

Ana Carolina Bof <sup>(a)</sup>, Prof. Dr. Pedro H. A. Konzen <sup>(b)</sup>

<sup>(a)</sup> Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

<sup>(b)</sup> Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística - Porto Alegre, RS, CEP 91501-970

{acbof6@gmail.com, pedro.konzen@ufrgs.br}

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho, que encontra-se em fase de desenvolvimento, buscamos comparar esquemas de quadraturas sobre a esfera unitária (assumindo simetria nas coordenadas  $\eta$  e  $\xi$ ) em problemas de transporte unidimensionais. Para tanto, pretendemos discutir sobre princípios fundamentais para a construção de tais quadraturas, como positividade dos pesos, invariância sobre rotações, entre outras. Também, buscaremos analisar o erro dos esquemas de quadratura e a comparação entre quadraturas de pesos iguais, do tipo de Lebedev, de construção geométrica e de construção via quadraturas iteradas.

Até o momento, trabalhamos na construção de quadraturas do tipo Legendre-Chebyshev [4] e a quadratura geométrica denominada Tessellation [5]. Neste pôster apresentamos a construção de tais quadraturas.

## CONTEXTO

Consideramos a equação de transporte radiativo, estacionária, em um meio cinza [3]:

$$\Omega \cdot \nabla I(r, \Omega, \nu) + (\sigma + \kappa)I(r, \Omega, \nu) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{S^2} I(r, \Omega', \nu) d\Omega' + \kappa Q, \Omega \in S^2,$$

onde  $I = I(r, \Omega, \nu)$  denota a intensidade radiativa associada à frequência  $\nu$  em um ponto  $r$  do domínio,  $S^2 := \{\Omega = (\mu, \eta, \xi); \mu^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1\}$  denota a esfera unitária e  $Q$  é uma fonte externa. Uma das técnicas mais empregadas para o estudo numérico desta equação é o chamado método de ordenadas discretas, o qual consiste em aproximar o termo integral por uma quadratura numérica apropriada e, então, expandir a equação do transporte em um sistema de equações diferenciais parciais nas direções discretas  $\Omega_i$  definidas pela quadratura. Mais especificamente, para problemas com geometria cartesiana unidimensional, a formulação de ordenadas discretas da equação de transporte é:

$$\mu \frac{dI_i}{dx} + (\sigma + \kappa)I_i = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{j=0}^{N-1} I_j \omega_j + \kappa Q, i = 0, 1, \dots, N-1,$$

onde  $\{(\mu_i, w_i)\}_{i=0}^{N-1}$  é o conjunto de pontos e pesos da quadratura numérica,  $N$  é a ordem da quadratura e  $I_i := I(x, \mu_i, \nu)$ . Desta forma, a formulação de ordenadas discretas depende da quadratura escolhida impactando na precisão da solução obtida [1,2].

## QUADRATURA LEGENDRE-CHEBYSHEV

Esse tipo de quadratura possui diferentes esquemas: o quadrangular ( $P_N T_N$ ) e o triangular ( $P_N T_N S_N$ ). Ambas têm seus pesos em termos dos pesos da quadratura de Gauss-Legendre  $\omega_i$ .

Para a quadratura quadrangular, temos  $N$  pontos associados a cada nível polar  $\xi$ . Determina-se os ângulos azimutais relacionados a  $\xi_i$  através da relação:

$$\bar{\omega}_j = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{N-2j+1}{N}\right), \text{ onde } j = 1, \dots, N.$$

A partir daí, calcula-se os pontos  $\mu_{ij} = \sqrt{1 - \xi_i^2} \cos \bar{\omega}_j$  e os pesos  $w_{ij} = \pi \frac{\omega_i}{N}$ , com  $i = 1, \dots, N/2$ . Dessa forma, encontramos  $M$  direções na esfera unitária, sendo  $M = 2(N \times N)$ , como pode ser visto na figura 1 a seguir.

Diferentemente da quadratura produto  $P_N T_N$ , na quadratura triangular temos um número de pontos diferente para cada nível polar  $\xi$ . Agora, então, os ângulos azimutais estão relacionados a  $\xi_i$  através da relação:

$$\bar{\omega}_{i,j} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{N-2j+1}{N-2i+2}\right),$$

onde  $i = 1, \dots, N/2$  e  $j = 1, \dots, N-2i+2$ .

A partir daí, calcula-se os pontos  $\mu_{ij} = \sqrt{1 - \xi_i^2} \cos \bar{\omega}_{i,j}$  e os pesos  $w_{ij} = \pi \frac{\omega_i}{N-2i+2}$ . Assim sendo, encontramos  $M$  direções na esfera unitária, sendo  $M = N(N+2)$ , mostradas na figura 2 a seguir.

Figura 1

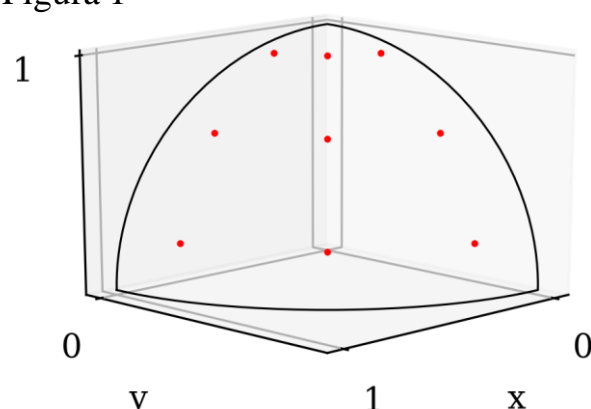
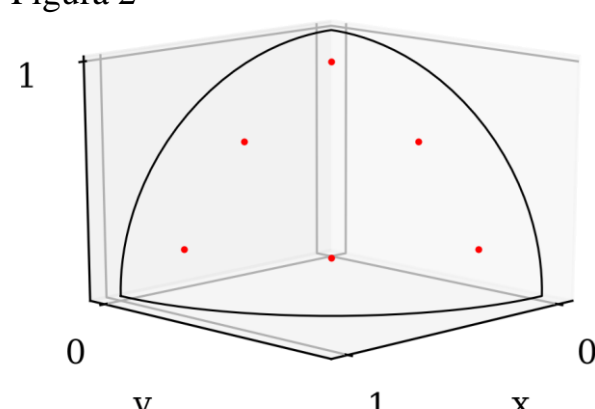


Figura 2



## QUADRATURA TESSELLATION

A quadratura Tessellation ( $T_N$ ) se resume em três etapas:

Primeiramente, projetamos o primeiro octante em um triângulo equilátero de vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ , conectando um ponto qualquer da esfera unitária ao centro da mesma. A intersecção da reta com o triângulo define o ponto projetado, sendo suas coordenadas:

$$x = \mu/(\mu + \eta + \xi), y = \eta/(\mu + \eta + \xi) \text{ e } z = \xi/(\mu + \eta + \xi).$$

Em seguida, dividimos o triângulo principal em vários triângulos menores, sendo seu comprimento  $1/N$  vezes o tamanho do triângulo maior. Cada direção é associada com um dos triângulos pequenos e passa pelo seu centroide, como podemos ver na figura 3.

A terceira etapa consiste em projetarmos os triângulos e seus respectivos pontos para a superfície da esfera unitária (fig. 4). Para isso, usaremos a projeção inversa:

$$\mu = x/\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}, \eta = y/\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \text{ e } \xi = z/\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Figura 3

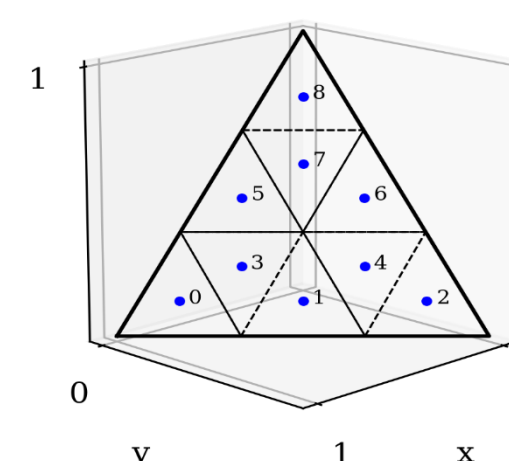
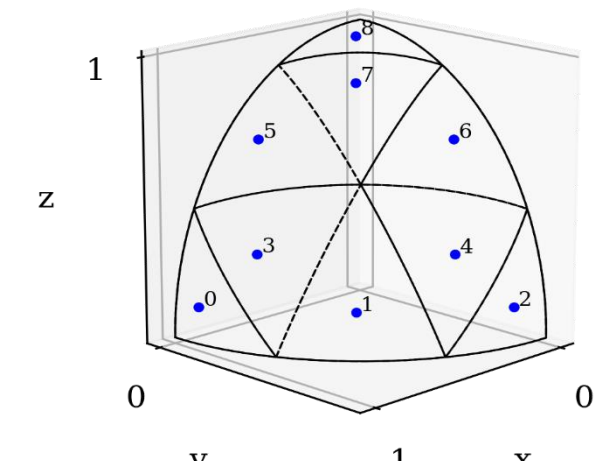


Figura 4



## COMENTÁRIOS FINAIS

Até o momento, logramos o desenvolvimento de códigos computacionais Python para a construção das quadraturas do tipo Legendre-Chebyshev (quadrangular e triangular), bem como da quadratura geométrica chamada Tessellation. Na sequência, buscaremos a implementação de quadraturas do tipo Lebedev. Então, iniciaremos nossos esforços na análise e comparação das quadraturas na aplicação de problemas de transporte.\*

## AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao CNPq pela bolsa PIBIC de Iniciação Científica.

<sup>1</sup> B. Hunterand Z. Guo, *Numerical smearing, ray effect, and angular false scattering in radiation transfer computation*, International Journal of Heat and Mass Transfer **81** (2015), 63–74.

<sup>2</sup> R. Kochand R. Becker, *Evaluation of quadrature schemes for the discrete ordinates method*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer **84** (2004), 423–435.

<sup>3</sup> M. F. Modest, *Radiative heat transfer*, Elsevier, NewYork, 2013.

<sup>4</sup> Tres, A., *Análise de Esquemas de Aproximações Angulares para a Equação de Transporte Bidimensional em Ordenadas Discretas via Formulações Nodais*, PPGMAP - UFRGS, 2015.

<sup>5</sup> Thurgood, C. P., Pollard, A., Becker, H. A., *Journal of Heat Transfer-transactions of The Asme*, 1995.

\* Estes códigos podem ser encontrados em <https://github.com/acbof/Transport>