Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

SUBÁLGEBRAS COIDEAIS À DIREITA DOS GRUPOS QUÂNTICOS DE TIPO G_2

por

Bárbara Seelig Pogorelsky

Porto Alegre, 24 de julho de 2009.

Tese submetida por Bárbara Seelig Pogorelsky[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Antonio Paques

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Miguel Ferrero

Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (USP)

Prof. Dr. Vladislav Khartchenko (UNAM)

Prof. Dr. Ivan Shestakov (USP)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Agradecimentos

Agradeço à minha família por todo incentivo e toda confiança. Aos meus pais, grandes fontes de carinho, inspiração e orgulho. Ao meu esposo Alexandre, pelo amor, companheirismo e principalmente por ter ido comigo para o México e me acompanhado durante todo este ano que passei lá.

Agradeço ao meu orientador no Brasil, Antonio Paques, e ao meu co-orientador, Miguel Ferrero, pelo incentivo e pela confiança. Ao meu orientador no México, Vladislav Khartchenko, por toda disponibilidade e por ser um exemplo a ser seguido. Aos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em especial Luisa, Alveri, Wagner, Flávia e Alexandre.

Finalmente, agradeço aos amigos e colegas Leandro, Joyce, Cíntia, Rodrigo, Patrícia, Carlos, Lazzarin, Jesus, Edilson, Daiane, Luciane, Thaísa, Daiana, Adriana, Laerte, Rosane, Almeida e todos outros que estiveram presentes.

Resumo

Nesta tese descrevemos as subálgebras coideais à direita que contêm todos elementos group-like dos grupos quânticos multiparâmetro $U_q^+(\mathfrak{g})$ e $U_q(\mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples de tipo G_2, no caso em que o parâmetro principal de quantização q não é raiz da unidade. Se q possui ordem multiplicativa finita t, $t > 4$, $t \neq 6$, a mesma classificação vale para as subálgebras coideais à direita homogêneas da versão multiparâmetro do grupo quântico de Lusztig $u_q(\mathfrak{g})$.

Abstract

In this thesis we describe the right coideal subalgebras containing all group-like elements of the multiparameter quantum groups $U_q^+(\mathfrak{g})$ and $U_q(\mathfrak{g})$, where $\mathfrak{g}$ is a simple Lie algebra of type G_2, while the main parameter of quantization q is not a root of 1. If the multiplicative order t of q is finite, $t > 4$, $t \neq 6$, then the same classification remains valid for homogeneous right coideal subalgebras of the multiparameter version of the small Lusztig quantum group $u_q(\mathfrak{g})$.

Conteúdo

Introdução

Álgebras comódulo sobre uma álgebra de Hopf surgem naturalmente na Teoria de Galois em que ações de álgebras de Hopf são os objetos de Galois; como por exemplo em A. Masuoka e T. Yanai [14], A. Milinski [15], S. Westreich e T. Yanai [21] e T. Yanai [22, 23]. Em particular, o Teorema de Correspondência de Galois para ações em uma álgebra livre fornece uma correspondência um a um entre as subálgebras coideais à direita e as subálgebras livres intermediárias; ver V.O. Ferreira, L.S.I. Murakami, e A. Paques [2]. Além disso, a noção de subálgebras coideais unilaterais também é de importância fundamental na Teoria de Grupos Quânticos: o trabalho de G. Letzter [13] fornece um panorama do uso de subálgebras coideais unilaterais na construção de pares simétricos quânticos, na formação de Harish-Chandra módulos quânticos e na produção de espaços simétricos quânticos.

Recentemente V. K. Kharchenko e A. V. Lara Sagahón [11] forneceram uma classificação completa das subálgebras coideais à direita que contém o coradical $\mathbf{k}[G]$ para o grupo quântico $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$, usando o método de construção da base PBW criado [10]. Como consequência, eles determinaram que a álgebra de Borel quântica $U_q^+(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, contém $(n+1)!$ diferentes subálgebras coideais à direita que incluem o coradical. Pelo mesmo método, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ é uma álgebra de Lie simples de tipo B_n então $U_q^+(\mathfrak{g})$ possui $(2n)!!$ subálgebras coideais à direita que incluem o coradical [12]. Em ambos casos este número coincide com a ordem do grupo de Weyl definido pela álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Estes fatos nos induzem a conjecturar que para uma álgebra de Lie de dimensão finita arbitrária $\mathfrak{g}$ o número de subálgebras coideais à direita que incluem o coradical de $U_q^+(\mathfrak{g})$ coincide com a ordem do grupo de Weyl definido por $\mathfrak{g}$ (ver [12]).

Neste trabalho, usando o mesmo método de construção de base PBW, provamos esta conjectura para o caso em que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples de tipo G_2. Mais precisamente, mostramos que o reticulado de subálgebras coideais à direita que contém o coradical é dado pela figura:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & U_q^+(\mathfrak{g}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle [[x_1,x_2],[x_2,[x_2,x_1]]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [x_1,x_2] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2,[x_2,[x_2,x_1]]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2,[x_2,x_1]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[x_1,x_2],x_2] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2,x_1] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[[x_1,x_2],x_2],x_2] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle x_1 \rangle \arrow[dr, dash] & & \langle x_2 \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{k}[G] &
\end{tikzcd}$$

Nesta figura os elementos representam geradores das subálgebras coideais à direita que contém o coradical (note que cada subálgebra coideal à direita é gerada sobre $\mathbf{k}[G]$ por um único elemento). Se o parâmetro principal de quantização q possui ordem multiplicativa finita t, $t > 4$ e $t \neq 6$, então as subálgebras coideais à direita que contém o coradical do grupo quântico de Lusztig $u_q^+(\mathfrak{g})$ formam o mesmo reticulado.

No último capítulo estudamos ainda as subálgebras coideais à direita que contém o coradical da álgebra de Kac-Moody quântica $U_q(\mathfrak{g})$. Aqui novamente determinamos o reticulado completo para o caso G_2 e concluímos que este grupo quântico possui 60 subálgebras coideais à direita contendo $\mathbf{k}[G]$. No entanto, neste caso ainda não se sabe o significado deste número, mas espera-se uma relação com a álgebra de Lie simples deste mesmo tipo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos as definições e os resultados principais usados no trabalho. Estes resultados já são conhecidos e publicados conforme as referências dadas.

1.1 Álgebra de Hopf

Nesta seção introduziremos os conceitos necessários para definir uma álgebra de Hopf. Estes conceitos são amplamente conhecidos e podem ser encontrados nos livros [17] e [1].

Seja $\mathbf{k}$ um corpo. Denotaremos o produto tensorial sobre $\mathbf{k}$ por simplesmente $\otimes$.

Definição 1.1.1. Uma $\mathbf{k}$-*álgebra* (ou simplesmente álgebra) é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial A com duas aplicações $\mathbf{k}$-lineares, multiplicação $m : A \otimes A \to A$ e unidade $u : \mathbf{k} \to A$, tais que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id_A"] \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\ \mathbf{k} \otimes A \arrow[ur, "u \otimes id_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes \mathbf{k} \arrow[ul, "id_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Note que o primeiro diagrama representa a associatividade da multiplicação e o segundo a existência de unidade de A, dada por $1_A = u(1_{\mathbf{k}})$.

Definição 1.1.2. Sejam V, W $\mathbf{k}$-espaços vetoriais. Definimos uma aplicação $\mathbf{k}$-linear chamada *aplicação twist* $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$.

Definição 1.1.3. Dizemos que uma álgebra A é *comutativa* se em $A \otimes A$ vale $m \circ \tau = m$.

A definição acima equivale a dizer que $ab = ba$ para todos $a, b \in A$, ou seja, coincide com a definição usual de álgebra comutativa.

Definição 1.1.4. Sejam A e B álgebras com multiplicações m_A e m_B e unidades u_A e u_B, respectivamente. Uma aplicação $f : A \to B$ é um *homomorfismo de álgebras* se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{k} \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Dualizando a definição de álgebra obtemos a definição de coálgebra.

Definição 1.1.5. Uma $\mathbf{k}$-*coálgebra* (ou simplesmente coálgebra) é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial C com duas aplicações $\mathbf{k}$-lineares, comultiplicação $\Delta : C \to$

$C \otimes C$ e counidade $\varepsilon : C \to \mathbf{k}$, tais que os seguintes diagramas são comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id_C"] \\
C \otimes C \arrow[r, "id_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\mathbf{k} \otimes C & & C \otimes \mathbf{k} \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

Usaremos a seguinte notação (conhecida como notação de Sweedler) para expressar o coproduto de um elemento $c \in C$:

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2, \quad \Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \ldots \otimes c_{n+1}.$$

Definição 1.1.6. Dizemos que uma coálgebra C é *cocomutativa* se $\tau \circ \Delta = \Delta$.

Definição 1.1.7. Dada uma coálgebra C, um subespaço vetorial $I \subseteq C$ é dito:

1. uma *subcoálgebra* se $\Delta(I) \subseteq I \otimes I$;
2. um *coideal à direita* (respectivamente, à esquerda) se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$ ($\Delta(I) \subseteq C \otimes I$);
3. um *coideal* se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.

Note que se I é um coideal, em geral, I não é um coideal à direita ou à esquerda. Se I é coideal à direita e à esquerda, então I é uma subcoálgebra.

Definição 1.1.8. Sejam C e D coálgebras com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ε_C e ε_D, respectivamente. Uma aplicação $f : C \to D$ é um *homomorfismo de coálgebras* se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbf{k} \end{tikzcd}$$

Definição 1.1.9. Um $\mathbf{k}$-espaço vetorial B é dito uma *biálgebra* se existem aplicações $\mathbf{k}$-lineares $m : B \otimes B \to B, u : \mathbf{k} \to B, \Delta : B \to B \otimes B$ e $\varepsilon : B \to \mathbf{k}$ tais que (B, m, u) é uma álgebra, (B, Δ, ε) é uma coálgebra e vale uma das seguintes condições (equivalentes):

1. Δ e ε são homomorfismos de álgebras,

2. m e u são homomorfismos de coálgebras.

Definição 1.1.10. Um subespaço $I \subseteq B$ é um *biideal* se I é um ideal e um coideal.

Definição 1.1.11. Uma aplicação $f : B \to B'$ é dita um *homomorfismo de biálgebras* se f é simultaneamente um homomorfismo de álgebras e de coálgebras.

Definição 1.1.12. Sejam C uma coálgebra e $c \in C$.

1. c é dito um elemento *group-like* se $\Delta c = c \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 1$. O conjunto de todos elementos group-like de C é denotado por $G(C)$, ou simplesmente por G.

2. Para $g, h \in G(C)$, c é dito (g, h)-*primitivo* se $\Delta c = c \otimes g + h \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 0$. O conjunto de todos elementos (g, h)-primitivos de C é denotado por $P_{g,h}(C)$. Se $C = B$ é uma biálgebra e $g = h = 1$, os elementos de $P(B) = P_{1,1}(B)$ são simplesmente ditos *primitivos*.

Definição 1.1.13. Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, u) uma álgebra. Definimos no conjunto $Hom_{\mathbf{k}}(C, A)$ uma estrutura de álgebra em que a unidade é dada por $u\varepsilon$ e a multiplicação é dada pelo *produto convolução* $*$:

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

para todos $f, g \in Hom_{\mathbf{k}}(C, A)$.

Usando a notação de Sweedler temos:

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2)$$

para todos $f, g \in Hom_{\mathbf{k}}(C, A)$ e $c \in C$.

Definição 1.1.14. Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Dizemos que H é uma *álgebra de Hopf* se existe um elemento $S \in Hom_{\mathbf{k}}(H, H)$ que é o inverso de id_H com relação ao produto convolução $*$, isto é:

$$\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = \sum h_1 S(h_2)$$

para todo $h \in H$. A aplicação S é chamada *antípoda* de H.

Definição 1.1.15. Uma álgebra de Hopf H é dita um *grupo quântico* se H é não-comutativa como álgebra e não-cocomutativa como coálgebra.

Proposição 1.1.16. [1, Proposition 4.2.6] *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então:*

i) $S(hg) = S(g)S(h)$,

ii) $S(1_H) = 1_H$,

iii) $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$,

iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$, *para todos $g, h \in H$.*

As propriedades **i)** e **ii)** significam que S é um antihomomorfismo de álgebras, e as propriedades **iii)** e **iv)** que S é um antihomomorfismo de coálgebras.

Observação 1.1.17. Se H é uma álgebra de Hopf, então o conjunto $G(H)$ dos elementos group-like de H é um grupo. De fato:

1. $1_H \in G(H)$, pois $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $\varepsilon(1_H) = 1_{\mathbf{k}}$.

2. Se $g, h \in G(H)$ então $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh$ e $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h) = 1$, ou seja, $gh \in G(H)$.

3. Dado $g \in G(H)$, temos $g^{-1} = S(g) \in G(H)$ pois, por 1.1.16, $\Delta(S(g)) = S(g) \otimes S(g)$, $\varepsilon(S(g)) = \varepsilon(g) = 1_{\mathbf{k}}$ e pela definição de S temos $S(g)g = gS(g) = \varepsilon(g)1_H = 1_H$.

Definição 1.1.18. Um subespaço $I \subseteq H$ é dito um *ideal de Hopf* se I é um biideal e $S(I) \subseteq I$.

Definição 1.1.19. Uma aplicação $f : H \to H'$ é dita um *homomorfismo de álgebras de Hopf* se é um homomorfismo de biálgebras e $f(S_H(h)) = S_{H'}(f(h))$ para todo $h \in H$, onde S_H e $S_{H'}$ denotam respectivamente as antípodas de H e H'.

Definição 1.1.20. Uma álgebra A é dita uma *H-módulo álgebra (à esquerda)* se:

1. A é um H-módulo (à esquerda) via $h \otimes a \mapsto h \cdot a$

2. $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$

3. $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$

para todos $h \in H, a, b \in A$.

Definição 1.1.21. Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. A *álgebra produto smash* $A\#H$ é a álgebra que coincide com $A\otimes H$ como espaço vetorial e que tem multiplicação dada por

$$(a\#h)(b\#k) = \sum a(h_1 \cdot b)\#h_2k,$$

para todos $a, b \in A$ e $h, k \in H$.

Note que podemos identificar A com $A\#1_H \subseteq A\#H$ e H com $1_A\#H \subseteq A\#H$, e frequentemente denotamos o elemento $a\#h = (a\#1_H)(1_A\#h)$ por ah. Usando esta notação temos $ha = (1_A\#h)(a\#1_H) = \sum(h_1 \cdot a)h_2$.

1.2 Álgebra de Hopf de Caracteres

Definição 1.2.1. Uma função $\chi : G \to \mathbf{k} \setminus \{0\}$ é dita um *caracter* do grupo G se χ é um homomorfismo de grupos.

Definição 1.2.2. Uma álgebra de Hopf H é dita uma *álgebra de Hopf de caracteres* se o grupo G de todos os elementos group-like é comutativo e H é gerada sobre $\mathbf{k}[G]$ por elementos skew-primitivos semi-invariantes, isto é, por elementos $a_i, i \in I$, de H tais que para cada $i \in I$ existem $g_i \in G$ e χ^i um caracter do grupo G tais que:

$$\Delta(a_i) = a_i \otimes 1 + g_i \otimes a_i, \quad g^{-1}a_ig = \chi^i(g)a_i, \ \forall g \in G.$$

Definição 1.2.3. Dizemos que x é uma variável quântica se um elemento group-like $g \in G$ e um caracter χ, que serão denotados g_x e χ^x, estão associados a x.

Seja x_i uma variável quântica associada a a_i. No conjunto $X = \{x_i | i \in I\}$, uma palavra u é um monômio com variáveis em X. Para cada palavra u em X denotamos por g_u o elemento de G obtido de u substituindo cada x_i por g_i. Da mesma maneira denotamos por χ^u o caracter obtido de u

substituindo cada x_i por χ^i. O produto entre duas palavras u, v de X é definido como a justaposição de u e v, ou seja, $u \cdot v = uv$. Definimos um skew-comutador bilinear nas combinações lineares homogêneas de palavras (ou seja, nas combinações lineares de palavras de mesmo grau) pela fórmula

$$[u, v] = uv - \chi^u(g_v)vu, \tag{1.2.1}$$

onde denotamos $\chi^u(g_v)$ por $p(u, v)$ ou simplesmente por p_{uv}. Estes colchetes estão relacionados com o produto através das seguintes identidades:

$$[u \cdot v, w] = p_{vw}[u, w] \cdot v + u \cdot [v, w], \tag{1.2.2}$$

$$[u, v \cdot w] = [u, v] \cdot w + p_{uv}v \cdot [u, w]. \tag{1.2.3}$$

O grupo G age na álgebra livre $\mathbf{k}\langle X\rangle$ por $g^{-1}ug = \chi^u(g)u$, onde u é um monômio arbitrário em X. A skew-álgebra de grupo $G\langle X\rangle$ possui uma estrutura natural de álgebra de Hopf de caracteres dada por:

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i, \quad i \in I, \quad \Delta(g) = g \otimes g.$$

1.3 Super-letras e super-letras duras

Seja H uma álgebra de Hopf de caracteres. Em particular, podemos considerar $H = G\langle X\rangle$, onde $X = \{x_i | i \in I\}$, ou H como sendo a imagem de $G\langle X\rangle$ por um homomorfismo de álgebras de Hopf.

Definição 1.3.1. Seja X um conjunto parcialmente ordenado. Um subconjunto $Y \subseteq X$ é dito um *subconjunto dirigido* se todo par de elementos em Y possui uma cota superior. Dizemos que X é *completamente ordenado* se todo subconjunto dirigido Y possui um supremo.

Definição 1.3.2. A *constituição* de uma palavra u em $G \cup X$, onde G é o grupo dos elementos group-like de H e X é o conjunto das variáveis $\{x_i | i \in$

$I\}$, é uma familia quase-nula de inteiros não-negativos $\{m_x, x \in X\}$ tais que u possui m_x ocorrências de x.

Seja Γ^+ o monóide livre aditivo (comutativo) gerado por X. Dada uma ordem completa arbitrária $>$ no conjunto X, o monóide Γ^+ torna-se completamente ordenado com a seguinte ordem:

$$m_1 x_{i_1} + m_2 x_{i_2} + \ldots + m_k x_{i_k} > m'_1 x_{i_1} + m'_2 x_{i_2} + \ldots + m'_k x_{i_k} \tag{1.3.1}$$

se $x_{i_1} > x_{i_2} > \ldots > x_{i_k}$ em X e o primeiro número não-nulo da esquerda para a direita em $(m_1 - m'_1, m_2 - m'_2, \ldots, m_k - m'_k)$ é positivo. Associamos um grau $D(u) = \sum_{x \in X} m_x x \in \Gamma^+$ a uma palavra u em $G \cup X$, onde $\{m_x | x \in X\}$ é a constituição de u. Se $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in G\langle X \rangle$, com $0 \neq \alpha_i \in \mathbf{k}$, definimos

$$D(f) = max\{D(u_i) | 1 \leq i \leq n\}. \tag{1.3.2}$$

No conjunto de todas palavras em X fixamos a ordem lexicográfica com prioridade da esquerda para a direita, onde o início próprio de uma palavra é considerado maior que a palavra toda.

Definição 1.3.3. Considere um conjunto de relações

$$w_i = f_i, \quad i \in I, \tag{1.3.3}$$

onde w_i é uma palavra em X e f_i é uma combinação linear de palavras menores que w_i. Dizemos que o sistema (1.3.3) é fechado para composições se nenhuma palavra w_i possui algum w_j como subpalavra para $i \neq j$.

Proposição 1.3.4. ([20, Diamond Lemma]) *Se o sistema* (1.3.3) *é fechado para composições, então as palavras que não possuem nenhum w_i como subpalavra formam uma base para a álgebra definida pelas relações* (1.3.3).

Definição 1.3.5. Uma palavra não-vazia u é dita uma *palavra standard* (ou *palavra de Lyndon*, ou *palavra de Lyndon-Shirshov*) se $vw > wv$ para toda decomposição $u = vw$ com v, w não-vazios.

Definição 1.3.6. Uma *palavra não-associativa* é uma palavra onde colchetes $[,]$ (1.2.1) são arranjados de alguma forma para definir como aplicar a multiplicação.

Se $[u]$ denota uma palavra não-associativa, denotamos por u a palavra associativa obtida de $[u]$ removendo os colchetes. Note que cada palavra não-associativa $[u]$ gera uma única palavra associativa u. No entanto a recíproca não é verdadeira, isto é, se temos uma palavra associativa u, em geral podemos obter mais de uma palavra não-associativa usando diferentes alinhamentos de colchetes.

Por exemplo, se $[u] = [[x_1, x_2], x_2]$, temos $u = x_1 x_2^2$. Por outro lado, de $u = x_1 x_2^2$ podemos gerar $[u]_1 = [[x_1, x_2], x_2]$ e $[u]_2 = [x_1, [x_2, x_2]]$.

Definição 1.3.7. O conjunto de *palavras standard não-associativas* é o maior conjunto (denotado SL) que contém todas as variáveis x_i e satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se $[u] = [[v], [w]] \in SL$ então $[v], [w] \in SL$ e $v > w$ são standard.

2. Se $[u] = [[[v_1], [v_2]], [w]] \in SL$ então $v_2 \leq w$.

Teorema 1.3.8. (Teorema de Shirshov, [19, Lemma 2]) *Toda palavra standard u possui um único alinhamento de colchetes tal que a palavra não-associativa $[u]$ é standard.*

Para encontrar o alinhamento de colchetes garantido pelo Teorema de Shirshov, escolhemos os fatores v, w da decomposição não-associativa $[u] = [[v], [w]]$ de forma que v, w sejam palavras standard tais que $u = vw$ e v possua comprimento minimal (ver [20]).

No exemplo anterior vimos que a palavra associativa $u = x_1 x_2^2$ gera $[u]_1 = [[x_1, x_2], x_2]$ e $[u]_2 = [x_1, [x_2, x_2]]$. No entanto, $[u]_2 = [x_1, [x_2, x_2]]$ não é uma palavra não-associativa standard, pois $v = x_1$ e $w = x_2^2$, e w não é uma palavra associativa standard.

Definição 1.3.9. Uma *super-letra* é um polinômio que é uma palavra standard não-associativa, onde os colchetes significam (1.2.1). Uma *super-palavra* é uma palavra em super-letras. Uma *G-super-palavra* é uma super-palavra multiplicada à esquerda por um elemento group-like.

Podemos verificar que $[u] = [x_1, x_2]$ e $[v] = [[x_1, x_2], x_2]$ são super-letras, pois ambas são palavras standard não-associativas. Com isso, os produtos $[v][u][v] = [[x_1, x_2], x_2][x_1, x_2][[x_1, x_2], x_2]$ e $[u][v] = [x_1, x_2][[x_1, x_2], x_2]$ são exemplos de super-palavras. Se $g \in G$ é um elemento group-like de H, concluímos que $g[[x_1, x_2], x_2][x_1, x_2][[x_1, x_2], x_2]$ e $g[x_1, x_2][[x_1, x_2], x_2]$ são G-super-palavras.

Usando o Teorema de Shirshov, toda palavra standard u define uma única super-letra que será denotada por $[u]$. A ordem nas super-letras é definida da maneira natural: $[u] > [v] \Leftrightarrow u > v$.

Definição 1.3.10. Uma super-letra $[u]$ é dita *dura em H* se o seu valor em H não é uma combinação linear de super-palavras de mesmo grau (1.3.2) em super-letras menores que $[u]$ e G-super-palavras de menor grau.

Se a super-letra $[u]$ não é dura em H, diremos que $[u]$ é suave em H. Em geral, é muito difícil decidir se uma super-letra é dura ou suave. Para isto, utilizaremos os seguintes resultados conhecidos:

Proposição 1.3.11. ([6, Corollary 2]) *Uma super-letra $[u]$ é dura em H se e somente se o valor em H da palavra standard u não é uma combinação linear de valores de palavras menores com o mesmo grau (1.3.2) e G-palavras de menor grau.*

Suponhamos por exemplo que estamos numa álgebra de Hopf H em que vale a relação $[x_1, [x_1, x_2]] = 0$, onde $x_1 > x_2$. Desenvolvendo os colchetes obtemos $x_1^2 x_2 - p_{12}(1 + p_{11}) x_1 x_2 x_1 + p_{12}^2 p_{11} x_2 x_1^2 = 0$. Vejamos que a super-letra $[x_1, [[x_1, x_2], x_2]]$ é suave em H. Pela proposição anterior basta ver que

$x_1^2x_2^2$ é uma combinação linear de valores de palavras menores com o mesmo grau. De fato,

$$x_1^2x_2^2 = (p_{12}(1+p_{11})x_1x_2x_1 - p_{12}^2p_{11}x_2x_1^2)x_2 = \alpha x_1x_2x_1x_2 + \beta x_2x_1^2x_2.$$

Logo, $[x_1,[[x_1,x_2],x_2]]$ é suave em H.

Proposição 1.3.12. ([8, Lemma 4.8]) *Seja B um conjunto de super-letras que contém $x_1,\ldots,x_n$. Se cada par $[u],[v] \in B$, $u > v$ satisfaz uma das seguintes condições*

1) $[[u],[v]]$ *não é uma palavra standard não-associativa;*

2) *a super letra $[[u],[v]]$ não é dura em H;*

3) $[[u],[v]] \in B$*;*

então o conjunto B contém todas super-letras duras em H.

Definição 1.3.13. Dizemos que a *altura* $h = h([u])$ de uma super-letra $[u]$ dura em H é o menor número inteiro positivo tal que

1. p_{uu} é uma raiz t-ésima primitiva da unidade e $h = t$ ou $h = tl^r$, onde $l = char(\mathbf{k})$,

2. o valor de $[u]^h$ em H é uma combinação linear de super-palavras de mesmo grau (1.3.2) em super-letras menores que $[u]$ e G-super-palavras de menor grau.

Se não existe tal número, dizemos que a altura de $[u]$ é infinita.

Definição 1.3.14. Uma álgebra $H \subseteq G\langle X\rangle$ é dita *homogênea* se H é graduada por Γ^+, ou seja, $H = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma^+} H_\gamma$ e $H_{\gamma_1}H_{\gamma_2} \subseteq H_{\gamma_1+\gamma_2}$. Dizemos que $h \in H$ é um *elemento homogêneo* se $h \in H_\gamma$ para algum $\gamma \in \Gamma^+$.

Esta definição pode ser naturalmente estendida. Se H é homogênea e $\xi : H \to Y$ é um homomorfismo de álgebras, dizemos que $Im\xi$ é homogênea se $Ker\xi$ é um ideal graduado de H, isto é, $Ker\xi = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma^+}(Ker\xi \cap H_\gamma)$.

Se H é uma álgebra homogênea, podemos desconsiderar as G-super-palavras em 1.3.10, 1.3.11 e 1.3.13.

1.4 Geradores PBW

Definição 1.4.1. Sejam S uma $\mathbf{k}$-álgebra e A uma subálgebra com uma base fixada $\{a_j | j \in J\}$. Um subconjunto totalmente ordenado $W \subseteq S$ é dito um conjunto de *geradores de Poincaré-Birkhoff-Witt de S sobre A* (ou geradores PBW de S sobre A) se existe uma função $h : W \to \mathbb{Z}^+ \cup \infty$, dita função altura, tal que o conjunto de todos produtos

$$a_j w_1^{n_1} w_2^{n_2} \dots w_k^{n_k}, \tag{1.4.1}$$

onde $j \in J$, $w_1 < w_2 < \dots < w_k \in W$, $n_i < h(w_i)$, $1 \leq i \leq k$ é uma base de S. O valor $h(w)$ é dito *altura* de w em W. Se $A = \mathbf{k}$, então chamamos W simplesmente de conjunto de geradores PBW de S.

Definição 1.4.2. Seja W um conjunto de geradores PBW de uma álgebra S sobre uma subálgebra A. Suponhamos que o conjunto de todas palavras em W, como um monóide livre, possui sua própria ordem $\prec$ (isto é, $a \prec b$ implica $cad \prec cbd$ para todas palavras $a, b, c, d \in W$). Uma *palavra líder* de $s \in S$ é a palavra maximal $m = w_1^{n_1} w_2^{n_2} \dots w_k^{n_k}$ que aparece na decomposição de s na base (1.4.1). Um *termo líder* de s é a soma am de todos os termos $\alpha_i a_i m$ que aparecem na decomposição de s na base (1.4.1), onde m é a palavra líder de s.

Teorema 1.4.3. ([6, Theorem 2]) *Seja H uma álgebra de Hopf de caracteres. Os valores de todas super-letras duras em H com a função altura definida em 1.3.13 formam um conjunto de geradores PBW para H sobre* $\mathbf{k}$[G].

Teorema 1.4.4. [10, Theorem 1.1] *Seja H uma álgebra de Hopf de caracteres. Toda subálgebra coideal à direita* $\mathbf{U}$ *que contém todos os elementos group-like de H possui uma base PBW $\mathcal{B}_{\mathbf{U}}$ sobre* $\mathbf{k}[\mathrm{G}]$ *que pode ser estendida a uma base PBW $\mathcal{B}_{H_U}$ de H sobre* $\mathbf{k}[\mathrm{G}]$.

A base PBW $\mathcal{B}_{\mathbf{U}}$ de $\mathbf{U}$ sobre $\mathbf{k}[G]$ dada em 1.4.4 pode ser obtida da base PBW de H dada no Teorema 1.4.3 da maneira descrita a seguir.

Suponho que para uma dada super-letra dura em H, $[u]$, existe um elemento $c \in \mathbf{U}$

$$c = [u]^s + \sum \alpha_i W_i + \sum \beta_j V_j \qquad (1.4.2)$$

onde os W_i's são super-palavras da base começando com super-letras menores que $[u]$, $D(W_i) = sD(u)$, e V_j são G-super-palavras com $D(V_j) < sD(u)$. Se U for uma subálgebra homogênea podemos supor $\beta_j = 0$ para todo j, ou seja, podemos desconsiderar as G-super-palavras. Fixamos um destes elementos com s minimal e denotamos por c_u. Logo, para cada super-letra $[u]$ dura em H temos no máximo um elemento c_u.

Definimos a função altura pela seguinte proposição.

Proposição 1.4.5. ([10, Lemma 4.3]) *Na representação* (1.4.2) *de um determinado elemento c_u, temos $s = 1$, ou $p(u, u)$ é uma raiz t-ésima primitiva da unidade e $s = t$, ou (no caso de característica positiva) $s = t(char\mathbf{k})^r$.*

Se a altura de $[u]$ em H é infinita, então a altura de c_u em $\mathbf{U}$ também é definida como infinita. Se a altura de $[u]$ em H é t e $p(u, u)$ é uma raiz t-ésima primitiva da unidade, então, pela proposição acima, $s = t$ (note que na representação (1.4.2) o número s é menor que a altura de $[u]$). Neste caso, a altura de c_u em $\mathbf{U}$ é definida também como t. Se a característica l é positiva e a altura de $[u]$ em H é tl^r, então definimos a altura de c_u em $\mathbf{U}$ por tl^r/s (logo, em característica zero a altura de c_u em $\mathbf{U}$ é sempre igual à altura de $[u]$ em H).

Proposição 1.4.6. ([10, Proposition 4.4]) *Seja* $\mathbf{U}$ *uma subálgebra coideal à direita. Um elemento $c \in H$ pertence a* $\mathbf{U}$ *se e somente se todos geradores*

PBW de c na base $\mathcal{B}_{H_U}$ pertencem a $\mathcal{B}_{\boldsymbol{U}}$. Em particular, o conjunto $\mathcal{B}_{\boldsymbol{U}}$ de todos elementos c_u escolhidos com a função altura definida acima forma um conjunto de geradores PBW para $\mathbf{U}$ *sobre* $\mathbf{k}[G]$.

1.5 Matriz de Cartan

Definição 1.5.1. Uma *matriz de Cartan generalizada* é uma matriz de números inteiros $C =\| a_{ij} \|$ tal que:

1. $a_{ii} = 2$ para todo i,
2. $a_{ij} \leq 0$ para todos $i \neq j$,
3. $a_{ij} = 0$ se e somente se $a_{ji} = 0$.

Dada uma álgebra de Lie L, podemos construir uma matriz de Cartan generalizada através de seu diagrama de Dynkin. Para isto fazemos

$$\frac{a_{ji}}{a_{ij}} = \frac{d_i}{d_j},$$

onde d_i é o peso do vértice i e $a_{ij}a_{ji}$ é o número de linhas que conectam os vértices i e j. Se os vértices i e j não estão conectados, então $a_{ij} = a_{ji} = 0$.

Por exemplo, a álgebra de Lie de tipo A_3, cujo diagrama de Dynkin é

$$\bigcirc \!-\!\!-\!\!-\! \bigcirc \!-\!\!-\!\!-\! \bigcirc$$

possui matriz de Cartan:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma, a álgebra de Lie de tipo G_2 possui diagrama de Dynkin

$$\bigcirc \equiv\!\equiv \bigcirc$$

e portanto sua matriz de Cartan é da forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.6 Álgebra de Kac-Moody

As definições e todos resultados citados nesta seção podem ser encontrados detalhadamente em [4].

Definição 1.6.1. Uma *realização* de uma matriz complexa $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é uma tripla $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, onde $\mathfrak{h}$ é um espaço vetorial complexo, e $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ satisfazem as seguintes condições:

1. os conjuntos Π e $\Pi^\vee$ são ambos linearmente independentes;

2. $\alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{ij}$ para $i, j = 1, \ldots, n$.

Duas realizações $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ e $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ são ditas isomorfas se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}_1$ tal que $\phi(\Pi^\vee) = \Pi_1^\vee$ e $\phi^*(\Pi_1) = \Pi$.

Para toda matriz $A_{n\times n}$ existe uma única realização $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ a menos de isomorfismo ([4, Proposition 1.1]).

Definição 1.6.2. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz complexa e $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ uma realização de A. Definimos a álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ pelos geradores e_i, f_i, com $i = 1, \ldots, n$ e $\mathfrak{h}$, e pelas relações:

1. $[e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee$,

2. $[h, h'] = 0$,

3. $[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i$,

4. $[h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i$,

onde $h, h' \in \mathfrak{h}$.

Por [4, Theorem 1.2], entre os ideais de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ cuja intersecção com $\mathfrak{h}$ é trivial, existe um único ideal maximal $\mathfrak{r}$.

Definição 1.6.3. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz complexa, $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ uma realização de A e $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ a álgebra de Lie definida em 1.6.2. Definimos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$ como sendo a álgebra quociente

$$\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r},$$

onde $\mathfrak{r}$ é o único ideal maximal de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ cuja intersecção com $\mathfrak{h}$ é trivial. A matriz A é dita matriz de Cartan da álgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$. No caso em que A é uma matriz de Cartan generalizada, dizemos que $\mathfrak{g}(A)$ é uma *álgebra de Kac-Moody*.

A partir deste momento denotaremos as álgebras de Kac-Moody por simplesmente $\mathfrak{g}$.

Toda álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ possui a seguinte decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+,$$

onde $\mathfrak{n}_+$ denota a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $e_1, \ldots, e_n$ e $\mathfrak{n}_-$ denota a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $f_1, \ldots, f_n$.

Definição 1.6.4. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Kac-Moody. Chamamos de subálgebra de Borel a subálgebra de $\mathfrak{g}$ definida por $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$.

1.7 $U_q^+(\mathfrak{g})$,$u_q^+(\mathfrak{g})$

Definição 1.7.1. Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto de variáveis, $C = \| a_{ij} \|$ uma matriz de Cartan generalizada simetrizável pela matriz

$D = diag(d_1, \ldots, d_n)$, isto é, $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$, e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Kac-Moody determinada por C. Supomos que os parâmetros de quantização $p_{ij} = p(x_i, x_j) = \chi^i(g_j)$ são relacionados por

$$p_{ii} = q^{d_i}, \quad p_{ij}p_{ji} = q^{d_i a_{ij}}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{1.7.1}$$

A *quantização multiparâmetro* $U_q^+(\mathfrak{g})$ da subálgebra de Borel $\mathfrak{g}^+$ é uma álgebra de Hopf de caracteres definida pelas seguintes relações (conhecidas como relações de Serre) com skew-comutador (1.2.1) como operação de Lie:

$$[[\ldots[[x_i, x_j], x_j], \ldots], x_j] = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{1.7.2}$$

onde x_j aparece $1 - a_{ji}$ vezes.

Observação 1.7.2. Por [5, Theorem 6.1], os lados esquerdos de cada uma destas relações (1.7.2) são elementos skew-primitivos em $G\langle X\rangle$. Portanto, o ideal gerado por estes elementos é um ideal de Hopf. De fato, se x é um skew-primitivo e $I = HxH$ é o ideal gerado por x, temos:

$$\Delta(x) = x \otimes 1_H + g \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0,$$

para algum $g \in G$. Logo,

$$\begin{aligned}\Delta(hxl) = \Delta(h)\Delta(x)\Delta(l) = \Delta(h)(x \otimes 1)\Delta(l) + \Delta(h)(g \otimes x)\Delta(l) = \\ = h_1xl_1 \otimes h_2l_2 + h_1gl_1 \otimes h_2xl_2\end{aligned}$$

e temos $\Delta(hxl) \in I \otimes H + H \otimes I$ para todos $h, l \in H$. Além disso, como $\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$, fazendo $h = x$ temos

$$\varepsilon(x)1_H = 0 = xS(1_H) + gS(x) = x + gS(x)$$

de onde obtemos $S(x) = g^{-1}x \in I$. Portanto,

$$S(hxl) = S(l)S(x)S(h) \in I$$

para todos $h, l \in H$.

Observação 1.7.3. Se $q \in \mathbf{k}$ não é raiz da unidade e a matriz de Cartan $C = \| a_{ij} \|$ é de tipo finito, então por [11, Lemma 3.1] $U_q^+(\mathfrak{g})$ é uma álgebra homogênea.

Proposição 1.7.4. ([11, Corollary 3.2]) *Se $q \in \mathbf{k}$ não é raiz da unidade e a matriz de Cartan $C = \| a_{ij} \|$ é de tipo finito, então toda subálgebra $\mathbf{U}$ de $U_q^+(\mathfrak{g})$ contendo G, o grupo dos elementos group-like, é homogênea.*

Definição 1.7.5. Se a ordem multiplicativa t de q é finita, isto é, se q é uma raiz t-ésima da unidade, definimos $u_q^+(\mathfrak{g})$ como sendo a álgebra quociente $G\langle X\rangle/\Lambda$, onde Λ é o maior ideal de Hopf em $G\langle X\rangle^{(2)}$ ($G\langle X\rangle^{(2)}$ denota o ideal dos polinômios não comutativos sem termos livres e lineares). Certamente Λ contém todos os elementos skew-primitivos de $G\langle X\rangle^{(2)}$ (pois cada um deles gera um ideal de Hopf). Logo, por 1.7.2, as relações (1.7.2) também valem em $u_q^+(\mathfrak{g})$.

Observação 1.7.6. Como $u_q^+(\mathfrak{g}) = G\langle X\rangle/\Lambda$ e por [9, Lemma 2.2] Λ é um ideal homogêneo, temos que $u_q^+(\mathfrak{g})$ também é uma álgebra homogênea. A diferença neste caso é que não vale a Proposição 1.7.4, isto é, nem toda subálgebra de $u_q^+(\mathfrak{g})$ que contém $\mathbf{k}[G]$ é homogênea.

1.8 Cálculo Diferencial

Definição 1.8.1. A subálgebra gerada por $x_1, \ldots, x_n$ sobre $\mathbf{k}$ contida em $U_q^+(\mathfrak{g})$ (respectivamente, $u_q^+(\mathfrak{g})$) admite um *cálculo diferencial* definido por

$$\partial_i(x_j) = \delta_i^j, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u)v + p(u, x_i)u\partial_i(v),$$

para $x_i \in X$.

Proposição 1.8.2. ([12, Lemma 2.10]) *Seja* $[u] \in \mathbf{k}\langle X\rangle$ *um elemento homogêneo em cada* x_i. *Se* p_{uu} *é uma raiz* t*-ésima primitiva da unidade, então*

$$\partial_i([u]^t) = p(u, x_i)^{t-1} \underbrace{[[u], [[u], \ldots [[u]}_{t-1}, \partial_i([u])] \ldots]].$$

Proposição 1.8.3. (Critério de Milinski-Schneider, ver [16]) *Se um polinômio* $f \in \mathbf{k}\langle X\rangle$ *sem termo livre é tal que* $\partial_i(f) = 0$ *em* $u_q^+(\mathfrak{g})$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *então* $f = 0$ *em* $u_q^+(\mathfrak{g})$.

Definição 1.8.4. Seja S uma subálgebra de $A = \mathbf{k}\langle X\rangle$. Dizemos que S é uma subálgebra diferencial se $\partial_i(s) \in S$ para todo $s \in S$ e todo $x_i \in X$.

Observação 1.8.5. Por [11, Lemma 2.10], sabemos que existe uma correspondência entre as subálgebras coideais à direita homogêneas contendo $\mathbf{k}[G]$ de uma álgebra de Hopf de caracteres H e as subálgebras diferenciais de $A = \mathbf{k}\langle X\rangle$. Toda subálgebra coideal à direita homogênea H contendo $\mathbf{k}[G]$ é da forma $\mathbf{U} = U_A \# \mathbf{k}[G]$, onde $U_A = A \cap \mathbf{U}$.

1.9 $U_q(\mathfrak{g})$,$u_q(\mathfrak{g})$

Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Kac-Moody definida pela matriz de Cartan generalizada $C = \| a_{ij} \|$.

Definição 1.9.1. Consideremos agora um novo conjunto de variáveis $X^- = \{x_1^-, x_2^-, \ldots,\ x_n^-\}$. Suponhamos que um grupo abeliano F, gerado pelos elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ age no espaço linear gerado por X^- de forma que $f_j(x_i^-) = p_{ji}^{-1} x_i^-$, onde p_{ij} são os mesmos parâmetros (1.7.1) que definem $U_q^+(\mathfrak{g})$. As relações (1.7.1) permanecem invariantes se substituímos p_{ij} por p_{ji}^{-1} e q por q^{-1}. Com isto podemos definir a álgebra de Hopf de caracteres $U_q^-(\mathfrak{g})$ por $U_{q^{-1}}^+(\mathfrak{g})$ com os caracteres χ_-^i, $1 \leq i \leq n$ tais que $\chi_-^i(f_j) = p_{ji}^{-1}$.

Podemos estender os caracteres χ^i a $G \times F$ por

$$\chi^i(f_j) := p_{ji} = \chi^j(g_i).$$

De fato, se $\prod_k f_k^{m_k} = 1$ em F, aplicando a x_i^- temos $\prod_k p_{ki}^{-m_k} = 1$, pois $\chi^i(\prod_k f_k^{m_k}) = \prod_k p_{ki}^{-m_k}$. Da mesma maneira, estendemos os caracteres χ_-^i a $G \times F$ por

$$\chi_-^i = (\chi^i)^{-1}$$

No que segue denotamos por H o grupo quociente $(G \times F)/N$, onde N é um subgrupo arbitrário satisfazendo $\chi^i(N) = 1$, $1 \leq i \leq n$. Por exemplo, se os parâmetros de quantificação satisfazem as condições de simetria adicionais $p_{ij} = p_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, como em alguns casos de quantificações conhecidas, então $\chi^i(g_k^{-1} f_k) = p_{ik}^{-1} p_{ki} = 1$, e podemos tomar N como sendo o subgrupo gerado por $g_k^{-1} f_k$, $1 \leq k \leq n$. Neste caso em particular, os grupos H, G, F podem ser identificados.

No caso geral podemos supor, sem perda de generalidade, que $G, F \subseteq H$. Certamente χ^i, $1 \leq i \leq n$ são caracteres de H e H age no espaço gerado por $X \cup X^-$ através destes caracteres e seus inversos.

Definição 1.9.2. Considere a skew-álgebra de grupo $H\langle X \cup X^- \rangle$ como uma álgebra de Hopf de caracteres:

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1_H + g_i \otimes x_i, \quad \Delta(x_i^-) = x_i^- \otimes 1_H + f_i \otimes x_i^-,$$

$$g^{-1} x_i g = \chi^i(g) \cdot x_i, \quad g^{-1} x_i^- g = (\chi^i)^{-1}(g) \cdot x_i^-, \quad g \in H. \tag{1.9.1}$$

Definimos a álgebra $U_q(\mathfrak{g})$ como o quociente de $H\langle X \cup X^- \rangle$ pelas seguintes relações:

$$[[\ldots[[x_i, x_j], x_j], \ldots], x_j] = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

$$[[\ldots[[x_i^-, x_j^-], x_j^-], \ldots], x_j^-] = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

onde x_j e x_j^- aparecem $1 - a_{ji}$ vezes e

$$[x_i, x_j^-] = \delta_i^j(1 - g_i f_i), \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{1.9.2}$$

onde os colchetes estão definidos em $H\langle X \cup X^- \rangle$ pela estrutura de álgebra de Hopf de caracteres como em (1.2.1). Por (1.7.1) e [5, Theorem 6.1], todos polinômios dados pelo lado esquerdo das relações acima são skew-primitivos em $H\langle X \cup X^- \rangle$, logo eles definem um ideal de Hopf de $H\langle X \cup X^- \rangle$, isto é, o homomorfismo natural

$$H\langle X \cup X^- \rangle \to U_q(\mathfrak{g})$$

define uma estrutura de álgebra de Hopf de caracteres em $U_q(\mathfrak{g})$.

Definição 1.9.3. Se q possui ordem multiplicativa finita, então $u_q(\mathfrak{g})$ é definido pelas relações (1.9.2) e $u = 0$, $u \in \Lambda$, $u^- = 0$, $u^- \in \Lambda^-$, onde Λ, Λ^- são os maiores ideais de Hopf em $G\langle X \rangle^{(2)}$ e $F\langle X^- \rangle^{(2)}$, que são os ideais de polinômios não comutativos sem termos livres e lineares de $G\langle X \rangle$ e $F\langle X^- \rangle$, respectivamente.

Observação 1.9.4. Nos casos $U_q(\mathfrak{g})$ e $u_q(\mathfrak{g})$ não estamos mais trabalhando em $G\langle X \rangle$ e sim em $H\langle X \cup X^- \rangle$. Neste contexto, consideraremos como homogêneas as álgebras graduadas por Γ, o grupo aditivo gerado por Γ^+.

Se definimos $D(x_i^-) = -D(x_i) = -x_i$, $D(H) = 0$ (pois desta forma as relações (1.9.2) são homogêneas), por [11] as álgebras $U_q(\mathfrak{g})$ e $u_q(\mathfrak{g})$ são graduadas por Γ, ou seja, são homogêneas.

Proposição 1.9.5. ([11], Corollary 3.3) *Se q não é raiz da unidade e a matriz de Cartan $C = \| a_{ij} \|$ é de tipo finito, então toda subálgebra $\mathbf{U}$ de $U_q(\mathfrak{g})$ contendo H é Γ-homogênea.*

Este resultado não é válido para $u_q(\mathfrak{g})$ quando q é raiz da unidade. Neste caso podem existir subálgebras que contenham H e que não sejam homogêneas.

Por [11], a subálgebra de $U_q(\mathfrak{g})$ gerada por G e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é isomorfa a $U_q^+(\mathfrak{g})$. Analogamente, a subálgebra de $U_q(\mathfrak{g})$ gerada por F e $x_1^-, x_2^-, \ldots, x_n^-$ é isomorfa a $U_q^-(\mathfrak{g})$. Mais ainda, temos a seguinte decomposição (chamada decomposição triangular):

$$U_q(\mathfrak{g}) = U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(\mathfrak{g}).$$

Para o caso $u_q(\mathfrak{g})$ também vale o mesmo resultado:

$$u_q(\mathfrak{g}) = u_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} u_q^+(\mathfrak{g}).$$

Estes são os resultados que necessitaremos para os próximos capítulos.

Capítulo 2

As álgebras $U_q^+(G_2), u_q^+(G_2)$ e seus geradores PBW

Neste capítulo vamos definir e explicitar um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(\mathfrak{g})$ (respectivamente, $u_q^+(\mathfrak{g})$, se $q^t = 1$ para $t > 4$, $t \neq 6$), onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de tipo G_2.

2.1 Definindo $U_q^+(G_2)$, $u_q^+(G_2)$

Seja G_2 a álgebra de Lie definida pela matriz de Cartan:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para descrever $U_q^+(G_2)$ precisamos encontrar as relações (1.7.1) entre os parâmetros de quantização p_{ij} e (1.7.2) entre as variáveis quânticas x_1, x_2. Como vale a relação $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$, temos neste caso $-d_1 = -3d_2$ e podemos supor $d_1 = 3$ e $d_2 = 1$. Obtemos então:

$$p_{11} = q^{d_1} = q^3,$$

$$p_{22} = q^{d_2} = q,$$

$$p_{12}p_{21} = q^{d_i a_{ij}} = q^{-3}.$$

Para obter as relações de Serre (1.7.2) note que $1 - a_{12} = 2$ e $1 - a_{21} = 4$. Logo,

$$[x_1, [x_1, x_2]] = 0, \quad [[[[x_1, x_2], x_2], x_2], x_2] = 0, \tag{2.1.1}$$

pois pela definição x_j aparece $1 - a_{ji}$ vezes.

No caso em que a ordem multiplicativa t de q é finita, assim como na Definição 1.7.5, definimos $u_q^+(G_2)$ como $G\langle x_1, x_2\rangle/\Lambda$, onde Λ é o maior ideal de Hopf em $G\langle x_1, x_2\rangle^{(2)}$, que (recordemos) é o ideal dos polinômios não comutativos sem termos livres e lineares.

Lembramos que cada skew-primitivo de $G\langle x_1, x_2\rangle^{(2)}$ gera um ideal de Hopf, e portanto Λ contém todos estes elementos. Logo, pela Observação 1.7.2 valem as relações (2.1.1) em $u_q^+(G_2)$.

No que segue supomos $q^6 \neq 1$ e $q^4 \neq 1$.

2.2 Super-letras duras em $U_q^+(G_2)$, $u_q^+(G_2)$

Antes de enunciar a próxima proposição faremos alguns cálculos preparatórios que serão necessários para sua demonstração. Usando (1.2.1), as relações em (2.1.1) podem ser escritas como

$$x_1x_2^4 + a_1x_2x_1x_2^3 + a_2x_2^2x_1x_2^2 + a_3x_2^3x_1x_2 + a_4x_2^4x_1 = 0, \tag{2.2.1}$$

$$x_1^2x_2 + b_1x_1x_2x_1 + b_2x_2x_1^2 = 0, \tag{2.2.2}$$

onde

$$a_1 = -p_{12}p_{22}^{[4]}, \quad a_2 = p_{12}^2p_{22}p_{22}^{[3]}(p_{22}^2+1), \quad a_3 = -p_{12}^3p_{22}^3p_{22}^{[4]}, \quad a_4 = p_{12}^4p_{22}^6, \tag{2.2.3}$$

$$b_1 = -p_{12}(1+p_{11}), \quad b_2 = p_{12}^2p_{11},$$

com $p^{[n]} = 1 + p + ... + p^{n-1}$. Note que supomos $q^4 \neq 1$ e $q^6 \neq 1$ para que os coeficientes explicitados em (2.2.3) não sejam nulos.

Multiplicamos (2.2.1) à esquerda por x_1 e (2.2.2) à direita por x_2^3. A diferença obtida entre estas duas relações gera uma nova relação

$$(a_1 - b_1)x_1x_2x_1x_2^3 = -a_2x_1x_2^2x_1x_2^2 - a_3x_1x_2^3x_1x_2 - a_4x_1x_2^4x_1 + b_2x_2x_1^2x_2^3. \quad (2.2.4)$$

Agora multiplicamos (2.2.1) à esquerda por $(a_1 - b_1)x_1x_2$, e (2.2.4) à direita por x_2. Novamente a diferença fornece uma nova relação

$$\{a_1(a_1 - b_1) - a_2\}x_1x_2^2x_1x_2^3 = \{a_3 - a_2(a_1 - b_1)\}x_1x_2^3x_1x_2^2$$

$$+\{a_4 - a_3(a_1 - b_1)\}x_1x_2^4x_1x_2 - a_4(a_1 - b_1)x_1x_2^5x_1 - b_2x_2x_1^2x_2^4. \quad (2.2.5)$$

Da mesma maneira, se multiplicamos (2.2.2) à direita por $(a_1 - b_1)x_1x_2^3$, e (2.2.4) à esquerda por x_1, a diferença entre as relações obtidas após a substituição de todas subpalavras $x_1^2x_2$ por $-b_1x_1x_2x_1 - b_2x_2x_1^2$ define uma nova relação

$$(a_2b_1 - \{b_1(a_1 - b_1) + b_2\}b_1)x_1x_2x_1x_2x_1x_2^2 = \{b_1(a_1 - b_1) + b_2\}b_2x_1x_2^2x_1^2x_2^2$$

$$-a_3b_1x_1x_2x_1x_2^2x_1x_2 - a_4b_1x_1x_2x_1x_2^3x_1 + W. \quad (2.2.6)$$

onde W é uma combinação linear de palavras com primeira letra x_2.

Agora podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 2.2.1. *Todas as super-letras duras em* $U_q^+(G_2)$ (*respectivamente,* *em $u_q^+(G_2)$) estão contidas na seguinte lista:*

$$\begin{aligned}
[A] &= x_1, \\
[B] &= [x_1, x_2], \\
[C] &= [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]], \\
[D] &= [[x_1, x_2], x_2], \\
[E] &= [[[x_1, x_2], x_2], x_2], \\
[F] &= x_2.
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Demonstração. Para provar esta proposição veremos que este conjunto satisfaz as condições da Proposição 1.3.12, isto é, para todo par $([X], [Y])$ neste conjunto tal que $X > Y$, a palavra não-associativa $[[X], [Y]]$ pertence a este conjunto, ou não é uma palavra standard não-associativa, ou define uma super-letra suave em $U_q^+(G_2)$. Se uma destas 3 possibilidades é satisfeita para todo par possível, então a Proposição 1.3.12 prova que todas as super-letras duras em $U_q^+(G_2)$ estão contidas na lista (2.2.7).

Temos 15 possibilidades. Em 4 casos $[[A], [F]] = [B]$, $[[B], [D]] = [C]$, $[[B], [F]] = [D]$ e $[[D], [F]] = [E]$. Em 5 outros casos ($[[A], [B]]$, $[[A], [C]]$, $[[A], [D]]$, $[[A], [E]]$ e $[[E], [F]]$) a palavra não-associativa é suave pela Proposição 1.3.11, pois a palavra associativa obtida omitindo os colchetes contém subpalavras $x_1 x_2^4$ ou $x_1^2 x_2$, e portanto pelas relações (2.2.1) e (2.2.2) é uma combinação linear de palavras menores em $U_q^+(G_2)$. Em dois casos, $[[C], [E]]$ e $[[C], [F]]$, a palavra não é standard como palavra não-associativa. Restam então apenas 4 casos a serem considerados:

- $[[D], [E]]$: a relação (2.2.5) mostra que a palavra DE é uma combinação linear de palavras menores em $U_q^+(G_2)$. Logo, pela Proposição 1.3.11, a super-letra é suave.

- $[[B], [C]]$: como $BC = (x_1 x_2)^3 x_2$, a relação (2.2.6) mostra que a palavra BC é uma combinação linear de palavras menores. Outra vez pela

Proposição 1.3.11 obtemos que a super-letra é suave.

- $[[B],[E]]$: neste caso $BE = x_1x_2x_1x_2^3$, e usamos a relação (2.2.4).

- $[[C],[D]]$: multiplicamos a relação (2.2.6) à direita por $(a_1 - b_1)x_2$, e (2.2.4) à esquerda por $(a_2b_1 - \{b_1(a_1-b_1)+b_2\}b_1)x_1x_2$. O termo líder da diferença é igual a

$$\{a_3b_1(a_1-b_1) - a_2(a_2b_1 - \{b_1(a_1-b_1)+b_2\}b_1)\}x_1x_2x_1x_2^2x_1x_2^2$$

$$= -p_{12}^5p_{22}^5(1+p_{22}^3)(1+p_{22}^2)CD.$$

Logo, CD também é uma combinação linear de palavras menores.

Então, pela Proposição 1.3.12, o conjunto $\{[A],[B],[C],[D],[E],[F]\}$ contém todas as super-letras duras em $U_q^+(G_2)$.

Como $u_q^+(G_2)$ é imagem homomorfa de $U_q^+(G_2)$, todas as super-letras suaves em $U_q^+(G_2)$ são suaves em $u_q^+(G_2)$. Concluímos que a lista (2.2.7) também contém todas as super-letras duras em $u_q^+(G_2)$. $\square$

É importante ressaltar que o resultado acima foi provado por V. K. Kharchenko. Não indicamos referência pois o mesmo nunca foi publicado. A seguir terminaremos a prova de que as super-letras duras determinadas nesta proposição formam realmente uma base PBW para $U_q^+(G_2)$.

2.3 Tabela de derivadas de $U_q^+(G_2)$, $u_q^+(G_2)$

Pela Definição 1.8.1, a subálgebra $A = \mathbf{k}\langle x_1, x_2\rangle$ de $U_q^+(G_2)$ (respectivamente, $u_q^+(G_2)$) admite um cálculo diferencial

$$\partial_i(x_j) = \delta_i^j, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u)\cdot v + p(u,x_i)u\cdot\partial_i(v) \qquad (2.3.1)$$

para $i = 1, 2$.

Pela Observação 1.8.5, sabemos que as subálgebras coideais à direita homogêneas contendo $\mathbf{k}[G]$ são da forma $\mathbf{U} = U_A \# \mathbf{k}[G]$, onde $U_A = A \cap \mathbf{U}$ é uma subálgebra diferencial de $A = \mathbf{k}\langle x_1, x_2 \rangle$ e G é o conjunto de todos elementos group-like. Logo, conhecendo as subálgebras diferenciais podemos descrever as subálgebras coideais à direita homogêneas de $U_q^+(G_2)$ e de $u_q^+(G_2)$ que contêm $\mathbf{k}[G]$.

Usando as fórmulas (2.3.1) temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.1. *As derivadas dos elementos da lista* (2.2.7) *estão dadas na figura 2.1.*

	∂_1	∂_2
$[A]$	1	0
$[B]$	$(1-q^{-3})x_2$	0
$[C]$	$q^2(1-q^{-3})^2 x_2[D] + p_{21}(1-q^{-3})(q^3-q^2-q)[E]$	0
$[D]$	$(1-q^{-3})(1-q^{-2})x_2^2$	0
$[E]$	$(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})x_2^3$	0
$[F]$	0	1

Figura 2.1: Tabela de Derivadas

Demonstração. Como $[A] = x_1$ e $[F] = x_2$, pela definição, $\partial_1([A]) = 1$, $\partial_2([A]) = 0$, $\partial_1([F]) = 0$, $\partial_2([F]) = 1$.

Para $[B]$ temos $[B] = [x_1, x_2] = x_1x_2 - p_{12}x_2x_1$. Usando (2.3.1),

$$\begin{aligned}\partial_1([B]) &= \partial_1(x_1x_2) - p_{12}\partial_1(x_2x_1) = \\ &= \partial_1(x_1)x_2 + p_{11}x_1\partial_1(x_2) - p_{12}(\partial_1(x_2)x_1 + p_{21}x_2\partial_1(x_1)) = \\ &= x_2 - p_{12}p_{21}x_2 = (1-q^{-3})x_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_2([B]) &= \partial_2(x_1x_2) - p_{12}\partial_2(x_2x_1) = \\ &= \partial_2(x_1)x_2 + p_{12}x_1\partial_2(x_2) - p_{12}(\partial_2(x_2)x_1 + p_{22}x_2\partial_2(x_1)) = \\ &= p_{12}x_1 - p_{12}x_1 = 0.\end{aligned}$$

Para $[D]=[[x_1,x_2],x_2]=[[B],x_2]=[B]x_2-p_{12}p_{22}x_2[B]$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_1([D]) &= \partial_1([B]x_2)-p_{12}p_{22}\partial_1(x_2[B])=\\
&= \partial_1([B])x_2+p_{11}p_{21}[B]\partial_1(x_2)-p_{12}p_{22}(\partial_1(x_2)[B]+p_{21}x_2\partial_1([B]))=\\
&= (1-p_{12}p_{21})x_2^2+0-0-p_{12}p_{22}p_{21}(1-p_{12}p_{21})x_2^2=\\
&= (1-p_{12}p_{22}p_{21})(1-p_{12}p_{21})x_2^2=(1-q^{-3})(1-q^{-2})x_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2([D]) &= \partial_2([B]x_2)-p_{12}p_{22}\partial_2(x_2[B])=\\
&= \partial_2([B])x_2+p_{12}p_{22}[B]\partial_2(x_2)-p_{12}p_{22}(\partial_2(x_2)[B]+p_{22}x_2\partial_2([B]))=\\
&= 0+p_{12}p_{22}[B]-p_{12}p_{22}[B]-0=0.
\end{aligned}$$

Novamente, para $[E]=[[[x_1,x_2],x_2],x_2]=[[D],x_2]=[D]x_2-p_{12}p_{22}^2x_2[D]$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_1([E]) &= \partial_1([D]x_2)-p_{12}p_{22}^2\partial_1(x_2[D])=\\
&= \partial_1([D])x_2+p_{11}p_{21}^2[D]\partial_1(x_2)-p_{12}p_{22}^2(\partial_1(x_2)[D]+p_{21}x_2\partial_1([D]))=\\
&= (1-p_{12}p_{22}^2p_{21})(1-p_{12}p_{22}p_{21})(1-p_{12}p_{21})x_2^3=\\
&= (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})x_2^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2([E]) &= \partial_2([D]x_2)-p_{12}p_{22}^2\partial_2(x_2[D])=\\
&= \partial_2([D])x_2+p_{12}p_{22}^2[D]\partial_2(x_2)-p_{12}p_{22}^2(\partial_2(x_2)[D]+p_{22}x_2\partial_2([D]))=\\
&= 0+p_{12}p_{22}^2[D]-p_{12}p_{22}^2[D]-0=0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $[C]=[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]]=[B][D]-p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2[D][B]$

temos

$$\begin{aligned}\partial_1([C]) &= \partial_1([B][D]) - p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2\partial_1([D][B]) = \\ &= \partial_1([B])[D] + p_{11}p_{21}[B]\partial_1([D]) - \\ &- p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2(\partial_1([D])[B] + p_{11}p_{21}^2[D]\partial_1([B])) = \\ &= (1-p_{12}p_{21})x_2[D] + p_{11}p_{21}(1-p_{12}p_{22}p_{21})(1-p_{12}p_{21})[B]x_2^2 - \\ &- p_{12}p_{22}^2(1-p_{12}p_{22}p_{21})(1-p_{12}p_{21})x_2^2[B] - p_{21}p_{22}^2(1-p_{12}p_{21})[D]x_2.\end{aligned}$$

Note que os elementos $[D]x_2$ e $[B]x_2^2$ não são elementos da base, pois $[B] > x_2$ e $[D] > x_2$. Para escrever $\partial_1([C])$ na base PBW, usamos

$$[E] = [D]x_2 - p_{12}p_{22}^2x_2[D],$$

$$[D] = [B]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[B],$$

de onde obtemos

$$[D]x_2 = [E] + p_{12}p_{22}^2x_2[D],$$

$$[B]x_2^2 = [D]x_2 + p_{12}p_{22}x_2[B]x_2 = [E] + p_{12}p_{22}(1+p_{22})x_2[D] + p_{12}^2p_{22}^2x_2^2[B].$$

Usando estas relações obtemos finalmente

$$\begin{aligned}\partial_1([C]) &= (1-p_{12}p_{21})x_2[D] + p_{11}p_{21}(1-p_{12}p_{22}p_{21})(1-p_{12}p_{21})([E] + \\ &+ p_{12}p_{22}(1+p_{22})x_2[D] + p_{12}^2p_{22}^2x_2^2[B]) - \\ &- p_{12}p_{22}^2(1-p_{12}p_{22}p_{21})(1-p_{12}p_{21})x_2^2[B] - p_{21}p_{22}^2(1-p_{12}p_{21})([E] + \\ &+ p_{12}p_{22}^2x_2[D]) = (1-p_{12}p_{21})x_2[D](1+p_{22}(1+p_{22})(1-p_{12}p_{22}p_{21}) - \\ &- p_{22}) + p_{21}(1-p_{12}p_{21})[E](p_{11}(1-p_{12}p_{22}p_{21}) - p_{22}^2) + \\ &+ p_{12}p_{22}^2(1-p_{12}p_{22}p_{21})(1-p_{12}p_{21})x_2^2[B](p_{12}p_{11}p_{21} - 1) = \\ &= q^2(1-q^{-3})^2x_2[D] + p_{21}(1-q^{-3})(q^3-q^2-q)[E],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_2([C]) &= \partial_2([B][D]) - p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2\partial_2([D][B]) = \\ &= \partial_2([B])[D] + p_{12}p_{22}[B]\partial_2([D]) - p_{12}p_{22}^2(\partial_2([D])[B]+ \\ &+ p_{12}p_{22}^2[D]\partial_2([B])) = 0+0-0-0 = 0.\end{aligned}$$

□

2.4 Os geradores PBW de $U_q^+(G_2)$

Nesta seção encontraremos elementos que formam uma base PBW para $U_q^+(G_2)$ e suas respectivas alturas.

Lema 2.4.1. *Para* $[A],[B],[C],[D],[E],[F]$ *da lista* (2.2.7), *temos* $p(A,A) = q^3$, $p(B,B) = q$, $p(C,C) = q^3$, $p(D,D) = q$, $p(E,E) = q^3$ *e* $p(F,F) = q$.

Demonstração. Como $[A] = x_1$ e $[F] = x_2$ temos claramente $p(A,A) = p_{11} = q^3$ e $p(F,F) = p_{22} = q$. Para $[B] = [x_1, x_2]$ temos

$$p(B,B) = p(x_1x_2, x_1x_2) = p(x_1x_2, x_1)p(x_1x_2, x_2) = p_{11}p_{21}p_{12}p_{22} = q^3q^{-3}q = q.$$

Usando que $[C] = [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]$, obtemos

$$\begin{aligned}p(C,C) &= p(x_1x_2x_1x_2x_2, x_1x_2x_1x_2x_2) = p(x_1x_2x_1x_2^2, x_1)^2p(x_1x_2x_1x_2^2, x_2)^3 = \\ &= p_{11}^4p_{21}^6p_{12}^6p_{22}^9 = q^{12}q^{-18}q^9 = q^3.\end{aligned}$$

Para $[D] = [[x_1, x_2], x_2]$ temos

$$\begin{aligned}p(D,D) &= p(x_1x_2x_2, x_1x_2x_2) = p(x_1x_2^2, x_1)p(x_1x_2^2, x_2)^2 = \\ &= p_{11}p_{21}^2p_{12}^2p_{22}^4 = q^3q^{-6}q^4 = q.\end{aligned}$$

Analogamente, $[E] = [[[x_1, x_2], x_2], x_2]$ e

$$\begin{aligned} p(E, E) &= p(x_1x_2x_2x_2, x_1x_2x_2x_2) = p(x_1x_2^3, x_1)p(x_1x_2^3, x_2)^3 = \\ &= p_{11}p_{21}^3p_{12}^3p_{22}^9 = q^3q^{-9}q^9 = q^3. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.2. *Se q não é raiz da unidade, então os valores em $U_q^+(G_2)$ das super-letras*

$$\begin{aligned} [A] &= x_1, \\ [B] &= [x_1, x_2], \\ [C] &= [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]], \\ [D] &= [[x_1, x_2], x_2], \\ [E] &= [[[x_1, x_2], x_2], x_2], \\ [F] &= x_2, \end{aligned}$$

formam um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(G_2)$ sobre $\mathbf{k}[G]$, e cada super-letra possui altura infinita. Se supomos $x_1 > x_2$, então $A > B > C > D > E > F$.

Demonstração. Primeiro vejamos que todas estas super-letras são não-nulas. Para os casos $[A], [B], [D], [E], [F]$ temos que nenhuma destas super-letras é nula em $U_q^+(G_2)$ pois todas possuem grau menor que 2 para x_1 e menor que 4 para x_2, logo não satisfazem as relações dadas por (2.1.1). Falta analisar a super-letra $[C]$, que possui grau (2,3). Se $[C] = 0$ em $U_q^+(G_2)$, então $[C] = 0$ na álgebra definida apenas pela primeira relação dada em eqrefrel. Mas, pela Definição 1.3.3 esta álgebra é fechada para composições. Como a palavra $C = x_1x_2x_1x_2^2$ não possui a subpalavra $x_1^2x_2$, pela Proposição 1.3.4, temos $[C] \neq 0$.

Uma super-letra $[u]$ é dura em $U_q^+(G_2)$ se o seu valor em $U_q^+(G_2)$ não é uma combinação linear de super-palavras de mesmo grau (1.3.2) em super-letras meno-res que $[u]$. Note que basta verificar que $[u]$ não é combinação linear de super-palavras de mesmo grau (1.3.2) em super-letras duras menores que $[u]$. De fato, uma super-letra suave $[u]$ é uma combinação linear

$$[u] = \sum_i \alpha_i [v_{i_1}][v_{i_2}] \dots [v_{i_k}]$$

onde $[v_{i_j}] < [u]$ para todos i, j e o grau de $[v_{i_1}][v_{i_2}] \dots [v_{i_k}]$ é o mesmo grau de $[u]$. Se uma das super-letras $[v_{i_j}]$ é suave, podemos substituir

$$[v_{i_j}] = \sum_l \beta_l [w_{l_1}][w_{l_2}] \dots [w_{l_m}]$$

onde $[w_{l_n}] < [v_{i_j}]$ para todos l, n e o grau de $[w_{l_1}][w_{l_2}] \dots [w_{l_m}]$ é o mesmo grau de $[v_{i_j}]$. Então temos $[w_{l_n}] < [v_{i_j}] < [u]$ e o grau de $[w_{l_n}]$ é menor ou igual ao grau de $[v_{i_j}]$ que é menor ou igual ao grau de $[u]$. Mas temos apenas um número finito de super-letras menores que $[u]$ com grau menor ou igual ao grau de $[u]$, então este processo tem que terminar. Logo, podemos supor que todos $[v_{i_j}]$ são duros em $U_q^+(G_2)$, após fazer as substituições necessárias.

Agora vejamos que todas super-letras da lista (2.2.7) são duras. Como $[F]$ é a menor super-letra da lista, não pode ser escrita como uma combinação linear não-vazia de super-palavras em super-letras duras menores. Logo, $[F]$ é dura. A próxima super-letra da lista é $[E]$, que possui grau $(1, 3)$. $[E]$ também não pode ser escrita como combinação linear não-vazia de super-palavras em super-letras duras menores, pois a única é $[F]$ que possui grau $(0, 1)$. Da mesma forma, a super-letra $[D]$ possui grau $(1, 2)$, e este grau não é combinação dos graus de $[E]$ e $[F]$. Novamente, analisando os graus de $[C]$, $[B]$ e $[A]$ (que são $(2, 3)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$), vemos que $[A], [B], [C], [D], [E]$ e $[F]$ são super-letras duras.

Como as super-letras da lista (2.2.7) são todas super-letras duras em

$U_q^+(G_2)$, pelo Teorema 1.4.3, elas formam um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(G_2)$ sobre $\mathbf{k}[G]$. Falta apenas ver que todas as alturas são infinitas.

Pelo Lema 2.4.1, sabemos que para toda super-letra dura $[u]$ temos que $p(u,u) = q$ ou $p(u,u) = q^3$. Mas estamos supondo que q não é raiz da unidade. Então $p(u,u)$ não é raiz t-ésima primitiva da unidade para nenhum t e pela Definição 1.3.13 temos $h([u])$ infinita. $\square$

2.5 O caso $u_q^+(G_2)$

Nesta seção veremos que $U_q^+(G_2)$ e $u_q^+(G_2)$ possuem a mesma base PBW, porém seus elementos possuem alturas distintas.

Antes de irmos para o próximo lema, faremos algumas considerações que serão usadas para demonstrá-lo. Sabemos da demonstração do Teorema 2.4.2 que uma super-letra $[u]$ é dura se o seu valor em H não é uma combinação linear de super-palavras de mesmo grau (1.3.2) em super-letras duras menores que $[u]$. Também sabemos da Proposição 2.2.1 que todas super-letras duras em $u_q^+(G_2)$ pertencem a $\{[A],[B],[C],[D],[E],[F]\}$.

Como a super-letra $[[C],[F]]$ não é dura, ela é uma combinação linear de super-palavras de mesmo grau em super-letras duras menores que $[[C],[F]]$, que são $[D]$, $[E]$ e $[F]$. O grau de $[[C],[F]]$ é $(2,4)$, a a única combinação possível de $[D]$, $[E]$ e $[F]$ com grau $(2,4)$ é $[D]^2$. Concluímos que

$$[[C],[F]] = \alpha[D]^2, \quad \alpha \in \mathbf{k}. \tag{2.5.1}$$

Da mesma forma, $[[C],[E]]$ não é dura e possui grau $(3,6)$, logo,

$$[[C],[E]] = \beta[D]^3, \quad \beta \in \mathbf{k}. \tag{2.5.2}$$

Da mesma maneira vejamos que

$$[[B],[C]] = [[C],[D]] = [[D],[E]] = 0. \tag{2.5.3}$$

A super-letra $[[B],[C]]$ não é dura e possui grau $(3,4)$. Mas não existe nenhuma combinação de $[C]$, $[D]$, $[E]$ e $[F]$ (as super-letras duras menores que $[[B],[C]]$) com este grau. Portanto, obtemos $[[B],[C]] = 0$. O mesmo método pode ser usado para obter $[[C],[D]] = [[D],[E]] = 0$.

Lema 2.5.1. *Seja $[u]$ uma super-letra da lista* (2.2.7). *Então*

$$\underbrace{[[u],[[u],\ldots[[u]}_{l},\partial_i([u])]\ldots]] = 0,$$

para $l = 1$ se $[u] \in \{[A],[E],[F]\}$, $l = 2$ se $[u] = [C]$, e $l = 3$ se $[u] \in \{[B],[D]\}$.

Demonstração. Inicialmente consideramos $[u] = [A] = x_1$. Neste caso temos $[[A],\partial_1([A])] = [x_1, 1] = 0$.

Se $[u] = [B]$, então

$$[[B],\partial_1([B])] = (1-q^{-3})[[B],x_2] = (1-q^{-3})[D],$$

$$[[B],[D]] = [C].$$

Como por (2.5.3) temos $[[B],[C]] = 0$, obtemos a igualdade desejada para $l = 3$.

No caso $[u] = [C]$, usando (2.5.1), (2.5.3), (2.5.2) e (1.2.3) temos

$$[[C],\partial_1([C])] = \alpha[[C],x_2]\cdot[D] + \beta x_2\cdot[[C],[D]] + \gamma[[C],[E]] = \delta[D]^3,$$

$$[[C],[D]^3] = \varepsilon[[C],[D]]\cdot[D]^2 + \theta[D]\cdot[[C],[D]]\cdot[D] + \lambda[D]^2\cdot[[C],[D]] = 0,$$

com $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\theta,\lambda \in \mathbf{k}$.

Se $[u]=[D]$, então

$$[[D],x_2]=[E],\quad [[D],[E]]=0,$$

e de (1.2.3) obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}[[D],[[D],x_2^2]] &= [[D],[[D],x_2]\cdot x_2]+[[D],\alpha x_2\cdot[[D],x_2]] = \\ &= [[D],[E]x_2]+[[D],\alpha x_2[E]] = \\ &= [E]\cdot[[D],x_2]+\beta[[D],[E]]\cdot x_2+\alpha x_2\cdot[[D],[E]]+ \\ &+ \gamma[[D],x_2]\cdot[E]=\delta[E]^2,\end{aligned}$$

com $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{k}$ e

$$[[D],[E]^2]=[E]\cdot[[D],[E]]+\varepsilon[[D],[E]]\cdot[E]=0,$$

com $\varepsilon\in\mathbf{k}$, de onde obtemos

$$[[D],[[D],[[D],\partial_1([D])]]]=0.$$

Para $[u]=[E]$ temos

$$[[E],x_2]=0,$$

e de (1.2.3) segue que

$$[[E],x_2^3]=[[E],x_2]\cdot x_2^2+\alpha x_2\cdot[[E],x_2]\cdot x_2+\beta x_2^2\cdot[[E],x_2]=0,$$

com $\alpha,\beta\in\mathbf{k}$. Logo, $[[E],\partial_1([E])]=0$.

Nossa última possibilidade é $[u]=[F]=x_2$. Neste caso,

$$[[F],\partial_2([F])]=[x_2,1]=0.$$

Falta apenas ver que

$$[[u], \partial_2([u])] = 0$$

para $[u] \in \{[A], [B], [C], [D], [E]\}$ e

$$[[F], \partial_1([F])] = 0.$$

Mas isto é óbvio, pois temos $\partial_2([A]) = \partial_2([B]) = \partial_2([C]) = \partial_2([D]) = \partial_2([E]) = \partial_1([F]) = 0$. $\square$

Teorema 2.5.2. *Se q possui ordem multiplicativa finita t, $t > 4$, $t \neq 6$, então os valores em $u_q^+(G_2)$ das super-letras da lista (2.2.7) formam um conjunto de geradores PBW para $u_q^+(G_2)$ sobre $\mathbf{k}[G]$. A altura h de $[u] \in \{[B], [D], [F]\}$ é igual a t. Para $[u] \in \{[A], [C], [E]\}$ temos $h = t$ se 3 não é divisor de t e $h = \frac{t}{3}$ caso contrário. Para qualquer caso temos $[u]^h = 0$ em $u_q^+(G_2)$.*

Demonstração. Da mesma forma que no Teorema 2.4.2 vemos que as super-letras da lista (2.2.7) são todas duras em $u_q^+(G_2)$ analisando os seus graus (para ver que elas não podem ser combinações lineares não-vazias de super-palavras de mesmo grau em super-letras menores e que são não-nulas). Novamente pelo Teorema 1.4.3, elas formam um conjunto de geradores PBW para $u_q^+(G_2)$ sobre $\mathbf{k}[G]$. Agora vejamos as suas alturas.

Inicialmente notamos que, se $p(u, u)$ é raiz t_u-ésima primitiva da unidade e

$$\underbrace{[[u], [[u], \ldots [[u]}_{t_u - 1}, \partial_i([u])] \ldots]] = 0.$$

Então, pelo Lema 1.8.2 temos $\partial_i([u]^{t_u}) = 0$ em $u_q^+(G_2)$.

No caso $[u] \in \{[B], [D], [F]\}$, temos $p(u, u) = q$. Logo $t_u = t$, pois q é raiz t-ésima primitiva da unidade. Pelos Lemas 1.8.2 e 2.5.1, temos $\partial_i([u]^t) = 0$ em $u_q^+(G_2)$ para $i = 1, 2$ e $t \geq 5$. Agora aplicamos o critério de Milinski-Schneider (Lema 1.8.3), e obtemos $[u]^t = 0$. Concluímos que t é a altura de $[B], [D], [F]$.

Para $[u] \in \{[A],[C],[E]\}$, temos $p(u,u)=q^3$. Novamente q é raiz t-ésima primitiva da unidade, e portanto t_u é igual a t se 3 não é um divisor de t e $\frac{t}{3}$ caso contrário. Pelos Lemas 1.8.2 e 2.5.1, temos $\partial_i([u]^{t_u})=0$ em $u_q^+(G_2)$ para $i=1,2$ e $t_u \geq 3$. Como $t \geq 5$ e $t \neq 6$, basta termos $t_u \geq 3$. Novamente o critério de Milinski-Schneider fornece $[u]^{t_u}=0$. Logo, a altura de $[A],[C],[E]$ é t ou $\frac{t}{3}$. $\square$

Corolário 2.5.3. *O expoente s dado em* (1.4.2) *é* 1 *para todo gerador PBW* $[u]$.

Demonstração. Pelo Lema 1.4.5, sabemos que $s=1$ ou $p(u,u)$ é raiz t-ésima primitiva da unidade e $s=t$, ou (no caso de característica positiva) $s=t(char\mathbf{k})^r$. Como pelo Teorema 2.5.2 temos $[u]^t=0$ se $p(u,u)$ é raiz t-ésima primitiva da unidade, obtemos $s=1$. $\square$

Agora que já explicitamos um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(G_2)$ e para $u_q^+(G_2)$ com suas respectivas alturas, passaremos ao estudo das subálgebras coideais à direita e de seus geradores PBW.

Capítulo 3

O reticulado de coideais de $U_q^+(G_2), u_q^+(G_2)$

Neste capítulo vamos descrever todas subálgebras coideais à direita (homogêneas) contendo $\mathbf{k}[G]$ do grupo quântico multiparâmetro $U_q^+(G_2)$ (respectivamente, de $u_q^+(G_2)$).

3.1 Encontrando os possíveis geradores PBW

Proposição 3.1.1. *Seja* $\mathbf{U}$ *uma subálgebra coideal à direita (homogênea) de* $U_q^+(G_2)$ *(respectivamente,* $u_q^+(G_2)$*) que contém* $\mathbf{k}[G]$*. Então os geradores PBW de* $\mathbf{U}$ *estão contidos na lista*

x_1,
$[B]$ *ou* $[x_2, x_1]$,
$[D]$ *ou* $[x_2, [x_2, x_1]]$,
$[E]$ *ou* $[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]$,
$[C]$ *ou* $[[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]]$,
x_2.

Mais ainda, cada coideal possui no máximo um gerador de cada linha.

Demonstração. Seja $\mathbf{U}$ uma subálgebra coideal à direita (homogênea) de $U_q^+(G_2)$ (respectivamente, $u_q^+(G_2)$) que contém $\mathbf{k}[G]$. Pela Proposição 1.4.6 e pelo Corolário 2.5.3, os geradores PBW de $\mathbf{U}$ são da forma

$$[u] + \sum \alpha_i W_i$$

onde $[u]$ é uma super-letra dura e os W_i's são super-palavras da base iniciando por super-letras menores que $[u]$ tais que $D(W_i) = D([u])$. Temos então as seguintes possibilidades:

x_1,
$[B] + \alpha x_2 x_1$,
$[D] + \alpha x_2^2 x_1 + \beta x_2 [B]$,
$[E] + \alpha x_2^3 x_1 + \beta x_2^2 [B] + \gamma x_2 [D]$,
$[C] + \alpha x_2^3 x_1^2 + \beta x_2^2 [B] x_1 + \gamma x_2 [D] x_1 + \delta x_2 [B]^2 + \varepsilon [D][B] + \tau [E] x_1$,
x_2.

Além disso, pela construção desses geradores, o conjunto de geradores PBW de $\mathbf{U}$ não possui mais do que um gerador de cada um dos seis tipos listados acima. Em particular, toda subálgebra coideal à direita homogênea própria de $U_q^+(G_2)$ ou $u_q^+(G_2)$ possui no máximo cinco geradores PBW.

Nosso objetivo é calcular todos coeficientes possíveis para os geradores da lista acima.

Suponha que $[B] + \alpha x_2 x_1$ é um gerador de $\mathbf{U}$. Como $U_A = \mathbf{U} \cap A$ é uma subálgebra diferencial, os seguintes elementos estão em $\mathbf{U}$:

1. $\partial_2([B] + \alpha x_2 x_1) = \alpha x_1$,

2. $\partial_1([B] + \alpha x_2 x_1) = (1 - q^{-3} + \alpha p_{21}) x_2$.

Se $\alpha \neq 0$ e $(1 - q^{-3} + \alpha p_{21}) \neq 0$, então x_1 e x_2 estão em $\mathbf{U}$, e $\mathbf{U} = U_q^+(G_2)$. Logo, podemos supor que $\alpha = 0$ ou $(1 - q^{-3} + \alpha p_{21}) = 0$. No primeiro caso,

$[B]$ é um gerador para $\mathbf{U}$. No segundo caso, $\alpha = (q^{-3}-1)/p_{21}$ e o gerador é

$$[B] + \alpha x_2 x_1 = [B] + \frac{(q^{-3}-1)x_2x_1}{p_{21}} = x_1x_2 - p_{21}^{-1}x_2x_1 = -p_{21}^{-1}[x_2, x_1].$$

Suponha agora que $[D] + \alpha x_2^2 x_1 + \beta x_2[B]$ é um gerador de $\mathbf{U}$. Então $\mathbf{U}$ contém os seguintes elementos:

1. $\partial_2([D] + \alpha x_2^2 x_1 + \beta x_2[B]) = \alpha(1+q)x_2x_1 + \beta[B]$,
2. $\partial_2^2([D] + \alpha x_2^2 x_1 + \beta x_2[B]) = \alpha(1+q)x_1$,
3. $\partial_1([D]+\alpha x_2^2 x_1+\beta x_2[B]) = ((1-q^{-3})(1-q^{-2})+\alpha p_{21}^2+\beta p_{21}(1-q^{-3}))x_2^2$,
4. $\partial_1\partial_2([D] + \alpha x_2^2 x_1 + \beta x_2[B]) = (\alpha(1+q)p_{21} + \beta(1-q^{-3}))x_2$.

Novamente temos duas possibilidades. Uma é que $x_2 \in \mathbf{U}$. Neste caso, pela segunda linha, $\alpha = 0$. Se $\beta = 0$, então $[D]$ é um gerador. Se $\beta \neq 0$, então $[D]$ também pode ser considerado um gerador. De fato, $\partial_2([D] + \beta x_2[B]) = \beta[B]$, mas $[B], x_2 \in \mathbf{U}$ implica $[D] \in \mathbf{U}$. A segunda possibilidade é que $x_1 \in \mathbf{U}$, e pelas linhas 3 e 4 obtemos

- $(1-q^{-3})(1-q^{-2}) + \alpha p_{21}^2 + \beta p_{21}(1-q^{-3}) = 0$,
- $\alpha(1+q)p_{21} + \beta(1-q^{-3}) = 0$.

Resolvendo este sistema (de duas equações e duas variáveis) obtemos

$$\alpha = \frac{(1-q^{-3})(1-q^{-2})}{qp_{21}^2}, \quad \beta = -\frac{(1-q^{-2})(1+q)}{p_{21}q}$$

e o gerador é

$$[D] + \frac{(1-q^{-3})(1-q^{-2})}{qp_{21}^2}x_2^2x_1 - \frac{(1-q^{-2})(1+q)}{p_{21}q}x_2[B] = q^{-1}p_{21}^{-2}[x_2, [x_2, x_1]].$$

Se $[E] + \alpha x_2^3 x_1 + \beta x_2^2[B] + \gamma x_2[D]$ é um gerador de $\mathbf{U}$, temos:

1. $\partial_2([E]+\alpha x_2^3x_1+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D]) = \alpha(1+q+q^2)x_2^2x_1+\beta(1+q)x_2[B]+\gamma[D]$,

2. $\partial_2^2([E]+\alpha x_2^3x_1+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D]) = \alpha(1+q+q^2)(1+q)x_2x_1+\beta(1+q)[B]$,

3. $\partial_2^3([E]+\alpha x_2^3x_1+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D]) = \alpha(1+q+q^2)(1+q)x_1$,

4. $\partial_1\partial_2^2([E]+\alpha x_2^3x_1+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D]) = (1+q)(\alpha(1+q+q^2)p_{21}+\beta(1-q^{-3}))x_2$,

5. $\partial_1\partial_2([E]+\alpha x_2^3x_1+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D]) = (\alpha p_{21}^2(1+q+q^2)+\beta p_{21}(1+q)(1-q^{-3})+\gamma(1-q^{-3})(1-q^{-2}))x_2^2$,

6. $\partial_1([E]+\alpha x_2^3x_1+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D]) = ((1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})+\alpha p_{21}^3+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2}))x_2^3$.

Se $x_2 \in \mathbf{U}$, pela linha 3 temos $\alpha = 0$ e restam 3 possibilidades. Se $\beta = \gamma = 0$, então $[E]$ é um gerador. Se $\beta = 0$ e $\gamma \neq 0$, então $[E]+\gamma x_2[D] \in \mathbf{U}$, e

$$\partial_1([E]+\gamma x_2[D]) = (1-q^{-3})(1-q^{-2})((1-q^{-1})+\gamma p_{21})x_2^3,$$

$$\partial_2([E]+\gamma x_2[D]) = \gamma[D].$$

Logo $[E] \in \mathbf{U}$ e ainda podemos considerar $[E]$ como um gerador. Se $\beta \neq 0$, então $[E]+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D] \in \mathbf{U}$. Neste caso

$$\partial_2^2([E]+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D]) = \beta(1+q)[B]$$

$$\partial_1([B]) = (1-q^{-3})x_2$$

fornecem $[E] \in \mathbf{U}$.

Se $x_1 \in \mathbf{U}$, então pelas linhas 4, 5 e 6 obtemos

- $\alpha(1+q+q^2)p_{21}+\beta(1-q^{-3}) = 0$,

- $\alpha p_{21}^2(1+q+q^2)+\beta p_{21}(1+q)(1-q^{-3})+\gamma(1-q^{-3})(1-q^{-2}) = 0$,

- $(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})+\alpha p_{21}^3+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2}) = 0$.

Resolvendo este sistema temos que o gerador $[E]+\alpha x_2^3 x_1+\beta x_2^2[B]+\gamma x_2[D]$ é um múltiplo de $[x_2,[x_2,[x_2,x_1]]]$.

Nossa última possibilidade é que $[C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1$ é um gerador de $\mathbf{U}$. Então $\mathbf{U}$ contém

1. $\partial_2\partial_1\partial_2^2([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = (1+q)(\alpha p_{21}(1+q+q^2)(1+q^3)+\beta(1+q^{-3}))x_1$,

2. $\partial_2^3\partial_1([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = (\alpha p_{21}^3(1+q^3)+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\tau(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1}))(1+q+q^2)(1+q)x_1$,

3. $\partial_2^3([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = \alpha(1+q+q^2)(1+q)x_1^2$,

4. $\partial_2^2\partial_1\partial_2([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = (\alpha p_{21}^2(1+q+q^2)(1+q^3)+\beta p_{21}(1+q)(1-q^{-3})+\gamma(1-q^{-3})(1-q^{-2}))(1+q)x_1$,

5. $\partial_1^2([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = p_{21}(p_{21}^2(\alpha p_{21}^3(1+q^3)+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\tau(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1}))+p_{21}(1-q^{-3})(\beta p_{21}^3q^3+\delta p_{21}(1-q^{-3})+\varepsilon(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\delta p_{21}q(1-q^{-3}))+(1-q^{-3})(1-q^{-2})(\gamma p_{21}^3q^3+q^2(1-q^{-3})^2+\delta p_{21}^2q^3(1-q^{-3})+\varepsilon p_{21}q^2(1-q^{-3}))+(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})q^3(\varepsilon p_{21}(1-q^{-3})+\tau p_{21}^2+(1-q^{-3})(1-q^{-1}-q^{-2})))x_2^3$,

6. $\partial_1\partial_2\partial_1([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = (p_{21}^2(1+q+q^2)(\alpha p_{21}^3(1+q^3)+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\tau(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1}))+p_{21}(1+q)(1-q^{-3})(\beta p_{21}^3q^3+\delta p_{21}(1-q^{-3})+\varepsilon(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\delta p_{21}q(1-q^{-3}))+(1-q^{-3})(1-q^{-2})q^2(\gamma p_{21}^3q+(1-q^{-3})^2+\delta p_{21}^2q(1-q^{-3})+\varepsilon p_{21}(1-q^{-3})))x_2^2$,

7. $\partial_1\partial_2^2\partial_1([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = (p_{21}(1+q+q^2)(\alpha p_{21}^3(1+q^3)+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\tau(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1}))+(1-q^{-3})(\beta p_{21}^3q^3+\delta p_{21}(1-q^{-3})+\varepsilon(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\delta p_{21}q(1-q^{-3})))(1+q)x_2$,

8. $\partial_1^2\partial_2^2([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = p_{21}(1+q)(1+q^3)(\alpha p_{21}(1+q+q^2)+\beta(1-q^{-3}))x_2$,

9. $\partial_1^2\partial_2([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = p_{21}(p_{21}(\alpha p_{21}^2(1+q+q^2)(1+q^3)+\beta p_{21}(1+q)(1-q^{-3})+\gamma(1-q^{-3})(1-q^{-2}))+(1-q^{-3})(1+q)(\beta p_{21}^2q^3+\delta(1-q^{-3}))+(1-q^{-3})(1-q^{-2})q^3(\gamma p_{21}+\delta(1-q^{-3})))x_2^2$,

10. $\partial_1\partial_2\partial_1\partial_2([C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1) = (1+q)(p_{21}(\alpha p_{21}^2(1+q+q^2)(1+q^3)+\beta p_{21}(1+q)(1-q^{-3})+\gamma(1-q^{-3})(1-q^{-2}))+(1-q^{-3})(\beta p_{21}^2q^3+\delta(1-q^{-3})))x_2$.

Se $x_2 \in \mathbf{U}$, então pelas 4 primeiras igualdades temos

- $\alpha p_{21}(1+q+q^2)(1+q^3)+\beta(1+q^{-3})=0$,
- $\alpha p_{21}^3(1+q^3)+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\tau(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})=0$,
- $\alpha=0$,
- $\alpha p_{21}^2(1+q+q^2)(1+q^3)+\beta p_{21}(1+q)(1-q^{-3})+\gamma(1-q^{-3})(1-q^{-2})=0$.

Resolvendo este sistema obtemos $\alpha=\beta=\gamma=\tau=0$. Neste caso o gerador é $[C]$. Se $\delta=\varepsilon=0$, isto é óbvio. Se δ ou ε é diferente de zero, então

$$\partial_2^2\partial_1([C]+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]) = (1-q^{-3})(1+q)(\delta p_{21}(1+q)+\varepsilon(1-q^{-2}))[B],$$

$$\partial_1([B]) = (1-q^{-3})x_2,$$

$$[D]=[[B],x_2]$$

implicam que $[C]$ pertence a $\mathbf{U}$. Note que se $\delta p_{21}(1+q)+\varepsilon(1-q^{-2})=0$, temos $\delta=-\frac{\varepsilon(1-q^{-2})}{p_{21}(1+q)}$. Logo, $\delta\neq 0$ e $\varepsilon\neq 0$, e como $\partial_2\partial_1\partial_2([C]+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B])=-\varepsilon(1-q^{-3})(1-q^{-2})p_{21}^{-1}[B]$, obtemos $[B]\in\mathbf{U}$.

Se $x_1\in\mathbf{U}$, pelas igualdades 5 a 10 temos

- $p_{21}^2(\alpha p_{21}^3(1+q^3)+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\tau(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1}))+p_{21}(1-q^{-3})(\beta p_{21}^3q^3+\delta p_{21}(1-q^{-3})+\varepsilon(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\delta p_{21}q(1-q^{-3}))+(1-q^{-3})(1-q^{-2})q^2(\gamma p_{21}^3q+(1-q^{-3})+\delta p_{21}^2q(1-q^{-3})+\varepsilon p_{21}(1-q^{-3}))+(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})q^3(\varepsilon p_{21}(1-q^{-3})+\tau p_{21}^2+(1-q^{-3})(1-q^{-1}-q^{-2}))=0$,

- $p_{21}^2(1+q+q^2)(\alpha p_{21}^3(1+q^3)+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\tau(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1}))+p_{21}(1+q)(1-q^{-3})(\beta p_{21}^3q^3+\delta p_{21}(1-q^{-3})+\varepsilon(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\delta p_{21}q(1-q^{-3}))+(1-q^{-3})(1-q^{-2})q^2(\gamma p_{21}^3q+(1-q^{-3})+\delta p_{21}^2q(1-q^{-3})+\varepsilon p_{21}(1-q^{-3}))=0$,

- $p_{21}(1+q+q^2)(\alpha p_{21}^3(1+q^3)+\beta p_{21}^2(1-q^{-3})+\gamma p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\tau(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1}))+(1-q^{-3})(\beta p_{21}^3q^3+\delta p_{21}(1-q^{-3})+\varepsilon(1-q^{-3})(1-q^{-2})+\delta p_{21}q(1-q^{-3}))=0$,

- $\alpha p_{21}(1+q+q^2)+\beta(1-q^{-3})=0$,

- $p_{21}(\alpha p_{21}^2(1+q+q^2)(1+q^3)+\beta p_{21}(1+q)(1-q^{-3})+\gamma(1-q^{-3})(1-q^{-2}))+(1-q^{-3})(1+q)(\beta p_{21}^2q^3+\delta(1-q^{-3}))+q^3(1-q^{-3})(1-q^{-2})(\gamma p_{21}+\delta(1-q^{-3}))=0$,

- $p_{21}(\alpha p_{21}^2(1+q+q^2)(1+q^3)+\beta p_{21}(1+q)(1-q^{-3})+\gamma(1-q^{-3})(1-q^{-2}))+(1-q^{-3})(\beta p_{21}^2q^3+\delta(1-q^{-3}))=0$.

Resolvendo este sistema vemos que o gerador $[C]+\alpha x_2^3x_1^2+\beta x_2^2[B]x_1+\gamma x_2[D]x_1+\delta x_2[B]^2+\varepsilon[D][B]+\tau[E]x_1$ é um múltiplo de $[[x_1,x_2],[x_2,[x_2,x_1]]]$.

Com isto esgotamos todas as possibilidades para os geradores de $\mathbf{U}$ e chegamos à lista desejada. $\square$

3.2 O caso $U_q^+(G_2)$

Teorema 3.2.1. *Se q não é raiz da unidade, então o reticulado de subálgebras coideais à direita contendo $\mathbf{k}[G]$ de $U_q^+(G_2)$ é dado pela figura 3.1.*

$$\begin{tikzcd}
 & U_q^+(G_2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle [[x_1,x_2],[x_2,[x_2,x_1]]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [x_1,x_2] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2,[x_2,[x_2,x_1]]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2,[x_2,x_1]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[x_1,x_2],x_2] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2,x_1] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[[x_1,x_2],x_2],x_2] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle x_1 \rangle \arrow[dr, dash] & & \langle x_2 \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{k}[G] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Reticulado de Subálgebras Coideais à Direita

Demonstração. Seja $\mathbf{U}$ uma subálgebra coideal à direita que contém $\mathbf{k}[G]$. Por 1.7.4, sabemos que $\mathbf{U}$ é homogênea. Logo, pela Proposição 3.1.1 os possíveis geradores PBW para $\mathbf{U}$ são

x_1,
$[B]$ ou $[x_2, x_1]$,
$[D]$ ou $[x_2, [x_2, x_1]]$,
$[E]$ ou $[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]$,
$[C]$ ou $[[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]]$,
x_2.

Observamos que $\langle [u] \rangle$ significa a menor subálgebra coideal à direita contendo $[u]$ e $\mathbf{k}[G]$.

A subálgebra coideal à direita gerado por x_2 possui $\{x_2\}$ como conjunto de geradores PBW. Da mesma maneira, a subálgebra coideal à direita gerada por x_1 possui como gerador PBW $\{x_1\}$.

Se $[E] \in \mathbf{U}$, então $x_2 \in \mathbf{U}$, pois

$$\partial_1([E]) = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 - q^{-2})x_2^3.$$

Logo, $\langle [E] \rangle$ possui como geradores PBW $\{x_2, [E]\}$.

Se $[D] \in \mathbf{U}$, então x_2 e $[E]$ pertencem a $\mathbf{U}$, pois

$$\partial_1([D]) = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})x_2^2$$

e

$$[E] = [[D], x_2]$$

e $\langle [D] \rangle$ possui como geradores PBW $\{x_2, [D], [E]\}$.

Se $[C] \in \mathbf{U}$, então $x_2, [D]$ e $[E]$ estão em $\mathbf{U}$, pois

$$\partial_2\partial_1([C]) = q^2(1 - q^{-3})^2[D],$$

de onde obtemos que $\langle [C] \rangle$ possui como geradores PBW $\{x_2, [C], [D], [E]\}$.

Se $[B] \in \mathbf{U}$, então $x_2, [C], [D], [E] \in \mathbf{U}$, pois

$$\partial_1([B]) = (1 - q^{-3})x_2$$

e

$$[C] = [[B], [[B], x_2]] = [[B], [D]].$$

Logo, obtemos que a subálgebra coideal à direita gerada por $[B]$ possui geradores PBW $\{x_2, [B], [C], [D], [E]\}$.

Se incluirmos x_1 em qualquer um destes 4 coideais, temos $\mathbf{U} = U_q^+(G_2)$, pois x_2 pertence a todos eles.

Se $[x_2, x_1] \in \mathbf{U}$, então $x_1 \in \mathbf{U}$ pois

$$\begin{aligned}\partial_2([x_2, x_1]) &= \partial_2(x_2x_1) - p_{21}\partial_2(x_1x_2) = \\ &= \partial_2(x_2)x_1 + p_{22}x_2\partial_2(x_1) - p_{21}(\partial_2(x_1)x_2 + p_{12}x_1\partial_2(x_2)) = \\ &= x_1 - p_{21}p_{12}x_1 = (1 - q^{-3})x_1,\end{aligned}$$

e $\langle [x_2, x_1] \rangle$ possui como geradores PBW $\{x_1, [x_2, x_1]\}$.

Se $[x_2, [x_2, x_1]] \in \mathbf{U}$, então $x_1, [x_2, x_1] \in \mathbf{U}$, pois

$$\begin{aligned}\partial_2([x_2, [x_2, x_1]]) &= \partial_2(x_2[x_2, x_1]) - p_{22}p_{21}\partial_2([x_2, x_1]x_2) = \\ &= \partial_2(x_2)[x_2, x_1] + p_{22}x_2\partial_2([x_2, x_1]) - \\ &- p_{22}p_{21}(\partial_2([x_2, x_1])x_2 + p_{22}p_{12}[x_2, x_1]\partial_2(x_2)) = \\ &= [x_2, x_1] + p_{22}(1 - q^{-3})[x_2, x_1] - p_{21}p_{12}q^2[x_2, x_1] = \\ &= (1 + q)(1 - q^{-2})[x_2, x_1].\end{aligned}$$

Portanto, $\langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$ possui como geradores PBW $\{x_1, [x_2, x_1], [x_2, [x_2, x_1]]\}$.

Se $[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \in \mathbf{U}$, então $x_1, [x_2, x_1], [x_2, [x_2, x_1]] \in \mathbf{U}$ pois

$$\begin{aligned}\partial_2([x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]) &= \partial_2(x_2[x_2, [x_2, x_1]]) - p_{22}^2p_{21}\partial_2([x_2, [x_2, x_1]]x_2) = \\ &= \partial_2(x_2)[x_2, [x_2, x_1]] + p_{22}x_2\partial_2([x_2, [x_2, x_1]]) - \\ &- p_{22}^2p_{21}(\partial_2([x_2, [x_2, x_1]])x_2 + p_{22}^2p_{12}[x_2, [x_2, x_1]]\partial_2(x_2)) = \\ &= [x_2, [x_2, x_1]] + p_{22}(1 + q)(1 - q^{-2})[x_2, [x_2, x_1]] - \\ &- p_{21}p_{12}q^4[x_2, [x_2, x_1]] = q^2(1 - q^{-3})[x_2, [x_2, x_1]]\end{aligned}$$

implica que os geradores PBW são $\{x_1, [x_2, x_1], [x_2, [x_2, x_1]], [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]\}$.

Se o elemento $[[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]]$ pertence a $\mathbf{U}$, então os elementos

$x_1, [x_2, x_1], [x_2, [x_2, x_1]]$ e $[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]$ também pertencem a $\mathbf{U}$ pois

$$\begin{aligned}
\partial_1([[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]]) &= \partial_1([x_1, x_2][x_2, [x_2, x_1]])- \\
&- p_{12}^2 p_{11} p_{22}^2 p_{21} \partial_1([x_2, [x_2, x_1]][x_1, x_2]) = \\
&= \partial_1([x_1, x_2])[x_2, [x_2, x_1]]+ \\
&+ p_{11} p_{21}[x_1, x_2] \partial_1([x_2, [x_2, x_1]])- \\
&- p_{12} q^2 (\partial_1([x_2, [x_2, x_1]])[x_1, x_2]+ \\
&+ p_{21}^2 p_{11}[x_2, [x_2, x_1]] \partial_1([x_1, x_2])) = \\
&= (1 - q^{-3}) x_2 [x_2, [x_2, x_1]]+ \\
&+ p_{21}^2 p_{11} (1 - q^{-3})[x_2, [x_2, x_1]] x_2 = \\
&= (1 - q^{-3})[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]].
\end{aligned}$$

Então $\{x_1, [x_2, x_1], [x_2, [x_2, x_1]], [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]], [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]]\}$ é um conjunto de geradores PBW para $\mathbf{U}$.

Novamente, se incluirmos x_2 em qualquer um destes quatro coideais temos $\mathbf{U} = U_q^+(G_2)$.

Pelo fato de uma subálgebra coideal à direita não possuir mais de dois geradores da mesma linha da lista de possíveis geradores, concluímos que estas são todas subálgebras coideais à direita de $U_q^+(G_2)$ que contém $\mathbf{k}[G]$, e obtemos a figura 3.1. O teorema está provado. $\square$

3.3 O caso $u_q^+(G_2)$

Teorema 3.3.1. *Se q possui ordem multiplicativa finita $t > 4$, $t \neq 6$, então a figura 3.1 representa o reticulado de subálgebras coideais à direita homogêneas contendo $\mathbf{k}[G]$ de $u_q^+(G_2)$.*

Demonstração. A prova é análoga à do Teorema 3.2.1. A única diferença para este caso é que não podemos garantir que toda subálgebra coideal à direita contendo $\mathbf{k}[G]$ de $u_q^+(G_2)$ é homogênea. Temos então apenas o reticulado de subálgebras coideais homogêneas e não o reticulado completo das subálgebras coideais à direita contendo $\mathbf{k}[G]$. $\square$

Capítulo 4

O reticulado de coideais de $U_q(G_2)$, $u_q(G_2)$

Neste capítulo trabalharemos com a álgebra $U_q(G_2)$, definida por quatro geradores x_1, x_2, x_1^-, x_2^- e pelas relações

$$[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], x_2] = 0, \quad [x_1, [x_1, x_2]] = 0,$$

$$[[[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-], x_2^-] = 0, \quad [x_1^-, [x_1^-, x_2^-]] = 0,$$

$$[x_i, x_j^-] = \delta_i^j(1 - g_i f_i), \quad i, j = 1, 2,$$

como na Definição 1.9.2.

4.1 A decomposição triangular

Como vimos na seção 1.7, a subálgebra de $U_q(G_2)$ gerada por G e x_1, x_2 é isomorfa a $U_q^+(G_2)$. Analogamente, a subálgebra de $U_q(G_2)$ gerada por F e x_1^-, x_2^- é isomorfa a $U_q^-(G_2)$. Mais ainda, temos a seguinte decomposição (chamada decomposição triangular):

$$U_q(G_2) = U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2).$$

Analogamente, se q é raiz da unidade, temos

$$u_q(G_2) = u_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} u_q^+(G_2).$$

Neste momento gostaríamos que toda subálgebra coideal à direita de $U_q(G_2)$ (ou de $u_q(G_2)$) que contém $\mathbf{k}[H]$ possua uma decomposição triangular, e que para duas subálgebras coideais à direita quaisquer $\mathbf{k}[F] \subseteq \mathbf{U}^- \subseteq U_q^-(G_2)$ (ou $u_q^-(G_2)$), $\mathbf{k}[G] \subseteq \mathbf{U}^+ \subseteq U_q^+(G_2)$ (ou $u_q^+(G_2)$) o produto tensorial

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^- \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{U}^+ \tag{4.1.1}$$

seja uma subálgebra coideal à direita. Na verdade temos os seguintes resultados:

Lema 4.1.1. *Seja $q \in \mathbf{k}$. Se q não é raiz da unidade, toda subálgebra coideal à direita $\mathbf{U} \supseteq \mathbf{k}[H]$ de $U_q(G_2)$ possui uma decomposição* (4.1.1)*, onde $\mathbf{U}^+ \supseteq \mathbf{k}[G]$ e $\mathbf{U}^- \supseteq \mathbf{k}[F]$ são subálgebras coideais à direita de $U_q^+(G_2)$ e $U_q^-(G_2)$, respectivamente. Se q possui ordem multiplicativa finita t, $t > 4, t \neq 6$, o mesmo resultado vale para as subálgebras coideais à direita homogêneas de $u_q(G_2)$.*

Demonstração. Pela decomposição triangular (4.1), o conjunto de superletras $P = P_- \cup P_+$ é um conjunto de geradores PBW para $U_q(G_2)$ sobre $\mathbf{k}[H]$, onde P_- é o conjunto de geradores PBW de $U_q^-(G_2)$

$$\{x_1^-, x_2^-, [x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]\}$$

e P_+ é o conjunto de geradores PBW de $U_q^+(G_2)$

$$\{x_1, x_2, [x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2], [[[x_1, x_2], x_2], x_2], [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]\}.$$

Fixamos a seguinte ordem nos geradores skew-primitivos

$$x_1 > x_2 > x_1^- > x_2^-. \tag{4.1.2}$$

Pela Proposição 1.4.6, a subálgebra $\mathbf{U}$ possui geradores PBW da forma

$$[u] + \sum \alpha_i W_i + \sum \beta_j V_j \in \mathbf{U}, \tag{4.1.3}$$

onde $[u] \in P$, W_i são as palavras da base que começam com super-letras menores que $[u]$, $D(W_i) = D(u)$, e V_j são G-super-palavras com $D(V_j) < D(u)$. Pela definição de grau dada em (1.3.2), todos W_i's possuem a mesma constituição que o termo líder $[u]$. Logo, todos W_i's e o termo líder $[u]$ pertencem à mesma componente da decomposição triangular (isto é, eles possuem apenas elementos de X, ou apenas elementos de X^-, não podem possuir ambos). Falta provar que não há termos V_j.

Note que a subálgebra $\mathbf{U}$ é homogênea. De fato, se q não é raiz da unidade, pelo Corolário 1.9.5, a álgebra $\mathbf{U}$ é homogênea. Se q possui ordem multiplicativa finita, $\mathbf{U}$ é homogênea por hipótese. Logo, todos geradores PBW podem ser escolhidos Γ-homogêneos também. Isto significa que $a-c = a_j - c_j$ e $b - d = b_j - d_j$, supondo que $ax_1 + bx_2 + cx_1^- + dx_2^-$ é o grau de $[u]$ e $a_jx_1 + b_jx_2 + c_jx_1^- + d_jx_2^-$ é o grau de V_j, para todo j. No entanto, isto contradiz a hipótese de que $D(V_j) < D(u)$, como mostraremos a seguir.

Se o termo líder $[u] \in P_-$, então $a = b = 0$, de onde $a_j = b_j = 0$, pela ordem definida em (1.3.1). Então $c = c_j$ e $d = d_j$, e $D(V_j) = D(u)$. Se $[u] \in P_+$, então $c = d = 0$ e $a = a_j - c_j$, $b = b_j - d_j$. Mas então $a_j \geq a$, $b_j \geq b$, $c_j \geq c$ e $d_j \geq d$, e portanto $D(V_j) \geq D(u)$.

Agora podemos ver que todos geradores PBW pertencem a $U_q^-(G_2)$ ou a

$U_q^+(G_2)$ (analogamente, pertencem a $u_q^-(G_2)$ ou a $u_q^+(G_2)$). Logo, $\mathbf{U}$ possui a decomposição (4.1.1). $\square$

Lema 4.1.2. ([11, Lemma 9.3]) *O produto tensorial* (4.1.1) *é uma subálgebra coideal à direita se e somente se*

$$[\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-] \subseteq \mathbf{U}^- \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{U}^+.$$

Observação 4.1.3. Por [11, Theorem 11.1], para provar que $[\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-] \subseteq \mathbf{U}^- \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{U}^+$ basta provar que $[u^+, u^-] \in \mathbf{U}^- \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{U}^+$ para todos geradores PBW u^+ de $\mathbf{U}^+$ e u^- de $\mathbf{U}^-$.

Estes resultados serão as ferramentas principais para determinar as subálgebras coideais à direita de $U_q(G_2)$ (analogamente, as subálgebras coideais à direita homogêneas de $u_q(G_2)$).

4.2 $U_q^-(G_2), u_q^-(G_2)$

Para usar o Lema 4.1.2, precisamos conhecer as subálgebras coideais à direita da álgebra $U_q^-(G_2)$. Já sabemos do capítulo 2 que a álgebra $U_q^+(G_2)$ é definida pelas relações

$$p_{11} = p_{22}^3 = (p_{12}p_{21})^{-1} = q^3$$

e

$$[x_1, [x_1, x_2]] = 0, \quad [[[[x_1, x_2], x_2], x_2], x_2] = 0.$$

Assim como na Definição 1.9.1, definimos $U_q^-(G_2)$ por $U_{q^{-1}}^+(G_2)$, ou seja, consideramos $q' = q^{-1}$. Concluímos então que o reticulado de coideais de $U_q^-(G_2)$ é análogo ao reticulado de coideais de $U_q^+(G_2)$ dado na figura 3.1, apenas substituindo x_1 por x_1^-, x_2 por x_2^- e G por F:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & U_q^-(G_2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \arrow[d, dash] & & \langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-] \rangle \arrow[d, dash] \\
\langle x_1^- \rangle \arrow[dr, dash] & & \langle x_2^- \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{k}[F] &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Reticulado de Subálgebras Coideais à Direita

Novamente aqui o mesmo reticulado vale para as subálgebras coideais à direita homogêneas de $u_q^-(G_2)$.

4.3 Os skew-comutadores entre os possíveis geradores PBW

O objetivo desta seção é apresentar os resultados necessários para aplicar o Lema 4.1.2 e a Observação 4.1.3. Estes cálculos estão desenvolvidos no apêndice do trabalho. Iniciamos com algumas observações que serão úteis.

Seja $\mathbf{U}^+$ uma subálgebra coideal à direita (homogênea) que contém $\mathbf{k}[G]$ de $U_q^+(G_2)$ $(u_q^+(G_2))$. Pela Proposição 3.1.1, os únicos geradores PBW possíveis para $\mathbf{U}^+$ são:

x_1,

$[x_1, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$,

$[[x_1, x_2], x_2]$ ou $[x_2, [x_2, x_1]]$,

$[[[x_1, x_2], x_2], x_2]$ ou $[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]$,

$[[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]$ ou $[[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]]$,

x_2.

Analogamente, se $\mathbf{U}^-$ é uma subálgebra coideal à direita (homogênea) que contém $\mathbf{k}[F]$ de $U_q^-(G_2)$ ($u_q^-(G_2)$), como $U_q^-(G_2) = U_{q^{-1}}^+(G_2)$, temos os seguintes possíveis geradores:

x_1^-,

$[x_1^-, x_2^-]$ ou $[x_2^-, x_1^-]$,

$[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]$ ou $[x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]$,

$[[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]$ ou $[x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]]$,

$[[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]$ ou $[[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]]$,

x_2^-.

Agora estamos prontos para listar os skew-comutadores entre todos os possíveis geradores PBW das subálgebras coideais à direita (homogêneas) que contém $\mathbf{k}[H]$ de $U_q^+(G_2)$ e $U_q^-(G_2)$ ($u_q^+(G_2)$ e $u_q^-(G_2)$).

(1) $[x_1, x_1^-] = 1 - g_1 f_1$

(2) $[x_1, x_2^-] = 0$

(3) $[x_1, [x_1^-, x_2^-]] = (1 - q^{-3}) x_2^- g_1 f_1$

(4) $[x_1, [x_2^-, x_1^-]] = p_{21}(1 - q^3) x_2^-$

(5) $[x_1, [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] = -q^{-1}(1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(x_2^-)^2 g_1 f_1$

(6) $[x_1, [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]] = q^{-3}(1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 - q^{-1})(x_2^-)^3 g_1 f_1$

(7) $[x_1, [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]] = -q(1-q^{-3})^2 x_2^- [[x_1^-, x_2^-], x_2^-] g_1 f_1 - p_{21} q (1 - q^{-3})(1 + q - q^{-1})[[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-] g_1 f_1$

(8) $[x_2, x_1^-] = 0$

(9) $[x_2, x_2^-] = 1 - g_2 f_2$

(10) $[x_2,[x_1^-,x_2^-]] = p_{12}(1-q^3)x_1^-$

(11) $[x_2,[x_2^-,x_1^-]] = (1-q^{-3})x_1^- g_2 f_2$

(12) $[x_2,[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]] = p_{12}(1+q-q^2-q^3)[x_1^-,x_2^-]$

(13) $[x_2,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]] = (1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]g_2 f_2$

(14) $[x_2,[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-]] = p_{12}(1-q^3)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]$

(15) $[x_2,[x_2^-,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]] = q^2(1-q^{-3})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]g_2 f_2$

(16) $[x_2,[[x_1^-,x_2^-],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]] = p_{12}^2(1-q)(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]^2 g_2 f_2 - p_{12}^3 q^7(1-q^{-3})^2(1+q-q^{-1}-q^{-2})x_2^-[x_2^-,x_1^-]x_1^- g_2 f_2 + p_{12}^3 q(1-q^3)(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]x_1^- g_2 f_2$

(17) $[[x_1,x_2],x_1^-] = -p_{12}(1-q^{-3})g_1 f_1 x_2$

(18) $[[x_1,x_2],x_2^-] = (1-q^{-3})x_1$

(19) $[[x_1,x_2],[x_2^-,x_1^-]] = (1-q^{-3})(1-g_1 f_1 g_2 f_2)$

(20) $[[x_1,x_2],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]] = p_{21}(1-q^{-3})(1-q^2)(1+q)x_2^-$

(21) $[[x_2,x_1],x_1^-] = (1-q^{-3})x_2$

(22) $[[x_2,x_1],x_2^-] = -p_{21}(1-q^{-3})g_2 f_2 x_1$

(23) $[[x_2,x_1],[x_1^-,x_2^-]] = (1-q^{-3})(1-g_2 f_2 g_1 f_1)$

(24) $[[x_2,x_1],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]] = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^- g_2 f_2 g_1 f_1$

(25) $[[x_2,x_1],[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-]] = -q(1-q^{-3})(1-q^2)(x_2^-)^2 g_2 f_2 g_1 f_1$

(26) $[[x_2,x_1],[[x_1^-,x_2^-],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]] = q^2(1-q^{-3})^2[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_2 f_2 g_1 f_1$

(27) $[[[x_1,x_2],x_2],x_1^-] = [[x_1,x_2]x_2,x_1^-] - p_{12}p_{22}[x_2[x_1,x_2],x_1^-] = -p_{12}^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})g_1 f_1 x_2^2$

(28) $[[[x_1, x_2], x_2], x_2^-] = [[x_1, x_2]x_2, x_2^-] - p_{12}p_{22}[x_2[x_1, x_2], x_2^-] = (1 + q - q^{-1} - q^{-2})[x_1, x_2]$

(29) $[[[x_1, x_2], x_2], [x_2^-, x_1^-]] = -p_{12}q(1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 + q)g_1f_1g_2f_2x_2$

(30) $[[[x_1, x_2], x_2], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 + q)(1 - g_1f_1g_2^2f_2^2)$

(31) $[[[x_1, x_2], x_2], [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]]] = p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-q^3)x_2^-$

(32) $[[x_2, [x_2, x_1]], x_1^-] = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})x_2^2$

(33) $[[x_2, [x_2, x_1]], x_2^-] = p_{21}(1 - q + q^{-1} - q^2)g_2f_2[x_2, x_1]$

(34) $[[x_2, [x_2, x_1]], [x_1^-, x_2^-]] = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 + q)x_2$

(35) $[[x_2, [x_2, x_1]], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 + q)(1 - g_1f_1g_2^2f_2^2)$

(36) $[[x_2, [x_2, x_1]], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]] = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)x_2^-g_1f_1g_2^2f_2^2$

(37) $[[x_2, [x_2, x_1]], [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]] = -p_{12}q^3(1 - q^{-3})^2(1 - q^{-2})(1 + q)[x_1^-, x_2^-]$

(38) $[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], x_1^-] = -p_{12}^3(1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 - q^{-1})g_1f_1x_2^3$

(39) $[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], x_2^-] = q^2(1 - q^{-3})[[x_1, x_2], x_2]$

(40) $[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], [x_2^-, x_1^-]] = -p_{12}^2q^4(1 - q^{-3})^2(1 - q^2)g_1f_1g_2f_2x_2^2$

(41) $[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] = -p_{12}q^4(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2^2f_2^2x_2$

(42) $[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]]] = q^2(1 - q^{-3})^2(1 - q^{-2})(1 + q)(1 - g_1f_1g_2f_2)g_2f_2$

(43) $[[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]], x_2^-] = p_{21}q(1 - q^{-3})g_2f_2[x_2, [x_2, x_1]]$

(44) $[[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 - q^2)(1 + q)x_2$

(45) $[[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]] = q^2(1 - q^{-3})^2(1 - q^{-2})(1 + q)(1 - g_1f_1g_2^3f_2^3)$

(46) $[[[x_1,x_2],[x_2,[x_2,x_1]]],x_2^-] = -q^{-1}(1+q)(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2[x_2,x_1]^2 - p_{12}q^2(1-q+q^{-1}-q^2)(1-q^{-3})^2g_2f_2x_2[x_2,x_1]x_1 + p_{12}q^2(1-q+q^{-1}-q^2)(1-q^{-3})g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]]x_1$

(47) $[[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]],x_2^-] = (1-q^3)(1-q^{-2})[x_1,x_2]^2$

(48) $[[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]],x_1^-] = -p_{12}^2q^3(1-q^{-3})g_1f_1[[[x_1,x_2],x_2],x_2] - p_{12}^3q^4(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1x_2[[x_1,x_2],x_2]$

(49) $[[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]],[x_2^-,x_1^-]] = -p_{12}q^4(1-q^{-3})^2g_1f_1g_2f_2[[x_1,x_2],x_2]$

(50) $[[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]] = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)[x_1,x_2]$

4.4 Subálgebras coideais à direita de $U_q(G_2)$, $u_q(G_2)$

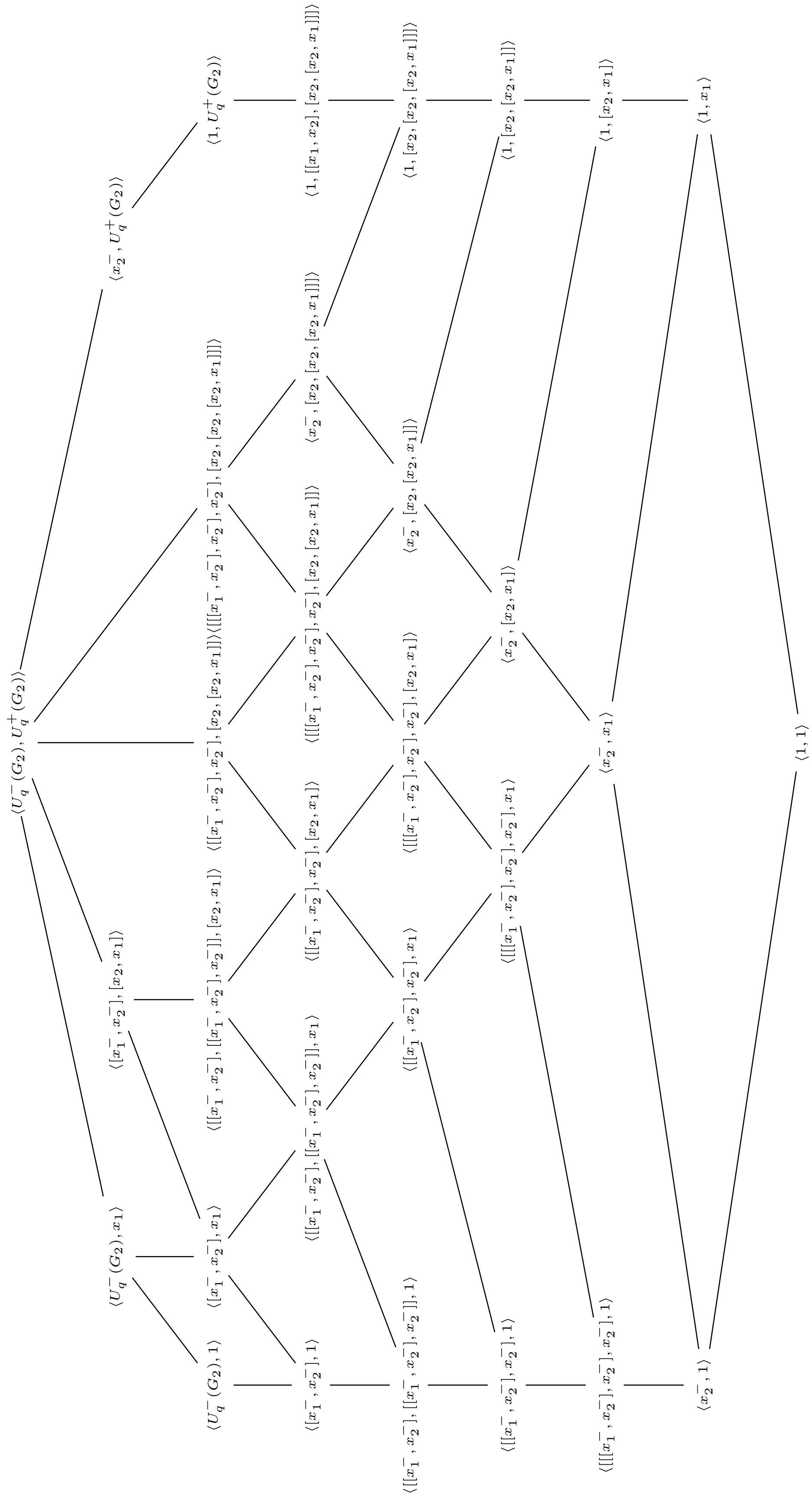
Nesta seção vamos aplicar o Lema 4.1.2 para determinar as subálgebras coideais à direita (homogêneas) de $U_q(G_2)$ ($u_q(G_2)$).

Lema 4.4.1. *Seja $\mathbf{U}^-$ uma subálgebra coideal à direita (homogênea) de $U_q^-(G_2)$ ($u_q^-(G_2)$). Então $\mathbf{U}^- \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$ é uma subálgebra coideal à direita (homogênea) de $U_q(G_2)$ ($u_q(G_2)$). Analogamente, se $\mathbf{U}^+$ é uma subálgebra coideal à direita (homogênea) de $U_q^+(G_2)$ ($u_q^+(G_2)$), então $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{U}^+$ é uma subálgebra coideal à direita (homogênea) de $U_q(G_2)$ ($u_q(G_2)$).*

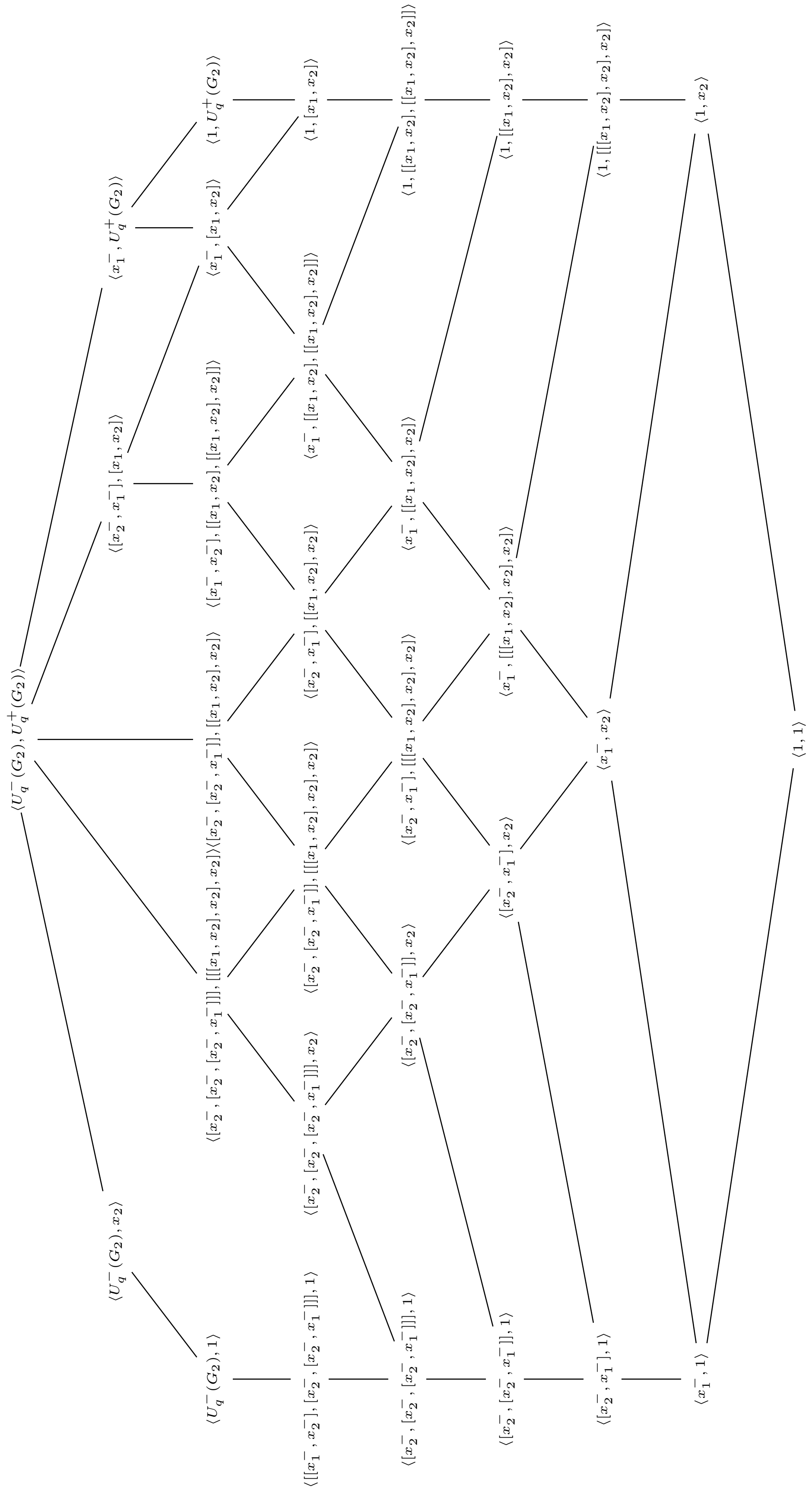
Demonstração. Basta notar $[\mathbf{k}[G],\mathbf{U}^-] = \mathbf{k}[G]\mathbf{U}^- - \mathbf{U}^-\mathbf{k}[G] = \mathbf{U}^-\mathbf{k}[G]$, pois $ug = \chi^u(g)gu$ para todos $u \in \mathbf{U}^-, g \in G$. Logo, o resultado decorre do Lema 4.1.2. A prova é análoga para $\mathbf{U}^+$. $\square$

Teorema 4.4.2. *Se $q \in \mathbf{k}$ não é raiz da unidade, o reticulado de subálgebras coideais à direita de $U_q(G_2)$ é composto pelas 4 figuras a seguir. Se q possui* *ordem multiplicativa finita t, $t > 4, t \neq 6$, o mesmo reticulado determina as subálgebras coideais à direita homogêneas de $u_q(G_2)$.*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \langle U_q^-(G_2), U_q^+(G_2)\rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \langle U_q^-(G_2), x_2\rangle \arrow[dl, dash] & & \langle x_2, U_q^+(G_2)\rangle \arrow[dr, dash] & \\
\langle U_q^-(G_2), 1\rangle \arrow[d, dash] & & & & \langle 1, U_q^+(G_2)\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_1^-, x_2^-], 1\rangle \arrow[d, dash] & & & & \langle 1, [x_1, x_2]\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]], 1\rangle \arrow[d, dash] & & & & \langle 1, [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-], 1\rangle \arrow[d, dash] & & & & \langle 1, [[x_1, x_2], x_2]\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-], 1\rangle \arrow[drr, dash] & & & & \langle 1, [[[x_1, x_2], x_2], x_2]\rangle \arrow[dll, dash] \\
 & & \langle x_2^-, x_2\rangle \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle x_2^-, 1\rangle \arrow[drr, dash] & & & & \langle 1, x_2\rangle \arrow[dll, dash] \\
 & & \langle 1, 1\rangle & &
\end{tikzcd}
$$



$\langle U_q^-(G_2), U_q^+(G_2)\rangle$
$\langle x_2^-, U_q^+(G_2)\rangle$
$\langle 1, U_q^+(G_2)\rangle$
$\langle 1, [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]]\rangle$
$\langle 1, [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]\rangle$
$\langle 1, [x_2, [x_2, x_1]]\rangle$
$\langle 1, [x_2, x_1]\rangle$
$\langle 1, x_1\rangle$
$\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-], [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]\rangle$
$\langle x_2^-, [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]\rangle$
$\langle x_2^-, [x_2, [x_2, x_1]]\rangle$
$\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-], [x_2, [x_2, x_1]]\rangle$
$\langle x_2^-, [x_2, x_1]\rangle$
$\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-], [x_2, [x_2, x_1]]\rangle$
$\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-], [x_2, x_1]\rangle$
$\langle x_2^-, x_1\rangle$
$\langle 1, 1\rangle$
$\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-], [x_2, x_1]\rangle$
$\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-], x_1\rangle$
$\langle [x_1^-, x_2^-], [x_2, x_1]\rangle$
$\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]], [x_2, x_1]\rangle$
$\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_1\rangle$
$\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]], x_1\rangle$
$\langle U_q^-(G_2), x_1\rangle$
$\langle [x_1^-, x_2^-], x_1\rangle$
$\langle U_q^-(G_2), 1\rangle$
$\langle [x_1^-, x_2^-], 1\rangle$
$\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]], 1\rangle$
$\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-], 1\rangle$
$\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-], 1\rangle$
$\langle x_2^-, 1\rangle$


$\langle U_q^-(G_2), U_q^+(G_2)\rangle$
$\langle x_1^-, U_q^+(G_2)\rangle$
$\langle [x_2^-, x_1^-], [x_1, x_2]\rangle$
$\langle U_q^-(G_2), x_2\rangle$
$\langle 1, U_q^+(G_2)\rangle$
$\langle x_1^-, [x_1, x_2]\rangle$
$\langle [x_1^-, x_2^-], [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]\rangle$
$\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]], [[x_1, x_2], x_2]\rangle$
$\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]], [[[x_1, x_2], x_2], x_2]\rangle$
$\langle U_q^-(G_2), 1\rangle$
$\langle 1, [x_1, x_2]\rangle$
$\langle x_1^-, [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]\rangle$
$\langle [x_2^-, x_1^-], [[x_1, x_2], x_2]\rangle$
$\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]], [[[x_1, x_2], x_2], x_2]\rangle$
$\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]], x_2\rangle$
$\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]], 1\rangle$
$\langle 1, [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]\rangle$
$\langle x_1^-, [[x_1, x_2], x_2]\rangle$
$\langle [x_2^-, x_1^-], [[[x_1, x_2], x_2], x_2]\rangle$
$\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]], x_2\rangle$
$\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]], 1\rangle$
$\langle 1, [[x_1, x_2], x_2]\rangle$
$\langle x_1^-, [[[x_1, x_2], x_2], x_2]\rangle$
$\langle [x_2^-, x_1^-], x_2\rangle$
$\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]], 1\rangle$
$\langle 1, [[[x_1, x_2], x_2], x_2]\rangle$
$\langle x_1^-, x_2\rangle$
$\langle [x_2^-, x_1^-], 1\rangle$
$\langle 1, x_2\rangle$
$\langle x_1^-, 1\rangle$
$\langle 1, 1\rangle$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \langle U_q^-(G_2), U_q^+(G_2)\rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \langle U_q^-(G_2), x_1\rangle \arrow[dl, dash] & & \langle x_1, U_q^+(G_2)\rangle \arrow[dr, dash] & \\
\langle U_q^-(G_2), 1\rangle \arrow[d, dash] & & & & \langle 1, U_q^+(G_2)\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]], 1\rangle \arrow[d, dash] & & & & \langle 1, [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]]\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]], 1\rangle \arrow[d, dash] & & & & \langle 1, [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]]\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]], 1\rangle \arrow[d, dash] & & & & \langle 1, [x_2, [x_2, x_1]]\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle [x_2^-, x_1^-], 1\rangle \arrow[drr, dash] & & & & \langle 1, [x_2, x_1]\rangle \arrow[dll, dash] \\
 & & \langle x_1^-, x_1\rangle \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle x_1^-, 1\rangle \arrow[drr, dash] & & & & \langle 1, x_1\rangle \arrow[dll, dash] \\
 & & \langle 1, 1\rangle & &
\end{tikzcd}
$$

Note que nas figuras anteriores $\langle x^-, y\rangle$ denota a menor subálgebra coideal de $U_q(G_2)$ que contém x^-, y e $\mathbf{k}[H]$, isto é, $\langle x^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle y\rangle$ se usamos a decomposição triangular.

Demonstração. Pelo Lema 4.1.1, toda subálgebra coideal à direita (homogênea) que contém $\mathbf{k}[H]$ é da forma (4.1.1). Logo, pela Observação 4.1.3 e pelo Lema 4.1.2, basta calcular os skew-comutadores entre os geradores PBW de $\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-$.

Como $U_q^+(G_2)$ e $U_q^-(G_2)$ ($u_q^+(G_2)$ e $u_q^-(G_2)$) possuem cada um 12 subálgebras coideais à direita (homogêneas) contendo respectivamente $\mathbf{k}[G]$ e $\mathbf{k}[F]$, pelo Lema 4.1.1 temos 144 casos de possíveis subálgebras coideais à direita (homogêneas) para analisar.

Pelo Lema 4.4.1, temos 23 subálgebras coideais à direita:

1. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

2. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

3. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

4. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

5. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

6. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

7. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle$,

8. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle$,

9. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle$,

10. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle$,

11. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle$,

12. $\mathbf{k}[F] \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$,

13. $\langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

14. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

15. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

16. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

17. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

18. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

19. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

20. $\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

21. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

22. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$,

23. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \mathbf{k}[G]$.

Por **(1)**,

$$[x_1, x_1^-] = 1 - g_1 f_1 \in \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle.$$

Usando **(8)** temos

$$\begin{aligned}
[x_2, x_1^-] = 0 &\in \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2).
\end{aligned}$$

Por **(38)**,

$$\begin{aligned}
[[[[x_1, x_2], x_2], x_2], x_1^-] &= -p_{12}^3 (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 - q^{-1}) g_1 f_1 x_2^3 \\
&\in \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle \\
&\subseteq \langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2).
\end{aligned}$$

De **(27)**,

$$\begin{aligned}
[[[x_1,x_2],x_2],x_1^-] &= -p_{12}^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})g_1f_1x_2^2 \\
&\in \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1,x_2],x_2]\rangle \\
&\subseteq \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]]\rangle \\
&\subseteq \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1,x_2]\rangle \\
&\subseteq \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2).
\end{aligned}$$

Usando **(48)**,

$$\begin{aligned}
[[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]],x_1^-] &= -p_{12}^2q^3(1-q^{-3})g_1f_1[[[x_1,x_2],x_2],x_2] \\
&\quad - p_{12}^3q^4(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1x_2[[x_1,x_2],x_2] \\
&\in \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]]\rangle \\
&\subseteq \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1,x_2]\rangle \\
&\subseteq \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2).
\end{aligned}$$

Com **(17)** obtemos

$$\begin{aligned}
[[x_1,x_2],x_1^-] = -p_{12}(1-q^{-3})g_1f_1x_2 &\in \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1,x_2]\rangle \\
&\subseteq \langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2).
\end{aligned}$$

Logo, temos 7 subálgebras coideais à direita:

24. $\langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1\rangle$,

25. $\langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2\rangle$,

26. $\langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1,x_2],x_2],x_2]\rangle$,

27. $\langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1,x_2],x_2]\rangle$,

28. $\langle x_1^-\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]]\rangle$,

29. $\langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle$,

30. $\langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$.

Analogamente, por **(2)**, **(9)**, **(18)**, **(22)**, **(28)**, **(33)**, **(39)**, **(43)** e **(47)** temos mais 6 subálgebras coideais à direita:

31. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle$,

32. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

33. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

34. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

35. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

36. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$.

Usando **(11)**, **(19)**, **(29)**, **(40)** e **(49)**, mais os casos que já foram analisados, obtemos 5 novas subálgebras coideais à direita:

37. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle$,

38. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle$,

39. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle$,

40. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle$,

41. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle$.

Por **(13)**, **(30)** e **(41)** temos ainda:

42. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle$,

43. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle$,

44. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle$.

Com **(15)** e **(42)** obtemos mais 2 subálgebras coideais à direita:

45. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle$,

46. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle$.

De **(6)**, **(25)**, **(36)** e **(45)** obtemos as seguintes subálgebras coideais à direita:

47. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

48. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

49. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

50. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$.

Por **(5)**, **(24)** e **(35)** temos 3 novas subálgebras coideais à direita:

51. $\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

52. $\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

53. $\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$.

Com **(7)** e **(26)** concluímos que as seguintes combinações são subálgebras coideais à direita:

54. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

55. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$.

De **(3)** e **(23)** temos mais 2 subálgebras coideais à direita:

56. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

57. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$.

Finalmente, por **(1)** a **(3)**, **(5)** a **(10)**, **(12)**, **(14)** e **(16)**, obtemos:

58. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

59. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle$.

Temos até agora 59 subálgebras coideais à direita. Incluindo o caso trivial $U_q(G_2) = U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$ completamos 60. Com estas subálgebras coideais formamos os quatro reticulados desejados. O primeiro reticulado pode ser interpretado como as subálgebras coideais à direita que surgem de combinações do lado direito da Figura 3.1 com o lado direito da Figura 4.1. No segundo estão as combinações do lado esquerdo da Figura 3.1 com o lado direito da Figura 4.1. No terceiro temos as combinações do lado direito da Figura 3.1 com o lado esquerdo da Figura 4.1. No último analisamos os lados esquerdos de ambas figuras. Note que algumas subálgebras se repetem. Por exemplo, $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$ aparece nos quatro reticulados, e $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$ aparece em dois.

Para terminar a demonstração do Teorema faltam ainda 84 casos a serem considerados. Veremos a seguir que estes casos não são subálgebras coideais à direita.

Como, por **(21)**, $[[x_2, x_1], x_1^-] = (1 - q^{-3}) x_2$ e

$$\begin{aligned} x_2 \notin & \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle \supseteq \\ & \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle \supseteq \\ & \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle \supseteq \langle [x_2, x_1] \rangle, \end{aligned}$$

excluímos os seguintes 24 casos:

1. $\langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

2. $\langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

3. $\langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

4. $\langle x_1^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

5. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

6. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

7. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

8. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

9. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

10. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

11. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

12. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

13. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

14. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

15. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

16. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

17. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

18. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

19. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

20. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

21. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, x_1] \rangle$,

22. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

23. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2,[x_2,[x_2,x_1]]] \rangle$,

24. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1,x_2],[x_2,[x_2,x_1]]] \rangle$.

Por **(39)**, $[[[[x_1,x_2],x_2],x_2],x_2^-] = q^2(1-q^{-3})[[x_1,x_2],x_2]$. Logo, como

$$[[x_1,x_2],x_2] \notin \langle [[[[x_1,x_2],x_2],x_2] \rangle,$$

excluímos mais dois casos:

25. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[[x_1,x_2],x_2],x_2] \rangle$,

26. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[[x_1,x_2],x_2],x_2] \rangle$.

Usando **(28)**, temos $[[[x_1,x_2],x_2],x_2^-] = (1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1,x_2]$. Como

$$[x_1,x_2] \notin \langle [[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]] \rangle \supseteq \langle [[x_1,x_2],x_2] \rangle,$$

então os seguintes 4 casos não são subálgebras coideais à direita:

27. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1,x_2],x_2] \rangle$,

28. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1,x_2],x_2] \rangle$,

29. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]] \rangle$,

30. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]] \rangle$.

De **(18)** sabemos que $[[x_1,x_2],x_2^-] = (1-q^{-3})x_1$, o que exclui:

31. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1,x_2] \rangle$,

32. $U_q^-(G_2) \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1,x_2] \rangle$.

Por **(14)**, $[x_2,[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-]] = p_{12}(1-q^3)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]$, excluindo:

33. $\langle [[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle$,

34. $\langle [[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1,x_2],x_2],x_2] \rangle$,

35. $\langle [[[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2]\rangle$,

36. $\langle [[[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]\rangle$,

37. $\langle [[[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2]\rangle$,

38. $\langle [[[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$.

Em **(12)** temos $[x_2, [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] = p_{12}(1 + q - q^2 - q^3)[x_1^-, x_2^-]$, o que exclui:

39. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2\rangle$,

40. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2]\rangle$,

41. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2]\rangle$,

42. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]\rangle$,

43. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2]\rangle$,

44. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$,

45. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2\rangle$,

46. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2]\rangle$,

47. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2]\rangle$,

48. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]\rangle$,

49. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2]\rangle$,

50. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$.

Usando **(10)**, sabemos que $[x_2, [x_1^-, x_2^-]] = p_{12}(1-q^3)x_1^-$ e excluímos mais 6 casos:

51. $\langle [x_1^-, x_2^-]\rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2\rangle$,

52. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle$,

53. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle$,

54. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle$,

55. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle$,

56. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$.

A igualdade dada por **(4)**, $[x_1, [x_2^-, x_1^-]] = p_{21}(1 - q^3)x_2^-$, elimina mais 8 casos:

57. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

58. $\langle [x_2^-, x_1^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$,

59. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

60. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$,

61. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

62. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$,

62. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_1 \rangle$,

64. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} U_q^+(G_2)$.

De **(44)** sabemos que $[[x_2, [x_2, [x_2, x_1]]], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 - q^2)(1 + q)x_2$, o que exclui:

65. $\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

66. $\langle [[x_1^-, x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$.

Por **(37)** $[[x_2, [x_2, x_1]], [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]] = -p_{12}q^3(1 - q^{-3})^2(1 - q^{-2})(1 + q)[x_1^-, x_2^-]$, excluindo:

67. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

68. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

69. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$.

Pela igualdade dada por **(34)**, $[[x_2, [x_2, x_1]], [x_1^-, x_2^-]] = (1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 + q)x_2$, os seguintes casos não são subálgebras coideais à direita:

70. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$,

71. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

72. $\langle [x_1^-, x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$.

Em **(31)** temos $[[[x_1, x_2], x_2], [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]]] = p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1 - q^3)x_2^-$, eliminando os casos:

73. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle$,

74. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle$.

De **(50)** obtemos $[[[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] = q^2(1 - q^{-3})^2(1 - q^{-2})(1 + q)[x_1, x_2]$, o que exclui:

75. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle$,

76. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle$,

77. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle$.

Usando **(20)**, $[[x_1, x_2], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] = p_{21}(1 - q^{-3})(1 - q^2)(1 + q)x_2^-$, eliminando:

78. $\langle [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle$,

79. $\langle [x_2^-, [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle$,

80. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [x_1, x_2] \rangle$.

Para os últimos 4 casos usaremos a Proposição 1.4.6. Temos em **(46)**, $[[[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]], x_2^-] = -p_{12}q^2(1-q+q^{-1}-q^2)(1-q^{-3})^2 g_2 f_2 x_2 [x_2, x_1] x_1 + p_{12}q^2(1-q+q^{-1}-q^2)(1-q^{-3}) g_2 f_2 [x_2, [x_2, x_1]] x_1 - q^{-1}(1+q)(1-q+q^{-1}-q^2) g_2 f_2 [x_2, x_1]^2$. Como $x_2 \notin \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$, usando a proposição, excluímos:

81. $\langle x_2^- \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$,

82. $\langle [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle$.

Analogamente, por **(16)** temos $[x_2, [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]]] = p_{12}^2(1-q)(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-, x_1^-]^2 g_2 f_2 - p_{12}^3 q^7 (1-q^{-3})^2 (1+q-q^{-1}-q^{-2}) x_2^- [x_2^-, x_1^-] x_1^- g_2 f_2 + p_{12}^3 q (1-q^3)(1+q-q^{-1}-q^{-2}) [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]] x_1^- g_2 f_2$. Sabendo que $x_2^- \notin \langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle$, novamente pela Proposição 1.4.6 excluímos as últimas duas possibilidades:

83. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle x_2 \rangle$,

84. $\langle [[x_1^-, x_2^-], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] \rangle \otimes_{\mathbf{k}[F]} \mathbf{k}[H] \otimes_{\mathbf{k}[G]} \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle$.

Com isto esgotamos todas as possibilidades e provamos que os 60 casos iniciais são todas as subálgebras coideais à direita (homogêneas) que contém $\mathbf{k}[H]$ de $U_q(G_2)$ $(u_q(G_2))$.

Em resumo, temos a seguinte tabela:

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}	U_{12}
U_1^-						✓						
U_2^-						✓	✓	✓				
U_3^-						✓	✓	✓	✓			
U_4^-						✓	✓	✓	✓	✓	✓	
U_5^-					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
U_6^-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
U_7^-		✓	✓	✓	✓	✓	✓					✓
U_8^-		✓	✓	✓	✓	✓						
U_9^-			✓	✓	✓	✓						
U_{10}^-				✓	✓	✓						
U_{11}^-				✓	✓	✓						
U_{12}^-					✓	✓	✓					✓

onde

$$\begin{aligned}
U_1 &= \langle [[x_1, x_2], [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle, \\
U_2 &= \langle [x_2, [x_2, [x_2, x_1]]] \rangle, \\
U_3 &= \langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle, \\
U_4 &= \langle [x_2, x_1] \rangle, \\
U_5 &= \langle x_1 \rangle, \\
U_6 &= \mathbf{k}[G], \\
U_7 &= \langle x_2 \rangle, \\
U_8 &= \langle [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \rangle, \\
U_9 &= \langle [[x_1, x_2], x_2] \rangle, \\
U_{10} &= \langle [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \rangle, \\
U_{11} &= \langle [x_1, x_2] \rangle, \\
U_{12} &= U_q^+(G_2),
\end{aligned}$$

e usamos notação análoga para as subálgebras coideais à direita $\mathbf{U}^-$. O teorema está provado. $\square$

Apêndice

Neste apêndice estão desenvolvidos todos os skew-comutadores que foram apenas listados na Seção 4.3.

Note que, de acordo com a Definição 1.9.2, temos:

$$p(u,v) = p_{uv}, \quad p(u,v^-) = p_{vu}, \quad p(u^-,v) = p_{uv}^{-1}, \quad p(u^-,v^-) = p_{vu}^{-1}.$$

Temos também as seguintes relações, que decorrem de (1.9.1):

$$x_1g_1 = p_{11}g_1x_1, \quad x_1g_2 = p_{12}g_2x_1, \quad x_1f_1 = p_{11}f_1x_1, \quad x_1f_2 = p_{21}f_2x_1,$$

$$x_2g_1 = p_{21}g_1x_2, \quad x_2g_2 = p_{22}g_2x_2, \quad x_2f_1 = p_{12}f_1x_2, \quad x_2f_2 = p_{22}f_2x_2,$$

$$g_1x_1^- = p_{11}x_1^-g_1, \quad g_2x_1^- = p_{12}x_1^-g_2, \quad f_1x_1^- = p_{11}x_1^-f_1, \quad f_2x_1^- = p_{21}x_1^-f_2,$$

$$g_1x_2^- = p_{21}x_2^-g_1, \quad g_2x_2^- = p_{22}x_2^-g_2, \quad f_1x_2^- = p_{12}x_2^-f_1, \quad f_2x_2^- = p_{22}x_2^-f_2.$$

Para simplificar os cálculos, usaremos ainda as fórmulas

$$[[u,v],w^-] = [u,[v,w^-]] + p_{wv}[[u,w^-],v],$$

$$[u,[v^-,w^-]] = [[u,v^-],w^-] + p_{vu}[v^-,[u,w^-]],$$

$$[u \cdot v, w] = p_{vw}[u,w] \cdot v + u \cdot [v,w],$$

$$[u, v \cdot w] = [u, v] \cdot w + p_{uv} v \cdot [u, w].$$

Agora estamos prontos para realizar os cálculos necessários.

(1) $[x_1, x_1^-] = 1 - g_1 f_1$

(2) $[x_1, x_2^-] = 0$

(3) $[x_1, [x_1^-, x_2^-]] = [[x_1, x_1^-], x_2^-] + p_{11}[x_1^-, [x_1, x_2^-]] = (1 - g_1 f_1)x_2^- - x_2^-(1 - g_1 f_1) = -g_1 f_1 x_2^- + x_2^- g_1 f_1 = -p_{12}p_{21}x_2^- g_1 f_1 + x_2^- g_1 f_1 = (1 - q^{-3})x_2^- g_1 f_1$

(4) $[x_1, [x_2^-, x_1^-]] = [x_1, x_2^- x_1^-] - p_{12}^{-1}[x_1, x_1^- x_2^-] = [x_1, x_2^-]x_1^- + p_{21}x_2^-[x_1, x_1^-] - p_{12}^{-1}[x_1, x_1^-]x_2^- - p_{12}^{-1}p_{11}x_1^-[x_1, x_2^-] = p_{21}x_2^-(1 - g_1 f_1) - p_{12}^{-1}(1 - g_1 f_1)x_2^- = p_{21}x_2^- - p_{21}x_2^- g_1 f_1 - p_{12}^{-1}x_2^- + p_{12}^{-1}p_{12}p_{21}x_2^- g_1 f_1 = (p_{21} - p_{12}^{-1})x_2^- = p_{21}(1 - q^3)x_2^-$

(5) $[x_1, [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]] = [[x_1, [x_1^-, x_2^-]], x_2^-] + p_{11}p_{21}[[x_1^-, x_2^-], [x_1, x_2^-]] = (1 - q^{-3})x_2^- g_1 f_1 x_2^- - p_{22}^{-1}x_2^-(1 - q^{-3})x_2^- g_1 f_1 = (1 - q^{-3})(p_{12}p_{21} - p_{22}^{-1})(x_2^-)^2 g_1 f_1 = -q^{-1}(1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(x_2^-)^2 g_1 f_1$

(6) $[x_1, [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]] = [[x_1, [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]], x_2^-] + [[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], [x_1, x_2^-]]p_{11}p_{21}^2 = -q^{-1}(1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(x_2^-)^2 g_1 f_1 x_2^- + q^{-2}q^{-1}(1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(x_2^-)^3 g_1 f_1 = q^{-3}(1 - q^{-3})(1 - q^{-2})(1 - q^{-1})(x_2^-)^3 g_1 f_1$

(7) $[x_1, [[x_1^-, x_2^-], [[x_1^-, x_2^-], x_2^-]]] = -q(1 - q^{-3})^2 x_2^-[[x_1^-, x_2^-], x_2^-]g_1 f_1 - p_{21}q(1 - q^{-3})(1 + q - q^{-1})[[[x_1^-, x_2^-], x_2^-], x_2^-]g_1 f_1$

(8) $[x_2, x_1^-] = 0$

(9) $[x_2, x_2^-] = 1 - g_2 f_2$

(10) $[x_2, [x_1^-, x_2^-]] = p_{12}(1 - q^3)x_1^-$

(11) $[x_2, [x_2^-, x_1^-]] = (1 - q^{-3})x_1^- g_2 f_2$

(12) $[x_2,[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]=[x_2,[x_1^-,x_2^-]x_2^-]-p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}[x_2,x_2^-[x_1^-,x_2^-]]=[x_2,[x_1^-,x_2^-]]x_2^-+p_{12}p_{22}[x_1^-,x_2^-][x_2,x_2^-]-p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}[x_2,x_2^-][x_1^-,x_2^-]-p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}p_{22}x_2^-[x_2,[x_1^-,x_2^-]]=p_{12}(1-q^3)x_1^-x_2^-+p_{12}p_{22}[x_1^-,x_2^-](1-g_2f_2)-p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}(1-g_2f_2)[x_1^-,x_2^-]-p_{22}^{-1}p_{21}^{-1}p_{22}x_2^-p_{12}(1-q^3)x_1^-=p_{12}(1-q^3)[x_1^-,x_2^-]+p_{12}q[x_1^-,x_2^-]-p_{12}q^2[x_1^-,x_2^-]-p_{12}q[x_1^-,x_2^-]g_2f_2+p_{12}q^2g_2f_2[x_1^-,x_2^-]=(p_{12}q^4q^{-3}-p_{12}q)g_2f_2[x_1^-,x_2^-]+p_{12}(1+q-q^2-q^3)[x_1^-,x_2^-]=p_{12}(1+q-q^2-q^3)[x_1^-,x_2^-]$

(13) $[x_2,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]=[x_2,x_2^-[x_2^-,x_1^-]]-p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}[x_2,[x_2^-,x_1^-]x_2^-]=[x_2,x_2^-][x_2^-,x_1^-]+p_{22}x_2^-[x_2,[x_2^-,x_1^-]]-p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}[x_2,[x_2^-,x_1^-]]x_2^--p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}p_{22}p_{12}[x_2^-,x_1^-][x_2,x_2^-]=(1-g_2f_2)[x_2^-,x_1^-]+p_{22}x_2^-(1-q^{-3})x_1^-g_2f_2-p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}(1-q^{-3})x_1^-g_2f_2x_2^--[x_2^-,x_1^-](1-g_2f_2)=[x_2^-,x_1^-]-g_2f_2[x_2^-,x_1^-]+p_{22}(1-q^{-3})x_2^-x_1^-g_2f_2-p_{22}p_{12}^{-1}(1-q^{-3})x_1^-x_2^-g_2f_2-[x_2^-,x_1^-]+[x_2^-,x_1^-]g_2f_2=(1-q^{-1})[x_2^-,x_1^-]g_2f_2+q(1-q^{-3})[x_2^-,x_1^-]g_2f_2=(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]g_2f_2$

(14) $[x_2,[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-]]=[x_2,[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]x_2^-]-p_{22}^{-2}p_{21}^{-1}[x_2,x_2^-[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]=[x_2,[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]x_2^-+p_{12}p_{22}^2[[x_1^-,x_2^-],x_2^-][x_2,x_2^-]-p_{22}^{-2}p_{21}^{-1}[x_2,x_2^-][[x_1^-,x_2^-],x_2^-]-p_{22}^{-2}p_{21}^{-1}p_{22}x_2^-[x_2,[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]=p_{12}(1+q-q^2-q^3)[x_1^-,x_2^-]x_2^-+p_{12}p_{22}^2[[x_1^-,x_2^-],x_2^-](1-g_2f_2)-p_{22}^{-2}p_{21}^{-1}(1-g_2f_2)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]-p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}p_{12}(1+q-q^2-q^3)x_2^-[x_1^-,x_2^-]=p_{12}(1+q-q^2-q^3)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]+(p_{12}q^2-p_{12}q)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]-(p_{12}q^2-p_{12}q^2)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_2f_2=p_{12}(1-q^3)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]$

(15) $[x_2,[x_2^-,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]]=[x_2,x_2^-[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]-p_{22}^{-2}p_{12}^{-1}[x_2,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]x_2^-]=[x_2,x_2^-][x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]+p_{22}x_2^-[x_2,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]-p_{22}^{-2}p_{12}^{-1}[x_2,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]x_2^--p_{22}^{-2}p_{12}^{-1}p_{22}^2p_{12}[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]][x_2,x_2^-]=(1-g_2f_2)[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]+p_{22}(1+q-q^{-1}-q^{-2})x_2^-[x_2^-,x_1^-]g_2f_2-p_{22}^{-2}p_{12}^{-1}(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]g_2f_2x_2^--[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]](1-g_2f_2)=p_{22}(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]g_2f_2=q^2(1-q^{-3})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]g_2f_2$

(16) $[x_2,[[x_1^-,x_2^-],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]]=[[x_2,[x_1^-,x_2^-]],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]+p_{12}p_{22}[[x_1^-,x_2^-],[x_2,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]]=p_{12}(1-q^3)x_1^-[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]--p_{22}^2p_{12}p_{21}^{-2}p_{22}^{-2}p_{11}^{-1}p_{12}^{-1}p_{12}(1-q^3)[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]x_1^-+p_{12}p_{22}(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1^-,x_2^-][x_2^-,x_1^-]g_2f_2-p_{12}^{-1}p_{22}^{-1}p_{21}^{-2}p_{22}^{-2}p_{11}^{-1}p_{12}^{-1}p_{12}p_{22}(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]g_2f_2[x_1^-,x_2^-]=p_{12}(1-$

$q^3)(p_{12}q^2(1-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]^2+p_{12}^2q^3[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]x_1^-)-p_{12}^3q^3(1-q^3)[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]x_1^-+p_{12}q(1+q-q^{-1}-q^{-2})(p_{12}(1-q^3)x_2^-x_1^- - p_{12}[x_2^-,x_1^-])[x_2^-,x_1^-]g_2f_2 - p_{12}(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-](p_{12}(1-q^3)x_2^-x_1^- - p_{12}[x_2^-,x_1^-])g_2f_2 = -p_{12}^3q^7(1-q^{-3})^2(1+q-q^{-1}-q^{-2})x_2^-[x_2^-,x_1^-]x_1^-g_2f_2+p_{12}^2(1-q)(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]^2g_2f_2+p_{12}^3q(1-q^3)(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]x_1^-g_2f_2$

(17) $[[x_1,x_2],x_1^-] = [x_1x_2,x_1^-] - p_{12}[x_2x_1,x_1^-] = p_{12}[x_1,x_1^-]x_2 + x_1[x_2,x_1^-] - p_{12}p_{11}[x_2,x_1^-]x_1 - p_{12}x_2[x_1,x_1^-] = p_{12}(1-g_1f_1)x_2 - p_{12}x_2(1-g_1f_1) = p_{12}^2p_{21}g_1f_1x_2 - p_{12}g_1f_1x_2 = -p_{12}(1-q^{-3})g_1f_1x_2$

(18) $[[x_1,x_2],x_2^-] = [x_1x_2,x_2^-] - p_{12}[x_2x_1,x_2^-] = p_{22}[x_1,x_2^-]x_2 + x_1[x_2,x_2^-] - p_{12}p_{21}[x_2,x_2^-]x_1 - p_{12}x_2[x_1,x_2^-] = x_1(1-g_2f_2) - p_{12}p_{21}(1-g_2f_2)x_1 = (1-q^{-3})x_1$

(19) $[[x_1,x_2],[x_2^-,x_1^-]] = [x_1x_2,[x_2^-,x_1^-]]-p_{12}[x_2x_1,[x_2^-,x_1^-]] = p_{12}p_{22}[x_1,[x_2^-,x_1^-]]x_2+x_1[x_2,[x_2^-,x_1^-]]-p_{12}p_{11}p_{21}[x_2,[x_2^-,x_1^-]]x_1-p_{12}x_2[x_1,[x_2^-,x_1^-]] = p_{12}p_{21}q(1-q^3)x_2^-x_2+(1-q^{-3})x_1x_1^-g_2f_2-(1-q^{-3})x_1^-g_2f_2x_1-p_{12}p_{21}q(1-q^3)x_2x_2^- = (q^3-1)x_1^-x_1g_2f_2+(1-q^{-3})g_2f_2-(1-q^{-3})g_1f_1g_2f_2-(1-q^{-3})x_1^-g_2f_2x_1-q^{-3}(1-q^3)+q^{-3}(1-q^3)g_2f_2 = (1-q^{-3})(1-g_1f_1g_2f_2)$

(20) $[[x_1,x_2],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]] = [[[x_1,x_2],x_2^-],[x_2^-,x_1^-]]+p_{21}p_{22}[x_2^-,[[x_1,x_2],[x_2^-,x_1^-]]] = (1-q^{-3})x_1[x_2^-,x_1^-]-p_{21}p_{22}p_{11}p_{12}p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}(1-q^{-3})[x_2^-,x_1^-]x_1+p_{21}p_{22}(1-q^{-3})x_2^-(1-g_1f_1g_2f_2)-p_{21}p_{22}(1-q^{-3})p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}(1-g_1f_1g_2f_2)x_2^- = (1-q^{-3})[x_1,[x_2^-,x_1^-]] + p_{21}p_{22}(1-q^{-3})(1-q)x_2^- = p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-3})x_2^- + p_{21}p_{22}q(1-q^{-3})(1-q)x_2^- = p_{21}(1-q^{-3})(1+q-q^2-q^3)x_2^-$

(21) $[[x_2,x_1],x_1^-] = (1-q^{-3})x_2$

(22) $[[x_2,x_1],x_2^-] = -p_{21}(1-q^{-3})g_2f_2x_1$

(23) $[[x_2,x_1],[x_1^-,x_2^-]] = (1-q^{-3})(1-g_2f_2g_1f_1)$

(24) $[[x_2,x_1],[x_1^-,x_2^-],x_2^-] = [[[x_2,x_1],[x_1^-,x_2^-]],x_2^-]+p_{12}p_{11}p_{22}p_{21}[[x_1^-,x_2^-],[[x_2,x_1],x_2^-]] = (1-q^{-3})(1-g_2f_2g_1f_1)x_2^- - p_{22}p_{21}p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}(1-q^{-3})x_2^-(1-g_2f_2g_1f_1) -$

$qp_{21}(1-q^{-3})[x_1^-,x_2^-]g_2f_2x_1+qp_{21}(1-q^{-3})p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}p_{11}^{-1}p_{22}^{-1}p_{21}^{-1}g_2f_2x_1[x_1^-,x_2^-] = (1-q^{-3})(1-q^{-1})x_2^-g_2f_2g_1f_1 - p_{21}q(1-q^{-3})[x_1^-,x_2^-]g_2f_2x_1 + q^{-1}(1-q^{-3})g_2f_2((1-q^{-3})x_2^-g_1f_1+p_{11}p_{21}[x_1^-,x_2^-]x_1) = (1-q^{-3})(1-q^{-1})x_2^-g_2f_2g_1f_1- p_{21}q(1-q^{-3})[x_1^-,x_2^-]g_2f_2x_1+q(1-q^{-3})^2x_2^-g_2f_2g_1f_1+p_{21}q^2(1-q^{-3})p_{12}p_{21}q^2 [x_1^-,x_2^-]g_2f_2x_1 = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q)x_2^-g_1f_1g_2f_2$

(25) $[[x_2,x_1],[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-]] = [[[x_2,x_1],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]],x_2^-]+p_{12}p_{11}p_{22}^2p_{21}^2 [[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],[[x_2,x_1],x_2^-]] = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^-g_1f_1g_2f_2x_2^- - p_{22}p_{21}p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(x_2^-)^2g_1f_1g_2f_2-p_{21}^2q^2[[x_1^-,x_2^-],x_2^-](1-q^{-3})g_2f_2x_1 + p_{21}^2q^2(1-q^{-3})p_{12}^{-1}p_{11}^{-1}p_{22}^{-2}p_{21}^{-2}p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}g_2f_2x_1[[x_1^-,x_2^-],x_2^-] = -p_{21}^2q^2(1-q^{-3})[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_2f_2x_1+q^{-2}(1-q^{-3})g_2f_2(p_{21}^2p_{11}[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]x_1- q^{-1}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(x_2^-)^2g_1f_1) = -q(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(x_2^-)^2g_1f_1g_2f_2$

(26) $[[x_2,x_1],[[x_1^-,x_2^-],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]] = [[[x_2,x_1],[x_1^-,x_2^-]],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]] + p_{12}p_{11}p_{22}p_{21}[[x_2^-,x_1^-],[[x_1,x_2],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]] = (1-q^{-3})(1-g_2f_2g_1f_1)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]- p_{12}p_{11}p_{22}^2p_{21}^2p_{11}^{-1}p_{12}^{-1}p_{21}^{-2}p_{22}^{-2}(1-q^{-3})[[x_1^-,x_2^-],x_2^-](1-g_2f_2g_1f_1)+p_{22}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)[x_1^-,x_2^-]x_2^-g_2f_2g_1f_1 - p_{22}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)p_{12}^{-1}p_{11}^{-1}p_{22}^{-1}p_{21}^{-1}p_{11}^{-1}p_{12}^{-1}p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}x_2^-g_2f_2g_1f_1[x_1^-,x_2^-] = (1-q)(1-q^{-3})[[x_1^-,x_2^-],x_2^-] g_1f_1g_2f_2+p_{22}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)[x_1^-,x_2^-]x_2^-g_2f_2g_1f_1 - p_{12}p_{22}^3(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^-[x_1^-,x_2^-]g_2f_2g_1f_1 = (1-q)(1-q^{-3})[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_1f_1g_2f_2+ p_{22}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_2f_1g_1f_1 = (1-q^{-3})(1-q+q(1-q^{-2})(1+q))[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_2f_2g_1f_1 = q^2(1-q^{-3})[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_1f_1g_2f_2$

(27) $[[[x_1,x_2],x_2],x_1^-] = [[x_1,x_2]x_2,x_1^-]-p_{12}p_{22}[x_2[x_1,x_2],x_1^-] = p_{12}[[x_1,x_2],x_1^-]x_2+ [x_1,x_2][x_2,x_1^-]-p_{12}p_{22}p_{11}p_{12}[x_2,x_1^-][x_1,x_2]-p_{12}p_{22}x_2[[x_1,x_2],x_1^-] = -p_{12}^2(1-q^{-3})g_1f_1x_2^2 + p_{12}^3p_{21}p_{22}(1-q^{-3})g_1f_1x_2^2 = -p_{12}^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})g_1f_1x_2^2$

(28) $[[[x_1,x_2],x_2],x_2^-] = [[x_1,x_2]x_2,x_2^-]-p_{12}p_{22}[x_2[x_1,x_2],x_2^-] = p_{22}[[x_1,x_2],x_2^-]x_2+ [x_1,x_2][x_2,x_2^-]-p_{12}p_{22}p_{21}p_{22}[x_2,x_2^-][x_1,x_2]-p_{12}p_{22}x_2[[x_1,x_2],x_2^-] = p_{22}(1-q^{-3})x_1x_2 + [x_1,x_2](1-g_2f_2) - q^{-1}(1-g_2f_2) - p_{12}p_{22}(1-q^{-3})x_2x_1 = (1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1,x_2]$

(29) $[[[x_1,x_2],x_2],[x_2^-,x_1^-]] = [[x_1,x_2],[x_2,[x_2^-,x_1^-]]]+p_{22}p_{12}[[[x_1,x_2],[x_2^-,x_1^-]],x_2] =$

$(1-q^{-3})[x_1,x_2]x_1^- g_2f_2 - p_{12}p_{22}p_{21}p_{22}p_{11}p_{12}(1-q^{-3})x_1^- g_2f_2[x_1,x_2] + p_{12}p_{22}(1-q^{-3})(1-g_1f_1g_2f_2)x_2 - p_{12}p_{22}p_{12}p_{22}p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}(1-q^{-3})x_2(1-g_1f_1g_2f_2) = (1-q^{-3})(p_{12}p_{11}x_1^-[x_1,x_2] - p_{12}(1-q^{-3})g_1f_1x_2)g_2f_2 - p_{12}q^2(1-q^{-3})x_1^- g_2f_2[x_1,x_2] - (1-q^{-1})p_{12}q(1-q^{-3})g_1f_1g_2f_2x_2 = -p_{12}(1-q^{-3})^2q^2g_1f_1g_2f_2x_2 - p_{12}q(1-q^{-1})(1-q^{-3})g_1f_1g_2f_2x_2 = -p_{12}(1-q^{-3})q(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2f_2x_2$

(30) $[[[x_1,x_2],x_2],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]] = [[[x_1,x_2],x_2],[x_2^-,x_1^-]] + p_{21}q^2[x_2^-,[[x_1,x_2],x_2]] = (1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1,x_2][x_2^-,x_1^-] - p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}p_{21}p_{22}^2p_{11}p_{12}^2(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-][x_1,x_2] - p_{21}q^2p_{12}q(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^- g_1f_1g_2f_2x_2 + (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}p_{21}p_{22}^2p_{11}p_{12}^2g_1f_1g_2f_2x_2x_2^- = (1+q-q^{-1}-q^{-2})((1-q^{-3})(1-g_1f_1g_2f_2) + q[x_2^-,x_1^-][x_1,x_2]) - q(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-][x_1,x_2] - (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^- g_1f_1g_2f_2x_2 + (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2f_2(1-g_2f_2+qx_2^-x_2) = (1+q-q^{-1}-q^{-2})(1-q^{-3})(1-g_1f_1g_2f_2) - (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^- g_1f_1g_2f_2x_2 + (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2f_2(1-g_2f_2) + (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^- g_1f_1g_2f_2x_2 = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-g_1f_1g_2^2f_2^2)$

(31) $[[[x_1,x_2],x_2],[x_2^-,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]] = [[[[x_1,x_2],x_2],x_2^-],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]] + p_{21}q^2 [x_2^-,[[[x_1,x_2],x_2],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]] = (1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1,x_2][x_2^-,[x_2^-,x_1^-]] - p_{21}^2p_{22}^4p_{11}p_{12}^2p_{22}^{-2}p_{12}^{-1}(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]][x_1,x_2] + p_{21}q^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^-(1-g_1f_1g_2^2f_2^2) - p_{21}q^2p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}p_{22}^{-2}p_{12}^{-1}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-g_1f_1g_2^2f_2^2)x_2^- = (1+q-q^{-1}-q^{-2})(p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^- + p_{21}^2p_{22}^2p_{11}p_{12}[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]][x_1,x_2]) - p_{21}q^2(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]][x_1,x_2] + p_{21}q^2(1-q^{-1})(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^- = p_{21}(1-q^{-3})(1+q)((1-q^{-2})(1+q-q^{-1}-q^{-2}) + q^2(1-q^{-1})(1-q^{-2}))x_2^- = p_{21}q(1-q^{-3})^2(1+q)(1-q^{-2})x_2^-$

(32) $[[x_2,[x_2,x_1]],x_1^-] = [x_2[x_2,x_1],x_1^-] - p_{22}p_{21}[[x_2,x_1]x_2,x_1^-] = p_{12}p_{11}[x_2,x_1^-][x_2,x_1] + x_2[[x_2,x_1],x_1^-] - p_{22}p_{12}p_{21}[[x_2,x_1],x_1^-]x_2 - p_{22}p_{21}[x_2,x_1][x_2,x_1^-] = (1-q^{-3})x_2^2 - q^{-2}(1-q^{-3})x_2^2 = (1-q^{-3})(1-q^{-2})x_2^2$

(33) $[[x_2,[x_2,x_1]],x_2^-] = [x_2[x_2,x_1],x_2^-] - p_{22}p_{21}[[x_2,x_1]x_2,x_2^-] = p_{22}p_{21}[x_2,x_2^-][x_2,x_1] + x_2[[x_2,x_1],x_2^-] - p_{22}p_{22}p_{21}[[x_2,x_1],x_2^-]x_2 - p_{22}p_{21}[x_2,x_1][x_2,x_2^-] = p_{22}p_{21}(1-$

$g_2f_2)[x_2,x_1]-p_{21}(1-q^{-3})x_2g_2f_2x_1+p_{22}^2p_{21}^2(1-q^{-3})g_2f_2x_1x_2-p_{22}p_{21}[x_2,x_1](1-g_2f_2) = -p_{21}q^2(1-q^{-3})g_2f_2[x_2,x_1]-p_{21}qg_2f_2[x_2,x_1]+p_{21}g_2f_2[x_2,x_1] = p_{21}(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2[x_2,x_1]$

(34) $[[x_2,[x_2,x_1]],[x_1^-,x_2^-]] = [x_2,[[x_2,x_1],[x_1^-,x_2^-]]]+p_{12}p_{11}p_{22}p_{21}[[x_2,[x_1^-,x_2^-]],[x_2,x_1]] = (1-q^{-3})x_2(1-g_2f_2g_1f_1)-p_{22}p_{21}p_{12}p_{22}(1-q^{-3})(1-g_1f_1g_2f_2)x_2+p_{12}(1-q^3)x_1^-[x_2,x_1]-p_{22}p_{21}p_{12}^{-1}p_{11}^{-1}p_{22}^{-1}p_{21}^{-1}p_{12}(1-q^3)[x_2,x_1]x_2^- = (1-q^{-3})(1-q^{-1})x_2+p_{12}(1-q^3)x_1^-[x_2,x_1]-q^{-3}(1-q^3)((1-q^{-3})x_2+p_{12}q^3x_1^-[x_2,x_1]) = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2$

(35) $[[x_2,[x_2,x_1]],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]] = [x_2,[[x_2,x_1],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]]+p_{12}p_{22}^2p_{11}p_{21}^2$ $[[x_2,[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]],[x_2,x_1]] = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2x_2^-g_2f_2g_1f_1 - p_{22}p_{21}p_{12}p_{22}^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^-g_2f_2g_1f_1x_2+p_{21}q^2p_{12}(1+q-q^2-q^3)[x_1^-,x_2^-][x_2,x_1]-q^{-1}p_{22}p_{21}p_{12}^{-1}p_{11}^{-1}p_{22}^{-2}p_{21}^{-2}(1+q-q^2-q^3)[x_2,x_1][x_1^-,x_2^-] = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-g_2f_2+qx_2^-x_2)g_2f_2g_1f_1-(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^-g_2f_2g_1f_1x_2+q^{-1}(1+q-q^2-q^3)[x_1^-,x_2^-][x_2,x_1]-q^{-2}(1+q-q^2-q^3)((1-q^{-3})(1-g_2f_2g_1f_1)+p_{12}p_{11}p_{22}p_{21}[x_1^-,x_2^-][x_2,x_1]) = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-g_1f_1g_2^2f_2^2)$

(36) $[[x_2,[x_2,x_1]],[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-]] = [[[x_2,[x_2,x_1]],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]],x_2^-]+p_{12}^2$ $p_{11}p_{22}^4p_{21}^2[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],[[x_2,[x_2,x_1]],x_2^-]] = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-g_2^2f_2^2g_1f_1)x_2^- - p_{22}^2p_{21}p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^-(1-g_2^2f_2^2g_1f_1)+qp_{21}(1-q+q^{-1}-q^2)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_2f_2[x_2,x_1]-p_{12}^{-2}p_{11}^{-1}p_{22}^{-4}p_{21}^{-2}p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}qp_{21}(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2[x_2,x_1][[x_1^-,x_2^-],x_2^-] = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-q)x_2^-g_2^2f_2^2g_1f_1+p_{21}q(1-q+q^{-1}-q^2)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_2f_2[x_2,x_1]-q^{-2}(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2((1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2^-g_2^2f_2^2g_1f_1+p_{12}p_{11}p_{22}^2p_{21}^2[[x_1^-,x_2^-],x_2^-][x_2,x_1]) = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-q-1+q+q^{-1}-q^{-2})x_2^-g_2^2f_2^2g_1f_1 = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)x_2^-g_1f_1g_2^2f_2^2$

(37) $[[x_2,[x_2,x_1]],[[x_1^-,x_2^-],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]]] = -p_{12}q^3(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)[x_1^-,x_2^-]$

(38) $[[[[x_1,x_2],x_2],x_2],x_1^-] = [[[x_1,x_2],x_2]x_2,x_1^-]-p_{12}p_{22}^2[x_2[[x_1,x_2],x_2],x_1^-] =$

$p_{12}[[[x_1,x_2],x_2],x_1^-]x_2+[[x_1,x_2],x_2][x_2,x_1^-]-p_{12}p_{22}^2p_{11}p_{12}^2[x_2,x_1^-][[x_1,x_2],x_2]-p_{12}p_{22}^2x_2[[[x_1,x_2],x_2],x_1^-] = -p_{12}^3(1-q^{-3})(1-q^{-2})g_1f_1x_2^3 + p_{12}^3q^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})p_{12}p_{21}g_1f_1x_2^3 = -p_{12}^3(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})g_1f_1x_2^3$

(39) $[[[[x_1,x_2],x_2],x_2],x_2^-] = [[[x_1,x_2],x_2]x_2,x_2^-]-p_{12}p_{22}^2[x_2[[x_1,x_2],x_2],x_2^-] = p_{22}[[[x_1,x_2],x_2],x_2^-]x_2+[[x_1,x_2],x_2][x_2,x_2^-]-p_{12}p_{22}^4p_{21}[x_2,x_2^-][[x_1,x_2],x_2]-p_{12}p_{22}^2x_2[[[x_1,x_2],x_2],x_2^-] = p_{22}(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1,x_2]x_2+[[x_1,x_2],x_2](1-g_2f_2) - q(1-g_2f_2)[[x_1,x_2],x_2] - p_{12}q^2(1+q-q^{-1}-q^{-2})x_2[x_1,x_2] = q(1+q-q^{-1}-q^{-2})[[x_1,x_2],x_2]+(1-q)[[x_1,x_2],x_2]-[[x_1,x_2],x_2]g_2f_2+qg_2f_2[[x_1,x_2],x_2] = q^2(1-q^{-3})[[x_1,x_2],x_2]$

(40) $[[[[x_1,x_2],x_2],x_2],[x_2^-,x_1^-]] = [[[x_1,x_2],x_2],[x_2,[x_2^-,x_1^-]]]+p_{22}p_{12}[[[[x_1,x_2],x_2],[x_2^-,x_1^-]],x_2] = (1-q^{-3})[[x_1,x_2],x_2]x_1^-g_2f_2 - p_{12}p_{22}^2p_{21}p_{22}^2p_{11}p_{12}^2(1-q^{-3})x_1^-g_2f_2[[x_1,x_2],x_2] - p_{12}^2q^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2f_2x_2^2 + p_{12}p_{22}^2p_{22}^{-1}p_{12}^{-1}p_{12}^2q^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2g_1f_1g_2f_2x_2 = (1-q^{-3})(-p_{12}^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})g_1f_1x_2^2+p_{11}p_{12}^2x_1^-[[x_1,x_2],x_2])g_2f_2-p_{12}^2q^4(1-q^{-3})x_1^-g_2f_2[[x_1,x_2],x_2] = -p_{12}^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})q^4g_1f_1g_2f_2x_2^2$

(41) $[[[[x_1,x_2],x_2],x_2],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]] = [[[x_1,x_2],x_2],[x_2,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]]+p_{22}^2p_{12}$ $[[[[x_1,x_2],x_2],[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]],x_2] = (1+q-q^{-1}-q^{-2})[[x_1,x_2],x_2][x_2^-,x_1^-]g_2f_2-p_{12}p_{22}^2p_{21}^2p_{22}^4p_{11}p_{12}^2(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]g_2f_2[[x_1,x_2],x_2]+p_{12}q^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-g_1f_1g_2^2f_2^2)x_2 - p_{12}p_{22}^2p_{22}^{-2}p_{12}^{-1}p_{12}q^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2(1-g_1f_1g_2^2f_2^2) = (1+q-q^{-1}-q^{-2})(-p_{12}q(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2f_2x_2+p_{21}p_{22}^2p_{11}p_{12}^2[x_2^-,x_1^-][[x_1,x_2],x_2])g_2f_2-p_{12}q^3(1-q-q^{-1}-q^{-2})[x_2^-,x_1^-]g_2f_2[[x_1,x_2],x_2] - p_{12}q^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2^2f_2^2x_2 + p_{12}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2^2f_2^2x_2 = -p_{12}q^3(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1+q-q^{-1}-q^{-2}+q^{-1}-1)g_1f_1g_2^2f_2^2x_2 = -p_{12}q^4(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2^2f_2^2x_2$

(42) $[[[[x_1,x_2],x_2],x_2],[x_2^-,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]] = [[[x_1,x_2],x_2],[x_2,[x_2^-,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]]]+p_{22}^3p12[[[[x_1,x_2],x_2],[x_2^-,[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]]],x_2] = q_2(1-q^{-3})[[x_1,x_2],x_2][x_2^-,[x_2^-,x1^-]]$ $g_2f_2-p_{12}p_{22}^2p_{21}^3p_{22}^6p_{11}p_{12}^2q_2(1-q^{-3})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]g_2f_2[[x_1,x_2],x_2]+p_{12}q^3p_{21}(1-$

$q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-q^3)x_2^-x_2 - p_{12}p_{22}p_{22}^{-3}p_{12}^{-1}p_{12}q^3p_{21}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-q^3)x_2x_2^- = q^2(1-q^{-3})(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-g_1f_1g_2^2f_2^2)+p_{21}^2p_{22}^4p_{11}p_{12}^2[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]][[x_1,x_2],x_2]g_2f_2-q^4(1-q^{-3})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]] g_2f_2[[x_1,x_2],x_2]+(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-q^3)x_2^-x_2-q^{-1}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-q^3)(1-g_2f_2+p_{22}x_2^-x_2) = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)(g_2f_2-g_1f_1g_2^3f_2^3)+q^4(1-q^{-3})[x_2^-,[x_2^-,x_1^-]]g_2f_2[[x_1,x_2],x_2]-q^4(1-q^{-3})[x_2^-[x_2^-,x_1^-]]g_2f_2[[x_1,x_2],x_2]-q^{-1}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-q^3)(1-g_2f_2) = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)(1-g_1f_1g_2^3f_2^3)$

(43) $[[x_2,[x_2,[x_2,x_1]]],x_2^-] = [x_2[x_2,[x_2,x_1]],x_2^-]-p_{22}^2p_{21}[[x_2,[x_2,x_1]]x_2,x_2^-] = p_{22}^2p_{21}[x_2,x_2^-][x_2,[x_2,x_1]]+x_2[[x_2,[x_2,x_1]],x_2^-]-p_{22}^3p_{21}[[x_2,[x_2,x_1]],x_2^-]x_2-p_{22}^2p_{21}[x_2,[x_2,x_1]][x_2,x_2^-] = p_{21}q^2(1-g_2f_2)[x_2,[x_2,x_1]]+p_{21}(1-q+q^{-1}-q^2)x_2g_2f_2[x_2,x_1]-q^3p_{21}^2(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2[x_2,x_1]x_2-p_{21}q^2[x_2,[x_2,x_1]](1-g_2f_2) = -p_{21}q^2g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]]+p_{21}q^3g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]]+p_{21}q^2(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2x_2[x_2,x_1]-p_{21}^2q^3(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2[x_2,x_1]x_2 = p_{21}q(1-q^{-3})g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]]$

(44) $[[x_2,[x_2,[x_2,x_1]]],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]] = [[[x_2,[x_2,[x_2,x_1]]],[x_1^-,x_2^-]],x_2^-]+p_{12}^3p_{11} p_{22}^3p_{21}[[x_1^-,x_2^-],[[x_2,[x_2,[x_2,x_1]]],x_2^-]] = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})x_2^2x_2^- - p_{22}^3p_{21}p_{21}^{-1}p_22^{-1}q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})x_2^-x_2^2+p_{12}^2q^3p_{21}q(1-q^3)[x_1^-,x_2^-]g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]]-p_{12}^{-3}p_{11}^{-1}p_{22}^{-3}p_21^{-1}p_21^{-1}p_{22}^{-1}p_{12}^2q^3p_{21}q(1-q^3)g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]][x_1,x_2^-] = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})((1+q)x_2-q(1+q)g_2f_2x_2+q^2x_2^-x_2^2)-q^4(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})x_2^-x_2^2+p_{12}q(1-q^3)[x_1^-,x_2^-]g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]]-(1-q^3)g_2f_2((1-q^{-3}(1-q^{-2}(1+q)x_2+p_{12}^2p_{22}^2p_{11}p_{21}[x_1^-,x_2^-][x_2,[x_2,x_1]] = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)x_2-q^3(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)g_2f_2x_2+q^3(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)g_2f_2x_2 = q^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)x_2$

(45) $[[x_2,[x_2,[x_2,x_1]]],[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],x_2^-]] = [[[x_2,[x_2,[x_2,x_1]]],[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]],x_2^-]+p_{12}^3p_{11}p_{22}^6p_{21}^2[[[x_1^-,x_2^-],x_2^-],[[x_2,[x_2,[x_2,x_1]]],x_2^-]] = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)x_2x_2^- - p_{22}^3p_{21}p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)x_2^-x_2+p_{12}q^3p_{21}q(1-q^3)[[x_1^-,x_2^-],x_2^-]g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]]-p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}p_{12}^{-3}p_{11}^{-1}p_{22}^{-6}p_{21}^{-2}q(1-q^3)g_2f_2((1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1-g_1f_1g_2^2f_2^2)+p_{12}^2p_{11}p_{22}^4p_{21}^2[[x_1^-,x_2^-],x_2^-][x_2,[x_2,x_1]]) =$

$q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2}(1+q)(1-g_2f_2)-q^{-1}(1-q^3)(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(g_2f_2-g_1f_1g_2^3f_2^3) = q^2(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1+q)(1-g_1f_1g_2^3f_2^3)$

(46) $[[[x_1,x_2],[x_2,[x_2,x_1]]],x_2^-] = [[x_1,x_2],[[x_2,[x_2,x_1]],x_2^-]]+p_{21}p_{22}^2[[[x_1,x_2],x_2^-],[x_2,[x_2,x_1]]] = p_{21}(1-q+q^{-1}-q^2)[x_1,x_2]g_2f_2[x_2,x_1]-p_{12}^2p_{11}p_{22}^3p_{21}^3(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2[x_2,x_1][x_1,x_2]+p_{21}q^2(1-q^{-3})x_1[x_2,[x_2,x_1]]-p_{12}^2p_{11}p_{22}^2p_{21}p_{22}^{-2}p_{21}^{-1}p_{21}q^2(1-q^{-3})[x_2,[x_2,x_1]]x_1 = p_{21}q^{-1}(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2(q^3p_{12}(1-q^{-3})x_2x_1-p_{12}q^3[x_2,x_1])[x_2,x_1]-p_{21}(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2[x_2,x_1]q^3p_{12}(1-q^{-3})x_2x_1-p_{12}q^3[x_2,x_1])+p_{21}q^2(1-q^{-3})(p_{12}q[x_2,x_1]^2+p_{12}^2q^3[x_2,[x_2,x_1]]x_1)-p_{12}q^2(1-q^{-3})[x_2,[x_2,x_1]]x_1 = -p_{12}q^2(1-q+q^{-1}-q^2)(1-q^{-3})^2g_2f_2x_2[x_2,x_1]x_1+p_{12}q^2(1-q+q^{-1}-q^2)(1-q^{-3})g_2f_2[x_2,[x_2,x_1]]x_1-q^{-1}(1+q)(1-q+q^{-1}-q^2)g_2f_2[x_2,x_1]^2$

(47) $[[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]],x_2^-] = [[x_1,x_2],[[[x_1,x_2],x_2],x_2^-]]+p_{21}p_{22}^2[[[x_1,x_2],x_2^-],[[x_1,x_2],x_2]] = (1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1,x_2]^2-p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2p_{21}p_{22}(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1,x_2]^2+p_{21}q^2(1-q^{-3}x_1[[x_1,x_2],x_2]-p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}p_{21}q^2(1-q^{-3})[[x_1,x_2],x_2]x_1 = -p_{12}q^2(1-q^{-3})[[x_1,x_2],x_2]x_1+p_{21}q^2(1-q^{-3})(p_{12}q(1-q^{-2})[x_1,x_2]^2+p_{12}^2q^3[[x_1,x_2],x_2]x_1) = (1-q^{-3})(1-q^{-2})[x_1,x_2]^2$

(48) $[[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]],x_1^-] = [[x_1,x_2],[[[x_1,x_2],x_2],x_1^-]]+p_{11}p_{12}[[[x_1,x_2],x_1^-],[[x_1,x_2],x_2]] = -p_{12}^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})[x_1,x_2]g_1f_1x_2^2+p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2p_{11}p_{12}p_{12}^2(1-q^{-3})(1-q^{-2})g_1f_1x_2^2[x_1,x_2]-p_{12}^2p_{11}(1-q^{-3})g_1f_1x_2[[x_1,x_2],x_2]+p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2 p_{11}^{-1}p_{12}^{-2}p_{12}^{-2}p_{11}(1-q^{-3}[[x_1,x_2],x_2]g_1f_1x_2 = -p_{12}^2q^3(1-q^{-3})(1-q^{-2})g_1f_1([[[x_1,x_2],x_2],x_2]+p_{12}q(1+q)x_2[[x_1,x_2],x_2]+p_{12}^2q^2x_2^2[x_1,x_2])+p_{12}^4q^5(1-q^{-3})(1-q^{-2})g_1f_1x_2^2[x_1,x_2]-p_{12}^2q^3(1-q^{-3})g_1f_1x_2[[x_1,x_2],x_2]+p_{12}q^2(1-q^{-3})g_1f_1([[[x_1,x_2],x_2],x_2]+p_{12}q^2x_2[[x_1,x_2],x_2]) = -p_{12}^2q^3(1-q^{-3})g_1f_1[[[x_1,x_2],x_2],x_2]-p_{12}^3q^4(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1x_2[[x_1,x_2],x_2]$

(49) $[[[x_1,x_2],[[x_1,x_2],x_2]],[x_2^-,x_1^-]] = [[x_1,x_2],[[[x_1,x_2],[x_2^-,x_1^-]]]+p_{21}p_{22}p_{11}p_{12} [[[x_1,x_2],[x_2^-,x_1^-]],[[x_1,x_2],x_2]] = -p_{12}q(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)[x_1,x_2]g_1f_1g_2f_2x_2+p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2p_{21}p_{22}p_{11}p12p_{12}q(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2f_2x_2[x_1,x_2]+q(1-q^{-3})(1-g_1f_1g_2f_2)[[x_1,x_2],x_2]-p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2p_{21}^{-1}p_{22}^{-2}p_{11}^{-1}p_{12}^{-2}q(1-$

$q^{-3}[[x_1, x_2], x_2](1-g_1f_1g_2f_2) = -p-12q^3(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2f_2([[x_1, x_2], x_2]- p_{12}qx_2[x_1, x_2]) + p_{12}^2q^4(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)g_1f_1g_2f_2x_2[x_1, x_2] + q(1- q^{-3})(1-g_1f_1g_2f_2)[[x_1, x_2], x_2]-q(1-q^{-3})[[x_1, x_2], x_2]+q(1-q^{-3})qg_1f_1g_2f_2[[x_1, x_2], x_2] = -p_{12}q^4(1-q^{-3})^2g_1f_1g_2f_2[[x_1, x_2], x_2]$

(50) $[[[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]] = [[x_1, x_2], [[[x_1, x_2], x_2], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]]]+ p_{21}^2p_{22}^4p_{11}p_{12}^2[[[x_1, x_2], [x_2^-, [x_2^-, x_1^-]]], [[x_1, x_2], x_2]] = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+ q)[x_1, x_2](1-g_1f_1g_2^2f_2^2) - p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2p_{21}^2p_{22}^2p_{11}p_{12}(1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+ q)(1-g_1f_1g_2^2f_2^2)[x_1, x_2] + qp_{21}(1-q^{-3})(1-q^2)(1+q)x_2^-[[x_1, x_2], x_2] - p_{11}p_{12}^2p_{21}p_{22}^2p_21^{-2}p_{22}^{-4}p_{11}^{-1}p_{12}^{-2}qp_{21}(1-q^{-3})(1-q^2)(1+q)((1+q-q^{-1}- q^{-2})[x_1, x_2] + p_{21}q^2x_2^-[[x_1, x_2], x_2]) = (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1+q)(1- q)[x_1, x_2] + p_{21}q(1-q^{-3})(1-q^2)(1+q)x_2^-[[x_1, x_2], x_2] - q^{-1}(1-q^{-3})(1- q^2)(1+q)(1+q-q^{-1}-q^{-2})[x_1, x_2]+p_{21}q(1-q^{-3})(1-q^2)(1+q)x_2^-[[x_1, x_2], x_2] = q^2(1-q^{-3})^2(1+q)(1-q^{-2})[x_1, x_2]$

Bibliografia

[1] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu e S. Raianu, *Hopf algebras: an introduction*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 235, 2001.

[2] V.O. Ferreira, L.S.I. Murakami e A. Paques, *A Hopf-Galois correspondence for free algebras*, J. Algebra, 276(2004), 407-416.

[3] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer (1972).

[4] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1990.

[5] V. K. Kharchenko, *An algebra of skew primitive elements*, Algebra and Logic, 37, N2(1998), 101-126

[6] V. K. Kharchenko, *A quantum analog of the Poincare-Birkhoff-Witt Theorem*, Algebra and Logic, 38, N4(1999), 259-276.

[7] V. K. Kharchenko, *Skew primitive elements in Hopf algebras and related identities*, Journal of Algebra, 238(2001), 534-559.

[8] V. K. Kharchenko, *A combinatorial approach to the quantifications of Lie algebras*, Pacific Journal of Mathematics, 203, N1(2002), 191-233.

[9] V. K. Kharchenko e A. A. Alvarez, *On the combinatorial rank of Hopf algebras*, Contemporany Mathematics, v.376(2005), 299-308.

[10] V. K. Kharchenko, *PBW-bases of coideal subalgebras and a freeness theorem*, TAMS, v.360, w10(2008), 5121-5143.

[11] V. K. Kharchenko e A. V. Lara Sagahón, *Right coideal subalgebras in* $U_q(sl_{n+1})$, Journal of Algebra, 319(2008), 2571-2625.

[12] V. K. Kharchenko, *Right coideal subalgebras in* $U_q^+(\mathfrak{so}_{2n+1})$, J. Eur. Math. Soc., in press.

[13] G. Letzter, *Coideal subalgebras and quantum symmetric pairs*, in: S. Montgomery, H.-J. Schneider (Eds.) New Directions in Hopf Algebras, MSRI Publications, 43(2002), 117-165.

[14] A. Masuoka e T. Yanai, *Hopf module duality applied to X-outer Galois theory*, J. Algebra, 265(2003), 229-246.

[15] A. Milinski, *Actions of pointed Hopf algebras on prime algebras*, Comm. Algebra, 23(1995), 313-333.

[16] A. Milinski e H.-J. Schneider, *Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups*, Contemp. Math., vol.267(2000), 215-236.

[17] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 82, Providence, 1993.

[18] B. Pogorelsky, *Right coideal subalgebras of the quantum Borel algebra of type* G_2, Journal of Algebra, 322(2009), 2335-2354.

[19] A. I. Shirshov, *On free Lie rings*, Mat. Sb., 45(87(2))(1958), 113-122.

[20] A. I. Shirshov, *Some algorithmic problems for Lie algebras*, Sibirskii Math. J., 3(2)(1962), 292-296.

[21] S. Westreich e T. Yanai, *More about a Galois type correspondence theory*, J. Algebra, 246(2001), 629-640.

[22] T. Yanai, *Galois correspondence theorem for Hopf algebra actions*, in: Algebraic structures and their representations, 393-411, Contemporary Mathematics, vol. 376, AMS, Providence, RI, 2005.

[23] T. Yanai, *Correspondence theory of Kharchenko and X-outer actions of pointed Hopf algebras*, Comm. Algebra, 25(1997), 1713-1740.

Índice