	1,2%	4,4%	2,1%	0,2%	0,8%	3,2%	0,2%
β**A(3,1)**	2,3%	1,1%	0,9%	0,3%	0,3%	0,1%	2,7%	0,9%	0,3%
β**A(3,2)**	1,8%	**28,3%**	0,4%	0,3%	**15,1%**	0,0%	0,8%	**29,0%**	**11,4%**
β**A(3,3)**	3,5%	2,5%	**25,4%**	0,3%	2,2%	4,6%	4,1%	2,8%	2,8%

A Tabela 4.2 apresenta os percentuais de ajuste dos modelos KARMA aos modelos simulados. Em relação aos modelos simulados βARMA, obteve-se um percentual de ajuste dos modelos KARMA de ordem correspondente similar e até maior que os do próprio βARMA em alguns casos, com 94,9%, 94,9% e 91,4% pelos modelos de ordem $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, respectivamente. No geral, como esperado, os modelos KARMA também se ajustaram aos modelos KARMA simulados com boa frequência, um ponto superior ao modelo βARMA, destacando-se aqui o modelo simulado KARMA$(1,0)$ que foi ajustado em 92,8% pelo KARMA de ordem correspondente. Quanto aos modelos βARFIMA, o desempenho dos modelos KARMA foi semelhante ao dos modelos βARMA, com percentual máximo de ajuste ao βARFIMA$(0,d,1)$ de 52,5% pelo KARMA$(1,1)$ e apenas 0,1% pelo KARMA$(0,1)$. O modelo βARFIMA$(1,d,0)$ foi ajustado pelo KARMA$(1,0)$ em 95,8% dos casos e pelo KARMA$(0,2)$ em 71,7%, e o βARFIMA$(1,d,1)$ foi bem ajustado em 47,3% das vezes pelo KARMA$(1,0)$. Estas altas porcentagens foram uma surpresa, pois não era esperado que o modelo KARMA fosse tão flexível na modelagem de séries temporais apresentando longa dependência na média condicional.

Tabela 4.2: Percentual de ajuste dos Modelos KARMA

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	β**F**$(0,d,1)$	β**F**$(1,d,0)$	β**F**$(1,d,1)$
KA(0,1)	**94,9%**	11,0%	0,0%	**58,6%**	7,4%	0,0%	0,1%	9,4%	0,0%
KA(0,2)	2,9%	**70,0%**	**35,8%**	0,2%	**75,1%**	**11,2%**	4,3%	**71,7%**	0,0%
KA(0,3)	0,5%	19,0%	**41,8%**	0,1%	**35,1%**	**44,1%**	9,4%	**19,4%**	0,1%
KA(1,0)	20,6%	**94,9%**	0,0%	7,0%	**92,8%**	0,0%	1,6%	**95,8%**	**47,3%**
KA(2,0)	**73,3%**	1,8%	**45,1%**	**48,4%**	0,2%	**20,6%**	**47,8%**	2,2%	8,7%
KA(3,0)	**22,4%**	0,1%	**54,6%**	**20,3%**	0,0%	**48,2%**	13,1%	0,4%	1,8%
KA(1,1)	3,7%	2,2%	**91,4%**	0,3%	0,3%	**57,9%**	**52,5%**	2,3%	6,7%
KA(1,2)	6,0%	0,5%	0,2%	2,6%	0,1%	0,3%	5,2%	0,9%	0,1%
KA(1,3)	0,3%	3,0%	0,9%	0,0%	0,7%	0,0%	0,2%	3,3%	0,2%
KA(2,1)	2,7%	7,3%	1,0%	0,3%	5,2%	0,4%	0,2%	7,9%	2,2%
KA(2,2)	1,0%	0,3%	2,0%	0,2%	0,1%	0,7%	1,3%	1,2%	0,4%
KA(2,3)	**26,0%**	4,7%	1,0%	**12,8%**	1,2%	0,0%	0,2%	4,8%	0,0%
KA(3,1)	1,3%	0,1%	0,6%	0,7%	0,0%	0,2%	3,3%	0,3%	0,6%
KA(3,2)	2,7%	**24,7%**	0,0%	0,2%	**20,0%**	0,0%	0,1%	**24,1%**	**12,4%**
KA(3,3)	1,4%	1,0%	**20,0%**	0,4%	0,4%	9,2%	4,6%	0,1%	2,3%

A Tabela 4.3 apresenta os percentuais de ajuste dos modelos βARFIMA aos modelos simulados. Vale ressaltar que há uma linha nesta tabela (denotada Rep) indicando o número de replicações em cada simulação, pois tal número variou de modelo para modelo devido ao alto custo computacional do processo de otimização.

Iniciando pelos modelos simulados βARMA, nota-se que houve um bom ajuste do βARMA$(0,1)$ pelo βARFIMA$(0,d,1)$ em 39,4% dos casos, não havendo nenhum outro grande percentual. Porém, em relação ao modelo βARMA$(1,0)$, houve 100% de ajuste pelo βARFIMA$(1,d,0)$ e ainda 78,2% pelo modelo de ordem $(1,d,1)$, o que surpreende, sendo o maior percentual de ajuste encontrado entre todos os modelos, mesmo com o número de replicações sendo 242. Para o modelo simulado βARMA$(1,1)$ também houve bom percentual de ajuste do modelo βARFIMA$(1,d,1)$, com 98,7%, seguido pelo modelo de ordem $(3,d,0)$, com 82,3%. Quando simulados KARMA, para os modelos de ordem $(0,1)$ e $(1,1)$ não houve nenhum ajuste por parte dos βARFIMA, frisando que aqui foram geradas apenas 131 e 128 replicações, respectivamente. Já para o KARMA$(1,0)$ houve bom ajuste pelo βARFIMA$(1,d,0)$ e $(1,d,1)$, com 92,1% e 79%, respectivamente. A maior surpresa se deu em relação aos próprios modelos βARFIMA simulados, onde praticamente apenas o modelo $(1,d,1)$ simulado apresentou ajuste, sendo este de 13,1%, pelo βARFIMA$(1,d,0)$, um valor muito aquém do esperado. Neste caso, uma possível causa pode ser o parâmetro m utilizado, que representa a truncagem para a soma infinita no modelo βARFIMA. Foi utilizado $m = 50$, o que é sabidamente um valor muito baixo, porém pela demora apresentada pelos modelos e o tempo disponível, foi a melhor opção a se utilizar.

Tabela 4.3: Percentual de ajuste dos Modelos βARFIMA

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	β**F**$(0,d,1)$	β**F**$(1,d,0)$	β**F**$(1,d,1)$
β**F**$(0,d,1)$	**39,4%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(0,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(0,d,3)$	0,0%	0,0%	**23,7%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(1,d,0)$	0,0%	**100%**	0,0%	0,0%	**92,1%**	0,0%	0,0%	1,3%	**13,1%**
β**F**$(2,d,0)$	0,3%	21,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%
β**F**$(3,d,0)$	0,0%	0,0%	**82,3%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(1,d,1)$	2,9%	**78,2%**	**98,7%**	0,0%	**79,0%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%
β**F**$(1,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(1,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(2,d,1)$	1,8%	**49,2%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(2,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(2,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(3,d,1)$	0,3%	0,0%	0,0%	0,0%	**29,0%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(3,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**F**$(3,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Rep.	**386**	**242**	**621**	**131**	**114**	**128**	**385**	**152**	**865**

4.2 Seleção de modelos

Nesta seção são apresentados os resultados relativos aos modelos selecionados através do AIC e do critério baseado no EQM, conforme explicado na seção 3. Em outras palavras, para cada modelo simulado foram ajustados diversos modelos, alguns com sucesso, outros não. Em cada replicação, dentre os modelos que se ajustaram com sucesso à série simulada[1], utilizamos o AIC e o critério baseado na minimização do

[1] em alguns casos ocorreu que nenhum modelo se ajustou à série

EQM para selecionar a série que "melhor" se ajustou ao modelo. As tabelas apresentadas nesta seção contém a porcentagem em que cada modelo foi selecionado como melhor modelo para as séries simuladas de acordo com os dois critérios citados. Apresenta-se também a frequência em que nenhum modelo se ajustou à série simulada.

A seguir, nas Tabelas 4.4 e 4.5, são apresentados os percentuais dos modelos que foram selecionados AIC e EQM para os modelos βARMA, para comparação entre as duas medidas. Pela Tabela 4.4 nota-se que o AIC mais frequentemente selecionou modelos correspondentes aos simulados, com pouca divisão entre os outros modelos ajustados. Para os modelos simulados βARMA$(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ têm-se 52,2%, 58,1% e 52,5% pelos modelos de ordem correspondente, respectivamente. Em relação aos modelos simulados KARMA$(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, obteve-se 4,9%, 28,2% e 5,7% pelos βARMA de ordem correspondente. Já os βARFIMA simulados mostraram um pouco mais de dispersão entre os modelos selecionados via AIC, principalmente com o modelo simulado βARFIMA$(0,d,1)$, que foi mais frequentemente selecionado pelo AIC pelos modelos βARMA$(2,0)$, $(3,0)$ e $(1,1)$, com 15,3%, 12,5% e 17%, respectivamente. Um percentual maior foi obtido para o βARFIMA$(1,d,0)$ com 57,8% pelo βARMA$(1,0)$.

Em relação aos EQM, pela Tabela 4.5 nota-se uma maior distribuição de percentual entre modelos ajustados, com a maioria dos modelos simulados apresentando três modelos selecionados via erro de previsão. Para os modelos simulados βARMA$(0,1)$ têm-se 30,1% pelo modelo de ordem correspondente e também 29,2% e 13,5% pelos modelos de ordem $(2,0)$ e $(3,0)$, respectivamente. Para o βARMA$(1,0)$ simulado obteve-se também grande percentual em três modelos diferentes ajustados, sendo 37,1%, 27,9% e 14,2% para os modelos de ordem $(1,0)$, $(0,2)$ e $(0,3)$, respectivamente, o que aconteceu também com o modelo βARMA$(1,1)$ simulado, onde os modelos de ordem $(1,1)$, $(2,0)$ e $(3,0)$ apresentaram 22,5%, 14,9% e 21,1%, respectivamente. Quando simulados modelos KARMA, devido ao baixo ajuste para os modelos de ordem $(0,1)$ e $(1,1)$, destaca-se apenas o modelo simulado KARMA$(1,0)$ para o qual foi selecionado 22,3% das vezes o modelo βARMA$(0,2)$ e 17,5% o modelo βARMA$(1,0)$. Por último, para os modelos βARFIMA simulados obtiveram-se resultados semelhantes aos de AIC para o modelo de ordem $(0,d,1)$, com percentual de menor EQM dividido entre os modelos βARMA$(2,0)$, $(3,0)$ e $(1,1)$, com 17,9%, 10,9% e 16,8%, respectivamente. Para o modelo de ordem $(1,d,0)$ têm-se também três modelos com bons percentuais: 29,6%, 14,2% e 36,1% para os modelos βARMA$(0,2)$, $(0,3)$ e $(1,1)$, respectivamente. Por último, o modelo βARFIMA$(1,d,1)$ teve os menores EQM concentrados no modelo ajustado βARMA$(1,0)$, com 37,4%.

Tabela 4.4: Frequência de seleção dos modelos βARMA via AIC

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	$\beta\mathbf{F}(0,d,1)$	$\beta\mathbf{F}(1,d,0)$	$\beta\mathbf{F}(1,d,1)$
β**A(0,1)**	**52,2%**	0,0%	0,1%	**4,9%**	1,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
β**A(0,2)**	1,0%	5,3%	0,9%	0,0%	9,1%	2,1%	0,2%	4,7%	0,0%
β**A(0,3)**	0,3%	4,5%	9,4%	0,0%	7,7%	3,7%	1,5%	6,4%	0,0%
β**A(1,0)**	0,0%	**58,1%**	0,1%	0,0%	**28,2%**	0,0%	0,0%	**57,8%**	**28,8%**
β**A(2,0)**	5,9%	1,0%	1,3%	1,7%	0,6%	0,7%	**15,3%**	0,6%	7,2%
β**A(3,0)**	6,3%	0,2%	7,4%	0,4%	0,3%	0,2%	**12,5%**	0,4%	4,2%
β**A(1,1)**	2,0%	2,6%	**52,5%**	0,1%	1,6%	**5,7%**	**17,0%**	2,4%	5,5%
β**A(1,2)**	5,1%	0,4%	1,7%	1,8%	0,2%	0,0%	2,1%	0,5%	0,6%
β**A(1,3)**	0,5%	0,5%	0,2%	0,1%	0,6%	0,0%	0,1%	1,1%	0,1%
β**A(2,1)**	1,1%	5,1%	3,0%	0,0%	1,8%	0,1%	0,4%	4,6%	1,0%
β**A(2,2)**	1,0%	1,1%	4,6%	0,4%	0,9%	1,4%	0,9%	1,0%	0,3%
β**A(2,3)**	**14,7%**	1,3%	1,0%	2,9%	0,5%	0,2%	0,5%	1,3%	0,2%
β**A(3,1)**	1,1%	0,9%	0,4%	0,3%	0,4%	0,0%	1,4%	0,3%	0,2%
β**A(3,2)**	0,7%	**16,0%**	0,4%	0,2%	**9,6%**	0,0%	0,3%	**15,3%**	7,4%
β**A(3,3)**	2,4%	1,9%	**14,0%**	0,3%	2,1%	3,7%	3,1%	1,9%	1,9%
Não ajuste	5,7%	1,1%	3,0%	86,9%	34,9%	82,2%	44,7%	1,7%	42,6%

Tabela 4.5: Frequência de seleção dos modelos βARMA via menor EQM

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	$\beta\mathbf{F}(0,d,1)$	$\beta\mathbf{F}(1,d,0)$	$\beta\mathbf{F}(1,d,1)$
β**A(0,1)**	**30,1%**	3,6%	0,0%	2,4%	3,9%	0,0%	0,0%	1,9%	0,0%
β**A(0,2)**	1,1%	**27,9%**	**11,5%**	0,1%	**22,3%**	**4,2%**	2,2%	**29,6%**	0,0%
β**A(0,3)**	0,4%	**14,2%**	**15,1%**	0,0%	7,9%	4,1%	5,8%	**14,2%**	0,1%
β**A(1,0)**	5,7%	**37,1%**	0,0%	0,5%	**17,5%**	0,0%	0,1%	**36,1%**	**37,4%**
β**A(2,0)**	**29,2%**	0,3%	**14,9%**	**3,4%**	0,4%	1,8%	**17,9%**	0,2%	6,3%
β**A(3,0)**	**13,5%**	0,2%	**21,1%**	0,6%	0,0%	1,4%	**10,9%**	0,3%	1,8%
β**A(1,1)**	0,8%	1,0%	**22,5%**	0,1%	0,6%	2,3%	**16,8%**	0,4%	4,3%
β**A(1,2)**	2,2%	0,3%	0,4%	1,4%	0,0%	0,0%	1,3%	0,6%	0,3%
β**A(1,3)**	0,2%	0,3%	0,0%	0,2%	0,4%	0,0%	0,1%	0,9%	0,1%
β**A(2,1)**	0,5%	2,7%	0,6%	0,1%	1,9%	0,0%	1,0%	3,0%	0,6%
β**A(2,2)**	0,2%	0,1%	2,3%	0,5%	0,3%	1,0%	0,5%	0,5%	0,1%
β**A(2,3)**	8,4%	1,1%	0,7%	3,1%	0,7%	0,2%	0,2%	0,7%	0,1%
β**A(3,1)**	0,7%	0,2%	0,0%	0,1%	0,2%	0,0%	0,7%	0,5%	0,0%
β**A(3,2)**	0,5%	9,1%	0,0%	0,2%	5,0%	0,0%	0,2%	8,3%	4,6%
β**A(3,3)**	0,8%	0,7%	6,4%	0,2%	1,0%	2,8%	1,2%	1,1%	1,7%
Não ajuste	5,7%	1,2%	4,5%	87,1%	37,9%	82,2%	41,1%	1,7%	42,6%

Nas Tabelas 4.6 e 4.7 são apresentados os percentuais dos modelos selecionados via AIC e EQM para os modelos KARMA. Analisando a Tabela 4.6, para os modelos βARMA simulados têm-se percentuais parecidos e praticamente bem divididos sempre entre dois modelos. Para o βARMA$(0,1)$, o KARMA$(0,1)$ foi selecionado 48,7% das vezes. Para o βARMA$(1,0)$, obteve-se 53,7% pelo KARMA de ordem correspondente e, por último, para o βARMA$(1,1)$, obteve-se 50,6% pelo KARMA de ordem correspondente e 14,9% pelo KARMA$(3,3)$. Vale ressaltar o fato de que alguns modelos de ordem superior foram selecionados com grande frequência. Quando simulados modelos KARMA obtiveram-se resultados semelhantes aos βARMA, porém os modelos KARMA de ordem correspondente aos simulados concentraram os melhores resultados, com 43,6%, 70,1% e 45,5% para os modelos de ordem $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, respectivamente. Por fim, ao simular modelos βARFIMA apenas o modelo de ordem $(1,d,0)$ apresentou bom percentual pelo KARMA de ordem correspondente, com 51,4%. Os modelos βARFIMA$(0,d,1)$ e $(1,d,1)$ apresentaram 29,5% e 33,2% quando ajustados pelos modelos KARMA$(1,1)$ e $(1,0)$, respectivamente, não tendo nenhum dos dois a ordem correspondente selecionada com boa frequência.

Pela Tabela 4.7 novamente nota-se resultados um pouco mais divididos entre diferentes modelos ajustados. Ao simular o βARMA$(0,1)$ obteve-se menor EQM em 37% das vezes pelo KARMA$(0,1)$. Para o modelo βARMA$(1,0)$ obteve-se 42,4% pelo modelo KARMA de ordem correspondente e também 30,2% pelo KARMA$(0,2)$, e para o modelo βARMA$(1,1)$ obteve-se 30,6% pelo KARMA de ordem correspondente seguido por 21% e 14,1% pelos modelos KARMA$(3,0)$ e $(2,0)$, respectivamente. Nota-se que modelos com mais parâmetros foram frequentemente selecionados via EQM. Em relação aos modelos KARMA simulados, para o KARMA$(0,1)$ obteve-se 24,1% pelo modelo KARMA$(0,1)$. Para o KARMA$(1,0)$ obteve-se 39,1% pelo modelo KARMA$(1,0)$ e também 33,9% pelo KARMA$(0,2)$. Por fim, para o KARMA$(1,1)$ obteve-se 16,8% pelo KARMA de ordem correspondente, a menor frequência para os modelos KARMA. Para os modelos βARFIMA$(0,d,1)$ obteve-se 30,1% pelo modelo KARMA$(1,1)$. Ao simular o βARFIMA$(1,d,0)$, o KARMA$(1,0)$ foi responsável por 44,5% dos menores EQM seguido pelo $(2,0)$, com 30,3%. Por último, para o βARFIMA$(1,d,1)$, o KARMA$(1,1)$ obteve 39,3% de vezes o menor EQM. Aqui, para os modelos βARFIMA, os modelos de ordem correspondente foram selecionados com maior frequência quando comparados com a seleção via AIC.

Tabela 4.6: Frequência de seleção dos modelos KARMA via AIC

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	β**F**$(0,d,1)$	β**F**$(1,d,0)$	β**F**$(1,d,1)$
KA(0,1)	**48,7%**	0,3%	0,0%	**43,6%**	0,1%	0,0%	0,0%	0,3%	0,0%
KA(0,2)	1,0%	9,2%	4,2%	0,1%	3,5%	0,0%	0,4%	**10,2%**	0,0%
KA(0,3)	0,4%	6,4%	9,9%	0,2%	6,6%	4,5%	1,4%	6,0%	0,0%
KA(1,0)	0,1%	**53,7%**	0,0%	0,2%	**70,1%**	0,0%	0,2%	**51,4%**	**33,2%**
KA(2,0)	8,7%	0,5%	2,4%	4,0%	0,2%	0,1%	**18,3%**	0,6%	4,9%
KA(3,0)	7,5%	0,1%	8,7%	4,5%	0,0%	4,3%	5,9%	0,3%	1,8%
KA(1,1)	2,3%	1,1%	**50,6%**	0,3%	0,1%	**45,5%**	**29,5%**	1,1%	2,4%
KA(1,2)	3,3%	0,4%	0,0%	1,3%	0,1%	0,3%	1,8%	0,8%	0,1%
KA(1,3)	0,2%	1,5%	0,7%	0,1%	0,2%	0,0%	0,1%	2,0%	0,2%
KA(2,1)	1,8%	3,9%	0,5%	0,3%	2,7%	0,1%	1,3%	4,4%	1,9%
KA(2,2)	0,6%	0,3%	1,7%	0,3%	0,1%	0,5%	0,8%	0,8%	0,1%
KA(2,3)	**19,6%**	2,5%	0,8%	8,3%	0,7%	0,0%	0,1%	2,1%	0,0%
KA(3,1)	0,7%	0,0%	0,4%	0,5%	0,0%	0,1%	2,5%	0,2%	0,3%
KA(3,2)	1,3%	**16,7%**	0,0%	0,1%	**10,4%**	0,0%	0,1%	**16,7%**	**10,5%**
KA(3,3)	1,1%	0,9%	**14,9%**	0,5%	0,4%	5,5%	4,1%	0,9%	2,1%
Não ajuste	2,7%	2,5%	5,2%	35,7%	4,8%	39,1%	33,5%	2,2%	42,5%

Tabela 4.7: Frequência de seleção dos modelos KARMA via menor EQM

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	β**F**$(0,d,1)$	β**F**$(1,d,0)$	β**F**$(1,d,1)$
KA(0,1)	**37,0%**	4,2%	0,0%	**24,1%**	2,1%	0,0%	0,0%	3,2%	0,0%
KA(0,2)	0,5%	**30,2%**	9,9%	0,0%	**33,9%**	3,7%	1,7%	**30,3%**	0,0%
KA(0,3)	0,3%	6,3%	**10,9%**	0,1%	**10,7%**	**14,7%**	3,2%	6,1%	0,1%
KA(1,0)	6,8%	**42,4%**	0,0%	2,6%	**39,1%**	0,0%	0,6%	**44,5%**	**39,3%**
KA(2,0)	**29,1%**	0,5%	**14,1%**	**21,9%**	0,1%	7,8%	**20,1%**	0,4%	4,4%
KA(3,0)	8,2%	0,0%	**21,0%**	7,5%	0,0%	**13,9%**	5,2%	0,1%	0,7%
KA(1,1)	1,0%	0,5%	**30,6%**	0,0%	0,0%	**16,8%**	**30,1%**	0,9%	3,2%
KA(1,2)	1,7%	0,1%	0,1%	0,7%	0,1%	0,1%	1,0%	0,4%	0,1%
KA(1,3)	0,0%	0,5%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	1,4%	0,2%
KA(2,1)	0,6%	2,6%	0,0%	0,0%	2,0%	0,2%	0,5%	1,6%	1,7%
KA(2,2)	0,2%	0,3%	0,7%	0,1%	0,0%	0,2%	0,4%	0,2%	0,0%
KA(2,3)	9,6%	1,4%	0,5%	5,6%	0,8%	0,0%	0,0%	1,3%	0,0%
KA(3,1)	0,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,5%	0,1%	0,4%
KA(3,2)	1,5%	8,3%	0,0%	0,2%	6,1%	0,0%	0,1%	6,8%	6,1%
KA(3,3)	0,5%	0,2%	7,0%	0,0%	0,2%	3,5%	2,0%	0,5%	1,3%
Não ajuste	2,7%	2,5%	5,2%	37,2%	4,8%	39,1%	33,5%	2,2%	42,5%

A seguir, nas Tabelas 4.8 e 4.9, são apresentados os percentuais dos modelos selecionados AIC e EQM para os modelos βARFIMA, para comparação entre as duas medidas. Vale lembrar que houveram modelos que não conseguiram ajustar às séries simuladas, portanto os percentuais são 0% em diversos casos e também que o número de replicações varia, apresentado na linha final da tabela.

Pela Tabela 4.8 observam-se os percentuais de seleção via AIC para os modelos βARFIMA ajustados. Iniciando com os βARMA simulados, para o modelo de ordem $(0, 1)$, o modelo βARFIMA$(0, d, 1)$ apresentou foi selecionado em 36,3% das vezes. Para o βARMA$(1, 0)$ obteve-se 45,5% pelo βARFIMA$(1, d, 0)$ e para o βARMA$(1, 1)$, o modelo βARFIMA$(1, d, 1)$ foi selecionado em 60,0% das vezes. Aqui nota-se bons percentuais pelos modelos de ordem correspondente no geral. Para o KARMA$(1, 0)$, único que apresentou ajuste pelo βARFIMA, obteve-se 48,3% pelo βARFIMA$(1, d, 0)$ e 29,0% pelo $(3, d, 1)$, o que não era esperado, pois um modelo com mais parâmetros no geral apresenta AIC maior. Passando para os βARFIMA simulados, onde apenas os modelos de ordem $(1, d, 0)$ e $(1, d, 1)$ obtiveram ajuste, têm-se para o primeiro 1,3% pelo βARFIMA$(1, d, 0)$ e 13,1% para o segundo pelo modelo de ordem $(1, d, 1)$.

Por fim, para analisar os percentuais de menor EQM para o modelo βARFIMA, tem-se a Tabela 4.9. No geral obtiveram-se resultados semelhantes aos anteriores. Começando pelo modelo βARMA$(0, 1)$, tem-se 37,8% pelo βARFIMA $(0, d, 1)$. Para o βARMA$(1, 0)$ têm-se 45,0% pelo βARFIMA$(1, d, 0)$ e 46,3% pelo βARFIMA $(1, d, 1)$ e para o βARMA$(1, 1)$ obteve-se 53,0% pelo βARFIMA$(1, d, 1)$ e 44,0% pelo $(3, d, 0)$. Novamente obteve-se bons percentuais por modelos com mais parâmetros, algo fora do esperado. Passando para os KARMA simulados, novamente apenas houve percentual no KARMA$(1, 0)$, que obteve o menor EQM em 92,1% das vezes, com o modelo βARFIMA$(1, d, 0)$, um grande percentual, sendo uma surpresa. Por fim, para os modelos βARFIMA, devido ao baixo ajuste obtiveram-se os mesmos resultados que para a tabela anterior, com apenas 1,3% para o modelo de ordem $(1, d, 0)$ quando ajustado pelo βARFIMA$(1, d, 0)$ e 13,1% para o modelo de ordem $(1, d, 1)$ também quando ajustado pelo βARFIMA$(1, d, 0)$. Novamente, aqui destaca-se que uma das causas para o baixo ajuste dos modelos βARFIMA pode ser o parâmetro m muito pequeno.

Tabela 4.8: Frequência de seleção dos modelos βARFIMA via AIC

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	$\beta\mathbf{F}(0,d,1)$	$\beta\mathbf{F}(1,d,0)$	$\beta\mathbf{F}(1,d,1)$
$\beta\mathbf{F}(0,d,1)$	**36,3%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(0,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(0,d,3)$	0,0%	0,0%	10,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(1,d,0)$	0,0%	**45,5%**	0,0%	0,0%	**48,3%**	0,0%	0,0%	1,3%	**13,1%**
$\beta\mathbf{F}(2,d,0)$	0,3%	11,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%
$\beta\mathbf{F}(3,d,0)$	0,0%	0,0%	**28,8%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(1,d,1)$	2,9%	**33,9%**	**60,0%**	0,0%	14,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%
$\beta\mathbf{F}(1,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(1,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(2,d,1)$	1,3%	9,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(2,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(2,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(3,d,1)$	0,3%	0,0%	0,0%	0,0%	**29,0%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(3,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(3,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Não ajuste	59,0%	0,0%	0,8%	100,0%	7,9%	100,0%	100,0%	98,7%	86,1%
Rep	**386**	**242**	**621**	**131**	**114**	**128**	**385**	**152**	**865**

Tabela 4.9: Frequência de seleção dos modelos βARFIMA via menor EQM

	Simulado								
Ajustado	β**A(0,1)**	β**A(1,0)**	β**A(1,1)**	**KA(0,1)**	**KA(1,0)**	**KA(1,1)**	β**F(0,d,1)**	$\beta\mathbf{F}(1,d,0)$	$\beta\mathbf{F}(1,d,1)$
$\beta\mathbf{F}(0,d,1)$	**37,8%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(0,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(0,d,3)$	0,0%	0,0%	2,25%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(1,d,0)$	0,0%	**45,0%**	0,0%	0,0%	**92,1%**	0,0%	0,0%	1,3%	**13,1%**
$\beta\mathbf{F}(2,d,0)$	0,26%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%
$\beta\mathbf{F}(3,d,0)$	0,0%	0,0%	**44,0%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(1,d,1)$	1,81%	**46,3%**	**53,0%**	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%
$\beta\mathbf{F}(1,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(1,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(2,d,1)$	1,0%	8,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(2,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(2,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(3,d,1)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(3,d,2)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\beta\mathbf{F}(3,d,3)$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Não ajuste	59,1%	0,0%	0,8%	100,0%	7,9%	100,0%	100,0%	98,7%	86,1%
Rep	**386**	**242**	**621**	**131**	**114**	**128**	**385**	**152**	**865**

5 Conclusões

Séries temporais limitadas aparecem com bastante frequência em áreas tais como a Hidrologia e Meteorologia, e modelos dinâmicos para modelagem de tais dados vêm sendo propostos nos últimos anos. O trabalho Benjamin et al. (2003) e a introdução da distribuição Beta nesse contexto de modelagem com o pioneiro trabalho Ferrari e Cribari-Neto (2004) serviram como alicerce para posterior criação dos modelos apresentados neste trabalho, a saber, βARMA, KARMA e βARFIMA.

Este trabalho visou apresentar os modelos citados e, a partir de simulações de Monte Carlo, estabelecer uma comparação de desempenho entre eles, frente ao problema de especificação incorreta do processo gerador. Considerando as diferenças entre cada modelo, desejou-se investigar se existe alguma “intersecção” prática entre eles e responder as questões propostas, para descobrir se existe alguma indicação de qual modelo utilizar dado o desconhecimento do processo gerador dos dados e também se há algum modelo que possa ser considerado o “melhor”. Os resultados se basearam no número de ajustes de cada modelo a cada série simulada, e num segundo momento, na seleção de modelos por meio de dois critérios: o AIC e o menor EQM.

Em relação aos resultados, de maneira geral, foram obtidos bons números em relação ao ajuste pelos modelos βARMA e KARMA, com os modelos βARFIMA apresentando alguma dificuldade para ajustar certos modelos, por vezes até o próprio βARFIMA simulado. Uma possível causa é o parâmetro m (ver Capítulo 4) com valor baixo utilizado, levando-se em conta que é um parâmetro que sabidamente deixava o processo de ajuste mais lento. Sabendo que certos ajustes do modelo βARFIMA levaram até quarenta minutos, foi escolhido tal m visando não aumentar ainda mais a demora do ajuste. Os modelos KARMA se mostraram mais flexíveis para ajustar os modelos βARMA, apresentando números melhores que os próprios ajustes para os KARMA simulados. Por outro lado, os modelos βARMA não conseguiram ajustes tão frequentes aos modelos KARMA simulados, sendo assim, no geral os modelos KARMA se saíram melhor em relação aos outros dois modelos.

Considerando-se a seleção de modelos, os critérios apresentam claras diferenças. Em geral o AIC seleciona menos modelos por modelo simulado, enquanto o critério de previsão selecionou sempre dois ou mais modelos, no geral. O AIC geralmente também selecionou os modelos ajustados de ordem correspondente aos simulados e em poucas vezes modelos com mais parâmetros, dado que o AIC penaliza a inclusão de mais parâmetros. Por outro lado, o critério de previsão selecionou modelos de ordens um pouco mais elevadas, algo esperado, visto que é notável que um modelo com mais parâmetros por vezes apresente melhores previsões.

Respondendo às questões propostas no trabalho, devido a maior flexibilidade apresentada, o modelo KARMA se destaca como a “melhor” opção numa situação de desconhecimento do processo gerador dos dados com que se está trabalhando. Mesmo teoricamente distintos, ficou clara a “intersecção” entre os modelos na prática, tendo todos demostrado desempenho satisfatório no geral ao se deparar com os outros modelos, exceto em casos específicos já discutidos.

Por fim, o βARFIMA que acabou surpreendendo negativamente em relação aos ajustes dos próprios βARFIMA gerados, mostrou-se satisfatoriamente aproximável pelos outros dois modelos, diminuindo assim a necessidade da utilização de um modelo mais complexo, a não ser que a longa dependência na média seja explicada nos dados. No entanto, se faz necessária uma investigação mais detalhada por conta de algumas baixíssimas porcentagens de ajuste do modelo βARFIMA, tendo em conta as questões computacionais mencionadas no Capítulo 4.

6 Trabalhos futuros

Futuros projetos incluem a citada investigação do porquê do pouco ajuste do modelo βARFIMA, também visando concluir todas as mil replicações para cada modelo, dessa maneira padronizando as análises, além de testar a utilização de um parâmetro m maior. Para isso, pode-se considerar a migração para outra linguagem de programação mais rápida, em particular, FORTRAN, bem como a otimização do próprio código que foi implementado pelos autores do artigo (Pumi et al., 2018).

Nosso principal objetivo imediato é a publicação de um artigo científico incluindo os resultados obtidos neste trabalho e também a comparação entre várias funções de ligação no contexto de especificação incorreta desta, tendo em vista que neste trabalho se utilizou apenas a função de ligação *logit* tanto na geração das séries quanto na estimação dos modelos.

Referências Bibliográficas

Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *2nd International Symposium on Information Theory*, páginas 267–281.

Bayer, F., Bayer, D., e Pumi, G. (2017). Kumaraswamy autoregressive moving average models for double bounded environmental data. *Journal of Hydrology*, páginas 79–88.

Benjamin, M. A., Rigby, R. A., e Stasinopoulos, D. M. (2003). Generalized autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association*, páginas 214–223.

Brockwell, P. J. e Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods, 2ª Edição*. Springer-Verlag.

Ferrari, S. e Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, páginas 799–815.

Fokianos, K. e Kedem, B. (2002). *Regression Models for Time Series Analysis*, volume 1. Wiley.

Granger, C. e Joyeux, R. (1980). An introduction to long memory time series and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis 1*, páginas 15–30.

Gupta, A. K. e Nadarajah, S. (2004). *Handbook of Beta Distribution and Its Applications*. CRC Press.

Honsking, J. (1981). Fractional differencing. *Biometrika 1*, páginas 165–176.

Kumaraswamy, P. (1980). A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, páginas 79–88.

Ljung, G. e Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, páginas 297–303.

Mitnik, P. A. (2013). New properties of the kumaraswamy distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, páginas 741–755.

Mitnik, P. A. e Baek, S. (2013). The kumaraswamy distribution: median-dispersion re-parameterizations for regression modeling and simulation-based estimation. *Statistical Papers*, páginas 177–192.

Pumi, G., Valk, M., Bisognin, C., e Bayer, F. (2018). Beta autoregressive fractionally integrated moving average models. *Journal of Statistical Planning and Inference.*

R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Rocha, A. V. e Cribari-Neto, F. (2009). Beta autoregressive moving average models. *TEST*, páginas 529–545.

Schuster, A. (1898). On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena. *Journal of Geophysical Research*, páginas 13–41.