Teoria de Espaços Girovetoriais

Espaços Vetoriais

O que vem a ser um vetor? Por definição, dizemos que é um vetor, aquilo que for elemento de algum espaço vetorial. Para a maioria dos propósitos é comum que nem nos façamos esta pergunta, visto que pelo hábito - talvez vício - somos capazes de mecanicamente identificar certos objetos como vetores, ao ponto de, por vezes, nos darmos a liberdade de confundir os significados das palavras.

É ágil interpretar u-plas do $\mathbb{R}^n$, matrizes $nx1$, letras sotopostas a setas, as imagens das setas em si, somas entre múltiplos de "i"s, "j"s e "k"s, todos como vetores. Em geral, esta interpretação faz sentido, mas mais do que isso: é frequente que esteja associado a esta um certo caráter geométrico, posto que os conjuntos que contém as famílias destes objetos têm em comum sua forma, que é a do espaço euclidiano (variando-se às vezes a dimensão).

Neste caso, entende-se que de certo modo é possível estabelecer um elo entre a geometria euclidiana e a álgebra, que dizemos álgebra linear. Assim é que usamos as ferramentas que obtemos da segunda (a álgebra linear), para inferir resultados sobre a primeira (a geometria euclidiana), e mais: este uso mostra-se bastante proveitoso, como atestado pelo fato de que a ele recorremos com frequência. Talvez com algum exagero se possa conceber, portanto, que alguma parcela da teoria dos espaços vetoriais compõe uma espécie de exoesqueleto algébrico à geometria de euclides, e - agora sem exagero algum - que isto é benéfico.

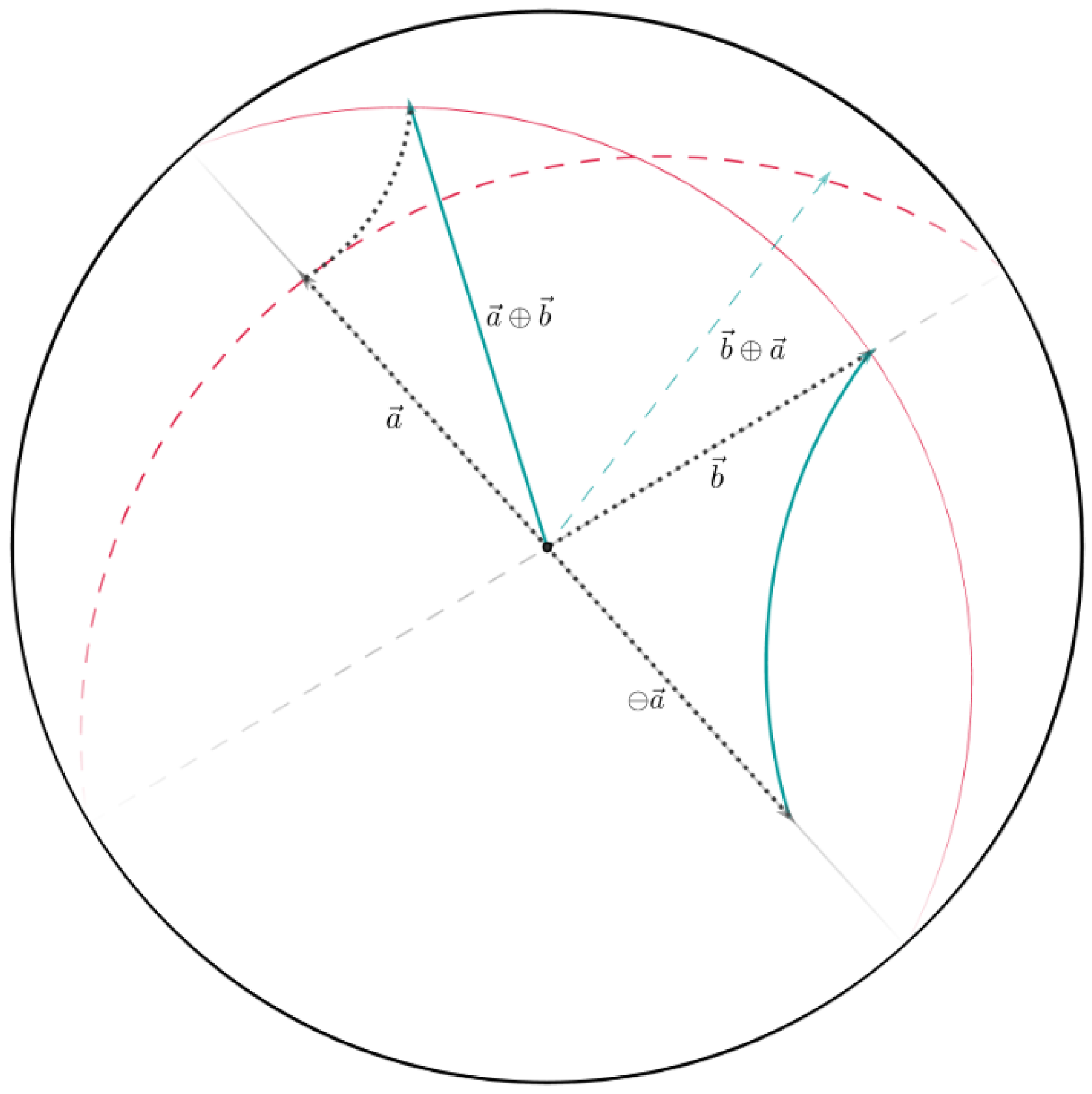
Espaços Girovetoriais

Sugere-se então a seguinte pergunta: existirá para a geometria hiperbólica alguma espécie de estrutura algébrica conveniente, pelo meio da qual possamos trabalhá-la de maneira análoga ao que percebemos no caso da geometria euclidiana e dos espaços vetoriais?

Respondemos que sim. Não é imediato que se devesse esperar uma resposta afirmativa; menos ainda que seja evidente a natureza desta estrutura. Mas há. Emerge a custo de propriedades bastante fundamentais, como a comutatividade da adição, ou a associatividade, e ainda assim, se mostra útil, produtiva.

Construção

Pensemos um pouco mais na correspondência entre alguns espaços vetoriais e o espaço euclidiano, manifesta na maneira como concebemos os vetores em si. Uma maneira de construí-los é a seguinte: primeiro, consideramos o conjunto de todos os segmentos do espaço; da natureza dos elementos deste conjunto pretendemos que os vetores herdem o que chamamos de magnitude, e de direção.



Depois, tomamos um conjunto um pouco mais sofisticado, o de todos os segmentos orientados. Da orientação, queremos o sentido.

A cada um destes segmentos orientados, corresponde uma translação (a que leva um extremo no outro, conforme a orientação). A função que a cada um deles associa a devida translação, porém, não é injetora.

Por isso, podemos quocientar o conjunto decidindo que dois elementos se equivalem se as translações correspondentes são as mesmas. As classes que obtemos, podemos entender por vetores, e é conveniente observar que se associam uma a uma às translações euclidianas. Mais do que isso: que faz sentido considerar apenas os representantes cujo o primeiro extremo é um ponto arbitrário O qualquer, como usualmente se faz.

Isto conduz uma construção semelhante no caso hiperbólico, e avançamos sem complicações até a construção do conjunto dos segmentos orientados. Neste caso, queremos associar a cada um destes objetos à translação que leva, novamente, um de seus extremos no outro, respeitando a orientação, e fixando a reta suporte do segmento. É importante essa última exigência, porque em geometria hiperbólica há diversas translações que levam um ponto em outro, isto é: um ponto não é o suficiente para determinar uma translação. Observada alguma reta, passa a ser. A associação, por outro lado, passa a ser *bijetora*, e decorre que a ferramenta do quociente do caso anterior, que tanto simplifica o estudo, não está mais disponível.

A alternativa, portanto, está em observar o seguinte: se fixamos um ponto hiperbólico O, as translações ao longo de retas que contenham O são suficientes para gerar, sob a composição, quaisquer outras translações hiperbólicas. Neste caso, mesmo não concebendo vetores equipotentes, temos esperança de construir um estudo mais simples, acessível, do que o estudo das composições em si. Este estudo, dizemos ser o estudo dos *girovetores*.

$\mathrm{gyr}[,]$

É importante notar que enquanto a adição de vetores em geometria euclidiana emula a composição de translações euclidianas, que é comutativa, a adição de girovetores emula a composição de translações que não comutam entre si, e portanto, também não comuta. Pior do que isso: não é *objetivamente* uma representação alternativa da composição, tanto é que sequer associa.

A solução reside na introdução de um operador a mais na estrutura (denotado $\mathrm{gyr}[,]$), dotado de algumas propriedades, das quais destacamos a giroassociatividade:

$$\vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}) = (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \mathrm{gyr}[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$$

e a girocomutatividade:

$$\vec{a} \oplus \vec{b} = \mathrm{gyr}[\vec{a}, \vec{b}](\vec{b} \oplus \vec{a})$$

Sob as quais é possível deduzir uma quantia apreciável de teoria, atestando a funcionalidade da proposta ao cumprir o papel de análogo à teoria dos espaços vetoriais, isto é, confirmando a alegação de Ungar, responsável pelo conceito:

"Sendo a generalização natural dos grupos e espaços vetoriais, girogrupos e espaços girovetoriais constroem uma ponte frutífera entre a álgebra não-associativa e a geometria hiperbólica, assim como os grupos e espaços vetoriais constroem uma ponte frutífera entre a álgebra associativa e a geometria Euclidiana."

Expressões

Se pensamos no plano hiperbólico por meio do modelo do disco de Poincaré, de forma que representamos nossos pontos pelos elementos de $\mathbb{R}^2$ cuja distância à origem é menor do que um, e escolhemos para O o ponto $(0,0)$, então podemos expressar nossa adição por:

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = \frac{(1 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|)\vec{u} + (1 - |\vec{u}|)\vec{v}}{(1 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{u}||\vec{v}|)}$$

Naturalmente, precisamos de um novo produto entre os escalares e os vetores, um que corresponda a esta adição, se esperamos propriedades naturais, como: que somar um vetor a si mesmo seja o mesmo que dobrá-lo. A multiplicação apropriada se dá por:

$$r \otimes \vec{v} = \tanh(r \tanh^{-1}(|\vec{v}|))\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Não é nada evidente que estas expressões correspondam ao raciocínio anterior. A verificação envolvida não é trivial. Em todo caso, essas expressões permitem relacionar a teoria usual de espaços vetoriais, com a dos girovetores, e são uma das formas de interpretar, perceber o significado, do aparato algébrico que se constrói.

Referências

- Ungar, A. *A Gyrovector Space Approach to Hyperbolic Geometry*, Morgan & Claypool, 2009

William Matheus Michel Braucks
braucks.w@gmail.com
Universidade Federal do Rio Grande do Sul