

Izabella Freitas  
IME - UFRGS, Porto Alegre

## Introdução

No problema de radiação de ondas de água por um disco submerso poroso, estamos interessados no comportamento de duas forças relacionadas com o movimento de um corpo submerso, conhecidas como massa adicional e amortecimento. **Massa adicional** - ou massa virtual - é "peso inexistente" adicionado ao corpo em movimento. **Amortecimento** representa a força que o sistema perdeu por causa das ondas geradas pelo movimento. A massa adicional  $A$ , e amortecimento  $D$ , do movimento oscilatório vertical do obstáculo podem ser expressas, respectivamente, como as partes real e imaginária da integral da descontinuidade da  $\phi$  sobre o corpo ( $[\phi]$ ), que representa a função de "potencial harmônico da velocidade",

$$A + iD = - \int_L [\phi] dS \quad (1)$$

onde  $L$  representa a superfície do corpo, que nesse caso, é um disco poroso.

## Formulação

Consideremos a superfície de um disco rígido e fino  $L$  e um sistema cartesiano de eixo  $z$  orientado para baixo com o fluido ocupando  $z \geq 0$  e em  $z = 0$  temos uma superfície sem perturbações. O potencial harmônico é dado por  $\text{Re}\{\phi(x, y, z)e^{-i\omega t}\}$ , no qual  $\phi$  satisfaz as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

a condição linearizada da superfície livre

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - K\phi = 0, \text{ em } z = 0. \quad (3)$$

e a condição de contorno do disco

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = iKG[\phi](p) + 1, \text{ em } L. \quad (4)$$

onde  $K = \omega^2/g$ ,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\omega$  é a frequência angular,  $[\phi](q) = \phi(q^+) - \phi(q^-)$  é a diferença de  $\phi$  de um lado para o outro do disco, com  $q^+$  e  $q^-$  sendo pontos do lado "positivo" e "negativo" de  $L$ , respectivamente.  $G$  é parâmetro do efeito poroso definido por Yu e Chwang [1]

$$G = \frac{\gamma(f + iS)}{K\delta(f^2 + S^2)}. \quad (5)$$

Nesse parâmetro,  $\gamma$  é a porosidade do corpo,  $S$  é o coeficiente de força inercial,  $f$  é o coeficiente de resistência e  $\delta$  é a espessura do meio poroso. Também é necessário que  $\phi$  satisfaça a condição de radiação

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} - iK\phi \right) = 0 \quad (6)$$

onde  $r$  é a distância usual entre dois pontos. Usando o teorema de Green, nosso problema se resume a resolver a equação integral hipersingular

$$\frac{1}{4\pi} \int_L [\phi](q) \frac{\partial^2 \mathcal{G}(p, q)}{\partial n_p \partial n_q} dS_q - iKG[\phi](p) = 1. \quad (7)$$

onde  $\mathcal{G}$  é uma função de Green usada como solução fundamental.

## Método de solução

Expandindo  $[\phi]$  usando séries de Fourier Legendre e coordenadas polares, temos que  $[\phi] = [\phi](r, \theta)$  pode ser escrita como

$$[\phi] \approx \sum_{k,m} \alpha_k^m B_k^m = \sum_{k=0}^{N_1} \left( \sum_{m=0}^{N_2} \alpha_k^m B_k^m \right) \quad (8)$$

onde

$$B_k^m(r, \theta) = P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos(m\theta), \quad m, k = 0, 1, \dots$$

e  $P_n^m$  são funções de Legendre associadas. Adotando as simplificações feitas em [2], expansão com funções de Bessel, coordenadas polares, e usando funções auxiliares - que podem ser vistas em [2] - nosso problema se torna resolver o sistema linear

$$\sum_{k,m} \alpha_k^m \left\{ \left( C_k^m B_k^m(r, \theta) - iKGB_k^m(r, \theta) \right) + \frac{1}{4\pi} \int_L B_k^m(s, \alpha) H_r(r, \theta; s, \alpha; d, K) s ds d\alpha \right\} = 1 \quad (9)$$

## Parâmetro G e resultados numéricos

Sabemos que  $G$  procura medir o efeito da porosidade de um objeto quando em contato com um fluido, neste, características do objeto são levadas em consideração tais como a porosidade, força inercial, coeficiente de resistência e espessura. Como existem muitos artigos que falam apenas sobre o caso em que  $G$  é puramente real, ou seja, quando em (5)  $f \gg S$  nesse trabalho nos concentramos em avaliar os efeitos deste parâmetro quando real e imaginário. Para uma melhor entender a influência de  $G$  no comportamento da massa adicional e do amortecimento separamos a análise inicialmente em dois casos: **G puramente real** e **G puramente imaginário**.

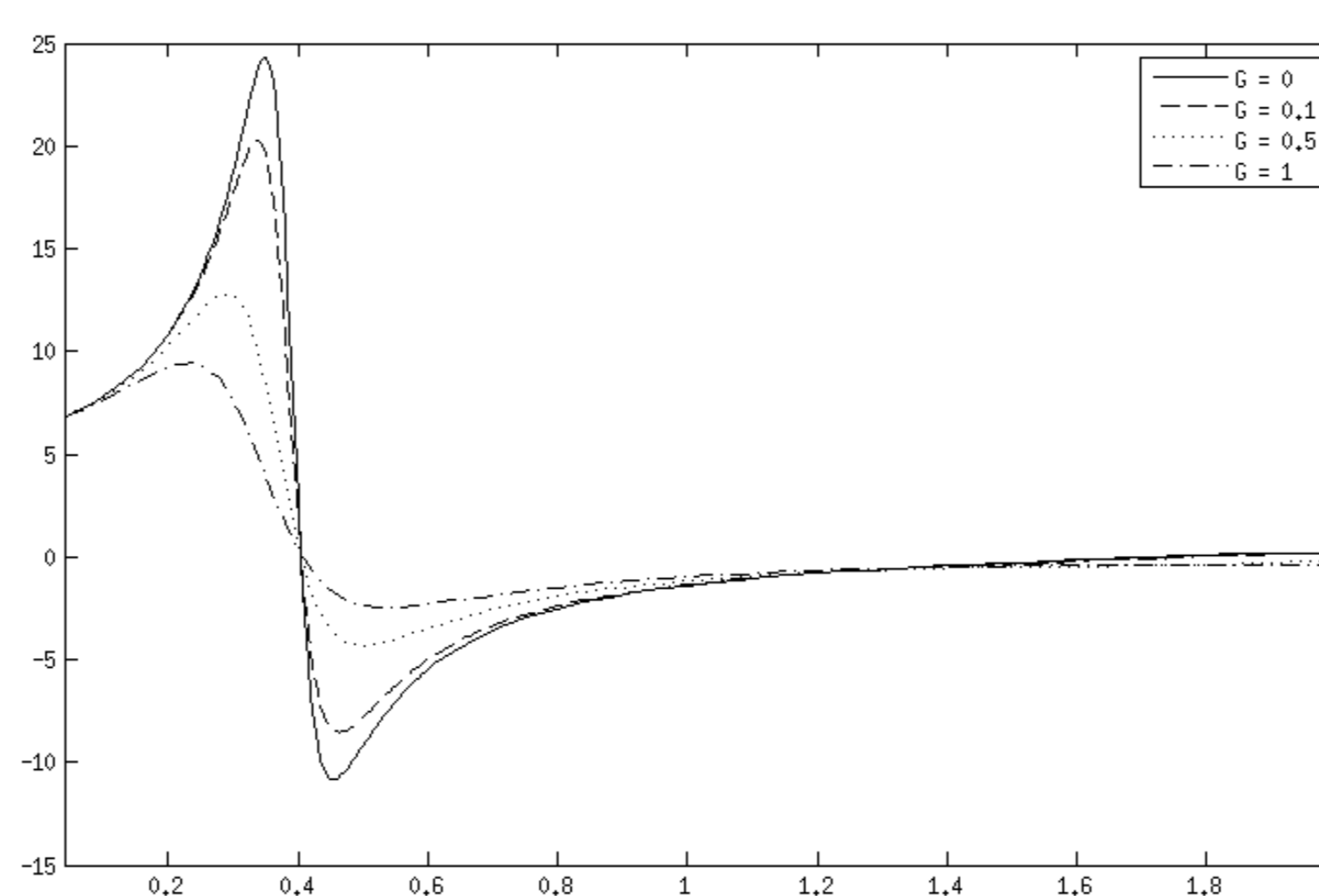


Figure 1: Massa adicional com  $d=0.1$  e  $G$  puramente real

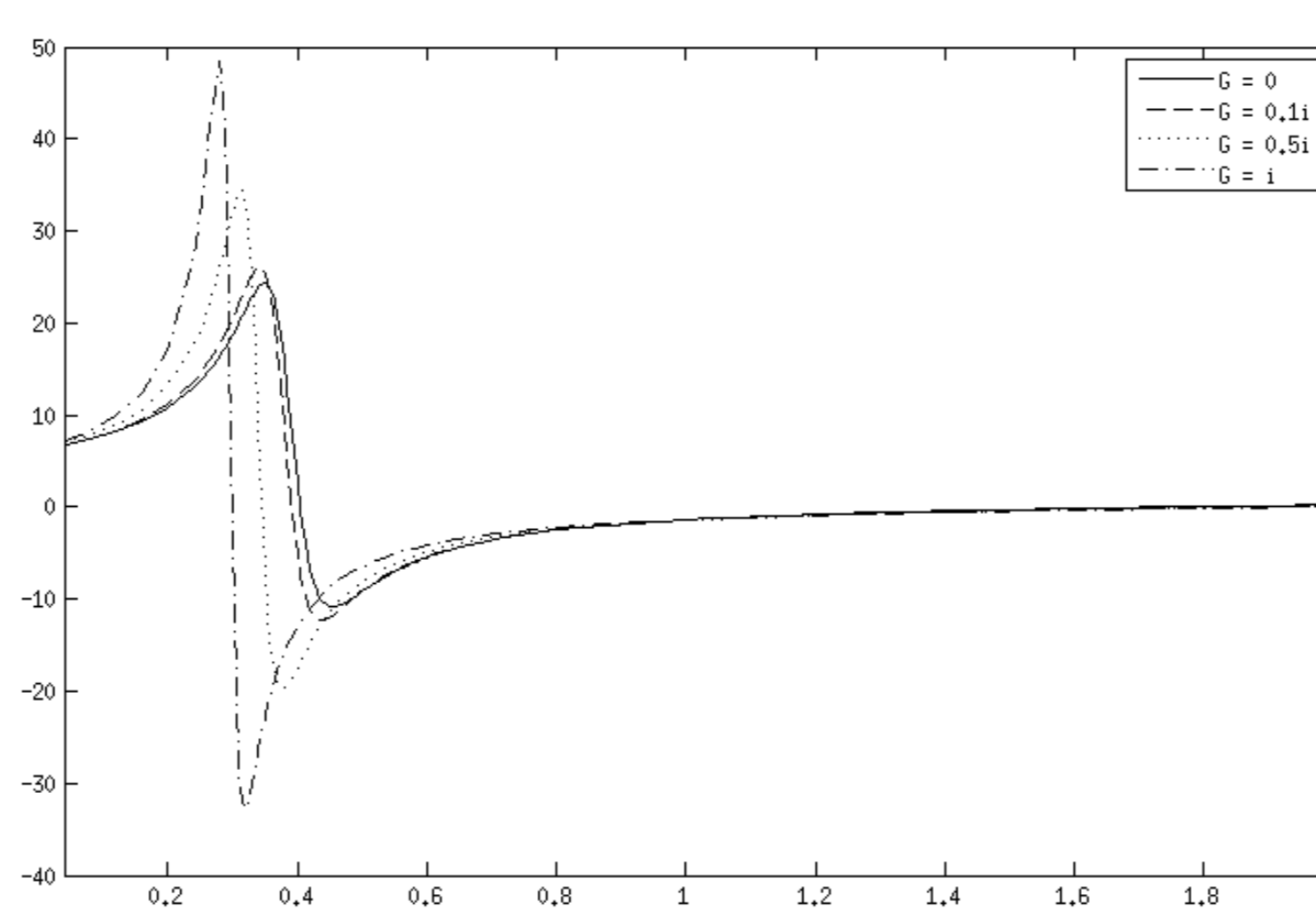


Figure 2: Massa adicional com  $d=0.1$  e  $G$  puramente imaginário

A Fig. 1 nos mostra que quando  $G$  real aumenta, as curvas tendem a ficar "contidas" na curva base  $G = 0$ , interpretada como o comportamento da massa adicional quando o disco é impermeável. É possível observar que o ponto de inflexão é conservado, mas existe uma suavização dos extremos e um deslocamento dos mesmos para frequências mais baixas. Na Fig. 2 podemos notar que o aumento do parâmetro  $G$  puramente imaginário causa um deslocamento dos pontos críticos do gráfico para comprimentos de onda mais baixos, um aumento significativo do máximo, diminuição do mínimo e um deslocamento também do ponto de inflexão. Os comportamentos

acima descritos se repetem quando analisamos as curvas de amortecimento.

## ...e quando G não for puramente real ou imaginário?

Para responder a pergunta sobre o comportamento quando  $G$  não tem uma característica física dominante, precisamos analisar mais ao fundo os valores de  $G$  no quadrante complexo positivo. Para melhor entendermos esse comportamento, vamos apresentar os mapas de cores mostrando os mínimos (Fig. 3) e máximos (Fig. 4) da massa adicional quando  $G \in \mathbb{C}_+$ .

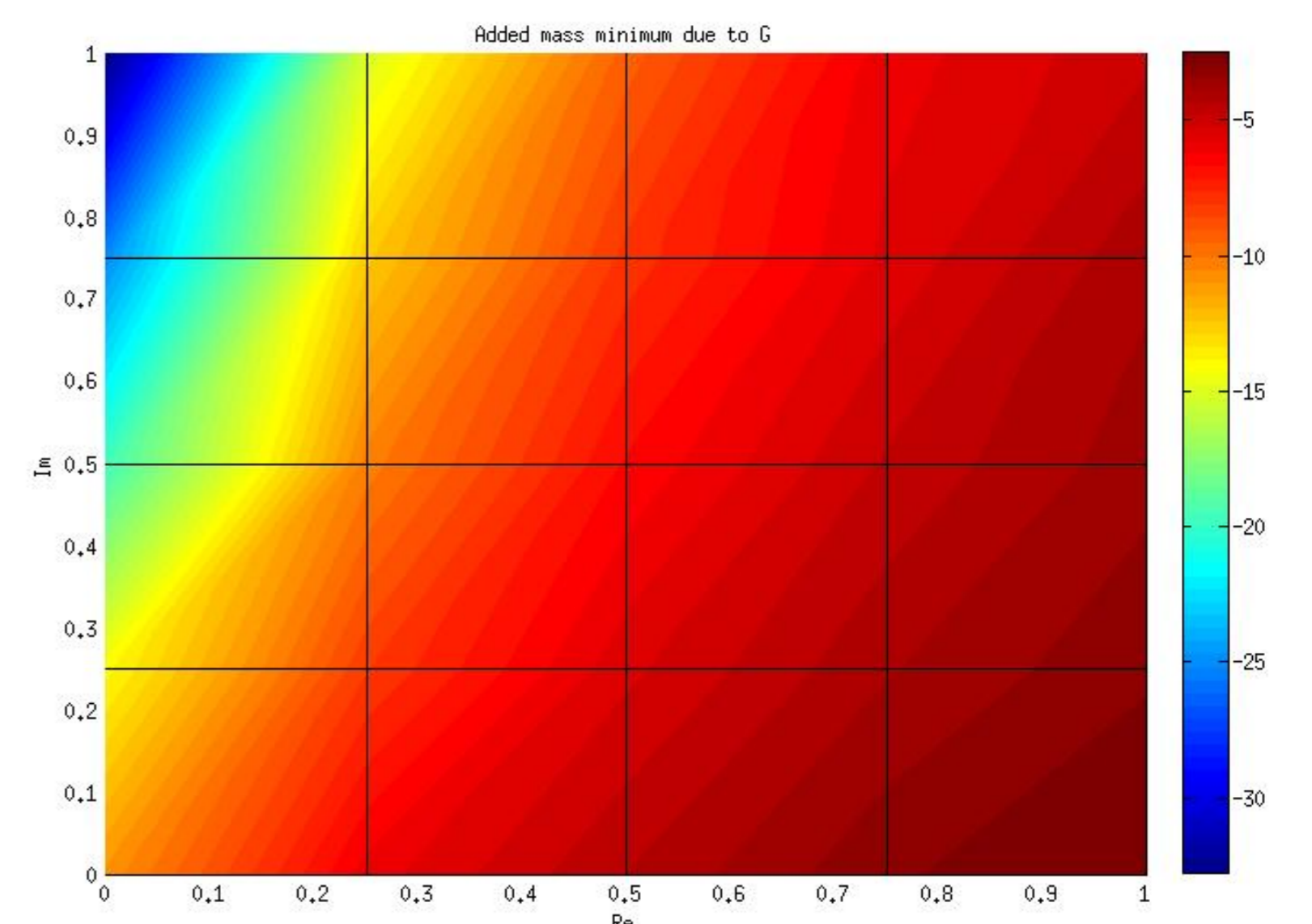


Figure 3: Mapa de cores dos mínimos da massa adicional com  $d=0.1$

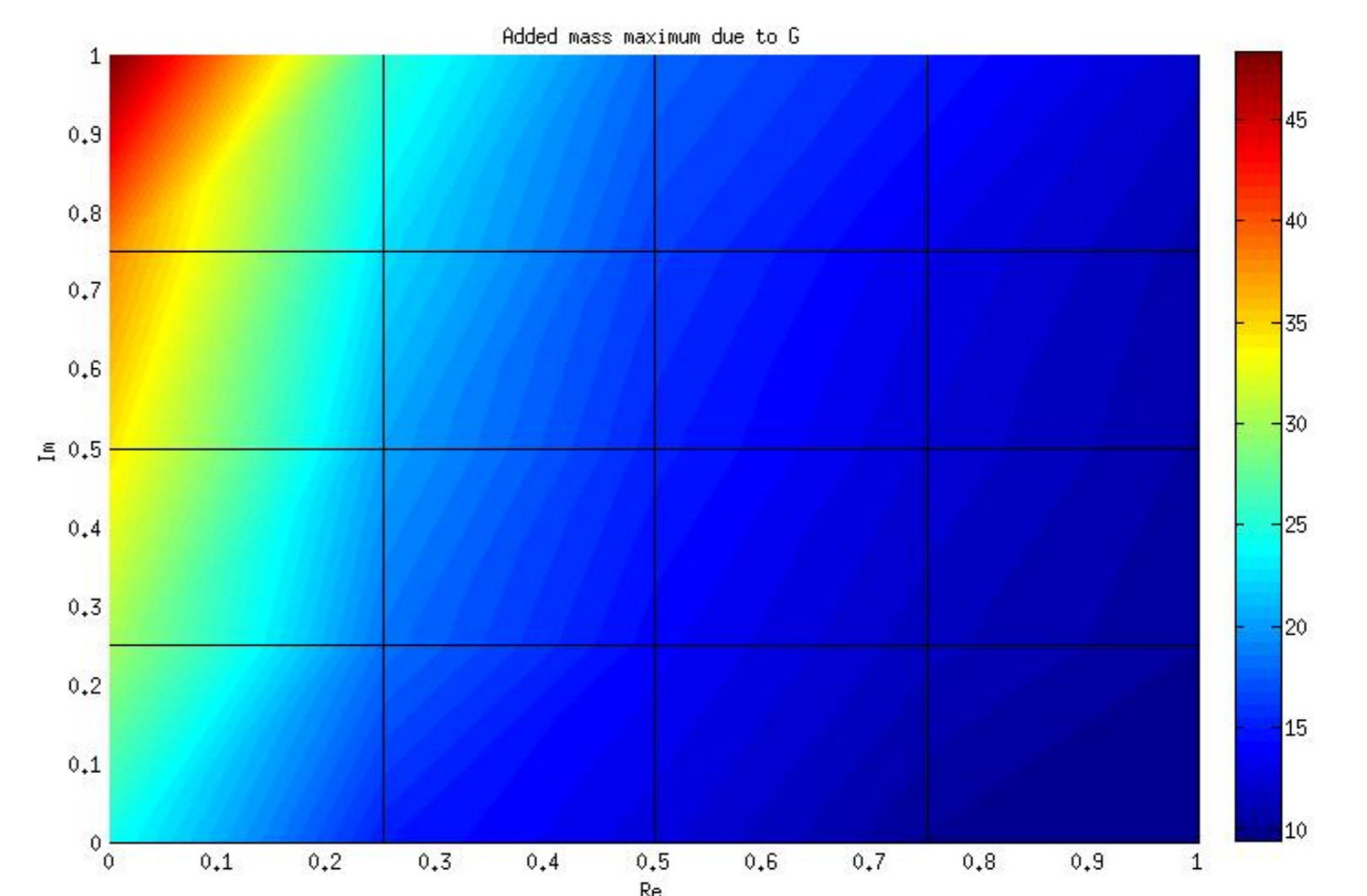


Figure 4: Mapa de cores dos máximos da massa adicional com  $d=0.1$

É interessante notar que mesmo com parâmetros mistos o maior dos máximos e o menor dos mínimos continuam a ocorrer quando  $G = i$ , que é um caso estudado anteriormente. Quando a parte real de  $G$  é nula, o aumento da parte imaginária faz com que os extremos se intensifiquem, mas quanto mais a parte real cresce, menor é a influência da parte imaginária no comportamento da massa adicional, i.e., a parte real é dominante no comportamento do parâmetro de porosidade  $G$ .

## Utilizando os resultados

Tendo como objetivo diminuir a ocorrência e os efeitos da ressonância, ao analisar os resultados do trabalho, podemos inferir que isso pode ser feito minimizando  $S$  em (5), ou seja, modelando discos finos e porosos que aproximem os casos em que  $G$  tem parte real dominante.

## References

- [1] X. Yu and A.T. Chwang, *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering* 120(2),1994
- [2] L. Farina and P.A. Martin, *Applied Ocean Research* 20(3):121-134,1998
- [3] R. Gayen, *Applied Ocean Research* 46:70-78,2014