

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE NUMÉRICA NA ENGENHARIA DO VENTO COMPUTACIONAL
EMPREGANDO COMPUTAÇÃO DE ALTO DESEMPENHO E SIMULAÇÃO DE
GRANDES ESCALAS

por

Guilherme Luiz Piccoli

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2009

ANÁLISE NUMÉRICA NA ENGENHARIA DO VENTO COMPUTACIONAL
EMPREGANDO COMPUTAÇÃO DE ALTO DESEMPENHO E SIMULAÇÃO DE
GRANDES ESCALAS

por

Guilherme Luiz Piccoli
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Energia

Orientador: Prof. Dr. Adriane Prisco Petry

Aprovada por:

Prof. Dr. Acir Mércio Loredou-Souza

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Prof^a. Dr^a. Flávia Schwarz Franceschini Zinani

Prof. Dr. Horácio Antonio Vielmo
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Maio de 2009

"O vento dos desejos que então se desprendia das capas coloridas dos livros deve-se apossar de mim novamente, para derreter o pesado bloco morto de chumbo que se encontra dentro de mim, e despertar de novo a impaciência do futuro, a alegria alada do mundo dos pensamentos."

Erich Maria Remarque

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer profundamente aos meus pais (Jairo e Adelaide) e meus irmãos (Maurício e Verônica) pela paciência, compreensão e amor incondicional;

Aos meus tios Leonardo e Terezinha, pela sempre agradável companhia e pela preocupação demonstrada;

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, instituição que me acolheu de maneira respeitosa e a qual devo importante parcela do meu aprendizado;

À professora Dr^a. Adriane Prisco Petry, pela duradoura parceria acadêmica, pelos ensinamentos transmitidos e pela profunda amizade desenvolvida ao longo dos anos de orientação;

Aos colegas do GESTE (Grupo de Estudos Térmicos e Energéticos), uma família durante o desenvolvimento deste trabalho;

Ao colega Elizaldo Dominguez dos Santos, pelos conhecimentos transmitidos, pelas parcerias acadêmicas e pela amizade desenvolvida nestes dois anos de dissertação;

Aos professores Dr. Armando Miguel Awruch e Dr. João Ricardo Masuero pelas importantes contribuições designadas a este trabalho;

Aos professores Dr. Francis Henrique Ramos França e Dr. Paulo Schmidt Schneider, os quais são exemplos em suas funções e seres humanos de enorme caráter;

Aos funcionários José Luiz Salvadoretti e João Batista da Rosa pela colaboração e auxílio;

Aos funcionários do CESUP, em especial a pessoa do MSc. Luiz Fernando Nunes Fernandez;

Aos membros da banca, pelo aceite ao convite de contribuir neste estudo;

Aos bolsistas de iniciação científica Dionísio Carmignan Neto e Marco Lovatto Leonardelli pelo dedicado apoio a este trabalho;

Aos funcionários e professores do PROMEC;

A Capes pelo apoio Financeiro;

Ao GESTE e ao CESUP pelos recursos disponibilizados;

E aos meus estimados amigos, sem os quais nada disso seria possível.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um sistema voltado à solução de problemas relacionados à Engenharia do Vento Computacional. Para o tratamento das estruturas turbulentas, a Simulação das Grandes Escalas é empregada. Esta metodologia resolve diretamente as estruturas que governam a dinâmica local do escoamento (grandes escalas) e utiliza modelos para resolver as escalas com características mais universais (pequenas escalas). Neste estudo, os efeitos sub-malha são obtidos a partir do modelo clássico de Smagorinsky.

Na análise numérica, o método dos elementos finitos é avaliado a partir da utilização de elementos hexaédricos e uma formulação baseada nas equações governantes de escoamentos quase-incompressíveis. Para reduzir o requerimento de memória computacional, esquemas explícitos para solução de sistemas de equações são empregados.

O primeiro aspecto a ser abordado para o desenvolvimento do sistema proposto é a redução do tempo de processamento. Partindo do algoritmo desenvolvido por [Petry, 2002], desenvolve-se um estudo a cerca de técnicas computacionais de alto desempenho visando acelerar o processamento dos problemas. Assim, apresenta-se um comparativo entre alocações estática e dinâmica de vetores e matrizes, juntamente a implementação do paralelismo de memória compartilhada utilizando diretivas OpenMP. A verificação do aumento da velocidade de processamento é desenvolvida simulando o escoamento em um domínio contendo um corpo imerso aerodinamicamente rombudo. As técnicas utilizadas permitiram a obtenção de um aumento de aproximadamente cinco vezes em relação ao código originalmente avaliado.

Uma importante dificuldade na avaliação de escoamentos externos está na solução numérica de problemas advectivo-dominantes. O esquema de Taylor-Galerkin explícito-iterativo, originalmente presente no código e validado para escoamentos internos, mostrou-se inadequado para avaliação do escoamento externo proposto, apresentando perturbações no campo de pressões e não convergindo para a solução correta do problema. Estas instabilidades persistiram em uma versão alternativa desenvolvida, a qual utilizava funções de interpolação de igual ordem para solução da pressão e velocidade.

Para uma análise de escoamentos não confinados, é implementado o esquema temporal de dois passos utilizando funções de interpolação para velocidade e pressão de mesma ordem. Esta configuração apresentou resultados físicos de boa qualidade e importante redução no tempo de processamento.

Após a identificação da alternativa que permitiu a avaliação dos resultados sem a presença de perturbações, apresenta-se a análise do escoamento sobre um prisma quadrado bidimensional, privilegiando o monitoramento da velocidade, pressão e energia cinética total da turbulência na linha central do domínio e nas proximidades do obstáculo. Esta avaliação é efetuada em malhas com configurações uniformes e irregulares para um número de Reynolds igual a 22000.

Palavras-Chave: Energia do Vento Computacional, Corpos Rombudos, Simulação de Grandes Escalas, Elementos Finitos, Computação Paralela

ABSTRACT

“NUMERICAL ANALYSIS IN THE COMPUTATIONAL WIND ENGINEERING EMPLOYING HIGH-PERFORMANCE PROGRAMMING AND LARGE EDDY SIMULATION”

Development of a system to solve problems related to Computational Wind Engineering is the main aim of this work. In order to treat turbulent structures, Large Eddy Simulation is employed. This methodology compute directly scales governing local flow dynamics (large eddies) and it use models to solve those with universal character (small eddies). In this study, the sub-grid effects are considered using the standard Smagorinsky model.

In the numerical analysis, hexahedral finite elements are used and a formulation based on the governing equations of quasi-compressible flows. To reduce the computational memory request, explicit schemes to solve the equations system are used.

In order to reduce CPU time, an algorithm developed by [Petry, 2002] is evaluated and high-performance techniques aiming to accelerate the problem solution are studied. Thus, it is showed a comparison between dynamic and static allocations of vectors and matrices associated to the implementation of shared-memory parallelization using OpenMP directives. The speed up verification is developed simulating the flow around an immersed bluff body. As a consequence of the techniques employed here, an acceleration of approximately five times with respect of the original computational code is obtained.

An important difficulty in the external flow evaluation is the numerical solution of convection dominated flows. The Taylor-Galerkin explicit-iterative scheme, (originally used by the program), which was validated for confined flows, did not present good results for external flows simulations and pressure field perturbations were observed. These instabilities were persevered even in an alternative version, where interpolations functions with the same order were used to compute velocity and pressure (in the original version, constant pressure field at element level were employed).

To analyze unbounded flows accurately, a two-step explicit scheme using velocity and pressure interpolation functions with the same order was implemented. This configuration presented physical results with good quality and achieve an important reduction in the processing time.

After identification of the best alternative without perturbations of the pressure field, the numerical simulation of the flow around a two-dimensional square cylinder was investigated

favoring velocity, pressure and total kinetic energy evaluations along the mid line of the domain and in the obstacle vicinity. These evaluations were effectuated with uniform and stretched meshes for a Reynolds number equal to 22000.

Keywords: Computational Wind Engineering, Bluff Bodies, Large Eddy Simulation, Finite Elements, Parallel Computation

ÍNDICE

	Pág.
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Apresentação	1
1.2 Objetivos, Metodologia e Organização do Trabalho.....	2
1.3 Aspectos Gerais da Engenharia do Vento Computacional (EVC).....	5
1.4 Escoamentos Externos sobre Corpos Imersos.....	9
1.5 Simulação Numérica de Escoamentos Turbulentos	16
1.5.1 Simulação Numérica Direta	18
1.5.2 Simulação Numérica via Equações Médias de Reynolds.....	20
1.5.3 Simulação de Grandes Escalas	24
1.6 Método dos Elementos Finitos.....	31
2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	35
2.1 Equações que Governam a Dinâmica dos Fluidos	35
2.2 Equações para Escoamentos Turbulentos via Simulação de Grande Escalas	40
2.3 Modelos de Turbulência Sub-Malha	43
2.3.1 Modelo de Smagorinsky.....	45
3 MODELAGEM NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	46
3.1 Método dos Elementos Finitos.....	46
3.2 Formulação dos Resíduos Ponderados do Problema.....	47
3.3 Equações de Elementos Finitos do Problema.....	49
3.4 Discretização Temporal utilizando o Método Explícito-Iterativo.....	53
3.5 Discretização Temporal utilizando o Método Explícito de Dois Passos	57
3.6 Fluxograma para o Método Explícito-Iterativo.....	59
3.7 Fluxograma para o Método Explícito de Dois Passos.....	60
3.8 Condição de Estabilidade	61
3.9 Integração Explícita das Matrizes de Elemento	62
4 COMPUTAÇÃO PARALELA.	69
5 RESULTADOS.....	73
5.1 Avaliação do Tempo de Processamento.....	74
5.2 Escoamento sobre um prisma quadrado bidimensional	82
5.2.1 Esquema Explícito-Iterativo com Função de Interpolação Constante para a Pressão	83
5.2.2 Esquema Explícito-Iterativo com Função de Interpolação Linear para a Pressão	92
5.2.3 Esquema Explícito de Dois Passos com Função de Interpolação Linear para a Pressão	96
6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE FUTUROS TRABALHOS	113
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas

A_j	Matriz advectiva com funções de interpolação (quantidade de movimento)
C	Velocidade de propagação do som [m/s]
C_s	Constante de Smagorinsky [-]
C_d	Função de proporcionalidade dinâmica [-]
C_p	Coefficiente de Pressão [-]
C_{ij}	Tensor cruzado
d	Comprimento característico do obstáculo [m]
D_{ij}	Matriz difusiva com funções de interpolação (quantidade de movimento)
e	Parâmetro de diagonalização seletiva [-]
F_i	Matriz das funções de interpolação referente às condições de contorno naturais
f_i	Componente das forças de campo na direção i [N/m ³]
G_i	Matriz com funções de interpolação dos termos do campo de pressões
G_j^T	Matriz com funções de interpolação dos termos da divergência da velocidade
J	Matriz Jacobiana
$ J $	Determinante da matriz Jacobiana
\bar{J}	Matriz adjunta da Jacobiana
K_{SM}	Energia cinética turbulenta sub-malha [m ² /s ²]
L_{ij}	Tensor de Leonard
Ma	Número de Mach $\left[\frac{v}{C} \right]$ [-]
M_{DP}	Matriz de massa da pressão discreta ou diagonalizada
M_{DV}	Matriz de massa da velocidade discreta ou diagonalizada
M_P	Matriz de massa da pressão
M_S	Matriz de massa seletiva
M_V	Matriz de massa da velocidade
n_j	Cosseno diretor do vetor normal ao contorno considerado

p	Pressão [N/m ²]
\bar{p}	Pressão correspondente as grandes escalas [N/m ²]
p'	Pressão correspondente às pequenas escalas [N/m ²]
p^*	Função peso para a pressão
\bar{p}	Vetor de valores nodais para a pressão
\tilde{p}^*	Vetor de valores nodais da função peso para a pressão
Pe	Número de Peclet [-]
Re _d	Número de Reynolds [-]
S_{ij}	Taxa de deformação do campo de velocidades [s ⁻¹]
$ \bar{S} $	Magnitude do tensor taxa de deformação do campo filtrado
t	Tempo [s]
t_i	Valores prescritos das forças de superfície no contorno [N/m ²]
t^*	Tempo adimensional [-]
U_∞	Velocidade incidente [m/s]
U^*	Velocidade adimensional [-]
v_i	Velocidade na direção i [m/s]
\hat{v}_i	Valores prescritos da componente i da velocidade no contorno [m/s]
\bar{v}_i	Componente do vetor velocidade, correspondente as grandes escalas, na direção i [m/s]
v'_i	Componente do vetor velocidade, correspondente as pequenas escalas, na direção i [m/s]
v_i^*	Função peso para a componente do vetor velocidade na direção i
\bar{v}_i	Vetor de valores nodais da componente i da velocidade
\tilde{v}_i^*	Vetor de valores nodais da função peso para a velocidade;
x_i	Coordenada na direção i [m]

Letras gregas

α	Coefficiente de segurança do critério de estabilidade de Courant
----------	--

Γ	Contorno do domínio
Γ^e	Contorno do elemento;
$\overline{\Delta p}$	Variação da pressão [N/m ²]
Δt	Intervalo de tempo crítico [s]
$\Delta \bar{v}_i$	Variação da componente de velocidade na direção i [m/s]
Δx_i	Variação da posição na direção i [m]
$\bar{\Delta}$	Escala característica associada à filtragem das grandes escalas [m]
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ζ_i	Coordenada normalizada ou computacional no nó i
η_i	Coordenada normalizada ou computacional no nó i
λ	Viscosidade volumétrica do fluido [N.s/m ²]
μ	Viscosidade dinâmica do fluido [N.s/m ²]
ν	Viscosidade cinemática do fluido [m ² /s]
ν_T	Viscosidade turbulenta [m ² /s]
$\hat{\nu}_{ii}$	Tensor de balanço difusivo [m ² /s]
ξ_i	Coordenada normalizada ou computacional no nó i
ρ	Massa específica do fluido [kg/m ³]
σ_{ij}	Componente do tensor de tensões [N/m ²]
τ_{ij}	Tensor de Reynolds sub-malha
ϕ	Função de interpolação para a velocidade
ψ	Função de interpolação para a pressão
Ω	Domínio
Ω^e	Domínio do elemento;

* Observação: na determinação analítica das matrizes de elementos α e β são utilizados para numerar os nós dos elementos.

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1 - escoamento sobre um corpo rombudo arredondado em função do número Reynolds	14
Figura 1.2 - Ponto de separação observado em escoamentos com gradiente de pressão adverso.	15
Figura 1.3 - Identificação de pontos de separação em corpos rombudos angulosos em função das dimensões do obstáculo.....	15
Figura 1.4 - Identificação de pontos de separação em corpos rombudos angulosos em função do escoamento incidente	16
Figura 1.5 - Hierarquia dos modelos de turbulência	18
Figura 1.6 - Funções filtro empregadas na modelagem LES; (a) Filtro “ <i>box</i> ” (b) expansão truncada de Fourier e (c) Gaussiano.....	27
Figura 3.1 - Transformação do sistema global para o sistema natural	63
Figura 4.1 - Paralelismo de memória compartilhada utilizando as diretivas	72
Figura 5.1 - Geometria proposta por [Petry, 1993] e utilizada na avaliação do tempo de processamento	75
Figura 5.2 - Comparação entre alocações do tipo estática e dinâmica para diferentes discretizações espaciais	78
Figura 5.3 - Gráfico de Pareto utilizado para avaliar o tempo de processamento consumido para 4 discretizações distintas	79
Figura 5.4 - Comparação entre códigos com e sem as diretivas OpenMP para alocações do tipo estática e dinâmica.....	81
Figura 5.5 - Velocidade adimensional na linha central utilizando a malha de 19100 elementos e a configuração <i>EIPC</i>	86
Figura 5.6 - Coeficiente de pressão na linha central utilizando a malha de 19100 elementos e a configuração <i>EIPC</i>	86
Figura 5.7 - Geometria proposta por [Braun, 2007].....	87
Figura 5.8 - Resultados adimensionalizados de velocidade na linha de centro do domínio: (a) a partir da configuração <i>EIPC</i> e a malha de 39800 elementos e (b) investigações observadas na literatura	88
Figura 5.9 - Coeficiente de pressão na linha central utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração <i>EIPC</i>	89

Figura 5.10 - Avaliação instantânea em $t^* = 5$ utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração <i>EIPC</i> para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão	90
Figura 5.11 - Campos adimensionalizados de velocidade e pressão utilizando a malha com 39800 elementos e configuração <i>EIPC</i> para os seguintes tempos adimensionais: (a) e (b) $t^* = 0,2$, (c) e (d) $t^* = 0,4$, (e) e (f) $t^* = 0,6$ e (g) e (h) $t^* = 0,8$	91
Figura 5.12 - Campos adimensionalizados de velocidade e pressão utilizando a malha com 39800 elementos e configuração <i>EIPL</i> para os seguintes tempos adimensionais: (a) e (b) $t^* = 0,2$, (c) e (d) $t^* = 0,4$, (e) e (f) $t^* = 0,6$ e (g) e (h) $t^* = 0,8$	93
Figura 5.13 - Presença de instabilidades do tipo “tabuleiro de xadrez” no campo de pressão nas proximidades do obstáculo para a Malha de 39800 elementos e configuração <i>EIPL</i>	94
Figura 5.14 - Coeficientes de pressão no contorno superior do obstáculo utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração <i>EIPL</i>	94
Figura 5.15 - Resultados adimensionalizados de velocidade na linha central do domínio utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração <i>EIPL</i>	95
Figura 5.16 - Comparação entre diferentes parâmetros seletivos utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração <i>EDP</i>	98
Figura 5.17 - Campos adimensionalizados de velocidade e pressão utilizando a malha com 39800 elementos e configuração <i>EDP</i> para os seguintes tempos adimensionais: (a) e (b) $t^* = 0,2$, (c) e (d) $t^* = 0,4$, (e) e (f) $t^* = 0,6$, (g) e (h) $t^* = 0,8$ e (i) e (j) $t^* = 1$	100
Figura 5.18 - Avaliação instantânea em $t^* = 5$ utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração <i>EDP</i> para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão	100
Figura 5.19 - Avaliação média temporal na linha de centro do domínio utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração <i>EDP</i> para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão	101
Figura 5.20 - Avaliação média temporal na linha de centro do domínio utilizando as malhas com 39800 e 78008 elementos e a configuração <i>EDP</i> para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão	103
Figura 5.21 - Linhas de corrente obtidas nas proximidades do obstáculo.....	104
Figura 5.22 - Avaliação dos perfis de velocidade utilizando as malhas com 39800 e 78008 elementos e a configuração <i>EDP</i> para as seguintes posições: (a) $x = 0d, 0,5d$ e $1,5d$, (b) $x = 0,5d$ e (c) $x = 1,5d$	105
Figura 5.23 - Energia cinética total da turbulência média avaliada na linha central do domínio	105

Figura 5.24 - Malha irregular com 16296 elementos utilizando a configuração <i>EDP</i>	107
Figura 5.25 - Campos de velocidade e pressão adimensionalizados na linha central utilizando a configuração <i>EDP</i> e confrontando malhas com as seguintes discretizações: (a) e (b) 39800 (uniforme) <i>versus</i> 16296 (irregular) e (c) e (d) 78008 (uniforme) <i>versus</i> 66492 (irregular).....	108
Figura 5.26 - Avaliação instantânea em $t^* = 5$ utilizando a malha irregular com 16296 elementos e a configuração <i>EDP</i> para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão.....	109
Figura 5.27 - Perfis de velocidade nas imediações do obstáculo utilizando a configuração <i>EDP</i> e confrontando malhas com as seguintes discretizações: (a), (b) e (c) 39800 (uniforme) <i>versus</i> 16296 (irregular) e (c), (d) e (f) 78008 (uniforme) <i>versus</i> 66492 (irregular)	110
Figura 5.28 - Energia cinética total da turbulência utilizando a configuração <i>EDP</i> e confrontando malhas com as seguintes discretizações: (a) 39800 (uniforme) <i>versus</i> 16296 (irregular) e (b) 78008 (uniforme) <i>versus</i> 66492 (irregular)	111

ÍNDICE DE TABELAS

	Pág.
Tabela 5.1 - Discretizações utilizadas na avaliação do tempo de processamento.....	76
Tabela 5.2 - Resumo dos dados utilizados na avaliação do tempo de processamento empregando o método explícito-iterativo	77
Tabela 5.3 - Setores criados para avaliar o tempo de processamento consumido.....	79
Tabela 5.4 - <i>Speed up</i> observado a partir da utilização das diretivas OpenMP para alocações do tipo estática e dinâmica	81
Tabela 5.5 - Alternativas adotadas no presente estudo e suas respectivas siglas	83
Tabela 5.6 - Resumo dos dados utilizados na simulação numérica sobre um prisma quadrado bidimensional empregando o método explícito-iterativo e a malha com 19100 hexaedros.	85
Tabela 5.7 - Tempo computacional e “ <i>speed up</i> ” observados para as três alternativas avaliadas	102
Tabela 5.8 - Menor elemento da malha de elementos finitos e o tempo crítico, respectivamente, para a segunda discretização espacial utilizada.....	102
Tabela 5.9 - Menor elemento das discretizações irregulares e o tempo crítico para cada malha de elementos finitos empregada.....	107

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

A simulação numérica de problemas relacionados à engenharia do vento figura como uma das grandes barreiras na solução computacional de aplicações de engenharia. A solução desta variedade de escoamentos expõe dificuldades numéricas não observadas em grande parte dos casos avaliados através da Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC), tornando sua utilização cercada de cuidados e restrições. O emprego do método de discretização dos elementos finitos, por exemplo, acarreta em sérias dificuldades na análise de problemas advectivo-dominantes e escoamentos incompressíveis, ambas as situações intimamente relacionadas a estudos da Engenharia do Vento Computacional (EVC).

Escoamentos externos (ou não confinados) são comumente examinados em problemas pertencentes à EVC, sendo estes observados em setores bastante distintos da engenharia e das ciências aplicadas. Desta maneira, a análise de escoamentos não confinados permeia desde avaliações sobre edificações, *risers* marinhos e pontes, dispersão de poluentes nas proximidades de plantas industriais até a identificação do campo de velocidades sobre fazendas eólicas. Tradicionalmente, problemas identificados como externos acarretam no emprego de domínios extremamente extensos, exigindo que um amplo montante de recursos computacionais seja alocado para sua eventual solução computacional.

Outro importante desafio na análise numérica de escoamentos não confinados recai sobre a presença de corpos aerodinamicamente rombudos no interior do domínio de cálculo. A colisão do escoamento incidente sobre estes obstáculos incita o aparecimento de fenômenos de natureza complexa, tais como separação, recolamento, transição, esteira, desprendimento de vórtices, entre outros. Esta coletânea de efeitos exige que tanto a discretização espacial como temporal das equações governantes sejam extremamente refinadas, acarretando em mais um incremento considerável no tempo de processamento.

No que diz respeito à modelagem da turbulência, esta permanece em aberto dentro da Dinâmica dos Fluidos Computacional, uma vez que sua abordagem carece de uma metodologia definitiva para análise de escoamentos turbulentos. Dada à impraticabilidade da solução direta das equações de Navier-Stokes em grande parte dos casos relacionados à EVC, é de suma importância que o modelo escolhido identifique as principais estruturas turbulentas presentes no

escoamento e não seja responsável pela inserção de fenômenos inverossímeis na solução numérica.

1.2 Objetivos, Metodologia e Organização do Trabalho

Problemas pertencentes à Engenharia do Vento Computacional são caracterizados por demandarem elevados tempos de processamento e em muitos casos, domínios computacionais da ordem de quilômetros. No presente trabalho, visando reduções no esforço computacional, técnicas de processamento paralelo e programação de alto desempenho são utilizadas. Assim, a partir de comparações entre alocações estáticas e dinâmicas e a implementação de paralelismo de memória compartilhada utilizando diretivas OpenMP, situações que usufruam dos recursos de *hardware* de maneira mais eficiente são priorizadas.

No que diz respeito à avaliação numérica desta variedade de escoamentos, a utilização do método dos elementos finitos em problemas advectivo-dominados, em algumas situações, implica no aparecimento de oscilações de ordem numérica nos campos de pressão. Assim, com o objetivo de obter uma avaliação isenta de instabilidades na caracterização do escoamento sobre um prisma quadrado, o esquema temporal de Taylor-Galerkin explícito-iterativo e o esquema explícito de dois passos são analisados juntamente ao emprego de funções de interpolação de ordens distintas e idênticas para velocidade e pressão.

Para uma análise dos fenômenos oriundos da colisão do escoamento incidente com o obstáculo imerso no domínio computacional, malhas com disposição uniforme e irregular são utilizadas para identificar campos de velocidade e pressão na linha central do escoamento e nas imediações do obstáculo para um número de Reynolds igual a 22000.

A modelagem da turbulência é efetuada a partir da Simulação de Grandes Escalas, sendo as pequenas estruturas obtidas mediante o modelo sub-malha de Smagorinsky.

Os assuntos que serão discutidos no decorrer deste estudo são apresentados de maneira sucinta na presente seção. Assim, os capítulos avaliados nesta dissertação deverão abordar os seguintes temas:

- Capítulo 1:

No primeiro capítulo, uma análise a cerca dos principais aspectos relacionados à Engenharia do Vento Computacional será desenvolvida, apresentando as aplicações de

engenharia englobadas por este segmento juntamente aos modelos de turbulência comumente verificados. Também serão enunciadas as maiores dificuldades observadas na solução de problemas pertencentes a este segmento da Dinâmica dos Fluidos Computacional.

Em seguida, uma apresentação das alternativas vislumbradas na solução de escoamentos externos é verificada juntamente a uma discussão fenomenológica dos efeitos decorrentes da presença de corpos rombudos imersos no interior desta variedade de escoamentos. Ainda neste capítulo, no que diz respeito a avaliações dos efeitos relacionados à turbulência, as três principais abordagens são inspecionadas. Assim, os benefícios e prejuízos relacionados à Simulação Direta da Turbulência, a Modelagem Clássica e a Simulação de Grandes Escalas são identificadas.

Finalizando a revisão bibliográfica iniciada na seção 1.3, um exame do método dos elementos finitos a partir das principais abordagens numéricas observadas na literatura é incitado. Desta maneira, uma investigação a respeito de enfoques utilizados tanto na avaliação de escoamentos incompressíveis como advectivo-dominantes é apresentada.

- Capítulo 2:

No segundo capítulo, uma apresentação das equações governantes na solução de escoamentos turbulentos, isotérmicos de fluidos newtonianos é conferida. Na avaliação da incompressibilidade do escoamento, a hipótese da pseudo-compressibilidade é inserida. Para caracterização das estruturas turbulentas, a filtragem espacial inerente a Simulação de Grandes Escalas é verificada juntamente ao equacionamento referente ao modelo sub-malha de Smagorinsky.

- Capítulo 3:

No terceiro capítulo, após a obtenção da formulação matemática do problema em estudo, a modelagem numérica é inserida a partir do método dos elementos finitos. Os passos avaliados para a abordagem numérica do presente trabalho são baseados no trabalho de [Petry, 2002]. Inicialmente, a obtenção da formulação fraca ou dos resíduos ponderados é identificada para as equações de conservação. Em seguida, a partir do método de Bubnov-Galerkin, a formulação de elementos finitos é avaliada.

Na discretização temporal das equações governantes, dois esquemas são apresentados. Inicialmente, o esquema temporal de Taylor Galerkin explícito-iterativo empregado em trabalhos anteriores do grupo de estudo é avaliado. Nos esforços de [Petry, 2002], [Xavier, 2008] e [Dos Santos, 2007], a utilização deste método apresentou resultados satisfatórios na solução de

problemas confinados. Em seguida, o esquema temporal explícito de dois passos proposto por [Kawahara e Hirano, 1983] é detalhado.

Finalizando a formulação dos elementos finitos, a solução analítica do equacionamento empregando um ponto de integração no centro do elemento é conferida para hexaedros trilineares de oito nós. Na escolha das funções de interpolação, velocidade e pressão são avaliadas a partir de funções com ordens distintas, e posteriormente com ordens idênticas.

- Capítulo 4:

No quarto capítulo, técnicas voltadas à computação de alto desempenho são apresentadas a partir de alocações que reduzam o tempo de processamento e diretivas visando a paralelização de tarefas. No presente trabalho, a distribuição de ações é executada mediante o conceito de paralelismo de memória compartilhada, utilizando a biblioteca OpenMP.

- Capítulo 5:

No quinto capítulo, avaliações referentes à alocação de elementos contidos em vetores e matrizes e resultados oriundos da paralelização do algoritmo são apresentados para o esquema temporal explícito-iterativo utilizando funções de interpolação distintas para velocidade e pressão. Em um segundo momento, alternativas visando à solução isenta de instabilidades em escoamentos externos advectivo-dominantes são propostas. Desta maneira, três propostas são apresentadas:

- Utilização do esquema temporal de Taylor-Galerkin explícito-iterativo com funções de interpolação distintas para velocidade e pressão;
- Utilização do esquema temporal de Taylor-Galerkin explícito-iterativo com funções de interpolação de mesma ordem para velocidade e pressão;
- Utilização do esquema temporal explícito de dois passos com funções de interpolação de mesma ordem para velocidade e pressão.

Ainda neste capítulo, malhas com disposição dos elementos uniforme são confrontadas com configurações irregulares. Os resultados obtidos são apresentados para um número de Reynolds igual a 22000.

- Capítulo 6:

No sexto capítulo, conclusões a cerca dos resultados obtidos no capítulo 5 são avaliadas juntamente a propostas para trabalhos futuros.

- Capítulo 7:

No sétimo capítulo, as referências bibliográficas utilizadas no presente trabalho são apresentadas em ordem alfabética.

1.3 Aspectos Gerais da Engenharia do Vento Computacional (EVC)

No intuito de distinguir aplicações usualmente associadas à Dinâmica dos Fluidos Computacional (“CFD - *Computational Fluid Dynamics*”) das aplicações de engenharia quase exclusivamente relacionadas ao vento, um novo campo de estudo foi estabelecido na metade dos anos oitenta. Desta maneira, a Engenharia do Vento Computacional (“CWE - *Computational Wind Engineering*”) foi inaugurada assumindo rápida evolução nas últimas duas décadas.

Entre os responsáveis pela segmentação científica supracitada, Shuzo Murakami figura como um dos pesquisadores que rendeu contribuições mais relevantes aos avanços da EVC. Responsável pela edição da primeira publicação sobre o tema, Murakami responde por importantes trabalhos relacionados á Engenharia do Vento Computacional. Nos artigos publicados em 1997 e 1998, o autor apresenta, respectivamente, importantes revisões a cerca do estado da arte das aplicações relacionadas à EVC e dos modelos de turbulência comumente utilizados na solução de escoamentos sobre corpos rombudos.

Desta maneira, [Murakami, 1997] enuncia os esforços empreendidos para a rápida evolução da EVC, sendo os principais concentrados nos seguintes assuntos:

- Influência dinâmica e térmica do vento sobre o corpo humano no projeto de zonas externas confortáveis;
- Análise da velocidade e pressão sobre corpos ditos rombudos (pontes, edifícios, montanhas, colinas, escarpas, entre outros);
- Análise da interação entre fluido e estrutura;
- Dispersão de contaminantes ao redor de edifícios e quarteirões;
- Análise de problemas relacionados a ventos fortes nas imediações de arranha-céus;
- Planejamento de cidades a partir da avaliação do conforto dinâmico e térmico em zonas externas;

- Predição das condições meteorológicas regionais.

Outra importante justificativa para a criação da EVC está fundada nas dificuldades enfrentadas em problemas relacionados à engenharia do vento. Uma das principais barreiras da EVC está relacionada ao tempo de processamento requerido na solução de grande parte dos casos. A multiplicidade de escalas, a observação de altos números de Reynolds e a necessidade de grandes domínios, inerentes à solução de escoamentos externos, faz com que muitos dos avanços neste campo de pesquisa esbarrem nas atuais configurações computacionais. Para uma avaliação direta das equações que governam o escoamento, ou seja, isenta de modelos de turbulência, a solução de um número excessivamente grande de equações é exigida.

No intuito de ressaltar esta impossibilidade, [Silveira Neto, 2002] identifica o número de equações necessárias para solução de escoamentos atmosféricos, um dos grandes desafios da Engenharia do Vento Computacional. A expressão que define a quantidade de equações (número de graus de liberdade) necessárias para solução de escoamentos tridimensionais é apresentada da seguinte forma:

$$Ngl = \left(\frac{L}{l}\right)^3 = Re^{9/4} \quad (1.1)$$

onde L indica a escala de comprimento característica e l a escala dissipativa de Kolmogorov. Assim, devido à multiplicidade de escalas envolvidas em escoamentos atmosféricos, é possível avaliar estruturas que variam desde comprimentos quilométricos até pequenas escalas de ordem milimétrica. Para um escoamento onde $L \approx 500 \text{ km}$ e $l \approx 1 \text{ mm}$, o número de equações necessárias é de $Ngl \approx 10^{24}$, muito aquém do valor de 10^8 praticável com o atual poder computacional observado. [She, 1997] apresenta este último valor no cálculo de escoamentos com turbulência isotrópica para um número de Reynolds igual a 200. Neste sentido, visando reduzir drasticamente os valores observados na solução direta das equações de Navier-Stokes, a utilização de modelos de turbulência torna-se fundamental em problemas da EVC.

O emprego de modelos baseados na abordagem clássica da turbulência, os quais simplificam a solução das equações originais a partir de uma filtragem temporal das mesmas, figurou como a primeira grande alternativa para redução da discretização necessária. Nesta avaliação média, conhecida popularmente como RANS (“*Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*”), duas possibilidades são observadas na predição da turbulência: uma baseada no conceito da viscosidade turbulenta e outra nas equações de transporte do tensor de Reynolds.

A utilização do modelo $k-\varepsilon$, o mais difundido entre os modelos baseados na viscosidade turbulenta, apresenta uma série de limitações oriundas de sua baixa universalidade. Segundo [Murakami, 1997], a maior deficiência deste modelo está relacionada à superprodução da energia cinética turbulenta na região de colisão. Na modelagem baseada no tensor de Reynolds, modelos como SSG (Speziale-Sarkar-Gatski) e FLT (Fu-Launder-Tselepidakis) inserem apenas pequenas melhorias na avaliação de escoamentos sobre corpos rombudos, apesar da notável complexidade inserida na formulação.

Porém, os maiores avanços observados na solução de problemas relacionados à engenharia do vento computacional não derivam da abordagem clássica da turbulência [Murakami, 1998]. A simulação das grandes escalas (“LES – *Large Eddy Simulation*”), a qual resolve diretamente as grandes estruturas do escoamento e calcula as pequenas através de modelos sub-malha, permite que os resultados obtidos numericamente aproximem-se daqueles verificados experimentalmente.

Esta metodologia, apesar de requisitar uma discretização espacial e temporal superior àquela verificada na solução via RANS, faz uso de modelos de turbulência com maior universalidade, uma vez que estão atrelados as escalas mais isotrópicas e homogêneas do escoamento (pequenas escalas). Dentre os modelos empregados, os de maior relevância são o modelo sub-malha de Smagorinsky e o sub-malha dinâmico, sendo este último responsável pelos resultados mais precisos na predição de escoamentos sobre corpos rombudos.

Um exame mais apurado dos principais modelos de turbulência será desenvolvido na seção 1.5, a qual será destinada a uma revisão minuciosa sobre as principais metodologias adotadas na Engenharia do Vento Computacional.

Além da ampla discretização espacial requerida nas proximidades do obstáculo decorrente da diversidade de estruturas presentes no escoamento sobre geometrias complexas, é também necessário que uma importante discretização em âmbito temporal seja realizada.

Outra importante característica relacionada à engenharia do vento é decorrente da presença de obstáculos imersos no interior do domínio de cálculo. Estes corpos, na maioria dos casos rombudos, apresentam fenômenos complexos resultantes da colisão entre o escoamento incidente e o obstáculo. Segundo [Cook, 1986], um corpo é aerodinamicamente rombudo quando as linhas de corrente do escoamento não seguem suas superfícies sólidas, mas sim, descolam das mesmas deixando regiões com separação e gerando desprendimento de vórtices. Estes fenômenos acarretam em um comportamento extremamente anisotrópico do tensor taxa de deformação, resultando em avaliações estatísticas da turbulência muito complicadas.

No detalhamento de escoamentos sobre edifícios, torres e pontes, e eventual análise da interação entre fluido e estes elementos estruturais, usualmente utilizam-se corpos rombudos angulosos, como por exemplo, os prismas de seção quadrada. Exemplos de avaliações numéricas sobre pontes e edificações podem ser observados em [Braun e Awruch, 2003; Braun e Awruch, 2008; Braun e Awruch, 2009].

Na investigação computacional do transporte e dispersão de poluentes, qualidade do ar nas proximidades de plantas indústrias e de incêndios florestais, fenômenos relacionados à estratificação térmica da camada limite atmosférica e rotação da Terra devem ser computados para descrever de forma fidedigna o escoamento do vento.

Outro importante campo de pesquisa a vislumbrar aplicações computacionais relacionadas à engenharia do vento é o das energias renováveis, mais precisamente, na avaliação de projetos os quais utilizam recursos advindos do vento. Metodologias baseadas na solução das equações de Navier-Stokes passaram a ocupar importante espaço na caracterização do comportamento do vento, servindo como importante ferramenta no auxílio a medições efetuadas “*in loco*”. Segundo [Derickson et al., 2004], como conseqüência do dimensionamento de parques eólicos utilizando unicamente medições locais de velocidade e direção do vento, um grande número de turbinas eólicas está à mercê de um desgaste dinâmico acelerado advindo da turbulência que atinge repetidamente o rotor, e apresentando desempenho aquém ao ponto de operação esperado.

De acordo com [Lun et al., 2003], terrenos complexos localizados em áreas não urbanizadas podem conter objetos tais como árvores e rochas, os quais tornam as superfícies mais ou menos rugosas. Assim, escoamentos do vento são fortemente afetados por elementos presentes nas proximidades do solo. Acidentes geográficos como colinas e escarpas, dependendo da configuração dos mesmos, podem induzir um aumento importante de velocidade em seu topo ou mesmo incitar fenômenos como separação, descolamento, recolamento, despreendimento de vórtices, entre outros.

Na avaliação de projetos eólicos, uma caracterização com alto grau de refinamento do campo de velocidades em micro-sítios deverá permitir uma instalação apropriada de fazendas eólicas, e conseqüentemente, uma disposição dos aerogeradores visando maior aproveitamento da energia cinética transportada pelo vento. Esta afirmação é facilmente justificada, uma vez que o potencial eólico a ser extraído é proporcional ao cubo da velocidade.

Desta maneira, esforços relacionados à determinação do comportamento do vento sobre elementos topográficos como colinas, escarpas e rochedos são comumente observados em trabalhos ligados a Engenharia do Vento Computacional.

1.4 Escoamentos Externos sobre Corpos Imersos

Na mecânica dos fluidos, escoamentos externos, ou escoamentos não confinados, podem ser definidos como aqueles que apresentam efeitos viscosos nas proximidades de corpos imersos oriundos do contato direto entre o fluido e a fronteira sólida. Fora desta região fronteira, as tensões de cisalhamento passam a ser negligenciadas e o escoamento é considerado invíscido.

Escoamentos com estas características são comumente observados em importantes aplicações de engenharia. Atividades relacionadas à aerodinâmica, hidrodinâmica, transporte e engenharia do vento permeiam esta variedade de escoamentos.

No intuito de determinar o comportamento de escoamentos não confinados, três técnicas são usualmente empregadas: a teoria da camada limite, análises experimentais e soluções numéricas através da Dinâmica dos Fluidos Computacional.

A teoria da camada limite (“*Boundary-Layer Theory*”) objetiva avaliar o movimento na camada viscosa próxima as paredes sólidas e “justapô-lo” no escoamento invíscido externo [White, 2006]. Desenvolvida pelo estudioso alemão Ludwig Prandtl em 1904, esta análise é fundada na identificação de uma superfície delgada onde os efeitos friccionais são significativos. A teoria desenvolvida por Prandtl permitiu a análise de escoamentos viscosos sem a necessidade de obter-se a solução completa das equações de Navier-Stokes, uma vez que as dificuldades matemáticas e computacionais agiam como fator proibitivo.

A teoria da camada limite é extremamente interessante e elucidativa, uma vez que permite uma maior compreensão do comportamento de escoamentos viscosos, porém, devido ao fenômeno de separação, esta avaliação comumente inviabiliza uma análise completa do escoamento. Dentre os importantes esforços a cerca desta teoria, é possível ressaltar o trabalho do pesquisador Hermann Schlichting.

Tendo em vista que apenas uma variedade muito pequena dos escoamentos reais é passível de ser avaliada através de métodos analíticos, a mecânica dos fluidos tem dependido muito dos resultados experimentais e numéricos.

A determinação da dinâmica dos fluidos através de métodos experimentais é comumente fornecida a partir da análise dimensional do problema. Esta metodologia permite planejar todo o processo de experimentação e compactar os dados observados, uma vez que esta técnica reduz o número e a complexidade das variáveis que afetam a física do problema [White, 2006]. De acordo com [Houghton e Boswell, 1969], no que tange a investigação experimental do

comportamento da camada limite em escoamentos externos utilizando túneis de vento, os principais tópicos podem ser agrupados da seguinte forma:

- determinação do formato do perfil de velocidade;
- determinação do ponto de transição;
- determinação do ponto de separação;
- determinação da tensão de cisalhamento local na superfície.

Apesar do trabalho experimental em laboratórios ser muitas vezes simultaneamente dispendioso e demorado, sua utilização figura como indispensável em inúmeras áreas do conhecimento. Em aplicações fluido-mecânicas, observações experimentais auxiliam na verificação de resultados analíticos, obtenção de correlações e mais recentemente, na validação e desenvolvimento de códigos computacionais e modelos de turbulência.

A terceira via para avaliação de escoamentos externos consiste na utilização de ferramentas baseadas na dinâmica dos fluidos computacional. Técnicas modernas de simulação numérica, nas quais as equações governantes são finamente resolvidas, têm sido largamente desenvolvidas e empregadas de maneira complementar a medições experimentais. Discussões mais abalizadas sobre este tema, o qual será o escopo do presente trabalho, serão abordadas nos capítulos subsequentes do presente trabalho.

No que tange a observação de escoamentos sobre corpos submersos, uma avaliação dos coeficientes aerodinâmicos nas imediações destes obstáculos permite que verificações importantes a cerca da resistência e sustentações sejam conferidas.

Qualquer corpo de configuração aleatória, quando imerso em uma corrente de fluido, deverá experimentar forças e momentos advindos do escoamento. Se o corpo em análise possuir tanto formato como orientação arbitrários, o escoamento exercerá forças e momentos nos três eixos de coordenadas. A força ou resistência exercida sobre corpo, decorrente do movimento de um fluido na direção da corrente livre, é conhecida como arrasto enquanto aquela exercida perpendicularmente à corrente livre é conhecida como sustentação. Segundo [Shames, 2003], a resistência de um corpo em um fluido é uma quantidade de difícil determinação porque esta depende de uma série de fenômenos importantes, dentre eles, a transição da camada limite e a separação. As forças de arrasto e sustentação, apresentadas a partir de seus respectivos coeficientes aerodinâmicos, são enunciadas da seguinte forma:

$$F_D = C_D \frac{\rho A U_\infty^2}{2} \quad (1.2)$$

$$F_L = C_L \frac{\rho A U_\infty^2}{2} \quad (1.3)$$

onde C_D e C_L são os coeficientes de arrasto e sustentação, respectivamente, ρ é a massa específica, U_∞ é a velocidade da corrente livre e A é a área de referência. A fração $\frac{1}{2}$ foi introduzida a fim de formar o termo referente à pressão dinâmica. O arrasto sobre o corpo representa a resistência total devido ao atrito e a parcela relativa à resistência devido à tensão normal, chamada de arrasto de pressão, ou de forma.

Outro importante coeficiente empregado em ensaios de modelos aerodinâmicos é representado a partir do grupo adimensional o qual faz menção honrosa aos esforços do matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783). O número de Euler (Eu), comumente chamado de coeficiente de pressão C_p , representa a razão entre as forças de pressão e as forças de inércia permitindo uma apresentação adimensional dos dados de pressão. Este coeficiente aerodinâmico é observado a partir da seguinte relação:

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (1.4)$$

onde p é a pressão em análise e p_0 a pressão de referência.

Em escoamentos incompressíveis, sistemas geometricamente similares, ou seja, sistemas onde corpos com geometrias similares apresentam uma mesma orientação em relação à direção da corrente livre, os coeficientes adimensionais C_D e C_L são função apenas do número de Reynolds (Re). Segundo [Schlichting e Gersten, 2003], este princípio de similaridade de Reynolds, o qual é válido apenas em situações onde as forças que atuam sobre o corpo são de natureza inercial ou viscosa, permite uma considerável simplificação no trabalho experimental e na apresentação das curvas de interesse prático.

No que diz respeito à análise fenomenológica de escoamentos externos, alguns assuntos costumam ser recorrentes na vasta literatura observada sobre o tema. Para exemplificar as estruturas passíveis de serem observadas nesta variedade de escoamentos, a caracterização do comportamento sobre cilindros e esferas a partir do aumento de Re permite a discussão dos principais efeitos observados em escoamentos sobre corpos rombudos.

Para números de Reynolds inferiores a unidade, o escoamento apresenta um comportamento essencialmente viscoso (efeitos inerciais são negligenciados) não ocorrendo separação da camada limite, como pode ser observado na Figura 1.1(a). Assim, para $Re \leq 1$, a esteira formada a sotavento do obstáculo é laminar e o arrasto de atrito é predominante. Com um aumento sutil do número de Reynolds ($1 < Re \leq 10$), pontos de separação da camada limite laminar são observados na região traseira do corpo iniciando a formação de uma estreita esteira a sotavento do mesmo, Figura 1.1(b).

A separação, por sua vez, resulta de uma inversão do escoamento na região referente à camada limite e ocorre como resultado de um gradiente de pressão adverso imposto pela corrente livre sobre a camada delgada próxima a superfície sólida. Segundo [Shames, 2003], a presença deste gradiente adverso de pressão é uma condição necessária, mas não suficiente para separação. Desta maneira, é passível de existir gradiente de pressão adverso sem que ocorra a separação, porém, sem gradiente de pressão adverso, não poderá haver separação. Conforme Figura 1.2, para ocorrência de um gradiente de pressão adverso (ou positivo) de pressão, a camada limite deverá abrigar um ponto de inflexão, representado pela letra E.

Um novo aumento do número de Reynolds ($10 < Re \leq 60$) faz com que os pontos de separação da camada limite laminar movam-se na direção dos pontos extremos da seção transversal circular, Figura 1.1(c). Este movimento acarreta um aumento da largura da esteira à sotavento do obstáculo e conseqüentemente, do arrasto de forma. À medida que o número de Reynolds é elevado, o coeficiente de arrasto passa a decair continuamente. Como resultado da separação do escoamento, a resistência passa a ser uma combinação dos arrastos de atrito e pressão. O aumento de Re faz com que a contribuição referente ao arrasto de pressão passe a sobrepujar a parcela relativa ao atrito. Segundo [Fox e McDonald, 2001], para um número de Reynolds de aproximadamente 1000, a contribuição do atrito sobre o arrasto total é de apenas 5%.

Elevando-se o número de Reynolds a valores entre 60 e 140, um par de vórtices simétricos iniciará a desenvolver-se em cada lado da linha central horizontal do obstáculo. Neste momento, a posição dos pontos de separação deverá ser idêntica a dos pontos extremos da seção transversal circular, conforme Figura 1.1(d). Com a evolução no tempo, ambos os vórtices iniciam um processo de estiramento até que um formato assimétrico é observado entre eles, fazendo com que o sistema entre em colapso e um dos vórtices separe-se seguindo a sotavento do obstáculo. O fenômeno subsequente observado na esteira é o desenvolvimento de uma configuração regular de

vórtices alternados conhecida como avenida, ou esteira, de vórtices de von Kármán, Figura 1.1(e).

Este movimento foi largamente investigado por Theodor von Kármán, 1911, e é tipicamente observado em números de Reynolds entre 140 e 5×10^4 . Segundo [Houghton e Boswell, 1969], apenas uma relação é observada entre Re e um parâmetro adimensional envolvendo a frequência de desprendimento. Este parâmetro é conhecido como número de Strouhal e é definido a partir da seguinte expressão:

$$S = \frac{nD}{U_{\infty}} \quad (1.5)$$

onde n é a frequência de dissipação de vórtices e D é o comprimento característico do obstáculo. Em escoamentos sobre cilindros, para $Re \geq 700$, este grupo adimensional permanece aproximadamente constante em $S = 0,21$.

Na esteira de vórtices de von Kármán, a partir dos pontos de separação da camada limite laminar, um desprendimento de vórtices alternado é observado na parte posterior do obstáculo. Assim, enquanto um vórtice é gerado em um dos lados na linha central da esteira, outro vórtice é descolado das imediações do obstáculo e segue a sotavento da esfera ou cilindro. Quando o primeiro vórtice supracitado atingir um comprimento particular e descolar-se do sistema, um novo vórtice será desenvolvido no outro lado da linha central.

Este fenômeno é também responsável pelo comportamento oscilante da força de sustentação sobre o cilindro. Quando a frequência de dissipação de vórtices coincide com a frequência natural de oscilação do obstáculo, fenômenos como o “cantar” das linhas telegráficas e as batidas das adriças nos mastros das bandeiras são observados [Fox e McDonald, 2001].

Com um número de Reynolds elevado a valores entre 4×10^5 e 5×10^5 , o escoamento passa por um estágio dito crítico, uma vez que a transição a turbulência é passível de ocorrer (Figura 1.1(f)). Os pontos de separação observados na região posterior do corpo deslocam-se a sotavento da seção média do obstáculo, diminuindo o espaçamento entre eles e conseqüentemente, a espessura da esteira. Este comportamento deve-se a maior adesão verificada na camada limite turbulenta. Nesta etapa, a força de pressão sobre o corpo é reduzida e o coeficiente de arrasto diminui abruptamente.

Quando a transição é atingida, a camada limite deverá apresentar uma maior quantidade de movimento em seu interior, resistindo melhor ao gradiente de pressão adverso. Em grande parte

das aplicações de engenharia este comportamento é de extrema importância, uma vez que a transição em um corpo rombudo retarda a separação e reduz drasticamente o arrasto. O fenômeno de transição, oriundo da amplificação de pequenas perturbações impostas à camada limite laminar, é afetado diretamente pela rugosidade da esfera ou cilindro e pela turbulência presente na corrente livre.

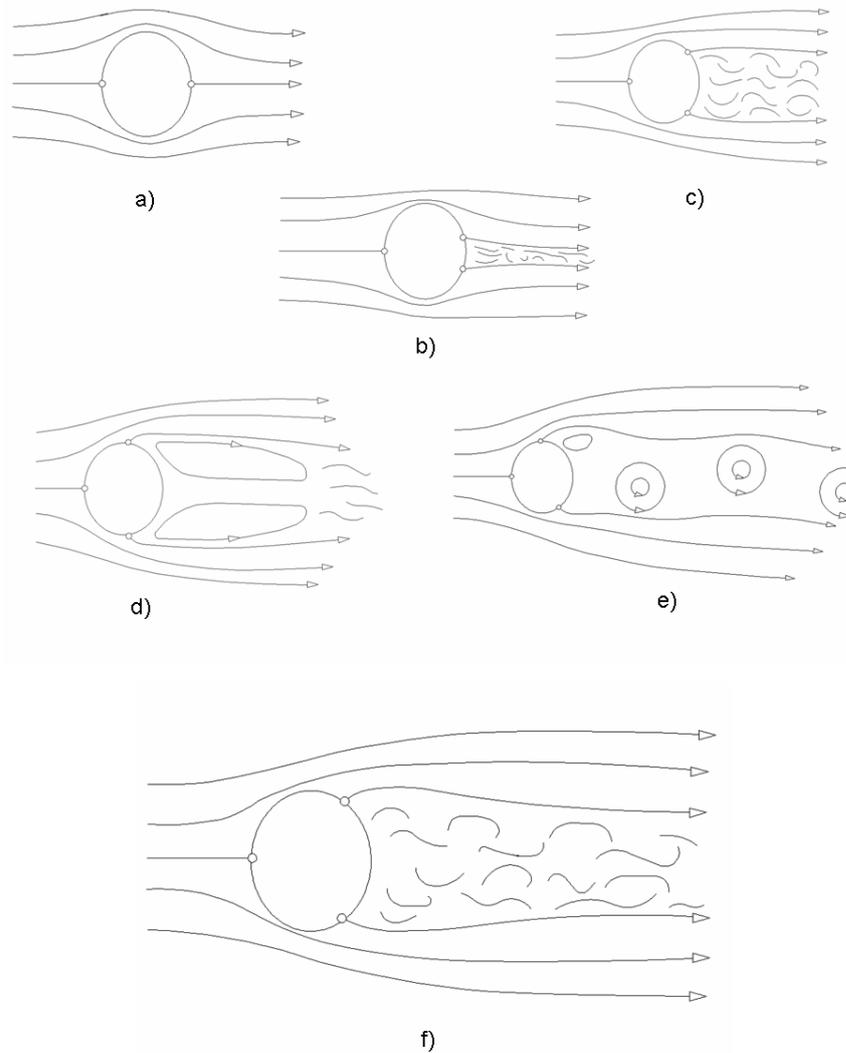


Figura 1.1 - Escoamento sobre um corpo rombudo arredondado em função do número Reynolds

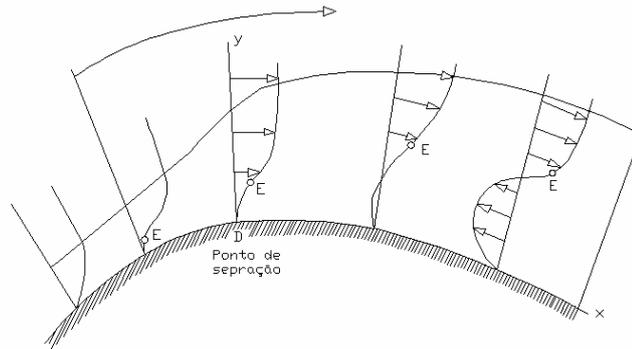


Figura 1.2 - Ponto de separação observado em escoamentos com gradiente de pressão adverso

Em corpos rombudos de configuração angulosa, a grande diferença está vinculada ao descolamento da camada limite, o qual ocorre em pontos bem definidos: nas arestas. A ocorrência do recolamento dependerá, dentre outros fatores, da dimensão do obstáculo na direção principal do escoamento e do perfil de velocidade incidente. Como pode ser observado na Figura 1.3(a), obstáculos com dimensões maiores na direção principal apresentam recolamento nas faces superior e inferior antes do escoamento encontrar sua face posterior, fazendo com que um novo descolamento ocorra na aresta traseira. Em elementos com seções quadradas, Figura 1.3(b), apenas um descolamento é observado, sendo este posicionado na aresta frontal.

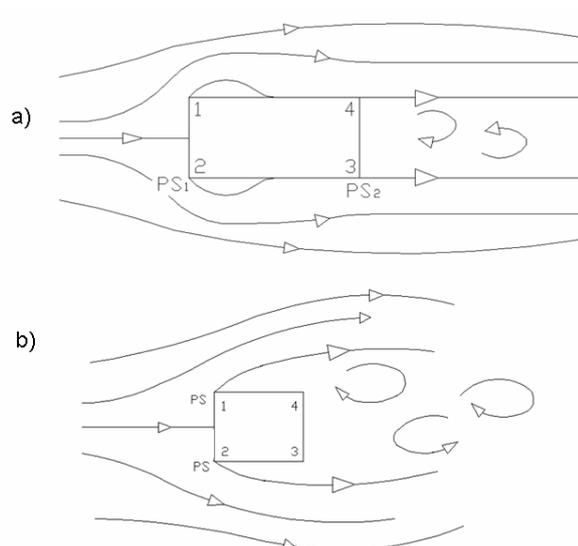


Figura 1.3 - Identificação de pontos de separação em corpos rombudos angulosos em função das dimensões do obstáculo

No que diz respeito ao escoamento incidente, um perfil de velocidade uniforme incidindo sobre um prisma de seção quadrada deverá descolar na aresta frontal do obstáculo, sem que o

recolamento seja posteriormente observado, Figura 1.4(a). A utilização de um perfil de velocidade não uniforme deverá induzir um recolamento antes do escoamento encontrar a face posterior do obstáculo, o que deverá gerar um novo ponto de separação, Figura 1.4(b).

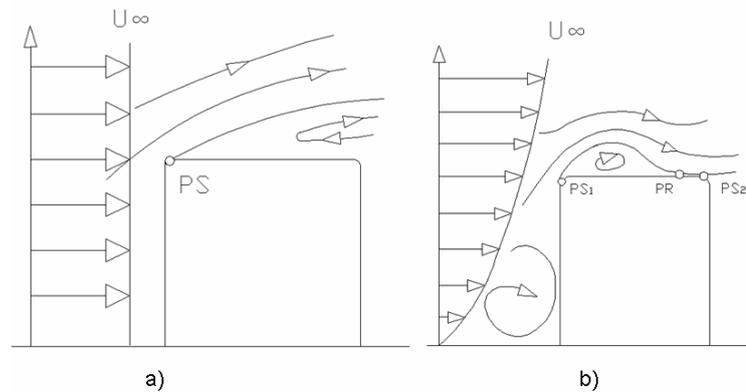


Figura 1.4 - Identificação de pontos de separação em corpos rombudos angulosos em função do escoamento incidente

1.5 Simulação Numérica de Escoamentos Turbulentos

Em grande parte das aplicações práticas verificadas no cotidiano, a dinâmica dos fluidos apresenta características turbulentas. Este fato deve-se a amplificação natural das pequenas perturbações injetadas no escoamento, as quais geram instabilidades responsáveis pela transição.

Dentre as principais características desta variedade de escoamentos, destaca-se a multiplicidade de escalas, a qual varia desde grandes estruturas (baixas frequências), controladas pela geometria que as geram, até as menores estruturas (altas frequências), as quais são controladas pela viscosidade.

A avaliação de escoamentos ditos turbulentos implica na investigação de fenômenos de natureza complexa. Desta maneira, a análise de escoamentos turbulentos apresenta inúmeras dificuldades, as quais não são verificadas em escoamentos invíscidos ou laminares. Para exemplificar este comportamento, [Schlichting e Gersten, 2003] afirma que o aspecto mais notável desta variedade de escoamentos consiste no fato de que tanto velocidade como pressão, em um determinado ponto do espaço, não permanecem constantes com o tempo, mas sim, realizam flutuações altamente irregulares e de alta frequência. Estas flutuações, as quais são sobrepostas no escoamento principal, são importantes para o curso do escoamento e o equilíbrio das forças.

Apesar das flutuações caóticas das variáveis do escoamento serem de natureza determinística, a simulação de escoamentos turbulentos permanece como um problema de engenharia em aberto. Segundo [Lomax, 1999], o sistema de equações resultante da modelagem matemática baseada nas leis de conservação de massa, energia e quantidade de movimento do meio contínuo possui solução exata apenas para um número reduzido de escoamentos simples. Esta afirmação implica na necessidade de utilizarem-se métodos numéricos na avaliação de escoamentos laminares e turbulentos.

O emprego de métodos numéricos às equações de conservação permitiu a obtenção da solução direta das variáveis primárias do escoamento tanto em regimes laminares como turbulentos. Esta abordagem ainda está restrita a problemas relativamente simples a baixos números de Reynolds, uma vez que demanda uma discretização espacial e temporal excessivamente elevada.

A restrita aplicabilidade da solução direta das equações de Navier-Stokes acarretou na busca por soluções aproximadas dos efeitos da turbulência. O procedimento clássico desenvolvido por [Reynolds, 1895] constitui a base matemática de grande parte dos programas computacionais baseados na metodologia conhecida como Dinâmica dos Fluidos Computacional. A simplificação proposta por Reynolds implica no aparecimento de correlações envolvendo flutuações de velocidade na equação da conservação da quantidade de movimento, fazendo com que um novo conjunto de equações que relacione as grandezas médias às grandezas instantâneas seja providenciado [Silva Freire, 2002].

Esta avaliação dos efeitos relacionados ao fenômeno da turbulência é comumente obtida a partir de duas abordagens distintas: mediante a utilização de modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta e a partir de modelos baseados no transporte do tensor de Reynolds. A primeira técnica, a qual utiliza modelos de fechamento de primeira ordem, é oriunda da aproximação proposta por [Boussinesq, 1877]. A última, por sua vez, conhecida também como modelagem de fechamento de segunda ordem, avalia a solução das equações de transporte dos termos não resolvidos da equação de conservação de momentum.

Como será observado nas seções subseqüentes do presente capítulo, apesar da grande utilidade conferida por esta metodologia, a simplificação proposta por Reynolds incorre em uma série de prejuízos em importantes problemas de engenharia. Neste sentido, a metodologia conhecida como Simulação de Grandes Escalas, a qual resolve diretamente as grandes escalas da turbulência e modela apenas as estruturas mais isotrópicas e homogêneas do escoamento, figura como um dos avanços mais promissores na avaliação de escoamentos turbulentos.

Na Figura 1.5, a hierarquia dos modelos de turbulência é verificada. Nesta apresentação é possível observar, além de um ordenamento baseado na precisão relacionada a cada modelo, uma comparação entre as escalas características e os tempos de processamento requeridos por cada abordagem.

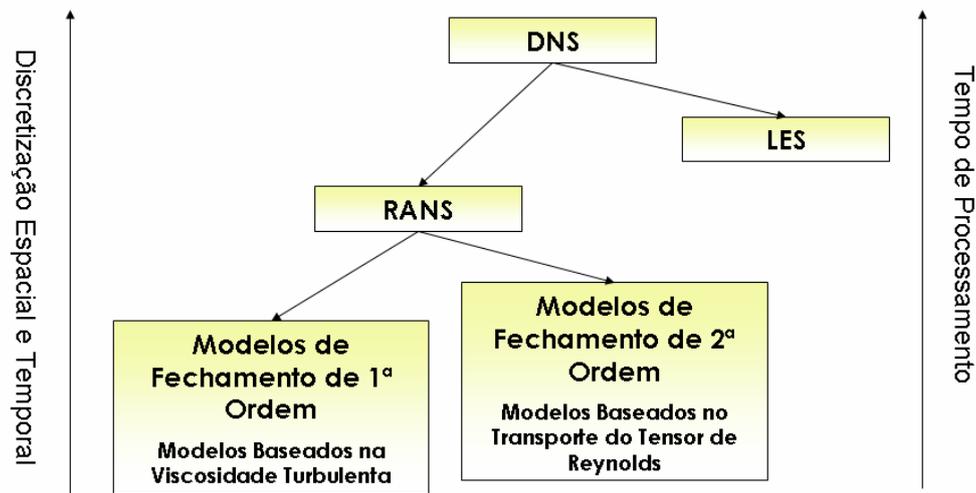


Figura 1.5 - Hierarquia dos modelos de turbulência

As próximas seções deste capítulo serão destinadas a uma avaliação mais apurada das abordagens de maior relevância na Dinâmica dos Fluidos Computacional para avaliação do fenômeno da turbulência. Desta maneira, serão discutidos os benefícios e os prejuízos inerentes a cada modelagem.

1.5.1 Simulação Numérica Direta

A solução de escoamentos turbulentos é caracterizada por representar um sistema fechado de equações, ou seja, tanto para escoamentos isotérmicos como para aqueles onde a transferência de calor é analisada, o número de equações governantes é equivalente ao número de incógnitas. Assim, com a utilização de esquemas numéricos adequados, é possível obter diretamente a solução das equações de conservação e da continuidade sem a necessidade de utilizarem-se constantes ajustáveis.

Esta abordagem é conhecida como Simulação Numérica Direta (“DNS – *Direct Numerical Simulation*”) e sua futura utilização em aplicações de engenharia está intimamente relacionada a

consideráveis avanços computacionais, restringindo seu atual emprego a escoamentos com baixo número de Reynolds e geometrias simples.

A limitação desta técnica está relacionada à multiplicidade de escalas da turbulência presente nos escoamentos turbulentos, exigindo que um número de graus de liberdade (Ngl) extremamente alto deva ser resolvido. Este valor, o qual representa o produto entre o número de pontos utilizados na discretização espacial e as variáveis em cada nó da malha, define o número de equações a serem resolvidas. Como pode ser observado na Eq. (1.1), um aumento da razão entre a escala de comprimento característica e a menor escala da turbulência, L e l , respectivamente, e do número de Reynolds tendem a elevar consideravelmente a discretização espacial necessária.

Em problemas relacionados à Engenharia de Vento Computacional (EVC), escoamentos turbulentos além de comumente apresentarem elevados números de Reynolds, abrigam escalas da turbulência que variam desde dimensões quilométricas até vórtices com apenas alguns milímetros de extensão. Estes fatores acabam inviabilizando a utilização da solução direta em aplicações da EVC, exigindo que modelos sejam inseridos às equações governantes para análise do fenômeno turbulência.

No que diz respeito à discretização temporal, o incremento de tempo escolhido deverá ser pequeno o suficiente para garantir a captura dos vórtices de alta frequência enquanto que o tempo total de integração deverá avaliar um período suficientemente grande para a obtenção de resultados estatisticamente convergidos [Dos Santos, 2007]. Segundo [Blazek, 2001], a quantidade de intervalos de tempo necessários para a simulação numérica direta é da ordem de Re^3 .

Apesar das sérias restrições impostas à metodologia DNS, esta tem consistido uma importante ferramenta no desenvolvimento e calibração de novos modelos, permitindo que informações importantes a cerca das estruturas turbulentas sejam analisadas. Assim, a rigorosa avaliação das equações governantes permite que dados estatísticos de qualidade sejam obtidos através desta abordagem, os quais são comparáveis a minuciosas observações experimentais. Em trabalhos relacionados à EVC, é possível citar os esforços de [She et al., 1993] e [Le et al., 1993].

1.5.2 Simulação Numérica via Equações Médias de Reynolds

Como observado na seção anterior, os escoamentos turbulentos presentes na natureza, quase em sua totalidade, exigem níveis de discretização espacial e temporal superiores as possibilidades de processamento atual. Diante desta importante limitação e da impossibilidade de obter-se uma solução analítica das equações de Navier-Stokes, [Reynolds, 1895] propôs uma filtragem temporal das equações governantes que, com a evolução dos recursos computacionais disponíveis, promoveu consideráveis avanços na solução numérica de escoamentos turbulentos. Esta metodologia é fundamentada na hipótese de que os escoamentos observados em aplicações práticas de engenharia não requerem o nível de refinamento alcançado através da solução completa das equações de conservação.

A Simulação Numérica via Equações Médias de Reynolds (“RANS – *Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*”), conhecida também como Modelagem Clássica da Turbulência, permitiu a análise numérica de inúmeras aplicações em âmbito industrial, possibilitando a redução de custos de produção na solução de problemas e auxiliando no desenvolvimento de protótipos.

Na metodologia apresentada por Reynolds, qualquer propriedade do escoamento pode ser expressa através de sua quantidade média e de uma flutuação associada à turbulência em torno desta média. Assim, a decomposição temporal das variáveis observadas em um escoamento turbulento isotérmico é dada através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + v'_i \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \tag{1.6}$$

Desta maneira, para obtenção dos termos médios \bar{v}_i e \bar{p} , estes devem ser integrados em um intervalo de tempo T suficientemente grande no intuito de garantir um regime dito estacionário. Este processo pode ser descrito matematicamente pela Eq. (1.7) [Möller e Silvestrini, 2004]. As flutuações são obtidas através da subtração entre a variável em análise e sua média temporal.

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \tag{1.7}$$

Segundo [Deschamps, 2002], uma vez que as flutuações instantâneas do escoamento são negligenciadas na solução, discretizações espaciais consideravelmente inferiores são requeridas em comparação à simulação numérica direta e hipóteses simplificativas são passíveis de serem utilizadas.

Para obtenção das equações médias relativas à conservação da quantidade de movimento e da conservação de massa, faz-se necessário substituir as decomposições apresentadas na Eq. (1.6) nas equações de conservação. No procedimento seguinte, o operador média temporal é aplicado juntamente a suas propriedades, as quais são apresentadas por [Schlichting e Gersten, 2003], resultando nas Equações Médias de Reynolds (equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds). Para escoamentos turbulentos incompressíveis isotérmicos, as seguintes equações são obtidas:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \times t \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \overline{v'_i v'_j} \right] \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \times t \quad (1.9)$$

Avaliando o equacionamento resultante da filtragem temporal, é possível verificar que ambas apresentam modificações quando comparadas às equações de Navier-Stokes. Na Eq. (1.8), o termo instantâneo da velocidade é substituído por sua componente média, enquanto que na equação (1.9), é observado o aparecimento da média entre o produto das flutuações de velocidade, conhecido como tensor de Reynolds. Este termo relacionado à turbulência tem caráter não linear e insere à análise numérica de escoamentos turbulentos via equações médias de Reynolds seis novas incógnitas. O aparecimento destes fluxos de quantidade de movimento impõe a solução o conhecido problema de fechamento, o qual é advindo da presença de um número de incógnitas maior em relação ao número de equações disponíveis. Segundo [Silveira Neto, 2002], a solução de uma equação de transporte para este tensor simétrico, o qual representa um momento de segunda ordem, resultaria em um termo de terceira ordem a ser modelado. Este constante aumento da ordem dos termos e conseqüente aparecimento de um número cada vez maior de incógnitas identificam a dificuldade de obter-se o fechamento do sistema de equações. Esse exercício pode ser observado em [Wilcox, 1994]. Diante desta severa imposição, modelos

de turbulência são necessários para prever o efeito produzido pelos termos adicionais nas equações médias de Reynolds.

[Boussinesq, 1877] propôs que o tensor simétrico de Reynolds, analogamente a lei de Stokes para escoamentos laminares, fosse representado através de um gradiente local de velocidades médias e uma viscosidade associada às condições locais do escoamento, denominada viscosidade turbulenta. Esta aproximação, a qual aumenta a difusão através das contribuições advindas da taxa de deformação do escoamento médio, é conhecida como Conceito de Viscosidade Turbulenta.

Dentre as subdivisões observadas na aproximação de Boussinesq, os modelos mais simplificados são aqueles obtidos mediante equações algébricas. Esta modelagem foi inaugurada por [Prandtl, 1925] através da Hipótese do Comprimento de Mistura.

Apesar de requisitarem baixos recursos computacionais para solução das equações governantes, estes modelos são de caráter restritivo, uma vez que são obtidos através de constantes empíricas calibradas em função de escoamentos específicos.

Visando uma abordagem mais universal dos efeitos da turbulência, modelos envolvendo a solução de equações diferenciais são introduzidos inicialmente por [Prandtl, 1945]. Esta avaliação foi apresentada através dos modelos a uma equação (“*one-equations models*”), onde uma equação de transporte é resolvida para uma quantidade turbulenta (usualmente a energia cinética turbulenta) enquanto uma segunda quantidade (usualmente a escala de comprimento da turbulência) é obtida a partir de uma expressão algébrica [Davidson, 2003].

No entanto, apesar de representar um importante avanço na obtenção da viscosidade turbulenta presente na hipótese de Boussinesq, esta variedade de modelos, da mesma forma que os modelos algébricos, esta restrita a casos específicos. Diz-se que os modelos a uma equação apresentam uma análise incompleta, já que não existe uma expressão geral para o comprimento de escala algébrico.

Alternativamente a esta proposição dita incompleta, a utilização de uma segunda equação de transporte em contraposição ao emprego de uma expressão algébrica adquiriu importante espaço na modelagem de escoamentos turbulentos. Desta maneira, o modelo utilizando duas equações de transporte (“*two-equations models*”) permite uma captura mais verossímil das estruturas turbulentas, garantindo também uma maior universalidade do equacionamento utilizado.

Divergências são observadas no que diz respeito à escolha de uma segunda variável, uma vez que a energia cinética turbulenta, a qual é utilizada também em modelos a uma equação,

permanece sendo resolvida devido ao pouco empirismo envolvido em sua obtenção. [Kolmogorov, 1942] propôs a solução da equação de transporte a partir da variável ω , conhecida como taxa de dissipação específica e com dimensão de $(\text{tempo})^{-1}$. [Wilcox, 1988], diante do estudo inacabado de Kolmogorov, rendeu esforços para o aprimoramento deste modelo. Nos trabalhos de [Chou, 1945], [Davidov, 1961], [Harlow e Nakayama, 1968], [Jones e Launder, 1973] e [Launder e Spalding, 1974], utilizou-se a dissipação ε como segunda quantidade turbulenta. Enquanto [Speziale, Abid e Anderson, 1990] utilizaram à escala de tempo τ para reescrever a formulação obtida através de ε .

Dentre as possibilidades citadas, foi através da modelagem utilizando as quantidades k e ε que os modelos a duas equações receberam maior notoriedade. O equacionamento resultante da equação de transporte de ε apresenta combinações mais complexas que as observados na solução de k , exigindo a utilização de um número maior de constantes ajustáveis. Apesar de consistir uma metodologia computacionalmente praticável, o modelo clássico $k-\varepsilon$ apresenta falhas em algumas situações, como por exemplo, escoamentos com curvaturas de linhas de corrente, gradientes adversos de pressão e escoamentos com regiões de separação [Deschamps, 2002]. Esta restrição é muitas vezes minimizada a partir da utilização de termos apropriados.

No que tange a avaliação de problemas relacionados à Engenharia do Vento Computacional, a modelagem clássica utilizando k e ε apresenta como importante deficiência a superprodução da energia cinética da turbulência (k) na região de colisão, oriunda do impacto entre o escoamento incidente e o obstáculo imerso no interior no domínio de cálculo. Visando minimizar este prejuízo, [Launder e Kato, 1993], a partir da modificação do termo de produção, obtiveram importantes avanços com o modelo LK. Problemas relacionados à inconsistência matemática desta proposta fizeram com que novos problemas fossem observados e que autores como [Murakami, Mochida e Kondo, 1997] indicassem revisões para a modelagem LK. Desta maneira, a partir de um novo arranjo do termo de produção, o modelo MMK apresenta resultados satisfatórios no escoamento sobre corpos rombudos.

Outra abordagem das equações de Navier-Stokes via média de Reynolds não está fundamentada no conceito da viscosidade turbulenta. Nesta modelagem alternativa, o tensor de Reynolds, resultante da filtragem temporal das equações de Navier-Stokes, passa a ser resolvido através da equação de transporte para todas as suas componentes. Como observado na discussão a respeito do problema de fechamento, esta solução faz com que termos com ordens cada vez maiores sejam introduzidos a partir de correlações entre flutuações da velocidade e pressão. Assim, para cada seis novas equações advindas do tensor simétrico de Reynolds, são inseridas

vinte e duas novas incógnitas. Para viabilizar o processo de fechamento destas equações, são inseridas relações complementares de proporcionalidade, as quais exigem a determinação de constantes *ad-hoc* [Silveira Neto, 2002]. Apesar de atribuir refinamento e maior universalidade a solução quando comparados aos modelos obtidos através do conceito da viscosidade turbulenta, modelos para o transporte das tensões de Reynolds costumam adicionar um esforço computacional superior aos benefícios advindos de sua utilização.

Na EVC, o maior obstáculo dos modelos baseados no tensor de Reynolds (“RSM – *Reynolds Stress Models*”) tem sido aperfeiçoar a obtenção de correlações de pressão-deformação para o termo de redistribuição ϕ_{ij} . Dentre os esforços mais notáveis, é possível citar os trabalhos de [Launder, Reece e Rodi, 1975] com o modelo LRR, [Fu, Launder e Tselepidakis, 1987] com o modelo FLT e [Speziale, Sarkar e Gatski, 1991] com o modelo SSG. Segundo [Murakami, 1998], a abordagem RSM não parece muito promissora em aplicações de engenharia do vento, uma vez que a sua avaliação sobre corpos rombudos é insatisfatória, exigindo uma formulação demasiadamente sofisticada.

1.5.3 Simulação de Grandes Escalas

Devido a deficiências observadas nos modelos oriundos do processo de média temporal das equações de Navier-Stokes (RANS) e no alto custo computacional intrínseco a metodologia DNS, o surgimento de uma abordagem intermediária, a qual é obtida a partir da simulação das grandes escalas do escoamento, possibilitou que inúmeros problemas geometricamente e fisicamente complexos fossem avaliados com elevado grau de refinamento. Desenvolvida pelo meteorologista Joseph Smagorinsky, 1963, visando à predição numérica da circulação atmosférica, esta metodologia, inaugurada em problemas de engenharia por [Deardorff, 1970], tem sido amplamente utilizada por inúmeros pesquisadores no mundo todo e, acompanhando a evolução computacional das últimas décadas, vem adquirindo crescente espaço no setor industrial.

A Simulação de Grandes Escalas (“LES – *Large Eddy Simulation*”) soluciona diretamente as contribuições referentes às escalas que governam a dinâmica local do escoamento (grandes escalas) e utiliza modelos sub-malha para avaliar as escalas de caráter mais universal (pequenas escalas). Nesta análise, as grandes estruturas são aquelas responsáveis pelo transporte de energia e quantidade de movimento enquanto as escalas conhecidas como sub-malha tendem a ser mais isotrópicas e menos afetadas pelas condições de contorno.

Apesar desta simplificação na solução das equações governantes, a utilização da Simulação das Grandes Escalas exige ainda que uma elevada discretização espacial seja utilizada. Segundo [Chapman, 1979], o número de graus de liberdade necessários na região de corrente livre é de $Re^{0.4}$, enquanto que o refinamento exigido para o cálculo da sub-camada viscosa é de $Re^{1.8}$. No intuito de minimizar estes valores e conseqüentemente o tempo de processamento necessário, funções de parede são comumente utilizadas em regiões de camada limite próximas a paredes sólidas. [Werner e Wengle, 1991] apresentam em seus trabalhos condições de contorno que assumem ou uma distribuição linear ou a lei de potência para a velocidade instantânea na região fronteira à parede.

Outra possibilidade comumente adotada na redução do esforço computacional está vinculada à utilização de malhas que apresentem uma configuração irregular (“*stretched*”). Desta maneira, é possível priorizar com um refinamento mais denso regiões onde os efeitos relacionados às pequenas escalas sejam de interesse, enquanto uma disposição gradualmente mais grosseira é empregada em regiões mais afastadas destes efeitos. Na confecção de uma malha não uniforme, é importante observar uma transição gradual entre os elementos finitos no intuito de evitarem-se erros de ordem numérica.

Segundo [Murakami, 1998], o número de onda de corte para o espectro de energia entre as escalas resolvidas e as escalas sub-malhas está relacionado ao tamanho característico da malha, $\bar{\Delta}$. Quando a razão de aspecto é superior ao valor de 1,05, o número de corte difere consideravelmente entre elementos vizinhos gerando oscilações numéricas.

Outro problema inerente à construção de malhas irregulares está relacionado à escolha adequada da função filtro. Segundo [Silveira Neto, 2002], a aplicação de modelos sub-malha para malhas regulares não oferece dificuldades uma vez que os comprimentos característicos dos filtros são calculados diretamente da dimensão da malha. Para os casos de malhas irregulares, deve-se levar em conta este fato através de modificações nos modelos originais. Para fortes anisotropias, [Scotti e Meneveau, 1993] utilizam fatores de aspecto para avaliar transições na construção da malha. Filtros para malhas irregulares são sugeridos também em [Vasilyev et al., 1997] e [Vasilyev et al., 1998].

No que diz respeito ainda à Simulações de Grandes Escalas, malhas irregulares são observadas também através de disposições não estruturadas. Importante revisão a cerca destas construções pode ser obtida no trabalho de [Popiolek et al., 2006], onde elementos tetraédricos são empregados em escoamentos laminares e turbulentos na simulação numérica de cavidades e degraus. Ainda como importante esforço no desenvolvimento de malhas irregulares, [Popiolek e

Awruch, 2006] apresentam malhas não estruturadas automaticamente adaptadas na simulação numérica de escoamentos incompressíveis.

A separação proposta pela modelagem LES permite que as grandezas envolvidas na solução das equações governantes sejam avaliadas a partir de uma parcela referente às grandes escalas do escoamento e uma relacionada aos termos sub-malha. Estes últimos, os quais não são resolvidos diretamente, são posteriormente avaliados a partir da utilização de modelos algébricos. No intuito de exemplificar a filtragem espacial utilizada na Simulação das Grandes Escalas, a qual será discutida mais enfaticamente na seção referente à modelagem matemática, uma breve análise da formulação pode ser observada nas Eqs. (1.10) a (1.16).

Desta maneira, avaliando uma variável genérica $f(x_i)$, a separação das estruturas é realizada da seguinte maneira:

$$f(x_i) = \bar{f}(x_i) + f'(x_i) \quad (1.10)$$

Na obtenção do termo $\bar{f}(x_i)$, a seguinte integral é resolvida:

$$\bar{f}(x_i) = \int_{\Omega} f(x'_i) G(x_i - x'_i) dx' \quad (1.11)$$

onde Ω é o domínio de integração, $\bar{f}(x_i)$ é a variável filtrada na posição x_i e G é a função filtro espacial. Esta função determina a estrutura e o tamanho das pequenas escalas a partir da diferença $x_i - x'_i$ e do comprimento característico do filtro ($\bar{\Delta}$), o qual determina a frequência de corte.

Os filtros comumente utilizados são do tipo: (Figura 1.6(a)), expansão truncada de Fourier (Figura 1.6(b)) e Gaussiano (Figura 1.6(c)). No filtro tipo “*box*”, as seguintes condições são respeitadas:

$$G(x_i - x'_i) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n 1/\Delta_i & \text{se } |x_i - x'_i| \leq \Delta_i/2 \\ 0 & \text{se } |x_i - x'_i| > \Delta_i/2 \end{cases} \quad (1.12)$$

Uma vez que $\bar{\Delta}$ determina a frequência de corte, caso o tamanho da malha apresente um tamanho análogo a esta dimensão característica, o processo de filtragem deverá se confundir com

a filtragem imposta pela discretização, mantendo as variáveis constantes no interior do volume da discretização.

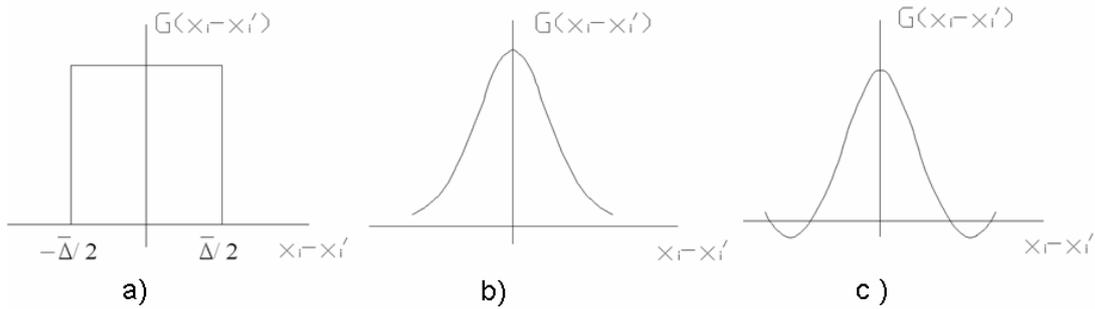


Figura 1.6 - Funções filtro empregadas na modelagem LES; (a) Filtro “*box*” (b) expansão truncada de Fourier e (c) Gaussiano

Com o auxílio das propriedades de filtragem espacial e da decomposição das variáveis que governam o escoamento turbulento isotérmico de fluidos incompressíveis, as seguintes equações são obtidas:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i \bar{v}_j) = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{v} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \left(\overline{v_i v_j} + \overline{v_i v'_j} + \overline{v_j v'_i} + \overline{v'_j v'_i} \right) \right\} \quad (1.14)$$

Como é possível verificar na Eq. (1.14), a separação das escalas na equação da conservação da quantidade de movimento resulta no aparecimento de novas relações entre grandes e pequenas estruturas. Apesar da filtragem executada na simulação de grandes escalas ser de natureza distinta daquela proposta na metodologia RANS, é possível observar que a solução desta equação, mais uma vez, esbarra no problema de fechamento. Analogamente a solução das equações médias de Reynolds, utilizam-se modelos de turbulência para avaliar estes termos não resolvidos pela malha, denominados como sendo sub-malha (“SGS – *SubGrid Scale*”).

A principal função dos modelos de turbulência sub-malha é a de simular a transferência de energia entre as grandes e as pequenas escalas. Na média, este transporte ocorre das maiores estruturas presentes no escoamento para aquelas denominadas sub-malha, gerando o processo conhecido como cascata turbulenta ou cascata de energia de Kolmogorov. Apesar de não

representar o movimento médio, o processo inverso de transporte de energia, conhecido como “backscatter”, também dever ser computado pelo modelo utilizado [Blazek, 2001].

Na avaliação das escalas não resolvidas pelas equações governantes, é possível observar abordagens distintas. O conceito de viscosidade turbulenta é o que mais amplamente é utilizado. Baseado na aproximação de [Boussinesq, 1877] os efeitos dissipativos globais das pequenas escalas são avaliados negligenciando eventos locais de energia associados à convecção e a difusão [Chung, 2002]. Estes modelos costumam ser mais simples e universais quando comparados com aqueles utilizados na metodologia clássica.

Dentre os modelos baseados no conceito da viscosidade turbulenta, o modelo proposto por [Smagorinsky, 1963], pioneiro na modelagem sub-malha, ainda continua sendo o mais difundido. Este é baseado na hipótese do equilíbrio local, a qual implica na dissipação integral e instantânea de toda a energia oriunda das grandes escalas. O modelo algébrico para determinação da viscosidade turbulenta é apresentado a partir do seguinte equação:

$$\nu_T = C_s^2 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (1.15)$$

onde C_s é a constante de Smagorinsky, $\bar{\Delta}$ é o comprimento característico do filtro e $|\bar{S}|$ é a magnitude do tensor taxa de deformação. A constante de Smagorinsky foi determinada analiticamente por [Lilly, 1967] como sendo $C_s = 0,18$, porém sua utilização ainda é amplamente discutida e sua determinação vinculada ao escoamento em análise.

Segundo [Murakami, 1997], a constante de Smagorinsky pode assumir valores entre 0,1 e 0,25. Em aplicações de Engenharia de Vento Computacional, mais especificamente na caracterização de escoamentos sobre corpos rombudos, a determinação de uma constante universal C_s torna-se uma tarefa difícil, uma vez que são observadas diversas estruturas, como por exemplo, colisão, separação e desprendimento de vórtices. O mesmo autor, na análise numérica de escoamentos turbulentos sobre prismas quadrados, utiliza um valor de $C_s = 0,15$ para escoamentos bidimensionais e $C_s = 0,10$ em avaliações tridimensionais. Esta distinção observada exemplifica claramente a dificuldade de obter-se uma unicidade na imposição da constante de Smagorinsky.

No intuito de eliminar esta deficiência observada no modelo sub-malha de Smagorinsky, pode-se destacar os trabalhos propostos por [Yoshizawa, 1991], [Germano et al., 1991] e [Lilly, 1992]. A partir dos esforços destes dois últimos pesquisadores, a Simulação de Grandes Escalas

atinge um refinamento ainda maior da sua formulação através do modelo sub-malha dinâmico, o qual será discutido posteriormente.

Outra desvantagem do modelo de Smagorinsky recai sobre a utilização de uma constante no cálculo da viscosidade turbulenta. A consequência desta simplificação implica em um modelo excessivamente dissipativo, não permitindo que o fenômeno conhecido como “*backscatter*” seja avaliado.

No tratamento de escoamentos turbulentos nas proximidades de regiões de parede, faz-se necessário a utilização de uma função de amortecimento empírica para que a constante C_s seja devidamente anulada na região laminar da camada limite. Assim, no intuito de incluir a redução da influência das pequenas escalas no cálculo da viscosidade turbulenta, a função de amortecimento de Van Driest é comumente utilizada em regiões próximas à parede.

Na simulação de escoamentos com baixo número de Reynolds sobre prismas com seção quadrada, regiões próximas da superfície do obstáculo que propiciem um aumento abrupto do tensor taxa de deformação constituem um problema para este modelo. Uma vez que C_s não é ajustado para cada situação observada no escoamento, é possível que uma transição prematura para o regime turbulento venha a ser obtida numericamente, enquanto que fisicamente este ainda permaneceria laminar.

Como observado anteriormente, a solução desta deficiência oriunda da imposição de uma constante “ad-hoc” ganhou maior notabilidade através do modelo sub-malha dinâmico, desenvolvido por [Germano et al., 1991] e revisado por [Lilly, 1992]. Nesta abordagem, o modelo algébrico para obtenção da viscosidade turbulenta proposto por Smagorinsky, 1963, é mantido. A diferença essencial desta proposta está na obtenção da função de proporcionalidade, a qual passa a computar efeitos locais a partir de uma avaliação dinâmica no espaço e no tempo. Visto isso, a viscosidade turbulenta passa a ser investigada da seguinte maneira:

$$\nu_T = C_d(x,t)\bar{\Delta}^2|\bar{S}| \quad (1.16)$$

Na obtenção deste parâmetro, [Germano et al., 1991] propuseram o emprego de um segundo processo de filtragem, o qual é conhecido como filtro teste. Assim, juntamente ao filtro em nível de malha $\bar{\Delta}$, um novo filtro de dimensão $\hat{\Delta}$ é sugerido. O comprimento deste novo filtro deve ser maior que o filtro em nível de malha, de modo que comumente utilizam-se múltiplos deste último para esta nova filtragem (usualmente $\hat{\Delta} = 2\bar{\Delta}$). Segundo [Silveira Neto,

2002], a utilização de comprimentos característicos distintos permite que informações a cerca do nível de energia entre as escalas dos dois filtros sejam empregadas na modelagem da transferência desta grandeza entre as escalas resolvidas e as não resolvidas. Detalhes sobre a dupla filtragem supracitada podem ser verificados em [Petry e Awruch, 2006].

Na solução de problemas relacionados à EVC, a utilização do procedimento de dupla filtragem permite a obtenção de resultados com maior grau de refinamento nas regiões parietais quando comparados aos avaliados pelo modelo clássico de Smagorinsky. Além de possibilitar uma maior precisão na predição de escoamentos turbulentos, o modelo sub-malha dinâmico não necessita que funções de amortecimento sejam utilizadas na região referente à camada limite, uma vez que este modelo conduz o valor de C_d nulo na região de camada limite [Murakami, 1997].

Problemas advindos da utilização de uma função de proporcionalidade constante ao longo de todo o domínio, relacionados à impossibilidade de captar a transferência de energia das pequenas para as grandes escalas (“backscatter”) e a transição prematura ao regime turbulento em regiões com aumento abrupto do tensor taxa de deformação, são superados de maneira satisfatória através da utilização de modelos dinâmicos.

Em avaliações relacionadas à EVC, escoamentos sobre prismas de seção quadrada costumam apresentar um espectro de flutuações demasiadamente grande para C_d , exigindo que modelos muitas vezes sejam aperfeiçoados visando estabilização da solução numérica.

No intuito transpor estas deficiências, [Zang et al. 1993] e [Vreman et al. 1994] propõem a utilização de um modelo dinâmico misto (“DM – *Dynamic Mixed model*”), o qual é resultante da combinação linear do modelo clássico dinâmico e do modelo de similaridade. [Meneveau et al. 1996] apresentam uma formulação onde C_d é obtido a partir do cálculo de quantidades médias em uma determinada trajetória do escoamento. Este modelo é conhecido como dinâmico Lagrangiano (“LD – *Lagrangian Dynamic model*”). A adição do modelo LD na formulação DM permite a obtenção de um terceiro modelo, o dinâmico Lagrangiano misto (“LDM - *Lagrangian Dynamic Mixed model*”), o qual apresenta os melhores resultados em escoamentos sobre prismas de seção quadrada.

1.6 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (“FEM – *Finite Element Method*”), inicialmente desenvolvido para solução de problemas relacionados à mecânica dos sólidos, figura como uma robusta técnica computacional na solução de equações diferenciais e integrais nos mais diversos campos da engenharia e das ciências aplicadas.

Embora a avaliação de problemas estruturais e fluido dinâmicos exiba um comportamento similar em inúmeros aspectos, o emprego do método dos elementos finitos para estes últimos casos ascendeu de maneira mais lenta.

Em problemas relacionados à mecânica dos fluidos, duas importantes dificuldades são observadas: (1) o tratamento de escoamentos incompressíveis e quase-incompressíveis e (2) a avaliação de problemas advectivo-dominados através do método clássico de Galerkin [Zienkiewicz et al., 2005].

A avaliação de escoamentos a partir da hipótese da incompressibilidade acarreta em conseqüências matemáticas intimamente relacionadas a esta aproximação, uma vez que a formulação não apresenta a derivada temporal referente ao termo de pressão. Por esta razão, inúmeras estratégias são observadas na literatura no intuito de transpor esta dificuldade. Os principais enfoques são: método misto, método da penalidade, equação de Poisson para pressão e método da pseudo-compressibilidade.

No método misto, velocidade e pressão são mantidas no mesmo conjunto de equações e resolvidas através da obtenção de expressões dos resíduos ponderados. Este enfoque impõe uma forte restrição na compatibilização de subespaços de elementos finitos, já que a formulação fraca para este método apresenta derivações de primeira ordem para o termo de velocidade e não exibe derivação para o termo de pressão. Esta limitação faz com que funções de interpolação de ordens distintas sejam utilizadas, sendo aquela relacionada à velocidade superior em uma ordem quando comparada à função referente à pressão.

No método de penalidade, uma nova equação para a conservação de massa, a qual apresenta boa aproximação para escoamentos incompressíveis, é avaliada a partir do termo de pressão e de um parâmetro de penalidade. Desta maneira, é possível descartar a pressão da equação da conservação da quantidade de movimento e obtê-la *a posteriori*, mediante a utilização do campo de velocidades. Este enfoque apresenta como principal dificuldade estimar o parâmetro de penalidade para que a incompressibilidade seja aproximada. Segundo [Reddy e Gartling, 2001], existem dois métodos de penalidade para avaliação de escoamentos viscosos e

incompressíveis: o método de penalidade de integração reduzida e o método de penalidade consistente.

No método que emprega a equação de Poisson para a pressão, esta variável primária é obtida a partir da substituição da equação da continuidade pela equação de Poisson. Este enfoque, o qual impossibilita uma solução desacoplada das equações, foi desenvolvido visando superar dificuldades de convergência em escoamentos incompressíveis [Azevedo, 1999].

No método da pseudo-compressibilidade, enfoque utilizado no presente trabalho, a equação da conservação de massa é reescrita a partir da consideração que, em escoamentos reais, uma leve compressibilidade é sempre observada. Esta hipótese é apoiada na observação de valores finitos para a velocidade de propagação do som, ao contrário do previsto pela hipótese clássica da incompressibilidade [Braun, 2007]. Detalhes sobre esta metodologia serão apresentados no capítulo referente à modelagem matemática.

A utilização do método clássico de Galerkin em problemas advectivo-dominantes, ou seja, escoamentos onde os efeitos inerciais sobrepujam os efeitos difusivos, apresentam a manifestação de oscilações espúrias, exigindo que métodos de elementos finitos com características de estabilidade sejam empregados. Nesta variedade de escoamentos, caracterizados pelo alto número de Peclet (Pe) envolvido, a “resposta” do processo advectivo a uma perturbação ocorre de maneira mais acelerada quando comparada ao processo difusivo (fenômeno relacionado à ocorrência de baixos números de Peclet). Segundo [Gresho e Sani, 1999], em escoamentos onde $Pe \ll 1$, uma vez que a difusão é um processo de amortecimento com característica predominantemente parabólica, estes requerem uma solução mais simples quando comparados a escoamentos com $Pe \gg 1$, o qual apresenta comportamento hiperbólico e não amortece a solução.

As primeiras propostas para eliminação das oscilações partiram de idéias oriundas de esquemas aplicados ao método das diferenças finitas. Este tratamento diferenciado aos termos advectivos são conhecidos como métodos de estabilização ou “*upwind*”. Dentre as metodologias mais importantes para estabilização de escoamentos convectivos, destacam-se os seguintes enfoques: método SPUG, método de Taylor-Galerkin e o método GLS.

O método SPUG (“*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*”), desenvolvido por [Brooks e Hughes, 1982], apresenta importante papel no desenvolvimento dos métodos de estabilização. Uma evolução de esquemas do tipo ABD – “*Anisotropic Balancing Dissipation*”, o método SPUG permitiu que oscilações espúrias fossem removidas de escoamentos advectivo-dominantes conferindo consistência as equações. Segundo [Brasil Júnior, 2002], a idéia principal deste

método é advinda da adição de uma difusividade artificial na direção das linhas de corrente, através de uma modificação das funções peso.

Em esquemas baseados no método de discretização temporal de Taylor-Galerkin, a remoção das oscilações espúrias é verificada através dos esforços de [Donea, 1984], o qual propõe a expansão temporal em série de Taylor através da utilização de termos de mais alta ordem. [Gresho e al. 1984], alternativamente à proposta de Donea, sugerem o emprego de um coeficiente de difusão positivo para remover a desestabilização inserida através do erro de truncamento inerente a expansão em série de Taylor. Este termo é conhecido como tensor de balanço difusivo (“BTD – *Balancing Diffusive Tensor*”).

No método Galerkin/mínimos-quadrados (“GLS – *Galerkin/least-squares*”) proposto por [Hughes et al., 1989], os termos de estabilização resultam do processo de minimização por mínimos quadrados. Segundo [Franca, 1998], o método GLS é considerado uma evolução do método SPUG, uma vez que combina características do método de Galerkin com o método de mínimos quadrados. Informações mais detalhadas sobre este método de estabilização podem ser obtidas através dos trabalhos de [Franca e Frey, 1992], [Franca et al., 1992] e [Zinani, 2006].

No que diz respeito à discretização temporal utilizando o método de Taylor-Galerkin, esquemas implícitos, semi-implícitos e explícitos são passíveis de serem empregados. Esquemas implícitos apresentam a vantagem de serem incondicionalmente estáveis, permitindo que altos valores de incremento de tempo sejam utilizados. Porém, seu emprego apresenta o prejuízo de exigir um armazenamento de memória excessivo.

Esquemas explícitos, contrariamente aos esquemas resolvidos implicitamente, são responsáveis por baixo armazenamento de informação na memória central. Apesar deste importante benefício, estes são condicionalmente estáveis exigindo que o passo de tempo empregado esteja relacionado à multiplicidade de escalas presente no escoamento, ou seja, o incremento de tempo deve ser proporcional as menores escalas observadas.

Porém, a aparente vantagem observada pela formulação implícita frente à escolha do passo de tempo é dissolvida quando se avaliam escoamentos em regime turbulento e altamente transientes, uma vez que passos de tempo reduzidos devem ser utilizados visando à captura de fenômenos com altas frequências. No presente estudo, dois esquemas explícitos distintos serão avaliados: o esquema de Taylor Galerkin explícito-iterativo e o esquema de dois passos desenvolvido por [Kawahara e Hirano, 1983].

Segundo [Braun, 2007], esquemas semi-implícitos são assinalados pela utilização de características oriundas tanto de esquemas implícitos como explícitos. Uma análise detalhada desta formulação é apresentada por [Braun e Awruch, 2004].

Outra fonte de instabilidade verificada no método dos elementos finitos é advinda da utilização da quadratura de Gauss com integração reduzida para avaliação das equações governantes em nível de elemento. A quadratura mínima exigida, por exemplo, para avaliação completa de um elemento hexaédrico trilinear é de pelo menos oito pontos, o que demandaria um esforço computacional inexequível. Assim, a utilização de uma integração dita reduzida, a qual avalia apenas um único ponto de integração no centro do elemento, implica no aparecimento de modos espúrios conhecidos como “*hourglass modes*”.

Porém, segundo [Braun, 2007], estes modos espúrios dificilmente são excitados em descrições puramente Eulerianas, mas podendo aparecer em problemas envolvendo interação fluido-estrutura.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Equações que Governam a Dinâmica dos Fluidos

Na análise de escoamentos transientes, tridimensionais e isotérmicos, a solução das equações diferenciais de conservação de massa e quantidade de movimento possibilita que a dinâmica dos fluidos seja avaliada. Este conjunto de equações, o qual é apresentado através das Eqs. (2.1) e (2.2), pode ser observado mais detalhadamente em [Schlichting e Gersten, 2003], [Shames, 2003] e [White, 2006].

Equação da conservação de massa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.1)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\frac{D(\rho v_i)}{Dt} - \frac{\partial (\sigma_{ij} - p\delta_{ij})}{\partial x_j} = f_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.2)$$

sendo:

$\frac{D(\bullet)}{Dt}$ - derivada total ou material

ρ - massa específica do fluido

v_i - componente da velocidade na direção i

x_i - coordenada na direção i

σ_{ij} - componente do tensor de tensões

p - pressão

δ_{ij} - delta de Kroenecker

f_i - componente das forças de campo na direção i

As condições de contorno e iniciais são expressas pelas equações (2.3) - (2.4) e equações (2.5) - (2.6), respectivamente. Na notação utilizada no presente trabalho, Γ_D e Γ_N representam as condições de contorno impostas no domínio fluido dinâmico Ω , sendo Γ_D a condição de contorno essencial ou de Dirichlet e Γ_N a condição de Neumann ou condição de contorno natural. Uma vez que não há superposição de fronteira, temos que $\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Maiores detalhes a cerca da imposição das condições de contorno podem ser observados em [Reddy e Gartling, 2001] e [Gresho e Sani, 1999].

$$v_i = \hat{v}_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_D \quad (2.3)$$

$$(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})n_j = t_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_N \quad (2.4)$$

$$v_i = \hat{v}_{i0} \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } t = 0, \Omega \quad (2.5)$$

$$p = \hat{p}_0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } t = 0, \Omega \quad (2.6)$$

sendo:

\hat{v}_i - componente de velocidade na direção i prescrita no contorno Γ_D

t_i - componente das forças de superfície na direção i prescrita no contorno Γ_N

n_j - cosseno diretor do vetor normal ao contorno Γ_N

No intuito de avaliarem-se os termos referentes às forças de superfície em escoamentos de fluidos ditos Newtonianos, a equação constitutiva (2.7) é inserida na equação da conservação da quantidade de movimento.

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.7)$$

onde:

μ - coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido

λ - coeficiente de viscosidade volumétrica do fluido

Expandindo as derivadas totais das equações (2.1) – (2.2) e inserindo a equação constitutiva (2.7) na equação da conservação da quantidade de movimento e na condição de contorno natural (2.4), as seguintes expressões são obtidas:

Equação da conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.8)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) - f_i = 0$$

$(i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.9)$

Condição de contorno natural ou de Neumann

$$\left\{ \left[-p + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) \right] \delta_{ij} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_j) \right] \right\} n_j = t_i$$

$(i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_N \quad (2.10)$

Compressibilidade de um fluido é uma medida da variação do volume de um líquido ou gás sobre a ação de forças externas [Schlichting e Gersten, 2003]. Uma forma de avaliar se a compressibilidade pode ou não ser negligenciada é através da verificação do número de Mach (Ma). Esta grandeza adimensional, a qual relaciona as forças de inércia sobre as forças devidas à compressibilidade do escoamento, é dada através da razão entre a velocidade do escoamento e a

velocidade de propagação do som. Para escoamentos onde o número de Mach é muito menor que a unidade (ou seja, velocidade do escoamento muito inferior à velocidade de propagação do som), o fluido pode ser considerado incompressível. Esta hipótese acarreta na utilização de uma massa específica constante, fazendo com que as equações (2.8), (2.9) e (2.10) sejam reescritas da seguinte forma, respectivamente:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.11)$$

$$\rho_0 \frac{\partial (v_i)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em Ω (2.12)

$$\left\{ \left[-p + \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_0 v_k) \right] \delta_{ij} + \frac{\mu}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 v_j) \right] \right\} n_j = t_i$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em Γ_N (2.13)

Como observado anteriormente, a avaliação de escoamentos incompressíveis acarreta em sérias dificuldades na solução numérica, gerando modos espúrios de pressão, dificuldades de convergência e a ausência da variável de pressão na equação da conservação de massa, resultando no aparecimento de zeros na diagonal principal da matriz de massa [Azevedo, 1999] e [Petry, 2002].

Visando superar estes problemas, o método da pseudo-compressibilidade, desenvolvido por [Kawahara e Hirano, 1983], propõe a manutenção do termo da derivada temporal da pressão na equação da continuidade e utilização de um valor finito para a velocidade de propagação do som. Fisicamente, esta consideração está ancorada no fato de escoamentos reais (não ideais) apresentam algum nível de compressibilidade.

Desta maneira, é possível reescrever a equação da conservação de massa utilizando a pressão como função da massa específica. Segundo [Schlichting e Gersten, 2003]:

$$p = p(\rho) \quad (2.14)$$

A derivação temporal da pressão é dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.15)$$

Da definição da velocidade de som C , temos:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = C^2 \quad (2.16)$$

Logo, da substituição de (2.16) em (2.15), obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.17)$$

Assim, substituindo a equação (2.17) na equação da conservação de massa, é possível reescrever a equação (2.8) incluindo a derivada da pressão no tempo. Desta maneira, considerando a massa específica constante, a equação da continuidade para escoamentos quase-incompressíveis pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 v_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.18)$$

A partir da obtenção das equações de conservação (2.12) e (2.18), das condições de contorno apresentadas em (2.3) e (2.13) e das condições iniciais (2.5) e (2.6), é possível avaliar diretamente problemas envolvendo escoamento de fluidos viscosos, transientes, tridimensionais, quase-incompressíveis e isotérmicos. No entanto, diante das restrições apresentadas na revisão bibliográfica, esta abordagem não representa uma realidade na solução da maior parte dos problemas práticos de engenharia.

Desta maneira, diante das discretizações espaciais e temporais exigidas pela metodologia DNS (principalmente em escoamentos com altos números de Reynolds), alternativas para a avaliação do fenômeno da turbulência devem ser adotadas. A abordagem via Simulação das Grandes Escalas, utilizada no presente trabalho, avalia as grandes escalas do escoamento de

maneira análoga à simulação numérica direta. Porém, visando reduzir o esforço computacional necessário e conseqüentemente o tempo de processamento, esta metodologia emprega modelos de turbulência sub-malha para avaliar o comportamento das pequenas estruturas do escoamento.

2.2 Equações para Escoamentos Turbulentos via Simulação de Grande Escalas

A Simulação de Grandes Escalas está atrelada essencialmente à separação das escalas presentes no escoamento. Desta maneira, a partir de uma filtragem espacial das equações que governam a dinâmica dos fluidos, as pequenas escalas são removidas e avaliadas através de modelos de turbulência.

As variáveis de campo do problema são decompostas em uma parcela referente às grandes escalas (representada através de uma barra) e outra referente às pequenas escalas (designada mediante a utilização do apóstrofe). Desta maneira, tem-se que:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i \quad (2.19)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.20)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (2.21)$$

A partir da hipótese da massa específica ser constante, assumida na seção anterior, tem-se que $\rho' = 0$. Logo, o valor da massa específica será igual ao seu valor médio.

Segundo [Leonard, 1974], o campo das grandes escalas é obtido através da convolução entre uma variável genérica f e uma função filtro $G(x)$:

$$\bar{f}(x_i) = \int_{\Omega} f(x'_i) G(x_i - x'_i) dx'_i \quad (2.22)$$

sendo a função filtro G do tipo “box” e definida da seguinte maneira:

$$G(x_i - x'_i) = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^n 1/\Delta_i & \text{se } |x_i - x'_i| \leq \Delta_i/2 \\ 0 & \text{se } |x_i - x'_i| > \Delta_i/2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

onde Δ_i é a dimensão do filtro na direção i e n é o número de dimensões do problema.

Na utilização de um filtro uniforme, as operações matemáticas de filtros e derivadas parciais são comutativas. Assim, sendo f e g duas variáveis genéricas quaisquer, as seguintes propriedades são observadas:

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{f}} &= \overline{f} \ ; \ \overline{\overline{g}} = \overline{g} \ ; \ \overline{f'} = 0 \ ; \ \overline{g'} = 0 \\
 \frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} \ ; \ \frac{\overline{\partial g}}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i} \\
 \overline{f + g} &= \overline{f} + \overline{g} \\
 \overline{gf} &\neq \overline{g}\overline{f} \ ; \ \overline{gf'} \neq \overline{g}\overline{f'} \ ; \ \overline{gf'} = 0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Após a aplicação do operador filtro espacial e das propriedades apresentadas em (2.24) nas equações de conservação de massa e quantidade de movimento, (2.12) e (2.18), respectivamente, as seguintes equações governantes são obtidas:

Equação da conservação de massa

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \rho_0 \overline{v_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \tag{2.25}$$

Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \overline{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 \overline{v_i v_j}) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 \overline{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 \overline{v_j}) \right) + \right. \\
 &\left. + \frac{\lambda}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 \overline{v_k}) \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0 \\
 &\quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Na equação (2.26), é possível identificar que o termo não linear resultante da operação de filtragem espacial é apresentado através de um produto filtrado, o qual impossibilita a solução do sistema de equações. Aplicando as decomposições para as variáveis primárias do problema

obtidas através das Eqs. (2.19) a (2.21), este produto filtrado pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\overline{v_i v_j} = \overline{v_i} \overline{v_j} + \overline{v_i' v_j'} + \overline{v_i' v_j} + \overline{v_i v_j'} + L_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.27)$$

onde L_{ij} são os termos adicionais sugeridos por [Leonard, 1974], os quais levam o nome deste mesmo autor. Substituindo a Eq. (2.27) em (2.26), podemos reescrever a equação da conservação da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \overline{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \overline{v_i v_j}) + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \overline{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 \overline{v_j}) \right) + \frac{\lambda}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_0 \overline{v_k}) \right) \delta_{ij} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho_0 (L_{ij} + C_{ij} + \tau_{ij}) \right\} - f_i = 0 \end{aligned} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.28)$$

Na equação (2.28), os tensores adicionais oriundos do produto filtrado são:

$$L_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j}} - \overline{v_i v_j} \rightarrow \text{Tensor de Leonard} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.29)$$

$$C_{ij} = \overline{v_i' v_j'} + \overline{v_i' v_j} \rightarrow \text{Tensor cruzado} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.30)$$

$$\tau_{ij} = \overline{v_i' v_j'} \rightarrow \text{Tensor de Reynolds sub-malha} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.31)$$

O tensor de Leonard L_{ij} (responsável pelas interações entre os grandes vórtices responsáveis pela produção da turbulência nas pequenas escalas) e o tensor cruzado C_{ij} (responsável pela interação entre os vórtices de grande e pequena escala) são modelados a partir da aproximação de [Clark et al., 1979], os quais sugerem expressar a soma destes tensores através de uma expansão de Taylor do campo filtrado [Silveira Neto, 2002]. Segundo [Findikakis e Street, 1979], esta adição é apresentada pela seguinte equação:

$$C_{ij} + L_{ij} = \frac{\Delta_k^2}{2\gamma} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.32)$$

Para a constante γ , um valor igual a 6 é comumente utilizado. De acordo com [Petry e Awruch, 1997], a inserção dos tensores de Leonard e cruzado na formulação via Simulação de Grandes Escalas altera de maneira desprezível os resultados, acarretando em um acréscimo importante no tempo de processamento. Desta maneira, ambos os termos podem ser negligenciados [Findikakis e Street, 1982].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 \bar{v}_j) \right) + \frac{\lambda}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 \bar{v}_k) \right) \delta_{ij} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \rho_0 \overline{v'_i v'_j} \} - f_i = 0 \end{aligned}$$

$(i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.33)$

Aplicando o processo de filtragem na condição de contorno de Neumann, a seguinte equação é obtida:

$$\left\{ \left[-p + \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 \bar{v}_j) \right] \right\} n_j = t_i$$

$(i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.34)$

Após o procedimento de filtragem espacial proposto na simulação numérica das grandes escalas, as equações resultantes (2.25) e (2.33) são responsáveis por governar o escoamento turbulento de fluidos Newtonianos, isotérmicos e quase-incompressíveis. Estas são, por sua vez, utilizadas conjuntamente às condições de contorno essencial e natural, (2.3) e (2.34), respectivamente, e as condições iniciais apresentadas em (2.5) e (2.6). O tensor de Reynolds sub-malha, resultado do movimento das escalas inferiores em nível de malha, é obtido através da utilização de modelos de turbulência, uma vez que não são computados diretamente através das equações governantes.

2.3 Modelos de Turbulência Sub-Malha

Os modelos de turbulência sub-malha têm como principal função descrever a transferência de energia entre as grandes e as pequenas estruturas do escoamento. Segundo [Silveira Neto,

2002], estes podem ser classificados a partir de dois grupos básicos: aqueles que dependem da viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq) e aqueles que não dependem da viscosidade turbulenta.

Após o emprego do procedimento de filtragem espacial na equação da conservação da quantidade de movimento, é possível observar o aparecimento de termos relacionados às pequenas escalas do escoamento, os quais não são diretamente resolvidos através das equações governantes. Assim, após a remoção do tensor de Leonard e do tensor cruzado, as estruturas de alta frequência remanescentes no equacionamento são representadas através do produto filtrado $\overline{v'_i v'_j}$, o qual deve ser resolvido mediante a utilização de modelos de fechamento.

Devido às pequenas escalas do escoamento apresentarem um caráter mais homogêneo e isotrópico quando comparadas as escalas responsáveis pelo transporte de energia e quantidade de movimento (grandes escalas), os modelos de turbulência sub-malha desenvolvidos para a abordagem LES são em geral mais simples e universais do que os voltados a metodologia RANS.

Dentre os modelos existentes, os dependentes da viscosidade turbulenta, oriundos da hipótese de Boussinesq, são os mais amplamente difundidos. Esta aproximação, a partir da analogia estabelecida com a lei da viscosidade de Stokes, expressa o tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidades filtrado \overline{S}_{ij} e da energia cinética turbulenta sub-malha K_{SM} .

Desta maneira, a partir da forma generalizada proposta por Kolmogorov (1942), o tensor de Reynolds sub-malha para escoamentos completamente incompressíveis é modelado através da seguinte expressão:

$$-\overline{v'_i v'_j} = 2\nu_T \overline{S}_{ij} - \frac{2}{3} K_{SM} \delta_{ij} \quad (2.35)$$

onde ν_T é a viscosidade turbulenta a ser modelada e os termos \overline{S}_{ij} e K_{SM} são apresentados a partir das equações (2.36) e (2.37).

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.36)$$

$$K_{SM} = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad (2.37)$$

No presente estudo, a hipótese da pseudo-compressibilidade permite que a aproximação original estabelecida por Boussinesq seja utilizada, negligenciando assim, a energia cinética turbulenta sub-malha. Desta maneira, substituindo (2.36) em (2.35), obtém-se a seguinte relação para o tensor de Reynolds sub-malha:

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.38)$$

No intuito de avaliar o comportamento das escalas inferiores à resolução da malha, modelos de turbulência devem ser propostos para descrever o comportamento da viscosidade turbulenta.

2.3.1 Modelo de Smagorinsky

O modelo de Smagorinsky é uma adaptação à teoria do comprimento de mistura apresentada por [Prandtl, 1945]. Na formulação voltada à modelagem clássica desenvolvida por este último autor, a viscosidade turbulenta é proporcional às escalas características da turbulência (comprimento de mistura) multiplicada por uma velocidade característica turbulenta. Analogamente, o modelo sub-malha de Smagorinsky propõe que a viscosidade turbulenta na Simulação das Grandes Escalas seja proporcional ao comprimento característico sub-malha $\bar{\Delta}$ e também a uma velocidade sub-malha característica, representada pela magnitude do tensor taxa de deformação $|\bar{S}|$ [Lesieur et al., 2005].

$$\nu_T = C_s^2 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (2.39)$$

onde C_s é a constante de proporcionalidade de Smagorinsky. Os termos $\bar{\Delta}$ e $|\bar{S}|$ são apresentados da seguinte maneira:

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^3 \Delta x_i} \quad (2.40)$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (2.41)$$

3 MODELAGEM NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

3.1 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos consiste em um procedimento de discretização de problemas contínuos através de relações matematicamente definidas. Desta maneira, o método está fundado na possibilidade de avaliar um dado domínio a partir da união de um número finito de geometrias simples (elementos finitos) e de um número finito de parâmetros. Em seguida, a solução do sistema completo é obtida a partir da montagem (“*assembly*”) destes subdomínios.

Segundo [Reddy e Gartling, 2001], a solução de uma equação diferencial pode ser representada como a combinação linear de parâmetros c_j e de funções aproximadas ϕ_i selecionadas apropriadamente em todo o domínio do problema. Os parâmetros c_j são determinados de maneira que a solução da equação diferencial seja satisfeita, enquanto as funções ϕ_i devem satisfazer as condições de contorno do problema.

As funções aproximadas são comumente obtidas utilizando os conceitos da teoria da interpolação. A definição destas funções, também conhecidas como funções de interpolação, dependerá da forma do elemento escolhido e do número de nós que definem a geometria.

Maiores detalhes sobre o método dos elementos finitos na solução de problemas fluido dinâmicos são abordados nos principais trabalhos da área, os quais podem ser atribuídos a [Reddy e Gartling, 2001; Gresho e Sani, 1999; Zienkiewicz et al., 2005].

Na obtenção da solução aproximada, os primeiros autores identificam como essenciais os seguintes passos:

- 1 – Discretização do domínio em um conjunto de elementos finitos (geração da malha de elementos finitos);
- 2 – Formulação integro-ponderada ou fraca das equações diferenciais a serem analisadas;
- 3 – Desenvolvimento do modelo de elementos finitos do problema utilizando sua forma integro-ponderada ou fraca;
- 4 – Montagem (“*Assembly*”) dos elementos finitos para obtenção do sistema global das equações algébricas;
- 5 – Imposição das condições de contorno;
- 6 – Solução das equações;

7 – Pós-processamento da solução e das variáveis de interesse.

Desta maneira, as seções seguintes do presente capítulo serão reservadas a apresentação dos passos (2) a (5). O pré e pós-processamento, passos (1) e (7), respectivamente, foram obtidos mediante a utilização dos programas Patran 2004 e Tecplot 10 e ambos serão apresentados no Capítulo 5. Na execução do passo (6), utilizou-se a linguagem Fortran 90.

Informações referentes à configuração do equipamento utilizado na solução das equações serão apresentadas na seção 5.1 do capítulo de resultados.

3.2 Formulação dos Resíduos Ponderados do Problema

O principal objetivo do método dos elementos finitos é gerar funções de aproximação requeridas na solução das equações diferenciais através do método variacional ou dos resíduos ponderados. Ambos os métodos objetivam satisfazer, de maneira integro-ponderada, as equações diferenciais governantes do problema em análise [Reddy e Gartling, 2001].

No método dos resíduos ponderados, o modelo de elementos finitos necessário para solução de escoamentos turbulentos de fluidos Newtonianos, isotérmicos e quase-incompressíveis passa pela solução da sua respectiva forma fraca. Segundo [Zienkiewicz et al., 2005], a formulação fraca consiste em uma avaliação mais “permissível” das equações governantes.

Na formulação dos resíduos ponderados, um procedimento determinado através de três passos deve ser seguido para obtenção da forma fraca. Inicialmente, os termos não nulos presentes nas equações (2.25) e (2.33) são passados para um dos lados da igualdade, multiplicando as equações resultantes pela função peso e integrando sobre todo o domínio do elemento. Assim, a configuração das equações governantes é apresentada a partir das expressões (3.1) e (3.2).

Equação da Conservação de Massa:

$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} p^* C^2 \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_j} d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \bar{v}_i) d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \bar{v}_i) d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 \bar{v}_j) \right) \right\} d\Omega \quad (3.2)$$

$$- \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_0 \bar{v}_k) \delta_{ij} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* f_i d\Omega = 0$$

onde:

p^* - função peso para a pressão, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno;

v_i^* - função peso para a velocidade, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno;

Desta maneira, para cada função peso inserida nas equações de conservação, obtém-se uma equação algébrica. Na formulação fraca, a exigência da continuidade é reduzida (ou enfraquecida) pela movimentação de algumas das diferenciações para a função peso.

No segundo passo, a diferenciação entre as variáveis primárias e as funções de aproximação é distribuída igualmente para que ambas sejam diferenciáveis apenas uma vez em relação às coordenadas. Finalmente, no intuito de incluir a condição de contorno natural na equação da conservação da quantidade de movimento, utiliza-se a integração por partes (ou teorema de Gauss-Green) nos termos difusivos e de pressão.

Utilizando a integração por partes nos termos difusivos, a seguinte equação é obtida:

$$- \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[\frac{\partial (\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} (v + v_t) \left[\frac{\partial (\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] d\Omega \quad (3.3)$$

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v_i^* (v + v_t) \left[\frac{\partial (\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} d\Omega$$

Com a aplicação do teorema de Gauss-Green no último termo da equação (3.3), a integral sobre o domínio Ω é transformada em uma integral de contorno:

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[\frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} (v + v_t) \left[\frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} v_i^* (v + v_t) \left[\frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] n_j d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Aplicando o mesmo procedimento nos termos referentes à viscosidade volumétrica e à pressão, a seguinte expressão final de resíduos ponderados é obtida para a equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial \rho_0 \bar{v}_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* v_j \frac{\partial \rho_0 \bar{v}_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} (v + v_t) \left[\frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \left\{ \frac{\lambda}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0 \bar{v}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} p d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* f_i d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} v_i^* \left\{ -p \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0 \bar{v}_k}{\partial x_k} \right) + (v + v_t) \left[\frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} n_j d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Na equação (3.5), o último termo revela o aparecimento da condição de contorno de 2ª espécie. Segundo [Oliveira Jr., 2006], a utilização desta condição de contorno nas equações de Navier-Stokes faz com que esse tipo de condição seja naturalmente satisfeita na resolução do problema. Assim a condição de contorno de 2ª espécie é também chamada de condição natural.

3.3 Equações de Elementos Finitos do Problema

A formulação fraca ou dos resíduos ponderados para solução de escoamentos turbulentos de fluidos Newtonianos, isotérmicos e quase-incompressíveis, a qual é apresentada através das equações (3.1) e (3.5), requer a utilização de aproximações para as variáveis primárias do problema sobre um elemento finito típico. No presente trabalho, o método clássico de Galerkin, também conhecido como método de Bubnov-Galerkin, é utilizado.

Nesta abordagem, tanto a função peso como as variáveis do problema são representadas através da combinação linear entre a função de interpolação e as variáveis a serem aproximadas nos nós do elemento. A formulação resultante é enunciada a partir das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_i(x, y, z) &= \phi(x, y, z) \bar{v}_i \\
v_i^*(x, y, z) &= \phi(x, y, z) v_i^* \\
\bar{p}(x, y, z) &= \psi(x, y, z) \bar{p} \\
p^*(x, y, z) &= \psi(x, y, z) p^*
\end{aligned}
\tag{3.6} \text{ em } \Omega^e$$

onde:

\bar{v}_i - vetor de valores nodais da componente i da velocidade;

ϕ - vetor de funções de interpolação para a velocidade;

v_i^* - vetor de valores nodais da função peso de velocidade;

\bar{p} - vetor de valores nodais para a pressão;

ψ - vetor de funções de interpolação para a pressão;

p^* - vetor de valores nodais da função peso de pressão;

Ω^e - domínio do elemento;

Mediante a substituição das equações apresentadas em (3.6) na formulação final de resíduos ponderados (3.1) e (3.5), as seguintes equações conservativas são obtidas:

Equação da Conservação de Massa:

$$\int_{\Omega^e} \psi^T p^* \frac{\partial(\psi \bar{p})}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^e} \psi^T p^* C^2 \frac{\partial(\rho_0 \phi v_j)}{\partial x_j} d\Omega = 0
\tag{3.7}$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^e} \phi^T v_i^* \frac{\partial(\phi v_i)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^e} \phi^T v_i^* \phi v_j \frac{\partial(\phi^T v_i)}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\partial(\phi^T v_i^*)}{\partial x_j} (v + v_i) \frac{\partial(\phi v_j)}{\partial x_j} d\Omega \\
& \int_{\Omega^e} \frac{\partial(\phi^T v_i^*)}{\partial x_j} (v + v_i) \frac{\partial(\phi v_j)}{\partial x_i} d\Omega + \frac{\lambda}{\rho_0} \int_{\Omega^e} \frac{\partial(\phi^T v_i^*)}{\partial x_j} \frac{\partial(\phi v_k)}{\partial x_k} \delta_{ij} d\Omega \\
& - \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\phi^T v_i^*)}{\partial x_j} \psi \bar{p} d\Omega - \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho_0} \phi^T v_i^* f_i d\Omega = \int_{\Gamma^e} \phi^T v_i^* S_i d\Gamma
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

onde:

$$S_i = \left\{ -\frac{\bar{p}}{\rho_0} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\rho_0} \left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \right) + (\nu + \nu_t) \left[\frac{\partial (\bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} n_j \quad (3.9)$$

sendo:

Γ^e - contorno do elemento;

Isolando as funções peso nas equações de conservação (3.7)-(3.8) e utilizando um ponto acima da variável no intuito de indicar a derivada temporal, obtém-se a seguinte formulação de elementos finitos:

Equação da conservação de massa:

$$\int_{\Omega^e} (\tilde{\psi}^T \tilde{\psi}) \dot{\bar{p}} d\Omega + \rho_0 C^2 \int_{\Omega^e} \tilde{\psi}^T \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} d\Omega \bar{v}_j = 0 \quad (3.10)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} (\tilde{\phi}^T \tilde{\phi}) d\Omega (\dot{\bar{v}}_i) + \int_{\Omega^e} (\tilde{\phi}^T \tilde{\phi}) \bar{v}_j \frac{\partial (\tilde{\phi}^T)}{\partial x_j} d\Omega (\bar{v}_i) + (\nu + \nu_t) \left[\int_{\Omega^e} \frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} d\Omega (\bar{v}_i) \right. \\ & \left. + \int_{\Omega^e} \frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i} d\Omega (\bar{v}_j) \right] + \frac{\lambda}{\rho_0} \int_{\Omega^e} \frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_k} d\Omega (\bar{v}_k) \delta_{ij} - \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega^e} \frac{\partial (\tilde{\phi}^T)}{\partial x_j} \tilde{\psi} d\Omega (\bar{p}) \\ & = \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega^e} \tilde{\phi}^T f_i d\Omega + \int_{\Gamma^e} \tilde{\phi}^T S_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como observado através da equação (2.39), a obtenção da viscosidade turbulenta ν_t está vinculada ao cálculo da magnitude da taxa de deformação $|\bar{S}|$. Para um escoamento tridimensional, esta é avaliada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
|\bar{S}| = & \left\{ 2 \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_1}(\bar{v}_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_2}(\bar{v}_2) \right]^2 + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_3}(\bar{v}_3) \right]^2 \right\} + 2 \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_2}(\bar{v}_1) \frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_1}(\bar{v}_2) \right] + \right. \\
& + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_3}(\bar{v}_1) \frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_1}(\bar{v}_3) \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_2}(\bar{v}_3) \frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_3}(\bar{v}_2) \right] \left. \right\} + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_2}(\bar{v}_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_1}(\bar{v}_2) \right]^2 \\
& + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_3}(\bar{v}_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_1}(\bar{v}_3) \right]^2 + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_3}(\bar{v}_2) \right]^2 + \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_2}(\bar{v}_3) \right]^2 \left. \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Visando uma apresentação mais compacta para a formulação em elementos finitos das equações (3.10) e (3.11), as mesmas podem ser expressas da seguinte forma:

Equação da conservação de massa:

$$M_p \dot{\bar{p}} + G_j^T \bar{v}_j = 0 \tag{3.13}$$

onde:

$$\begin{aligned}
M_p &= \int_{\Omega^e} \tilde{\psi}^T \tilde{\psi} d\Omega ; \\
G_j^T &= \rho_0 C^2 \int_{\Omega^e} \tilde{\psi}^T \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} d\Omega ;
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$M_v \dot{\bar{v}}_i + A_j \bar{v}_i + D_{ij} \bar{v}_j - G_i \bar{p} = F_i \tag{3.15}$$

onde:

$$\begin{aligned}
M_v &= \int_{\Omega^e} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} d\Omega ; \\
A_j &= \int_{\Omega^e} (\tilde{\phi}^T \tilde{\phi}) \bar{v}_j \frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_j} d\Omega ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \begin{cases} \rightarrow i = j = 1, k = 2, 3; \rightarrow i = j = 2, k = 3, 1; \rightarrow i = j = 3, k = 1, 2 \\ \int_{\Omega^e} \left[2(\hat{v}_{ii} + v_t) + \frac{\lambda}{\rho_0} \right] \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} (\hat{v}_{ii} + v_t) \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) d\Omega \\ \rightarrow i \neq j \\ \int_{\Omega^e} (\hat{v}_{ij} + v_t) \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\lambda}{\rho_0} \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega \end{cases} \quad (3.16) \\
G_i &= \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega^e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \psi d\Omega; \\
F_i &= \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega^e} \phi^T f_i d\Omega + \int_{\Gamma^e} \phi^T S_i d\Gamma
\end{aligned}$$

Avaliando a componente difusiva D_{ij} , é possível observar que o termo \hat{v}_{ii} , o qual apresenta características dissipativas, é adicionado à viscosidade turbulenta. Nas equações (3.17) e (3.18) verifica-se que este termo é resultado da soma entre a viscosidade cinemática e um termo adicional de segunda ordem conhecido como tensor de balanço difusivo. Como previamente avaliado no capítulo reservado a revisão bibliográfica, este tensor tem a função de conferir maior estabilidade à solução numérica.

$$\hat{v}_{ii} = \nu + \frac{\Delta t}{2} \nu_i \nu_i = \nu + \nu_{ii}^{adic} \quad (i = j) \quad (3.17)$$

$$\hat{v}_{ij} = \nu + \frac{\Delta t}{2} \nu_i \nu_j = \nu + \nu_{ij}^{adic} \quad (i \neq j) \quad (3.18)$$

3.4 Discretização Temporal utilizando o Método Explícito-Iterativo

Para discretização das derivadas temporais presentes nas equações (3.13) e (3.15), emprega-se a expansão em série de Taylor das variáveis primárias presentes na formulação. Segundo [Yoon et al., 1998], uma variável genérica θ pode ser expandida da seguinte maneira:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^{n+s_1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)^{n+s_2} + O(\Delta t^3) \quad (3.19)$$

Onde os índices sobrescritos n e $n+1$ referem-se ao tempo t e a seu respectivo avanço, $t+1$. As variáveis s_1 e s_2 , denominadas “*implicitness parameters*”, definem a forma de incremento no tempo através de esquemas implícitos, semi-implícitos ou explícitos, de acordo com os valores adotados [Braun, 2007]. Neste trabalho, o valor utilizado para ambos os parâmetros foi de $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$. Assim, as derivadas podem ser aproximadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \theta^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{\partial \theta^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \theta^{n+1}}{\partial t} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 \theta^{n+1/2}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta \theta^{n+1}}{\partial t^2} \quad (3.21)$$

Substituindo as equações (3.20) e (3.21) na expansão em série de Taylor apresentada em (3.19), obtém-se a seguinte expressão:

$$\Delta \theta^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \theta^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \theta^{n+1}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta \theta^{n+1}}{\partial t^2} \right) \quad (3.22)$$

Para a equação da continuidade, a variável primária derivada em função do tempo é a pressão. Assim, esta passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta \bar{p}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \bar{p}^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \bar{p}^{n+1}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \bar{p}^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta \bar{p}^{n+1}}{\partial t^2} \right) \quad (3.23)$$

A partir da equação (3.13) e dos termos de 1ª ordem apresentados na equação (3.23), a equação da conservação de massa é apresentada como segue:

$$M_{DP} (\Delta \bar{p})_{k+1}^{n+1} = -\Delta t \left[G_j^T (\bar{v}_j)^n \right] - \frac{\Delta t}{2} \left[G_j^T (\Delta \bar{v}_j)_k^{n+1} + \frac{2}{\Delta t} (M_P - M_{DP}) (\Delta \bar{p})_k^{n+1} \right] \quad (3.24)$$

Na nomenclatura adotada para o método explícito-iterativo, n refere-se ao ciclo de tempo e k ao ciclo iterativo. O termo M_{DP} representa a matriz diagonalizada, ou discreta, utilizada para evitar a inversão da matriz consistente M_p . Quando a função de interpolação empregada para o termo da pressão é constante, as matrizes discreta e consistente são idênticas, anulando a diferença entre as mesmas.

Na discretização temporal da equação da conservação da quantidade de movimento, o procedimento idêntico aquele avaliado para a pressão na equação (3.23) é efetuado para a velocidade. Desta maneira, tem-se que:

$$\Delta(\bar{v}_i)^{n+1} = \Delta t \left[\frac{\partial(\bar{v}_i)^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\Delta\bar{v}_i)^{n+1}}{\partial t} \right] + \frac{\Delta t^2}{2!} \left[\frac{\partial^2(\bar{v}_i)^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\Delta\bar{v}_i)^{n+1}}{\partial t^2} \right] \quad (3.25)$$

O procedimento para inserção dos termos de velocidade expandidos na equação da conservação da quantidade de movimento ocorre de maneira análoga àquela apresentada na equação (3.24). Desta maneira, a partir da equação (3.15) e dos termos de 1ª ordem da equação (3.25), a seguinte expressão é obtida:

$$\begin{aligned} M_{DV} \Delta(\bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} = & -\Delta t \left[A_j (\bar{v}_i)^n + D_{ij} (\bar{v}_j)^n - G_i (\bar{p})^n - F_i \right] \\ & - \frac{\Delta t}{2} \left[A_j (\Delta\bar{v}_i)_k^{n+1} + D_{ij} (\Delta\bar{v}_j)_k^{n+1} - G_i (\Delta\bar{p})_k^{n+1} - \Delta F_i + \frac{2}{\Delta t} (M_V - M_{DV}) (\Delta\bar{v}_i)_k^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Visando a obtenção da variação referente às variáveis primárias presentes nas equações de conservação (3.24) e (3.26), e uma apresentação mais simplificada das mesmas, os ciclos de tempo e iterativo são devidamente separados. Assim, as equações de conservação de massa e da quantidade de movimento podem ser apresentadas da seguinte forma:

Equação da conservação de massa:

$$(\Delta\bar{p})_{k+1}^{n+1} = (M_{DP})^{-1} \Delta t \left[(T)^n + \frac{1}{2} (Q)_k^{n+1} \right] \quad (3.27)$$

onde:

$$(T)^n = -\left[G_j^T (\bar{v}_j)^n \right] \quad (3.28)$$

$$(Q)_k^{n+1} = -\left[G_j^T (\Delta \bar{v}_j)_k^{n+1} + \frac{2}{\Delta t} (M_P - M_{DP}) (\Delta \bar{p})_k^{n+1} \right] \quad (3.29)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$(\Delta \bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} = (M_{DV})^{-1} \Delta t \left[(S_i)^n + \frac{1}{2} (R_i)_k^{n+1} \right] \quad (3.30)$$

onde:

$$(S_i)^n = -\left[A_j (\bar{v}_i)^n + D_{ij} (\bar{v}_j)^n - G_i (\bar{p})^n - F_i \right] \quad (3.31)$$

$$(R_i)_k^{n+1} = -\left[A_j (\Delta \bar{v}_i)_k^{n+1} + D_{ij} (\Delta \bar{v}_j)_k^{n+1} - G_i (\Delta \bar{p})_k^{n+1} - \Delta F_i + \frac{2}{\Delta t} (M_V - M_{DV}) (\Delta \bar{v}_i)_k^{n+1} \right] \quad (3.32)$$

Os termos T e S_i (avaliados no ciclo de tempo) e Q e R_i (avaliados no ciclo temporal e iterativo) são obtidos inicialmente em nível de elemento e posteriormente ao longo de todo domínio. Na abordagem global, as equações (3.27) e (3.30) são reescritas da seguinte maneira:

$$(\Delta \bar{p})_{k+1}^{n+1} = (M_{DP}^G)^{-1} \Delta t \left[(T^G)^n + (Q^G)_k^{n+1} \right] \quad (3.33)$$

$$(\Delta \bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} = (M_{DV}^G)^{-1} \Delta t \left[(S_i^G)^n + (R_i^G)_k^{n+1} \right] \quad (3.34)$$

De posse da variação da pressão e das componentes da velocidade, avaliadas respectivamente através das equações (3.33) e (3.34), é possível obter o valor das variáveis primárias para cada passo de tempo através das expressões (3.35) e (3.36):

$$(\bar{p})_{k+1}^{n+1} = (\bar{p})_k^n + (\Delta \bar{p})_{k+1}^{n+1} \quad (3.35)$$

$$(\bar{v}_i)^{n+1} = (\bar{v}_i)^n + (\Delta \bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} \quad (3.36)$$

3.5 Discretização Temporal utilizando o Método Explícito de Dois Passos

O método explícito de dois passos, apresentado por [Kawahara e Hirano, 1983], assim como o método explícito-iterativo, é oriundo da expansão em série de Taylor de uma variável genérica qualquer, a qual pode ser verificada a partir da seguinte expressão:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (3.37)$$

Desta maneira, a partir da equação (3.37), dois passos são avaliados até os termos de primeira ordem.

$$\theta^{n+1/2} = \theta^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^n \quad (3.38)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^{n+1/2} \quad (3.39)$$

Analogamente ao observado no método explícito-iterativo, no qual as variáveis primárias do escoamento são obtidas através da devida substituição das mesmas na equação (3.22), estas são obtidas a partir das equações (3.38) e (3.39) no método explícito de dois passos. Comparando os dois esquemas temporais, é possível verificar que a principal diferença recai na supressão do termo iterativo e no aparecimento de um novo passo para cada equação governante.

Substituindo os termos de velocidade e pressão tanto na eq. (3.38) como na eq. (3.39), expressões destinadas ao cálculo do primeiro e segundo passo, obtêm-se a formulação do esquema temporal explícito de dois passos para a equação de conservação de massa e quantidade de movimento. Desta maneira, tem-se que:

1° Passo

$$M_{DP}(\bar{p})^{n+1/2} = M_S(\bar{p})^n - \frac{\Delta t}{2} \left[G_j^T(\bar{v}_j)^n \right] \quad (3.40)$$

$$M_{DV}(\bar{v}_i)^{n+1/2} = M_{DV}(\bar{v}_i)^n - \frac{\Delta t}{2} \left[A_j(\bar{v}_i)^n + D_{ij}(\bar{v}_j)^n - G_i \bar{p}^n - (F_i)^n \right] \quad (3.41)$$

2° Passo

$$M_{DP}(\bar{p})^{n+1} = M_S(\bar{p})^n - \Delta t \left[G_j^T(\bar{v}_j)^{n+1/2} \right] \quad (3.42)$$

$$M_{DV}(\bar{v}_i)^{n+1} = M_{DV}(\bar{v}_i)^n - \Delta t \left[A_j(\bar{v}_i)^{n+1/2} + D_{ij}(\bar{v}_j)^n - G_i(\bar{p})^{n+1/2} - (F_i)^n \right] \quad (3.43)$$

onde M_S é a matriz de massa seletiva e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$M_S = eM_D + (1-e)M_C \quad (3.44)$$

Isolando as variáveis primárias em ambos os passos e reescrevendo as equações de forma mais compacta, temos:

1° Passo

$$(\bar{p})^{n+1/2} = \frac{M_S}{M_{DP}}(\bar{p})^n - \frac{\Delta t}{2} (M_{DP})^{-1} \left[(TP)^n \right] \quad (3.45)$$

$$(\bar{v}_i)^{n+1/2} = (\bar{v}_i)^n - \frac{\Delta t}{2} (M_{DV})^{-1} \left[(SP_i)^n + (RP_i)^n \right] \quad (3.46)$$

2° Passo

$$\left(\bar{p}\right)^{n+1} = \frac{M_S}{M_{DP}} \left(\bar{p}\right)^n - \Delta t (M_{DP})^{-1} \left[(TP)^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.47)$$

$$\left(\bar{v}_i\right)^{n+1} = \left(\bar{v}_i\right)^n - \Delta t (M_{DV})^{-1} \left[(SP_i)^{n+\frac{1}{2}} + (RP_i)^n \right] \quad (3.48)$$

onde:

$$(TP) = \left[G_j^T \left(\bar{v}_j\right) \right] \quad (3.49)$$

$$(SP_i) = \left[A_j \left(\bar{v}_i\right) - G_i \left(\bar{p}\right) \right] \quad (3.50)$$

$$(RP_i) = \left[D_{ij} \left(\bar{v}_j\right) - F_i \right] \quad (3.51)$$

A matriz de massa seletiva está relacionada à matriz discreta M_D , a matriz consistente M_C e ao parâmetro de diagonalização seletiva e . Este parâmetro controla o amortecimento e a estabilidade numérica e sua utilização é amplamente investigada em [Kawahara et al., 1982]. Quando e é igual à unidade, a matriz seletiva passa ser apenas a matriz diagonalizada, apresentando um comportamento mais instável, enquanto a utilização de um parâmetro seletivo nulo faz com que $M_S = M_C$ e conseqüentemente, um comportamento mais amortecido seja observado.

3.6 Fluxograma para o Método Explícito-Iterativo

Para a obtenção das variáveis primárias presentes no escoamento utilizando o esquema explícito-iterativo, os seguintes passos são avaliados:

- 1 – Leitura dos parâmetros computacionais e constantes físicas;
- 2 – Leitura das condições iniciais e de contorno;
- 3 – Cálculo das matrizes M_{DV} e M_{DP} , em nível de elemento;
- 4 – Cálculo das matrizes M_{DV}^G e M_{DP}^G , ao longo de todo o domínio;

5 – Início do ciclo de tempo $t = t + \Delta t$;

6 – Cálculo da viscosidade cinemática turbulenta (se o regime for turbulento);

7 – Cálculo dos vetores S_i e T , em nível de elemento;

8 – Cálculo dos vetores S_i^G e T^G , ao longo de todo o domínio;

9 – Início do ciclo de iterativo $k = k + 1$;

10 – Cálculo dos vetores R_i e Q , em nível de elemento;

11 – Cálculo dos vetores R_i^G e Q^G , ao longo de todo o domínio;

12 – Cálculo das variações $(\Delta \bar{p})_{k+1}^{n+1}$ e $(\Delta \bar{v}_i)_{k+1}^{n+1}$;

13 – Aplicação das condições de contorno as variações das variáveis primárias;

14 – Cálculo das variáveis primárias $(\bar{p})_{k+1}^{n+1}$ e $(\bar{v}_i)_{k+1}^{n+1}$;

15 – Verificação da variação dos campos de velocidade e pressão.

15.1 - Se os valores obtidos forem inferiores ao critério de convergência estipulado, as condições de contorno são aplicadas as variáveis primárias e os resultados são registrados, fazendo com que o cálculo retorne ao passo cinco. Este procedimento é repetido até que o tempo final de simulação seja atingido;

15.2 - No caso contrário, o programa retorna ao passo nove. Este procedimento é repetido até que a diferença entre a variável primária atual e anterior seja menor ou igual a tolerância escolhida. Se o número de iterações superar o número máximo estipulado, o programa é finalizado sem a gravação de resultados.

3.7 Fluxograma para o Método Explícito de Dois Passos

Para análise do escoamento utilizando o método explícito de dois passos, os seguintes passos são avaliados:

1 – Leitura dos parâmetros computacionais e constantes físicas;

2 – Leitura das condições iniciais e de contorno;

3 – Cálculo das matrizes M_{DV} e M_{DP} , em nível de elemento;

4 – Cálculo das matrizes M_{DV}^G e M_{DP}^G , ao longo de todo o domínio;

5 – Início do ciclo de tempo $t = t + \Delta t$;

6 – Início do 1º Passo;

- 7 – Cálculo da matriz M_s , em nível de elemento;
- 8 – Cálculo da matriz M_s^G , ao longo de todo o domínio;
- 9 – Cálculo da viscosidade cinemática turbulenta (se o regime for turbulento);
- 10 – Cálculo dos vetores $(TP)^n$, $(SP_i)^n$ e $(RP_i)^n$, em nível de elemento;
- 11 – Cálculo dos vetores $(TP^G)^n$, $(SP_i^G)^n$ e $(RP_i^G)^n$, ao longo de todo o domínio;
- 12 – Cálculo das variáveis primárias $(\bar{p})^{n+1/2}$ e $(\bar{v}_i)^{n+1/2}$;
- 13 – Aplicação das condições de contorno às variáveis primárias do primeiro passo;
- 14 – Fim do 1º Passo;**
- 15 – Início do 2º Passo;**
- 16 – Cálculo dos vetores $(TP)^{n+1/2}$ e $(SP_i)^{n+1/2}$, em nível de elemento;
- 17 – Cálculo dos vetores $(TP^G)^{n+1/2}$ e $(SP_i^G)^{n+1/2}$, ao longo de todo o domínio;
- 18 – Cálculo das variáveis primárias $(\bar{p})^{n+1}$ e $(\bar{v}_i)^{n+1}$;
- 19 – Aplicação das condições de contorno às variáveis primárias do segundo passo;
- 20 – Fim do 2º Passo;**
- 21 – Gravação dos campos de velocidade e pressão.
- 22 – Enquanto o tempo final de simulação não for atingido, o processo de cálculo retorna ao passo cinco. Caso contrário, o programa é finalizado.

3.8 Condição de Estabilidade

A natureza explícita da discretização temporal utilizada nos dois métodos avaliados (explícito-iterativo e explícito de dois passos) exige que o incremento de tempo para garantir a estabilidade da solução seja definido a partir de um intervalo crítico. Esta exigência é conhecida como critério de Courant e é apresentada por [Kawahara e Hirano, 1983] a partir da seguinte relação:

$$\Delta t \leq \alpha \frac{\Delta x_i}{U + C} \quad (3.52)$$

onde Δx_i esta relacionado a discretização espacial, geralmente a menor dimensão de um elemento na malha utilizada, U é o módulo da velocidade de referência no domínio e C é a velocidade de propagação do som no meio. A utilização do coeficiente de segurança α , usualmente avaliado na faixa de 0,1–0,3, permite que os intervalos críticos tornem-se mais verossímeis [Kawahara e Hirano, 1983].

3.9 Integração Explícita das Matrizes de Elemento

No intuito de reduzir o esforço computacional e a memória necessária na solução explícita das matrizes em nível de elemento, optou-se pela integração analítica reduzida. Esta alternativa, em contrapartida ao uso da quadratura completa no método de Gauss-Legendre, utiliza apenas um ponto de integração no centro do elemento. O procedimento detalhado para obtenção da integração analítica reduzida pode ser observado em [Burbridge, 1999].

No presente trabalho, o elemento utilizado é o hexaédrico isoparamétrico trilinear com oito nós. Quanto à escolha das funções de interpolação, duas configurações diferentes são adotadas. Em um primeiro momento, no intuito de atender a condição de Babuška-Brezzi, utilizou-se uma função constante (ψ) para pressão e uma linear (ϕ) para as componentes da velocidade. Em seguida, funções lineares tanto para velocidade como para pressão são empregadas. Assim, as configurações utilizadas são:

1ª Configuração:

$$\phi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (3.53)$$

$$\psi_i(\xi, \eta, \zeta) = cte = 1 \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (3.54)$$

2ª Configuração:

$$\phi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (3.55)$$

$$\psi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (3.56)$$

onde o índice i indica o número do nó local no sistema de eixos referencial (ξ, η, ζ) .

Como observado nas equações (3.53)-(3.56), as funções de interpolação empregadas estão em função do sistema de coordenadas local (ξ, η, ζ) . A transformação do sistema de coordenadas global (x, y, z) para um sistema natural (ξ, η, ζ) permite uma maior facilidade na integração das matrizes, uma vez que a função de interpolação está restrita a apenas um tipo de elemento. Uma vez que a integração reduzida utiliza apenas um ponto no centro do elemento, a mudança de sistema ocorrerá conforme Figura 3.1.

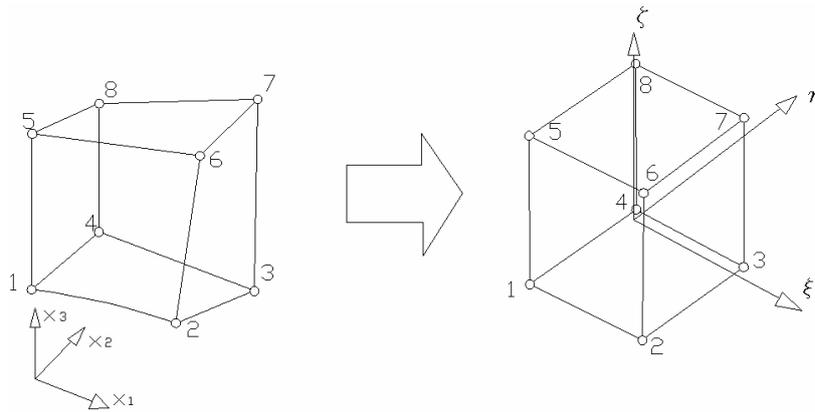


Figura 3.1 - Transformação do sistema global para o sistema natural

Para uma avaliação em nível de elemento, utilizam-se os limites de integração oriundos da quadratura de Gauss, $-1 \leq (\xi, \eta, \zeta) \leq 1$. Desta maneira, os vetores (ξ_i, η_i, ζ_i) são apresentados como segue:

$$\xi^T = \{-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1\} \quad (3.57)$$

$$\eta^T = \{-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1\} \quad (3.58)$$

$$\zeta^T = \{-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1\} \quad (3.59)$$

Avaliando um ponto I qualquer no interior do domínio, a transformação das coordenadas do domínio físico para o domínio computacional é regida através da seguinte equação:

$$(x_i)_I = \sum_{\alpha=1}^8 (x_i)_\alpha \phi_\alpha(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (3.60)$$

sendo:

$(x_i)_I$ - coordenada na direção i de um ponto I no interior do elemento ($i = 1, 2, 3$);

$(x_i)_\alpha$ - coordenada na direção i de um nó α que define o elemento ($\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8);

$\phi_\alpha(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ - função de interpolação no nó α , avaliado no ponto I com as coordenadas naturais;

Com a transformação do sistema de coordenadas, as derivações das funções de interpolação, observadas em (3.14) e (3.16), devem ser passadas do espaço físico para o computacional. A modificação é executada a partir da seguinte relação:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

onde J é a matriz Jacobiana de transformação, definida da seguinte forma:

$$J = [J_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Substituindo a equação (3.60) em (3.62) e utilizando apenas um ponto de integração no centro do elemento, é possível obter a matriz $[J_{ij}]$. Porém, a partir da relação (3.61), observar-se que a derivação de uma função de interpolação em relação às coordenadas globais é apresentada a partir da inversa da matriz Jacobiana. Desta maneira, a seguinte equação é utilizada para obtenção de J^{-1} :

$$J^{-1} = \frac{\bar{J}}{|J|} \quad (3.63)$$

onde:

\bar{J} - Matriz adjunta de J ;

$|J|$ - determinante da matriz Jacobiana.

Com a obtenção da inversa da matriz Jacobiana, é possível expressar as derivadas das funções de interpolação em relação às coordenadas naturais. Desta maneira, para finalizar a integração explícita das matrizes envolvidas no problema, é necessário que o diferencial de volume seja transformado do espaço físico para o espaço computacional. Esta mudança é efetuada da seguinte forma:

$$d\Omega = |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (3.64)$$

Assim, a partir integração reduzida das matrizes apresentadas em (3.14) e (3.16), as seguintes expressões analíticas são obtidas:

$$M_V(\alpha, \beta) = \left[\frac{\Omega^e}{64} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \right] \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (3.65)$$

$$A_i(\alpha, \beta) = \left[\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \bar{v}_i(k) \right] \frac{1}{8} \left[\bar{J}_{i1} \xi_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \right. \\ \left. \bar{J}_{i2} \eta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \right. \\ \left. \bar{J}_{i3} \zeta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \right] \\ (i = 1, 2, 3) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (3.66)$$

Na matriz difusiva D_{ij} , duas configurações são observadas. Inicialmente, quando $i = j$, as seguintes expressões são obtidas:

$$i = j = 1 ; k = 2, 3$$

$$D_{11} = \left[2(\hat{v}_{ii} + v_t) + \frac{\lambda}{\rho_0} \right] E_{11} + (\hat{v}_{ii} + v_t)(E_{22} + E_{33}) \quad (3.67)$$

$$i = j = 2 ; k = 1, 3$$

$$D_{22} = \left[2(\hat{v}_{ii} + v_t) + \frac{\lambda}{\rho_0} \right] E_{22} + (\hat{v}_{ii} + v_t)(E_{11} + E_{33}) \quad (3.68)$$

$$i = j = 3 ; k = 1, 2$$

$$D_{33} = \left[2(\hat{v}_{ii} + v_t) + \frac{\lambda}{\rho_0} \right] E_{33} + (\hat{v}_{ii} + v_t)(E_{11} + E_{22}) \quad (3.69)$$

onde:

$$\begin{aligned} E_{ii}(\alpha, \beta) = & \frac{1}{\Omega^e} \left[(\bar{J}_{i1})^2 \xi_\alpha \xi_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + (\bar{J}_{i2} \bar{J}_{i3}) (\eta_\alpha \zeta_\beta + \zeta_\alpha \eta_\beta) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \right. \\ & (\bar{J}_{i2})^2 \eta_\alpha \eta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{i3}) (\xi_\alpha \zeta_\beta + \zeta_\alpha \xi_\beta) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + \\ & \left. (\bar{J}_{i3})^2 \zeta_\alpha \zeta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{i2}) (\xi_\alpha \eta_\beta + \eta_\alpha \xi_\beta) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \right] \\ & (i = 1, 2, 3) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (3.70) \end{aligned}$$

Sabendo que $D_{ij} = D_{ji}$, as expressões analíticas obtidas para $i \neq j$ são:

$$i = 1 ; j = 2$$

$$D_{12} = (\hat{v}_{ij} + v_t) E_{12} + \frac{\lambda}{\rho_0} E_{21} \quad (3.71)$$

$$i = 1 ; j = 3$$

$$D_{13} = (\hat{v}_{ij} + v_t) E_{13} + \frac{\lambda}{\rho_0} E_{31} \quad (3.72)$$

$$i = 2 ; j = 3$$

$$D_{23} = (\hat{\nu}_{ij} + \nu_t) E_{23} + \frac{\lambda}{\rho_0} E_{32} \quad (3.73)$$

onde:

$$\begin{aligned} E_{ij}(\alpha, \beta) = & \frac{1}{\Omega^e} \left[(\bar{J}_{i1} \bar{J}_{j1}) \xi_\alpha \xi_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + (\bar{J}_{i2} \bar{J}_{j3}) \eta_\alpha \zeta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \right. \\ & (\bar{J}_{i2} \bar{J}_{j2}) \eta_\alpha \eta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{j3}) \xi_\alpha \zeta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + \\ & (\bar{J}_{i3} \bar{J}_{j3}) \zeta_\alpha \zeta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + (\bar{J}_{i2} \bar{J}_{j1}) \eta_\alpha \xi_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \\ & \left. (\bar{J}_{i3} \bar{J}_{j2}) \zeta_\alpha \eta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + (\bar{J}_{i3} \bar{J}_{j1}) \zeta_\alpha \xi_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{j2}) \xi_\alpha \eta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \right] \\ & (i, j = 1, 2, 3) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (3.74) \end{aligned}$$

$$F_i(\alpha) = \frac{\Gamma^e}{4} S_i \quad (3.75)$$

Nas expressões analíticas (3.65) a (3.75), apenas a função de interpolação referente à velocidade é requerida. Diante da utilização de duas funções distintas para a pressão no presente estudo, diferentes expressões são obtidas para as matrizes M_p , G_j^T e G_i . Inicialmente, para uma função ψ constante, as matrizes são apresentadas a partir das seguintes expressões:

1ª Configuração:

$$M_p = \Omega^e \quad (3.76)$$

$$G_i^T(\alpha) = \rho_0 C^2 (\bar{J}_{i1} \xi_\alpha + \bar{J}_{i2} \eta_\alpha + \bar{J}_{i3} \zeta_\alpha) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\alpha = 1, \dots, 8) \quad (3.77)$$

$$G_i(\alpha) = \frac{1}{\rho_0} (\bar{J}_{i1} \xi_\alpha + \bar{J}_{i2} \eta_\alpha + \bar{J}_{i3} \zeta_\alpha) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\alpha = 1, \dots, 8) \quad (3.78)$$

Com a utilização de uma função ψ linear para a pressão, as matrizes M_p , G_j^T e G_i são reescritas da seguinte maneira:

2ª Configuração:

$$M_p(\alpha, \beta) = \left[\frac{\Omega^e}{64} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \right] \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (3.79)$$

$$G_i^T(\alpha, \beta) = \frac{1}{8} \left[\bar{J}_{i1} \xi_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \right. \\ \left. \bar{J}_{i2} \eta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \right. \\ \left. \bar{J}_{i3} \zeta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (3.80)$$

$$G_i(\alpha, \beta) = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{8} \left[\bar{J}_{i1} \xi_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \right. \right. \\ \left. \bar{J}_{i2} \eta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \right. \\ \left. \bar{J}_{i3} \zeta_\beta \left(1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (3.81)$$

4 COMPUTAÇÃO PARALELA

Como enfatizado ao longo do presente trabalho, o tempo de processamento requerido na avaliação de grande parte dos problemas relacionados à Engenharia do Vento Computacional tem inviabilizado a solução de inúmeras aplicações nesta área de estudo, restringindo sua utilização a investigação de casos clássicos da engenharia do vento, como por exemplo, escoamentos sobre corpos rombudos.

Este prejuízo é severamente amplificado quando a Simulação das Grandes Escalas é empregada na modelagem da turbulência. Esta abordagem, apesar de permitir um tratamento mais fidedigno das principais estruturas do escoamento turbulento, apresenta o ônus de exigir uma maior discretização espacial e temporal quando comparada à modelagem clássica.

Neste sentido, a distribuição de tarefas na solução numérica de escoamentos turbulentos tem consistido uma importante ferramenta na redução do esforço computacional inerente a esta variedade de escoamentos. Além deste importante benefício, a execução simultânea de determinadas ações e os avanços constantes de *hardware* permitem que problemas cada vez mais complexos vislumbrem uma solução computacional.

O rápido crescimento de computadores com arquitetura paralela (conhecidos também com “*Clusters*”) tem como origem a obsolescência de computadores com arquiteturas de processamento vetorial, conhecidos popularmente como supercomputadores, ou simplesmente CRAY (nome dado aos computadores vetoriais inicialmente desenvolvidos por Seymour Cray).

Atualmente, a paralelização no processamento computacional de problemas de engenharia não figura como um privilégio relacionado unicamente a pesquisas ditas de ponta. Desta maneira, facilidades na aquisição de máquinas multiprocessadas e na distribuição das tarefas mais onerosas fazem com que esta prática torne-se cada vez mais corriqueira tanto em âmbito acadêmico como industrial.

A distribuição paralela de pacotes de informações pode ser obtida através de duas famílias de equipamentos: computadores com arquitetura de memória compartilhada (“*shared-memory architecture*”) e computadores com arquitetura de memória distribuída (“*distributed-memory architecture*”). As primeiras configurações citadas são construídas de maneira que todos os processadores de um equipamento tenham acesso a uma mesma memória principal, enquanto nas máquinas de arquitetura distribuída cada processador tem sua própria memória e a informação é transferida através de uma rede de comunicação.

Para facilitar a visualização conceitual das duas abordagens supracitadas, tomemos como exemplo a arquitetura de uma máquina contendo cinco nós (ou nodos), cada um abrigando dois processadores com dois núcleos cada um. Assim, a partir de um “*cluster*” com uma configuração idêntica a do equipamento utilizado no presente trabalho, podemos definir onde a distribuição de memória deverá ser compartilhada, distribuída ou híbrida. Mais informações sobre o equipamento utilizado neste estudo serão apresentadas na seção 5.1 no capítulo seguinte.

Assim, neste caso específico, para que ocorra a comunicação entre os cinco diferentes nós, a comunicação deverá ser efetuada a partir de uma rede de comunicação, ou seja, mediante o endereçamento de mensagens. Porém, quando um nó é avaliado de maneira isolada, a comunicação estará restrita aos processadores pertencentes ao nó em questão, uma vez que estes compartilham da mesma memória. No equipamento analisado, o esforço em cada nó poderia ser paralelizado entre os quatro núcleos.

Um melhor aproveitamento dos recursos de *hardware* é observado quando ambas as configurações são adotadas simultaneamente. Assim, um paralelismo dito híbrido permite que os dados presentes em um determinado código sejam distribuídos inicialmente entre diferentes nós (paralelismo de memória distribuída), sendo cada parcela resultante novamente dividida entre diferentes núcleos (paralelismo de memória compartilhada).

Em máquinas com arquitetura de memória distribuída, a necessidade de comunicar diferentes processadores através de mensagens em uma rede de conexão faz com que o esforço computacional desta atividade consista em uma importante parcela no tempo total de processamento, principalmente em sistemas com um número reduzido de nós. Outra desvantagem do conceito de memória distribuída recai na dificuldade de gerar uma correta distribuição visando o balanceamento da carga.

No que diz respeito às vantagens de sua utilização, a facilidade de agregar novos componentes de *hardware* e o baixo custo para aquisição destes componentes atuam como importante estímulo no desenvolvimento de ferramentas cada vez mais intuitivas para distribuição dos esforços computacionais. O padrão comumente utilizado no paralelismo distribuído é o MPI (“*Message Passing Interface*”). Esta API (“*Application Programming Interface*”) fornece funcionalidade básica para que os processos se comuniquem de maneira explícita, ou seja, o programador é responsável pela distribuição.

Máquinas com arquitetura de memória compartilhada apresentam características, em sua maior parte, antagônicas aquelas averiguadas quando a paralelização ocorre a partir de memória distribuída. Nesta configuração, os processadores são construídos de forma que todos tenham

acesso a uma memória principal comum, resultando assim em um baixo tempo dependido na divisão das tarefas. Além desta importante observação, benefícios de seu emprego estão relacionados à facilidade de inserir diretivas de paralelização. Como maior empecilho desta abordagem, observa-se a dificuldade e o alto custo intrínseco a adição de novos processadores, limitando consideravelmente seu acréscimo. Segundo [Masuero, 2009], o paralelismo de memória compartilhada limita-se a número relativamente pequeno de processadores, uma vez que os circuitos de lógica e controle do acesso de diversos processadores simultaneamente à memória tornam-se exponencialmente mais complexos com o aumento do número de processadores.

A API comumente utilizada no paralelismo de memória compartilhada é a biblioteca OpenMP (do inglês, “*Open Multi-Processing*”). Segundo [Hermanns, 2002], o conceito de OpenMP representa uma coletânea de diretivas de compilação, bibliotecas de rotinas e variáveis de ambiente direcionadas a programação paralela utilizando memória compartilhada. O emprego destas diretivas possibilita a utilização do mesmo código fonte tanto para a computação paralela como serial, uma vez que sua implementação é efetuada mediante a utilização de linhas de comentário.

Na programação paralela utilizando compiladores Fortran, o par de diretivas `!$OMP PARALLEL DO/!$OMP END PARALLEL DO` permite de maneira simples que um determinado laço de execução seja dividido em várias seções menores independentes, conhecidas como *threads*. O número de *threads* gerado na execução do programa estará diretamente vinculado ao número de processadores que compartilham da mesma memória, onde cada qual conterà uma cópia idêntica e independente das variáveis do programa. Para exemplificar o funcionamento das diretivas citadas, a Figura 4.1 apresenta a distribuição das tarefas em um laço contendo 40 execuções.

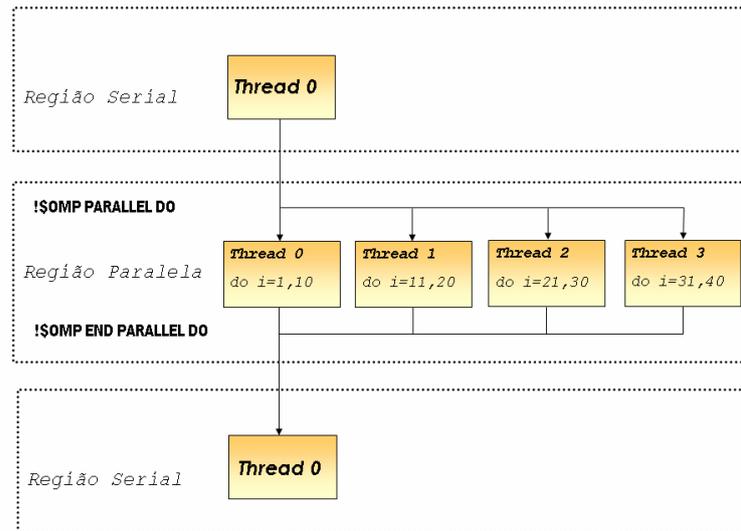


Figura 4.1 - Paralelismo de memória compartilhada utilizando as diretivas `!$OMP PARALLEL DO`/`!$OMP END PARALLEL DO`

No presente estudo, a distribuição de vetores e matrizes na solução numérica de escoamentos turbulentos será efetuada a partir do paralelismo de memória compartilhada mediante a utilização de diretivas OpenMP. No algoritmo utilizando esquema temporal explícito-iterativo inicialmente empregado, uma discussão mais apurada a cerca da paralelização dos setores mais onerosos computacionalmente será efetuada na seção 5.1.

5 RESULTADOS

No intuito de caracterizar escoamentos sobre corpos rombudos, utilizou-se inicialmente o código para solução de escoamentos turbulentos e tridimensionais desenvolvido por [Petry, 2002]. A partir do emprego do Método dos Elementos Finitos e das Simulações de Grandes Escalas, o algoritmo escolhido apresentou desempenho satisfatório em escoamentos confinados tanto isotérmicos, [Petry, 2002] e [Xavier, 2008] como não isotérmicos, [Dos Santos, 2007].

Na modelagem matemática dos trabalhos citados, a discretização espacial das equações governantes é efetuada mediante a utilização do método de Bubnov-Galerkin, enquanto que a análise temporal é obtida a partir do método explícito-iterativo de Taylor-Galerkin. Os fenômenos relacionados à turbulência são investigados empregando a Simulação de Grandes Escalas e o modelo sub-malha de Smagorinsky.

No capítulo em estudo são apresentados os esforços utilizados para adaptar um algoritmo desenvolvido sob a ótica da Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) na solução de problemas tipicamente relacionados à Engenharia de Vento Computacional (EVC).

Na seção 5.1, a partir de técnicas de computação de alto desempenho, são investigadas alternativas no sentido de reduzir o elevado tempo computacional comumente observado em escoamentos externos. Inicialmente, discussões a cerca da alocação de vetores e matrizes são avaliadas mediante o tratamento estático e dinâmico da memória. Em seguida, o aumento da velocidade de processamento empregando paralelismo de memória compartilhada é examinado através da inserção de diretivas OpenMP.

Nos itens avaliados na seção 5.2, uma análise numérica é desenvolvida visando uma caracterização acurada do escoamento sobre um corpo rombudo anguloso. Desta maneira, os esquemas temporais de Taylor-Galerkin explícito-iterativo e explícito de dois passos são investigados juntamente a utilização de diferentes configurações para as funções de interpolação associadas as variáveis primárias. Assim, para o esquema explícito-iterativo, funções de mesma ordem ($\phi = \psi$) e de ordens distintas ($\phi > \psi$) são analisadas enquanto que para o esquema explícito de dois passos, apenas a configuração ($\phi = \psi$) é examinada.

As diferentes propostas avaliadas no presente trabalho são discutidas a partir do monitoramento dos campos de velocidade e pressão na linha central do domínio e nas proximidades do obstáculo empregando malhas com disposição uniforme e irregular dos elementos.

5.1 Avaliação do Tempo de Processamento

Visando um aumento do desempenho computacional na solução numérica de escoamentos turbulentos, técnicas de processamento paralelo e discussões a cerca da alocação de vetores e matrizes são investigadas na presente seção.

No intuito de estender esta análise a aplicações de engenharia do vento, a escolha de domínios os quais apresentassem corpos imersos aerodinamicamente rombudos foi priorizada. Desta maneira, a avaliação do tempo de processamento foi desenvolvida a partir da utilização de um prisma bidimensional quadrado, obstáculo o qual será empregado posteriormente na seção reservada a discussão numérica e avaliação dos fenômenos advindos do escoamento sobre este corpo rombudo anguloso.

As dimensões utilizadas na definição do domínio e as condições de contorno empregadas são análogas àquelas apresentadas por [Petry, 1993] em simulações realizadas sobre um cilindro fixo utilizando o método dos elementos finitos. Na Figura 5.1 é possível observar as dimensões do domínio de cálculo no plano XY , onde x_m e x_j são as distâncias a barlavento e a sotavento do obstáculo na direção X , respectivamente, H é o comprimento do domínio na direção Y e d o comprimento característico do prisma quadrado. As dimensões x_m , x_j e H , as quais estão relacionadas à aresta do obstáculo, são respectivamente $4,5d$, $18,5d$ e $8d$. No caso em estudo, a dimensão d utilizada é de 1m.

No domínio descrito, as seguintes condições de contorno são impostas. Na região de entrada ($X = 0$ m), a componente da velocidade normal à superfície é considerada constante em toda a face, enquanto que na região de saída ($X = 24$ m), emprega-se a condição de contorno natural de forças de superfície nulas. Nos contornos laterais, paralelos à direção X , a condição de deslizamento, ou condição de impermeabilidade, é assegurada mediante a utilização de um valor nulo para a velocidade na direção Y . Nas paredes do obstáculo, a condição de não-deslizamento é empregada através da imposição de $U = V = 0$ m/s.

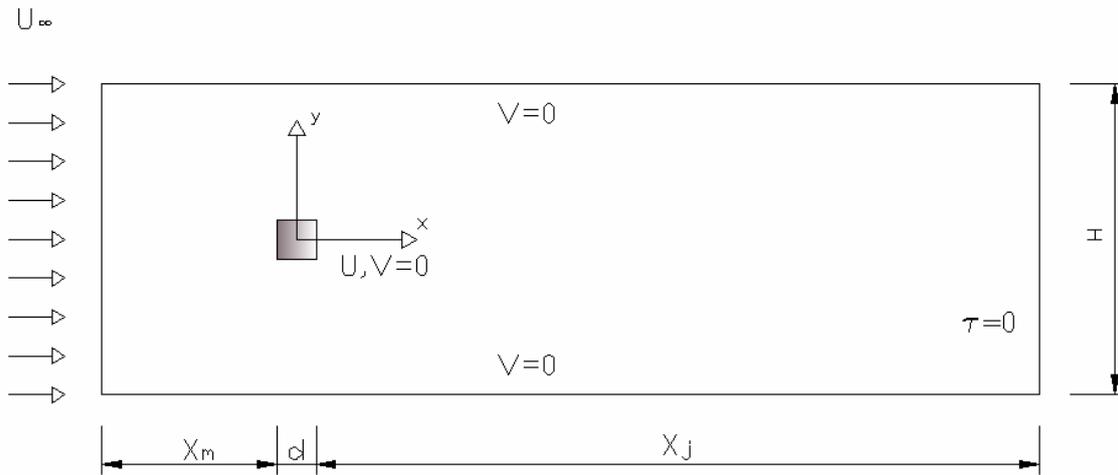


Figura 5.1 - Geometria proposta por [Petry, 1993] e utilizada na avaliação do tempo de processamento

O parâmetro característico d , juntamente a velocidade U_∞ incidente na região de entrada do domínio e a viscosidade cinemática ν , são empregados no cálculo do número de Reynolds do escoamento, o qual é apresentado na Eq. (5.1). Na discussão referente ao tempo de processamento utilizou-se um número de Reynolds de 3000, o qual é considerado moderado na avaliação de escoamentos sobre corpos rombudos angulosos.

$$Re_d = \frac{U_\infty d}{\nu} \quad (5.1)$$

Uma vez que a discretização temporal utilizando o método de Taylor-Galerkin explícito-iterativo apresentou bons resultados no tratamento de problemas ditos confinados, este foi inicialmente empregado para avaliar o tempo computacional requisitado. No que diz respeito à discretização espacial, diferentes malhas uniformes de elementos finitos são avaliadas na comparação do tempo de processamento consumido. A variedade de malhas investigadas é apresentada na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Discretizações utilizadas na avaliação do tempo de processamento

Número da Malha	Número de Elementos ($X \times Y$)
1	96×32
2	144×48
3	192×64
4	240×80
5	336×112
6	384×182
7	480×160
8	576×192

As simulações numéricas verificadas no presente estudo foram executadas a partir dos recursos do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP-RS). O *cluster* utilizado durante o período de testes foi um *SunFire X2200* com 6 nós, sendo que um deles é mantido para funções de gerenciamento. Cada nó possui 2 processadores *AMD Opteron dual-core* com 1,8 GHz de clock e 8 GB de memória. O sistema operacional do referido equipamento é um *LINUX RED HAT server*, sendo que o compilador utilizado é um Intel Fortran versão 10.1.

O primeiro estudo realizado para avaliação do desempenho do algoritmo consistiu na comparação do tempo consumido entre duas formas distintas de alocação de memória para matrizes e vetores. Assim, alocações do tipo estática (modificação proposta no presente estudo) e dinâmica (alocação atualmente utilizada) são investigadas para o conjunto de malhas apresentadas na Tabela 5.1.

A diferença central entre ambas as formas de armazenamento citadas está no acesso à memória. Assim, no que tange a primeira abordagem citada, o espaço destinado a matrizes e vetores é ajustado no momento da compilação sem que ocorram modificações ao longo da solução, enquanto na última, o programa seleciona dinamicamente a memória durante a execução do programa. Neste sentido, no que diz respeito à preparação antes da execução de um problema, a alocação dinâmica apresenta a vantagem de não necessitar uma nova compilação quando novas malhas são utilizadas.

Para efetuar uma comparação padronizada dos testes, utilizou-se um tempo crítico igual a 1×10^{-5} segundos e 500 passos foram percorridos para que as discretizações de 1 a 8 finalizassem uma gravação. Os parâmetros utilizados na avaliação temporal visam atender a condição de estabilidade para todas as malhas de elementos finitos utilizadas na avaliação do tempo de processamento do presente trabalho. Demais valores ajustados antes de cada simulação são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Resumo dos dados utilizados na avaliação do tempo de processamento empregando o método explícito-iterativo

Número de Reynolds - Re_d	3000
Velocidade incidente - U_∞	100 m/s
Viscosidade cinemática - ν	$3.33 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$
Viscosidade volumétrica - λ	0 N.s/m ²
Velocidade do som no meio - c	340 m/s
Dimensão característica do prisma - d	1 m
Critério de tolerância	1×10^{-5}
Coefficiente de Smagorinsky - C_s	0,2

Outra medida adotada visando comparações sob circunstâncias idênticas foi utilizar os recursos computacionais apenas quando interferências externas não estivessem presentes, em outras palavras, as simulações foram executadas apenas quando todos os recursos de um determinado nó estivessem disponíveis. Porém, os equipamentos do Centro Nacional de Supercomputação são compartilhados remotamente entre diversos usuários, o que torna a utilização exclusiva de um único nó durante o período de testes extremamente difícil. Assim, visando minimizar este problema e evitar desvios, três simulações foram executadas para cada situação avaliada.

O tempo de processamento (*CPU time*) consumido em cada forma de alocação é apresentado na Figura 5.2. Este valor representa o tempo despendido pela máquina apenas com tarefas relacionadas ao processamento efetivo do algoritmo, não computando quaisquer interrupções ao longo da solução. Como é possível observar nesta ilustração, a alocação estática consome um menor tempo de processamento quando comparada à dinâmica. O comportamento mais lento apresentado por esta última abordagem pode ser atribuído ao número de vezes que a memória é acessada na reserva dinâmica de espaços para os componentes presentes em matrizes e vetores.

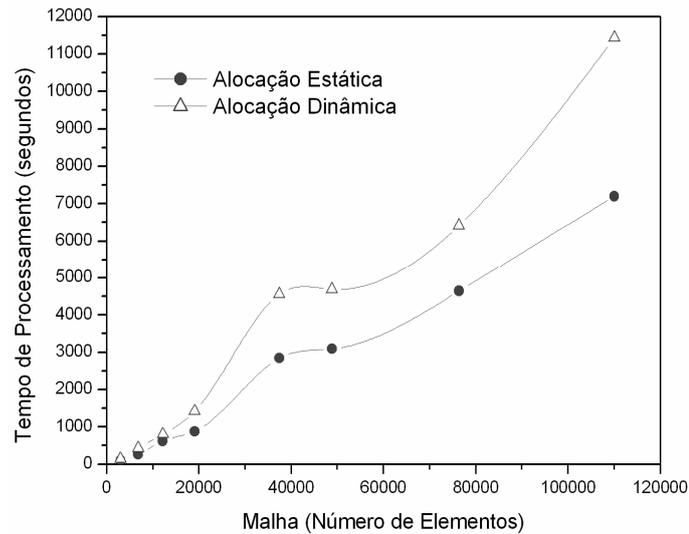


Figura 5.2 - Comparação entre alocações do tipo estática e dinâmica para diferentes discretizações espaciais

No intuito de avaliar o aproveitamento obtido pela alocação proposta, utilizou-se a razão entre o tempo consumido por ambas as alocações, mantendo o programa mais lento no numerador. Este fator é conhecido como aumento de velocidade (do inglês, “*speed up*”), comumente empregado na avaliação de melhorias em códigos seriais e paralelos, e permite identificar quão “acelerado” um determinado algoritmo foi em relação a outro. Uma avaliação média da “aceleração” nas oito discretizações utilizadas indica que a modificação da alocação dinâmica para estática possibilitou um aumento médio na velocidade de processamento de aproximadamente 1,5 vezes.

Após a investigação de melhorias no desempenho advindas da alocação de matrizes e vetores, a inserção de paralelização no algoritmo é avaliada a partir da utilização das diretivas OpenMP. Dentre as principais vantagens de se utilizar estas diretivas, é possível ressaltar a rápida transferência de dados, uma vez que os múltiplos processadores compartilham de uma única memória.

Alternativamente a esta abordagem, a distribuição do processamento poderia ser avaliada mediante a utilização de memória distribuída, a qual permitiria partilhar a execução de um determinado programa entre diferentes nós, e não apenas entre os processadores. No presente estudo, esta metodologia foi descartada devido ao número reduzido de nós presentes no “*cluster*”, uma vez que o transporte de informações entre diferentes nós representaria uma parcela importante no tempo total de processamento quando comparado aos êxitos obtidos por sua eventual implementação.

Assim, visando inserir corretamente as diretivas OpenMP na solução de escoamentos turbulentos quase-incompressíveis de fluidos newtonianos, diferentes seções do algoritmo foram analisadas no intuito de obter-se uma estratificação do tempo consumido e, conseqüentemente, identificar-se as rotinas caracterizadas como “gargalo” durante a execução do programa.

Utilizando a configuração 96×32 e as mesmas condições apresentadas nos testes relacionados à alocação de memória, é possível observar através da Tabela 5.3 os setores do algoritmo responsáveis pelos maiores tempos de processamento. Esta afirmação é ratificada mediante a verificação da Figura 5.3, a qual através de um gráfico de Pareto ilustra o tempo consumido para diferentes discretizações espaciais.

Tabela 5.3 - Setores criados para avaliar o tempo de processamento consumido

Setores do Programa	Equações computadas em cada setor do programa	Tempo de Processamento (%) <i>Malha 01</i>	Tempo de Processamento Acumulado (%) <i>Malha 01</i>
1	Eqs. (3.29) e (3.32)	75.79 %	75.79 %
2	Eqs. (3.66), (3.67), (3.68), (3.69), (3.71), (3.72) e (3.73)	9.44 %	85.23 %
3	Termo R_i^G da Eq. (3.34)	4.58 %	89.81 %
4	Eq. (3.31)	3.48 %	93.29 %
5	Imposição das Condições de Contorno em (3.35) e (3.36)	2.75 %	96.04 %
6	Eq. (3.12)	2.29 %	98.33 %
7	Outras	1,67 %	100 %

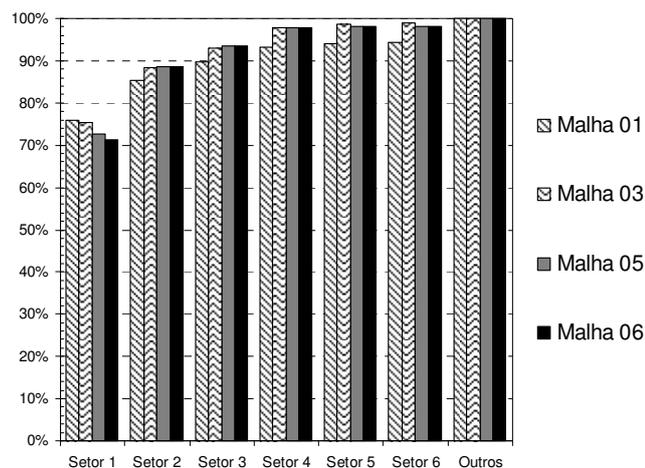


Figura 5.3 - Gráfico de Pareto utilizado para avaliar o tempo de processamento consumido para 4 discretizações distintas

Analisando ambos os resultados, verifica-se que a região destinada ao cálculo iterativo dos termos apresentados nas equações (3.29) e (3.32) demanda um tempo de processamento muito superior as demais seções. Este setor é oriundo do esquema temporal explícito-iterativo e seu tempo de processamento está relacionado diretamente ao critério de tolerância estipulado.

Desta maneira, os valores apresentados indicam que o primeiro passo na direção de aumentar o desempenho do algoritmo é a distribuição do processamento no setor 1. De acordo com a Figura 5.4, a implementação da paralelização via OpenMP representou um importante aumento da velocidade em relação ao código original.

Atuando inicialmente apenas no segmento mais oneroso computacionalmente, o tempo de processamento exibiu reduções significativas tanto em algoritmos com matrizes e vetores alocados dinamicamente como estaticamente. O aumento médio de velocidade observado em relação à não utilização da diretiva OpenMP é de 2,45 vezes para a alocação estática e 2,68 vezes para a alocação dinâmica. A melhor situação é identificada a partir da configuração 576×192 , a qual apresenta uma “aceleração” de 3,09 vezes em relação à utilização de um código com alocação estática sem OpenMP e 3,24 vezes na avaliação entre códigos alocados dinamicamente com e sem OpenMP. É importante atentar que, mediante a utilização de dois processadores do tipo *dual-core*, a aceleração máxima do processamento é limitada em no máximo 4, valor este equivalente ao número de núcleos presentes em cada nó.

Os resultados supracitados são apresentados através da Tabela 5.4. Nesta avaliação, é possível observar que o “*speed up*” referente às malhas 5 e 6 apresenta um comportamento bastante distinto em relação as demais discretizações. Esta afirmação é ratificada a partir das Figura 5.2 e Figura 5.4, as quais indicam graficamente uma modificação acentuada nestas discretizações. Uma avaliação minuciosa a cerca deste comportamento fugiria do escopo do presente trabalho, necessitando um detalhamento aprofundado no que diz respeito aos acessos de memória realizados pelas discretizações empregadas. Porém, cabe ressaltar que o aparecimento deste efeito não impediu que reduções no tempo de processamento fossem observadas quando as propostas indicadas neste estudo foram empregadas.

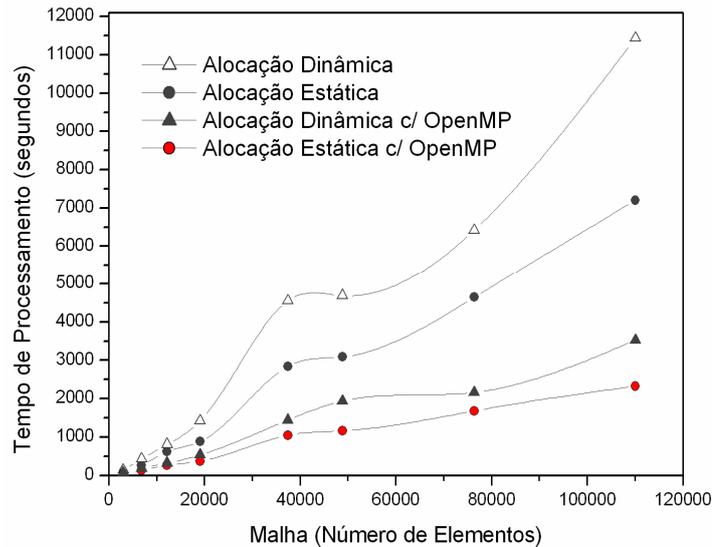


Figura 5.4 - Comparação entre códigos com e sem as diretivas OpenMP para alocações do tipo estática e dinâmica

Tabela 5.4 - *Speed up* observado a partir da utilização das diretivas OpenMP para alocações do tipo estática e dinâmica

Número da Malha	Alocação estática <i>versus</i> Alocação estática com OpenMP	Alocação dinâmica <i>versus</i> Alocação dinâmica com OpenMP
1	1,83	1,91
2	1,96	2,27
3	2,32	2,50
4	2,36	2,66
5	2,71	3,15
6	2,66	2,42
7	2,76	2,96
8	3,09	3,24

Diante das informações apresentadas na Figura 5.4, para o presente código computacional (o qual apresenta o esquema temporal explícito-iterativo), é observado que a melhor manipulação da memória e os menores tempos de processamento são obtidos quando alocações estáticas são avaliadas juntamente a inserção de diretivas OpenMP.

Quando a pior e a melhor situação são confrontadas, ou seja, alocação dinâmica sem OpenMP *versus* alocação estática com OpenMP, uma “aceleração” média de 3,76 vezes é identificada, chegando a valores próximos de 5 em malhas mais refinadas. Melhorias mais acentuadas verificadas na configuração 8 devem-se a redução da contabilização das perdas relacionadas a transferência de dados em relação ao tempo de processamento total, o qual é maior em relação as outras malhas utilizadas. Comportamento oposto é observado na

configuração 1, onde prejuízos referentes a distribuição de tarefas entre processadores são amplificados devido ao reduzido tempo de processamento necessário para finalização dos testes.

Após esta avaliação, as diretivas OpenMP são inseridas em mais três regiões do algoritmo que demandam elevado tempo de processamento. Desta maneira, os quatro primeiros setores indicados na Tabela 5.3 são solucionados paralelamente para uma alocação estática de memória, melhor situação observada nos resultados anteriores. Os resultados obtidos não apresentaram uma melhora significativa no que diz respeito ao tempo de processamento (*CPU time*), uma vez que grande parte do esforço computacional estava concentrado em apenas um setor do código.

Porém, o incremento na paralelização citado possibilitou uma melhor utilização dos recursos de *hardware*, diminuindo consideravelmente o tempo de relógio (*elapsed time*), ou seja, o tempo efetivo contabilizado desde o início até o fim da simulação. A razão entre o tempo de processamento e o tempo de relógio indica o aproveitamento dos recursos por parte do algoritmo. Em um nó com quatro núcleos, o aproveitamento máximo passível de ser observado é de 400 %, situação em que o *CPU time* seria equivalente ao intervalo de tempo efetivo para finalização da simulação. Assim, com a paralelização de três novos setores, a utilização média das unidades de processamento passou de 316 % para 395 %.

5.2 escoamento sobre um prisma quadrado bidimensional

Na Engenharia de Vento Computacional, escoamentos sobre corpos rombudos são usualmente utilizados na análise numérica de regimes turbulentos. A configuração destes elementos possibilita a avaliação de efeitos complexos resultantes do impacto entre o escoamento incidente e o obstáculo imerso no domínio. Para análise de efeitos como colisão, separação, recolamento, circulação e desprendimento de vórtices, optou-se pela utilização de um prisma bidimensional com seção transversal quadrada.

Nas seções seguintes, observações oriundas desta variedade de escoamentos serão analisadas a partir de diferentes propostas, as quais são examinadas devido à necessidade de controlar instabilidades comumente presentes em problemas advectivo-dominantes. Desta maneira, os resultados obtidos a partir do esquema temporal de Taylor-Galerkin explícito-iterativo e do esquema temporal explícito de dois passos são investigados. No que diz respeito à análise do esquema caracterizado pela presença de um ciclo iterativo, funções de interpolação constante e linear são avaliadas para o termo referente à pressão.

Para um melhor entendimento do presente capítulo, a Tabela 5.5 apresenta, em ordem cronológica, as ações executadas visando a escolha da melhor abordagem do caso em estudo e a sigla empregada em cada situação.

Tabela 5.5 - Alternativas adotadas no presente estudo e suas respectivas siglas

Alternativas adotadas	Sigla
Esquema Temporal de Taylor-Galerkin Explícito-Iterativo com Pressão Constante	<i>EIPC</i>
Esquema Temporal de Taylor-Galerkin Explícito-Iterativo com Pressão Linear	<i>EIPL</i>
Esquema Temporal Explícito de Dois Passos com Pressão Linear	<i>EDP</i>

5.2.1 Esquema Explícito-Iterativo com Função de Interpolação Constante para a Pressão

Inicialmente, visando obter a discretização temporal das equações que governam o escoamento de fluidos Newtonianos, turbulentos, isotérmicos e quase-incompressíveis, o método de Taylor-Galerkin explícito-iterativo foi utilizado. Sua imediata escolha deve-se essencialmente ao sucesso do mesmo no tratamento de escoamentos confinados (cavidades e degraus), amplamente discutidos em trabalhos relacionados ao grupo de estudo: [Petry, 2002], [Dos Santos, 2007] e [Xavier, 2008].

Este esquema temporal, como previamente avaliado no capítulo 3, está atrelado diretamente ao critério de tolerância empregado para determinar a convergência do ciclo iterativo. Neste sentido, na caracterização do escoamento sobre o obstáculo em análise, utilizou-se um valor de 1×10^{-6} como critério de parada. No que diz respeito às funções de interpolação empregadas no método dos elementos finitos, optou-se inicialmente pela utilização de uma função linear para ϕ (velocidade) e constante para ψ (pressão), configuração originalmente presente no algoritmo.

Na redução do amplo esforço computacional usualmente associado a escoamentos externos, adotou-se um domínio tridimensional com apenas um elemento de profundidade. Com esta simplificação, o problema passa a ser tratado de maneira bidimensional e inevitavelmente, incorre na não observação de uma das características fundamentais da turbulência: a tridimensionalidade da vorticidade.

As dimensões utilizadas na confecção do primeiro domínio e as condições de contorno empregadas são idênticas àquelas apresentadas na Figura 5.1. A configuração inicialmente

escolhida no presente trabalho tem como objetivo garantir que a condição natural de 2ª espécie seja atendida e que o fenômeno de desprendimento de vórtices seja captado em sua totalidade. Segundo [Sachs, 1972], a colisão entre o escoamento incidente e uma placa plana vertical de dimensão d proporciona o desprendimento de vórtices alternados tanto na aresta superior como inferior, sendo que a diferença entre ambos é de $1,55d$ e a distância horizontal entre vórtices oriundos da mesma aresta é de $5,5d$.

O número de Reynolds escolhido para caracterização do escoamento sobre o prisma quadrado é de 22000. A escolha deste valor deve-se a importante pesquisa desenvolvida por [Lyn et al., 1995], o qual apresenta avaliações experimentais a partir de medições em um tanque com água através de velocimetria laser. Além deste trabalho, os esforços empregados por [Duraó et al., 1988] na avaliação de um regime com $Re = 14000$ também são utilizados como referência, os quais também executaram suas investigações a partir do método LDV (*Laser Doppler Velocimetry*).

Em uma primeira análise do escoamento sobre o corpo rombudo em estudo, optou-se por uma discretização espacial uniforme ao longo do domínio, sendo o tamanho dos elementos igual a $0,1d$. Desta forma, a malha de elementos finitos obtida para este primeiro caso foi de 19100 hexaedros.

No trabalho desenvolvido por [Bouris et al., 1999], estes apresentam uma importante revisão a cerca das menores distâncias observadas entre o obstáculo e a primeira linha de elementos em escoamentos sobre prismas quadrados. O autor indica que as configurações mais refinadas encontram-se entre os valores $(0,022 - 0,0004)d$. No presente trabalho, uma configuração uniforme utilizando os menores valores apresentados por [Bouris et al., 1999] acarretaria em malhas excessivamente densas e tempos computacionais extremamente altos.

Desta maneira, a escolha de uma configuração uniforme para a primeira observação dos campos de velocidade e pressão está fundada na possibilidade de comparar estes resultados com aqueles advindos de disposições irregulares (do inglês, “*stretched*”) dos elementos ao longo do domínio, as quais serão investigadas no decorrer desta avaliação.

Na Tabela 5.6 são apresentados os dados referentes ao escoamento bidimensional sobre um prisma quadrado utilizados na primeira simulação.

Tabela 5.6 - Resumo dos dados utilizados na simulação numérica sobre um prisma quadrado bidimensional empregando o método explícito-iterativo e a malha com 19100 hexaedros.

Número de Reynolds - Re_d	22000
Velocidade incidente - U_∞	30 m/s
Viscosidade cinemática - ν	$1.36 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$
Viscosidade volumétrica - λ	0 Ns/m ²
Velocidade do som no meio - c	340 m/s
Dimensão característica do prisma - d	1 m
Incremento de tempo crítico - Δt	$2,7 \times 10^{-5} \text{ s}$
Coefficiente de Smagorinsky - C_s	0,2
Crítério de tolerância	1.0×10^{-6}

Visando avaliar o comportamento do código originalmente desenvolvido por [Petry, 2002], investigações médias na linha de centro do domínio são apresentadas tanto para velocidade como para pressão. Na Figura 5.5, resultados referentes à velocidade adimensional U^* , a qual representa a razão entre a componente de velocidade U e a velocidade incidente U_∞ , são observados para diferentes tempos adimensionais t^* . No presente trabalho, a adimensionalização do tempo é obtida a partir da seguinte equação:

$$t^* = t \cdot \frac{V}{L} \quad (5.2)$$

Estes valores são comparados inicialmente com os resultados experimentais obtidos por [Lyn et al., 1995] e [Duraó et al., 1988]. Na investigação do método explícito-iterativo empregando uma função constante para a pressão, é possível observar que, com o avanço no tempo, os resultados a sotavento do obstáculo vão gradativamente distanciando-se dos valores experimentais. A consequência deste efeito é a divergência da solução. Na Figura 5.6, esta situação é mais evidente, uma vez que a pressão média na região traseira do prisma, representada através do coeficiente de pressão, apresenta um comportamento excessivamente instável quando comparada aos resultados experimentais obtidos por [Nakamura e Ohya, 1984], para um número de Reynolds de 67000, e daqueles obtidos numericamente por [Sohankar, 2006], para um número de Reynolds de 22000.

No trabalho de [Sohankar, 2006], este apresenta experimentos numéricos para números de Reynolds variando de 3×10^3 a 1×10^6 , indicando que o aumento deste valor adimensional conserva um comportamento similar na avaliação do coeficiente de pressão. Assim, a semelhança entre as curvas obtidas pelo autor citado visa legitimar a utilização dos dados experimentais de [Nakamura e Ohya, 1984] para avaliação do coeficiente de pressão em um regime com $Re = 22000$, uma vez que estes últimos autores executaram suas medições através de um número de Reynolds de 67000.

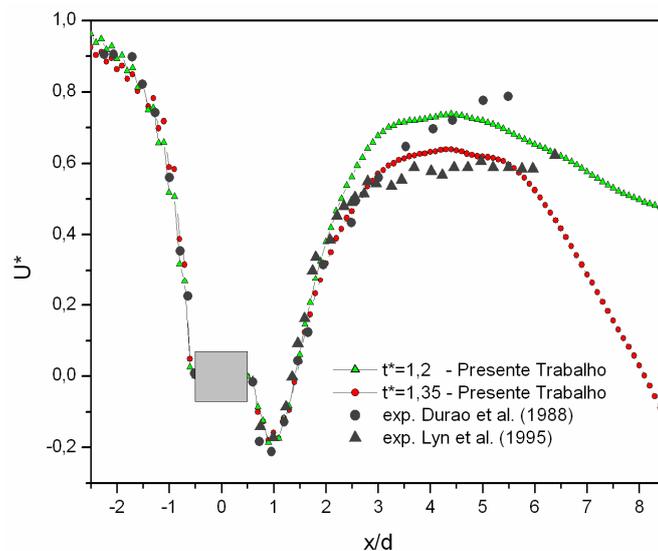


Figura 5.5 - Velocidade adimensional na linha central utilizando a malha de 19100 elementos e a configuração *EIPC*

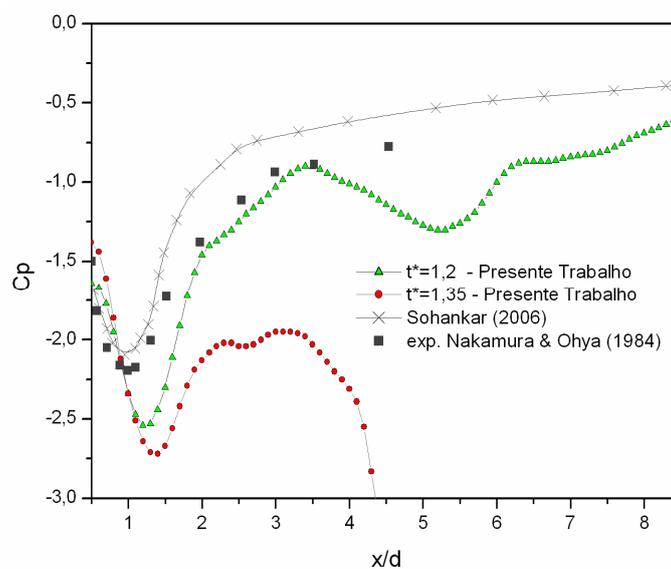


Figura 5.6 - Coeficiente de pressão na linha central utilizando a malha de 19100 elementos e a configuração *EIPC*

Apesar da divergência observada nesta primeira simulação, a Figura 5.5 e Figura 5.6 permitem identificar que, para uma mesmo tempo adimensional, o coeficiente de pressão a sotavento do obstáculo apresenta um comportamento consideravelmente mais instável quando comparado aos valores adimensionalizados de velocidade. Esta diferença de comportamento, a qual será evidenciada ao longo desta discussão, está vinculada diretamente ao aparecimento de modos espúrios no campo de pressões.

Em virtude das instabilidades numéricas observadas na primeira simulação utilizando o método explícito-iterativo, algumas alternativas visando à convergência da solução foram empregadas. Uma vez que a divergência pode estar associada ao não atendimento da condição de contorno natural de 2ª espécie na descarga do domínio, um aumento da dimensão X foi proposta de acordo com as geometrias observadas na literatura. Desta maneira, utilizou-se a configuração proposta por [Braun, 2007], a qual apresenta as dimensões observadas através da Figura 5.7. Sua escolha deve-se ao sucesso deste autor na simulação de prismas quadrados bidimensionais utilizando o método de Taylor-Galerkin explícito-iterativo.

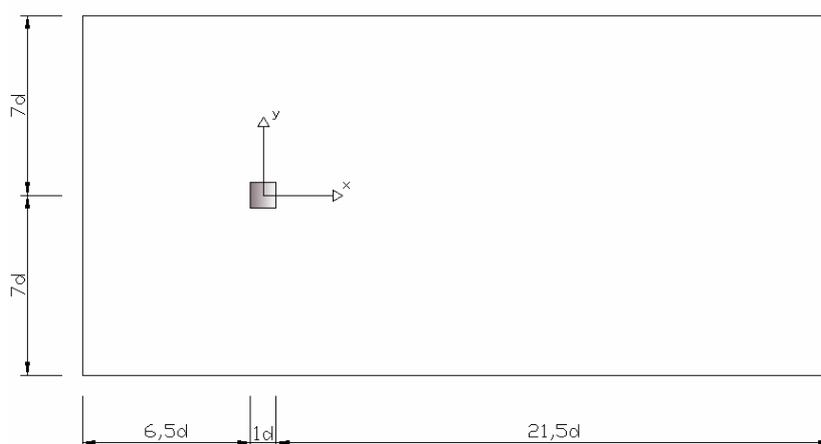


Figura 5.7 - Geometria proposta por [Braun, 2007]

Nesta nova geometria, um aumento da distância entre a linha de centro e as paredes laterais também é avaliado. No que diz respeito à condição inicial, uma velocidade U igual a 30 m/s é inserida ao longo de todo o domínio. Em um primeiro momento, no intuito de solucionar a divergência da solução, o mesmo tamanho de elemento foi utilizado, fazendo com que a malha, devido às novas dimensões utilizadas, passasse a abrigar 39800 elementos. Nesta segunda simulação, os dados apresentados na Tabela 5.6 são mantidos. Como pode ser observado na Figura 5.8(a), a modificação do domínio de cálculo e a alteração na condição inicial possibilitaram que a solução atingisse, na média temporal, o regime permanente.

Na avaliação da velocidade U^* na região central do domínio, é possível verificar que os resultados obtidos em $t^* = 5$ aproximam-se daqueles verificados experimentalmente. A inserção dos resultados apresentados por [Bouris et al, 1999] e [Braun, 2007] servem de baliza para o presente trabalho, uma vez que ambos os autores também realizaram experimentos numéricos bidimensionais utilizando a simulação de grandes escalas com modelo sub-malha de Smagorinsky.

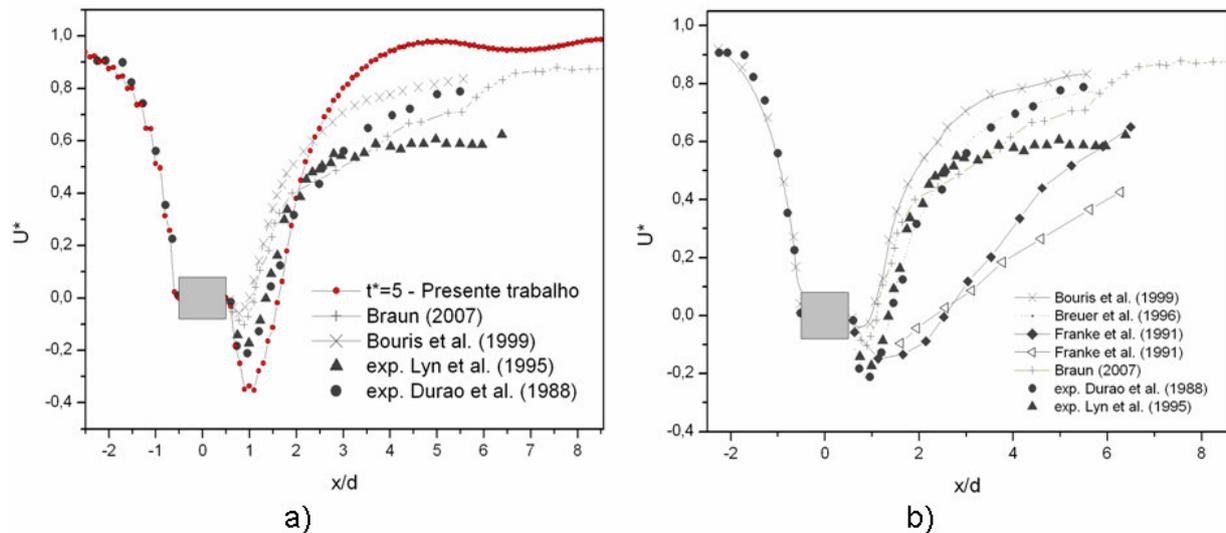


Figura 5.8 - Resultados adimensionalizados de velocidade na linha de centro do domínio: (a) a partir da configuração *EIPC* e a malha de 39800 elementos e (b) investigações observadas na literatura

O distanciamento observado entre os resultados numéricos da Figura 5.8(a) pode estar relacionado à discretização utilizada até o momento, uma vez que a configuração grosseira impede uma avaliação mais apurada do escoamento, principalmente nas imediações do obstáculo. Nesta região, a discretização insuficiente a sotavento do obstáculo indica velocidades negativas com magnitudes superiores àquelas apresentadas pelos demais autores. Na região localizada a barlavento do obstáculo, os resultados observados são próximos àquelas verificados por [Duraao et al., 1988] e por grande parte das avaliações numéricas identificadas na literatura, como pode ser observado na Figura 5.8(b).

Nesta ilustração, os principais resultados verificados na caracterização de escoamentos sobre prismas quadrados são apresentados. Dentre os autores examinados, [Breuer et al., 1996], a partir de uma análise tridimensional do problema em estudo, obteve pontos bastante similares aos verificados por [Duraao et al., 1988] quando comparado aos demais autores. [Braun, 2007],

apesar de aproximar-se bastante dos resultados experimentais utilizando o esquema explícito-iterativo, revela um comportamento levemente irregular a partir de $4d$. Nos trabalhos de [Breuer et al., 1996], [Bouris et al., 1999], e [Braun, 2007], é importante ressaltar que a turbulência foi tratada mediante a Simulação das Grandes Escalas.

As investigações realizadas por [Franke et al., 1991] são as que mais se afastam das medições executadas por [Lyn et al., 1995] e [Duroo et al., 1988]. Este notável distanciamento deve-se a utilização da modelagem clássica da turbulência para avaliação de escoamentos sobre corpos rombudos. Assim, mesmo com a utilização de um modelo $k-\varepsilon$ adaptado ao problema em estudo, os resultados revelam a dificuldade da abordagem RANS em avaliar corretamente escoamentos com colisão.

Na Figura 5.9, a avaliação do coeficiente de pressão na região posterior ao obstáculo é observada até $8,5d$. Diferentemente do comportamento assumido pela velocidade na direção X , a pressão apresentou uma distribuição mais oscilante a sotavento do obstáculo após a obtenção do regime permanente na média temporal. Este resultado é evidenciado quando comparado aos experimentos numéricos verificados por [Sohankar, 2006], o qual também efetuou suas análises a partir da modelagem LES, obtendo os efeitos sub-malha mediante a utilização do modelo clássico de Smagorinsky.

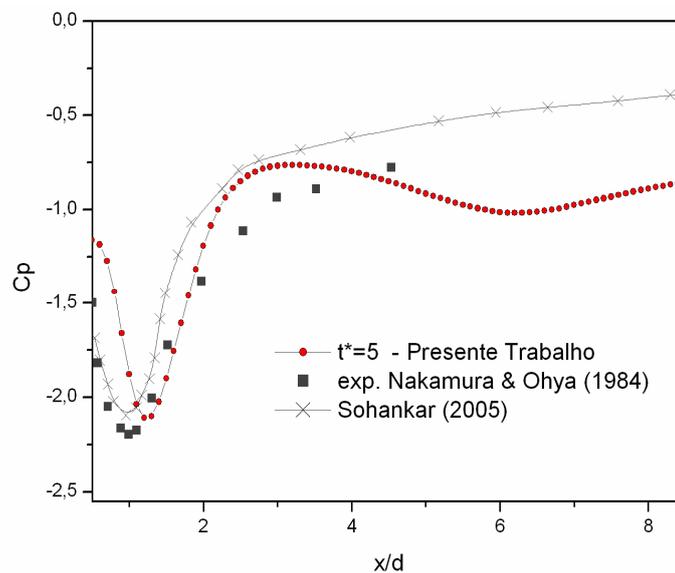


Figura 5.9 - Coeficiente de pressão na linha central utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração *EIPC*

A partir do comportamento irregular verificado através da Figura 5.9 e da observação qualitativa do coeficiente de pressão em $t^* = 5$, Figura 5.10(b), é possível visualizar a presença

de perturbações não físicas no campo de pressão. No que diz respeito à velocidade, a proximidade entre os resultados experimentais e numéricos é ratificada mediante a ilustração Figura 5.10(a), uma vez que o campo de velocidades ilustrado está isento dos modos espúrios verificados na avaliação da pressão. Porém, investigando os resultados apresentados na ilustração Figura 5.8(a), pode-se intuir que a pequena oscilação verificada na avaliação média temporal da velocidade adimensional a partir de $5d$ a sotavento do obstáculo é advinda do comportamento observado na pressão.

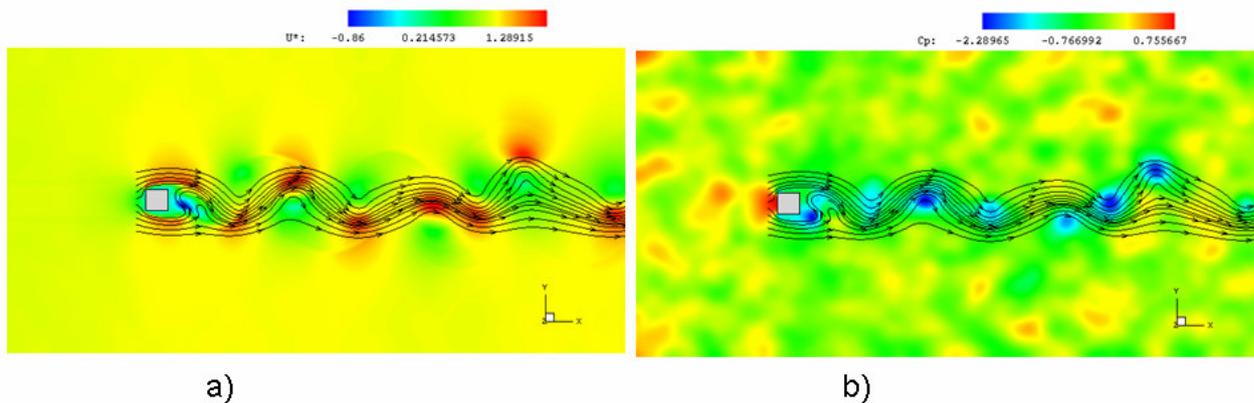


Figura 5.10 - Avaliação instantânea em $t^* = 5$ utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração *EIPC* para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão

Na Figura 5.11 são apresentados os campos qualitativos de velocidade e pressão para $t^* = 0,2 ; 0,4 ; 0,6$ e $0,8$. Assim, investigando as primeiras gravações executadas para a configuração *EIPC*, identificam-se oscilações numéricas bastante acentuadas no campo de pressão, as quais são sentidas no cálculo da velocidade.

A malha utilizada até o momento pretendia apenas uma primeira avaliação da resposta do código perante a simulação de um escoamento predominantemente advectivo. Com o aparecimento de oscilações espúrias no campo de pressão, é preciso garantir que as mesmas não sejam oriundas de uma discretização espacial grosseira. Porém, tanto o aumento da discretização espacial como tentativas relacionadas à diminuição do passo de tempo não solucionaram a desordem observada na solução.

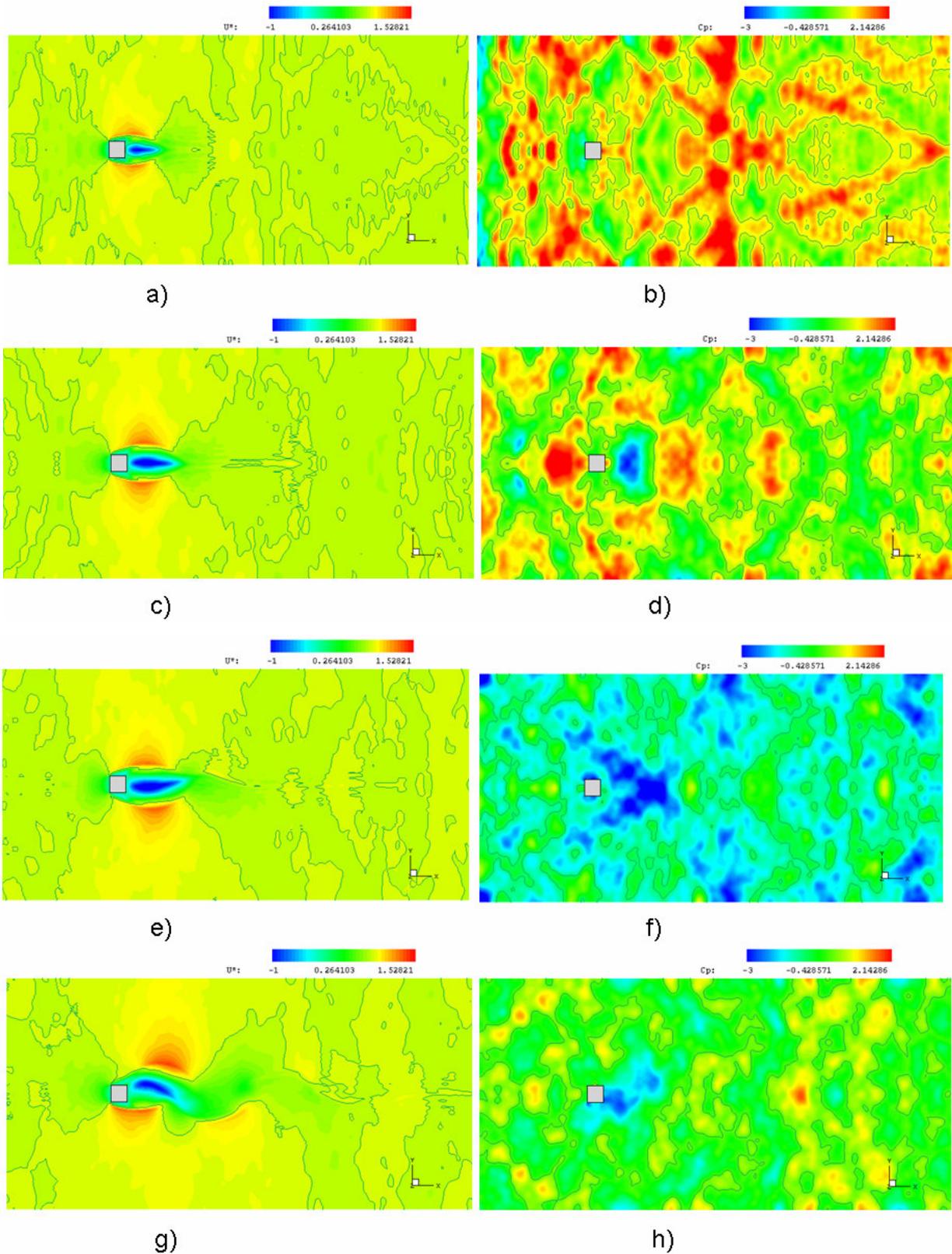


Figura 5.11 - Campos adimensionalizados de velocidade e pressão utilizando a malha com 39800 elementos e configuração *EIPC* para os seguintes tempos adimensionais: (a) e (b) $t^* = 0,2$, (c) e (d) $t^* = 0,4$, (e) e (f) $t^* = 0,6$ e (g) e (h) $t^* = 0,8$

5.2.2 Esquema Explícito-Iterativo com Função de Interpolação Linear para a Pressão

A escolha original de funções de interpolação de ordens distintas ($\phi > \psi$) está relacionada diretamente ao atendimento da condição de estabilidade de Babuška-Brezzi (BB). Como observado na Figura 5.9, 5.10 e 5.11, o cálculo dos termos de pressão empregando uma função de baixa ordem juntamente ao esquema temporal de Taylor-Galerkin explícito-iterativo resultou no aparecimento de oscilações espúrias na avaliação desta variável primária. Neste sentido, visando uma remoção completa destas perturbações, a elevação da ordem da função de interpolação ψ é proposta. Contrariando a condição de BB, o emprego de funções de mesma ordem é assegurada no presente estudo mediante a utilização do método da pseudo-compressibilidade, o qual iguala o requerimento das funções que descrevem velocidade e pressão a partir da inserção da derivação temporal desta última na equação da continuidade.

Assim, para avaliação dos resultados oriundos da utilização de uma função linear para o termo referente à pressão, os dados anteriormente apresentados pela Tabela 5.6 e o domínio indicado pela Figura 5.7 são empregados. Na Figura 5.12, os resultados qualitativos para os tempos adimensionais $t^* = 0,2 ; 0,4 ; 0,6$ e $0,8$ são apresentados para a velocidade U^* e para o coeficiente de pressão Cp . Avaliando estes registros, é possível verificar que a utilização de funções de interpolação com ordens idênticas para velocidade e pressão apenas reduziu de maneira ínfima os modos espúrios, não obtendo êxito na sua total remoção.

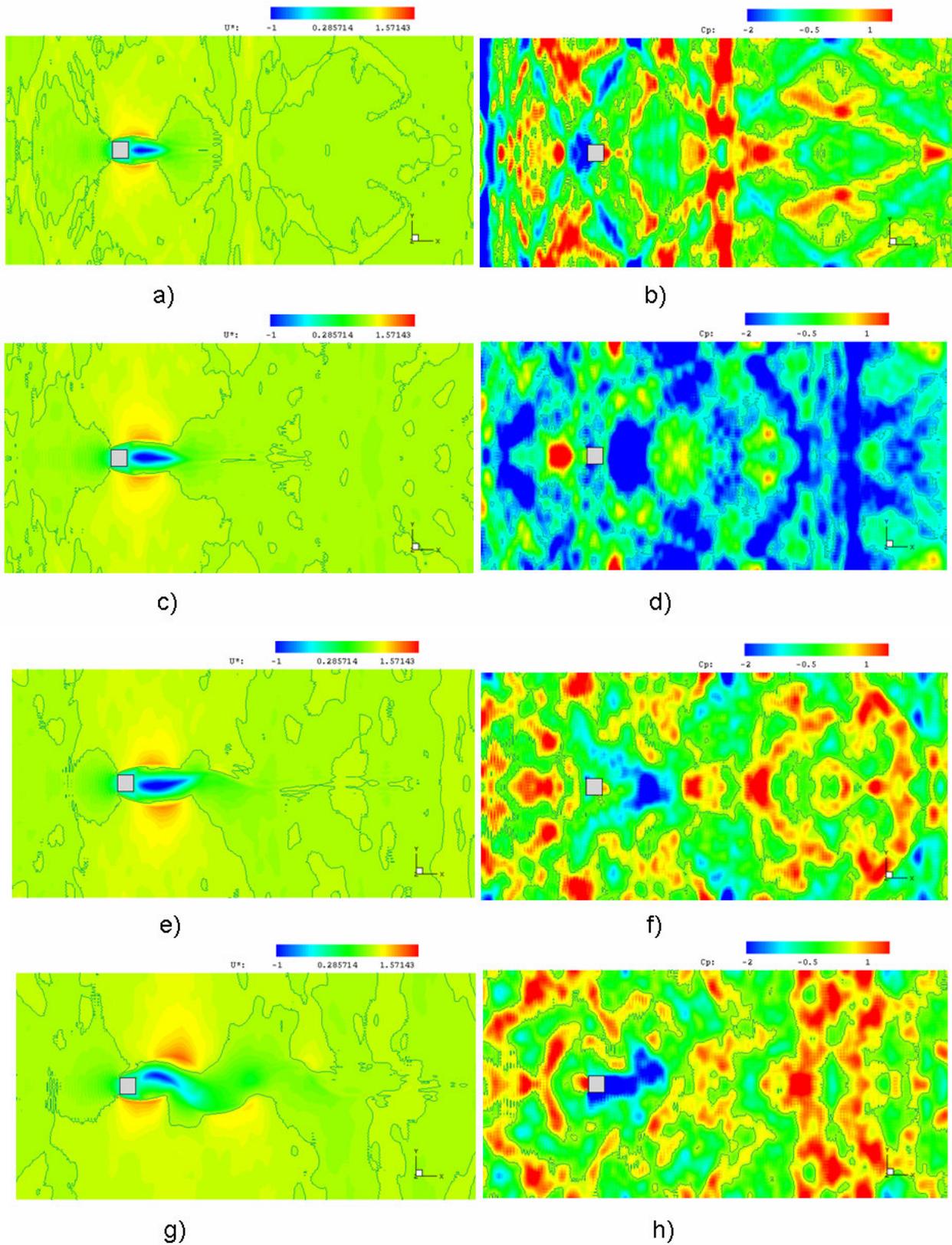


Figura 5.12 - Campos adimensionalizados de velocidade e pressão utilizando a malha com 39800 elementos e configuração *EIPL* para os seguintes tempos adimensionais: (a) e (b) $t^* = 0,2$, (c) e (d) $t^* = 0,4$, (e) e (f) $t^* = 0,6$ e (g) e (h) $t^* = 0,8$

Avaliando o escoamento sobre um prisma quadrado mediante a configuração *EIPL*, é verificada uma “patologia” numérica oriunda da utilização de $\phi = \psi$, a qual é caracterizada pela presença de instabilidades do tipo “tabuleiro de xadrez” (do inglês, “*checkerboard instabilities*”) no campo de pressão. Em $t^* = 5$, é possível observar mediante a Figura 5.13 que esta variedade de instabilidades é mais proeminente na face frontal do obstáculo, comportamento este corroborado a partir do exame da Figura 5.14. Nesta última ilustração, a média temporal do coeficiente de pressão é verificada para o contorno superior do obstáculo. Assim, avaliando a curva oriunda desta mesma figura, verifica-se que o trecho A-B abriga as maiores oscilações no entorno do corpo rombudo em análise quando comparado aos resultados experimentais de [Bearman et al., 1982] e numéricos de [Murakami, 1998].

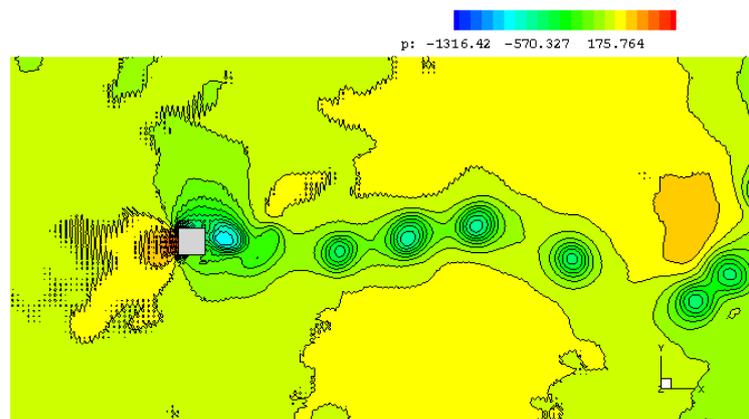


Figura 5.13 - Presença de instabilidades do tipo “tabuleiro de xadrez” no campo de pressão nas proximidades do obstáculo para a Malha de 39800 elementos e configuração *EIPL*

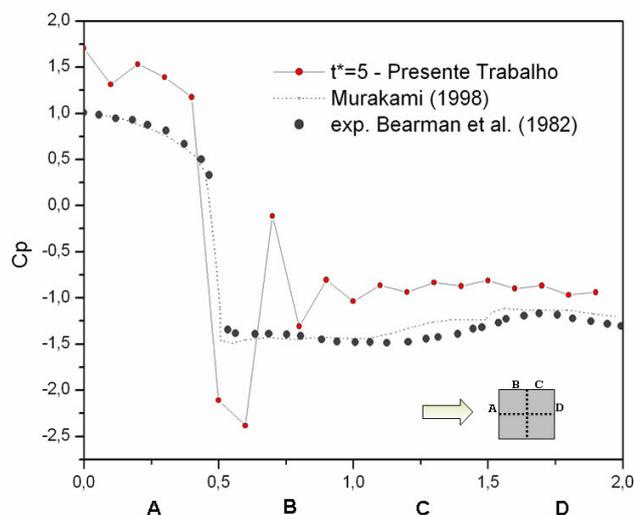


Figura 5.14 - Coeficientes de pressão no contorno superior do obstáculo utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração *EIPL*

No que tange ao cálculo do campo de velocidades, a Figura 5.15 indica que a utilização de funções de interpolação idênticas aproximou os resultados de velocidade a sotavento do obstáculo daqueles obtidos experimentalmente. Porém, a barlavento do prisma quadrado, as perturbações inerentes ao campo de pressão são intensamente sentidas na avaliação de U^* . Visando a remoção deste indesejável efeito, métodos estabilizados são comumente observados na literatura.

A utilização de uma função linear para pressão aumentou naturalmente o tempo de processamento, uma vez que o cálculo passa a ser realizado em cada nó do hexaedro empregado e não mais apenas em nível de elemento.

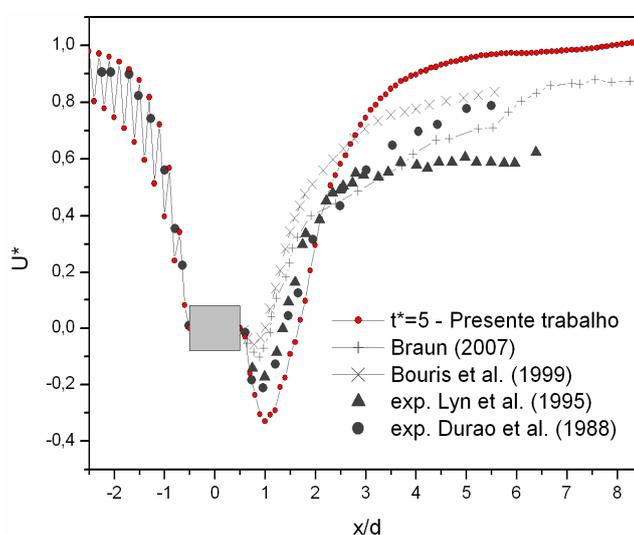


Figura 5.15 - Resultados adimensionalizados de velocidade na linha central do domínio utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração *EIPL*

Utilizando como baliza os esforços desenvolvidos por [Braun, 2007] na caracterização de escoamentos sobre prismas com seção quadrada, é possível observar que este autor, utilizando o método de Taylor-Galerkin explícito-iterativo com função de interpolação com mesma ordem, obteve êxito na avaliação tanto de resultados referentes à pressão como de velocidade, removendo com sucesso quaisquer oscilações espúrias presentes nestes campos. Comparando a formulação do estudo em análise com aquela empregada pelo autor supracitado, verifica-se que a diferença essencial entre ambas está vinculada ao tratamento dos termos de pressão e a expansão temporal das variáveis primárias até os termos de segunda ordem.

Na modelagem empregada no presente estudo, a tentativa de inviabilizar o aparecimento das instabilidades mencionadas foi através da inclusão do tensor de balanço difusivo, o qual já havia sido utilizado na simulação de escoamentos confinados por autores do grupo de estudo.

Assim, nos trabalhos publicados por [Petry, 2002], [Dos Santos, 2007] e [Xavier, 2008], a perturbação do escoamento mediante o aparecimento de instabilidades numéricas não foi capital na obtenção dos resultados.

Alternativamente à utilização do tensor de balanço difuso, [Braun, 2007] empregou a proposta enunciada por [Donea, 1984] para o tratamento de escoamentos advectivo-dominantes. Neste enfoque, os termos temporais presentes no método de Taylor-Galerkin são expandidos até segunda ordem para estabilização da solução.

Assim, comparando os aspectos quantitativos e qualitativos obtidos no presente estudo com as produções observadas anteriormente, é possível concluir que o tensor utilizado para aumentar as propriedades dissipativas do escoamento não foi efetivo na avaliação de escoamento externo (ou não confinado).

Desta maneira, uma análise do panorama apresentado indicaria a implementação imediata dos termos de segunda ordem visando à eliminação das oscilações espúrias do campo de pressão. Porém, como observado anteriormente, a utilização do esquema explícito-iterativo implica em uma constante verificação da convergência entre cada iteração, fazendo com que o tempo de processamento seja demasiadamente elevado. Assim, uma eventual utilização de termos temporais de segunda ordem acarretaria em tempos de solução ainda maiores, inviabilizando grande parte das aplicações relacionadas à EVC. Diante destas adversidades apresentadas, a manutenção do tensor de balanço difusivo foi escolhida em detrimento a expansão de segunda ordem série de Taylor dos termos temporais.

5.2.3 Esquema Explícito de Dois Passos com Função de Interpolação Linear para a Pressão

Avaliando novamente o trabalho de [Braun, 2007], observa-se que este utilizou um segundo esquema para avaliação temporal das equações governantes que regem o escoamento sobre um prisma quadrado. Na discussão dos resultados, o autor compara os campos de velocidade e pressão obtidos através do esquema temporal de Taylor-Galerkin explícito-iterativo e do esquema explícito de dois passos. Assim, para o mesmo número de Reynolds discutido neste trabalho, os melhores resultados são atribuídos ao emprego do método explícito de dois passos.

Desta maneira, para remoção das instabilidades oriundas da simulação numérica de escoamentos advectivo-dominados, foi empregado o esquema explícito de dois passos desenvolvido por [Kawahara e Hirano, 1983]. A escolha deste método foi ratificada mediante a

observação do trabalho de [Petry, 1993], no qual são apresentados êxitos na solução de escoamentos externos, mais precisamente na caracterização de escoamentos sobre um cilindro fixo. Segundo [Kawahara e Hirano, 1983], o método de dois passos, a partir do emprego da diagonalização seletiva da matriz de massa, figura como alternativa para a estabilização da solução numérica. Como observado previamente, a formação da matriz seletiva é efetuado mediante a utilização do parâmetro de controle seletivo e .

No trabalho dos autores citados, este parâmetro é avaliado mediante a avaliação de três valores distintos: 0, 0,7 e 0,95. Nesta discussão, os autores ressaltam as principais conseqüências numéricas de cada escolha. Para caracterização do escoamento sobre um prisma quadrado ($Re=22000$), [Braun, 2007] utiliza um parâmetro de controle seletivo nulo visando redução dos resíduos.

Assim, empregando uma malha com configuração uniforme de 39800 elementos, idêntica a utilizada anteriormente para as configurações *EIPC* e *EIPL*, os três parâmetros seletivos propostos por Kawahara e Hirano são avaliados a partir da velocidade adimensional U^* . Na Figura 5.16, observa-se que a discussão estimulada pelos autores citados se confirma, uma vez que às instabilidades presentes no campo de velocidade a barlavento do obstáculo são reduzidas conforme a diminuição do parâmetro seletivo e . Avaliando esta mesma ilustração, é possível verificar também que os três parâmetros examinados aproximam-se bastante dos resultados obtidos por [Braun, 2007] utilizando este mesmo esquema temporal. Porém, uma comparação mais cuidadosa com o estudo citado ainda carece de verificações empregando maiores discretizações espaciais por parte deste estudo.

Assim, apesar dos resultados ainda serem dependentes de malha, a diferença entre as curvas para cada valor de e permite que a definição desta constante seja ajustada em zero, uma vez que instabilidades a barlavento do obstáculo não são observadas para este parâmetro seletivo.

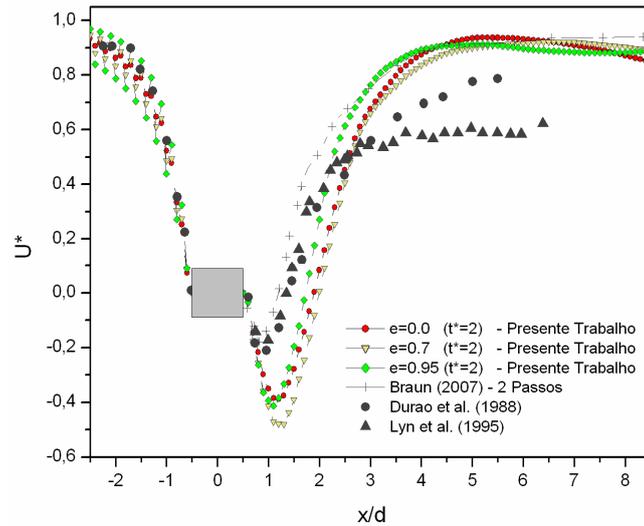
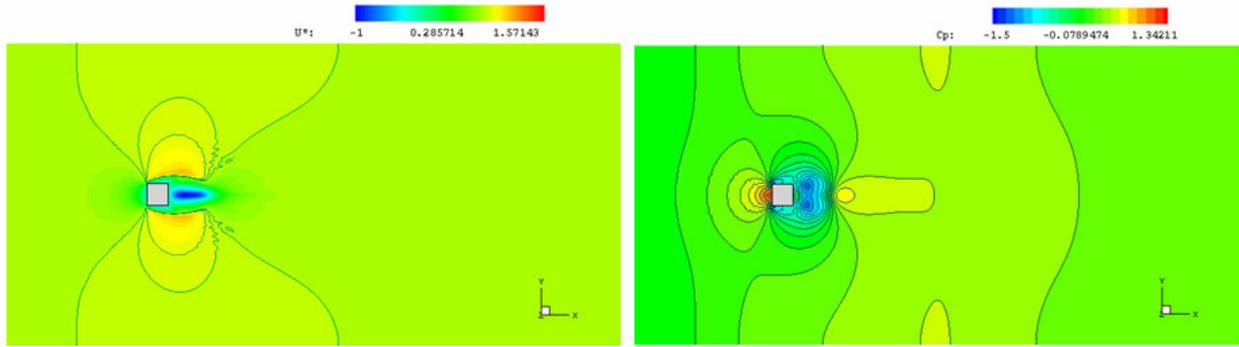


Figura 5.16 - Comparação entre diferentes parâmetros seletivos utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração *EDP*

A dificuldade no tratamento dos campos de pressão advinda da utilização do esquema explícito-iterativo foi prosperamente superada a partir da avaliação temporal empregando dois passos na solução das equações governantes. Com o monitoramento dos registros adimensionais $t^* = 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8$ e 1 utilizando um parâmetro seletivo e nulo, é possível identificar através da Figura 5.17 a remoção completa das oscilações espúrias observadas até o momento.

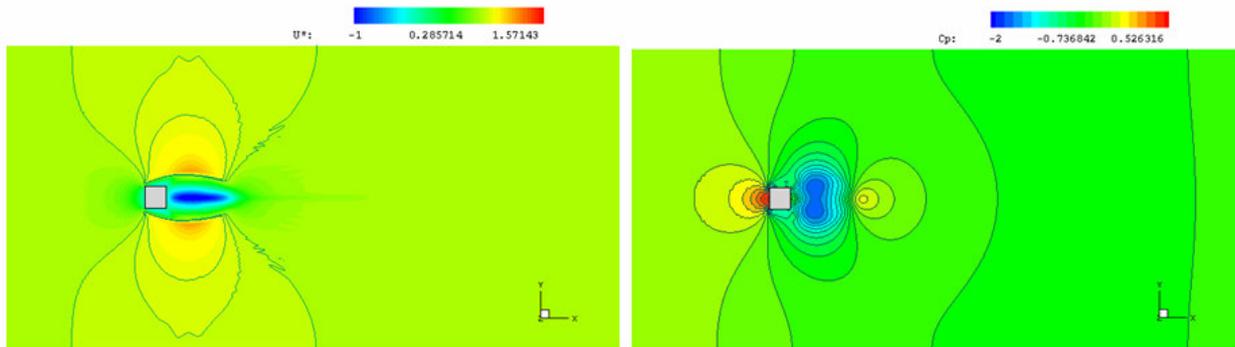
Desta maneira, o início da formação da esteira de vórtices, a qual era observada tão somente através do campo de velocidades pelo esquema explícito-iterativo, é captada também pelo campo de pressão utilizando o esquema temporal de dois passos.

Assim, os campos apresentados em $t^* = 0,2$ e $0,4$ indicam o surgimento dos vórtices simétricos na região traseira do obstáculo e seus respectivos alongamentos. Nos tempos seguintes, $t^* = 0,6 ; 0,8$ e $t^* = 1$, o crescimento dos vórtices passa a ocorrer de maneira assimétrica, resultando no colapso do sistema a partir do desprendimento do vórtice na região superior e início da formação de um novo na região inferior. Na Figura 5.18 são observados os campos de velocidade e pressão adimensionalizados em $t^* = 5$.



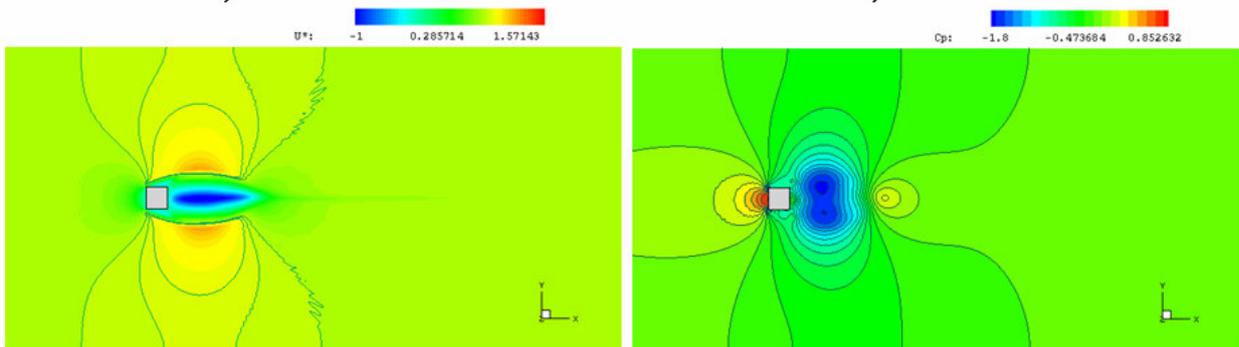
a)

b)



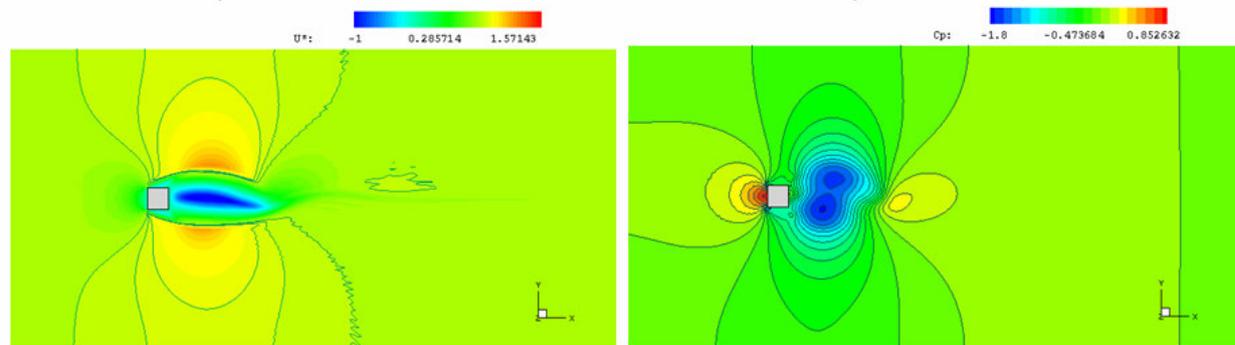
c)

d)



e)

f)



g)

h)

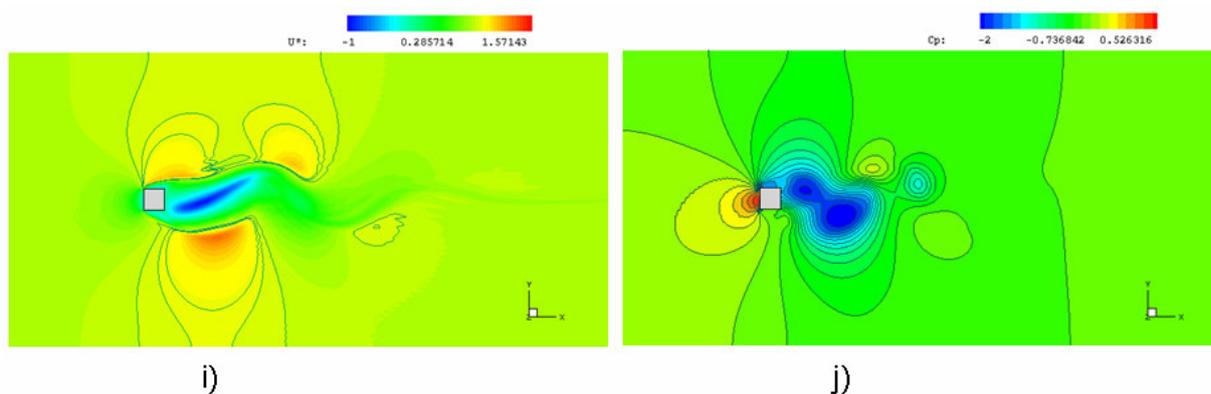


Figura 5.17 - Campos adimensionalizados de velocidade e pressão utilizando a malha com 39800 elementos e configuração *EDP* para os seguintes tempos adimensionais: (a) e (b) $t^* = 0,2$, (c) e (d) $t^* = 0,4$, (e) e (f) $t^* = 0,6$, (g) e (h) $t^* = 0,8$ e (i) e (j) $t^* = 1$

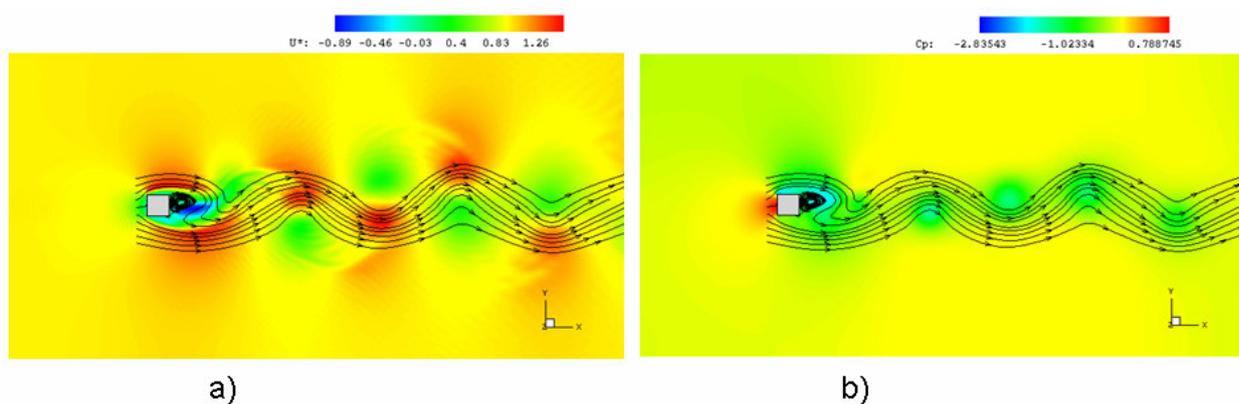


Figura 5.18 - Avaliação instantânea em $t^* = 5$ utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração *EDP* para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão

Optando por um valor nulo na escolha do parâmetro seletivo e , resultados médios de velocidade e pressão são comparados na linha central do domínio para as três configurações examinadas até o momento. Assim, as configurações *EIPC*, *EIPL* e *EDP* são comparadas. As curvas ilustradas nas Figura 5.19 (a) e (b) indicam que, apesar do esquema temporal de dois passos eliminar com sucesso as oscilações espúrias, um pequeno prejuízo é verificado na solução numérica dos campos de velocidade e pressão em relação ao esquema explícito-iterativo.

No comportamento ilustrado através da Figura 5.19 (b), é possível observar que o monitoramento do esquema temporal de dois passos na região imediatamente posterior ao obstáculo revela um importante amortecimento do coeficiente de pressão, o qual deverá ser minimizado mediante um refinamento das malhas empregadas. Em contrapartida, uma distribuição mais estável para esta variável primária é averiguada após $4d$.

Segundo [Oliveira Jr., 2006], o amortecimento de oscilações espúrias através da diagonalização seletiva da matriz de massa, em alguns casos, pode acarretar em uma pequena perda na precisão numérica em detrimento da estabilização do esquema de solução.

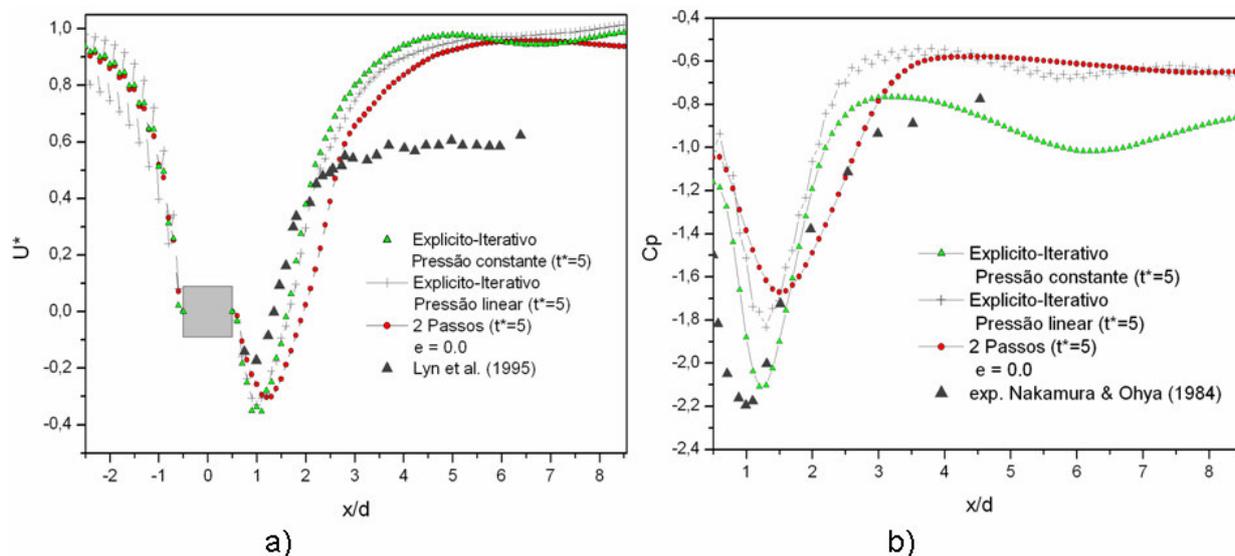


Figura 5.19 - Avaliação média temporal na linha de centro do domínio utilizando a malha de 39800 elementos e a configuração *EDP* para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão

Além dos importantes avanços observados no tratamento da pressão pela solução utilizando dois passos, Figura 5.17 e Figura 5.19, a remoção do ciclo iterativo do esquema temporal explícito permitiu uma redução importante no tempo de processamento. Diante dos resultados apresentados na Figura 5.3 e na Tabela 5.3, já era sabido que grande parte do tempo consumido no processamento era destinado ao ciclo iterativo. Como pode ser verificado na Tabela 5.7, comparando as alternativas testadas em relação ao algoritmo original, o “*speed up*” verificado com a utilização do esquema temporal explícito de dois passos é de 8,45 vezes. A avaliação referente ao tempo de processamento consumido em cada configuração foi obtida através de um computador pessoal monoprocessado com a seguinte configuração: *Pentium 4* com 3 GHz de *clock* e 2 GB de memória.

Assim, a adição de um novo passo de tempo apontou um menor esforço computacional quando comparado a constante verificação do critério de tolerância intrínseca à solução explícito-iterativa. A utilização de uma função linear para pressão no método explícito-iterativo aumentou em mais de duas vezes o tempo de processamento em relação ao código original.

Tabela 5.7 - Tempo computacional e “*speed up*” observados para as três alternativas avaliadas

Alternativas adotadas	Tempo Computacional (segundos)	<i>Speed Up</i>
Explícito-Iterativo com Pressão Constante (<i>EIPC</i>)	11977	-
Explícito-Iterativo com Pressão Linear (<i>EIPL</i>)	26031	-
Explícito de Dois Passos com Pressão Linear (<i>EDP</i>)	1417	8,45

Uma vez que a remoção das oscilações espúrias do campo de pressão foi efetuada com êxito, a investigação do comportamento desta nova configuração do algoritmo na caracterização do escoamento sobre um prisma quadrado é realizada. Visando observar a influência da discretização espacial na avaliação do fenômeno, duas malhas são utilizadas. Assim, além da configuração com 39800 hexaedros empregada anteriormente, uma nova discretização com 78008 elementos foi examinada. Nesta segunda malha de elementos finitos, o intervalo de tempo crítico necessário para atendimento da condição de estabilidade de Courant é apresentado na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 - Menor elemento da malha de elementos finitos e o tempo crítico, respectivamente, para a segunda discretização espacial utilizada.

	$\Delta x_{\text{mínimo}}$	$\Delta t_{\text{crítico}}$
Malha 78008	0,071d	1,92E-05 s

Nas Figura 5.20 (a) e (b), os campo de velocidade e pressão adimensionais na linha central do domínio são novamente examinados para as duas discretizações uniformes propostas. Como é possível observar na parte (a) desta mesma imagem, após $t^* = 5$, o aumento da discretização espacial aproximou bastante os resultados obtidos numericamente daqueles publicados por [Lyn et al., 1995] e [Durao et al., 1988], semelhança esta observada até aproximadamente $2,2d$. Após esta distância do obstáculo, os resultados obtidos neste trabalho indicam o mesmo distanciamento dos resultados observados em grande parte das simulações numéricas divulgadas na literatura, anteriormente apresentados na Figura 5.8(b).

Na avaliação do campo de pressão até aproximadamente $8,5d$ do centro do obstáculo, é possível verificar que os resultados obtidos a partir da configuração com 78008 elementos assemelham-se bastante dos valores experimentais atribuídos a [Nakamura e Ohya, 1984]. O distanciamento observado entre o presente trabalho e o de [Sohankar, 2006] pode estar

relacionado à discretização espacial empregada por este último, o qual a partir de uma malha de configuração irregular tridimensional utilizou um distanciamento de $0,008d$ entre a primeira fila de elementos e o obstáculo.

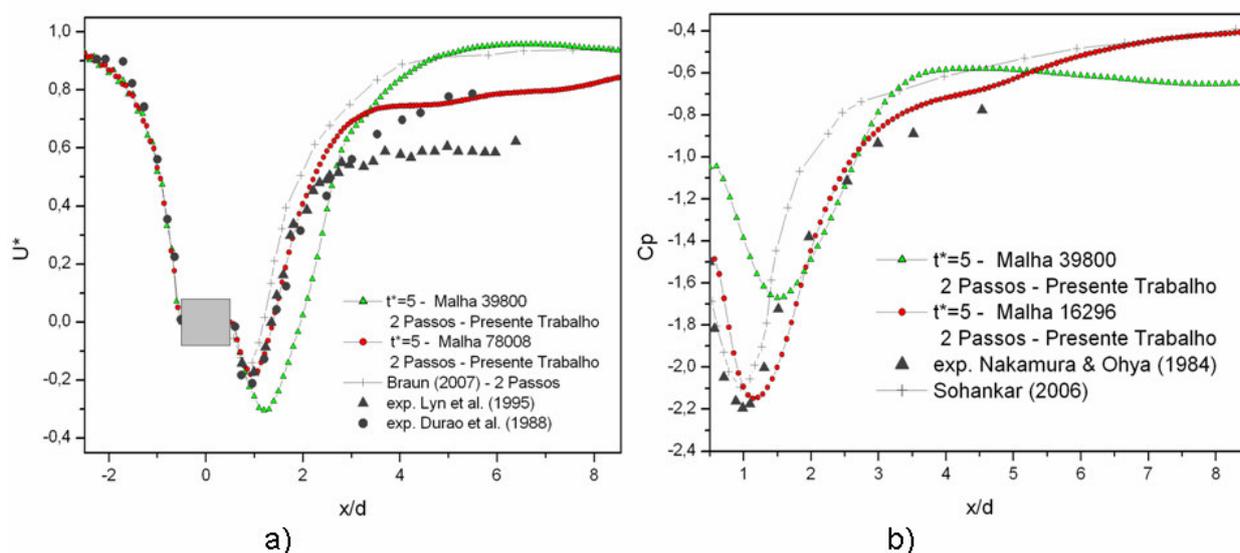


Figura 5.20 - Avaliação média temporal na linha de centro do domínio utilizando as malhas com 39800 e 78008 elementos e a configuração *EDP* para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão

Fenômenos observados no entorno do obstáculo também são monitorados e comparados com resultados observados na literatura. Como verificado anteriormente, a passagem do escoamento sobre o corpo rombudo revela um comportamento altamente transiente, o qual é caracterizado pelo desprendimento aleatório de vórtices das arestas superior e inferior. Na média temporal, ou seja, após atingir o regime permanente, o comportamento do escoamento é representado pela presença de quatro vórtices nas proximidades do obstáculo, sendo dois vórtices distribuídos nas regiões superior e inferior e dois na região traseira. Este fenômeno foi obtido numericamente por [Sohankar, 2006] e apresentado mediante linhas de corrente através da Figura 5.21.

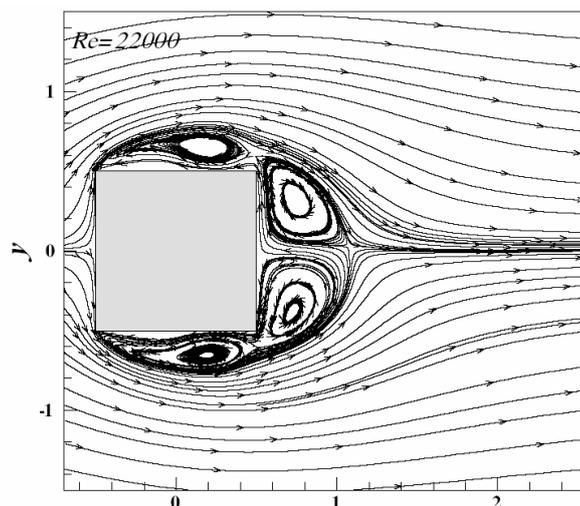


Figura 5.21 - Linhas de corrente obtidas nas proximidades do obstáculo

(Fonte: [Sohankar, 2006])

Visando uma obtenção quantitativa do fenômeno previamente descrito, perfis de velocidade posicionados em $x = 0d$, $0,5d$ e $1,5d$ são observados desde a linha central do domínio até uma distância na direção Y igual a $4d$. Este monitoramento tem como objetivo avaliar o início e o fim do vórtice posicionado na região superior do obstáculo, $x = 0d$ e $0,5d$, respectivamente, e avaliar o comportamento do perfil de velocidades imediatamente depois do vórtice posicionado na região posterior do obstáculo, $x = 1,5d$.

Diante dos resultados apresentados nas Figura 5.22 (a), (b) e (c), é possível verificar que o código utilizando o esquema temporal explícito de dois passos possibilitou uma avaliação do fenômeno próxima daquelas publicadas por [Lyn et al., 1995] (experimental) e [Sohankar, 2006] (numérico). Um pequeno distanciamento é verificado em $x = 0,5d$, o qual se afastou um pouco dos demais resultados, e o intervalo $1d < Y < 2d$ referente ao perfil posicionado em $x = 1,5d$.

Os primeiros resultados obtidos após o obstáculo nos pontos $x = 0d$ e $0,5d$, os quais estão intimamente relacionados ao menor elemento da malha de elementos finitos, revela que a discretização utilizada por [Sohankar, 2006] pode ter captado com mais veracidade o fenômeno nesta região. Porém, a ausência na literatura de medições experimentais em distâncias tão pequenas inviabiliza uma discussão mais abalizada a cerca deste fato. Na região da esteira, $x = 1,5d$, o presente trabalho utilizando a malha de 78008 elementos aproximou-se bastante do resultado experimental.

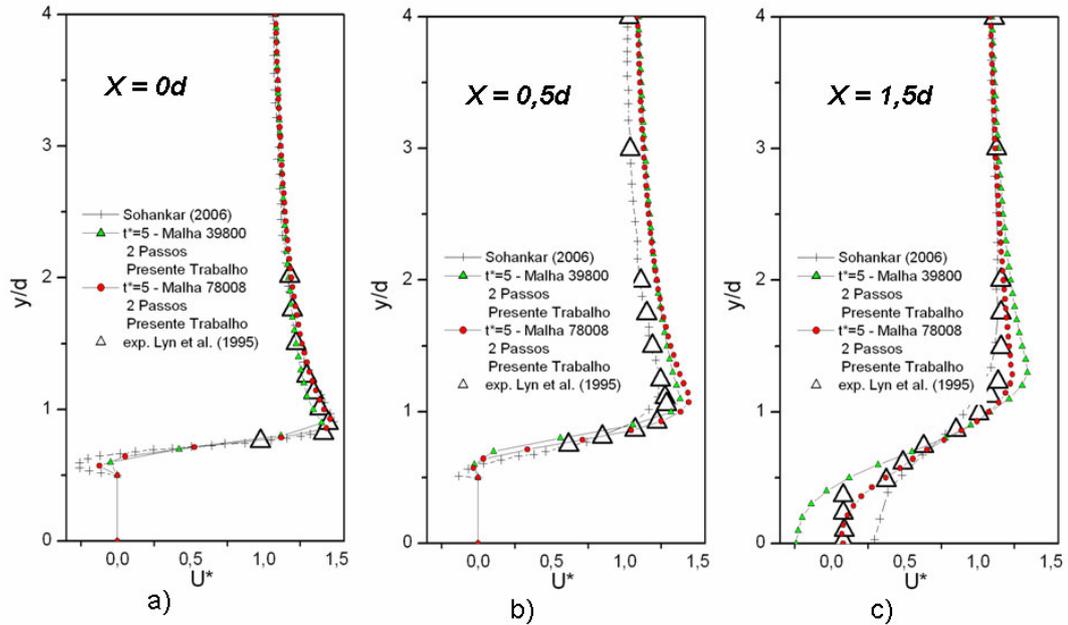


Figura 5.22 - Avaliação dos perfis de velocidade utilizando as malhas com 39800 e 78008 elementos e a configuração *EDP* para as seguintes posições: (a) $x = 0d$, $0,5d$ e $1,5d$, (b) $x = 0,5d$ e (c) $x = 1,5d$

Resultados referentes à estatística da turbulência também foram analisados. Desta maneira, flutuações de velocidade nas direções X e Y são examinadas ao longo da linha central do domínio a partir da energia cinética total da turbulência, a qual é obtida mediante a equação (2.37). Os resultados observados na Figura 5.23 indicam que a avaliação das flutuações demanda discretizações mais refinadas nas proximidades do obstáculo, região na qual as maiores variações de velocidade são observadas.

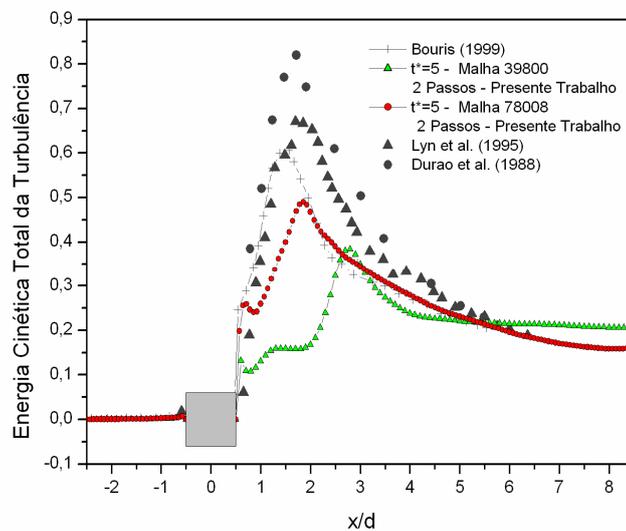


Figura 5.23 - Energia cinética total da turbulência média avaliada na linha central do domínio

Assim, mesmo utilizando a segunda malha proposta, a energia cinética da turbulência observada até aproximadamente $4,5d$ distanciou-se tanto dos resultados experimentais como dos numéricos. A dificuldade de avaliar as estruturas turbulentas sugere a necessidade de utilizarem-se malhas não uniformes, as quais são largamente aplicadas na caracterização sobre corpos rombudos.

Esse requerimento está estreitamente relacionado à abordagem LES empregada no presente estudo, a qual utiliza modelos algébricos para avaliar estruturas ditas sub-malha enquanto a solução direta das equações governantes ocorre apenas para as grandes escalas. Assim, para obtenção de resultados independentes de malha, a utilização de discretizações espaciais uniformes na avaliação de escoamentos sobre corpos rombudos angulosos exigiria malhas extremamente refinadas para captar as menores estruturas presente no escoamento.

Assim, avaliações precisas utilizando disposição uniforme dos elementos além de demandar tempos extremamente altos de processamento, figuram como alternativas que consomem de maneira ineficiente os recursos computacionais, uma vez que utilizam refinamentos idênticos para todo o domínio computacional.

Desta maneira, uma vez que a análise qualitativa desta variedade de escoamentos é conhecida, refinamentos que priorizem regiões ávidas de uma avaliação mais acurada são passíveis de serem empregados. Seguindo as configurações propostas por [Bouris et al., 1999], [Lun et al., 2003], [Kim et al., 2004], [Sohankar, 2006] e [Braun, 2007], malhas que intensifiquem o monitoramento de resultados nas imediações do obstáculo foram empregadas para avaliação precisa das estruturas intrínsecas ao problema em estudo.

O maior prejuízo de uma malha dita irregular está relacionado ao esquema explícito, que para garantir a estabilidade da solução exige que a condição apresentada pela equação (3.52) seja satisfeita. Desta maneira, uma redução considerável no tamanho referente ao menor elemento presente no domínio será diretamente proporcional à diminuição do incremento de tempo.

Neste sentido, duas malhas irregulares (“*stretched*”) são empregadas na avaliação do escoamento sobre um prisma quadrado. Inicialmente, uma discretização contendo 16296 elementos é utilizada (Figura 5.24), configuração essa aproximadamente duas vezes inferior à malha de 39800 hexaedros utilizada anteriormente. Nesta avaliação, a distância entre o obstáculo e a primeira linha de elementos é de aproximadamente $0,04d$, sendo a razão de aspecto utilizada na disposição de aproximadamente 1,05. Em seguida, uma discretização não uniforme com 66492 elementos é examinada, sendo a distância entre o obstáculo e a primeira linha de elementos igual a $0,009d$.

Na Tabela 5.9 são apresentadas as distâncias entre o obstáculo e a primeira linha de elementos (Δx_{minimo}) e os intervalos de tempo crítico para as discretizações irregulares empregadas no presente estudo.

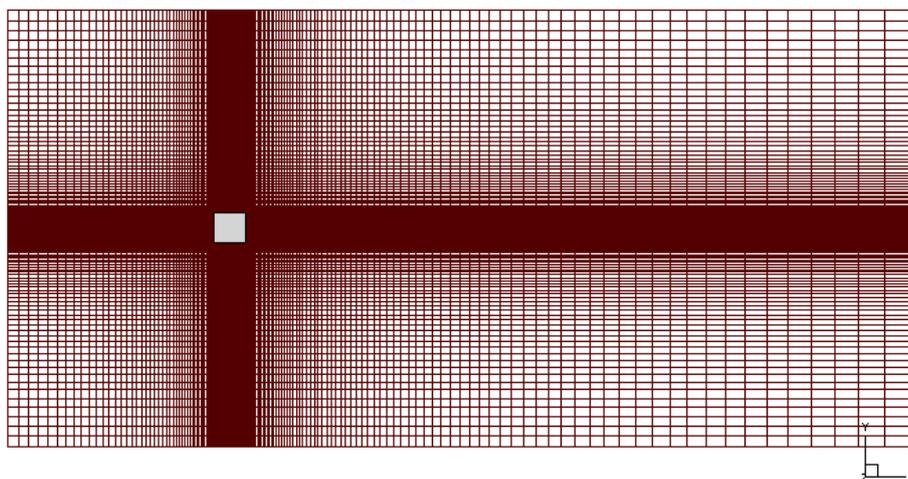


Figura 5.24 - Malha irregular com 16296 elementos utilizando a configuração *EDP*

Tabela 5.9 - Menor elemento das discretizações irregulares e o tempo crítico para cada malha de elementos finitos empregada.

	Δx_{minimo}	$\Delta t_{\text{critico}}$
Malha 16296	$0,04d$	$1,08E-05 \text{ s}$
Malha 66492	$0,009d$	$2,43E-06 \text{ s}$

Analisando os resultados ilustrados nas Figura 5.25 (a), verifica-se que a utilização de uma malha *stretched* com 16296 elementos permitiu que as avaliações médias na linha central superassem aquelas obtidas mediante a configuração uniforme, mesmo empregando uma densidade consideravelmente mais grosseira. Esta investigação ressalta a importância do emprego de malhas não uniformes em problemas caracterizados pela presença de múltiplas escalas.

Porém, na observação dos resultados médios de velocidade na linha central advindos da malha com 66492 elementos, Figura 5.25 (c), verifica-se que o refinamento desigual ao longo do domínio distanciou os valores obtidos daqueles verificados experimentalmente, principalmente a partir de uma distância igual a $3d$ do centro do obstáculo. Estes resultados, juntamente a investigação do coeficiente de pressão obtido nas Figura 5.25 (b) e (d), evidenciam a dificuldade enfrentada pela malhas irregulares no presente estudo.

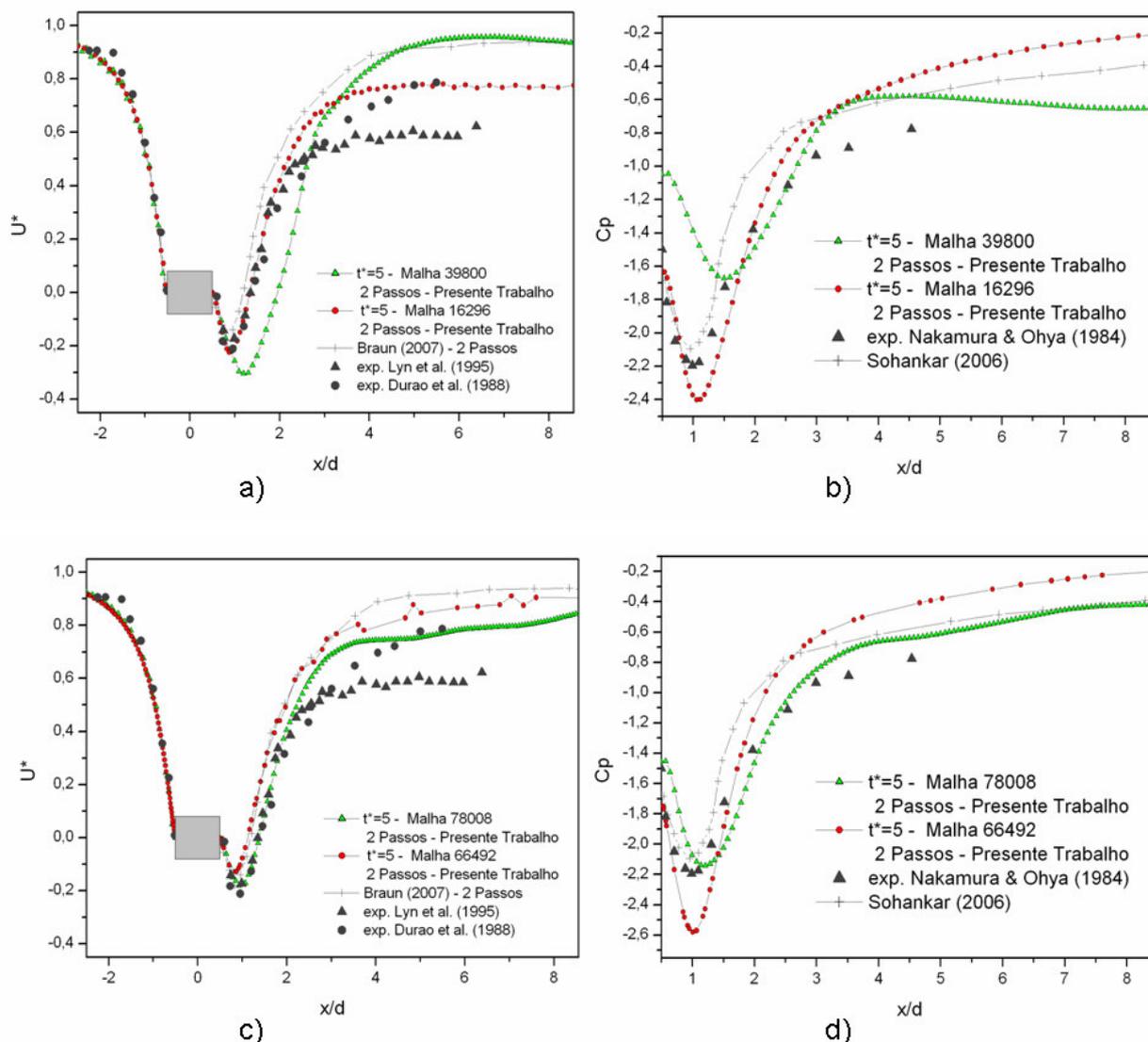


Figura 5.25 - Campos de velocidade e pressão adimensionalizados na linha central utilizando a configuração *EDP* e confrontando malhas com as seguintes discretizações: (a) e (b) 39800 (uniforme) *versus* 16296 (irregular) e (c) e (d) 78008 (uniforme) *versus* 66492 (irregular)

Os resultados observados na Figura 5.25 são ratificados a partir das verificações qualitativas obtidas em um tempo instantâneo $t^* = 5$. Como apresentado anteriormente, a construção de malhas do tipo *stretched* mediante a simulação das grandes escalas exige que a razão de aspecto entre os elementos seja extremamente suave. Assim, uma vez que o filtro do tipo “*box*” executa uma filtragem de escalas em nível de malha, elementos vizinhos com tamanhos demasiadamente distintos podem causar diferenças acentuadas na modelagem da turbulência, gerando instabilidades de ordem numérica.

Mesmo atentando a esta precaução, as Figura 5.26 (a) e (b) revelam que a construção não uniforme da malha gerou instabilidades ao longo de todo o domínio, distorcendo a formação e o desprendimento dos vórtices.

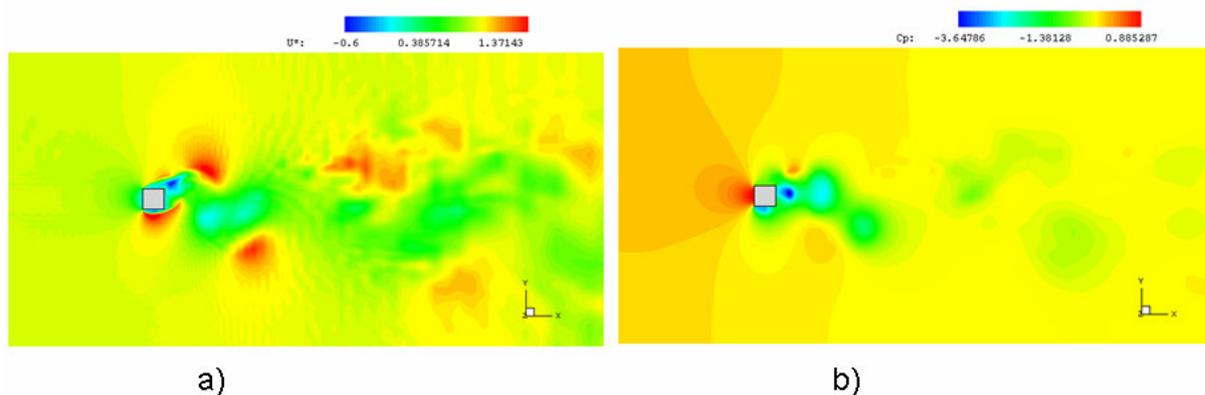


Figura 5.26 - Avaliação instantânea em $t^* = 5$ utilizando a malha irregular com 16296 elementos e a configuração *EDP* para os campos adimensionalizados de (a) velocidade e (b) pressão

Apesar das perturbações previamente citadas, o monitoramento de pontos em regiões próximas ao obstáculo foram obtidos com êxito empregando malhas não uniformes.

Nos perfis de velocidade designados à captura do fenômeno de separação, posições $x = 0d$ e $0,5d$, os resultados assemelharam-se bastante as avaliações numéricas e experimentais utilizadas como referência. Na Figura 5.27(d), a utilização de refinamento nas imediações do obstáculo próximo daquele empregado por [Sohankar, 2006] permitiu que as verificações nesta região fossem captadas de maneira similar para ambas as avaliações numéricas. Como pode ser identificado a partir da Figura 5.27 (f), o monitoramento do perfil imerso na esteira, $x = 1,5d$, indica que a utilização da malha irregular com 66492 elementos também aproximou bastante os resultados do presente trabalho daqueles obtidos pelo autor previamente citado. Em contrapartida, é observado um distanciamento da curva obtida para a malha uniforme com 78008 elementos, a qual havia obtido valores muito próximos daqueles publicados por [Lyn et al., 1995]. Uma vez que os resultados uniformes não eram independentes de malha, é bastante provável que um aumento na discretização espacial da malha com 78008 elementos também conduziria os perfis de velocidade até valores próximos aos apresentados por [Sohankar, 2006].

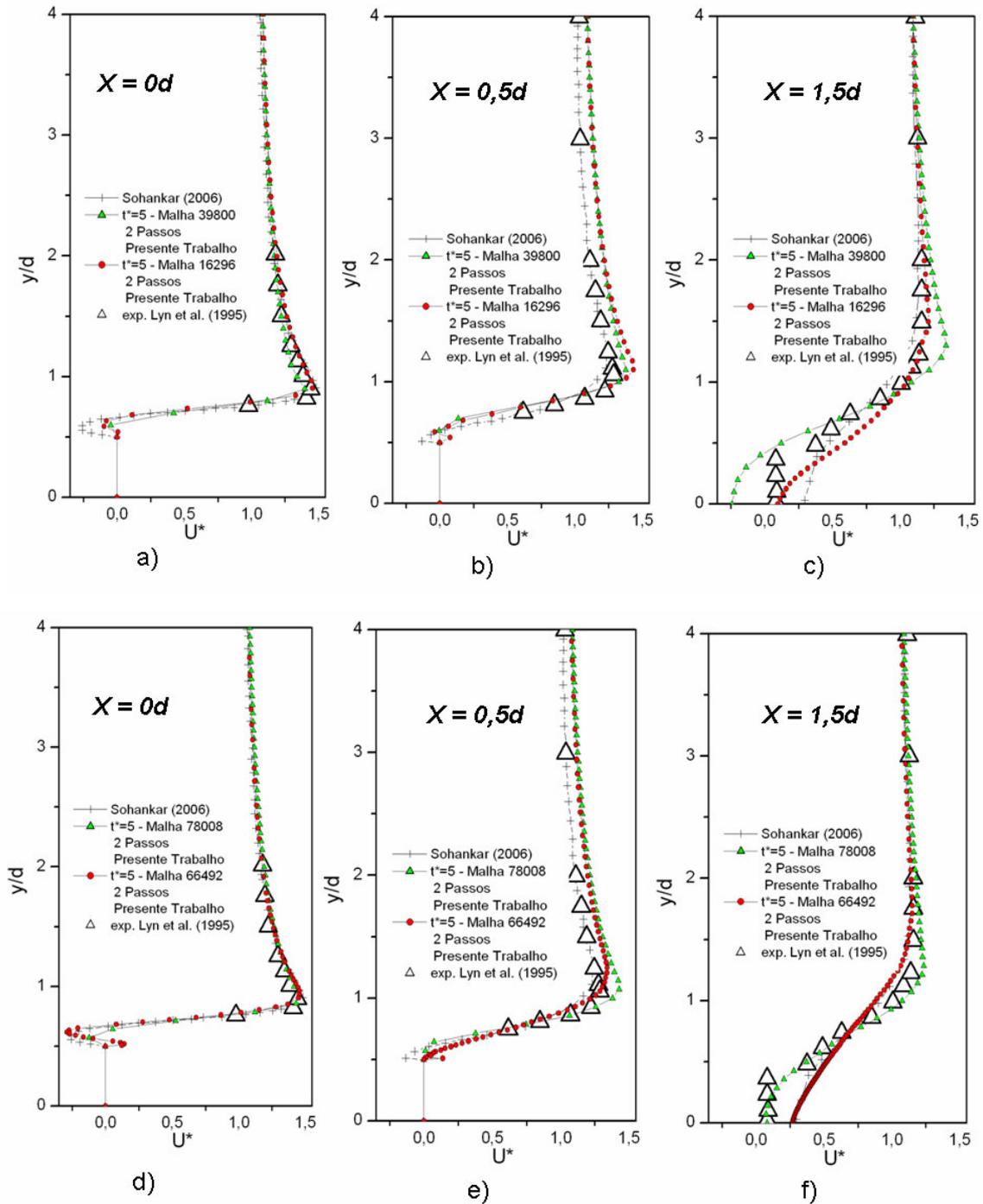


Figura 5.27 - Perfis de velocidade nas imediações do obstáculo utilizando a configuração *EDP* e confrontando malhas com as seguintes discretizações: (a), (b) e (c) 39800 (uniforme) *versus* 16296 (irregular) e (c), (d) e (f) 78008 (uniforme) *versus* 66492 (irregular)

Os resultados ilustrados através da Figura 5.28 (a) e (b) indicam uma melhoria bastante acentuada na avaliação da energia cinética total da turbulência a partir de um maior detalhamento nas proximidades das superfícies sólidas do obstáculo. A utilização desta configuração não

uniforme apresentou resultados bem superiores àqueles observados através das malhas com disposição uniforme, mesmo empregando um número total de elementos inferior.

Na malha com 66492 elementos, mesmo apresentando um distanciamento dos demais resultados na região traseira do obstáculo, os valores anteriores a $3d$ do centro do prisma são os que mais se aproximaram dos experimentais na avaliação de flutuações de velocidade. Comparando aos resultados numéricos apresentados na literatura, a curva obtida até $3d$ é idêntica àquela apresentada por [Bouris et al., 1999], os quais também efetuaram uma análise bidimensional do caso em estudo através de uma malha não uniforme, sendo a menor distância entre o obstáculo e a primeira linha de elementos igual a $0,00125d$. A divergência observada após a distância do prisma previamente citada está relacionada às oscilações numéricas oriundas da utilização da malha com configuração irregular.

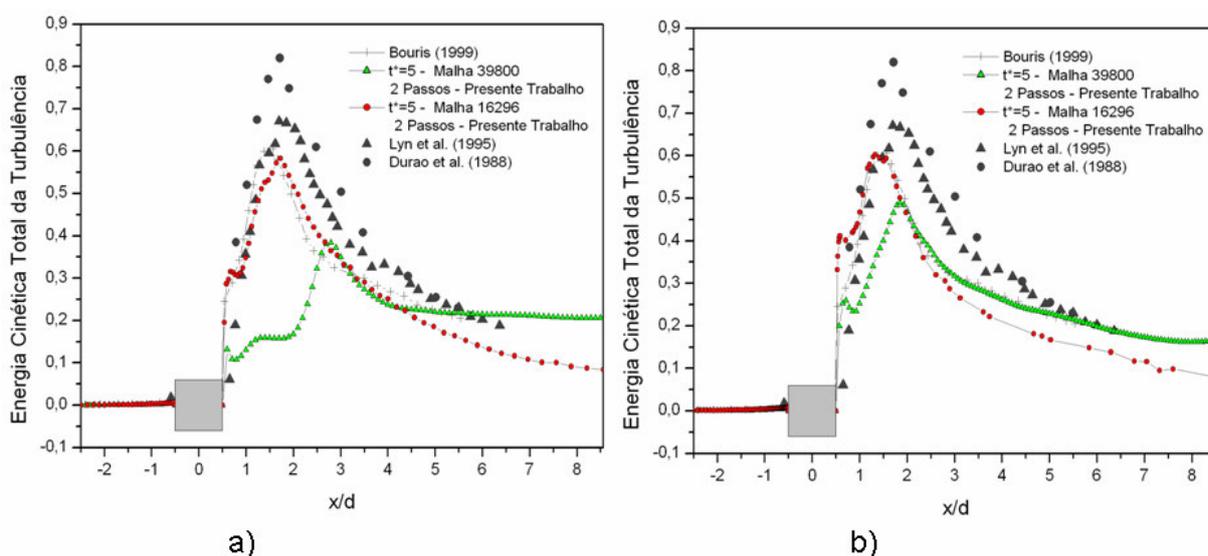


Figura 5.28 - Energia cinética total da turbulência utilizando a configuração *EDP* e confrontando malhas com as seguintes discretizações: (a) 39800 (uniforme) *versus* 16296 (irregular) e (b) 78008 (uniforme) *versus* 66492 (irregular)

Assim, a captura de estruturas turbulentas nas imediações de corpos rombudos exige que elevadas discretizações espaciais sejam utilizadas, fazendo com que disposições uniformes tornem-se demasiadamente onerosas computacionalmente. Nos resultados ilustrados através da Figura 5.28, mesmo diante das irregularidades previamente discutidas, os valores referentes à energia cinética da turbulência evidenciaram a importância de utilizarem-se elementos extremamente refinados nas proximidades do obstáculo.

Desta maneira, o emprego de discretizações irregulares na avaliação de corpos imersos figura como única alternativa de obterem-se resultados independentes de malha, além de possibilitar reduções importantes no tempo de processamento.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE FUTUROS TRABALHOS

Na computação de alto desempenho, a utilização de recursos de *hardware* para execução simultânea de determinadas tarefas tem se popularizado na simulação numérica de escoamentos turbulentos. No presente trabalho, o emprego de diretivas OpenMP juntamente a um breve estudo a cerca do tratamento da memória no que diz respeito a alocação de vetores e matrizes conferiu uma importante “aceleramento” no processamento do código proposto por [Petry, 2002], o qual empregava o esquema temporal de Taylor-Galerkin explícito-iterativo. Desta maneira, a utilização de alocação de memória do tipo estática em detrimento a alocação do tipo dinâmica, juntamente a distribuição de tarefas via OpenMP permitiu que consideráveis reduções no tempo de processamento fossem observadas. A modificação proposta no presente trabalho permitiu que um *speed up* de aproximadamente 5 vezes fosse obtido em discretizações comumente observadas na solução de problemas relacionados à Engenharia do Vento Computacional.

A estratificação do tempo de processamento consumido por diversos setores do código citado permitiu, além de designar as regiões passíveis de paralelização, indicar que mais de 70 % do esforço computacional despendido na caracterização do problema em estudo é destinado à solução do ciclo iterativo. Este resultado, aliado a dificuldade do esquema explícito-iterativo na solução de problemas não confinados advectivo-dominantes, apontou na direção de avaliar-se um novo método temporal para descrever o escoamento sobre corpos rombudos.

A avaliação dos fenômenos intrínsecos ao escoamento sobre um prisma de seção quadrada utilizando o esquema temporal de Taylor-Galerkin explícito-iterativo indicou a presença de fortes oscilações de ordem numérica nas primeiras gravações executadas pelo código. O monitoramento dos campos de velocidade e pressão indicou uma redução significativa destas perturbações com o avanço no tempo, porém sem que a remoção completa dos modos espúrios fosse observada no campo de pressão. Uma razão para a permanência das instabilidades pode ser atribuída ao emprego do tensor de balanço difusivo em contrapartida a utilização de métodos de estabilização. A não utilização destes métodos, os quais inserem efeitos de ordem dissipativa na solução do problema, deve-se essencialmente ao êxito do algoritmo desenvolvido por [Petry, 2002] na solução de escoamentos confinados.

Visando a remoção das perturbações numéricas referentes ao tratamento da pressão, a elevação na ordem da função de interpolação relacionada a esta variável primária foi verificada. Esta alternativa, além de proporcionar um aumento considerável no tempo de processamento,

inseriu instabilidades do tipo “tabuleiro de xadrez” na solução do escoamento sobre o corpo rombudo em estudo. Os resultados obtidos para as configurações *EIPC* e *EIPL* evidenciam a dificuldade de avaliarem-se escoamentos ditos externos advectivo-dominantes.

Diante dos insucessos observados a partir da utilização das alternativas anteriores, a estabilização das perturbações mediante a diagonalização seletiva proposta por Kawahara e Hirano, 1983, foi discutida. Uma nova coleta de valores adimensionalizados de velocidade e pressão indicou uma remoção integral das instabilidades relacionadas diretamente ao campo de pressão a partir do esquema temporal de dois passos. Este resultado ficou evidenciado mediante a análise qualitativa das primeiras gravações executadas e daquelas obtidas após os resultados atingirem na média temporal o regime permanente. Acompanhando este importante resultado, um aumento de aproximadamente 8,5 vezes na velocidade de processamento foi verificado. Esta redução no tempo despendido na solução do problema em estudo deve-se a substituição do ciclo iterativo pela inclusão de um novo passo na solução das equações governantes.

O emprego da configuração *EDP* mediante a utilização de um parâmetro seletivo nulo obteve importantes resultados a partir de malhas com configurações uniformes. A utilização de discretizações espaciais distintas permitiu que os resultados adimensionalizados de velocidade e pressão se aproximassem daqueles obtidos no entorno do obstáculo e na linha central do domínio por [Lyn et al., 1995] e [Duraõ et al., 1988] (experimentais) e por [Sohankar, 2006] e [Braun, 2007] (numéricos).

A multiplicidade de escalas envolvida nesta variedade de escoamentos requer que configurações irregulares sejam utilizadas no intuito de obterem-se resultados independentes de malha. A utilização de malhas não uniformes em problemas tratados mediante a Simulação de Grandes Escalas exige que a variação entre elementos vizinhos ocorra de maneira suave. Porém, mesmo empregando a razão de aspecto indicada na literatura, a utilização de uma disposição *stretched* dos elementos inseriu perturbações numéricas na avaliação do escoamento sobre o prisma de seção quadrada. Neste sentido, visando à remoção destas irregularidades, novas confecções de malhas não uniformes serão testadas juntamente à pesquisa de filtros espaciais voltados a avaliação de malhas irregulares. Esta discussão deverá ser apresentada nos próximos trabalhos relacionados ao grupo de estudo.

Outra alternativa possível de ser averiguada na avaliação de malhas irregulares é a inserção dos termos temporais de ordem mais elevada, a qual foi proposta por [Donea, 1984] e utilizada por [Braun, 2007]. Uma vez que a utilização do esquema temporal explícito de dois passos reduziu de maneira significativa o tempo de processamento, a elevação até a segunda ordem na

expansão de série de Taylor das variáveis primárias não deverá inserir tempos impraticáveis na solução de escoamentos externos, além de possibilitar a supressão de oscilações numéricas advindas de malhas irregulares.

Porém, mesmo com o aparecimento de perturbações ao longo do domínio oriundas da construção não uniforme da malha de elementos finitos, pontos monitorados nas imediações do obstáculo indicaram que o refinamento nesta região figura como capital para que os resultados sejam captados de maneira precisa. Esta indicação fica evidenciada quando resultados envolvendo flutuações da velocidade são observados. Assim, a captura da energia cinética total da turbulência nos primeiros três comprimentos característicos a sotavento do obstáculo permitiram que avaliações bastante acuradas fossem obtidas a partir de malhas não uniformes. Assim, as investigações executadas aproximaram-se bastante daquelas observadas por [Bouris et al., 1999], os quais são responsáveis pelos melhores resultados numéricos bidimensionais publicados na literatura em escoamentos sobre prismas quadrados.

Em futuros trabalhos, a utilização do modelo sub-malha dinâmico também surge como alternativa para avaliar de maneira mais refinada escoamentos sobre corpos rombudos. Sua implementação acarreta na obtenção de funções de proporcionalidade distintas para diferentes regiões de estudo, uma vez que sua obtenção é dependente do espaço e do tempo.

No que diz respeito a reduções no tempo de processamento, a recente aquisição por parte do Centro Nacional de Supercomputação de um *cluster* com configuração bastante superior ao utilizado neste trabalho deverá permitir que um estudo a cerca de novos métodos de paralelismo seja efetuado. Desta maneira, avaliações a cerca da utilização de um paralelismo dito híbrido deverá também ser escopo de novos trabalhos.

Mediante a avaliação isenta de instabilidades obtida para disposições uniformes, a observação de resultados bastante satisfatórios nas proximidades do obstáculo empregando malhas irregulares e com um desempenho “acelerado” computacionalmente em relação à configuração original, novos trabalhos deverão ser desenvolvidos no sentido de incitar uma discussão mais aprofundada do escoamento sobre corpos rombudos. A possibilidade de avaliar corretamente o escoamento sobre elementos topográficos (morros, escarpas, colinas, entre outros) é de grande valia na caracterização do comportamento do vento em fazendas eólicas. Assim, visando observar o comportamento sobre diferentes obstáculos, esforços experimentais deverão ser avaliados paralelamente a simulação numérica do vento. No grupo de estudos no qual este trabalho está inserido, investigações voltadas à simulação numérica do vento utilizando programas comerciais já haviam sido apresentadas em [Piccoli, 2006], [Ludwig, 2007] e [Luz,

2008]. Assim, com a continua evolução das propostas inseridas através do presente trabalho, a utilização desta ferramenta computacional na avaliação de escoamentos externos deverá permitir que importantes análises em problemas relacionados à energia eólica sejam avaliadas.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azevedo, L.R., 1999. “**Análise de Problemas de interação Fluido-Estrutura Usando o Método dos Elementos Finitos com um Acoplamento Monolítico**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Bearman, P.W. e Obasaju, 1982. “A Experimental Study of Pressure Fluctuations on Fixed and Oscillating Square Section Cylinders”, **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 119, pp. 297-321.

Blazek, J., 2001. “**Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications**”, Elsevier, London, England.

Bouris, D. e Bergeles, G., 1999 “2D LES of Vortex Shedding from a Square Cylinder”, **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Vol. 80, pp. 31-46.

Brasil Junior, A.C.P., 2002. “**Turbulência**”, Volume I, Editores: Silva Freire, A.P.; Menut, P.P.M; Su, J., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Braun A.L. e Awruch, A.M., 2003. “Numerical Simulation of the Wind Action on a Long-Span Bridge Deck”, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science And Engineering**, Vol. XXV, pp. 352-363.

Braun A.L. e Awruch, A.M., 2004. “A Segregated Scheme for Turbulent Incompressible Flows Simulations”, **XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2004**, Recife, Brasil, pp. 1-19.

Braun A.L. e Awruch, A.M., 2008. “Finite Element Simulation of the Wind Action Over Bridge Sectional Models: Application to the Guamá River Bridge (Pará State, Brazil)”, **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 44, pp. 105-122.

Braun, A.L., 2007. “**Simulação Numérica na Engenharia do Vento Incluindo Efeitos de Iteração Fluido-Estrutura**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Braun A.L. e Awruch, A.M., 2009. “Aerodynamic and aeroelastic analyses on the CAARC standard tall building model using numerical simulation”, **Computers & Structures**, Vol. 87, pp. 564-581.

Breuer, M., e Pourquie, M., 1996. “First Experiences with LES of Flows past Bluff Bodies” in: **Rodi, W., Bergeles, G. (Ed), Proc. 3rd. Int. Symp. On Engineering Turbulence Modeling and Measurements, Heraklion-Crete**, pp. 177-186.

Brooks, A.N. e Hughes, T.J.R., 1982. “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convective Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations”. **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, Vol. 32, 199-259.

Burbridge, H.P., 1999. “**O Esquema Explícito de Taylor-Galerkin na Simulação Numérica de escoamentos Compressíveis Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos Hexaédricos de Oito Nós**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Chapman, D. R, 1979 “Computational Aerodynamics Development and Outlook”, **AIAA Journal**, Vol. 17, pp. 349-374.

Chou, P.Y., 1945. “On Velocity Correlations and the Solutions of the Equations of Turbulent Fluctuation”, **Quarterly of Applied Mathematics**, Vol. 3, pp. 38-54.

Chung, T. J., 2002. “**Computational Fluid Dynamics**”, Cambridge University Press, New York, USA.

Clark, R.A., Ferziger, J.H. e Reynolds, W.C., 1979. “Evaluation of Sub-Grid Scale Turbulence Models Using an Accurately Simulated Turbulent Flow”, **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 91, pp. 1-16.

Cooks, N. J., 1986. **“The designer’s guide to wind loading of building: Part 1”**, Butterworths, London, England.

Davidov, B.I., 1961. “On the Statistical Dynamics of an Incompressible Turbulent Flow”, **Dokl. Akad. Nauk. SSSR**, Vol. 136, pp. 47.

Davidson, P. A., 2003. **“Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers”**, Oxford University Press, England.

Derickson, R.G., McDiarmid, M., Cochran, B.C. e Peterka, J.A., 2004. “Resolving Difficult Issues of Wind Power Micrositing in Complex Terrain”, **AWEA Global Wind Power Conference**, Chicago, USA.

Deardorff, J.M., 1970. “A Numerical Study of Three-dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Number”, **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 41, pp. 453-480.

Deschamps, C.J., 2002. **“Turbulência”**, Volume I, Editores: Silva Freire, A.P.; Menut, P.P. M e Su, J., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Donea, J., 1984. “A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 20, pp. 101-119, 1984.

Dos Santos, E.D., 2007. **“Análise de Escoamentos Não-Isotérmicos, Incompressíveis, Utilizando Simulação de Grandes Escalas e o Método dos Elementos Finitos”**, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Durao, D., Heitor, M. e Pereira, J., 1988 “Measurements of Turbulent and Periodic Flows Around a Square Cross-Section Cylinder”, **Experiments in Fluids**, Vol. 6, pp. 298-304.

Findikakis, A.N. e Street, R.L., 1979. “An Algebraic Model for Sub-Grid Turbulence in Stratified Flows”, **Journal of the Atmospheric Sciences**, Vol. 36, pp. 1934-1949.

Findikakis, A.N. e Street, R.L., 1982. “Mathematical Description of Turbulent Flows”, **Journal of Hydraulics Division**, ASCE, vol. 108, No.HY8, paper 17265, pp. 887-903.

Fox, R.W. e McDonald, A.T., 2001. “**Introdução à Mecânica dos Fluidos**”, LTC Editora, Rio de Janeiro.

Franca, L.P. e Frey, S., 1992. “Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, Vol. 99, 209-233.

Franca, L.P., Frey, S. e Hughes, T.J.R., 1992. “Stabilizes Finite Element Methods: I. Application to the Advective-Difusive Model”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, Vol. 95, 253-276.

Franca, L.P., 1998. “Preface”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, Vol. 166, 1-2.

Franke, R. e Rodi, W., 1991. “Calculation of Vortex Shedding past a Square Cylinder with Various Turbulence Models”, **Proc. 3rd. Symp. Shear Flows, Tech. Univ. Munich, Springer Berlin**, pp. 189-204.

Fu, S., Launder, D.P. e Tselepidakis, D.P., 1987. “Accommodating the Effects of High Strain Rates in Modelling the Pressure-Strain Correlation”, **UMIST Mech. Eng. Dept. Rep. TFD/87/5**.

Germano, M. Piomelli, U., Moin, P. e Cabot, W.H., 1991. “A dynamic sub-grid-scale eddy viscosity model”, **Physics of Fluids**, A3 (7), 1760-1765.

Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L. e Upson, G.D., 1984. “A Modified Finite Element Method for Solving the Time Dependent, Incompressible Navier-Stokes Equations”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 4, pp. 557-598.

Gresho, P.M. e Sani, R.L., 1999. “**Incompressible Flow and Finite Element Method. Advection-Diffusion and Isothermal Laminar Flow**”, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex, England.

Harlow, F.H. e Nakayama, P.I., 1967. “Turbulence Transport Equations”, **Physics of Fluids**, Vol. 10 (7), 2323.

Hermanns, M., 2002. “Parallel Programming in Fortran 95 using OpenMP”, **School of Aeronautical Engineering**, Madrid, Spain.

Houghton, E.L. e Boswell, R.P., 1969. “**Further Aerodynamics for Engineering Students**”, Edward Arnold, London, England.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P. e Hulbert, G.M., 1989. “A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least Squares Method for Advective Equations”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, Vol. 73, 173-189.

Jones, W.P. e Launder, B.E., 1973. “The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence”, **International Journal of Heat Mass Transfer**, Vol. 16, pp. 1119-1130.

Kato, M. e Launder, B.E., 1993. “The Modeling of Turbulent Flow Around Stationary and Vibrating Square Cylinders”, **Proc. 9th. Symp. Shear Flow**, 10-4-1-6.

Kawahara, M., Hirano, H., Tsubota, K. e Kazuo, I., 1982. “Selective Lumping Finite-Element Method for Shallow-Water Flow”, **International Journal For Numerical Methods in Fluids**, Vol. 2(1), pp. 89-112.

Kawahara, M. e Hirano, H., 1983. “A Finite Element Method for High Reynolds Number Viscous Fluid Flow Using Two Step Explicit Scheme”, **International Journal For Numerical Methods in Fluids**, Vol. 3, pp. 137-163.

Kim, D. Yang, K. e Senda, M., 2004. “Large Eddy Simulation of Turbulent Flows past a Square Cylinder Confined in a Channel”, **Computers & Fluids**, Vol. 33, pp. 81-96.

Launder, B.E. e Spalding, D.B., 1974. “The Numerical Computation of Turbulent Flows” , **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Vol. 3, pp. 269-289.

Launder, B.E., Reece, G.J e Rodi, W., 1975. “Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure”, **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 68, pp. 537-566.

Le, H., Moin, P. e Kim, J., “Direct Simulation of Turbulent Flow Over a Backward-Spacing Step”, **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 330, pp. 349-374.

Leonard, A., 1974. “Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows”, **Advances in Geophysics**, vol. 18A, pp. 237-248.

Lesieur, M., Métais, O. e Comte, P., 2005. “**Large-Eddy Simulation of Turbulence**”, Cambridge University Press, New York, USA.

Lomax, H., Pulliam, T.H. e Zingg, D.W., 1999. “**Fundamentals of Computational Fluid Dynamics**”, Springer, Berlin.

Lilly, D.K., 1992. “A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method”, **Physics of Fluids**, A4 (3), 633-635.

Ludwig, D.E., 2007. “**Avaliação da Influência de uma Turbina Eólica no Escoamento dos Ventos Utilizando a Dinâmica dos Fluidos Computacional**”, Departamento de Engenharia Mecânica, Trabalho de Conclusão, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Lun, Y.F., Mochida, A., Murakami, S., Yoshino, H. e Shirasawa T., 2003. “Numerical Simulation Over Topographic Features by Revised k- ϵ Models”, **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Vol. 91, pp. 231-245.

Luz, J.L., 2008. “**Análise da Influência de uma Turbina Eólica Instalada em um Morro no Escoamento do Vento Utilizando Dinâmica dos Fluidos Computacional**”, Departamento de Engenharia Mecânica, Trabalho de Conclusão, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Lyn, D., Elinav, S., Rodi, W. e Park, J., 1995. “A Laser Doppler Velocimetry Study of Ensemble-Averaged Characteristics of the Turbulent Near Wake of a Square Cylinder”, **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 304, pp. 285-319.

Masuro, J.R., 2009. “**Computação Paralela na Análise de Problemas de Engenharia Utilizando o Método dos Elementos Finitos**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Meneveau, C., Lund, T.S. e Cabot, W., 1996. “A Lagrangean Dynamic Subgrid-Scale Model of Turbulence”, **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 319, pp. 353-385.

Möller, S.V. e Silvestrini, J.H., 2004. “**Turbulência**”, Volume 4, Editores: Möller, S.V. e Silvestrini, J.H., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Murakami, S., 1997. “Current Status and Future Trends in Computational Wind Engineering”, **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, 67/68, pp. 3-34.

Murakami, S., Mochida, A., Kondo, K., Ishida, I. e Tsuchiya, M., 1997. “Development of New k- ϵ Model for Flow and Pressure Fields Around Bluff Body”, **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Vol. 67/68, pp. 169-182.

Murakami, S., 1998. “Overview of Turbulence Models Applied in CWE-1997”, **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Vol. 74/76, pp. 1-24.

Nakamura, Y. e Ohya, Y., 1984. “The Effect of Turbulence on the Mean Flow Past 2D Rectangular Cylinders”, **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 149, pp. 255-273.

Oliveira Jr., J.A.A., 2006. “**Desenvolvimento de um Sistema de Dinâmica dos Fluidos Computacional Empregando o Método de Elementos Finitos e Técnicas de Alto**

Desempenho”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Petry, A.P., 1993. “**Análise Numérica da Iteração Fluido-Estrutura através do Método dos Elementos Finitos**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Petry, A.P., Awruch, A.M., 1997. “Simulação de Escoamentos Turbulentos pelo Método de Elementos Finitos Através da Simulação de Grandes Vórtices”, **ENIEF 97**, Anais, San Carlos de Bariloche, Argentina.

Petry, A.P., 2002. “**Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método de Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Petry, A.P., Awruch, A.M., 2006 “Large Eddy Simulation of Three-Dimensional Turbulent Flows by the Finite Element Method”, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Vol. 28, n. 2, pp. 224-232.

Piccoli, G.L., 2006. “**Análise da Viabilidade de uma Fazenda Eólica Empregando Dinâmica dos Fluidos Computacional**”, Departamento de Engenharia Mecânica, Trabalho de Conclusão, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Popiolek, T.L., Awruch, A.M. e Teixeira, P.R.F, 2006. “Finite Element Analysis of Laminar and Turbulent Flows Using LES and Subgrid-Scale Models”, **Applied Mathematical Modelling**, Vol. 30, n. 2, pp. 177-199.

Popiolek, T.L. e Awruch, A.M., 2006. “Numerical Simulation of Incompressible Flows Using Adaptive Unstructured Meshes and the Pseudo-Compressibility Hypothesis”, **Advances in Engineering Software**, Vol. 37, n. 4, pp. 260-274.

Reddy, J.N. e Gartling, D.K., 2001. “**The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**”, CRC, Boca Raton, Florida, USA.

Sachs, P., 1972. “**Wind Forces in Engineering**”, Pergamon Press, Oxford, England

Schlichting, H. e Gersten, K., 2003. “**Boundary-layer Theory**”, McGraw-Hill, New York, USA.

Scotti, A., Meneveau, C. e Lilly D.K., 1993. “Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids”, **Physics of fluids. A**, Vol. 5(9), pp. 2306-2308.

Shames, I. H., 2003. “**Mecânica dos Fluidos**”, Prentice Hall Brasil, São Paulo, Brasil

She, Z., Chen, S., Doolen, G., Kraichnan, R.H. e Orszag, S.A., 1993. “Reynolds Number Dependence of Isotropic Navier-Stokes”, **Physical Review Letters**, Vol. 70, pp. 3251-3254.

Silveira Neto, A., 2002. “**Turbulência**”, Volume I, Editores: Silva Freire, A.P.; Menut, P.P.M.; Su, J., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Smagorinsky, J., 1963. “General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment”, **Monthly Weather Reviews**, v. 91, pp. 99-164.

Sohankar, A., 2006 “Flow Over a Bluff Body from Moderate to High Reynolds Numbers Using Large Eddy Simulation”, **Computers & Fluids**, Vol. 35, pp. 1154-1168.

Speziale, C.G., Abid, R. e Anderson, E.C., 1990. “A Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near Wall Turbulence”, **AIAA**, Paper 90-1481, Seattle, USA.

Speziale, C.G., Sarkar, S. e Gatski, T.B, 1991. “Modelling the Pressure-Strain Correlation of Turbulence: an Invariant Dynamical System Approach”, **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 227, pp. 245-272.

Vasilyev, O.V. e Lund T.S., 1997. “A General Theory of Discrete Filtering for LES in Complex Geometry”, **Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ.**, pp. 67-82.

Vasilyev, O.V., Lund T.S. e Moin, P., 1998. “A General Class of Comutative Filters for LES on Complex Geometries”, **J. Computational Physics**, Vol. 146, pp. 82-104.

Vreman, B., Geurts, B. e Kuerten, H., 1994. “On the Formulation of the Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model”, **Physics of Fluids A**, Vol. 6, pp. 4057.

Werner, H. e Hengle, H., 1991. “Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow Over and Around a Cube in Plate Channel”, **Proc. 8rd. Symp. On Shear Flows, Munich**, pp. 155.

White, F. M., 2006. “**Fluid Mechanics**”, McGraw-Hill, New York, USA.

Wilcox, D.C., 1998. “Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models”, **AIAA Journal**, Vol. 26(11), pp. 1299-1310.

Wilcox, D.C., 2002. “**Turbulence Modeling for CFD**”, DCW Industries, La Canada, USA.

Xavier, C.M., 2006. “**Análise de Modelos Sub-Malha em Elementos Finitos**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Yoon, K.T., Moon, S.Y., Garcia, S.A., Heard, G.W. e Chung, T.J., 1998. “Flowfield-Dependent Mixed Explicit-Implicit (FDMEI) Methods for High and Low Speed and Compressible and Incompressible Flows”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 151, pp. 75-104.

Yoshizawa, A., 1998. “Eddy-Viscosity-Type-Subgrid-Scale Model with a Variable Smagorinsky Coefficient and its Relationship with the One-Equation Model in Large Eddy Simulation”, **Physics of fluids. A**, Vol. 3(8), pp. 2007-2009.

Zang, Y., Street, R.L. e Koseff, J.R., 1993. “A dynamic Mixed Subgrid Scale Model and its Application to Turbulent Recirculation Flows”, **Physics of Fluids A**, Vol. 5(12).

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. e Nithiarasu P., 2005. “**The Finite Element Method - Volume 3: Fluid Dynamics**”, Butterworth-Heinemann, Oxford, England.

Zinani, F.S.F., 2006. “**Desenvolvimento e Implementação Computacional de Formulações Galerkin Mínimos-Quadrados para Escoamentos Não Newtonianos Sensíveis à Cinemática**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.