Sistemas de Funções Iteradas com uma família qualquer de ramos

Marcus Vinícius da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Orientador: Jairo Krás Mengue
email: marcus423@gmail.com

Introdução

Este trabalho consiste do estudo de alguns tópicos de IFS (Sistemas de Funções Iteradas, na sigla em inglês) tendo por base um trabalho recente por Mengue e Oliveira, como: probabilidades holonômicas, entropia de uma probabilidade holonômica e pressão de uma função contínua.

Probabilidades Holonômicas, Entropia e Pressão

Sejam X e Z espaços métricos compactos. Para cada $x \in X$ é associado um mapa contrativo $\tau_x : Z \to Z$.

Definição 1 Uma probabilidade π é dita holonômica com respeito à família de mapas $\{\tau_x : x \in X\}$ se satisfizer

$$\int g(\tau_x(z))d\pi(x,z) = \int g(z)d\pi(x,z)$$

para toda função $g : Z \to Z$ contínua. O conjunto das probabilidades holonômicas é denotado por $\Pi(\tau)$.

Para uma probabilidade α sobre X e uma função $c(x,z)$ de Lipschitz é definido o operador $L_{c,\alpha} : C(Z) \to C(Z)$ por

$$L_{c,\alpha}(\psi)(z) = \int e^{c(x,z)}\psi(\tau_x(z))d\alpha(x).$$

Exemplo

Se $X = \{1,2,3,4\}$ e $\alpha = (p_1,p_2,p_3,p_4)$ então o operador $L_{c,\alpha}$ é dado por

$$L_{c,\alpha}(h)(z) = \sum_{i=1}^{4} e^{c(x_i,z)+\log(p_i)}h(\tau_{x_i}(z)).$$

Definição 2 Dado o operador $L_{c,\alpha}$, a entropia de uma probabilidade holonômica π relativa a α é dada por

$$H_\alpha(\pi) = -\sup\left\{\int c(x,z)d\pi : c \text{ é Lipschitz e } L_{c,\alpha}(1) = 1\right\}.$$

Da mesma forma, a pressão de uma função contínua c, relativamente a α, é definida por

$$P_\alpha(c) = \sup_{\pi\in\Pi(\tau)}\left[\int c d\pi + H_\alpha(\pi)\right].$$

Teorema 1 Existe um único autovalor positivo λ associado a uma autofunção h estritamente positiva para $L_{c,\alpha}$ e λ é igual ao raio espectral de $L_{c,\alpha}$ sobre $C(Z)$. A autofunção h associada a λ é única a menos de multiplicação por uma constante.

Definição 3 Dado o operador $L_{c,\alpha}$, tal que $L_{c,\alpha}(1) = 1$, o seu dual $L^*_{c,\alpha}$ é definido por

$$\int \psi(z)dL^*(P) = \int L(\psi)dP$$

Teorema 2 Existe uma única probabilidade ρ invariante pela ação do operador dual $L^*_{c,\alpha}$. Para toda função Lipschitz $u : Z \to \mathbb{R}$ tem-se que

$$L^n_{c,\alpha}(u) \to \int u d\rho$$

Se $L_{c,\alpha}(1) = 1$ a probabilidade $\pi \in P(X \times Z)$ definida por

$$\int g(x,z)d\pi = \int\int e^{c(x,z)}g(x,z)d\alpha(x)d\rho(z)$$

é chamada probabilidade holonômica associada à função c.

Teorema 3 (Princípio Variacional) Se c é de Lipschitz, então $P_\alpha(c) = \log(\lambda)$ onde λ é o único autovalor positivo associado a uma autofunção positiva h para $L_{c,\alpha}$. Se π é a probabilidade holonômica associada à função normalizada $\bar{c} := c + \log(h \circ \tau_x) - \log(h) - \log(\lambda)$, então

$$P_\alpha(c) = \int c d\pi + H_\alpha(\pi)$$

Referências

MENGUE, Jairo K. *Tópicos de Álgebra Linear e Probabilidade*. 4º Colóquio de Matematica da Regiao Sul, SBM, 2016.

MENGUE, Jairo K.; OLIVEIRA, Elismar R. *Duality Results for Iterated Function Systems with a general family of branches*. *Stoch. Dyn.* 17, 1750021 (2017).