

ONDAS ÍON-ACÚSTICAS NÃO LINEARES EM PLASMAS QUÂNTICOS

Aluno: Luan Costa da Costa Orientador: Fernando Haas
Instituto de Física - UFRGS

Introdução

A física de plasmas analisa a dinâmica das interações entre partículas carregadas, interações essas que criam fenômenos coletivos como ondas, que são o tópico principal do presente trabalho. Como estamos interessados em trabalhar com plasmas densos, devemos considerar os efeitos quânticos associados, e visto que a abordagem utilizada foi a de plasmas como fluidos, as equações que modelam o problema são oriundas da teoria da hidrodinâmica quântica [1].

Consideremos as bem conhecidas equações da continuidade e da conservação do momentum

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial n_s u_s}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} = -\frac{1}{m_s} \left(q_s \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{n_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} \right),$$

em que o subíndice s indica que as equações são válidas para cada espécie do plasma (no caso, $s = e$ para elétrons e $s = i$ para íons), p_s é a pressão relativa à espécie s e sendo q_s a carga da espécie s , aliadas à equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e - n_i).$$

Buscamos resolver o problema para as quantidades físicas densidade n_s , velocidade u_s , e potencial elétrico ϕ . A quantidade Q_s é o chamado potencial quântico, ou potencial de Bohm (associado aos efeitos de difração quântica), e é dado por

$$Q_s = -\frac{\hbar^2}{2m_s} \frac{1}{\sqrt{n_s}} \frac{\partial^2 \sqrt{n_s}}{\partial x^2}.$$

Nas equações acima, temos m_s como a massa associada à espécie s , e como a carga fundamental do elétron, \hbar como a constante de Planck reduzida e ε_0 como a permissividade elétrica no vácuo.

Desenvolvimento

No presente trabalho, estudamos as ondas íon-acústicas em dois casos limite: um plasma diluído (baixa densidade) e um plasma completamente degenerado. Como sabemos as equações de estado para cada um desses casos, podemos encontrar a pressão $p(n_s)$ e substituir nas equações. Em cada caso, obtemos, após algumas manipulações (e após considerarmos que as dependências com a posição e o tempo são da forma $\xi = x - Mt$ - com M fazendo o papel de número de Mach do problema), um sistema de duas equações diferenciais ordinárias (EDO's) não lineares que envolvem as variáveis $\phi(\xi)$ e $A(\xi) = \sqrt{n_e(\xi)}$, variáveis essas que passamos para a forma adimensional. Para o caso diluído, temos:

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = \frac{2A}{H^2} (2 \ln A - \phi), \\ \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = A^2 - \frac{M}{\sqrt{M^2 - 2\phi}}.$$

Já no caso completamente degenerado, o sistema é o seguinte:

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = \frac{3A}{H^2} (A^{\frac{4}{3}} - 1 - 2\phi), \\ \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = A^2 - \frac{M}{\sqrt{M^2 - 2\phi}}.$$

O fator H que aparece nas equações acima é um parâmetro adimensional que quantifica os efeitos de difração quântica. Foram esses dois sistemas de EDO's que nos permitiram fazer uma análise mais profunda do problema físico em questão, e essa análise foi feita de duas maneiras em cada um dos casos: utilizando-se do método de estabilidade linear, ou usando o chamado método do potencial de Sagdeev.

Potencial de Sagdeev

O método se baseia em tentar encontrar uma função $U(\phi)$ tal que tenhamos

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}.$$

Como primeira correção quântica, podemos obter $U(\phi) = U_0(\phi) + H^2 U_1(\phi)$, sendo $U_0(\phi)$ e $U_1(\phi)$ funções obtidas separadamente. Uma das principais informações que retiramos do cálculo desse potencial é a da possível estabilidade de uma certa solução. Por exemplo, vemos na figura abaixo a primeira aproximação do potencial de Sagdeev - $U_0(\phi)$ - para o caso diluído.

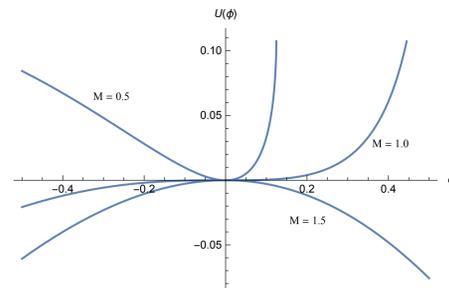


Fig. 1: Três curvas que representam potenciais para diferentes valores de parâmetro M

A única curva que representa um sistema com solução estável é aquela na qual $M = 0.5$. O sistema possui quantidades que crescem indefinidamente para infinito nos outros dois casos. É interessante observar que isso pode ser obtido numericamente resolvendo as equações para $H = 0$ e variando M .

Estabilidade Linear

Utilizando-se do método da estabilidade linear, obtemos condições para soluções estáveis dependendo dos parâmetros do problema. Por exemplo, no caso do plasma diluído, com $M = 1.5$, obtemos uma condição de estabilidade do tipo $H^2 > f(M)$, sendo f uma função do parâmetro M . Assim, sabendo que $f(1.5) \approx 61.7$, temos que um sistema em que $H^2 = 59$ possui uma solução $\phi(\xi)$ instável; já quando $H^2 = 63$, devemos ter $\phi(\xi)$ estável. Podemos verificar a exatidão desse resultado analítico através das simulações numéricas.

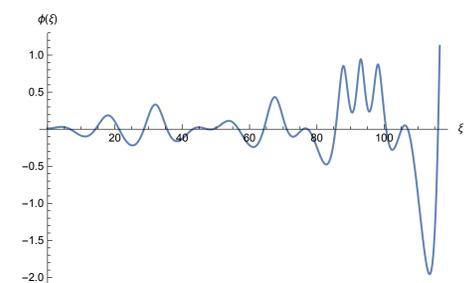


Fig. 2: Solução instável ($H^2 = 59$)

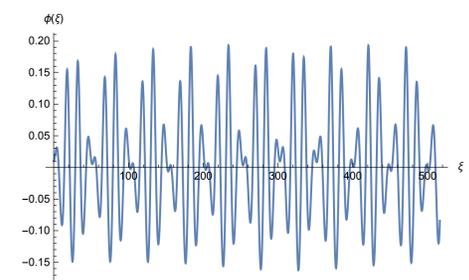


Fig. 3: Solução estável ($H^2 = 63$)

Conclusão

Nesse trabalho, desenvolvemos os métodos do potencial de Sagdeev e da estabilidade linear, buscando analisar o sistema de EDO's de interesse, envolvendo o potencial elétrico e a densidade de elétrons em um plasma quântico.

Buscou-se trabalhar com os dois métodos pois, enquanto que o potencial de Sagdeev nos permite acessar ondas não lineares, porém utilizando valores de H não muito grandes, com o método da estabilidade linear pode-se obter ondas lineares através do uso de valores de H maiores. As simulações numéricas confirmaram as estimativas analíticas.

Agradecimentos

Agradecemos a agência brasileira CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] F. Haas, *Quantum Plasmas, an Hydrodynamic Approach* (Springer-Verlag New York, 2011)