Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff

Eduardo David Nonnenmacher
Orientador: Vilmar Trevisan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

INTRODUÇÃO

A Teoria Espectral de Grafos busca analisar propriedades estruturais dos grafos através de matrizes e de seus autovalores. Embora a teoria tenha começado em meados do século XX, o teorema da Matriz-Árvore é reconhecido como um de seus primeiros resultados. Publicado por Kirchhoff em 1847, o teorema conecta diversos conceitos fundamentais da teoria matricial e da teoria de grafos. Ainda que tenha sido originalmente aplicado por Kirchhoff em seus estudos sobre circuitos elétricos, o resultado é de vasta aplicabilidade. O teorema relaciona o numéro de árvores geradoras de um grafo com o determinante de qualquer menor principal de ordem $n-1$ da matriz laplaciana. A prova que será apresentada neste trabalho utilizará como recurso multigrafos, é evidente que o resultado é válido para grafos simples pois esses são casos particulares de multigrafos.

O TEOREMA

Um **multigrafo** é um estrutura $G=(V,E)$, sendo V o conjunto dos vértices e E o multiconjunto das arestas, onde se $e \in E$ então $e=\{u,v\}$ sendo $u,v \in V$ com $u \neq v$. Com exceção das aplicações todo grafo referido neste trabalho é um multigrafo finito. Note que caso a multiplicidade de qualquer elemento de E for igual a 1 então obtemos um grafo simples, ou seja sem arestas múltiplas. Seja D a matriz diagonal dos vértices de um grafo G (ou seja, a matriz D tal que $(D)_{ii}$ é o grau do i-ésimo vértice de G) e seja A a matriz de adjacência de G. A matriz $L=D-A$ é chamada a **matriz laplaciana** do grafo G.

Chamamos por **árvore geradora** o subgrafo $H(V',E')$ tal que $E' \subset E$ e $V'=V$, onde H é conexo e não possui ciclos, laços e arestas múltiplas. Denotamos por $\tau(G)$ o número de árvores geradoras do grafo G. Denotamos por $G \setminus e$ o grafo obtido de G retirando-se uma aresta e e por G/e o grafo obtido de G contraindo uma aresta e removendo qualquer laço produzido, no entanto mantendo as arestas múltiplas.

O Teorema da Matriz-Árvore. Seja G um grafo e $L(G)$ a sua matriz laplaciana. Seja u um vértice arbitrário de G. Seja $L(G)_u$ o menor principal de $L(G)$ retirando-se a linha e a coluna correspondente ao vértice u, então $\det(L(G)_u)$ é igual ao número de árvores geradoras de G.

APLICAÇÕES

A **Fórmula de Kirchhoff**, publicada em 1847, descreve a condutância efetiva de circuitos elétricos resistivos lineares. Representamos o circuito por um grafo G e definimos o conjunto $C=\{c_e \mid e \in E\}$ onde c_e é a condutância da aresta e. Seja $c^T = \prod_{e \in T} c_e$, definimos o polinômio chamado enumerador de árvore geradora por $T(G;C) = \sum_{T \in \tau(G)} c^T$. Seja y_{ab} a condutância efetiva entre os vértices a e b, a fórmula de Kirchhoff afirma

$$y_{ab}(G;C) = \frac{T(G;C)}{T(G/ab;C)}.$$

A afirmação é provada por Kirchhoff essencialmente usando o teorema da Matriz-Árvore e a regra de Cramer.

Como corolário do teorema da Matriz-Árvore temos que $\tau(G) = n^{-2}\det(J+L)$, onde J é a matriz com todas as entradas iguais a 1. Como L e J comutam, é possível mostrar que os autovalores de $J+L$ são a soma dos correspondentes autovalores de L e J. Como o determinante é o produto dos autovalores, obtemos

$$\tau(G) = \frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1}}{n}.$$

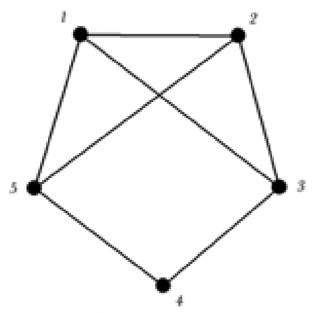
Como L é singular, pois suas colunas somam zero, concluí-se que se G é conexo a multiplicidade do autovalor 0 é igual a 1. Caso G for desconexo, analisando as submatrizes de L correspondente a cada componente, deduzi-se que a multiplicidade do autovalor 0 é igual ao número de **Componentes Conexas** do grafo.

O operador matricial $U_L(t) = \exp(itL)$ representa um **Quantum Walk** em tempo contínuo em G. Dizemos que G admite transferência laplaciana perfeita de estado de um vértice u para o vértice v se existe $t \geq 0$ e $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que

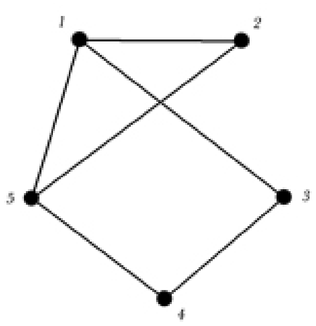
$$U_L(t)\mathbf{e_u} = \gamma \mathbf{e_v}.$$

É possível mostrar que para qualquer grafo a tranferência laplaciana perfeita de estado não pode acontecer entre vértices gêmeos com um ou dois vizinhos em comum. Então, aplicando o teorema da Matriz-Árvore, mostra-se que tal fenômeno em árvores poderá acontecer apenas entre vértices gêmeos. Portanto, a única árvore que permite transferência laplaciana perfeita de estado é o caminho entre dois vértices.

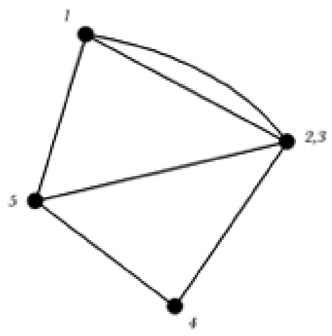
DEMONSTRAÇÃO



$\det(L_u(G)) = 24$



$\det(L_u(G \setminus e)) = 11$



$\det(L_v(G/e)) = 13$

O teorema será provado por indução em $m=|E|$. Seja e uma aresta de G, então cada árvore geradora de G ou contém e ou não contém. Há uma bijeção entre as árvores geradoras de G que não contém e e as árvores geradoras de G/e, portanto há $\tau(G/e)$ árvores geradoras que não contém e. As demais árvores serão contadas por $\tau(G \setminus e)$. Segue que,

$$\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e). \tag{1}$$

Seja e={u,v}, a matriz laplaciana $L(G)$ difere em exatamente quatro entradas em relação a matriz $L(G \setminus e)$, correspondentes a aresta e. Ao retirarmos as entradas correspondentes ao vértice u obtemos que $L_u(G)$ difere de $L_u(G \setminus e)$ em apenas uma entrada, sendo $(L_u(G))_{vv} = (L_u(G \setminus e))_{vv} + 1$. Avaliando $L_u(G)$ por expansão de Laplace na linha correpondente ao vértice v, obtemos

$$\begin{aligned}\det(L_u(G)) &= \sum_{r \in V \setminus v} l_{vr}\det(L_{ur}(G)) + (l_{vv}-1)\det(L_{uv}(G)) + \det(L_{uv}(G)) \\ &= \det(L_u(G \setminus e)) + \det(L_{uv}(G)).\end{aligned}$$

Como $L(G/e)$ tem as linhas e colunas indexadas por $V(G) \setminus \{u,v\}$ com entradas xy iguais a $(L(G))_{xy}$, temos que $L_v(G/e) = L_{uv}(G)$. Então

$$\det(L(G)_u) = \det(L_u(G \setminus e)) + \det(L_v(G/e)).$$

Por indução, $\det(L_u(G \setminus e)) = \tau(G \setminus e)$ e $\det(L_v(G/e)) = \tau(G/e)$; segue de (1) a conclusão da prova do teorema.

REFERÊNCIAS

[1] N. Abreu, R Del-Vecchio, V. Trevisan, C. Vinagre, *Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução*, III° Colóquio de matemática da Região Sul, Florianópolis, SC, 2014.

[2] David G. Wagner, *Combinatorics of Electrical Networks*, Department of Combinatorics and Optimization University of Waterloo, Ontario, Canada N2L 3G1, 2009.

[3] Chris Godsil, Gordon Royle, *Algebraic Graph Theory* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.

[4] Gabriel Countinho, Henry Liu, *No Laplacian Perfect State Transfer in Trees*, Department of Combinatorics and Optimization University of Waterloo, Ontario, Canada, August 14, 2014.